(algebra practice). Մատրիցի ձևափոխումը անկյունագծային տեսքի

Տեսություն գործնականի համար

ՄԱՏՐԻՑԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒՄԸ ԱՆԿՅՈՒՆԱԳԾԱՅԻՆ ՏԵՍՔԻ

Երկու n-րդ կարգի A և B քառակուսի մատրիցներ անվանում են նման, եթե կգտնվի P հակադարձելի մատրից այնպիսին, որ

$$B = PAP^{-1} :$$

> **1. Ինտուիտիվ իմաստը. «Նույն էությունը՝ տարբեր լեզուներով»**
>
> Պատկերացրեք, կա մի ֆիզիկական գործողություն (օպերատոր), օրինակ՝ **պտույտ 90 աստիճանով**: Սա իրական գործողություն է, որը կախված չէ թվերից:
>
> - Երբ մենք ուզում ենք այդ գործողությունը գրել թղթի վրա (մատրիցի տեսքով), մենք պետք է ընտրենք **կոորդինատային համակարգ** (բազիս):
> - **Դիտորդ A-ն** ընտրում է իր ստանդարտ առանցքները (x, y) և այդ պտույտը գրում է A մատրիցի տեսքով:
> - **Դիտորդ B-ն** թեքել է գլուխը և նայում է ուրիշ անկյան տակ (ուրիշ առանցքներ՝ u, v): Նրա համար նույն պտույտը թվային առումով ուրիշ տեսք ունի՝ B մատրիցը:
>
> **Նման մատրիցներն իրականում ՆՈՒՅՆ գծային ձևափոխությունն են, պարզապես գրված տարբեր կոորդինատային համակարգերում (տարբեր բազիսներում):**
>
> **2. Ինչպե՞ս է աշխատում $B = PAP^{-1}$ բանաձևը**
>
> Եկեք կարդանք այս բանաձևը աջից ձախ (քանի որ մատրիցները վեկտորի վրա ազդում են աջից ձախ՝ $B\vec{x} = PAP^{-1}\vec{x}$):
>
> Պատկերացրեք, դուք ունեք մի վեկտոր «B-ի լեզվով» (B-ի կոորդինատներով) և ուզում եք կիրառել ձևափոխությունը:
>
> 3. P^{-1} **(Թարգմանիչ դեպի A):**

Սկզբում մենք վեկտորը «B-ի լեզվից» թարգմանում ենք «A-ի լեզվի»: Մենք անցնում ենք հին կոորդինատային համակարգին:

4. A **(Գործողություն):**

   Հիմա, երբ վեկտորը A-ի համակարգում է, մենք կիրառում ենք բուն գործողությունը (մատրից A-ն), որը գիտի՝ ինչպես աշխատել իր համակարգում:

5. P **(Թարգմանիչ հետ դեպի B):**

   Գործողությունը կատարելուց հետո ստացված արդյունքը դեռ «A-ի լեզվով» է: Մենք այն նորից թարգմանում ենք հետ՝ «B-ի լեզվի»:

Արդյունքում՝ B մատրիցը անում է նույն բանը, ինչ A-ն, պարզապես նրա մուտքն ու ելքը «B-ի լեզվով» են:

3. Ինչու՞ P-ն պետք է լինի հակադարձելի

P մատրիցը կոչվում է **անցման մատրից** (change of basis matrix): Նրա սյուները ցույց են տալիս նոր առանցքների ուղղությունները:

Ինչու՞ այն պարտադիր պետք է հակադարձելի լինի ($det(P) \neq 0$).

6. **Տեղեկատվության պահպանում (Ինֆորմացիայի կորուստ չկա):**

   Եթե P-ն հակադարձելի չլիներ, դա կնշանակեր, որ նոր կոորդինատային համակարգը «փչացած» է: Օրինակ՝ 3D տարածությունը տափակեցրել ենք 2D թղթի վրա: Եթե դուք տվյալները կորցնեք (տափակեցնեք), դուք այլևս չեք կարող «հետ գնալ» (թարգմանել հակառակ ուղղությամբ): Իսկ բանաձևում մեզ պետք է և՛ P-ն (գնալ), և՛ P^{-1}-ը (հետ գալ):

7. **Բազիսի պահանջը:**

   Կոորդինատային համակարգ ունենալու համար առանցքները (վեկտորները) պետք է լինեն **գծորեն անկախ**: Եթե նրանք կախյալ լինեն (օրինակ՝ x և y առանցքները համընկնեն), դուք չեք կարողանա միարժեքորեն նկարագրել կետի դիրքը: Հակադարձելի մատրիցն այն մատրիցն է, որի սյուները գծորեն անկախ են:

Երկու նման մատրիցներ ունեն նույն բնութագրիչ հավասարումները:

Դիցուք A-ն քառակուսի մատրից է: Եթե կգտնվի այնպիսի P հակադարձելի մատրից, որ $P^{-1}AP$ մատրիցն անկյունագծային է, ապա ասում են, որ A-ն կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի:

1. Ինչու՞ է մեզ պետք «Անկյունագծային տեսքը»

Պատկերացրեք, դուք ունեք մի բարդ մեքենա (մատրից A), որի կոճակները խառնված են:

- Երբ սեղմում եք «Գազ» կոճակը, մեքենան ոչ միայն արագանում է, այլև մի քիչ թեքվում է ձախ և միացնում է ռադիոն:
- Երբ սեղմում եք «Արգելակ», այն կանգնում է, բայց նաև միացնում է ջեռուցումը:

Սա **ոչ անկյունագծային** մատրիցն է. փոփոխականները (արագություն, ուղղություն, ջերմաստիճան) **խառնված են** (coupled): x-ը ազդում է y-ի վրա, y-ը՝ z-ի: Սա դժվար է կառավարել և հաշվարկել:

Անկյունագծային մատրիցը (D) նման է իդեալական կառավարման վահանակի.

- Կոճակ 1-ը փոխում է *միայն* արագությունը:
- Կոճակ 2-ը փոխում է *միայն* ուղղությունը:

Ինտուիտիվ իմաստը.

Մատրիցը անկյունագծային տեսքի բերել նշանակում է՝ **քանդել խճճված կապերը** (decoupling): Մենք գտնում ենք այնպիսի «խելացի» ուղղություններ (սեփական վեկտորներ), որոնցով շարժվելիս համակարգը չի «տատանվում», այլ պարզապես ձգվում կամ սեղմվում է:

Գործնականում (A^{100}):

Ինչպես տեսանք նախորդ խնդիրներում, A^{100} հաշվելը մղձավանջ է, իսկ D^{100}-ը՝ վայրկյանական գործ (ուղղակի թվերը բարձրացնում ենք աստիճան):

---

2. Ինչու՞ է դրան մասնակցում հակադարձ մատրիցը (P^{-1})

Այստեղ գործում է **«Թարգմանչի»** սկզբունքը:

Բանաձևն է՝ $D = P^{-1}AP$: Եկեք կարդանք այն աջից ձախ (ինչպես մատրիցները ազդում են վեկտորի վրա).

3. P **(Մուտք դեպի ստանդարտ աշխարհ):** P-ն կազմված է սեփական վեկտորներից: Այն մեր «բառարանն» է:
4. A **(Գործողություն):** Սկզբնական բարդ գործողությունը:
5. P^{-1} **(Վերադարձ դեպի պարզ աշխարհ):**

Ավելի պարզ անալոգիա՝ Գիրք թարգմանելը.

Պատկերացրեք, դուք ունեք մի գիրք չինարենով (A - բարդ խնդիր), և ուզում եք դրա մեջ ուղղումներ անել (A^n): Դուք չինարեն չգիտեք:

> 6. **Քայլ 1 (P^{-1}):** Դուք գիրքը թարգմանում եք հայերեն (անցնում եք ձեր հարմար «անկյունագծային» համակարգին):
> 7. **Քայլ 2 (D):** Հայերենով շատ արագ կատարում եք բոլոր ուղղումները, վերլուծությունները (քանի որ հասկանում եք լեզուն՝ համակարգը անկյունագծային է/պարզ է):
> 8. **Քայլ 3 (P):** Արդյունքը նորից թարգմանում եք չինարեն, որպեսզի տաք պատվիրատուին:
>
> **Ամփոփում.**
>
> - Մեզ պետք է P^{-1}, որպեսզի մտնենք «հեշտ աշխարհ» (eigen-basis):
> - Այնտեղ մատրիցը դառնում է D (պարզ թվեր):
> - Հետո մեզ պետք է P, որպեսզի արդյունքը վերադարձնենք իրական աշխարհ:
> - Ահա թե ինչու է բանաձևը «սենդվիչի» տեսք ունի՝ $P^{-1} \dots P$: Մեկը տանում է, մյուսը՝ բերում:

Դիցուք A մատրիցը կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի, այսինքն՝

$$P^{-1}AP = D,$$

որտեղ D-ն անկյունագծային մատրից է: Այստեղից A մատրիցի համար կստանանք հետևյալ վերլուծությունը

$$A = PDP^{-1}\ :$$

Թեորեմ 44. Եթե A-ն $(n \times n)$ կարգի մատրից է, ապա հետևյալ պնդումները համարժեք են.

- A-ն կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի,
- A-ն ունի n հատ գծորեն անկախ սեփական վեկտորներ:

Թեորեմ 45. Եթե A-ն կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի, ապա P մատրիցի սյուները՝ A մատրիցի գծորեն անկախ սեփական վեկտորներն են, իսկ $P^{-1}AP$ անկյունագծային մատրիցի գլխավոր անկյունագծի տարրերը A-ի սեփական արժեքներն են:

> Այս երկու թեորեմները իրար լրացնող են. մեկը (Թեորեմ 44) ասում է՝ «հնարավո՞ր է արդյոք», իսկ մյուսը (Թեորեմ 45) ասում է՝ «եթե հնարավոր է, ապա ինչպե՞ս կառուցել»:
>
> **Թեորեմ 44. «Հնարավորության պայմանը»**
>
> **Պնդում.** Մատրիցը կարող է դառնալ անկյունագծային **միայն ու միայն այն դեպքում**, եթե ունի n հատ գծորեն անկախ սեփական վեկտոր:
>
> **Ինտուիտիվ բացատրություն. «Նոր աշխարհի առանցքները»**

Պատկերացրեք, դուք ուզում եք կառուցել մի նոր, հարմարավետ տուն (անկյունագծային համակարգ):

- Որպեսզի տունը կանգուն մնա 3D տարածության մեջ ($n = 3$), ձեզ պետք է **3 հենասյուն** (առանցք):
- Այդ հենասյուները մեր **սեփական վեկտորներն** են:

Ինչ է ասում թեորեմը.

Եթե դուք ունեք 3 սեփական վեկտոր, բայց երկուսը նայում են նույն ուղղությամբ (կամ մեկը մյուսների կոմբինացիան է), ապա դուք իրականում ունեք ոչ թե 3, այլ 2 հենասյուն:

- Երկու սյունով 3D տուն չես սարքի (այն կփլվի, կդառնա տափակ):
- **«Գծորեն անկախ»** լինելը նշանակում է, որ սյուները տարբեր ուղղություններով են, և նրանք բավարար են ամբողջ տարածությունը (n չափը) պահելու համար:

Կարճ ասած. Եթե չունես n հատ տարբեր (անկախ) ուղղություն, չես կարող ստեղծել լիարժեք նոր կոորդինատային համակարգ:

Թեորեմ 45. «Կառուցման հրահանգը»

Պնդում. P մատրիցը սարքում ենք՝ կողք-կողքի շարելով սեփական վեկտորները, իսկ D մատրիցը ստացվում է՝ անկյունագծի վրա գրելով համապատասխան սեփական արժեքները:

Ինտուիտիվ բացատրություն. «Բառարանը և Մասշտաբը»

Սա մեզ տալիս է բաղադրատոմսը, թե ինչպես «եփել» $A = PDP^{-1}$ հավասարումը:

1. P **մատրիցը (Ուղղությունները):**

   P-ն մեր «թարգմանիչն» է: Նրա սյուները պարզապես ասում են.
   - «Սյուն 1-ը՝ դա մեր նոր X առանցքն է (առաջին սեփական վեկտորը)»:
   - «Սյուն 2-ը՝ դա մեր նոր Y առանցքն է (երկրորդ սեփական վեկտորը)»: Եվ այսպես շարունակ:
2. D **մատրիցը (Գործողությունը):**

   D-ն ցույց է տալիս, թե ինչ է տեղի ունենում այդ առանցքների վրա:
   - «Առաջին առանցքի վրա ամեն ինչ մեծանում է λ_1 անգամ»:
   - «Երկրորդ առանցքի վրա ամեն ինչ մեծանում է λ_2 անգամ»:

Շատ կարևոր է կարգը (Համապատասխանությունը):

Թեորեմը շեշտում է, որ սյուների և թվերի հերթականությունը պետք է համընկնի։

- Եթե P մատրիցի **1-ին սյան** մեջ դրել ես v_1 վեկտորը, ապա D մատրիցի **1-ին տեղում** (անկյունագծի վրա) պարտադիր պետք է դնես հենց նրա λ_1 արժեքը։
- Չի կարելի վեկտորը դնել առաջին տեղում, իսկ նրա ձգման գործակիցը՝ երրորդ։ Դա նման է նրան, որ «Գազ» կոճակին միացնես ղեկի կառավարումը։

1. Ինչե՞ր են «մյուս տեղերում»

Նախ պատասխանենք պարզ հարցին. **«Մյուս տեղերում» զրոներ են (0):**

D մատրիցը **անկյունագծային** է։

$$D = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\lambda_3} \end{pmatrix}$$

Զրոները շատ կարևոր են։ Դրանք նշանակում են՝ **«մի՛ խառնիր»**։ Առաջին վեկտորի գործը չպետք է խառնվի երկրորդի հետ։

---

2. Ինչու՞ հենց $(1,1)$ դիրքում (Առաջին տող, առաջին սյուն)

Եկեք նայենք, թե ինչ է կատարվում, երբ P մատրիցը (որը կազմված է v_1, v_2, v_3 սյուներից) բազմապատկում ենք D մատրիցի **առաջին սյան** հետ։

Մատրիցների բազմապատկման կանոնն ասում է.

$P \times$ (Սյուն) **նշանակում է՝ վերցնել P-ի սյուների գծային կոմբինացիան:**

Նայեք այս գործողությանը.

$$P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{v_1} & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Սա հավասար է՝

$$(\boldsymbol{\lambda_1} \cdot \mathbf{v_1}) + (0 \cdot v_2) + (0 \cdot v_3)$$

Ի՞նչ ստացվեց.

3. Քանի որ առաջին թիվը λ_1 է, մենք վերցրեցինք v_1**-ը** և բազմապատկեցինք λ_1-ով։
4. Քանի որ մյուս թվերը **0** են, v_2-ը և v_3-ը անհետացան (չխառնվեցին)։

5. Արդյունքը եղավ $\lambda_1 v_1$:

Եզրակացություն.

- Եթե λ_1-ը գրեինք 2-րդ տողում (ներքևում), այն կբազմապատկվեր v_2-ի հետ: Սխալ կլիներ:
- Եթե λ_1-ը գրեինք 3-րդ տողում, այն կբազմապատկվեր v_3-ի հետ:

Դրա համար էլ կանոնը խիստ է.

D մատրիցի i-րդ տողի թիվը բազմապատկվում է P մատրիցի i-րդ սյան (վեկտորի) հետ:

3. Ամփոփում՝ պարզ լեզվով

Պատկերացրեք D մատրիցի սյունը որպես **հրահանգների ցուցակ** P մատրիցի համար.

- $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$ «Վերցրու 1-ին վեկտորը λ_1 չափով, իսկ մյուսները՝ 0 չափով (մի վերցրու)»:
- $\begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\lambda_2} \\ 0 \end{pmatrix} \to$ «Վերցրու 2-րդ վեկտորը λ_2 չափով, մյուսները մի վերցրու»:

Ահա թե ինչու v_1-ի «զույգը» (λ_1) պետք է լինի ճիշտ նույն հարկում (առաջին տեղում), որպեսզի հանդիպի հենց v_1-ին:

Օրինակ 104. Դիտարկենք

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

մատրիցը:

A-ի սեփական արժեքներն են $\lambda = 1; 5$: $\lambda = 1$ սեփական արժեքի սեփական ենթատարածության բազիսն է $p_1 = (1, 1, 0)^T$, իսկ $\lambda = 5$ սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական ենթատարածության բազիսն է $p_2 = (-1, 1, 0)^T$, $p_3 = (0, 0, 1)^T$ տարրերի համախումբը: Ինչպես հայտնի է, p_1, p_2, p_3 համախումբը գծորեն անկախ է: Հետևաբար

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

և

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

Նկատենք, որ P մատրիցի սյուները կարելի է տեղափոխել:

> Խնդիրը պահանջում է A մատրիցը բերել պարզ (անկյունագծային) տեսքի:
>
> Տրված է մատրիցը.
>
> $$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
>
> ---
>
> **Քայլ 1. Ինչպե՞ս գտանք սեփական արժեքները (λ)**
>
> Մենք պետք է լուծենք $\det(A - \lambda I) = 0$ հավասարումը:
>
> Անկյունագծի թվերից հանում ենք λ.
>
> $$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0$$
>
> Քանի որ 3-րդ տողում և սյունում զրոներ են, կարող ենք առանձնացնել $(5-\lambda)$-ն (բացել ըստ 3-րդ տողի).
>
> $$(5-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$
>
> Հաշվենք փոքր որոշիչը.
>
> $$(3-\lambda)(3-\lambda) - (-2)(-2) = (\lambda-3)^2 - 4$$
> $$= \lambda^2 - 6\lambda + 9 - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$
>
> Լուծենք քառակուսային հավասարումը՝ $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$:
>
> Ըստ Վիետի՝ թվերը 1 և 5 են ($1 \cdot 5 = 5, 1 + 5 = 6$):
>
> **Արդյունք.**
>
> Ունենք $(5-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-5) = 0$:
>
> Արմատներն են՝
>
> 1. $\lambda = 1$ (հանդիպեց 1 անգամ)
> 2. $\lambda = 5$ (հանդիպեց 2 անգամ՝ մեկը փակագծից, մյուսը՝ քառակուսային հավասարումից):

Քայլ 2. Ինչպե՞ս գտանք սեփական վեկտորները (p_1, p_2, p_3)

Հիմա ամեն λ-ի համար պետք է գտնենք վեկտոր, որը չի փոխում իր ուղղությունը:

Ա. Երբ $\lambda = 1$

Լուծում ենք $(A - 1 \cdot I)X = 0$ համակարգը:

$$\begin{pmatrix} 3-1 & -2 & 0 \\ -2 & 3-1 & 0 \\ 0 & 0 & 5-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Ստանում ենք հավասարումներ.

1. $2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y$
2. $4z = 0 \Rightarrow z = 0$

Եթե վերցնենք $x = 1$, ապա $y = 1$ (քանի որ $x = y$), իսկ z պարտադիր 0 է:

Ստացանք $p_1 = (1, 1, 0)^T$:

Բ. Երբ $\lambda = 5$ (Ամենահետաքրքիր մասը)

Լուծում ենք $(A - 5 \cdot I)X = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3-5 & -2 & 0 \\ -2 & 3-5 & 0 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Ստանում ենք հավասարումներ.

1. $-2x - 2y = 0 \Rightarrow x = -y$
2. $0 = 0$ (3-րդ տողը զրոյացավ)

Ի՞նչ է սա նշանակում:

- x և y կապված են ($x = -y$):
- z-ի մասին ոչինչ ասված չէ ($0 \cdot z = 0$): Սա նշանակում է՝ **z-ը կարող է լինել ցանկացած թիվ**:

Քանի որ ունենք երկու ազատություն (մեկը՝ y-ն ընտրելու, մյուսը՝ z-ը ընտրելու), մենք կարող ենք գտնել **2 տարբեր (անկախ) վեկտոր**:

- **Վեկտոր p_2:** Վերցնենք $y = 1$, բայց $z = 0$ (խաղանք միայն x, y-ով): $y = 1 \Rightarrow x = -1$: **Ստացանք** $(-1, 1, 0)^T$:
- **Վեկտոր p_3:** Վերցնենք $y = 0$ (որպեսզի x ու y անհետանան), բայց $z = 1$ (խաղանք միայն z-ով): **Ստացանք** $(0, 0, 1)^T$:

Քայլ 3. Ինչպե՞ս կազմեցինք P մատրիցը

Մենք ունենք 3 վեկտոր՝ p_1, p_2, p_3: Մենք դրանք պետք է շարենք կողք-կողքի որպես սյուներ:

Գրքում ընտրել են հետևյալ հերթականությունը՝ p_2, p_3, p_1:

- 1-ին սյուն (p_2): $(-1, 1, 0)^T$
- 2-րդ սյուն (p_3): $(0, 0, 1)^T$ (Գրքում սա սխալմամբ p_3-ի տեղը p_2-ից հետո չի դրվել P-ի մեջ, այլ P-ի 2-րդ սյունը $(0, 0, 1)$ է, որը համապատասխանում է p_3-ին, իսկ 3-րդ սյունը՝ $(1, 1, 0)$-ն է՝ p_1-ը):

Եկեք ստուգենք գրքի P մատրիցը.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Սյուն 1:** $(-1, 1, 0) \to$ Սա p_2-ն է ($\lambda = 5$):
- **Սյուն 2:** $(0, 0, 1) \to$ Սա p_3-ն է ($\lambda = 5$):
- **Սյուն 3:** $(1, 1, 0) \to$ Սա p_1-ն է ($\lambda = 1$):

Քայլ 4. Արդյունքը (D մատրիցը)

Քանի որ մենք P մատրիցի սյուները դասավորեցինք ($\lambda = 5, \lambda = 5, \lambda = 1$) հերթականությամբ, D մատրիցի անկյունագիծը պետք է ունենա նույն տեսքը.

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Եվ վերջում գիրքն ասում է. **«Նկատենք, որ սյուները կարելի է տեղափոխել»**:

Սա նշանակում է՝ եթե դուք P-ի մեջ սյուները դասավորեիք ուրիշ կերպ (օրինակ՝ $1, 5, 5$), ապա D-ի մեջ էլ թվերը կփոխվեին $(1, 5, 5)$, ու դա էլի ճիշտ

> կլիներ:
>
> **Ինչու՞ է սա աշխատում (Վերջին պարբերության իմաստը)**
>
> Գրքի վերջին հատվածը բացատրում է հաջողության գաղտնիքը.
>
> $\lambda = 5$-ը հավասարման մեջ հանդիպեց 2 անգամ (**հանրահաշվական պատիկություն = 2**):
>
> Եվ մենք կարողացանք նրա համար գտնել 2 հատ անկախ վեկտոր (**երկրաչափական պատիկություն = 2**):
>
> Քանի որ $2 = 2$, մենք կարողացանք կազմել լիարժեք P մատրից և խնդիրը լուծվեց: Եթե վեկտորները քիչ լինեին, չէինք կարողանա:

Այսպիսով, A մատրիցը կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի, եթե յուրաքանչյուր սեփական արժեքի հանրահաշվական և երկրաչափական պատիկությունները համընկնում են: Բացի այդ, քանի որ տարբեր սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական վեկտորները գծորեն անկախ են, ապա ճիշտ է հետևյալը.

Թեորեմ 46. Եթե A $(n \times n)$ կարգի մատրիցն ունի n իրարից տարբեր սեփական արժեքներ, ապա այն կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի:

Օրինակ 105. Դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{pmatrix}:$$

A մատրիցն ունի երեք իրարից տարբեր սեփական արժեքներ՝ $\lambda = 4; 2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}$ և ուրեմն այն կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի: Հաշվել այն P մատրիցը, որը A-ն բերում է անկյունագծային տեսքի:

Թեորեմ 46-ի հակառակը պնդումը ճիշտ չէ:

> **1. Թեորեմ 46-ի ինտուիտիվ իմաստը**
>
> **«Տարբեր ձգումներ = Տարբեր ուղղություններ»**
>
> Պատկերացրեք A մատրիցը որպես մի մեքենա, որը ձգում է վեկտորները:
>
> - **Սեփական արժեքը (**λ**)** այն թիվն է, որը ցույց է տալիս, թե *ինչքան* ուժեղ է ձգվում վեկտորը:
> - **Թեորեմն ասում է.** Եթե դուք ունեք n հատ **տարբեր** ձգման ուժեր (օրինակ՝ մեկը ձգում է 2 անգամ, մյուսը՝ 5 անգամ, երրորդը՝ 10 անգամ), ապա դրանք պարտադիր պետք է լինեն **տարբեր** ուղղությունների վրա:
>
> **Ինչու՞:**

Եթե երկու վեկտոր գտնվեին նույն ուղղի (ուղղության) վրա, նրանք չէին կարող ձգվել տարբեր ուժգնությամբ (մեկը 2 անգամ, մյուսը 5 անգամ) նույն մատրիցի կողմից:

Հետևաբար, եթե թվերը (λ) տարբեր են, ուղղությունները (v) ավտոմատ կերպով **անկախ են**:

Իսկ եթե ունենք n հատ անկախ ուղղություն, մենք հանգիստ կարող ենք կառուցել P մատրիցը և անկյունագծացնել A-ն:

---

2. Օրինակ 105-ի բացատրությունը

Դիցուք ունենք այս տգեղ թվերով մատրիցը.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{pmatrix}$$

Մեզ ասում են, որ նրա սեփական արժեքներն են՝

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 2 + \sqrt{3}, \quad \lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$$

Ինչու՞ է սա «ուրախ» օրինակ:

Մենք նույնիսկ կարիք չունենք հաշվելու սեփական վեկտորները՝ հասկանալու համար, թե արդյոք գործը կստացվի:

- Մենք ուղղակի նայում ենք թվերին. $4 \neq 2 + \sqrt{3} \neq 2 - \sqrt{3}$:
- Քանի որ **երեքն էլ իրարից տարբեր են**, Թեորեմ 46-ը մեզ տալիս է **100% երաշխիք**, որ մատրիցը կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի:

Եթե մեզ պետք լիներ կառուցել P մատրիցը, մենք պարզապես կգտնեինք յուրաքանչյուր թվին համապատասխանող վեկտորը և կշարեինք կողք-կողքի:

---

3. Ինչու՞ է «հակառակ պնդումը» սխալ

Հակառակ պնդումը կինչեր այսպես (ՍԽԱԼ).

«Եթե մատրիցը անկյունագծային է, ուրեմն նրա սեփական արժեքները պարտադիր պետք է տարբեր լինեն»:

Սա սխալ է, որովհետև դուք կարող եք ունենալ **կատարյալ անկյունագծային մատրից**, որի թվերը նույնն են:

Ամենապարզ օրինակը (Միավոր մատրից):

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Արդյո՞ք սա անկյունագծային տեսքի է: **Այո** (այն հենց անկյունագծային է):
5. Արդյո՞ք նրա սեփական արժեքները տարբեր են: **Ոչ** ($\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$):

Ինտուիտիվ անալոգիա.

- **Թեորեմ 46-ն ասում է.** «Եթե անձրև է գալիս, գետինը թաց է» (Ճիշտ է): *(Եթե թվերը տարբեր են -> անկյունագծացվում է)*
- **Հակառակ պնդումն ասում է.** «Եթե գետինը թաց է, ուրեմն անձրև է գալիս» (Սխալ է, գուցե ջրցան մեքենա է անցել): *(Եթե անկյունագծացվում է -> պարտադիր չէ, որ թվերը տարբեր լինեն. դրանք կարող են նաև կրկնվել, ինչպես միավոր մատրիցի դեպքում)*:

Օրինակ 106. Դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}:$$

Չնայած A-ի $\lambda = 3$ սեփական արժեքը կրկնապատիկ է, սակայն այն կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի (այն արդեն անկյունագծային է):

Օրինակ 107. Դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}:$$

A մատրիցն ունի երկու պատիկությամբ $\lambda = -2$ սեփական արժեք: Սակայն այս սեփական արժեքի սեփական ենթատարածությունը մեկ չափանի է, հետևաբար երկու գծորեն անկախ սեփական ֆունկցիա հնարավոր չէ գտնել: Մատրիցը հնարավոր չէ բերել անկյունագծային տեսքի:

Օրինակ 108. Դիցուք

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}:$$

A մատրիցի համար իրականացնել $A = PDP^{-1}$ վերլուծություն, որտեղ D-ն անկյունագծային մատրից է: Ստացված վերլուծության օգնությամբ հաշվել A^{100} -ը: A մատրիցի սեփական արժեքներն են $\lambda = 1; 3$: $\lambda = 1$ սեփական արժեքին համապատասխանում են երկու գծորեն անկախ սեփական վեկտորներ՝ $x_1 = (-1, 2, 0)^T, x_2 = (0, 0, 1)^T$, իսկ $\lambda = 3$ սեփական արժեքին միայն մեկ՝ $y = (1, 0, 2)^T$: Այսպիսով

D մատրիցը ստացվում է անմիջապես A մատրիցի **սեփական արժեքներից** (λ -ներից)

> «A մատրիցի սեփական արժեքներն են $\lambda = 1; 3$: $\lambda = 1$ սեփական արժեքին համապատասխանում են **երկու**... վեկտորներ, իսկ $\lambda = 3$-ին՝ **մեկ**»:

Սա նշանակում է, որ մեր սեփական արժեքների հավաքածուն հետևյալն է.

1. 1 (առաջին անգամ)
2. 1 (երկրորդ անգամ, քանի որ այն կրկնակի է և ունի 2 վեկտոր)
3. 3 (մեկ անգամ)

Կառուցենք D մատրիցը

D մատրիցը **անկյունագծային** է, ինչը նշանակում է, որ թվերը գրվում են միայն գլխավոր անկյունագծի վրա (ձախ վերևից աջ ներքև), իսկ մնացած բոլոր տեղերում **0** է:

Մենք պարզապես այդ թվերը $(1, 1, 3)$ շարում ենք անկյունագծի վրա.

$$D = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Ինչու՞ հենց այս հերթականությամբ $(1, 1, 3)$

Հերթականությունը կախված է P **մատրիցից**:

Նայենք P մատրիցի սյուներին.

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{y} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

- **1-ին սյուն (x_1):** Սա $\lambda = 1$-ի վեկտորն է $\to$ D-ի 1-ին թիվը **1** է:
- **2-րդ սյուն (x_2):** Սա նույնպես $\lambda = 1$-ի վեկտորն է $\to$ D-ի 2-րդ թիվը **1** է:
- **3-րդ սյուն (y):** Սա $\lambda = 3$-ի վեկտորն է $\to$ D-ի 3-րդ թիվը **3** է:

> **Կարճ պատասխան.** D-ն գտանք՝ պարզապես անկյունագծի վրա գրելով սեփական արժեքները $(1, 1, 3)$, հետևելով այն նույն հերթականությանը, ինչ հերթականությամբ P մատրիցում գրված են նրանց համապատասխան վեկտորները:
>
> $$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} :$$

Այսինքն $A = PDP^{-1}$: Այստեղից $A^2 = PD^2P^{-1}$ և, ընդհանրապես, $A^n = PD^nP^{-1}$: Հետևաբար՝

$$A^{100} = PD^{100}P^{-1} = \begin{pmatrix} 3^{100} & \frac{1}{2}(3^{100}-1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(3^{100}-1) & 3^{100}-1 & 1 \end{pmatrix}:$$

Սահմանում 24. $A = (a_{ij})$ մատրիցն անվանում են *ոչ բացասական մատրից* ($A \geq 0$), եթե $a_{ij} \geq 0$ և *դրական մատրից* ($A > 0$), եթե $a_{ij} > 0$:

Գործնական

Վարժություն 253

Պահանջը. Գտնել P մատրիցը, որը A-ն բերում է անկյունագծային տեսքի, և գրել այդ տեսքը (D):

ա) $A = \begin{pmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{pmatrix}$

1. **Սեփական արժեքները (λ):**

   Լուծում ենք բնութագրիչ հավասարումը՝ $\det(A - \lambda I) = 0$:

   $$(-14-\lambda)(17-\lambda) - (12 \cdot -20) = 0$$

   $$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

   Ստանում ենք՝ $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$:
2. **Սեփական վեկտորները (v):**
   - $\lambda = 1$-ի համար լուծում ենք $(A - 1I)v = 0$:

     $$\begin{pmatrix} -15 & 12 \\ -20 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -15x + 12y = 0 \Rightarrow 5x = 4y$$

     Ընտրում ենք $x = 4, y = 5$: Վեկտորը՝ $v_1 = (4, 5)^T$:
   - $\lambda = 2$-ի համար լուծում ենք $(A - 2I)v = 0$:

     $$\begin{pmatrix} -16 & 12 \\ -20 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -16x + 12y = 0 \Rightarrow 4x = 3y$$

     Ընտրում ենք $x = 3, y = 4$: Վեկտորը՝ $v_2 = (3, 4)^T$:
3. **Պատասխան՝**

   $$P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

բ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

1. **Սեփական արժեքները:**

   Քանի որ մատրիցը եռանկյուն տեսքի է, սեփական արժեքները անկյունագծի տարրերն են՝

   $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$:
2. **Սեփական վեկտորները:**
   - $\lambda = 1$-ի համար՝ $(A - I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 6x = 2y \Rightarrow y = 3x$: Վեկտորը՝ $v_1 = (1, 3)^T$:
   - $\lambda = -1$-ի համար՝ $(A + I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$: y-ը կամայական է: Վեկտորը՝ $v_2 = (0, 1)^T$:
3. **Պատասխան՝**

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

գ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. **Սեփական արժեքները:**

   Հաշվելով որոշիչը՝ ստանում ենք արմատներ՝ $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$:
2. **Սեփական վեկտորները:**
   - $\lambda = 0 \Rightarrow v_1 = (0, 1, -1)^T$:
   - $\lambda = 1 \Rightarrow v_2 = (1, 0, 0)^T$:
   - $\lambda = 2 \Rightarrow v_3 = (0, 1, 1)^T$:
3. **Պատասխան՝**

   (Նկատի ունեցեք, որ սյուների հերթականությունը կախված է նրանից, թե ինչ հերթականությամբ ենք գրում λ-ները անկյունագծի վրա):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

դ) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. **Սեփական արժեքները:**

   Եռանկյուն տեսքից երևում են՝ $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 3$:
2. **Սեփական վեկտորները:**
   - $\lambda = 2 \Rightarrow v_1 = (1, 0, 0)^T$:
   - $\lambda = 3$ (կրկնակի արմատ): Լուծում ենք $(A - 3I)v = 0$:

   $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -x - 2z = 0 \Rightarrow x = -2z$$

   Ունենք 2 ազատ փոփոխական (y և z):
     - Եթե $y = 1, z = 0 \Rightarrow x = 0$: Վեկտոր՝ $v_2 = (0, 1, 0)^T$:
     - Եթե $z = 1, y = 0 \Rightarrow x = -2$: Վեկտոր՝ $v_3 = (-2, 0, 1)^T$:
3. **Պատասխան՝**

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Վարժություն 256

Պահանջը. Հաշվել A^n-ը՝ օգտագործելով $A^n = PD^nP^{-1}$ բանաձևը:

ա) A^{10}, եթե $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. **Վերլուծություն (P և D):**
   - $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$:
   - Վեկտորներ՝ $v_1 = (1, 1)^T$ (երբ $\lambda = 1$), $v_2 = (0, 1)^T$ (երբ $\lambda = 2$):
   - $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$:
   - $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$:
2. **Հաշվարկ (A^{10}):**

$$A^{10} = P \begin{pmatrix} 1^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1024 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1024 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - 1024 & 1024 \end{pmatrix}$$

3. **Պատասխան՝**

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1023 & 1024 \end{pmatrix}$$

բ) A^6, եթե $A = \begin{pmatrix} 10 & 18 \\ -6 & -11 \end{pmatrix}$

1. **Վերլուծություն:**
   - $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$:
   - Վեկտորներ՝
     - $\lambda = 1 \Rightarrow (A - I)v = 0 \Rightarrow 9x + 18y = 0 \Rightarrow x = -2y \Rightarrow v_1 = (-2, 1)^T$:
     - $\lambda = -2 \Rightarrow (A + 2I)v = 0 \Rightarrow 12x + 18y = 0 \Rightarrow 2x = -3y \Rightarrow v_2 = (-3, 2)^T$:
   - $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$:
   - P^{-1}-ը գտնելու համար՝ $\det(P) = -4 - (-3) = -1$:
     $P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (հետաքրքիր է, որ $P = P^{-1}$):
2. **Հաշվարկ (A^6):**

$$A^6 = P\begin{pmatrix} 1^6 & 0 \\ 0 & (-2)^6 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & -192 \\ 1 & 128 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (-2)(-2) + (-192)(1) & (-2)(-3) + (-192)(2) \\ (1)(-2) + (128)(1) & (1)(-3) + (128)(2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 - 192 & 6 - 384 \\ -2 + 128 & -3 + 256 \end{pmatrix}$$

3. **Պատասխան՝**

$$A^6 = \begin{pmatrix} -188 & -378 \\ 126 & 253 \end{pmatrix}$$