Շատ փոփոխականների ֆունկցիաներ

Կուտակման կետ

Սահմանում: Դիցուք $E \subseteq \mathbb{R}^m$: $x_0 \in \mathbb{R}^m$ կետը կոչվում է E բազմության **կուտակման կետ**, եթե x_0-ի ցանկացած $B(a, \varepsilon)$ շրջակայքում E-ի անվերջ թվով կետեր կան առկա:
E բազմության կուտակման կետերի բազմությունը նշանակենք E'-ով:

Լեմմա: Եթե x_0-ն E-ի կուտակման կետ է, ապա $\exists\{x_n\} \subset E, x_n \neq x_0$, այնպես որ $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0$: Ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը:

Ապացույց: E բազմության կուտակման կետերի բազմությունը նշանակենք E'-ով: Ունենք, որ $x_0 \in E' \implies \forall \varepsilon > 0 \, \exists x_\varepsilon \in E \text{ s.t. } x \in B(x_0, \varepsilon)$:

ε-ը նշանակենք $\frac{1}{n} \implies \exists x_n \in E \text{ s.t. } x_n \in B(x_0, \frac{1}{n})$:

- $n := 1 \implies \exists x_1 \in E \text{ s.t. } x_1 \in B(x_0, 1)$
- $n := 2 \implies \exists x_2 \in E \text{ s.t. } x_2 \in B(x_0, \frac{1}{2})$
  Այսպիսով՝ $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to x_0$

Շատ փոփոխականի ֆունկցիաներ

Սահմանում 1: Դիցուք $E \subseteq \mathbb{R}^m$: $f : E \to \mathbb{R}$ արտապատկերմանը կանվանենք m փոփոխականի ֆունկցիա:

Օրինակներ:

- $z = f(x, y) = x^2 + y^2$
- $V(h, r) = \pi r^2 h$
- $V(a, b, c) = a \cdot b \cdot c$

Սահմանում 2: (էվկլիդեսյան նորմ) Կասենք, որ $A \in \mathbb{R}$ թիվը հանդիսանում է $f : E \to \mathbb{R}$ ֆունկցիայի սահման $x_0 \in E'$ կետում, եթե $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ s.t. } 0 < \|x - x_0\| < \delta, x \in E \implies |f(x) - A| < \varepsilon$:
Հարթության վրա սա δ շառավղով շրջան է (բաց գունդ):

Սահմանում 3: (Կոորդինատային) Դիցուք $x \in E, x = (x^1, x^2, \dots, x^m)$ և $x_0 \in E', x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^m)$:

Կասենք, որ $A \in \mathbb{R}$ թիվը հանդիսանում է $f : E \to \mathbb{R}$ ֆունկցիայի սահման x_0 կետում, եթե $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta' = \delta'(\varepsilon) > 0 \text{ s.t. } |x^i - x_0^i| < \delta', x \in E, x \neq x_0 \implies |f(x^1, x^2, \dots, x^m) - A| < \varepsilon$:
Սա $2\delta'$ կողմով քառակուսի է (բաց խորանարդ):

Ցույց տանք, որ (3) $\implies$ (2)

Նշանակենք $\delta = \delta'$: Կունենանք, որ՝

$$|x^i - x_0^i| \leq \|x - x_0\| < \delta' \implies |x^i - x_0^i| < \delta' \implies |f(x) - A| < \varepsilon:$$

Այսինքն՝ $\|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$:

Հիմա (2) $\implies$ (3)

Ունենք (2)-ը, այսինքն՝ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ s.t. } 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$:

Վերցնենք $\delta' := \frac{\delta}{\sqrt{m}}$: Կունենանք՝

$$\|x - x_0\| = \sqrt{(x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 + \dots + (x^m - x_0^m)^2} \leq \sqrt{(\frac{\delta}{\sqrt{m}})^2 + (\frac{\delta}{\sqrt{m}})^2 + \dots + (\frac{\delta}{\sqrt{m}})^2} = \sqrt{\frac{\delta^2}{m} \cdot m} = \delta$$

$$\implies \|x - x_0\| < \delta \implies (3)$$

Թեորեմ: Կոշիի և Հայնեի սահմանումների համարժեքությունը

Որպեսզի $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, որտեղ $f : E \to \mathbb{R}$ $(E \subset \mathbb{R}^m, x_0 \in E')$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\forall \{x_n\} \subset E, x_n \neq x_0, x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to A$:

Ապացույց: Անհրաժեշտություն

Ենթադրենք ունենք որ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ s.t. } 0 < \|x - x_0\| < \delta, x \in E \implies |f(x) - A| < \varepsilon \quad (*)$:

Դիտարկենք $\forall x_n \in E \text{ s.t. } x_n \neq x_0, x_n \to x_0$:

$\forall \varepsilon_0 > 0 \; \exists n_0(\varepsilon_0) \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n > n_0(\varepsilon_0) \implies \|x_n - x_0\| < \varepsilon_0$:

Նշանակենք $\varepsilon_0 := \delta = \delta(\varepsilon)$: Կունենանք, որ $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \|x_n - x_0\| < \delta$:

Օգտվելով $(*)$-ից՝ կունենանք, որ $\|x_n - x_0\| < \delta \implies |f(x_n) - A| < \varepsilon \implies f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} A$:

Ապացույց: Բավարարություն

Դիցուք $\forall \{x_n\} \subset E, x_n \neq x_0, x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to A$: Ցույց տանք, որ՝

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ s.t. } 0 < \|x - x_0\| < \delta, x \in E \implies |f(x) - A| < \varepsilon$:

Կատարենք հակասող ենթադրություն. $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in E \text{ s.t. } 0 < \|x - x_0\| < \delta, x \in E \implies |f(x) - A| \geq \varepsilon$:

δ-ն ընտրելով $\frac{1}{n}$, կունենանք՝

$n = 1 \implies \exists \varepsilon > 0, \exists x_1 \text{ s.t. } 0 < \|x_1 - x_0\| < 1, x_1 \in E \implies |f(x_1) - A| \geq \varepsilon$

$n = 2 \implies \exists \varepsilon > 0, \exists x_2 \text{ s.t. } 0 < \|x_2 - x_0\| < \frac{1}{2}, x_2 \in E \implies |f(x_2) - A| \geq \varepsilon$

Այսպիսով՝ $x_1, x_2, \ldots, x_n \to x_0$, բայց $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ չի ձգտում A-ի, ինչը հակասում է թեորեմի պայմանին:

Թեորեմ: Սահմանի գոյության Կոշիի պայմանը

Որպեսզի $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, որտեղ $f : E \to \mathbb{R}$ $(E \subset \mathbb{R}^m, x_0 \in E')$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ՝

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ s.t. } 0 < \|x' - x_0\| < \delta, 0 < \|x'' - x_0\| < \delta, x', x'' \in E \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad (**)$

Ապացույց: Անհրաժեշտություն

Դիցուք $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$: Ցույց տանք, որ $(**)$-ը տեղի ունի այդ դեպքում:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \implies \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ s.t. } 0 < \|x - x_0\| < \delta, x \in E \implies |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$
Այսինքն՝

$0 < \|x' - x_0\| < \delta \implies |f(x') - A| < \frac{\varepsilon}{2}$

$0 < \|x'' - x_0\| < \delta \implies |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2}$

Այժմ դիտարկենք հետևյալ արտահայտությունը. $|f(x') - f(x'')| = |f(x') - A + A - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$:

$\implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$:

Ապացույց: Բավարարություն

Ունենք, որ $(**)$-ը բավարարված է: Ցույց տանք, որ սահմանը գոյություն ունի:

Վերցնենք $\forall \{x_n\} \subset E, x_n \neq x_0, x_n \to x_0$:

Կունենանք, որ $\forall \delta > 0 \, \exists n_0(\delta) \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n > n_0(\delta) \implies 0 < \|x_n - x_0\| < \delta$:

$0 < \|x_m - x_0\| < \delta, x_m, x_n \in E \implies |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$:

Օգտվելով Կոշիի հաջորդականության սկզբունքից թվային հաջորդականությունների համար, կարող ենք պնդել, որ $f(x_n)$-ը զուգամետ է, քանի որ այն ֆունդամենտալ է: Այսինքն՝ $\exists A \in \mathbb{R} \text{ s.t. } f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} A$:

Այժմ ցույց տանք, որ $A \in \mathbb{R}$ թիվը կախված չէ $\{x_n\}$ հաջորդականության ընտրությունից: Կատարենք հետևյալ ենթադրությունը՝

$x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to A$

$y_n \to x_0 \implies f(y_n) \to B$

$x_n \neq y_n, \forall n, y_n \in E$

Կառուցենք x_0-ին ձգտող հետևյալ հաջորդականությունը. $z_n = x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n \to x_0$:

$z_{2n} \to x_0, f(z_{2n}) \to B$

$z_{2n-1} \to x_0, f(z_{2n-1}) \to A$

Քանի որ $f(z_n) \xrightarrow{n\to\infty} A'$, ($f(z_{2n}), f(z_{2n-1})$-ը $f(z_n)$-ի մասնակի ենթահաջորդականություններ են) ապա $B = A', A = A' \implies B = A$: ■