

(calc lection). Շատ փոփոխականների ֆունկցիաներ

- Կուտակման կետ
- Շատ փոփոխականի ֆունկցիաներ
- Թեորեմ: Կոշիի և Հայսեի սահմանումների համարժեքությունը
- Թեորեմ: Սահմանի գոյության Կոշիի պայմանը

Կուտակման կետ

Սահմանում: Դիցուք $E \subseteq \mathbb{R}^m$: $x_0 \in \mathbb{R}^m$ կետը կոչվում է E բազմության կուտակման կետ, եթե x_0 -ի շրջակացած շրջակայթում E -ի անվերջ թվով կետեր կան առկա:

Սահմանում: x_0 -ն կոչվում է E -ի կուտակման կետ, եթե x_0 -ի կամայական շրջակայթում առկա է E -ից գոնե մեկ կետ:

Լեմմա: Եթե x_0 -ն E -ի կուտակման կետ է, ապա $\exists\{x_n\} \subset E, x_n \neq x_0$, այնպես որ $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$: Ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը:

Ապացույց: E բազմության կուտակման կետերի բազմությունը նշանակենք E' -ով: Ուսենք, որ $x_0 \in E' \implies \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in E$ ս.t. $x \in B(x_0, \varepsilon)$:

ε -ը նշանակենք $\frac{1}{n}$ $\implies \exists x_n \in E$ ս.t. $x_n \in B(x_0, \frac{1}{n})$:

- $n := 1 \implies \exists x_1 \in E$ ս.t. $x_1 \in B(x_0, 1)$
- $n := 2 \implies \exists x_2 \in E$ ս.t. $x_2 \in B(x_0, \frac{1}{2})$ Այսպիսով՝ $(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow x_0$

Շատ փոփոխականի ֆունկցիաներ

Սահմանում 1: Դիցուք $E \subseteq \mathbb{R}^m$: $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ արտապատկերմանը կանվանենք m փոփոխականի ֆունկցիա:

Օրինակներ:

- $z = f(x, y) = x^2 + y^2$
- $V(h, r) = \pi r^2 h$
- $V(a, b, c) = a \cdot b \cdot c$

Սահմանում 2: Կասենք, որ $A \in \mathbb{R}$ թիվը հանդիսանում է $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ֆունկցիայի սահման $x_0 \in E'$ կետում, եթե

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ս.t. $0 < \|x - x_0\| < \delta, x \in E \implies |f(x) - A| < \varepsilon$:

Սահմանում 3: Դիցուք $x \in E, x = (x^1, x^2, \dots, x^m)$ և $x_0 \in E', x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^m)$:

Կասենք, որ $A \in \mathbb{R}$ թիվը հանդիսանում է $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ֆունկցիայի սահման x_0 կետում, եթե

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta' = \delta'(\varepsilon) > 0 \text{ s.t. } |x^i - x_0^i| < \delta', x \in E, x \neq x_0 \implies |f(x^1, x^2, \dots, x^m) - A| < \varepsilon:$$

Ցույց տանք, որ (3) \implies (2)

Նշանակենք $\delta = \delta'$: Կունենանք, որ՝

$$|x^i - x_0^i| \leq \|x - x_0\| < \delta' \implies |x^i - x_0^i| < \delta' \implies |f(x) - A| < \varepsilon:$$

$$\text{Այսինքն՝ } \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon:$$

Հիմա (2) \implies (3)

Ունենք (2)-ը, այսինքն՝ $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ s.t. } 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$:

Վերցնենք $\delta' := \frac{\delta}{\sqrt{m}}$: Կունենանք՝

$$\|x - x_0\| = \sqrt{(x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 + \dots + (x^m - x_0^m)^2} \leq \sqrt{\left(\frac{\delta}{\sqrt{m}}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{\sqrt{m}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta}{\sqrt{m}}\right)^2} = \sqrt{m} \cdot \frac{\delta}{\sqrt{m}} = \delta$$

$$\implies \|x - x_0\| < \delta \implies (3)$$

Թեորեմ: Կոշիի և Հայնեի սահմանումների համարժեքությունը

Որպեսզի $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, որտեղ $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}^m, x_0 \in E'$), անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\forall \{x_n\} \subset E, x_n \neq x_0, x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow A$:

Ապացույց: Անհրաժեշտություն

Ենթադրենք ուսենք որ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ s.t. } 0 < \|x - x_0\| < \delta, x \in E \implies |f(x) - A| < \varepsilon \quad (*):$$

Դիտարկենք $\forall x_n \in E$ ս.t. $x_n \neq x_0, x_n \rightarrow x_0$:

$$\forall \varepsilon_0 > 0 \exists n_0(\varepsilon_0) \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n > n_0(\varepsilon_0) \implies \|x_n - x_0\| < \varepsilon_0:$$

Նշանակենք $\varepsilon_0 := \delta = \delta(\varepsilon)$: Կունենանք, որ $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ս.t. $\|x_n - x_0\| < \delta$:

Օգտվելով $(*)$ -ից՝ կունենանք, որ

$$\|x_n - x_0\| < \delta \implies |f(x_n) - A| < \varepsilon \implies f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A:$$

Ապացույց: Բավարարություն

Դիցուք $\forall \{x_n\} \subset E, x_n \neq x_0, x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow A$: Ցույց տանք, որ՝

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ s.t. } 0 < \|x - x_0\| < \delta, x \in E \implies |f(x) - A| < \varepsilon:$$

Կատարենք հակասող ենթադրություն.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in E \text{ s.t. } 0 < \|x - x_0\| < \delta, x \in E \implies |f(x) - A| \geq \varepsilon:$$

δ-ն ըստրելով $\frac{1}{n}$, կունենանք՝

$$n = 1 \implies \exists \varepsilon > 0, \exists x_1 \text{ s.t. } 0 < \|x_1 - x_0\| < 1, x_1 \in E \implies |f(x_1) - A| \geq \varepsilon$$

$$n = 2 \implies \exists \varepsilon > 0, \exists x_2 \text{ s.t. } 0 < \|x_2 - x_0\| < \frac{1}{2}, x_2 \in E \implies |f(x_2) - A| \geq \varepsilon$$

Այսպիսով՝ $x_1, x_2, \dots, x_n \rightarrow x_0$, բայց $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ չի ձգտում A -ի, ինչը հակասում է թեորեմի պայմանին:

Թեորեմ: Սահմանի գոյության Կոշիի պայմանը

Որպեսզի $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, որտեղ $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}^m, x_0 \in E'$), անհրաժեշտ է և բավարար, որ՝

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ s.t. } 0 < \|x' - x_0\| < \delta, 0 < \|x'' - x_0\| < \delta, x', x'' \in E \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Ապացույց: Անհրաժեշտություն

Դիցուք $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$: Ցույց տանք, որ (**)-ը տեղի ունի այդ դեպքում:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ s.t. } 0 < \|x - x_0\| < \delta, x \in E \implies |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Այսինքն՝

$$0 < \|x' - x_0\| < \delta \implies |f(x') - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 < \|x'' - x_0\| < \delta \implies |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Այժմ դիտարկենք հետևյալ արտահայտությունը.

$$|f(x') - f(x'')| = |f(x') - A + A - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon:$$

$$\implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon:$$

Ապացույց: Բավարարություն

Ունենք, որ (**)-ը բավարարված է: Ցույց տանք, որ սահմանը գոյություն ունի:

Վերցնենք $\forall \{x_n\} \subset E, x_n \neq x_0, x_n \rightarrow x_0$:

Կունենանք, որ $\forall \delta > 0 \exists n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ s.t. $n > n_0(\delta) \implies 0 < \|x_n - x_0\| < \delta$:

$$0 < \|x_m - x_0\| < \delta, x_m, x_n \in E \implies |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon:$$

Օգտվելով Կոշիի հաջորդականության սկզբունքից թվային հաջորդականությունների համար, կարող ենք պնդել, որ $f(x_n)$ -ը զուգամետ է, քանի որ այն ֆունկամենտալ է: Այսինքն՝ $\exists A \in \mathbb{R}$ s.t. $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$:

Այժմ ցույց տանք, որ $A \in \mathbb{R}$ թիվը կախված չէ $\{x_n\}$ հաջորդականության ընտրությունից: Կատարենք հետևյալ ենթադրությունը՝

$$x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow A$$

$$y_n \rightarrow x_0 \implies f(y_n) \rightarrow B$$

$$x_n \neq y_n, \forall n, y_n \in E$$

Կառուցենք x_0 -ին ձգտող հետևյալ հաջորդականությունը.

$$z_n = x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n \rightarrow x_0:$$

$$z_{2n} \rightarrow x_0, f(z_{2n}) \rightarrow B$$

$$z_{2n-1} \rightarrow x_0, f(z_{2n-1}) \rightarrow A$$

Քանի որ $f(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A'$, ապա $\implies B = A$: