Sestavljene Bezierove krivulje

1. *Odvod Bezierove krivulje.* Bezierova krivulja je podana s kontrolnimi točkami $b_0, b_1, \ldots, b_n$. Sestavite funkcijo `bezier_der`, ki s pomočjo de Casteljauovega algoritma izračuna tangentni vektor dane Bezierjeve krivulje pri parametru t.

2. *Interpolacija točk s kubičnim $\mathcal{C}^1$ zlepkom.* Dane so delilne točke u_i intervala $[u_0, u_N]$ in zaporedji interpolacijskih točk p_j in pripadajočih tangentnih vektorjev v_j, $j = 0, 1, \ldots, N$. Iščemo $\mathcal{C}^1$ zvezni kubični zlepek $\boldsymbol{s}\colon [u_0, u_N] \to \mathbb{R}^2$, ki interpolira točke in tangentne vektorje v danih delilnih točkah, natančneje

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s}(u_j) &= p_j, \\ \boldsymbol{s}'(u_j) &= v_j, \end{aligned}$$

   za $j = 0, 1, \ldots, N$.

   Naj bo $\boldsymbol{s}_i$ Bezierova krivulja stopnje 3, ki predstavlja i-ti kos sestavljene krivulje. Parametrizirana je na intervalu $[u_i, u_{i+1}]$ in določena s kontrolnimi točkami b_{3i+k}, $k = 0, 1, 2, 3$. Interpolacijski pogoji za točke so izpolnjeni, če velja

$$b_{3i} = p_i \quad \text{in} \quad b_{3i+3} = p_{i+1}.$$

   Da krivulja interpolira tangentne vektorje, mora veljati

$$\begin{aligned} b_{3i+1} &= b_{3i} + \frac{\Delta_i}{3} v_i, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1, \\ b_{3i+2} &= b_{3i+3} - \frac{\Delta_i}{3} v_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1. \end{aligned}$$

   NALOGA

   Sestavite program `C1CubicSpline`, ki izračuna kontrolne točke iskanega kubičnega zlepka. Skupaj s kontrolnim poligonom narišite dobljeno sestavljeno Bezierovo krivuljo.

3. *Parametrizacija sestavljene krivulje.* Na obliko krivulje, ki poteka skozi interpolacijske točke $p_0, p_1, \ldots, p_m$ in je sestavljena iz m kosov, parametriziranih nad delitvijo

$$u_0 < u_1 < \ldots < u_m,$$

vpliva izbira parametrov delitve. Če za interpolacijske točke p_j, izberemo delilne točke kot

$$u_j = u_{j-1} + \|p_j - p_{j-1}\|^{\alpha},$$

potem pravimo, da smo izbrali *α-parametrizacijo*. Začetno delilno točko u_0 ponavadi postavimo na 0. Če izberemo $\alpha = 0$, dobimo *enakomerno* parametrizacijo, ki je neodvisna od podatkov. Pri izbiri $\alpha = 1$ dobimo *tetivno* in pri $\alpha = 1/2$ *centripetalno* parametrizacijo.

NALOGA

Sestavite testno skripto, ki preveri obnašanje sestavljene Bezierjeve krivulje pri različnih parametrizacijah. Pri izračunu parametrizacij uporabite interpolacijske točke

$$P_0(1,1),\ P_1(2,-2),\ P_2(3,4),\ P_3(4,6),\ P_4(2,-5)$$

in pripadajoče tangentne vektorje

$$v_0(1,1),\ v_1(1,-1),\ v_2(1,-3),\ v_3(1,-1),\ v_4(-1,1).$$

4. *$\mathcal{C}^1$ kvadratičen zlepek.* Bezierjeva krivulja stopnje 2, ki je sestavljena iz m kosov in je v stikih zvezno odvedljiva, je določena z $m+2$ kontrolnimi točkami $d_0, d_1, \ldots, d_{m+1}$. Naj bo $b^{(i)}(t)$ Bezierova krivulja, ki predstavlja i-ti kos sestavljene krivulje. Določena je s kontrolnimi točkami $b_0^{(i)}$, $b_1^{(i)}$ in $b_2^{(i)}$. Kontrolna točka $b_1^{(i)}$ se ujemaja s kontrolno točko d_i. Na robu krivulje velja še $b_0^{(1)} = d_0$ in $b_2^{(m)} = d_m$. Preostale kontrolne točke

   $$b_0^{(i+1)} = b_2^{(i)} = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}+\Delta_i} d_i + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_{i-1}+\Delta_i} d_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1,$$

   določimo na podlagi pogojev zvezne odvedljivosti in so odvisne od tipa parametrizacije.

   NALOGA

   Sestavite program `bezier_quad_spline`, ki uporabniku omogoči vpis števila odsekov m (funkcija `input`) in interaktivni vnos kontrolnih točk (funkcija `ginput`), nato pa nariše sestavljeno Bezierovo krivuljo pri tipu parametrizacije, ki je določen z vhodnim parametrom funkcije. Pri izračunu parametrizacij uporabite točke $d_0, d_1, \ldots, d_m$.