

Ֆունկցիայի անընդհատություն

Սահմանում 1: Բաց կապակցված բազմությունը կոչվում է **տիրույթ** կամ **բաց տիրույթ**:

Սահմանում 2: Փակ կապակցված բազմությունը կոչվում է **փակ տիրույթ**:

Սահմանում 3: $x_0 \in E$ ($E \subset \mathbb{R}^m$) կետը կոչվում է E -ի **մեկուսացված կետ**, եթե $\exists \delta > 0$ այնպես, որ $B(x_0, \delta) \cap E = \{x_0\}$:

Սահմանում 4: Դիցուք $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}^m$): Կասենք, որ f -ը **անընդհատ է** $x_0 \in E$ կետում, եթե $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ այնպես, որ $\forall x \in E, \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$:

Վերջին երկու սահմանումներից \implies , որ \forall մեկուսացված կետում ֆունկցիան անընդհատ է:

(4) սահմանումից \implies , որ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$:

Թեորեմ: Որպեսզի f ֆունկցիան $x_0 \in E$ կետում լինի անընդհատ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\forall \{x_n\} \subset E, x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow f(x_0)$:

Թեորեմ: Դիցուք ունենք $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}^m$), $x_0 \in E, x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{i-1}, x_0^i, x_0^{i+1}, \dots, x_0^m)$: Ունենք նաև, որ f -ը x_0 -ում անընդհատ է:

Այդ դեպքում $\varphi(y)$ մեկ փոփոխականի ֆունկցիան, որը որոշվում է $(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{i-1}, y, x_0^{i+1}, \dots, x_0^m) \in E$ կետերի համար, անընդհատ է x_0^i կետում:

Ապացույց: Դիցուք $y \rightarrow x_0^i \implies x \rightarrow x_0$:

Այլ կերպ ասած՝ $y \rightarrow x_0^i \implies |f(x) - f(x_0)| \implies \varphi(y) \rightarrow f(x_0)$:

$x^i \rightarrow x_0 \implies \varphi(x) \rightarrow f(x_0)$:

Վեկտոր արժեք ֆունկցիաներ

Սահմանում: $f: E \rightarrow \mathbb{R}^k$ ($E \subset \mathbb{R}^m, k \geq 2$) արտապատկերումը կոչվում է **վեկտոր-արժեք ֆունկցիա**:

$\forall x_0 \in \mathbb{R}^m \rightarrow f(x) = (f^1(x_0), f^2(x_0), \dots, f^k(x_0)) \in \mathbb{R}^k$:

Սահմանում: $f^1(x), \dots, f^k(x)$ իրական արժեքներ ընդունող ֆունկցիաները կոչվում են f -ի կոորդինատային ֆունկցիաներ:

Սահմանում: $f : E \rightarrow \mathbb{R}^k$ ($E \subset \mathbb{R}^m$) վեկտոր-արժեք ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ $x_0 \in E$ կետում, եթե $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ այնպես, որ

$\forall x \in E, \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$:

Թեորեմ: Որպեսզի $f : E \rightarrow \mathbb{R}^k$ ($E \subset \mathbb{R}^m$) ֆունկցիան անընդհատ լինի

$x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m) \in E$ կետում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $x \rightarrow x_0 \implies$

$$f^1(x) \rightarrow f^1(x_0)$$

$$f^2(x) \rightarrow f^2(x_0)$$

...

$$f^k(x) \rightarrow f^k(x_0)$$

Ապացույց: Վեկտորային գույքամիտությունից կոորդինատային:

Թեորեմ: Եթե $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ և $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, որտեղ $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}^m$), $x_0 \in E'$, ապա $\exists \lim(f \pm g), \lim(c \cdot f), \lim(f \cdot g)$, և եթե $\lim_{x \rightarrow x_0} g \neq 0$, ապա $\lim \frac{f}{g}$:

Ընդ որում՝

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g) = \lim_{x \rightarrow x_0} f \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} cf = c \lim_{x \rightarrow x_0} f$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} f \cdot g = \lim_{x \rightarrow x_0} f \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g$$

$$4. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}, \text{ եթե } \lim g \neq 0$$

Հետևանք: Եթե $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}^m$) ֆունկցիաները անընդհատ են $x_0 \in E$ կետում, ապա անընդհատ են նաև $f \pm g, c \cdot f, f \cdot g, f/g$: (Եթե $g(x_0) \neq 0$):

Թեորեմ (Բարդ ֆունկցիայի անընդհատություն):

Դիցուք տրված են $f : E \rightarrow K$ և $g : K \rightarrow F$ ֆունկցիաները, որտեղ $E \subset \mathbb{R}^n, K \subset \mathbb{R}^m, F \subset \mathbb{R}^k$:

Եթե f -ը անընդհատ է $x_0 \in E$ կետում և g -ն անընդհատ է $f(x_0) \in K$ կետում, ապա $g \circ f$ բարդ ֆունկցիան անընդհատ է $x_0 \in E$ կետում:

Ապացույց: Պետք է ցույց տանք, որ $x \rightarrow x_0 \implies (g \circ f)(x) \rightarrow (g \circ f)(x_0)$:

Քանի որ f -ն անընդհատ է, ապա $\forall \{x_n\} \subset E, x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow f(x_0)$:

$y_n = f(x_n), y_0 = f(x_0)$: Քանի որ g -ն անընդհատ է՝ $y_n \rightarrow y_0 \implies g(y_n) \rightarrow g(y_0)$:

Տեղադրելով y_n -ի փոխարեն $f(x_n)$, կունենանք՝

$x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow f(x_0) \implies g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0)) \implies g(f(x))$ անընդհատ է x_0 կետում:

Սահմանում: Կասենք, որ $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ֆունկցիան անընդհատ է E տիրույթում, եթե այն անընդհատ է E -ի կամայական կետում:

E բազմության վրա անընդհատ ֆունկցիաների բազմությունը նշանակվում է $f \in C(E)$:

Բոլցանո-Կոշիի թեորեմները շատ փոփոխականի համար

Թեորեմ: Դիցուք ունենք $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ անընդհատ ֆունկցիա, որտեղ E -ն բաց տիրույթ է և $f(a) \cdot f(b) < 0$, որտեղ $a, b \in E$: Այդ դեպքում $\exists c \in E$ այնպես, որ $f(c) = 0$:

Ապացույց: Քանի որ E -ն բաց տիրույթ է, կասենք որ գոյություն ունի a և b կետերը միացնող L բեկյալ:

Ենթադրենք՝ $L = \{a = x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n = b\}$:

Այս դեպքում $\exists i = \overline{0, n}$ այնպես, որ $f(x_i) < 0$ և $f(x_{i+1}) > 0$ (պայմանով, որ $f(a) < 0$ և $f(b) > 0$):

Ներմուծենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան.

$$F(t) = f(x_i + t(x_{i+1} - x_i)), t \in [0, 1]$$

$$F(0) = f(x_i) < 0$$

$$F(1) = f(x_{i+1}) > 0$$

Օգտվելով մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի Բոլցանո-Կոշիի թեորեմից՝

$$F(c) = 0 \implies f(x_i + c(x_{i+1} - x_i)) = 0:$$

Կունենանք, որ $\exists c \in [0, 1]$ այնպես, որ $x_i + c(x_{i+1} - x_i) \in [x_i, x_{i+1}] \subset L \subset E$:

Բոլցանո-Կոշիի II թեորեմ: Եթե $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}^m$) անընդհատ է և $a, b \in E$ կետերի համար $f(a) = A$ և $f(b) = B$, ապա $\forall C \in [A, B]$ $\exists c \in E$ այնպես որ $f(c) = C$:

Ապացույց: Դիտարկենք $\varphi(x) = f(x) - C$ օժանդակ ֆունկցիան, որը նույնպես անընդհատ է: $\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0$, $\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0$:

\implies ըստ նախորդ թեորեմի $\exists c \in E$ այնպես, որ $\varphi(c) = 0 \implies f(c) = C$:

Վեյերշտրասի թեորեմները շատ փոփոխականի ֆունկցիաների համար

Վեյերշտրասի I թեորեմ: Եթե $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^m$ բազմությունը կոմպակտ է, և f -ն անընդհատ է E վրա, ապա այն սահմանափակ է:

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը՝ f -ը սահմանափակ չէ վերևից:

Այդ դեպքում $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in E$ այնպես, որ $f(x_n) > n$ (): *Քանի որ $x_n \in E$ և E -ն սահմանափակ է, ապա ըստ Բոլցանո-Վեյերշտրասի սկզբունքի $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ այնպես որ $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$: Այսինքն $x_{n_k} \rightarrow x_0$, $x_0 \in E' \implies x_0 \in E$ (քանի որ E -ն փակ է): Ըստ անընդհատության սահմանման կունենանք՝ $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$, ինչը հակասում է ()-ին, քանի որ $f(x_{n_k}) > n_k \rightarrow \infty$:*

Վեյերշտրասի II թեորեմ: Կոմպակտի վրա անընդհատ ֆունկցիան հասնում է իր ճշգրիտ վերին և ստորին եզրերին:

Այսինքն $\exists x_0 \in E$ այնպես, որ $f(x_0) = \sup_{x \in E} f(x) = M$:

Ապացույց: Դիցուք $\sup_{x \in E} f(x) = M$: Եթե $\nexists x_0 \in E$ այնպես որ $f(x_0) = M$, ապա $f(x) < M$:

Դիտարկենք $\psi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ օժանդակ ֆունկցիան:

$\psi(x)$ -ը անընդհատ է, հետևաբար սահմանափակ է $\implies \exists M'$ այնպես, որ $\psi(x) \leq M'$:

$\implies \frac{1}{M - f(x)} \leq M' \implies f(x) \leq M - \frac{1}{M'} \implies M$ -ը ճշգրիտ վերին եզր չէ, ինչը հակասում է M -ի ընտրությանը:

Կանտորի թեորեմ

Սահմանում: $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ անընդհատ ֆունկցիան կոչվում է հավասարաչափ անընդհատ, եթե $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ այնպես որ $\|x' - x''\| < \delta$

$$x', x'' \in E \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon:$$

Թեորեմ: Կոմպակտի վրա անընդհատ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է:

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը. $\exists \varepsilon_0 > 0$ այնպես, որ $\forall \delta > 0$ և $\exists x'_\delta, x''_\delta \in E$, որտեղ $\|x' - x''\| < \delta$ բայց $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$:

Նշանակելով $\delta = \frac{1}{n}$, կունենանք $\|x'_n - x''_n\| < \frac{1}{n}$, բայց $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon_0$:

Դիտարկենք $x'_n \in E$ հաջորդականությունը: Քանի որ E -ն կոմպակտ է, կարող ենք ասել, որ $\exists x'_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0 \in E$:

$$\|x''_{n_k} - x_0\| = \|x''_{n_k} - x'_{n_k} + x'_{n_k} - x_0\| \leq \|x''_{n_k} - x'_{n_k}\| + \|x'_{n_k} - x_0\| \rightarrow 0 \implies x''_{n_k} \rightarrow x_0:$$

Ստացվեց, որ ունենք $x'_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$ և $x''_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$:

Օգտվելով f -ի անընդհատությունից՝ կունենանք, որ $f(x'_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$ և $f(x''_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$:

$$\implies \|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})\| \rightarrow 0, \text{ ինչը հակասում է } |f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon_0 \text{ պայմանին:}$$