(calc lection). Հաջորդականություն R^m-ում

Հիմնական սահմանումներ

Արդեն գիտենք, որ եթե $x, y \in \mathbb{R}^m$ տարրերի համար, որտեղ $x = (x^1, x^2, \dots, x^m)$, $y = (y^1, y^2, \dots, y^m)$, գումարումը սահմանենք՝

$$x + y = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \dots, x^m + y^m)$$

իսկ սկալյարով բազմապատկումը՝

$$\lambda x = (\lambda x^1, \lambda x^2, \dots, \lambda x^m)$$

օրենքներով, ապա $\mathbb{R}^m$-ը այս գործողությունների հետ կդառնա գծային տարածություն։ Ավելին, այն նորմավորված է, քանի որ հեշտ է ստուգել, որ $\|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^m)^2}$ բանաձևը բավարարում է նորմի պայմաններին։

Սահմանում 1: $\mathbb{R}^m$-ում *հաջորդականություն* ասելով կհասկանանք հետևյալ բազմությունը՝ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, որտեղ $x_n \in \mathbb{R}^m$ $(n \in \mathbb{N})$:

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^m$

Հեռավորություն և Գնդեր

Սահմանում 2: $x, y \in \mathbb{R}^m$ տարրերի *հեռավորություն* ասելով կհասկանանք $x - y$ -ի նորմը։ Այսինքն՝

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

(x-y)-ը $\mathbb{R}^m$-ի տարր է => ունի մինոր ու հենց էդ մինորն էլ կանվանենք $x, y \in \mathbb{R}^m$ տարրերի *հեռավորություն*։

Սահմանում 3: $\mathbb{R}^m$-ում a կենտրոնով և r շառավղով *բաց գունդ* ասելով կհասկանանք հետևյալ բազմությունը՝

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(a, x) < r\} \vee \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - a\| < r\}$$

Սահմանում 4: $\mathbb{R}^m$-ում a կենտրոնով և r շառավղով փակ գունդ ասելով կհասկանանք հետևյալ բազմությունը՝

$$\bar{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(a,x) \leq r\} \vee \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x-a\| \leq r\}$$

Մասնավորապես:

- $m=1$ դեպքում՝ $(a-r, a+r)$ միջակայքն է:
- $m=2$ դեպքում՝ շրջան (բաց կամ փակ):

Սահմանափակություն և Սահման

Սահմանում 5: Կասենք, որ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը **սահմանափակ է** $\mathbb{R}^m$ -ում, եթե $\exists M$ s.t. $\|x_n\| \leq M$:

Սահմանում 6: Կասենք, որ $x_n \in \mathbb{R}^m$, $x_n \to \infty$, եթե $\forall E$-ի համար $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $n > n_0 \implies \|x_n\| > E$:

Սահմանում 7 (Հաջորդականության սահման): $a \in \mathbb{R}^m$ տարրը կոչվում է $x_n \in \mathbb{R}^m$ հաջորդականության սահման, եթե $\forall \varepsilon > 0$-ի համար $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ s.t. $n > n_0(\varepsilon) \implies \|x_n - a\| < \varepsilon$: (հեռավորությունը պիտի ձգտի զրոյի)

Կոորդինատային զուգամիտության սկզբունքը

Թեորեմ: Որպեսզի $x_n \in \mathbb{R}^m$ հաջորդականությունը ձգտի $a \in \mathbb{R}^m$ տարրին $\iff x_n^i \xrightarrow{n\to\infty} a^i$ $(i = \overline{1,m})$:

Ապացույց:

Նկատենք, որ $\forall x \in \mathbb{R}^m$-ի համար՝

$$|x^i| \leq \|x\| \leq |x^1| + |x^2| + \cdots + |x^m| \quad (1)$$

Իրոք, $|x^i| = \sqrt{(x^i)^2} \leq \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^m)^2} = ||x|| \leq \sqrt{(|x^1| + \cdots + |x^m|)^2} = \ldots$

$$\left(|x^1| + \cdots + |x^m|\right)^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} |x^i|^2}_{\|x\|^2} + \underbrace{2 \sum_{1\leq j<k\leq m} |x^j||x^k|}_{\geq 0}$$

Քանի որ «խառը արտադրյալները» ($2|x^j||x^k|$) ոչ բացասական են, ապա՝

$$\left(\sum |x^i|\right)^2 \geq \sum |x^i|^2 = \|x\|^2$$

Արմատ հանելով՝ կստանանք պահանջվող անհավասարությունը՝

$$|x^1| + \cdots + |x^m| \geq \|x\|$$

($\Rightarrow$) Դիցուք $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$: Հետևաբար $\forall\varepsilon > 0$-ի համար $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ s.t. $n > n_0(\varepsilon) \implies \|x_n - a\| < \varepsilon$:

Օգտվելով (1)-ից կարող ենք ասել, որ $|x_n^i - a^i| < \|x_n - a\| < \varepsilon$:

$\implies \forall i, \forall\varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ s.t. $n > n_0(\varepsilon) \implies |x_n^i - a^i| < \varepsilon$ ($i = \overline{1,m}$): Ուստի $x_n^i \xrightarrow{n\to\infty} a^i$:

($\Leftarrow$) Դիցուք $x_n^i \xrightarrow{n\to\infty} a^i$ ($i = \overline{1,m}$): Ցույց տանք, որ $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$:

Օգտվելով $\|x_n - a\| \leq |x_n^1 - a^1| + |x_n^2 - a^2| + \cdots + |x_n^m - a^m|$ անհավասարությունից և $x_n^i \to a^i$ ($i = \overline{1,m}$)-ից կունենանք, որ $\forall\varepsilon > 0$-ի համար $\|x_n - a\| < m\varepsilon_1$:

Նշանակենք $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{m}$, կունենանք որ $\|x_n - a\| < \varepsilon$:

Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմման $\mathbb{R}^m$-ում

Թեորեմ (Բոլցանո-Վայերշտրաս): $\mathbb{R}^m$-ի սահմանափակ հաջորդականությունից կարելի է առանձնացնել զուգամետ ենթահաջորդականություն:

Ապացույց: Դիցուք $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^m$ և $\|x_n\| \leq M$:

($m = 2$ դեպքի համար):

Դիցուք ունենք $\{x_n\}$ վեկտորների հաջորդականությունը, որը սահմանափակ է, այսինքն՝ բոլոր վեկտորների երկարությունը չի գերազանցում M-ը ($\|x_n\| \leq M$):

Քայլ 1. Անցում վեկտորներից թվերի (Կոորդինատների սահմանափակություն)

Քանի որ վեկտորի երկարությունը փոքր է M-ից, ապա նրա կոորդինատները (որոնք սովորական թվեր են) նույնպես պետք է փոքր լինեն M-ից:

- $|x_n^1| \leq M$ (առաջին կոորդինատների հաջորդականությունը սահմանափակ է)
- $|x_n^2| \leq M$ (երկրորդ կոորդինատների հաջորդականությունը սահմանափակ է)

> **Հիշեցում.** Այստեղ x_n^1-ը հենց x_n վեկտորի առաջին կոորդինատն է (թիվ է), իսկ $\{x_n^1\}_{n=1}^{\infty}$-ը՝ այդ թվերի շարքը:

Քայլ 2. Առաջին «զտումը» (Ըստ առաջին կոորդինատի)

Նայենք միայն առաջին կոորդինատներին՝ $\{x_n^1\}$: Սա սովորական թվային հաջորդականություն է և այն սահմանափակ է:

Ըստ թվային հաջորդականությունների համար Բոլցանո-Վայերշտրասի թեորեմի՝ մենք կարող ենք ընտրել այնպիսի ինդեքսներ (n_m), որ այդ թվերը ձգտեն ինչ-որ a^1 թվի:

- Ընտրում ենք ենթահաջորդականություն՝ $\{x_{n_m}\}$:
- Այս ենթահաջորդականության համար՝ $x^1_{n_m} \xrightarrow{m\to\infty} a^1$:

> **Իմաստը.** Մենք բոլոր վեկտորներից ընտրեցինք (զտեցինք) միայն նրանք, որոնց առաջին կոորդինատները «կարգին պահվածք» ունեն (զուգամիտում են):

Քայլ 3. Երկրորդ «զտումը» (Ըստ երկրորդ կոորդինատի)

Հիմա նայենք մեր արդեն ընտրված $\{x_{n_m}\}$ ենթահաջորդականության վեկտորների երկրորդ կոորդինատներին՝ $x^2_{n_m}$:

Սրանք նույնպես սահմանափակ թվեր են ($|x^2_{n_m}| \le M$):

Նորից կիրառում ենք Բոլցանո-Վայերշտրասի թեորեմը, բայց այս անգամ միայն այս ընտրվածների վրա: Կարող ենք դրանցից էլ ընտրել ավելի նեղ ենթահաջորդականություն (ենթա-ենթահաջորդականություն)՝ նշանակենք ինդեքսները n_{m_k}:

- Այս նոր ընտրության համար՝ $x^2_{n_{m_k}} \xrightarrow{k\to\infty} a^2$:

> Կարևոր պահ. Քանի որ մենք ընտրություն կատարեցինք արդեն ընտրվածների միջից, ապա առաջին կոորդինատի զուգամիտությունը չի խախտվել:
>
> Այսինքն՝ $x^1_{n_{m_k}}$-ը դեռևս ձգտում է a^1-ին (քանի որ այն $x^1_{n_m}$-ի մաս է կազմում):

Քայլ 4. Վերջնական հավաքում (Կոորդինատային զուգամիտություն)

Ստացանք $\{x_{n_{m_k}}\}$ ենթահաջորդականությունը, որի համար՝

1. Առաջին կոորդինատները ձգտում են a^1-ին:
2. Երկրորդ կոորդինատները ձգտում են a^2-ին:

Օգտվելով Կոորդինատային զուգամիտության սկզբունքից (եթե վեկտորի բոլոր կոորդինատները զուգամիտում են, ապա վեկտորը զուգամիտում է)՝ պնդում ենք.

$$x_{n_{m_k}} \xrightarrow{k\to\infty} a, \quad \text{որտեղ } a = (a^1, a^2)$$

Ապացուցված է: Մենք գտանք զուգամետ ենթահաջորդականություն:

Կոշու զուգամիտության սկզբունքը

Սահմանում 8: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^m$ հաջորդականությունը կոչվում է **ֆունդամենտալ**, եթե $\forall \varepsilon > 0$-ի համար $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $n > n_0(\varepsilon) \implies \|x_n - x_m\| < \varepsilon$ (երբ $m > n_0$):

Թեորեմ: Որպեսզի $x_n \in \mathbb{R}^m$ հաջորդականությունը լինի զուգամետ $\iff$ այն լինի ֆունդամենտալ:

Ապացույց:

($\Rightarrow$) Դիցուք x_n-ը զուգամետ է, այսինքն $\exists a \in \mathbb{R}^m$ s.t. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$
$m, n > n_0(\varepsilon) \implies$

$$\begin{cases} \|x_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \|x_m - a\| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Դիտարկենք հետևյալը՝

$\|x_n - x_m\| = \|x_n - a + a - x_m\| \leq \|x_n - a\| + \|x_m - a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$:

($\Leftarrow$) Դիցուք $\forall \varepsilon > 0$-ի համար $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ s.t. $n, m > n_0 \implies \|x_n - x_m\| < \varepsilon$:

Օգտվելով (1)-ից՝ կունենանք՝

$|x_n^i - x_m^i| \leq \|x_n - x_m\| < \varepsilon \implies \forall \varepsilon > 0$-ի համար $\exists n_0(\varepsilon)$ s.t.
$m, n > n_0(\varepsilon) \implies |x_n^i - x_m^i| < \varepsilon$ ($i = \overline{1, m}$):

Ինչը նշանակում է, որ x_n^i թվային հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է: Հետևաբար, ըստ Կոշու զուգամիտության սկզբունքի, թվային հաջորդականությունների համար $\exists a^i \in \mathbb{R}$ s.t. $x_n^i \xrightarrow{n\to\infty} a^i$ ($i = \overline{1, m}$):

Օգտվելով կոորդինատային զուգամիտության սկզբունքից, կարելի է պնդել, որ $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, որտեղ $a = (a^1, a^2, \ldots, a^m)$:

Կուտակման կետեր

Սահմանում 9: Դիցուք $E \subset \mathbb{R}^m$: $x_0 \in \mathbb{R}^m$ կետը կոչվում է E բազմության **կուտակման կետ**, եթե x_0-ի $\forall$ շրջակայքում կան E-ի անվերջ քանակությամբ կետեր:

E բազմության կուտակման կետերի բազմությունը նշանակենք E'-ով: