Upogib tanke opne na krožni zanki

Ogledali si bomo primer tanke opne, napete na krožno zanko, ki se povesi pod vplivom zunanje sile.

V ravnini xy leži krožna zanka s središčem v točki $(0,0)$ in polmerom R. Naj $\mathcal{D}$ označuje notranjost kroga. Iščemo funkcijo $u\colon \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dveh spremenljivk, za katero je $u(x,y)$ upogib opne v točki $(x,y) \in \mathcal{D}$. Funkcija u je rešitev *Poissonove enačbe*

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= f(x,y), \quad (x,y) \in \mathcal{D}, \\ u(x,y) &= 0, \quad (x,y) \in \partial\mathcal{D}, \end{aligned}$$

kjer je

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Laplaceov operator in f zunanja sila na opno. Poseben primer, ko je $f = 0$, imenujemo *Laplaceova enačba*.

Glede na geometrijo problema uvedemo polarne koordinate

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \end{aligned}$$

kjer je $r \in [0,R]$, $\varphi \in [0,2\pi)$. Laplaceov operator se v polarnih koordinatah prepiše v

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Zaradi krožne simetrije lahko predpostavimo, da sta funkciji u in f neodvisni od kota φ. Pri tem se zgornja parcialna diferencialna enačba pretvori v navadno diferencialno enačbo oblike

$$u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) = f(r), \quad r \in [0,R]. \tag{1}$$

Pri tem funkcija u zadošča robnima pogojema $u'(0) = 0$ in $u(R) = 0$.

Numerično reševanje robnega problema

Za reševanje bomo uporabili *diferenčno metodo*, pri kateri odvode nadomestimo s končnimi diferencami. Interval $[a,b] = [0,R]$ ekvidistantno razdelimo na n delov in dobimo točke

$$r_i = r_0 + ih = ih, \quad i = 0,1,\ldots,n$$

kjer je korak $h = \frac{b-a}{n} = \frac{R}{n}$. Z diferenčno metodo iščemo približke u_i za točne vrednosti $u(r_i)$ v delilnih točkah intervala,

$$u_i \approx u(r_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Zaradi robnih pogojev velja $u_n = u(R) = 0$. Približke določimo tako, da odvode v diferencialni enačbi nadomestimo s simetričnimi diferencami

$$\begin{aligned} u''(r_i) &\approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}, \\ u'(r_i) &\approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}. \end{aligned}$$

Ko zgornje aproksimacije uporabimo v enačbi (1) in pišemo $f(r_i) = f_i$, dobimo

$$\left(1 - \frac{h}{2r_i}\right) u_{i-1} - 2u_i + \left(1 + \frac{h}{2r_i}\right) u_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Pri $i = n-1$ upoštevamo pogoj $u_n = 0$ in dobimo

$$\left(1 - \frac{h}{2r_{n-1}}\right) u_{n-2} - 2u_{n-1} = h^2 f_{n-1}.$$

Pri $i = 0$ pa zaradi pogoja $u'(0) = 0$ velja $u_{-1} = u_1$ in zato sledi

$$-2u_0 + 2u_1 = h^2 f_0.$$

To vodi do sledečega sistema linearnih enačb

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & & & \\ 1 - \frac{h}{2r_1} & -2 & 1 + \frac{h}{2r_1} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 - \frac{h}{2r_{n-2}} & -2 & 1 + \frac{h}{2r_{n-2}} \\ & & & 1 - \frac{h}{2r_{n-1}} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{bmatrix}$$

za neznane količine u_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Matrika sistema je tridiagonalne oblike

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_1 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-2} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix}.$$

Za predstavitev potrebujemo le vektorje a, b in c za diagonalne in obdiagonalne elemente. Gaussova eliminacija sisteme linearnih enačb s tridiagonalno matriko reši v linearnem času $\mathcal{O}(n)$.

Naloge

1. Sestavi funkcijo `resi3.m` za reševanje tridiagonalnega sistema linearnih enačb $Ax = f$ velikosti $n \times n$, podanega z vektorji a, b, c in desno stranjo f.

2. Izračunaj obliko tanke opne napete na krožno zanko, ki se povesi pod vplivom zunanje sile. Predpostavi naslednje
   - Sila je konstantna $f(r) = 1$.
   - Sila se spreminja sorazmerno z $1 - r^2$.