UFA
Poskusna domača naloga

1. Naj bo X normiran prostor, M podmnožica X in N podmnožica X^*. Definirajmo:

$$M^0 := \{f \in X^* \mid |f(x)| \leq 1 \ \forall x \in M\}$$
$$N^0 := \{x \in X \mid |f(x)| \leq 1 \ \forall f \in N\}$$

Označimo $B_r^X = \{x \in X \mid \|x\| \leq r\}$ in $B_r^{X^*} = \{f \in X^* \mid \|f\| \leq r\}$.

(a) Dokaži, da velja $(B_r^X)^0 = B_{1/r}^{X^*}$ in $(B_r^{X^*})^0 = B_{1/r}^X$.

(b) Naj bo M podprostor X.

(i) Dokaži, da je tedaj $M^0 = \{f \in X^* \mid f(x) = 0 \ \forall x \in M\}$.

(ii) Dokaži, da je M gost podprostor natanko tedaj, ko je $M^0 = \{0_{X^*}\}$.

2. Naj bo X Banachov prostor in Y, Z njegova zaprta podprostora, za katera je $Y \cap Z = \{0\}$. Dokaži, da je $Y + Z$ zaprt podprostor natanko tedaj, ko obstaja taka konstanta $C > 0$, da velja:

$$\|y\| \leq C\|y + z\|$$

za vse $y \in Y$ in $z \in Z$.

3. Naj bosta A in B normalna operatorja na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$.

(a) Dokaži, da velja $AB = 0$ natanko tedaj, ko je $BA = 0$.

(b) Naj bosta A in B neničelna operatorja, ki zadoščata $AB = 0$. Dokaži, da A in B nista niti injektivna niti surjektivna.

4. Naj bo H Hardyjev prostor na odprtem enotskem disku $\mathbb{D}$:

$$H = \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \text{ analitična } \middle| \ \sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{\mathrm{i}\theta})|^2 \, d\theta < \infty \right\},$$

opremljen s skalarnim produktom:

$$\langle f, g \rangle_H = \sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{\mathrm{i}\theta})\overline{g(re^{\mathrm{i}\theta})} \, d\theta$$

in pripadajočo normo $\| \cdot \|_H$.

(a) Z uporabo Cauchyjeve integralske formule dokaži, da za vsak $z \in \mathbb{D}$ velja:

$$|f(z)| \leq \|f\|_H \frac{1}{\sqrt{1 - |z|^2}}.$$

(b) Dokaži, da za vsak $z \in \mathbb{D}$ obstaja taka funkcija $f_z \in H$, da za vsak $f \in H$ velja:

$$\langle f, f_z \rangle = f(z).$$

(c) Za $z \in \mathbb{D}$ določi predpis funkcije f_z.

5. Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor in $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ linearen operator. Dokaži, da sta spodnji trditvi ekvivalentni:

(a) Obstaja linearen operator $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, ki zadošča $\langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ za vsaka $x, y \in \mathcal{H}$.

(b) Operator T je zvezen.