Uvod v funkcionalno analizo, domača naloga

Benjamin Benčina, 27192018

14. januar 2021

Nal. 1: Dokažimo, da obstaja tak $\varphi \in (l^\infty)^* \setminus \{0\}$, da velja $\varphi(x) = 0$ za vsako periodično zaporedje $x \in l^\infty$.

Naj bo P množica vseh periodičnih zaporedij, torej

$$P = \{x \in l^\infty;\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}\colon x_{n+N} = x_n\}$$

Takoj opazimo, da je $P \leq l^\infty$, saj je vsota N in M-periodičnega zaporedja $LCM(N, M)$-periodična. Po izreku s predavanj velja

$$\overline{P} = \bigcap \{\ker f;\ f \in (l^\infty)^*, \quad P \subseteq \ker f\}$$

Želimo torej dokazati, da P ni gost podprostor. Vzemimo $a \neq 0$ in definirajmo

$$\alpha = (a, -a, a, a, -a, -a, a, a, a, -a, -a, -a, \dots) \in l^\infty$$

torej zaporedje, kjer na n-tem koraku dodamo n a-jev in n $(-a)$-jev. Za vsak $0 < \varepsilon < |a|$ potem krogla $\mathbb{B}(\alpha, \varepsilon)$ ne vsebuje nobenega periodičnega zaporedja. Res, če je $x \in l^\infty$ N-periodično, ki sledi zaporedju α na razdalji največ ε, najkasneje med $2N$ in $3N$ korakov globoko v zaporedje α (koraki definirani kot zgoraj) pade ven iz krogle. Prostor P torej ne more biti gost.

Nal. 2: Naj bosta X in Y Banachova prostora.

(a) Denimo, da za $Z \leq X$ obstaja omejen linearen operator $P\colon X \to X$, ki zadošča $\operatorname{im} P = Z$ in $P^2 = P$. Dokažimo, da je Z zaprt podprostor.

Naj bo $(z_n)_n$ zaporedje elementov iz Z, ki konvergira proti $x \in X$. Radi bi pokazali, da $x \in Z$. Ker je $\operatorname{im} P = Z$, obstaja zaporedje $(x_n)_n \subset X$, da je $z_n = P(x_n)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Sedaj imamo

$$P^2(x_n) = P(z_n) \to P(x) \in Z$$

hkrati pa po idempotentnosti

$$P^2(x_n) = P(x_n) = z_n \to x$$

torej $x \in Z$.

(b) Naj bo $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ operator z zaprto sliko. Dokažimo ekvivalenco spodnjih trditev.

(i) Obstajata omejena linearna operatorja $P\colon X \to X$ in $Q\colon Y \to Y$, ki zadoščata $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $\operatorname{im} P = \ker T$ in $\operatorname{im} Q = \operatorname{im} T$.

(ii) Obstaja operator $S \in \mathcal{B}(Y, X)$, ki zadošča $STS = S$ in $TST = T$.

- <u>(ii) $\implies$ (i):</u> Opazimo, da

$$(TS)^2 = (TS)(TS) = T(STS) = TS,$$

hkrati pa

$$\operatorname{im} T = \operatorname{im} TST \subseteq \operatorname{im} TS \subseteq \operatorname{im} T,$$

torej je vmes enakost in lahko vzamemo $Q = TS$. Podobno je

$$(I - ST)^2 = I - ST - ST + (ST)^2 = I - ST - ST + ST = I - ST,$$

od tod pa sledi

$$\operatorname{im}(I - ST) = \ker ST \subseteq \ker TST = \ker T.$$

Ker seveda $\ker T \subseteq \ker ST$, so vmes enakosti in lahko vzamemo $P = I - ST$.

- <u>(i) $\implies$ (ii):</u> Vzemimo $x \in \ker T$. Potem obstaja $z \in X$, da je $Pz = x$. Računamo

$$Px = PPz = Pz = x,$$

torej je P identična preslikava na $\ker T$ in ničelna preslikava drugod. Analogno dobimo, da je Q identična preslikava na $\operatorname{im} T$ in ničelna preslikava drugod. Preslikavi P in Q lahko obravnavamo kot projekciji na primerna podprostora, ki pa sta oba zaprta po točki (a) (v bistvu že kar po predpostavki) in zato Banachova. Oglejmo si preslikavo $\widetilde{T}$ v naslednjem diagramu

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad T \quad} & Y \\ \Big\downarrow{\scriptstyle I-P} & & \Big\downarrow{\scriptstyle Q} \\ Z \cong X/\ker T & \xrightarrow{\quad \widetilde{T} \quad} & \operatorname{im} T \end{array}$$

Preslikava $\widetilde{T}$ je po prvem izreku o izomorfizmu izomorfizem, po diagramu pa je tudi zvezna. Zato obstaja zvezen inverz $\widetilde{S}$, ki pa ga po Hahn-Banachovem izreku razširimo do preslikave $S' \colon Y \to X$. Nazadnje definiramo $S = (I - P)S'Q$. Preslikava S ustreza želenim lastnostim po konstrukciji. Res,

$$TSTx = \begin{cases} 0; & x \in \ker T \\ Tx; & \text{sicer} \end{cases}$$

in

$$STSy = \begin{cases} 0; & y \notin \operatorname{im} T \\ Sy; & \text{sicer} \end{cases}$$

kar zaključi dokaz.

<u>**Nal. 3:**</u> Naj bo X Banachov prostor in $Y, Z \leq X$ zaprta in disjunktna podprostora. Označimo

$$k = \inf \{||y - z||;\ y \in Y, z \in Z, ||y|| = ||z|| = 1\}.$$

Dokažimo, da je $Y + Z$ zaprt podprostor natanko tedaj, ko je $k > 0$.

Najprej se spomnimo naloge 2 iz poskusne domače naloge,[1] ki pravi, da je $Y + Z$ zaprt natanko tedaj, ko obstaja $C > 0$, da je $||y|| \leq C||y + z||$ za vse $y \in Y$ in $z \in Z$. Od tod takoj sledi implikacija v desno, saj lahko zamenjamo $z \longleftrightarrow -z$ in v posebnem primeru $||y|| = ||z|| = 1$ dobimo

$$\exists C\colon \quad ||y - z|| \geq \frac{||y||}{C} = \frac{1}{C} > 0,$$

torej velja to tudi za infimum.

Obratno, naj bo $k > 0$. Radi bi dokazali, da je $Y + Z$ zaprt prostor, za kar pa je po poskusni domači nalogi dovolj pokazati, da je projekcija $\operatorname{pr}_y \colon Y + Z \to Y$ zvezna preslikava. Opazimo, da k zaznamuje razdaljo med sferama $\mathbb{S}_Y$ in $\mathbb{S}_Z$. Ker je $k > 0$, ga lahko zapišemo kot $k = \frac{1}{\alpha - 1}$ za neki $\alpha > 1$. Računamo

$$\begin{aligned} k = \frac{1}{\alpha - 1} &= \left\| \frac{y}{||y||} - \frac{z}{||z||} \right\| \overset{\triangle}{\leq} \left\| \frac{y}{||y||} - \frac{z}{||y||} \right\| + \left\| \frac{z}{||y||} - \frac{z}{||z||} \right\| \\ &= \frac{||y - z||}{||y||} + \left\| \frac{(||z|| - ||y||)z}{||z|| \cdot ||y||} \right\| = \frac{||y - z||}{||y||} + \frac{1}{||y||} \big| ||z|| - ||y|| \big| \end{aligned}$$

[1] Za popravke glej Dodatek, točka (a).

Sedaj lahko zamenjamo $z \longleftrightarrow -z$ in premečemo enačbo, da dobimo

$$||y|| \leq (\alpha-1)||y+z|| + |||y||-||z||| \leq (\alpha-1)||y+z|| + ||y+z|| = \alpha||y+z||$$

iz česar sledi, da je pr_y zvezna preslikava.

<u>Nal. 4:</u> Na Hilbertovem prostoru $L^2[-1,1]$ definiramo funkcijo $\varphi\colon L^2[-1,1] \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$\varphi(f) = \int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx - 2\int_{-1}^{1} x^2 f(x) dx.$$

Naj bo $\mathcal{M} = \left\{ f \in L^2[-1,1];\ \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0 \right\} \leq L^2[-1,1]$. Določimo vrednost $\inf_{f\in\mathcal{M}} \varphi(f)$.

Opazimo, da lahko izraz "dopolnimo do kvadrata" in računamo

$$\begin{aligned}\varphi(f) &= \int_{-1}^{1} f(x)^2 dx - \int_{-1}^{1} 2x^2 f(x) dx = \int_{-1}^{1} \left(f(x)^2 - 2x^2 f(x)\right) dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\left(f(x)-x^2\right)^2 - x^4\right) dx = \int_{-1}^{1} \left(f(x)-x^2\right)^2 dx - \int_{-1}^{1} x^4 dx\end{aligned}$$

Drugi integral je sedaj neodvisen od funkcije f, prvi pa je vedno nenegativen. Torej je potrebno za izračun infimuma minimizirati le prvi integral, ki pa ima očitno ničlo v $f(x) = x^2$. Težava je seveda, da $x^2 \notin \mathcal{M}$, zato si oglejmo $g(x)$ pravokotno projekcijo funkcije x^2 na $\mathcal{M}$.

Konkretno, opazimo, da je $\mathcal{M} = \{f \in L^2[-1,1];\ \langle f, 1\rangle = 0\}$. Od tod sledi, da je $\mathcal{M}^\perp = \mathrm{Lin}\{1\} = \mathrm{Lin}\{\frac{1}{2}\}$, kjer je ta množica že sama ONS. Računamo

$$P_{\mathcal{M}^\perp} x^2 = \langle x^2, \frac{1}{2}\rangle \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$$

Potem je $g(x) = x^2 - \frac{1}{3}$. Izračunajmo še vrednost funkcionala

$$\varphi(g) = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3} - x^2\right)^2 dx - \int_{-1}^{1} x^4 dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{9} dx - \frac{2}{5} = \frac{2}{9} - \frac{2}{5} = \frac{10}{45} - \frac{18}{45} = -\frac{8}{45}$$

<u>Nal. 5:</u> Definirajmo operator $A\colon l^2 \to l^2$ s predpisom

$$A(x_1, x_2, \dots) = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2, -\frac{1}{2}x_1 + x_2, \dots\right)$$

kjer imamo na mestih $2n-1$ in $2n$ elementa $x_{2n-1} + \frac{1}{2n}x_{2n}$ in $-\frac{1}{2n}x_{2n-1} + x_{2n}$.

(a) Najprej dokažimo, da je A zvezen in določimo A^*.

Opazimo, da je A vsota dveh operatorjev, in sicer $A = I + D$, kjer je

$$Dx = \left(\frac{1}{2}x_2, -\frac{1}{2}x_1, \dots\right)$$

Dovolj je pokazati, da je zvezen operator D. Računamo

$$\|Dx\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_{2n}|^2 + |x_{2n-1}|^2}{4n^2} \leq \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \frac{1}{4}\|x\|^2$$

iz česar sledi, da je D zvezen operator. Operator A je potem zvezen kot vsota zveznih operatorjev. Vemo, da je $A^* = (I+D)^* = I + D^*$, zato je zopet dovolj najti D^*. Razpišemo

$$\langle Dx, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{2n}\overline{y_{2n-1}}}{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{2n-1}\overline{y_{2n}}}{2n}$$

Takoj postane jasno, da je

$$D(y_1, y_2, \dots) = \left(-\frac{1}{2}y_2, \frac{1}{2}y_1, \dots\right)$$

torej kot D, le da so povsod zamenjani minusi. Vstavimo v enačbo in dobimo

$$A^*(y_1, y_2, \dots) = (y_1 - \frac{1}{2}y_2, \frac{1}{2}y_1 + y_2, \dots)$$

(b) Ali je A surjektiven?

Glede na to, da so koordinate po parih odvisne, sumimo, da lahko iz sistema enačb izračunamo kakšno prasliko. Na vsakem zaporednem paru nam $Ax = y$ porodi naslednji sistem enačb

$$\begin{aligned} x_{2n-1} + \frac{1}{2n} x_{2n} &= y_{2n-1} \\ -\frac{1}{2n} x_{2n-1} + x_{2n} &= y_{2n} \end{aligned}$$

Z nekaj preobračanja enačb dobimo enolično rešitev

$$\begin{aligned} x_{2n-1} &= \frac{4n^2}{4n^2+1} \left(y_{2n-1} - \frac{1}{2n} y_{2n} \right) \\ x_{2n} &= \frac{4n^2}{4n^2+1} \left(\frac{1}{2n} y_{2n-1} + y_{2n} \right) \end{aligned}$$

Vprašati se moramo še, ali je tak $x \in l^2$? Odgovor je <u>da</u>, saj $\frac{4n^2}{4n^2+1} < 1$, $\frac{1}{2n} < 1$ in $y \in l^2$. Operator A je torej surjektiven.

(c) Ali je A kompakten?

Najprej opazimo, da je kompakten operator D. Res, $Dx = \lim_{n\to\infty} P_{2n} D$, saj velja

$$\begin{aligned} \|(D - P_{2n}D)x\| &= \|(\underbrace{0, \ldots, 0}_{2n}, \frac{x_{2n+2}}{4n+4}, \frac{x_{2n+1}}{4n+2}, \ldots)\| \\ &\leq \frac{1}{4n+2} \|(\underbrace{0, \ldots, 0}_{2n}, x_{2n+2}, x_{2n+1}, \ldots)\| \\ &\leq \frac{1}{4n+2} \|x\| \end{aligned}$$

in zato $\|D - P_{2n}D\| \to 0$. Ker je množica kompaktnih operatorjev podprostor, A ne sme biti kompakten operator, saj bi sicer bil kompakten tudi $I = A - D$, od tod pa bi sledilo, da $\dim l^2 < \infty$, kar je protislovje.

<u>**Nal. 6:**</u> Naj bo H Hardyjev prostor na enotskem disku $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$

$$H = \left\{ f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C} \text{ analitična} \; ; \; \sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty \right\},$$

opremljen s skalarnim produktom

$$\langle f, g \rangle_H = \sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \overline{g(re^{i\theta})} d\theta$$

in pripadajočo normo $\|.\|_H$.

(a) Najprej dokažimo, da je za vsak $z \in \mathbb{D}$ operator $\Phi_z \colon H \to \mathbb{C}$, podan s predpisom $f \mapsto f(z)$, zvezen.

Spomnimo se zopet poskusne domače naloge, konkretno naloge (4c).[2] Če vzamemo Hardyjevo integralsko jedro[3]

$$f_z(\omega) = \frac{1}{1 - \bar{z}\omega}$$

potem je po Cauchyjevi formuli $\Phi_z(f) = \langle f, f_z \rangle_H$ za vse $f \in H$. Ker je v Hilbertovih prostorih skalarni produkt zvezen, je posledično Φ_z zvezna preslikava za vsak $z \in \mathbb{D}$.

[2] Za popravke glej Dodatek, točka (b).

[3] Načeloma je integralsko jedro funkcija $k(z, \omega)$, kjer pa je seveda $f_z(\omega) = k(z, \omega)$ za vsak $z \in \mathbb{D}$. Zato je razlika zanemarljiva.

(b) Naj bo še $\|.\|$ norma na H, s katero je H Banachov prostor in glede na katero so operatorji $\Phi_{\frac{1}{n+1}}$ zvezni za vsak $n \in \mathbb{N}$. Pokažimo, da sta normi $\|.\|$ in $\|.\|_H$ ekvivalentni na H.

Imamo torej, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja $C_n > 0$, da je $|\Phi_{\frac{1}{n+1}}(f)| \leq C_n\|f\|$. Zaradi harmoničnosti holomorfnih funkcij na kompaktnih diskih $\frac{1}{n+1}\mathbb{D}$ (uporabimo princip maksimuma) je nujno $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$, torej obstaja $C = \max_n C_n$.

Po posledici izreka o odprti preslikavi je dovolj pokazati, za obstaja konstanta D, da je $\|f\|_H \leq D\|f\|$ za vsak $f \in \mathbb{D}$ (vzamemo identično preslikavo $(H, \|.\|) \to (H, \|.\|_H)$). Računamo

$$\begin{aligned}
\|f\|_H^2 &= \sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^2 d\theta = \sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \Phi_{re^{i\theta}}(f) \right|^2 d\theta \\
&= \lim_{n\to 0} \int_0^{2\pi} \left| \Phi_{\frac{1}{n+1}e^{i\theta}}(f) \right|^2 d\theta \leq \lim_{n\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C^2\|f\|^2 d\theta \\
&= C^2\|f\|^2
\end{aligned}$$

torej res $\|f\|_H \leq C\|f\|$ za vsak $f \in H$.

<u>**Nal. 7:**</u> Naj bo H Hilbertov prostor in $A \in \mathcal{B}(H)$. Dokažimo naslednjo zaporedno verigo implikacij.

(a) Obstaja Hilbertov prostor K, ki vsebuje prostor H, in tak normalen operator $B \in \mathcal{B}(K)$, da je $B(H) \subseteq H$ in $B|_H = A$.

(b) Za vsak $n \in \mathbb{N}$ in izbor vektorjev $x_0, \ldots, x_n \in H$ velja

$$\sum_{i,j=0}^{n} \langle A^i x_j, A^j x_i \rangle \geq 0 \tag{1}$$

Poleg tega obstaja tudi taka konstanta $c > 0$, da za poljuben izbor vektorjev $x_0, \ldots, x_n \in H$ velja

$$\sum_{i,j=0}^{n} \langle A^{i+1} x_j, A^{j+1} x_i \rangle \leq c \sum_{i,j=0}^{n} \langle A^i x_j, A^j x_i \rangle \tag{2}$$

(c) Obstaja konstanta $c > \|A\|^2$, da je za vsak $n \in \mathbb{N}$ in poljuben izbor vektorjev $x_0, \ldots, x_n \in H$ izpolnjen pogoj (2).

(d) Pogoj (1) velja za vsak $n \in \mathbb{N}$ in vsak izbor vektorjev $x_0, \ldots, x_n \in H$.

(e) Za vsak $n \in \mathbb{N}$ in vektorje $x_0, \ldots, x_n \in H$ velja

$$\sum_{i,j=0}^{n} \langle A^{i+j} x_i, A^{i+j} x_j \rangle \geq 0.$$

- <u>(a) $\implies$ (b):</u> Za $n = 0$ je rezultat trivialen. Za $n = 1$ dobimo

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=0}^{1} \langle A^j x_i, A^i x_j \rangle &= \langle x_0, x_0 \rangle + \langle Ax_0, x_1 \rangle + \langle x_1, Ax_0 \rangle + \langle Ax_1, Ax_1 \rangle \\
&= \langle x_0, x_0 \rangle + \langle Bx_0, x_1 \rangle + \langle x_1, Bx_0 \rangle + \langle Bx_1, Bx_1 \rangle \\
&= \|x_0\|^2 + 2\Re\langle Bx_0, x_1 \rangle + \|Bx_1\|^2 \\
&= \|x_0\|^2 + 2\Re\langle x_0, B^* x_1 \rangle + \|B^* x_1\|^2 \\
&= \|x_0 + B^* x_1\|^2 = \|x_0 + A^* x_1\|^2
\end{aligned}$$

po polarizacijski identiteti. Sumimo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\sum_{i,j=0}^{n} \langle A^j x_i, A^i x_j \rangle = \|x_0 + A^* x_1 + \cdots + A^{*n} x_n\|^2$$

Dokažimo indukcijski korak

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=0}^{n+1} \langle A^j x_i, A^i x_j \rangle &= \sum_{i,j=0}^{n+1} \langle B^j x_i, B^i x_j \rangle \\
&= \|x_0 + \cdots + B^{*n} x_n\|^2 + \sum_{i=0}^{n} 2\Re \langle B^{*i} x_i, B^{*(n+1)} x_{n+1} \rangle + \|B^{*(n+1)} x_{n+1}\|^2 \\
&= \|x_0 + \cdots + B^{*n} x_n\|^2 + 2\Re \langle \sum_{i=0}^{n} B^{*i} x_i, B^{*(n+1)} x_{n+1} \rangle + \|B^{*(n+1)} x_{n+1}\|^2 \\
&= \|x_0 + \cdots + B^{*(n+1)} x_{n+1}\|^2 = \|x_0 + \cdots + A^{*(n+1)} x_{n+1}\|^2
\end{aligned}
$$

zopet po polarizacijski identiteti, kjer na vsakem koraku uporabljamo normalnost B, da lahko svobodno menjamo B in $B*$ in dobimo želeno obliko. S tem je (1) očitno dokazana. Po zgornjem računu je (2) ekvivalentna temu, da je

$$
\|B^*(x_0 + \cdots + B^{*n} x_n)\|^2 \leq c \|x_0 + \cdots + B^{*n} x_n\|^2,
$$

kar pa je očitno, saj je B^* zvezen operator.

- $\underline{\text{(b)} \implies \text{(c)}}$: Po (1) je desna stran enačbe (2) (lahko tudi brez c) nenegativna. Iz (1) za izbiro $(Ax_0, \ldots, Ax_n)$ prav tako sledi, da je leva stran enačbe (2) nenegativna. Torej imamo enačbo oblike $X = cY$, kjer sta oba X in Y pozitivna. Enačba bo torej res tudi za vsako konstanto $d \geq c$, zato vzamemo $d = \max\{c, \|A\|^2 + 1\} > \|A\|^2$.

- $\underline{\text{(c)} \implies \text{(d)}}$: Z rekurzivnim upoštevanje točke (c) dobimo, da je

$$
\sum_{i,j=0}^{n} \langle A^{j+k} x_i, A^{i+k} x_j \rangle \leq c \sum_{i,j=0}^{n} \langle A^{j+k-1} x_i, A^{i+k-1} x_j \rangle
$$

za vsak $k \in \mathbb{N}$ (predpostavka je natanko $k = 1$). Od tod dobimo padajoče zaporedje

$$
\cdots \leq \frac{\sum_{i,j=0}^{n} \langle A^{j+k} x_i, A^{i+k} x_j \rangle}{c^k} \leq \cdots \leq \frac{\sum_{i,j=0}^{n} \langle A^{j+1} x_i, A^{i+1} x_j \rangle}{c} \leq \sum_{i,j=0}^{n} \langle A^j x_i, A^i x_j \rangle
$$

Dovolj je torej pokazati, da to zaporedje limitira k pozitivni vrednosti, ko $k \to \infty$, oziroma kar k 0. V ta namen je dovolj pokazati, da so zgornje vsote primerno omejene. Ocenimo

$$
\begin{aligned}
\Big| \sum_{i,j=0}^{n} \langle A^{j+k} x_i, A^{i+k} x_j \rangle \Big| &\overset{\triangle}{\leq} \sum_{i,j=0}^{n} \Big| \langle A^{j+k} x_i, A^{i+k} x_j \rangle \Big| \\
&\overset{\text{CSB}}{\leq} \sum_{i,j=0}^{n} \|A^{j+k} x_i\| \cdot \|A^{i+k} x_j\| \\
&\leq \sum_{i,j=0}^{n} \|A\|^k \cdot \|A^j x_i\| \cdot \|A\|^k \cdot \|A^i x_j\| \\
&\leq \|A\|^{2k} \sum_{i,j=0}^{n} \|A^j x_i\| \cdot \|A^i x_j\|
\end{aligned}
$$

in opazimo, da je zadnja vsota neodvisna od k in jo označimo z D. Ker je po (c) $\|A\|^{2k} < c^k$, računamo

$$
\lim_{k \to \infty} \left\| \frac{\sum_{i,j=0}^{n} \langle A^{j+k} x_i, A^{i+k} x_j \rangle}{c^k} \right\| \leq \lim_{k \to \infty} \underbrace{\frac{\|A\|^{2k}}{c^k}}_{<1} D = 0
$$

S tem je implikacija dokazana, saj je zgornje zaporedje padajoče.

- <u>(d) $\implies$ (e)</u>: Definiramo vektorje $y_i = A^i x_i$ in vstavimo v enačbo

$$\sum_{i,j=0}^{n} \langle A^{i+j} x_i, A^{i+j} x_j \rangle = \sum_{i,j=0}^{n} \langle A^j y_i, A^i y_j \rangle \overset{(1)}{\geq} 0$$

<u>Dodatek - poprava poskusne domače naloge:</u> V tem razdelku bom dopolnil/popravil tiste dele poskusne domače naloge, ki se navezujejo na rešitve te (prave) domače naloge.

(a) <u>Naloga 2:</u> Za dokaz, da iz tega, da je $Y \otimes Z \leq X$ zaprt podprostor, sledi, da je pr_y zvezna preslikava, uporabimo izrek o zaprtem grafu. Naj bo $(y_n, z_n)_n \to x$ konvergentno zaporedje v $Y \oplus Z$ in naj bo $(\mathrm{pr}_y(y_n, z_n))_n = (y_n)_n \to y$ zaporedje slik v Y. Radi bi pokazali, da je $\mathrm{pr}_y(x) = y$, kar pa je očitno, saj je po predpostavki $x \in Y \oplus Z$, torej $x = (y_0, z)$ za neka $y_0 \in Y$ in $z \in Z$. Ker je $y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n$, je po enoličnosti limite $y_0 = y$, torej $\mathrm{pr}_y(x) = \mathrm{pr}_y(y, z) = y$.

(b) <u>Naloga 4:</u> S Cauchyjevo integralsko formulo dokažimo, da je

$$f_z(\omega) = \frac{1}{1 - \overline{z}\omega}$$

res t.i. Hardyjevo integralsko jedro, (torej Rieszov vektor za evaluacijski funkcional):

$$\begin{aligned}
\langle f, f_z \rangle_H &= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \overline{\left(\frac{1}{1 - \overline{z}\omega}\right)} d\theta = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{1 - zre^{-i\theta}} d\theta \\
&= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta} - z} ire^{i\theta} d\theta = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2i\pi} \int_{r\mathbb{T}} \frac{f(r\omega)}{r\omega - z} d\omega \\
&= \lim_{r\to 1} f_r(z) = f(z)
\end{aligned}$$

kjer $f_r(z) = f(rz)$.