UFA - poskusna domača naloga

Benjamin Benčina, 27192018

9. januar 2021

Ex. 1: Naj bo X normiran prostor, $M \subseteq X$ in $N \subseteq X^*$. Definiramo

$$M^0 = \{f \in X^*;\ |f(x)| \le 1 \quad \forall x \in M\}$$
$$N^0 = \{x \in X;\ |f(x)| \le 1 \quad \forall f \in N\}$$

Označimo z $B_r^X \subset X$ in $B_r^{X^*} \subset X^*$ zaprti krogli radija r.

(a) Dokažimo, da velja $\left(B_r^X\right)^0 = B_{1/r}^{X^*}$ in $\left(B_r^{X^*}\right)^0 = B_{1/r}^X$.

- Najprej računamo

$$\left(B_r^X\right)^0 = \left\{f \in X^*;\ |f(x)| \le 1 \forall x \in B_r^X\right\} \supseteq \left\{f \in X^*;\ ||f|| \cdot ||x|| \le 1 \forall x \in B_r^X\right\} = B_{1/r}^{X^*}$$

  Obratno vzemimo $f \in \left(B_r^X\right)^0$, torej $|f(x)| \le 1$ za vsak $||x|| \le r$. Po homogenosti je $|f(y)| \le \frac{1}{r}$ za vsak $||y|| \le 1$. Sledi, da je $f \in B_{1/r}^{X^*}$.

- Povsem analogno računamo

$$\left(B_r^{X^*}\right)^0 = \left\{x \in X;\ |f(x)| \le 1 \forall f \in B_r^{X^*}\right\} \supseteq \left\{x \in X;\ ||f|| \cdot ||x|| \le 1 \forall f \in B_r^{X^*}\right\} = B_{1/r}^X$$

  Obratno vzemimo $x \in \left(B_r^{X^*}\right)^0$, torej $|f(x)| \le 1$ za vsak $||f|| \le r$. Po homogenosti je $|g(x)| \le \frac{1}{r}$ za vsak $||g|| \le 1$. Sledi, da je $x \in B_{1/r}^X$.

(b) Naj bo sedaj $M \le X$.

- Najprej pokažimo, da je $M^0 = \{f \in X^*;\ f(x) = 0 \quad \forall x \in M\}$.
  Po definiciji je $M^0 = \{f \in X^*;\ |f(x)| \le 1 \forall x \in M\}$. Ampak M je podprostor, zato je zaprt za množenje s skalarji. Če za nek $x \in M$ velja $|f(x)| = \alpha \le 1$ in $\alpha \ne 0$, potem $|f(\frac{n}{\alpha}x)| = n$, kar pa se seveda ne sme zgoditi. Zato je mora za vse $f \in M^0$ veljati, da $|f(x)| = 0$ za vse $x \in M$, kar pa je ekvivalentno želenemu.
- Pokažimo še, da je M gost podprostor v $X \iff M^0 = \{0\}$.
  Privzemimo najprej, da je M gost podprostor v X in vzemimo $f \in M^0$. Zaradi zveznosti f je po prejšnji točki $f(x) = 0$ za vse $x \in X$, torej je $f \equiv 0$.
  Obratno, če je edini funkcional, ki je ničelen na celem M, le ničelni funkcional, potem je $M^\perp = \{0\}$ in zato $\overline{M} = X$.

Ex. 2: Naj bo X Banachov prostor in $Y, Z \le X$ zaprta podprostora s trivialnim presekom. Dokažimo, da je $Y + Z$ zaprt podprostor $\iff$ obstaja $C > 0$, da je $||y|| \le C||y + z||$ za vse $y \in Y$ in $z \in Z$.

- ($\Longrightarrow$): Če je $Y + Z = Y \oplus Z$ zaprt podprostor, potem je Banachov. Sledi, da je $\mathrm{pr}_y \colon y \oplus z \mapsto y$ zvezna preslikava, kar je ekvivalentno zgornjemu pogoju.

- (<u>$\Longleftarrow$</u>): Naj bo $(y_n \oplus z_n)_n \to x$ konvergentno zaporedje v $Y \oplus Z$. Po predpostavki sta obe zaporedji na komponentah konvergentni, torej $y_n \to y$ in $z_n \to z$. Ker sta Y in Z zaprta podprostora, je $y \in Y$ in $z \in Z$. Zaradi enoličnosti limite je $x = y \oplus z \in Y \oplus Z$.

<u>**Ex. 3:**</u> Naj bosta A in B normalna operatorja na Hilbertovem prostoru H.

(a) Dokažimo, da je $AB = 0 \iff BA = 0$.

Zaradi simetrije trditve je dovolj dokazati le eno implikacijo. Naj bo $AB = 0$. Oglejmo si naslednji izraz

$$B^*BAA^* = BB^*A^*A = B(AB)^*A = 0$$

Od tod sledi, da je $\operatorname{im} AA^* \subseteq \ker B^*B = \ker B$. Sledi, da je $BAA^* = 0$ in dualno $AA^*B^* = 0$. Od tod zopet sledi $\operatorname{im} B^* \subseteq \ker AA^* = \ker A^*$. Torej $A^*B^* = 0$, oziroma ekvivalentno $BA = 0$.

(b) Naj bosta dodatno A, B neničelna operatorja, ki zadoščata $AB = 0$. Pokažimo, da A in B nista niti injektivna niti surjektivna.

Ker $AB = 0$, je $\operatorname{im} B \subseteq \ker A$. Če je A injektiven, mora biti B ničelen, torej A ni injektiven. Če je B surjektiven, mora biti A ničelen, torej B ni surjektiven. Po točki (a) veljata tudi izjavi z zamenjanima operatorjema A in B.

<u>**Ex. 4:**</u> Naj bo H Hardyjev prostor na odprtem enotskem disku $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$:

$$H = \left\{ f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C} \text{ analitična; } \sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty \right\}$$

opremljen s skalarnim produktom

$$\langle f, g \rangle_H = \sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \overline{g(re^{i\theta})} d\theta$$

s pripadajočo normo $||.||_H$.

(a) Uporabimo Cauchyjevo integralsko formulo in dokažimo, da za vsak $z \in \mathbb{D}$ velja

$$|f(z)| \leq ||f||_H \frac{1}{\sqrt{1 - |z|^2}}$$

Spomnimo se Cauchyjeve formule, ki pravi, da za vsak $a \in \mathbb{D}$ velja

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\omega)}{\omega - a} d\omega$$

kjer je $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ kompleksni torus (običajna oznaka iz harmonične analize). Standardno definiramo tudi $f_r(z) = f(rz)$ in $f^*(z) = \lim_{r\to 1} f_r(z)$. Računamo

$$f(z) = \lim_{r\to 1} f_r(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(w)}{w - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f^*(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} ie^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}} dm(\theta)$$

Ker velja

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{|1 - ze^{-i\theta}|^2} dm(\theta) \leq \frac{1}{1 - |z|^2},$$

lahko s CSB ocenimo

$$|f(z)| \leq ||f^*||_{L^2(\mathbb{T})} \frac{1}{\sqrt{1 - |z|^2}} = ||f||_H \frac{1}{\sqrt{1 - |z|^2}}$$

(b) Dokažimo, da za vsak $z \in \mathbb{D}$ obstaja taka funkcija $f_z \in H$, da za vsak $f \in H$ velja

$$\langle f, f_z \rangle_H = f(z).$$

(c) Za vsak $z \in \mathbb{D}$ bi radi določili predpis funkcije f_z.

Točki (b) in (c) naredimo hkrati. Konkretno, pokažimo, da

$$f_z(\omega) = \frac{1}{-i} \frac{1}{\overline{\omega - z}}$$

ustreza zahtevi. Najprej računamo

$$\langle f, f_z \rangle_H = \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \frac{1}{i} \frac{1}{re^{i\theta} - z} d\theta = f(z)$$

po Cauchyjevi formuli. Potrebujemo še $f_z \in H$. Spet le računamo

$$\begin{aligned} ||f_z||_H &= \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_z(re^{i\theta})|^2 d\theta = \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|re^{i\theta} - z|^2} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|e^{i\theta} - z|^2} d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - |z|^2} d\theta = \frac{1}{1 - |z|^2} < \infty \end{aligned}$$

Ex. 5: Naj bo H Hilbertov prostor in $T \colon H \to H$ linearen operator. Dokažimo, da sta naslednji trditvi ekvivalentni.

(a) Obstaja linearen operator $S \colon H \to H$, ki zadošča $\langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ za vsak $x, y \in H$.

(b) Operator T je zvezen.

- $(b) \implies (a)$: Vzamemo $S = T^*$.
- $(a) \implies (b)$: Dokažimo, da je graf operatorja T zaprt. Po izreku o zaprtem grafu bo operator T zvezen. Naj bo $(x_n)_n \to x$ konvergentno zaporedje in naj $(Tx_n)_n \to y$. Želimo pokazati, da je $Tx = y$. Računamo

$$\langle Tx, z \rangle = \langle x, Sz \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle x_n, Sz \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle Tx_n, z \rangle = \langle y, z \rangle$$

kjer upoštevamo zveznost skalarnega produkta in $z \in H$ poljuben. Ta formulacija je ekvivalentna naši po dveh konjugiranjih. Od tod sledi, da je $\langle Tx - y, z \rangle = 0$ za vsak $z \in H$, torej $Tx = y$. Graf operatorja T je torej zaprt.