Հավանականությունների տեսության հիմնական հասկացությունները

Դասական սահմանում

Հավանականությունների տեսության **դասական սահմանումը** հիմնված է հավասարահնարավոր ելքերի վրա:

Սահմանում. A պատահույթի հավանականություն կոչվում է տվյալ փորձի ընթացքում A պատահույթին նպաստող ելքերի քանակի (m) հարաբերությունը բոլոր հնարավոր ելքերի քանակին (n):

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Օրինակ. Նետում ենք զառը: Գտնել հավանականությունը, որ բացված կետերի քանակը մեծ է 4-ից:
A = {բացված կետերի քանակը մեծ է 4-ից}

- Հնարավոր ելքեր՝ $n = 6$ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:
- Նպաստող ելքեր ($A = \{5, 6\}$)՝ $m = 2$:
- $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$:

Պատահույթների տեսակները և հարաբերությունները

- **Հավաստի պատահույթ.** Պատահույթը կոչվում է հավաստի (Ω), եթե այն անհրաժեշտաբար հանդես է գալիս կատարվող փորձում: $P(\Omega) = 1$:
  Օրինակ՝ ունենք արկղ, որտեղ կան սև և սպիտակ գնդիկներ: Հավանականությունը, որ արկղից հանած գնդիկը սև է կամ սպիտակ 100% է:
- **Անհնար պատահույթ.** Պատահույթը կոչվում է անհնար ($\emptyset$), եթե նրա հանդես գալը բացառված է տվյալ փորձում: $P(\emptyset) = 0$:
- **Անհամատեղելի պատահույթներ.** Երկու պատահույթներ կոչվում են անհամատեղելի, եթե դրանցից մեկի հանդես գալը բացառում է մյուսի հանդես գալը: $P(A \cap B) = 0$:
  Արկղի օրինակում, եթե դիտարկենք հավանականություն, որ հանած գնդիկը սև է և մեկ այլ հավանականություն, որ սպիտակ է, ապա այդ երկուսը իրար հետ տեղի ունենալ չեն կարող, հանած գնդիկը չի կարող միաժամանակ սև և սպիտակ լինել:
- **Մասնավոր դեպք.** B պատահույթը կոչվում է A-ի մասնավոր դեպք ($B \subset A$), եթե B-ի հանդես գալուց հանդես է գալիս նաև A-ն:
  Օրինակ՝ B = {≤ 4}, A = {≤ 3}:
- **Լրիվ խումբ.** Մի քանի պատահույթներ կազմում են լրիվ խումբ, եթե փորձի ընթացքում անհրաժեշտաբար հանդես կգա դրանցից մեկը:
  Պատկերացրու զառի նետումը: Զառն ունի 6 նիստ:
  Պատահույթներ. A1 (բացվում է 1), A2 (բացվում է 2), A3 (3), A4 (4), A5 (5), A6 (6):
  Ինչո՞ւ է լրիվ խումբ. Որովհետև նետելիս անհրաժեշտաբար այս 6 թվերից մեկը կբացվի: Չի կարող լինել այնպիսի դեպք, որ զառը նետես ու այս թվերից ոչ մեկը չհայտնվի:
- **Հակադիր պատահույթներ.** Երկու պատահույթներ կոչվում են հակադիր (A և $\bar{A}$), եթե դրանք անհամատեղելի են և կազմում են լրիվ խումբ:
  Օրինակ: Քննության հանձնում
  Պատահույթ A. Ուսանողը հանձնեց քննությունը:
  Պատահույթ A¯. Ուսանողը չհանձնեց քննությունը:
  Ինչո՞ւ են հակադիր. Դրանք անհամատեղելի են (չես կարող միաժամանակ և՛ հանձնել, և՛ չհանձնել) և կազմում են լրիվ խումբ (այլ տարբերակ չկա՝ կա՛մ հանձնում ես, կա՛մ ոչ):
- **Կախյալ պատահույթներ.** A և B պատահույթները կոչվում են կախյալ, եթե դրանցից մեկի հանդես գալը ազդում է մյուսի հանդես գալու հավանականության վրա:
- **Տարրական (էլեմենտար) ելք.** Պատահույթի այն ելքերը, որոնք չունեն մասնավոր դեպք, կոչվում են տարրական (էլեմենտար) ելքեր: էլեմենտար ելքերի բազմությունը նշանակվում է Ω.

Վերը նշված սահմանումներից հետևում է, որ
$P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 1$
$0 \leq P(A) \leq 1$

Համատեղելի պատահույթների հատումը դատարկ չէ: Անհամատեղելիներինը՝ դատարկ է:

Անհամատեղելի պատահույթների գումարման բանաձևի արտածումը դասական սահմանման միջոցով:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- k - բոլոր հնարավոր ելքերի քանակը
- A-ին նպաստող ելքերի քանակը՝ l_1
- B-ին նպաստող ելքերի քանակը՝ l_2

$$P(A) = \frac{l_1}{k}$$

$$P(B) = \frac{l_2}{k}$$

Ապացույց:

$$P(A \cup B) = \frac{l_1 + l_2}{k} = \frac{l_1}{k} + \frac{l_2}{k} = P(A) + P(B)$$

A պատահույթի և նրա լրացման (հակադիր պատահույթի՝ $\bar{A}$) հատկությունները Ω (օմեգա) տիրույթում:

Պայման:
$A \subseteq \Omega$
$\bar{A}$ (հակադիր պատահույթ)

Հատկություններ:

1. **Հատում:** $A \cap \bar{A} = \emptyset \implies P(A \cap \bar{A}) = 0$
   (Պատահույթը և նրա հակադիրը միաժամանակ տեղի ունենալ չեն կարող)
2. **Միավորում:** $A \cup \bar{A} = \Omega \implies P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$
   (Պատահույթներից գոնե մեկը միշտ տեղի է ունենում)

Հավանականությունների գումարման թեորեմը

Անհամատեղելի պատահույթների համար.

Եթե A և B պատահույթները անհամատեղելի են, ապա դրանցից որևէ մեկի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է դրանց հավանականությունների գումարին:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ընդհանուր դեպք (Կամայական պատահույթների համար).

Երկու պատահույթների գումարի հավանականությունը հավասար է նրանց հավանականությունների գումարին՝ առանց նրանց համատեղ հանդես գալու հավանականության:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

n - բոլոր հնարավոր ելքերի քանակը:
l_1 - A-ին նպաստող ելքերի քանակը:
l_2 - B-ին նպաստող ելքերի քանակը:
k - և՛ A-ին, և՛ B-ին միաժամանակ նպաստող ելքերի քանակը ($A \cap B$):

$$P(A) = \frac{l_1}{n}, \quad P(B) = \frac{l_2}{n}, \quad P(A \cap B) = \frac{k}{n}$$
$$P(A \cup B) = \frac{l_1 + l_2 - k}{n} = \frac{l_1}{n} + \frac{l_2}{n} - \frac{k}{n}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Պայմանական հավանականություն և բազմապատկման թեորեմ

Պայմանական հավանականություն.

A պատահույթի հավանականությունը, հաշվարկված այն պայմանով, որ B պատահույթն արդեն տեղի է ունեցել, կոչվում է պայմանական հավանականություն:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Բազմապատկման թեորեմ.

Երկու պատահույթների համատեղ հանդես գալու հավանականությունը հավասար է դրանցից մեկի հավանականության և մյուսի պայմանական հավանականության արտադրյալին:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Անկախ պատահույթներ.

A և B պատահույթները կոչվում են անկախ, եթե մեկի հանդես գալը չի փոխում մյուսի հանդես գալու հավանականությունը: Այդ դեպքում.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Բայեսի բանաձև

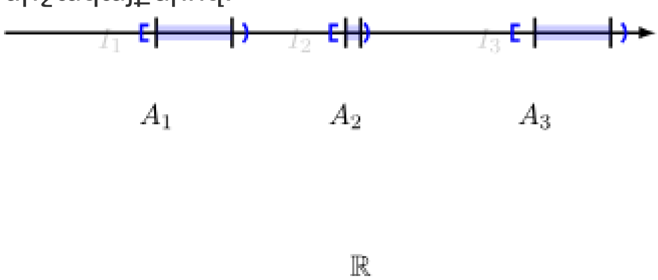
$$P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(B)}$$

Անկախ պատահույթների դեպքում: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Աքսիոմատիկ հիմունքներ (Չափի տեսություն)

1. Չափի գաղափարը և կետերի «ծածկումը»

Պատկերված է, թե ինչպես են փորձում հաշվարկելի բազմության կետերը ծածկել շատ փոքր միջակայքերով:



- **Էպսիլոնից փոքր չափ.** Եթե ունենք $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ հաշվարկելի բազմություն, յուրաքանչյուր n-րդ կետը կարող ենք ծածկել $\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ երկարություն ունեցող միջակայքով:
- **Գումարային չափ.** Այդ բոլոր միջակայքերի երկարությունների գումարը կլինի.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < \varepsilon$$

Սա ապացուցում է, որ հաշվարկելի բազմության չափը 0 է, քանի որ ε-ը կարող է լինել կամայական փոքր թիվ:

2. Համարժեքության հարաբերություն և ֆակտոր բազմություն

$[0, 1]$ հատվածի վրա սահմանվում է **համարժեքության հարաբերություն** ($\sim$):

- **Սահմանում.** $x \sim y$, եթե նրանց տարբերությունը ռացիոնալ թիվ է՝ $x - y \in \mathbb{Q}$:
- **Հատկություններ.** Այս հարաբերությունը ռեֆլեքսիվ է ($x \sim x$, քանի որ $0 \in \mathbb{Q}$), սիմետրիկ է ($x \sim y \implies y \sim x$) և տրանզիտիվ:
- Այն տրոհում է $[0, 1]$ հատվածը համարժեքության դասերի՝ $[x], [y], \ldots$, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է իրարից ռացիոնալ թվով տարբերվող տարրեր:

3. E բազմության կառուցումը (Վիտալիի բազմություն)

E բազմությունը կառուցվում է՝ յուրաքանչյուր համարժեքության դասից ընտրելով ճիշտ մեկական տարր:

- **Ի՞նչ է E-ն.** Այն կոնտինուում հզորության բազմություն է, քանի որ համարժեքության դասերի քանակը կոնտինուում է:
- **E_n շեղումներ.** Վերցվում են բոլոր $t_n \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ ռացիոնալ թվերը և ստեղծվում են E բազմության շեղված տարբերակները՝ $E_n = t_n + E$:
- **Չհատվողություն.** Ապացուցվում է, որ եթե $n \neq m$, ապա $E_n \cap E_m = \emptyset$ (դրանք չունեն ընդհանուր տարրեր):

4. Ինչո՞ւ E-ն չափելի չէ

Դիտարկվում է բոլոր E_i բազմությունների միավորումը.

- Այդ միավորումը պարունակում է $[0, 1]$ հատվածը և զետեղված է $[-1, 2]$ հատվածի մեջ:
- Եթե E-ն լիներ չափելի և ունենար $m(E)$ չափ, ապա ըստ չափի ադիտիվության հատկության՝

$$m([0, 1]) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \leq m([-1, 2])$$

$$1 \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E) \leq 3$$

- **Հակասություն.** Եթե $m(E) = 0$, ապա անվերջ գումարը կլինի 0, ինչը հակասում է $1 \leq 0$ պայմանին: Եթե $m(E) > 0$, ապա անվերջ գումարը կլինի ∞, ինչը հակասում է $\infty \leq 3$ պայմանին:

click and watch this!!!

Եզրակացություն հավանականության մասին

Քանի որ E **բազմությունը չափելի չէ**, մենք չենք կարող նրան վերագրել հավանականություն:

> **Հետևաբար**, եթե դուք կետը նետում եք $[0, 1]$ հատվածի վրա, դուք իրավունք չունեք հարցնելու. «Որքա՞ն է հավանականությունը, որ կետը կընկնի E-ի մեջ»: Այդ հարցը մաթեմատիկորեն անիմաստ է, քանի որ E-ն չունի «երկարություն» կամ «չափ»: