



Հ. Ե. ԿԱՐՈՒՏԻՄԱՆ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԽՍՀ ՊԵՏԱԿԱՆ ԳՐԱԴԱՐԱՆԻ ՀԱՅԱ
ՏԱ ԳՐԱԴԱՐԱՆԻ ՎՐԱ ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՅԱ

Վ. Ե. ԳՄՈՒՐՄԱՆ

ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԵՎ
ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ
ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅԱՆ
ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒՇՄԱՆ
ԶԵՐՆԱՐԿ

Թույլատրված է ՍՍՀՄ բարձրագույն և միջնակարգ
մասնագիտական կրթության մինիստրության կողմից որպես
ուսումնական ձեռնարկ բարձրագույն տեխնիկական
ուսումնական հաստատությունների ուսանողության համար

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 1979

Գմուրման Վ. Ե.

Գ-64 Հավանականությունների տեսության և մաթեմատիկական վիճակագրության խնդիրների լուծման ձեռնարկի Աւու. Ճեռնարկի բուհների համար. —Երև. 1979. . . . էջ:

Սույն ձեռնարկում բերված են անհրաժեշտ ակսական տեղեկություններ և բանաձևեր, արված են տիպային խնդիրների լուծումներ, բերված են ինդիբներ ինքնուրույն լուծելու համար, որոնք ուզեկցված են պատասխաններով և ցուցումներով։ Մեծ ուշագրություն է դարձված փորձերի տվյալների մշակման վիճակագրական մեթոդներին։ Առաջին հրատարակությունը լույս է տեսել 1970 թ.։

Նախատեսված է բուհների ուսանողության համար. կարող է օգտակար լինել ինժեներա-տեխնիկական աշխատողների համար, ովքեր կիրառում են հավանական և վիճակագրական մեթոդները դորձնական խնդիրներ լուծելիս։

$$q = \frac{60406 \cdot 151}{702(01) 1979}$$

517.8

ԳՄԴ 22.17 յ 73

Гмурман В. Е.

Руководство к решению задач по теории
вероятностей и математической статистике

(на армянском языке)

Издательство „Луйс“

Ереван — 1979

© „Высшая школа“, 1975

© «Լույս» հրատարակչություն, թարգմանված է հայերեն,
1979 թ.

ՆԱԽԱԲԱՆ

Երկրորդ հրատարակոթյան մեջ
մտցված են ճետիլալ լրացումները,
պատահոյթների սրարզագույն հոսքը,
ցուցչալին բաշխումը, ճառալիոթյան
ֆունկցիան, երկու պատահական մե-
ծոթյունների համակարգը, վիճակա-
զրական հիպոթեզների ստուգումը,
միագործոն դիսպերուին անալիզը

Պիրսոնի հարատանիշը X գլխից տե-
ղափոխված է XIII գլխիսը, ավելաց-
ված են խնդիրներ զլիսավոր համա-
խմբոթյան ցացչալին, պատաստնալին,
բինոմական և հավասարաչափ օրենք-
ներով բաշխման մասին հիպոթեզներ
ստուգելիս արդ հայտանիշի կիրառման
վերաբերելու Բերված են խնդիրներ
նորմալ բաշխման մասին հիպոթեզի
զբաֆիկի ստուգման վերաբերելու (XIII
գլխիս, § 13):

Եռր բաժիններ մացնելու կազմակ-
ցոթյամբ ավելացված է 180 խնդիր, և
մասամբ փոփոխված է խնդիրների
համարակալումը:

Ներկա հրատարակությունը համապատասխանում է հեղինակի «Հավանականությունների տեսություն» և մաթեմատիկական վիճակագրությունը՝ դրանքին:

Ծնորհակալություն եմ հայտնում Ռ. Ս. Գուտերին՝ ցույց տրված օգնության և օգտակար խորհուրդների համար:

Հեղինակ

Առաջին մաս

ՊԱՏՍՆՀՈՒՅԹՆԵՐ

Ա. Ռ. Ա. Զ. Ե. Գ. Լ. Ա. Ի. Կ.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ՍՈՅԱՄԲՈՒՅԹԸ

§ 1. Հավանականության դասական և վիճակագրական սահմանումը

Պատահույթի հավանականության դասական սահմանումը որոշվում է:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Հավասարում ունի, որտեղ n -ը փորձի տարբական այն ելքերի թիվն է, որոնք նպաստում են A պատահույթի երեսն զարունակության փորձի հարաբեր ելքերի ընդհանուր թիվը:

Ենթադրվում է, որ ատրական ելքերը միակ հնարագործերը և հավասարականարարուներն են:

Ա պատահույթի նարարերական նախախռոչունքը որոշվում է:

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

Հավասարությունը, որտեղ m -ը այն փորձերի թիվն է, որոնցը մատնադրելու հանդես է եկել, որը կատարված փորձերի ընդհանուր թիվը:

Արդեօս պատահույթի հավանականությունը՝ վիճակագրորեն՝ սահմանելիս՝ բնույնական է նրա հարաբերական համախռոչությունը:

1. Ենագած է երկու խողոսկր (զառ): Գանել այն բանի հավանականությունը, որ նիստերի վրա հայտնված միա-

վորների գումարը զույգ է, եթե գոնե մեկ խաղոսկրի նիստին հայտնվել է վեց միավոր:

Լուծում: «Առաջին» խաղոսկրի նիստի վրա կարող է երեալ մեկ երկու, ... վեց միավոր: Համանման վեց տարրական ելքեր հնարավոր են «երկրորդ» խաղոսկրը գցելիս: «Առաջին» խաղոսկրի նետելու յորաքանչյուր ելք կարող է զուգորդվել «երկրորդ» խաղոսկրի նետելու ամեն մի ելքի հետ: Այսպիսով, փորձի հնարավոր տարրական ելքերի ընդհանուր թիվը կլինի $6 \times 6 = 36$: Այդ ելքերը միակ հնարավոր են, խաղոսկրերի համաչափության պատճառով, հավասարահնարավորներն են:

Մեզ հետաքրքրող պատահույթին (գոնե մեկ նիստին կհայտնվի վեց միավոր, հայտնված միավորների գումարը զույգ է) նպաստող են հետեւյալ հինգ ելքերը (սկզբում գրված է «առաջին» խաղոսկրի վրա հայտնված միավորների թիվը, իսկ հետո՝ երկրորդ խաղոսկրի վրա հայտնվածը, այնուհետև գտնված է միավորների գումարը):

$$\begin{array}{ll} 1) \ 6,2; \ 6 + 2 = 8, & 4) \ 2,6; \ 2 + 6 = 8, \\ 2) \ 6,4; \ 6 + 4 = 10, & 5) \ 4,6; \ 4 + 6 = 10: \\ 3) \ 6,6; \ 6 + 6 = 12, & \end{array}$$

Որոնելի հավանականությունը հավասար է պատահույթին նպաստող ելքերի թվի հարաբերությանը բոլոր հնարավոր տարրական ելքերի թվին

$$P = \frac{5}{36},$$

2. 21 միօրինակ և 10 ոչ միօրինակ դետալ պարունակող արկղը տեղափոխելիս կորել է մեկ դետալ, ըստ որում հայտնի չէ, թե ինչպիսին: Արկղից պատահականորեն հանված (տեղափոխելոց հետո) դետալը եղել է միօրինակ (ստանդարտ): Գտնել այն բանի հավանականությունը, որ կորած է եղել ա) միօրինակ դետալը, բ) ոչ միօրինակ դետալը:

Լուծում: ա) Հանված միօրինակ դետալը, ակնհայտորեն, կորածը չէ. կորած կարող է լինել մնացած երեսն (21 + 6

$+ 10 - 1 = 30$) գետալներից ցանկացածը, որոնց մեջ կա 20 միօրինակ գետալ ($21 - 1 = 20$):

Այն բանի հավանականությունը, որ կորած է եղել միօրինակ գետալը, կլինի՝

$$P = \frac{20}{30} = \frac{2}{3},$$

բ) Երեսուն գետալներից, որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է լինել կորածը, եղել է 10 ոչ միօրինակ: Հավանականությունը, որ կորել է ոչ միօրինակ գետալը, կլինի

$$P = \frac{10}{30} = \frac{1}{3},$$

Հ 3. Մտապահված է երկնիշ թիվ, որի թվանշանները տարբեր են: Գտնել հավանականությունը, որ մտապահված թիվը կլինի. ա) պատահական անվանված երկնիշ թիվը, բ) պատահական անվանված երկնիշ թիվը, որի թվանշանները տարբեր են:

$$\text{Պատ. ա)} P = \frac{1}{90}, \quad \text{բ)} P = \frac{1}{81},$$

Հ 4. Նետված է երկու խաղոսկրի: Գտնել հավանականությունը, որ նրանց վրա հայտնված միավորների հավասար կլինի 7-ի:

$$\text{Պատ.} \quad P = \frac{1}{6},$$

Հ 5. Նետված է երկու խաղոսկրի: Գտնել հետեւյալ պատահովների հավանականությունը. ա) հայտնված միավորների գումարը 8 է, իսկ տարբերությունը՝ 4, բ) հայտնված միավորների գումարը 8 է, եթե հայտնի է, որ նրանց տարբերությունը՝ 4 է:

$$\text{Պատ. ա)} P = \frac{1}{18}, \quad \text{բ)} P = \frac{1}{2},$$

Հ 6. Նետված է երկու խաղոսկրի: Գտնել հավանականությունը, որ կորած է եղել միօրինակ գետալը:

թյունը, որ նրանց վրա հայտնված միավորների գումարը
5 է, իսկ արտադրյալը՝ 4:

$$\text{Պատ.՝ } P = \frac{1}{18},$$

7. Մետաղադրամը նետված է երկու անգամ: Գտնել հավանականությունը, որ գոնե մեկ անգամ կերևա «գերբը»:

$$\text{Պատ.՝ } P = \frac{3}{4},$$

8. Տուփում կա 6 միատեսակ, համարակալված խորանարդիկ: Պատահականորեն մեկմեկ հանվում են բոլոր խորանարդիկները: Գտնել հավանականությունը, որ հանված խորանարդիկների համարները կերևան աճման կարգով:

$$\text{Պատ.՝ } P = \frac{1}{720},$$

9. Գտնել հավանականությունը, որ 3 խաղոսկր նետելիս 6-ը կհայտնվի մեկ (կարեոր չէ որ) խաղոսկրի վրա, եթե մյուս երկու խաղոսկրի վրա հայտնված միավորները տարբեր են (հավասար չեն 6-ի):

Լուծում: Փորձի տարրական ելքերի ընդհանուր թիվը հավասար է 6 տարրից 3-ական զուգորդությունների թվին, այսինքն՝ C_6^3 :

Մի նիստի վրա 6 և մյուս երկուսի վրա տարբեր (6-ին ոչ հավասար) միավորների երեալուն նպաստող ելքերի թիվը հավասար է հինգ տարրից 2-ական զուգորդությունների թվին, այսինքն՝ C_5^2 :

Որոնելի հավանականությունը հավասար է մեզ հետաքըրող պատահույթին նպաստող ելքերի թվի հարաբերությանը հնարավոր տարրական ելքերի ընդհանուր թվին.

$$P = \frac{C_5^2}{C_6^3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{2},$$

10. Կապոցում կա 20 պերֆոքարտ, որոնք համարակալված են 101, 102, ..., 120 թվերով և դասավորված են 8

կամայականորեն: Ծակողը (պերֆորատորից) պատահականորեն հանում է 2 քարտ: Գանել հավանականոթյունը, որ հանգած են 101 և 102 պերֆորատերը:

$$\Phi_{\text{առ.}} \cdot P = \frac{1}{C_{10}^2} = \frac{1}{190},$$

11. Արկղում կա միատեսակ 10 գետալ, որոնք համարակալված են 1, 2, ..., 10 համարներով: Պատահականորեն հանդում է 6 գետալ: Գտնել հավանականոթյունը, որ հանգած գետալների մեջ կլինեն: ա) № 1 գետալը, բ) № 1 և № 2 գետալները:

Լուծում: ա) Փորձի հայտափոր տարրական ելքերի թիվը հայտառը է 10 գետալներից 6-ը հանելու ձեերի թվին, այսինքն՝ C_{10}^6 :

Հաշվենք մեզ հետաքրքրող պատահանոթին նպաստակ ելքերի թիվը: Վերցրած 6 գետալների մեջ է № 1 գետալը և, հետեւբար, մնացած 5 գետալներն անեն արիշ համարներ: Արդպիսի ելքերի թիվը հայտառը է, այնհավաքական մնացած 9 գետալներից 5-ի վերցնելու ձեերի թվին, այսինքն՝ C_{10}^5 :

Արանելի հավանականոթյունը հայտառը է զիտարկիող պատահանոթին նպաստակ ելքերի թվի հարաբերաթյունը հնարքուր տարրական ելքերի բնոհանուր թվին:

$$P = \frac{C_6^5}{C_{10}^6} = \frac{C_6^1}{C_{10}^1} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = 0,6:$$

բ) Մեզ հետաքրքրող պատահանոթին (վերցրած գետալների մեջ են № 1 և № 2 գետալները, հետեւբար, 4 գետալ անեն այլ համարներ) նպաստակ ելքերի թիվը հայտառը է մնացած 8 գետալներից 4-ի վերցնելու ձեերի թվին, այսինքն՝ C_{10}^4 :

Արանելի հավանականոթյունն է:

$$P = \frac{C_8^4}{C_{10}^6} = \frac{C_8^4}{C_{10}^1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{3}:$$

12. Արկղում կա 15 գետալ, որոնցից 10-ը՝ ներկած է: Հավաքողը պատահականորեն հանում է 3 գետալ: Գտնել հավանականությունը, որ հանված գետալները ներկված կլինեն:

$$\text{Պատ.՝ } P = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{24}{91},$$

13. Ծրաբում եղած 100 լուսանկարների մեջ գտնվում է փնտրվող մի նկար: Ծրաբից պատահականորեն հանված է 10 նկար: Գտնել հավանականությունը, որ նրանց մեջ կլինի փնտրվող նկարը:

$$\text{Պատ.՝ } P = \frac{C_9^0}{C_{100}^{10}} = 0,1,$$

14. Արկղում կա 100 գետալ, որոնցից 10 հատը խոռանված է: Պատահականորեն հանված է 4 գետալ: Գտնել հավանականությունը, որ հանված գետալների մեջ՝ ա) չկան խոռանվածներ, բ) չկան պիտանիներ:

$$\text{Պատ.՝ ա) } P = \frac{C_{90}^4}{C_{100}^4} \approx 0,65, \quad \text{Պ} = \frac{C_{10}^4}{C_{100}^4} \approx 0,00005,$$

15. Սարքը կազմված է 5 տարրից, որոնցից 2-ը՝ մաշված է: Սարքը միացնելիս պատահականորեն միանում են երկուսը: Գտնել հավանականությունը, որ կմիանան մաշված տարրերը:

$$\text{Պատ.՝ } P = \frac{C_3^2}{C_5^3} = 0,3,$$

16. Հեռախոսի համարը հավաքելիս բաժանորդը մոռացել է վերջին երեք թվանշանները և հիշելով միայն, որ այդ թվանշանները աարբեր են, հավաքեց գրանք պատահականորեն: Գտնել հավանականությունը, որ հավաքված են անհրաժեշտ թվանշանները:

$$\text{Պատ.՝ } P = \frac{1}{A_{10}^3} = \frac{1}{720},$$

17. Ն գետալների խմբաքանակում ո հատը միօրինակ է։ Պատահականորեն ընտրված է ո հաս գետալ։ Գտնել հավանականությունը, որ ընտրված գետալների մեջ ճիշտ Կ-ն է միօրինակ։

Լուծում։ Փորձի հնարավոր ելքերի ընդհանուր թիվը հավասար է N գետալներից ո հանելու ձևերի թվին, այսինքն՝ C_N^m —Ն տարրից ու-ական զուգորդաթյունների թվին։

Հաշվենք մեզ հետաքրքրող պատահութիւն նպաստող ելքերի թիվը (ո գետալներից ճիշտ կ-ն է միօրինակ)։ Կ միօրինակ գետալ կարելի է վերցնել ո միօրինակ գետալներից C_n^k ձեռքով։ արդ գեպքում մնացած ու-կ գետալները պետք է լինեն ոչ միօրինակ, իսկ $N-n$ ոչ միօրինակ գետալներից ու-կ հատ կարելի է վերցնել C_{N-n}^{m-k} ձեռքով։ Հետեւաբար, նպաստող ելքերի թիվը հավասար է $C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}$ ։

Արոնելի հավանականությունը հավասար է պատահութիւն նպաստող ելքերի թվի հարաբերաթյանը՝ բոլոր տարրական ելքերի թվին։

$$P = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}.$$

18. Արտադրամասում աշխատամ են 6 ապամարզ և 4 կին։ Յացակի համարներով պատահականորեն ընտրվել է 7 մարզ։ Գտնել այն բանի հավանականությունը, որ բնարբագածների մեջ կլինեն 3 կին։

$$\text{Պատում. } P = \frac{C_6^3 \cdot C_4^4}{C_{10}^7} = 0,5,$$

19. Պահեստամ կա 15 կինեակոս, որոնցից 10-ը պատրաստվել եւ ելքովի գործարանում։ Գտնել հավանականությունը, որ պատահականորեն վերցված 5 կինեակոսների թվում 3-ը կլինեն ելքովի գործարանից։

$$\text{Պատում. } P = \frac{C_{10}^3 \cdot C_5^2}{C_{15}^5} \approx 0,1,$$

20. Խմբում կա 12 տսանող, որոնցից 8-ը գերազանցիկ են: Ցացակով պատահականորեն ընտրված է 9 տսանող: Գտնել հավանականոթյունը, որ նրանց մեջ կա 5 գերազանցիկ:

$$\text{Պատ.՝ } P = \frac{C_8^5 \cdot C_4^4}{C_{12}^9} = \frac{14}{55},$$

21. Տուփում կա 5 միատեսակ արտադրանք, ըստ որում նրանցից 3-ը ներկված են: Պատահականորեն հանված է 2 արտադրանք: Գտնել հավանականոթյունը, որ նրանց մեջ կլինեն. ա) մեկ ներկված արտադրանք, բ) 2 ներկված արտադրանք, գ) դունե մեկ ներկված արտադրանք:

$$\text{Պատ.՝ } \text{ա) } P = \frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2} = 0,6, \quad \text{բ) } P = \frac{C_3^2}{C_5^2} = 0,3, \quad \text{գ) } P = 0,9,$$

22. «Գաղտնափականքում» ընդհանուր առանցքի վրա կա 4 սկավոռակ, որոնցից յուրաքանչյուրը բաժանված է 5 սեկոորի, որոնցամ գրված են տարբեր թվանշաններ: Փականքը բացվում է միայն այն գեպքամ, եթե սկավառակները գրված են այնպես, որ նրանց վրայի թվանշանները կազմում են որոշակի քաւանիշ թիվ: Գտնել հավանականոթյունը, որ սկավառակները պատահական դասավորելիս փականքը կրացվի:

$$\text{Պատ.՝ } P = \frac{1}{5^4},$$

23. Տեխնիկական հսկողության բաժինը պատահականորեն ընտրված 100 գրքերի խմբում գտավ 5 խոտանված գիրք: Գտնել խոտանված գրքերի հանդես գալու հարաբերական հաճախությունը:

Լուծում: Ա պատահույթի հարաբերական հաճախությունը (խոտանված գրքերի հանդես գալու) հավասար է այն փորձերի թվի հարաբերությանը, որոնցում հանդես է եկել A-ն, կատարված փորձերի ընդհանուր թվին.

$$W(A) = \frac{5}{100} = 0,05;$$

24. Նպատակակետին կրակել են 20 անգամ, որից 18-ը խոցել են: Գտնել նպատակակետը խոցելու հարաբերական հաճախությունը:

Պատ. $W = 0,9$:

25. Սարքերի խմբաքանակը փորձարկելիս պիտանի սարքերի հարաբերական հաճախությունը հավասար է եղել 0,9-ի: Գտնել պիտանի սարքերի թիվը, եթե ստուգված է եղել ընդամենը 200 սարք:

Պատ.՝ 180 սարք:

§ 2. Երկրաչափական հավանականություններ

Գիցուք լ հատվածը կազմում է Լ հատվածի մասը, Լ հատվածի վրա պատահականորեն զրված է կետ Եթե ենթադրենք, որ կետի համընկնելը լ հատվածի վրա համեմատական է նրա երկարությանը և կախված չէ, Լ երկարության հատվածի վրա նրա զիրքից, ապա կետը լ հատվածի վրա բնկնելու հավանականությունը որոշվում է:

$$P = \frac{L \cdot \text{երկարություն}}{L \cdot \text{երկարություն}}$$

Հավասարությամբ:

Գիցուք ց հարթ պատկերը կազմում է Շ հարթ պատկերի մասը: Շ պատկերի վրա պատահականորեն նետված է կետ Եթե ենթադրենք, որ կետը պատկերի վրա բնկնելու հավանականությունը համեմատական է պատկերի մակերեսին և անկախ է ց-ի ձերբ ու Շ-ի նկատմամբ նրա զիրքից, ապա կետը ց-ի վրա բնկնելու հավանականությունը կորոշվի:

$$P = \frac{g \cdot \text{մակերես}}{G \cdot \text{մակերես}}$$

Հավասարությամբ:

Համանմանորեն որոշվում է կետը բնկնելու հավանականությունը տորածական Վ մարմնի մասը կազմող և պատկերի մեջ:

$$P = \frac{V \cdot \delta \text{ավալ}}{V \cdot \delta \text{ավալ}} = 1$$

26. 20 մմ երկարության Լ հատվածի վրա տեղադրված է 10 մմ երկարություն անեցող լ հատվածը: Գտնել հավանականությունը:

նությունը, որ մեծ հատվածի վրա պատահական դրված կետը կընկնի փոքր հատվածի վրա: Ենթադրվում է, որ կետը հատվածի վրա ընկնելու հավանականությունը համեմատական է հատվածի երկարությանը և կախված չէ նրա դիրքից:

$$\text{Պատ.՝ } P = \frac{1}{2};$$

27. OX թվային առանցքի և L երկարության OA հատվածի վրա պատահականորեն դրված է $B(x)$ կետը: Գտնել հավանականությունը, որ OB և BA հատվածներից փոքրը կունենա $\frac{1}{3}$ -ից ավելի երկարություն: Ենթադրվում է, որ կետը հատվածին ընկնելու հավանականությունը համեմատական է հատվածի երկարությանը և կախված չէ թվային առանցքի վրա նրա դիրքից:

$$\text{Պատ.՝ } P = \frac{L/3}{L} = \frac{1}{3};$$

28. R շառավղով շրջանում դրված է Ռ շառավղով շրջանը: Գտնել հավանականությունը, որ մեծ շրջանի մեջ պատահականորեն նետված կետը կընկնի փոքր շրջանի մեջ: Ենթադրվում է, որ կետը շրջանի մեջ ընկնելու հավանականությունը համեմատական է շրջանի մակերեսին և կախված չէ նրա դիրքից:

$$\text{Պատ.՝ } P = \frac{\pi r^2}{R^2};$$

29. Հարթությունը բաժանված է իրարից 2 անեռավորություն ունեցող զուգահեռ ուղիղներով: Հարթության վրա պատահականորեն նետված է $r < a$ շառավղով դրամը: Գտնել հավանականությունը, որ դրամը չի հատի ոչ մի ուղիղը:

$$\text{Պատ.՝ } P = \frac{2a - 2r}{2a} = \frac{a - r}{a};$$

30. Ա կողմով քառակուսիների ցանցով պատված հարթության վրա պատահականորեն նետված է $r < \frac{a}{2}$ շառավղով դրամը: Գտնել հավանականությունը, որ դրամը չի
14

հատի քառակուսու ոչ մի կողմը: Ենթադրվում է, որ կետը հարթ պատկերի մեջ ընկնելու հավանականությունը համեմատական է նրա մակերեսին և կախված չէ պատկերի դիրքից:

$$\text{Պատ.}^{\wedge} \quad P = \frac{(a-2r)^2}{a^2},$$

31. Իրարից 6 ամ հեռավորության վրա գտնվող զուգահեռ ուղիղներով բաժանված հարթության վրա պատահականորեն նետված է 1 ամ շառավիղ տնեցող շրջանը: Գտնել հավանականությունը, որ շրջանը չի հասի ոչ մի տղիղ: Ենթադրվում է, որ կետը հատվածի վրա ընկնելու հավանականությունը համեմատական է հատվածի երկարությանը և կախված չէ նրա դիրքից:

$$\text{Պատ.}^{\wedge} \quad P = \frac{6-2}{6} = \frac{2}{3},$$

32. Հարթության վրա գծված են 2 համակենտրոն շրջանագծեր, որոնց շառավիղները համապատասխանաբար 5 ամ և 10 ամ են: Գտնել հավանականությունը, որ մեծ շրջանի մեջ պատահականորեն նետված կետը կընկնի շրջանագծով կազմված օղակի մեջ: Ենթադրվում է, որ կետի հարթ պատկերի մեջ ընկնելու հավանականությունը համեմատական է արդ պատկերի մակերեսին և կախված չէ նրա դիրքից:

$$\text{Պատ.}^{\wedge} \quad P = \frac{10^2 - 5^2}{10^2} = 0,75,$$

33. Ք շառավիղ տնեցող շրջանի մեջ պատահականության գցված է կետը: Գտնել հավանականությունը, որ կետը կգտնվի շրջանին ներդած՝ ա) քառակուսու, բ) կանոնավոր եռանկյան մեջ: Ենթադրվում է, որ շրջանի մասի մեջ կետը ընկնելու հավանականությունը համեմատական է արդ մասի մակերեսին և կախված չէ շրջանի նկատմամբ նրա դիրքից:

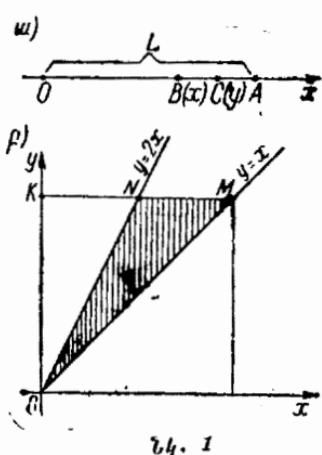
$$\text{Պատ.}^{\wedge} \quad \text{ա)} \quad P = \frac{2}{\pi}, \quad \text{բ)} \quad P = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi},$$

34. Արագ պատվող սկավառակը բաժանված է զուգ

թվով սեկտորների, որոնք փոփոխակիորեն ներկված են սպիտակ և սև գույներով: Սկավառակի վրա կրակում են: Գտնել հավանականությունը, որ գնդակը կընկնի սպիտակ սեկտորներից մեկի վրա: Ենթադրվում է, որ գնդակի ընկնելը հարթ պատկերի մեջ համեմատական է նրա մակերեսին:

$$\text{Պատմ. } P = -\frac{0,5 \pi R^2}{\pi R^2} = 0,5,$$

35. Ox թվային առանցքի L երկարության OA հատվածի վրա պատահականորեն դրված են $B(x)$ և $C(y)$ կետերը, ընդորում $y \geq x$: (C կետի կոորդինատը հետագա շարադրանքի հարմարության համար նշանակված է $y=x$): Գտնել հավանականությունը, որ BC հատվածի երկարությունը կլինի փոքր OB հատվածի երկարությունից (նկ. 1, ա): Ենթադրը վում է, որ հատվածի վրա կետի ընկնելու հավանականությունը համեմատական է հատվածի երկարությանը և կախված չէ թվային առանցքի վրա նրա գիրքից:



նկ. 1

Լուծում: B և C կետերի կոորդինատները պետք է բավարարեն

$$0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L, y \geq x$$

անհավասարություններին:

Դիտարկենք xOy լուղանկյուն կոորդինատային համակարգը: Այդ համակարգում N ըշշված անհավասարություններին բավարարում են OKM ուղղանկյուն եռանկյանը պատկանող ցանկացած կետի կոորդինատները (նկ. 1, թ): Այսպիսով, այդ եռանկյանը կարելի է նայել որպես հարթ պատկեր, որի կետերի կոորդինատները ներկայացնում են համապատասխանաբար B և C կետերի կոորդինատների բոլոր հնարավոր արժեքները:

BC հատվածի երկարությունը պետք է փոքր լինի OB

Հասկածի երկարությունից, այսինքն պետք է տեղի տնենու
 $y - x < x$

անհավասարությունը, կամ, որ նույնն է:

$$y < 2x;$$

Վերջին անհավասարությունը տեղի է ունենամ Ը պատկերի (ՕԿՄ ողղանկյուն եռանկյան) այն կետերի կոորդինատների համար, որոնք ընկած են $y = 2x$ ողղից (ՕՆ ողիղը) ներքեւ: Խնչպես երեսում է նկ. 1, ը-ից բոլոր այդ կետերը պատկանում են ՕՆՄ ստվերագծված եռանկյանը:

Այսպիսով, այդ եռանկյունը կարելի է դիտարկել որպես պատկեր, որի կետերի կոորդինատները մեզ հետաքրքրող պատճենաթիւն (BC հասկածի երկարությունը փոքր է ՕԲ հատվածի երկարությունից) բարենպաստ են:

Որոնելի հավանականությունն է՝

$$P = \frac{m_{\Delta} \cdot g}{m_{\Delta} \cdot G} = \frac{m_{\Delta} \cdot \text{ONM}}{m_{\Delta} \cdot \text{OKM}} = \frac{1}{2},$$

36. ՕX թվային առանցքի Լ. երկարության ՕԱ հասկածի վրա պատահականորեն զրված են երկու կետ՝ B(x) և C(y): Գտնել հավանականությունը, որ BC հասկածի երկարությունը կլինի փոքր, քան O կետի հեռավորությանը իրեն ամենամու կետից: Ենթադրվում է, որ կետը հասկածի վրա ընկնելու հավանականությունը համեմատական է նրա երկարությանը և կախված չէ թվային առանցքի վրա նրա դիրքից:

Պատ.՝ Կոորդինատների հարաբերություններն են՝
 $0 < x < L, 0 < y < L; \text{ նպաստող } \text{արժեքներն են՝ } x < y < x, y > x, x - y < y, y < x; P = \frac{1}{2},$

37. ՕX թվային առանցքի Լ. երկարության ՕԱ հասկածի վրա պատահականորեն զրված են B(x) և C(y) կետերը, ընդ որում $y \geq x$: Գտնել հավանականությունը, որ BC հասկածի երկարությունը կլինի փոքր $\frac{L}{n}$ -ից: Ենթադրվում է, որ

կետը հատվածի վրա ընկնելու հավանականությունը համեմատական է երկարությանը և կախված չէ թվային առանցքի վրա նրա գիրքից:

Պատ.՝ Կոորդինատների հնարավոր արժեքներն են. $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L$, $y \geq x$; Կոորդինատների նպաստավոր արժեքներն են. $y - x < \frac{L}{2}$. $P = 0,75$:

38. ОX թվային առանցքի L երկարության OX հատվածի վրա պատահականորեն դրված են երկու կետ՝ $B(x)$ և $C(y)$: Դանել հավանականությունը, որ BC հատվածի երկարությանը, իսքը կլինի $\frac{L}{2}$ -ից: Ենթադրվում է, որ կետի հատվածի վրա ընկնելու հավանականությունը համեմատական է հատվածի երկարությանը և կախված չէ թվային առանցքի վրա նրա գիրքից:

Պատ.՝ Կոորդինատների հնարավոր արժեքներն են.՝ $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L$, կոորդինատների բարենպաստ արժեքներն են՝ $y - x < \frac{L}{2}$, $y > x$, $x - y < \frac{L}{2}$, $y < x$; $P = 0,75$:

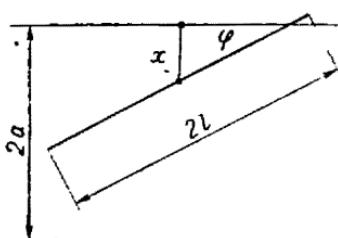
39. Բյութֆունի խնդիրը (Ֆրանսիական բնախույզ, XVIII դ.) Հարթությունը տողված է միմյանցից 2a հեռավորության վրա գոնվող զագահեռ տղիղներով: Հարթության վրա պատահականորեն գցում են $2l(l < a)$ երկարության ասեղը: Գտնել հավանականությունը, որ ասեղը չի հատի որևէ ուղղությունը:

Լուծում: Մայցենք նշանակումներ. X-ը ասեղի միջնակետի հեռավորաթյունն է մոտակա զագահեռից. Փ-ն՝ այդ զուգահեռի և ասեղի կազմած անկյունը (նկ. 2, ա):

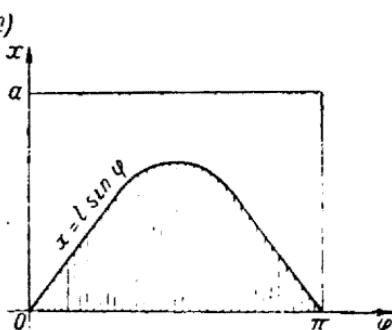
Ասեղի գիրքը լիովին որոշվում է x -ին և ϕ -ին որոշակի արժեքներ տալով, ընդունում է Օ-ից մինչև ա ընկած արժեքները, ϕ -ի հնարավոր արժեքները փոփոխվում են 0-ից մինչև π: Այլ կերպ ասած, ասեղի միջնակետը կարող է ընկնել չեն կողմերով ուղղանկյան ցանկացած կետ (նկ. 2, բ): Այսպիսով, այդ ուղղանկյունը կարելի է դիտարկել որպես մի շատ պատկեր, որի կետերը իրենցից

Ներկայացնում են ասեղի միջնակետի բոլոր հնարավոր դիրքերը: Ակնհայտ է, որ G պատկերի մակերեսը $\pi \cdot a$ է:

ա)



բ)



նկ. 2

Գանհնք այժմ այն ց պատկերը, որի լորաքանչյուր կեռ նպաստավոր է մեզ հետաքրքրող պատահական թիվն, ալորինքն այդ պատկերի լորաքանչյուր կեռ կարող է ծառալիև որպես ասեղի կենտրոն, որ հատում է մուսակա զոգահեռը Ինչպես երեսմ է շահ նկարից, ասեղը կհատի մուսակա զոգահեռը $x = l \cdot \sin \varphi$ պարմանի դեպքում, ալորինքն՝ հիմ ասեղի միջնակետը ընկնի նկ. 2, ըստ վրա սակերտված պատկերի լորաքանչյուր կեռը:

Ալորինք, սակերտված պատկերը կարելի է զիտել որպես ց պատկեր:

Գանհնք ց պատկերի մակերեսը:

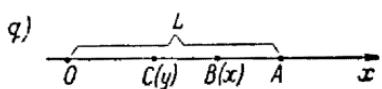
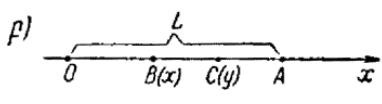
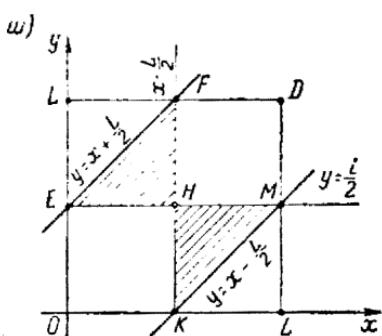
$$d\text{ակ. } g = \int_0^{\pi} l \sin \varphi d\varphi = -l \cos \varphi \Big|_0^{\pi} = 2l:$$

Որոնելի համանականաթիւններ, որ ասեղը կհատի ազիգր, կլինի:

$$P = \frac{d\text{ակ. } g}{d\text{ակ. } G} = \frac{2l}{\pi a},$$

40. ՕՇ թվային սռանցքի Լերկաբության ՕԱ համաժամկետ պատահականորեն զրկված են 2 կետ՝ $B(x)$ և $C(y)$:

Գտնել հավանականությունը, որ ստացված երեք հատվածներից կարելի է կտրմել եռանկյուն:



նկ. 3

պետք է բավարարեն կրկնակի անհավասարություններին.

$$0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq L:$$

Այս անհավասարություններին բավարարում են OOLD (նկ. 3, ա) քառակուսու ցանկացած $M(x,y)$ կետի կոորդինատները: Այսպիսով, այս քառակուսին կարելի է զիսել որպես Շ պատկեր, որի կետերի կոորդինատները իրենցից ներկայացնում են Բ և Ծ կետերի կոորդինատների բոլոր հնարավոր արժեքները:

1. Դիցոք Ծ կետը ընկած է Բ-ից աջ (նկ 3, թ): Ինչպես վերը ցույց է տրված, OB, BC, CA հատվածների երկարությունները պետք է փոքր լինեն $\frac{L}{2}$ -ից, այսինքն՝ պետք է աեղի ունենան

$$x < \frac{L}{2}, \quad y - x < \frac{L}{2}, \quad L - y < \frac{L}{2} \quad (*)$$

Լուծում: Որպեսզի երեք հատվածներով հընաբավոր լինի կառուցել եռանկյուն, անհրաժեշտ է, որ նրանցից յուրաքանչյուրը փոքր լինի մյուս երկուսի գումարից: Քանի որ բոլոր հատվածների գումարը L է, ապա հատվածներից յուրաքանչյուրը պիտք է փոքր լինի $\frac{L}{2}$ -ից:

Դիտարկենք ԽՕՍ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգը: Յանկացած երկու Յ և Ծ կետերի կոորդինատները անհավասարություններին.

անհավասարությանները, կամ, որ նույնն է,

$$x < \frac{L}{2}, \quad y < \frac{L}{2} + x, \quad y > \frac{L}{2},$$

2. Դիցուք C կետը ընկած է Ե-ից ձախ (նկ. 3, զ): Այս գեղքամ պետք է անդի անհենան

$$y < \frac{L}{2}, \quad x - y < \frac{L}{2}, \quad L - x < \frac{L}{2}$$

անհավասարությանները կամ, որ նույնն է,

$$y < \frac{L}{2}, \quad y > x - \frac{L}{2}, \quad x > \frac{L}{2}; \quad (*)$$

Ինչպես երեսմ է նկ. 3, ա-ից, $(*)$ անհավասարությանները անդի են անհենամ ԵԲՀ ևսանկլան կետերի կոորդինատների համար, իսկ $(**)$ անհավասարությանները՝ ԿԱՄ ևսանկլան կետերի: Այսպիսավ, առփերազգած ևսանկլանները կարելի է պահել սրան ու պատկերը, որի կետերի կառողինանները նույնասակար են մեկ հետոքքը պատշաճթին (եթեք հասպածներից կարելի է կոսուցել ևսանկլան):

Որոնելի համանականությունը կլինի:

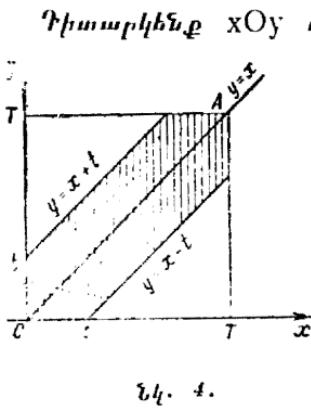
$$P = \frac{m_{\text{ակ}} \cdot \Omega_1}{m_{\text{ակ}} \cdot \Omega_1} = \frac{m_{\text{ակ}} \cdot \Delta \text{ԵԲՀ}}{m_{\text{ակ}} \cdot \Delta \text{ԿԱՄ}} = \frac{1}{4}.$$

41. Ազգանշանիչն ընդունում է՝ ազգանշաններ երկու սարքերից, բնդ սրամ լարաքանչչար ազգանշանի մասաբը համապատճենաբանվոր է: Տ երկարության ժամանակամիջացի բարաքանչչար ակնթարթին: Ազգանշանիչը կաշխատի, եթե ազգանշանները մանելու ակնթարթների սարքերությունը փոքր է Ե-ից ($\ll T$): Գանել համանականությունը, որ ազգանշանիչը Տ ժամանակամիջացամ կաշխատի, եթե լուրացանչչար սարք ազգարկում է մեկ ազգանշան:

Ես ծառաւ 1 և 11 ազգանշանները մանելու ակնթարթները նշանակինք համապատասխանաբառը՝ x -ով և y -ով: Եսու

Խանդրի պայմանի պետք է տեղի ունենան հետևյալ կրկնակի անհավասարությունները՝

$$0 \leqslant x \leqslant T, \quad 0 \leqslant y \leqslant T.$$



Նկ. 4.

Դիտարկենք xOy ռեզանտիլյոն կոորդինատային համակարգը: Այս համակարգում անհավասարություններին բավարարում են ՕՏԱՏ քառակուսու ցանկացած կետի կոորդինատները (նկ. 4): Այսպիսով, այս քառակուսին կարելի է գիտել որպես G պատկեր, որի կետերի կոորդինատաները իրենցից ներկայացնում են ազդանշանները մտնելու ակնթարթների բոլոր հնարավոր արժեքները:

Ազդանշանիչը կաշխատի, եթե ազդանշանները մտնելու ակնթարթների տարրերությունը փոքր է t -ից, այսինքն՝

$$y - x < t, \quad \text{երբ} \quad y > x$$

և

$$x - y < t, \quad \text{երբ} \quad x > y,$$

կամ, որ նույնին է,

$$y < x + t, \quad \text{երբ} \quad y > x \tag{*}$$

$$y > x - t, \quad \text{երբ} \quad y < x \tag{**}$$

(*) անհավասարությունը տեղի ունի G պատկերի այն կետերի կոորդինատների համար, որոնք ընկած են $y = x$ տղից վերև և $y = x + t$ տղից ներքև, (**) անհավասարությունը տեղի ունի $y = x$ տղից ներքև և $y = x - t$ տղից վերև ընկած կետերի համար:

Ինչպես երեսմ է նկ. 4-ից, բոլոր կետերը, որոնց կոորդինատները բավարարում են (*) և (**) անհավասարություններին, պատկանում են ստվերագծված զեցանկանը: Այսպիսով, այդ վեցանկյունը կարելի է գիտել որպես G պատ-

կեր, որի կետերի կոորդինատները նպաստում են ազգանշանիչի աշխատելուն ժամանակի և և յ ակնթարթներին:

Որոնելի հավանականությունը՝

$$P = \frac{d\omega_k \cdot g}{d\omega_k \cdot G} = \frac{T^2 - 2 \cdot \frac{(T-1)^2}{2}}{T^2} = \frac{t(2T-t)}{T^2},$$

42. Խնդիր հանդիպման վերաբերյալ: Երկու տաճանող պարմանավորվել են հանգիւպիլ որոշակի վայրում օրվա 12 և 13 ժամերի միջև: Առաջին եկողը սպասում է երկրորդին $\frac{1}{4}$ ժամ, որից հետո հեռանամք է: Գոնել հավանականությունը, որ հանգիւպտամը կիալանու, եթե լորաքանչյուր տաճանող պատահական է ընտրում իր գալա ակնթարթը (12-ից մինչև 13-ը ժամերի միջակալվում):

$$\text{Պատ. } P = \frac{7}{16},$$

43.* Գոնել հավանականությունը, որ 1.-ից ոչ շատ երկարություն անհյուղ երեք պատահական վերցրած համաժաներից կարելի է կառացել եռանկյան: Ենթադրվում է, որ կետի տարածական մարմնի մեջ բնկնելու հավանականությունը համեմատական է մարմնի ծավալին և անկախ է նրա դիրքից:

Ցուցում: Գիտարկել տարածական կոորդինատային համակարգ:

Պատ. Կոորդինատների համարակարգը արժեքներն են՝ $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$, կոորդինատների նոպաստավոր արժեքներն են՝ $x \leq y \leq z, y \leq z \leq x, z \leq x \leq y$: $P = \frac{1}{2}$:

44. Պատահականորեն վերցվոծ են 2 զրական թվեր՝ x և y , որոնցից լորաքանչյուրը չի գերազանցամ 2-ին: Գոնել հավանականությունը, որ xy որագրությունը մեծ չէ 1-ից, իսկ $\frac{y}{x}$ քանորդը մեծ չէ 2-ից:

Պատ.՝ Կոորդինատների համարակարգը արժեքներն են՝ $0 \leq x \leq 2,$

$0 < y \leq 2$, կոորդինատների նորմանուավոր արժեքներն են՝ $0 < x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$0 < y \geq \sqrt{2}$, և $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 2$, $\frac{1}{2} \leq y \leq 2$; $P = \frac{1 + 3\ln 2}{8} \approx 0,38$.

45. Պատահականորեն վերցված են 2 գրական թվեր՝ x և y , որոնցից յարաքանչյուրը չի գերազանցում 1-ին: Դանել հավանականությունը, որ $x + y$ գումարը չի գերազանցում 1-ին, իսկ xy արտադրյալը փոքր չէ 0,09-ից:

Պատ.՝ Կոորդինատների հնարավոր արժեքներն են՝ $0 < x \leq 1$, $0 < y \leq 1$; Կոորդինատների նորմանուավոր արժեքներն են՝ $0,1 \leq x \leq 0,9$, $0,1 \leq y \leq 0,9$. $P \approx 0,2$:

ԵՐԿՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ ՀԻՄՆԱԽԱՆ ԹԵՇՐԵՋՆԵՐ

§ 1. Հավանականությունների գումարման և բազմապատկման թեորեմները

Հավանականությունների գումարման թեորեմը անհամատեղելի պատահույթների համար: Եթիու անհամատեղելի պատահույթներից մեկի, միանույնն է թե որի, հանդես գալու հավանականությունը հավասար է այդ հայտահականությունների գումարին.

$$P(A + B) = P(A) + P(B);$$

Հետեւ քանի զույգ առ զույգ անհամատեղելի պատահույթներից մեկի, միանույնն է թե որի, հանդես գալու հավանականությունը հավասար է այդ պատահույթների համարին.

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n);$$

Հավանականությունների գումարման թեորեմը համատեղելի պատահույթների համար: Եթիու համատեղելի պատահույթներից գոնեւ մեկի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է այդ պատահույթների հավանականությունների գումարին առանց նրանց համատեղ հանդես գալու հավանականության:

$$P(A - B) = P(A) - P(B) - P(A \cdot B);$$

Թեորեմը կարելի է ընդհանրացնել ցանկացած վերջավոր բառի համատեղելի պատճենույթների համար։ Օրինակ, Յ համատեղելի պատճենույթների համար ունենք.

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - \\ - P(BC) + P(ABC)$$

Հավանականությունների բազմապատկման թեորեմը անկախ պատճենույթների համար։ Եթիւ անկախ պատճենույթների համատեղ հանդես գալու հավանականությունը հավասար է այդ պատճենույթների հավանականությունների արտադրյալին։

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B),$$

Հետեւ ՞ Համախմբության մեջ անկախ մի քանի պատճենույթների հանդես գալու հավանականությունը հավասար է այդ պատճենույթների հավանականությունների արտադրյալին։

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n),$$

Հավանականությունների բազմապատկման թեորեմը կախված պատճենույթների համար։ Եթիւ կախյալ պատճենույթների համատեղ հանդես գալու հավանականություններ հավասար է նրանց մեջի հավանականությունների արտադրյալին։

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B),$$

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A),$$

Հետեւ ՞ Մի քանի կախյալ պատճենույթների համատեղ հանդես գալու հավանականություններ հավասար է նրանցից մեկի հավանականությունը բազմապատկած մեջացած բոլորի պայմանական հավանականություններուի Ըստ սրամ յուրաքանչյուր հաջորդի հավանականություններ հաշվում է այն պայմանով, որ բոլոր նախարդություններ աեղի են ունեցել։

$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \dots P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$,
որտեղ $P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$ -ը A_n պատճենույթի հավանականությունն է, եթե հայտնի է, որ $(A_1 \cdot A_2) \dots A_{n-1}$ պատճենույթները աեղի են ունեցել։

46. Գրագարանի շարտարկի վրա պատճենաբանորեն պրած են 15 գառագիրք, որոնցից 5-ը՝ կազմուի Գրագարանայի պատճենականորեն մերցնում է Յ գառագիրք։

Դաշնել հավանականությունը, որ վերցրած դասագրքերից գոնե մեկը կազմով է (Ա պատճենով):

Լուծում: Առաջին եղանակ: Պահանջը՝ վերցրած Յ դասագրքերից գոնե մեկը կազմով է — կլատարվի, եթե հանդես գա հետեւալ Յ անհամատեղելի պատահութներից ցանկացածը. Ե՞նչ մեկ դասագիրքը կազմով է, իսկ մնացած 2-ը՝ անկազմ, Յ-ն՝ 2 դասագիրք կազմով են, 1-ը՝ անկազմ, Յ-ն՝ Յ դասագրքերն էլ կազմով են:

Մեր հետաքրքրող Ա պատահութը (վերցրած Յ դասագրքերից գոնե մեկը կազմով է) կարելի է ներկայացնել որպես այդ Յ պատահութների դումար.

$$A = B + C + D;$$

Դաս դումարման թեորեմի՝

$$P(A) = P(B) + P(C) + P(D); \quad (*)$$

Գանենք Յ, Յ, Յ պատահութների հավանականությունը (աես զլ. 1, § 1-ի 17-րդ խնդրի լուծումը).

$$P(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{45}{91}, \quad P(C) = \frac{C_5^3 \cdot C_{10}^1}{C_{15}^3} = \frac{20}{91}, \quad P(D) = \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{2}{91},$$

Տեղադրելով այս հավանականությունները (<*) հավասարության մեջ, վերջնականապես կունենանք.

$$P(A) = \frac{45}{91} + \frac{20}{91} + \frac{2}{91} = \frac{67}{91};$$

Եթե որդեգութանակ այս հավանականությունները (<վերցրած Յ դասագրքերից գոնե 1-ը կազմով է) և \bar{A} (<վերցրած դասագրքերից ոչ մեկը կազմով չէ) պատահութը իրար հակադիր են, հետեւապես

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

(Երկու հակադիր պատահութների հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի),

Արտեղից

$$P(A) = 1 - P(\bar{A});$$

Ապատահույթի հանդես գալու հավանականությունը (վերցրած դասագրքերից ոչ մեկը կազմով չէ)

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{24}{91};$$

Արոնելի հավանականությունը

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91};$$

47. Արկղում կա 10 գետալ, որոնցից 4-ը ներկլած է: Հավաքողը պատահականորեն վերցնում է 3 գետալ: Գանել հավանականությունը, որ վերցրած գետալներից գոնե մեկը ներկլած է:

$$\text{Պատ.՝ } P = 1 - \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{5}{6},$$

48. Ապացացել, որ եթե A պատահույթից հետևում է B պատահույթը, ապա $P(B) \geq P(A)$:

Լուծում: B պատահույթը կարելի է ներկայացնել A և \bar{A} անհամատեղելի պատահույթների գոմարի տեսքով:

$$B = A + \bar{A}B,$$

Անհամատեղելի պատահույթների համար հավանականությունների գոմարման թեսքեմից

$$P(B) = P(A + \bar{A}B) = P(A) + P(\bar{A}B),$$

Քանի որ $P(\bar{A}B) \geq 0$, ապա $P(B) \geq P(A)$:

49. A_1 և A_2 անկախ պատահույթների հանդես գալու հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են P_1 -ի և P_2 -ի: Գանել նրանցից միայն մեկի հանդես գալու հավանականությունը:

Լուծում: Մագնենք պատահույթների հետեւալ նշանակումները.

B_1 անդի է անեցել միայն A_1 պատահույթը, B_2 անդի է անեցել միայն A_2 պատահույթը:

B_1 պատահույթի հանդես գալը համարժեք է $A_1\bar{A}_2$ պատահույթի հանդես գալուն (առաջին պատահույթը հանդես է եկել և երկրորդը՝ ոչ), $A_1 = A_1 \cdot \bar{A}_2$:

B_2 պատահույթի հանդես գալը համարժեք է \bar{A}_1A_2 պատահույթի հանդես գալուն (երկրորդ պատահույթը հանդես է եկել և առաջինը՝ ոչ), $A_2 = \bar{A}_1 \cdot A_2$:

Այսպիսով, որպեսզի գտնենք A_1 և A_2 պատահույթներից միայն մեկի հանդես գալու հավանականությունը, բավական է գտնել B_1 և B_2 պատահույթներից մեկի, կարևոր չէ որի, հանդես գալու հավանականությունը: B_1 և B_2 պատահույթներն անհամատեկելի են, ուստի կիրառելի է գումարման թեորեմը.

$$P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2): \quad (*)$$

Մնամ՝ է գտնել B_1 և B_2 պատահույթներից յուրաքանչյուրի հավանականությունը: A_1 և A_2 պատահույթներն անկախ են, հետեւարար, անկախ են A_1 և \bar{A}_2 , ինչպես նաև \bar{A}_1 և A_2 պատահույթները, ուստի կիրառելի է բազմապատկերական թեորեմը:

$$P(B_1) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) = p_1 \cdot q_2,$$

$$P(B_2) = P(\bar{A}_1 \cdot A_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) = q_1 \cdot p_2:$$

Տեղադրելով այս հավանականությունները (<*) առնչության մեջ, կգտնենք A_1 և A_2 պատահույթներից միայն մեկի հանդես գալու որոնելի հավանականությունը.

$$P(B_1 + B_2) = p_1 q_2 + p_2 q_1:$$

50. Վիճարի ազդանշանման համար դրված են երկու անկախ գործող ազդանշանիչներ: Հավանականությունը, որ վիճարի գեղքում ազդանշանիչը կաշխատի՝ I ազդանշանիչի

համար հավասար է 0,95-ի, իսկ Ա-ի համար՝ 0,9-ի: Գըտնել հավանականությունը, որ վիթարի գեպքամ կղործի միայն մեկ ազդանշանիչը:

Փառ.՝ $P = 0,14$:

51. Երկու հրածիգ կրակում են թիրախին: Մեկ կրակուցով թիրախին զիպչելու հավանականությունը 1 հրածի համար հավասար է 0,7-ի, իսկ Ա-ի համար՝ 0,8-ի: Գանել հավանականությունը, որ մեկ համազարկի գեպքամ թիրախին կդիպչի միայն հրածիգներից մեկը:

Փառ.՝ $P = 0,38$:

52. Երկու հրանոթից մեկ համազարկի գեպքամ նպատակին մեկ անգամ զիպչելու հավանականությունը համար է 0,38-ի: Գանել առաջին հրանոթով մեկ անգամ կրակելիս նպատակին խոցելու հավանականությունը, եթե հարունի է, որ երկրորդ հրանոթի համար այդ հավանականությունը համար է 0,8-ի:

Փառ.՝ $P = 0,7$:

53. Տեխնիկական հակոգության բաժինը ստուգամ է՝ սորքերի միօրինակաթյունը: Հավանականությունը, որ սորքը միօրինակ է, համար է 0,9-ի: Գանել հավանականությունը, որ ստուգամ երկու սորքերից միայն մեկն է միօրինակը:

Փառ.՝ $P = 0,18$:

54. Հավանականությունը, որ որեւ գիպիկական մեծություն մեկ անգամ չափելիս թաղը կարգի սխալ, որը կգերազանցի արգած ճշտությունը, համար է 0,4-ի: Կառարիգած են երեք անկախ չափումները Գանել հավանականությունը, որ նրանցից միայն մեկի գեպքամ թաղը արգած սխալը կցուցանցի արգած ճշտությունը:

Փառ.՝ $P = 0,432$:

55. Արտադրանքի մասնակից ապրանքագիր բնարամ է բարձր ահանգի արտադրանքը Հավանականությունը, որ պա-

տահական վերցրած արտադրանքը կլինի բարձր տեսակի, հավասար է 0,8-ի: Գտնել հավանականությունը, որ սառուցված Յ արտադրանքից միայն 2-ն են բարձր տեսակի:

Պատ.՝ $P = 0,384$:

56. Ուսանողը Յ աեղեկագրքերում փնտրում է իրեն պետք եկած բանաձեռը: Հավանականությունը, որ բանաձեռը պարունակվում է I, II և III աեղեկագրքերում, համապատասխանաբար հավասար է 0,6-ի, 0,7-ի, 0,8-ի: Գտնել հավանականությունը, որ բանաձեռը պարունակվում է:
ա) միայն մեկ տեղեկագրքում, բ) միայն 2 տեղեկագրքերում, գ) բոլոր Յ աեղեկագրքերում:

Պատ.՝ ա) $P = 0,188$, բ) $P = 0,452$, գ) $P = 0,336$:

57. Հավանականությունները, որ հավաքողին անհրաժեշտ գետալը գտնվում է I, II, III և IV արկղերում, համապատասխանաբար հավասար են 0,6-ի, 0,7-ի, 0,8-ի, 0,9-ի: Գտնել հավանականությունը, որ գետալը գտնվում է:
ա) 3-ից ոչ ավելի արկղերում, բ) 2-ից ոչ պակաս արկղերում:

Պատ.՝ ա) $P = 0,6976$, բ) $P = 0,9572$:

58. Դցված են Յ խաղոսկրի: Գտնել հետելալ պատահոյթների հավանականությունները: ա) լուրաքանչլուրի վրա կրացվի 5 միավոր, բ) բոլորի վրա կրացվեն հավասար թվով միավորներ:

Պատ.՝ ա) $P = \frac{1}{6^3}$, բ) $P = 6 \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{1}{36}$,

59. Դցված են Յ խաղոսկրի: Գտնել հետելալ պատահոյթների հավանականությունները: ա) երկուսի վրա կհայտնվի 1 միավոր, իսկ երրորդի վրա՝ այլ թվով միավորներ, բ) երկուսի վրա կհայտնվեն հավասար միավորներ, իսկ երրորդի վրա այլ թվով միավորներ, գ) բոլորի վրա կհայտնվեն տարբեր միավորներ:

Պատ.՝ ա) $P = C_3^2 \cdot \frac{1}{6^2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{72}$, բ) $P = \frac{5}{12}$, գ) $P = \frac{5}{9}$:

60. Քանի՞ խաղոսկր պետք է զցել, որ 0,3-ից քիչ հագանականությամբ սպասելի լինի, որ ոչ մեկի վրա 6 միավոր չի երևա:

Լուծում: Մացնենք հետևյալ պատահությունների հաշանակումները:

Այս ոչ մի խաղոսկրի վրա 6 միավոր չի հայտնվի. Այս իրդի վրա ($i = 1, 2, \dots, n$) 6 միավոր չի հայտնվի:

Մեզ հետաքրքրող Λ պատահություն է $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ պատահությունների համատեղվելուն, $\Lambda = \Lambda_1 \Lambda_2 \dots \Lambda_n$

Հայտնիված միավորների թիվը հավասար չէ 6-ի, հայտնար է

$$P(\Lambda) = \frac{5}{6},$$

Այս պատահությունները համախմբության մեջ անհամառեցելի են, առաջի կիրառելի է բազմապատկման թեորեմը:

$$P(\Lambda) = P(\Lambda_1 \Lambda_2 \dots \Lambda_n) = P(\Lambda_1) \cdot P(\Lambda_2) \dots P(\Lambda_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n:$$

Հոսու պայմանի $\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,3$, չհանդիպար, $n \cdot \log \frac{5}{6} < \log 0,3$. Այսպիսով, խաղոսկրերի սրոնելի թիվը՝ $n > 7$:

61. Մեկ կրակոցով ճրածդի թիրախին զիազելու հայտնականությանը 0,8 է: Քանի՞ կրակոց պեսաք է նու կրաքարի, որպեսզի 0,4-ից փոքր հավանականությունը կարելի լիներ սպասել, որ ոչ մի վրիսում չի լինի:

Պատճեն: $n \geq 5$:

62. Ք շատավայ շրջանին ներգծված է կանոնավոր խոռնկրությանի ներսու պատահականորեն նետված են 4 կետեր: Գանել հետեւյալ պատահությունների հավանականությանը, որ՝ $a)$ բազոր 4 կետերը կրնկնեն ետանկրան ներսու, $b)$ մեկ կետ կընկնի ետանկրան ներսու և մեկուկան՝ չփոքր սեղմենտները: Ենթադրված է, որ կետի պատկերի մեջ ընկ-

Նելու հավանականությունը համեմատական է նրա մակերեսին և կախված չէ նրա դիրքից:

$$\text{Պատ.՝ } \omega) P = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \right)^4, \quad \text{իր) } P = 3! \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \cdot \left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12\pi} \right)^3$$

63. Հատվածը բաժանված է 3 հավասար մասերի: Հատվածի վրա պատահականորեն նետված են 3 կետեր: Գտնել հավանականությունը, որ հատվածի յուրաքանչյուր մասին կընկնի մեկական կետ: Ենթադրվում է, որ կետը հատվածի վրա ընկնելու հավանականությունը համեմատական է հատվածի երկարությանը և կախված չէ նրա դիրքից:

$$\text{Պատ.՝ } P = 3! \left(\frac{1}{3} \right)^3,$$

64. Ընթերցարահում կա հավանականությունների տեսափյան 6 դասագիրք, որոնցից 3-ը կազմով է: Գրադարանավարը պատահականորեն վերցնում է 2 դասագիրք: Գրտնել հավանականությունը, որ երկու դասագրքերն էլ կազմով են:

Լուծում: Դիտարկենք հետեւյալ պատահականությունների նշանակումները. A՝ վերցրած առաջին դասագիրքն ունի կազմ, B՝ երկրորդ դասագիրքն ունի կազմ:

Հավանականությունը, որ 1 դասագիրքն ունի կազմ.

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

Հավանականությունը, որ երկրորդ դասագիրքն ունի կազմ, այն պայմանով, որ վերցրած առաջին գիրքը եղել է կազմով, այսինքն՝ B պատահույթի պայմանական հավանականությունը՝

$$P_A(B) = \frac{2}{5},$$

Որոնելի հավանականությունը, որ երկու դասագրքերն էլ ունեն կազմ, ըստ հավանականությունների բազմապատկման թեորեմի կախյալ պատահույթների համար, հավասար է.

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = 0,2:$$

65. Ինչոր վայրում՝ հուլիս ամսին ամպամած օրերի միջին թիվը հավասար է 6-ի։ Գտնել հավանականությունը, որ հուլիսի մեկին և երկուսին կլինի պարզ եղանակ։

$$\text{Պատ.՝ } P = \frac{25}{31} \cdot \frac{24}{30} = \frac{20}{31},$$

66. Արտադրամասում աշխատում են 7 տղամարդ և 3 կին։ Բայց ցուցակի համարների պատահականորեն ընտրում են 3 մարդ։ Գտնել հավանականությունը, որ բոլոր ընալրավաճները տղամարդիկ են։

Լուծում։ Մտցնենք հետեւյալ պատահութների նշանակումները, A՝ I ընտրվածը տղամարդ է, B՝ II ընտրվածը տղամարդ է, C՝ III ընտրվածը տղամարդ է։

Հավանականությունը, որ սկզբում կընարսի տղամարդ։

$$P(A) = \frac{7}{10},$$

Հավանականությունը, որ II ընտրվածը կլինի տղամարդ, այն պարմանով, որ I ընտրվածը եղել է տղամարդ, այսինքն՝ B պատահութիւնը պարմանական հավանականությունը։

$$P_A(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

Հավանականությունը, որ III ընտրվածը կլինի տղամարդ, այն պարմանով, որ արգեն ընտրված են 2 տղամարդ, ալսինքն՝ C պատահութիւնը պարմանական հավանականությունը։

$$P_{AB}(C) = \frac{5}{8},$$

Որոնելի հավանականությունը, որ բոլոր 3 ընտրվածները տղամարդիկ են։

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{7}{24},$$

67. Արկղում կա 10 զետալ, որոնցից 6-ը հերկված է։ Հավաքողը պատահականորեն համում է 4 զետալ։ Գտնել

հավանականությունը, որ բոլոր հանված դետալները կլինեն
ներկված:

$$\text{Պատ. } P = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{14},$$

68. Սակարում կա 5 գնդակ՝ 1-ից մինչև 5 համարներով։
Պատահականորեն մեկական հանում են 3 գնդակ առանց վերադարձնելու։ Գտնել հետեւյալ պատահույթների հավանականությունները. ա) հաջորդաբար հանդես կդան 1,4,5 համարներով գնդակները, բ) հանված գնդակներն ունեն 1,4,5 համարները անկախ նրանց հանդես գալու հերթականությունից։

$$\text{Պատ. } a) P = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{60}, \quad b) P = 0,1,$$

69. Ուսանողը գիտե ծրագրի 25 հարցերից 20-ը, Գտնել հավանականությունը, որ ուսանողը գիտե քննողի կողմից նրան առաջադրված 3 հարցերը։

$$\text{Պատ. } P = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{57}{115},$$

70. Պարկը պարունակում է 10 միաժեսակ խորանարդիկներ՝ 1-ից մինչև 10 համարներով։ Պատահականորեն մեկական հանում են 3 խորանարդիկ։ Գտնել հավանականությունը, որ հաջորդաբար հանդես կդան 1, 2, 3 համարներով խորանարդիկները, եթե նրանք հանվում են. ա) անվերադարձ, բ) վերադարձումով (հանված խորանարդիկը վերադարձվում է պարկի)։

$$\text{Պատ. } a) P = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{720}, \quad b) P = 0,001,$$

71. Անդիալի և Ուելսի մարդահամարի (1891 թ.) տրվայալներով հաստատված է, որ մուգ գույնի աչքերով հայրերը և մուգ գույնի աչքերով որդիները կազմում են հետազոտվածների $50\%_0$ -ը (AB), մուգ գույնի աչքերով հայրերը և բաց գույնի աչքերով որդիները՝ $7,90\%_0$ ($\bar{A}\bar{B}$), բաց գույնի աչքերով հայրերը և մուգ գույնի աչքերով որդիները՝ $8,90\%_0$.

$(\bar{A}\bar{B})$, բաց գույնի աչքերով հալրերը և բաց գույնի աչքերով որդիները՝ $78,2^{\circ}/_0$ ($\bar{A} \bar{B}$): Գտնել հոր և որդու աչքերի գույների կազմը:

$$\text{Լուծում: Բատ պայմանի } P(AB) = 0,05, P(A\bar{B}) = \\ = 0,079, P(\bar{A}B) = 0,089, P(\bar{A}\bar{B}) = 0,782,$$

Գտնենք պայմանական հավանականությունը, որ որդին մուգ գույնի աչքերով է, եթե հալրը մուգ գույնի աչքերով է.

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(AB)+P(A\bar{B})} = \frac{0,05}{0,05+0,079} = 0,39,$$

Գտնենք պայմանական հավանականությունը, որ որդին բաց գույնի աչքերով է, եթե հալրը մուգ գույնի աչքերով է.

$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0,39 = 0,61,$$

Գտնենք պայմանական հավանականությունը, որ որդին մուգ գույնի աչքերով է, եթե հալրը բաց գույնի աչքերով է.

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{P(\bar{A} \cdot B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A}B)+P(\bar{A}\bar{B})} = \frac{0,089}{0,089+0,782} = \\ = 0,102,$$

Գտնենք պայմանական հավանականությունը, որ որդին բաց գույնի աչքերով է, եթե հալրը բաց գույնի աչքերով է.

$$P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - P_{\bar{A}}(B) = 1 - 0,102 = 0,898,$$

72. Գտնել $P(A)$ հավանականությունը արված $P(AB) = 0,72$, $P(A\bar{B}) = 0,18$ հավանականությունների միջոցով:

Լուծում: A պատահութը կարելի է ներկայացնել հետևյալ անհամատեղելի պատահութների գումարի տեսքով.

$$A = AB + A\bar{B},$$

Բատ գումարման թեորեմի անհամատեղելի պատահութների համար, կունենանք.

$$P(A) = P(AB + A\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B}) = 0,72 + \\ + 0,18 = 0,9,$$

73. Գտնել $P(A\bar{B})$ հավանականությունը արված $P(A) = a$, $P(B) = b$, $P(A+B) = c$ հավանականություններով:

Լուծում: Օգտագործելով $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$ նույնությունը, կդառնենք

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = a - P(AB); \quad (*)$$

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ հավասարությունից արտահայտենք $P(AB)$ -ն.

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A+B) = a + b - c \quad (**)$$

Տեղադրելով $(**)$ -ը $(*)$ -ի մեջ, կստանանք

$$P(A\bar{B}) = a - (a + b - c) = c - b;$$

74. Գտնել $P(\bar{A}\bar{B})$ հավանականությունը արված

$P(A) = a$, $P(B) = b$, $P(A+B) = c$ հավանականություններով:

Լուծում: Օգտագործելով $P(\bar{B}) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}\bar{B})$ նույնությունը գտնենք $P(\bar{A}\bar{B})$ -ն.

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{B}) - P(A\bar{B}) = (1 - b) - P(A\bar{B});$$

Տեղադրելով զերչին հավասարության մեջ $P(A\bar{B}) = c - b$, (*տես խնդիր 73*), կստանանք

$$P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - b - (c - b) = 1 - c;$$

75. AB պատահույթի հանդես գալուց հետևոմ է C պատահույթի հանդես գալը: Աղացացել, որ $P(A) + P(B) - P(C) \leqslant 1$:

Լուծում: Բայտ պայմանի՝ AB պատահույթի հանդես գալուց հետևոմ է C պատահույթի հանդես գալը, հետևաբար (*տես խնդիր 48*):

$$P(C) \geqslant P(AB); \quad (*)$$

Օգտագործելով $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$, $P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B)$, $P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = 1 - P(\bar{A}\bar{B})$

նույնությունները և հաշվի առնելով (^(*)) անհավասարությունը, կստանանք

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) - P(c) &\leq [P(AB) + P(A\bar{B})] + [P(AB) + \\ &+ P(\bar{A}B)] - P(AB) = P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = \\ &= 1 - P(\bar{A}\bar{B}) \leq 1. \end{aligned}$$

Դիտություն: Խորհուրդ է տրվում ընթերցողին ինքնուրույն համոզվել, որ մասնավոր դեպքում, եթե $C=A \cdot B$ ճիշտ է

$$P(A) + P(B) - P(AB) \leq 1 \text{ անհավասարությունը.}$$

76. Ապացուցել, որ

$$P_A(B) \geq 1 - \frac{P(B)}{P(A)},$$

Ենթադրված է, որ $P(A) > 0$.

Լուծում: 75-րդ խնդրի գիտողության շնորհիվ ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը.

$$P(A) + P(B) - P(AB) \leq 1, \quad (*)$$

Օդագենք հետեւյալ նույնություններից՝

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B), \quad P(B) = 1 - P(\bar{B}), \quad (**) \quad (**)$$

Տեղադրելով (^(**))-ը (^(*))-ի մեջ, կստանանք,

$$P(A) + 1 - P(\bar{B}) - P(A) \cdot P_A(B) \leq 1$$

կամ

$$P(A) \cdot P_A(B) \geq P(A) - P(B),$$

Բաժանելով այս անհավասարության երկու մասերը $P(A) > 0$ դրական թվի վրա, զիբջնականապես կտնենանք.

$$P_A(B) \geq 1 - \frac{P(\bar{B})}{P(A)},$$

77. ABC պատահութիւն հանդես գալոց հետեւմ է D պատահութիւն հանդես գալը: Ապացուցել, որ

$$P(A) + P(B) + P(c) - P(D) \leq 2,$$

Հուծում: Հստ պայմանի, ABC պատահութիւն հանդես գալուց հետեւում է D պատահութիւն հանդես գալը, հետեւաբար (տես խնդիր 48):

$$P(D) \geq P(ABC):$$

Այսպիսով, եթե ապացուցենք, որ

$$P(A) + P(B) + P(C) - P(ABC) \leq 2, \quad | \quad (*)$$

ապա ճշմարիտ կլինի և խնդրի պայմանում նշված անհավասարությունը:

Ապացուցենք () անհավասարությունը: Օգտվենք հետեւալ նույնություններից:*

$$\left. \begin{aligned} P(A) &= P(ABC) + P(AB\bar{C}) + P(AC\bar{B}) + P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}), \\ P(B) &= P(ABC) + P(\bar{A}BC) + P(A\bar{C}B) + P(\bar{A}\bar{B}C), \\ P(C) &= P(ABC) + P(\bar{A}BC) + P(A\bar{C}B) + P(\bar{A}\bar{B}C); \end{aligned} \right\} \quad (**) \quad$$

Լրիվ խումբը կազմող պատահութների հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի, հետեւաբար

$$\begin{aligned} P(ABC) + P(\bar{A}BC) + P(A\bar{C}B) + P(\bar{A}\bar{B}C) + P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) + \\ P(\bar{A}B\bar{C}) + P(A\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 1; \end{aligned}$$

Այստեղից

$$\begin{aligned} P(ABC) + P(\bar{A}BC) + P(A\bar{C}B) + P(\bar{A}\bar{B}C) = \\ = 1 - [P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) + P(A\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}B\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})]; \quad (***) \\ \text{Տեղադրելով } (**) \text{-ը } (*) \text{-ի մեջ և օգտագործելով } (***)-ը, \\ \text{պարզեցումներից հետո կունենանք} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) + P(C) - P(ABC) = \\ = 2 - [2P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}BC) + P(A\bar{C}B) + P(\bar{A}\bar{B}C)]; \end{aligned}$$

Հաշվի առնելով, որ միջակ փակագոթերում յուրաքանչյուր գումարելի բացասական չէ, զերշնականապես կունենանք.

$$P(A) + P(B) + P(C) - P(D) \leq 2;$$

78. Դուրս բերել Յ համատեղելի պատահույթների համար հավանականությունների գումարման թեորեմը.

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - \\ - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC);$$

Ենթադրվում է, որ երկու համատեղելի պատահույթների համար գումարման թեորեմը արդեն ապացուցված է.

$$P(A_1+A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2);$$

Լուծում: Իերենք Յ պատահույթների գումարը երկու պատահույթների գումարի.

$$A+B+C = (A+B)+C;$$

Օգտվենք երկու պատահույթների համար հավանականությունների գումարից

$$P(A+B+C) = P[(A+B)+C] = P(A+B) + P(C) - \\ - P[(A+B) \cdot C] = P(A+B) + P(C) - P[(AC) + (BC)];$$

Կիրառենք գումարման թեորեմը երկու համատեղելի պատահույթների համար երկու անդամ (A և B պատահույթների, ինչպես նաև AC ու BC պատահույթների համար):

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) - P(AB) + P(C) - \\ - \{P(AC) + P(BC) - P[(AC) \cdot (BC)]\};$$

. Հաշվի առնելով, որ $P[(AC) \cdot (BC)] = P(ABC)$, վերջնականապես կստանանք,

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - \\ - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC);$$

79.* Տրված են A , B , C Յ զույգ առ զույգ անկախ պատահույթներ, որոնք, սակայն, բոլոր Յով միասին հանգեսդալ չեն կարող: Ենթադրվում է, որ նրանք բոլորն առնեն միևնույն թափանականությունը: Գտնել թիվ ամենամեծ հնարավոր արժեքը:

Լուծում: Առաջին ակտը կազմող հետեւյալ պատահույթների պայմանի

$$P(ABC) = 0, \quad P(\bar{A}) = P(\bar{B}) = P(\bar{C}) = 1 - p, \quad P(AB) = \\ = P(A) \cdot P(B) = p^2, \quad P(AC) = p^2, \quad P(BC) = p^2.$$

Գտնենք լրիվ խոսմբ կազմող հետեւյալ պատահույթների հավանականությունները.

$A\bar{B}\bar{C}$, $B\bar{A}\bar{C}$, $C\bar{A}\bar{B}$, $AB\bar{C}$, $AC\bar{B}$, $BC\bar{A}$, ABC , $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.
Որպեսզի գտնենք ABC պատահույթի հավանականությունը, ներկայացնենք AB պատահույթը երկու անհամատեղելի պատահույթների գումարի տեսքով.

$$AB = ABC + AB\bar{C},$$

Հստ գումարման թեորեմի

$$P(AB) = P(ABC) + P(AB\bar{C}),$$

Որտեղից՝

$$P(AB\bar{C}) = P(AB) - P(ABC) = p^2,$$

Համանման ձևով կդունենք

$$P(AC\bar{B}) = P(BC\bar{A}) = p^2,$$

Որպեսզի գտնենք $A\bar{B}\bar{C}$ պատահույթի հավանականությունը, $A\bar{B}$ պատահույթը ներկայացնենք երկու անհամատեղելի պատահույթների գումարի տեսքով.

$$\bar{A}\bar{B} = A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C},$$

Հստ գումարման թեորեմի.

$$P(A\bar{B}) = P(A\bar{B}C) + P(A\bar{B}\bar{C}),$$

Այստեղից

$$P(A\bar{B}\bar{C}) = P(A\bar{B}) - P(A\bar{B}C) = p(1-p) - p^2 = p - 2p^2,$$

Համանման ձևով կունենանք

$$P(B\bar{A}\bar{C}) = P(C\bar{A}\bar{B}) = p - 2p^2,$$

Գտնենք $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ պատահույթի հավանականությունը: Դրա

Համար բավական է 1-ից հանել մնացած պատահույթների հավանականությունները, որոնք կազմում են լրիվ խումբ.

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 1 - [3(p - 2p^2) + 3p^2] = 3p^2 - 3p + 1:$$

Հաշվի առնելով, որ ցանկացած հավանականությունը լնկած է 0-ի և 1-ի միջև, պահանջենք, որ բոլոր գանված հավանականությունները բավարարեն այդ պայմանին.

$$\begin{cases} 0 \leq p^2 \leq 1, \\ 0 \leq p - 2p^2 \leq 1, \\ 0 \leq 3p^2 - 3p + 1 \leq 1; \end{cases} \quad (*)$$

Լուծելով համակարգի լուրաքանչյուր անհավասարություն, համապատասխանաբար կստանանք.

$$\begin{cases} 0 \leq p \leq 1, \\ 0 \leq p \leq \frac{1}{2}, \\ 0 \leq p \leq 1; \end{cases}$$

Այսպիսով, թի ամենամեծ արժեքը, որը բավարարում է անհավասարությունների (*), համակարգի բոլոր երեք անհավասարություններին, հավասար է $\frac{1}{2}$ -ին:

Եթեր որպես եղանակը՝ ներմածենք հասկալ նշանակումը. $P(A+B+C) = k$: Օգտվելով Յ համասեղելի պատճենալիքների համար գումարման լինութեմից և հաշվի տանելով, որ $P(A) = P(B) = P(C) = p$, $P(AB) = P(AC) = = P(BC) = p^2$, $P(ABC) = 0$, կստանանք

$$\begin{aligned} K &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - \\ &\quad - P(BC) + P(ABC) = 3p - 3p^2. \end{aligned}$$

Լուծելով այս հավասարումը թի նկատմամբ, կստանանք

$$p = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4k/3}}{2},$$

Եթե $p = \frac{1 - \sqrt{1 - 4k/3}}{2}$, ապա p -ն հասնում է b_p
 առավելագույն արժեքին՝ $p = \frac{1}{2} \left(b_p \text{ և } k = \frac{3}{4} \right)$,
 Եթե $p = \frac{1 + \sqrt{1 - 4k/3}}{2}$, ապա, առաջին հայացքից,
 $p \geqslant \frac{1}{2}$: Ցույց տանք, որ $p > \frac{1}{2}$ դեպքը հանգեցնում է հա-
 կասության: Իրոք, $p > \frac{1}{2}$ ըստ պայմանի, եթե $1 - \frac{4k}{3} >$
 > 0 կամ, քանի որ $k = 3p - 3p^2$, ըստ պայմանի, ապա
 $p^2 - p + \frac{1}{4} > 0$.

Այսաեղից

$p = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$:
 Այսպիսով, ամենամեծ հնարավոր արժեքն է՝ $p = \frac{1}{2}$,

§ 2 Գոնե մեկ պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը

Դիցուք A_1, A_2, \dots, A_n պատահույթները համախմբության
 մեջ անկախ են և $P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, \dots, P(A_n) = p_n$: Փոքք
 հետանքով կարող են տեղի ունենալ այդ բոլոր պատահույթները
 կամ նրանց մի մասը, կամ ոչ մեկը:

Ա պատահայթի տեղի ունենալու հավանականությունը համա-
 խմբության մեջ անկախ A_1, A_2, \dots, A_n պատահույթներից գոնե մեկի
 հանդես գալուց, հավասար է $1 - p_1 A_1 \bar{A}_2 \dots, A_n \bar{A}_n$ հակադիր պատա-
 հույթների հավանականությունների արտադրյալի տարբերությանը.

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n$$

Մասնավոր դեպքում, եթե բոլոր ո պատահույթների հավանա-
 կանությունները նույնն են և հավասար են p -ի, ապա այդ պատա-
 հույթներից գոնե մեկի հանդես գալու հավանականությունը

$$P(A) = 1 - q^n$$

80. Էլեկտրական շղթայում հաջորդաբար միացված են
 42

իրարից անկախ աշխատող Յ տարր: I, II և III տարրերի աշխատելու հավանականություններն համապատասխանաբար հավասար են

$$p_1 = 0,1, \quad p_2 = 0,15, \quad p_3 = 0,2:$$

Գտնել հավանականությունը, որ շղթալում հոսանք չի լինի:
Լուծում: Քանի որ տարրերը միացված են հաջորդաբար, ապա շղթալում հոսանք չի լինի (Λ պատահույթ), եթե չաշխատի գոնե մեկ տարր:

Որոնելի հավանականությունը

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - (1 - 0,1) \cdot (1 - 0,15) \cdot (1 - 0,2) = 0,388:$$

81. Սարքը կազմված է երկու անկախ աշխատող տարրերից: Տարրերի չաշխատելու հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են $0,05$ -ի և $0,08$ -ի: Գտնել սարքի չաշխատելու հավանականությունը, եթե դրա համար բավական է տարրերից գոնե մեկի չաշխատելը:

$$\text{Պատ.՝ } P = 0,126,$$

82. Կամուրջը քանդվելու համար բավական է մեկ ավելացիոն ոռումք: Գտնել հավանականությունը, որ կամուրջը կքանդվի, եթե նրա վրա գցենք 4 ոռումք, որոնց կամրջին դիպչելու հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են $0,3$ -ի, $0,4$ -ի, $0,6$ -ի և $0,7$ -ի:

$$\text{Պատ.՝ } P \approx 0,95:$$

Օ, ԵԿԵԿ

83. Իրարից անկախ, երեք հետազոտողներ, չափում են ինչոր ֆիզիկական մեծություն: Հավանականությունը, որ առաջին հետազոտողը սարքի ցացմանքը կարգավիս սխալ թույլ կտա, հավասար է $0,1$ -ի, երկրորդ և երրորդ հետազոտողների համար այդ հավանականությունը համապատասխանաբար հավասար է $0,15$ -ի և $0,2$ -ի: Գտնել հավանականությունը, որ մի անգամ չափելիս գոնե մեկ հետազոտող սխալ թույլ կտա:

$$\text{Պատ.՝ } P = 0,388,$$

84. Վարժությունը հաջողությամբ կատարելու հավա-

Նականոթյունը երկու մարզիկներից յուրաքանչյուրի համար հավասար է 0,5-ի: Մարդկիները գարժությունը կատարում են հերթով, ընդ որում յուրաքանչյուրը կատարում է երկու փորձ: Վարժությունը առաջին կատարողն ստանում է պարզեւ Դաշնել մարզիկների պարզեւ ստանալու հավանականոթյունը:

Լուծում: Պարզեւ հաճանման համար բավական է, որ չորս փորձերից գոնե մեկը հաջող լինի: Հաջող փորձի հավանականոթյունն է՝ $p = 0,5$, իսկ անհաջողինը՝ $q = 1 - 0,5 = 0,5$:

Որոնելի հավանականոթյունն է

$$P = 1 - q^4 = 1 - 0,5^4 = 0,9375,$$

85. Երկու հրաձիգներից յուրաքանչյուրի թիրախին դիպցնելու հավանականոթյունը հավասար է 0,3-ի: Հրաձիգները կրակում են, ընդ որում յուրաքանչյուրը կատարում է երկու կրակոց: Թիրախին դիպցնողը առաջին անգամ ստանում է պարզեւ Դաշնել հավանականոթյունը, որ հրաձիգները պարզեւ կատանան:

Պատճ: $P \approx 0,76$,

86. Հրաձգի թիրախին գոնե մեկ անգամ դիպցնելու հավանականոթյունը երեք կրակոցի գեպքում հավասար է 0,875-ի: Գտնել դիպցնելու հավանականոթյունը մեկ կրակոցի գեպքում:

Լուծում: Երեք կրակոցներից գոնե մեկի գեպքում թիրախին դիպցնելու հավանականոթյունը (A պատճաճութ) հավասար է

$$P(A) = 1 - q^3,$$

որտեղ q -ն վրիպելու հավանականոթյունն է:

Հստ պայմանի $P(A) = 0,875$: Հետեաբար

$$0,875 = 1 - q^3$$

կամ

$$q^3 = 1 - 0,875 = 0,125:$$

Այստեղից

$$q = \sqrt[3]{0,125} = 0,5:$$

Որոնելի հավանականությունն է

$$p = 1 - q = 1 - 0,5 = 0,5;$$

87. 4 կրակոցների գեպքում նպատակին գոնե մեկ անգամ դիպցնելու հավանականությունը հավասար է $0,9984\%$: Գանել մեկ կրակոցի գեպքում նպատակին դիպցնելու հավանականությունը:

$$\text{Պատ.՝ } P = 0,8;$$

88. Բազմակի չափում են ինչ-որ ֆիզիկական մեծություն: Հավանականությունը, որ գործիքի ցուցմունքը կարգալիս սխալ թույլ կտրվի, հավասար է p -ի: Գանել չափումների ամենավոքը թիվը, որն անհրաժեշտ է, որպեսզի $P > 2$ հավանականությունը հնարավոր լինի սպասել, որ չափման գոնե մեկ արգյունք կլինի ոչ ճիշտ:

$$\text{Պատ.՝ } E \left[\frac{\log(1-p)}{\log(1-p)} \right] + 1, \text{ որտեղ } E[N] = p \text{ և } \theta \text{ վեցաբնական է:}$$

§ 3 Էրիկ հավանականության բանաձևը

Ապատահույթի հավանականությունը, որ կարող է հանդես գալ լրիվ խոռոք կազմող B_1, B_2, \dots, B_n անհամատեղելի պատահույթներից մեկի (հիպոթեզ) հետ, հավասար է հիպոթեզներից յուրաքանչյուրի հավանականության և A պատահույթի համապատասխան պայմանական հավանականությունների արտազրյալների դումարին:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A), \quad (*)$$

$$\text{որտեղ } P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n) = 1,$$

(*) հավասարությունը կոչում են սլրիվ հավանականության բանաձեռ:

89. 2 գնդակ պարանակող սափորի մեջ դցված է սպիտակ գնդակ, որից հետո այնահեղից պատահականորեն հանգած է մեկ գնդակ: Գանել հավանականությունը, որ հանգած գնդակը կլինի սպիտակ, եթե գնդակների սկզբնական պարանակության մասին բոլոր հնարավոր ենթադրությունները հավասարաբար են (ըստ զույների):

Լուծում: Ասվ նշանակենք այն պատահառլիքը, որ հանգածը սպիտակ գնդակ է: Հնարավոր են գնդակների սկզբնական

կազմովթյան մասին հետևյալ ենթադրությունները (հիպո-թեզները). B_1 ՝ սպիտակ գնդակ չկա, B_2 ՝ մեկ սպիտակ գնդակ կա, B_3 ՝ երկու սպիտակ գնդակ կա:

Քանի որ ունենք ընդամենը երեք հիպոթեզ և ըստ պար-մանի դրանք՝ հավասարահարավոր են՝ ու հիպոթեզների հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի (քանի որ նրանք կազմում են պատահույթների լրիվ խումբ), ապա լուրաքանչյուր հիպոթեզի հավանականությունը $\frac{1}{3}$ է, ար-

$$\text{սինքն} \quad P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3},$$

Պայմանական հավանականությունը, որ կհանվի սպիտակ գնդակ, այն պայմանով, որ սկզբում սափորում չի եղել ոչ մի սպիտակ գնդակ,

$$P_{B_1}(A) = \frac{1}{3},$$

Պայմանական հավանականությունը, որ կհանվի սպիտակ գնդակ, այն պայմանով, որ սկզբում սափորում կար 1 սպի-տակ գնդակ,

$$P_{B_2}(A) = \frac{2}{3},$$

Պայմանական հավանականությունը, որ կհանվի սպիտակ գնդակ, այն պայմանով, որ սկզբում սափորում կար 2 սպի-տակ գնդակ,

$$P_{B_3}(A) = \frac{3}{3} = 1;$$

Որոնելի հավանականությունը, որ կհանվի սպիտակ գըն-դակ, գտնում ենք ըստ լրիվ հավանականության բանաձեռի.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

90. Ո գնդակ պարունակող սափորի մեջ գցվում է սպի-տակ գնդակ, որից հետո պատահականորեն հանվում է մեկը.

Գտնել հավանականությունը, որ հանված կլինի սպիտակ, եթե հավասարահարավոր են բոլոր ենթադրությունները գնդակների սկզբնական կազմության մասին (ըստ գույնի):

$$\text{Պատ.՝ } P = \frac{n+2}{2(n+1)},$$

91. Հաշվողական լաբորատորիայում կան 6 ստեղնավոր ավտոմատներ և 4 կիսաավտոմատներ: Հավանականությունը, որ ինչ-որ հաշվարկի կատարման ժամանակ ավտոմատը շարքից գուրս չի դա, հավասար է 0,95-ի, իսկ կիսաավտոմատի համար այդ հավանականությունը հավասար է 0,8-ի: Ուսանողը հաշվարկ է կատարում պատահական ընտրած մեքենայի վրա: Գտնել հավանականությունը, որ մինչև հաշվարկի վերջը մեքենան շարքից գուրս չի դա:

$$\text{Պատ.՝ } P = 0,89,$$

92. Բաւրգում կա 5 հրացան, որոնցից 3-ը օժտված են օպտիկական նշանառությամբ: Հավանականությունը, որ հրածիգը կլոցի թիրախը նշանառությամբ օժտված հրացանից կրակելիս, հավասար է 0,95-ի, առանց օպտիկական նշանառության հրացանի համար այդ հավանականությունը հավասար է 0,7-ի: Գտնել հավանականությունը, որ թիրախը կլոցվի, եթե հրածիգը պատահական վերցրած հրացանից կատարի մեկ կրակոց:

$$\text{Պատ.՝ } P = 0,85,$$

93. Արկղում կա № 1 գործարանի պատրաստած 12 գետալ, № 2 գործարանի՝ 20 գետալ և № 3 գործարանի՝ 18 գետալ: Հավանականությունը, որ № 1 գործարանում պատրաստված գետալը գերազանց որակի է, հավասար է 0,9-ի, № 2 և № 3 գործարաններում պատրաստված գետալների համար այդ հավանականությունը համապատասխանաբար հավասար է 0,6-ի և 0,9-ի: Գտնել հավանականությունը, որ պատահականորեն հանված գետալը կլինի գերազանց որակի:

$$\text{Պատ.՝ } P = 0,78,$$

94. Առաջին սափորում կա 10 գնդակ, որոնցից 8-ը

սպիտակ է, երկրորդ սափորում՝ 20 գնդակ, որոնցից 4-ը՝ սպիտակ: Յուրաքանչյուր սափորից պատահականորեն հաշնել են մեկական գնդակ, իսկ հետո արդ երկու գնդակներից պատահականորեն վերցրել են մեկը: Գանել հավանականությունը որ վերցրած գնդակը սպիտակ է:

Պատ.³ P = 0,5:

95. Երեք սափորներից յուրաքանչյուրում կա 6 սև և 4 սպիտակ գնդակ: Առաջին սափորից պատահականորեն հանված է 1 գնդակ և դրված է երկրորդ սափորի մեջ, որից հետո երկրորդ սափորից պատահականորեն հանված է 1 գնդակ և դրված երրորդի մեջ: Գտնել հավանականությունը, որ երրորդ սափորից պատահականորեն հանված գնդակը կլինի սպիտակ:

Պատ.³ P = 0,4:

96. Հավանականությունները, որ էլեկտրոնային թվային մեքենան աշխատանքի ժամանակ կիսասպի թվաբանական սարքում, գործող հիշողությունում կամ այլ սարքերում, հարաբերում են ինչպես 3:2:5: Վնասվածքի հայտնաբերման հավանականությունները թվաբանական սարքում, գործող հիշողությունում և այլ սարքերում համապատասխանաբար հավասար են 0,8-ի, 0,9-ի, 0,9-ի: Գտնել հավանականությունը, որ մեքենայում առաջացած անսարքությունը կհայտնաբերվի:

Պատ.³ P = 0,87:

§ 4 Բայեսի բանաձևը

Դիցուք A պատահույթը կարող է հանդիս դալ լրիվ խումբ կազմող B₁, B₂ ..., B_n անհամատեղելի պատահույթներից (հիպոթենուրից) մեջի հանդիս գալու պայմանում միայն: Եթե A պատահույթը արգեն կայացել է, ապա հիպոթեզների հավանականությունները կարելի է վերագնահատել Բայեսի բանաձևերավ.

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

որտեղ

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A),$$

(97) Երկու ավտոմատ մեքենաներ արտադրում են միաւտեսակ գետալներ, որոնք հետո արվում են ընդհանուր հարահոսին։ Առաջին ավտոմատի արտադրողականությունը 2 անգամ մեծ է երկրորդի արտադրողականությունից։ Առաջին ավտոմատը արտադրում է միշտն հաշվով $60^0/0$ -ի գերազանց գետալներ, երկրորդը՝ $84^0/0$ -ի։ Հարահոսից պատահական վերցրած գետալը գերազանց որակի է։ Գտնել հավանականությունը, որ այդ գետալն արտադրված է առաջին ավտոմատ մեքենայի կողմից։

Լուծում։ Եշանակնք Առող հետեւալ պատահաւթյուն գետալը գերազանց որակի է։ Կարելի է կատարել ենթադրություն (հիպոթեզ)։

Ե₁ գետալն արտադրված է առաջին ավտոմատի կողմից, ընդ որում (քանի որ առաջին ավտոմատն արտադրում է 2 անգամ ավելի շատ, քան երկրորդը)

$$P(B_1) = \frac{2}{3},$$

Ե₂ գետալն արտադրված է երկրորդ ավտոմատով, ընդ որում

$$P(B_2) = \frac{1}{3},$$

Պարմանական հավանականությունը, որ գետալը գերազանց որակի է, եթե այն արտադրվի է առաջին ավտոմատով։

$$P_{B_1}(\Lambda) = 0,6,$$

Պարմանական հավանականությունը, որ գետալը գերազանց որակի է, եթե այն արտադրվի է երկրորդ ավտոմատով։

$$P_{B_2}(\Lambda) = 0,84,$$

Հավանականությունը, որ պատահական վերցրած գետալը գերազանց որակի է, ըստ լրիվ հավանականության բանաձևի կլինիք։

$$\begin{aligned} P(\Lambda) &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(\Lambda) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(\Lambda) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot 0,6 + \frac{1}{3} \cdot 0,84 = 0,68, \end{aligned}$$

Որոնելի հավանականությունը, որ վերցրած գերազանց գևտալը արտադրված է առաջին ավտոմատով, ըստ Բայենի բանաձեռի կլինի.

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{2/3 \cdot 0,6}{0,68} = \frac{10}{17},$$

(98) Բուրգում կա 10 հրացան, որոնցից 4-ը՝ օպտիկական նշանառությամբ: Հավանականությունը, որ հրածիգը կլոցի թիրախը օպտիկական նշանառությամբ հրացանով կրակելիս, հավասար է 0,95-ի, առանց օպտիկական նշանառության հրացանի համար այդ հավանականությունը հավասար է 0,8-ի: Հրածիգը պատահական վերցրած հրացանով կրակելիս խոցեց թիրախը: Ո՞րն է հավանական՝ հրածիգը կրակել է օպտիկական նշանառության հրացանի՞ց, թե՞ առանց դրա:

Պատ.³ Ավելի հավանական է, որ հրացանը առանց օպտիկական նշանառության էր (հավանականությունը, որ հրացանը եղել է առանց օպտիկական նշանառության, հավասար է $\frac{24}{43}$ -ի, իսկ օպտիկական նշանառության գեղքում՝ $\frac{19}{43}$ -ի):

99. Խճուղով, որի վրա է բենզակալանը, ընթացող բեռնատար ավտոմեքենաների թիգը հարաբերում է մարդատար ավտոմեքենաների թվին, ինչպես 3 : 2: Հավանականությունը, որ կիցքավորվի բեռնատար մեքենան, հավասար է 0,1-ի, իսկ մարդատար մեքենայի համար այդ հավանականությունն հավասար է 0,2-ի: Կիցքավորման համար բենզակալանին մոտեցավ մեքենան: Գտնել հավանականությունը, որ այն բեռնատար է:

$$\text{Պատ.}^3 P = \frac{3}{7},$$

100. Երկու բանվոր տարբեր ծակիչների վրա ծակել են պերֆոքարտերի միատեսակ կոմպլեկտ: Հավանականությունը, որ առաջին ծակողը սխալ թույլ կտա, հավասար է 0,05-ի. Երկրորդ ծակողի համար այդ հավանականությունը հավասար է 0,1-ի: Պերֆոքարտերը համեմատելիս սխալ է հալտնաբերված: Գտնել հավանականությունը, որ սխալվել է 50

առաջին ծակողը (ենթադրվում է, որ երկու ծակիչներն ել սարքին են):

$$\text{Պատ.՝ } P = \frac{1}{3},$$

101. Հատուկ հիվանդանոց են ընդունվում միջին հաշվով 50% Կ հիվանդությունով, 30% Լ հիվանդությունով, 20% Ա հիվանդությունով հիվանդներ: Կ հիվանդությունը լրիվ բուժելու հավանականությունը հավասար է $0,7$ -ի, Լ և Ա հիվանդությունների համար այդ հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են $0,8$ -ի և $0,9$ -ի: Հիվանդանոց ընդունված հիվանդը առողջ դուրս գրվեց: Գանել հավանականությունը, որ նա հիվանդ էր Կ հիվանդությամբ:

$$\text{Պատ.՝ } P = \frac{5}{11},$$

102. Արտադրանքը երկու ապրանքագետների կողմից ստուգվում է ըստ միօրինակության: Հայանականությունը, որ արտադրանքը կընկնի առաջին ապրանքագետի մոտ, հավասար է $0,55$ -ի, իսկ երկրորդի մոտ՝ $0,45$ -ի: Հայանականությունը, որ միօրինակ արտադրանքը միօրինակ կճանաչվի առաջին ապրանքագետի կողմից, հավասար է $0,9$ -ի: Իսկ երկրորդի կողմից՝ $0,98$ -ի: Միօրինակ արտադրանքն ստուգելիս միօրինակ ճանաչվեց: Գանել հայտնականությունը, որ այն ստուգել է երկրորդ ապրանքագետը:

$$\text{Պատ.՝ } P = 0,47,$$

103. Ա պատահութը կարող է հանդիս գալ լրիվ խոմք կազմող B_1, B_2, \dots, B_n անհամատեղելի պատահութներից միայն մեկի հետ: Ա պատահութի տեղի տնկնալոց հետո վերաբնահատվել են հիպոթեզների հավանականությունները, այսինքն՝ գտնվել են $P_A(B_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) պարմանական ավանականությանները: Ապացուցել, որ

$$\sum_{i=1}^n P_A(B_i) = 1,$$

104. Ապատահույթը կարող է հանդես գալ B_1 , B_2 , B_3 որիվ և սումը կազմող անհամատեղելի պատահույթներից (հիպոթեզներ) մեկի հետ: Ապատահույթի հանդես գալոց հետո վերագնահատվել են հիպոթեզների հավանականությունները, այսինքն՝ գտնվել են այդ հիպոթեզների պայմանական հավանականությունները, ընդ որում պարզվել է, որ

$$P_A(B_1) = 0,6 \text{ և } P_A(B_2) = 0,3:$$

Ինչի՞ է հավասար B_3 հիպոթեզի պայմանական $P_A(B_3)$ հավանականությունը:

$$\text{Պատ.՝ } P_A(B_3) = 1 - (0,6 + 0,3) = 0,1:$$

105. Կա գետալների 3 խմբաքանակ, յուրաքանչյուրում 20 գետալ: Առաջին, երկրորդ և երրորդ խմբաքանակներում միօրինակ գետալների թիվը համապատասխանաբար հավասար է 20-ի, 15-ի, 10-ի: Պատահական ընտրած խմբաքանակից պատահականորեն հանվում է գետալ, պարզվում է, որ այն միօրինակ է: Դետալը վերագրածում են խմբաքանակի մեջ և երկրորդ անդամ են գետալ հանում, որը նույնպես միօրինակ է լինում: Գտնել հավանականությունը, որ գետալները հանված էին երրորդ խմբաքանակից:

Լուծում: Նշանակենք A -ով հետևյալ պատահույթը. երկու փորձերից (վերագրածումով) յուրաքանչյուրում հանված է եղել միօրինակ գետալ:

Կարելի է կատարել 3 ենթադրություններ (h իպոթեզներ), B_1 գետալները հանվել են առաջին խմբաքանակից, B_2 գետալները հանվել են երկրորդ խմբաքանակից, B_3 գետալները հանվել են երրորդ խմբաքանակից:

Քանի որ գետալները հանվել են պատահական վերցված խմբաքանակից, ապա հիպոթեզների հավանականությունները նույնն են.

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3},$$

Գտնենք $P_{B_1}(A)$ պայմանական հավանականությունը, այսինքն՝ հավանականությունը, որ առաջին խմբաքանակից

Հաջորդաբար կհանվեն երկու միօրինակ գետալ: Այդ պատահութը ստույգ է, քանի որ առաջին խմբաքանակում բոլոր գետալները միօրինակ են, ճետաբար

$$P_{B_1}(A) = 1:$$

Գտնենք $P_{B_2}(A)$ պայմանական հավանականությունը, այսինքն՝ այն հավանականությունը, որ երկրորդ խմբաքանակից հաջորդաբար կհանվեն (վերադասմով) երկու միօրինակ գետալներ:

$$P_{B_2}(A) = \frac{15}{20} \cdot \frac{15}{20} = \frac{9}{16},$$

Գտնենք $P_{B_3}(A)$ պայմանական հավանականությունը, այսինքն՝ այն հավանականությունը, որ երրորդ խմբաքանակից հաջորդաբար կհանվեն (վերադասմով) 2 միօրինակ գետալներ:

$$P_{B_3}(A) = \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{20} = \frac{1}{4},$$

Որոնելի հավանականությունը, որ հանված երկու միօրինակ գետալները վերցված են երրորդ խմբաքանակից, բայց ինչու բանաձեռ:

$$\begin{aligned} P_A(B_3) &= \frac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)} = \\ &= \frac{1/3 \cdot 1/4}{1/3 \cdot 1 + 1/3 \cdot 9/16 + 1/3 \cdot 1/4} = \frac{4}{29}, \end{aligned}$$

106. Յ հրանոթից կազմված մարտկոցը համազարկ ավելի ե երկու արկ ընկան նպատակակետին: Գտնել հավանականությունը, որ առաջին հրանոթը դիպել է, եթե նպատակակետին դիպչելու հավանականությունները առաջին երկորդ երրորդ հրանոթներով համապատասխանաբար հավասար են՝ $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,3$, $p_3 = 0,5$:

Լուծում: Եշտակենք A -ով պատահութը, որ հրանոթները դիպել են նպատակակետին:

Կատարենք երկու ենթադրություն (հիպոթեզ): B_1 սահ-

Ճին հրանոթը դիպել է նպատակակետին, B_2 առաջին հրանոթը չի դիպել նպատակակետին:

Ըստ պայմանի $P(B_1) = 0,4$, հետեաբար (B_2 պատահութը հակագիր է B_1 -ին)

$$P(B_2) = 1 - 0,4 = 0,6;$$

Գտնենք $P_{B_1}(A)$ պայմանական հավանականությունը, այսինքն՝ այն հավանականությունը, որ նպատակակետին դիպել են երկու արկ, որոնցից մեկը առաջին հրանոթից, հետևաբար, մյուսը երրորդ կամ երկրորդ հրանոթից (ընդ որում երրորդ հրանոթը վրիպել է): Այս երկու պատահութները անհամատեղելի են, ուստի կիրառելի է գումարման թեորեմը.

$$P_{B_1}(A) = p_2 \cdot q_3 + p_3 \cdot q_2 = 0,3 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,7 = 0,5;$$

Գտնենք $P_{B_2}(A)$ պայմանական հավանականությունը, այսինքն՝ այն հավանականությունը, որ նպատակակետին դիպել են երկու արկ և առաջին հրանոթը վրիպել է: Ուրիշ խոսքով, գտնենք հավանականությունը, որ երկրորդ և երրորդ հրանոթները դիպել են նպատակակետին: Այս երկու պատահութները անկախ են, ուստի կիրառելի է բազմապատկման թեորեմը:

$$P_{B_2}(A) = p_2 \cdot p_3 = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15;$$

Որոնելի հավանականությունը, որ առաջին հրանոթը դիպել է նպատակակետին, ըստ Բայեսի բանաձևի հավասար է

$$\begin{aligned} P_A(B_1) &= \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)} = \\ &= \frac{0,4 \cdot 0,5}{0,4 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,15} = \frac{20}{29}; \end{aligned}$$

107. Երեք հրաձիգ կրակեցին և երկու գնդակ խոցեց թիւրախը: Գտնել հավանականությունը, որ երրորդ հրաձիգն է թիւրախը խոցել, եթե թիւրախին դիպչելու հավանականությունը 54

թյունը առաջին, երկրորդ, երրորդ հրաձիգների համար համապատասխանաբար հավասար է 0,6-ի, 0,5-ի, 0,4-ի:

Պատ.՝ $P = 10/19$:

108. Հաշվողական սարքի երեք անկախ աշխատող տարրերից երկուսը խափանվեցին: Գտնել հավանականությունը, որ խափանվել են առաջին և երկրորդ տարրերը, եթե առաջին, երկրորդ և երրորդ տարրերի խափանվելու հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են 0,2-ի, 0,4-ի, 0,3-ի:

Լուծում: Առով նշանակենք, այն պատահայթը, որ խափանվել են 2 տարրը:

Կարելի է անել հետեւյալ ենթադրությունները (հիպոթեզները):

B_1 —խափանվել են առաջին և երկրորդ տարրերը, իսկ երրորդը սարքին է, ընդ որում (քանի որ տարրերը անկախ են աշխատում, կիրառելի է բազմապատճեն թիորեմը)

$$P(B_1) = p_1 p_2 q_3 = 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,7 = 0,056;$$

B_2 —խափանվել են առաջին և երրորդ տարրերը, իսկ երկրորդը սարքին է, և

$$P(B_2) = p_1 p_3 p_2 = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,6 = 0,036;$$

B_3 —խափանվել են երկրորդ և երրորդ տարրերը, իսկ առաջինը սարքին է, և

$$P(B_3) = p_2 p_3 q_1 = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,096;$$

B_4 —խափանվել է միայն մեկ տարր. B_5 —խափանվել են բոլոր երեք տարրերը, B_6 —ոչ մի տարր չի խափանվել:

Վերջին երեք հիպոթեզների հավանականություններն հաշված չեն, քանի որ արդ հիպոթեզների գեղքամ Λ պատահությը (խափանվել են երկու տարր) անհնարի է և նշանակում է $P_{B_4}(\Lambda)$, $P_{B_5}(\Lambda)$, $P_{B_6}(\Lambda)$ պարբանական հավանականությունները հավասար են զրոյի և $P(B_4) \cdot P_{B_4}(\Lambda)$, $P(B_5) \cdot P_{B_5}(\Lambda)$, $P(B_6) \cdot P_{B_6}(\Lambda)$ արտադրյալները (աես ներքեամ (^(*)) առնչությանը) ցանկու-

ցած. հավանականությունների դեպքում B_4 , B_5 , B_6 պատահությունների համար:

Քանի որ B_1 , B_2 , B_3 հիպոթեզների դեպքում A պատահությունը հավաստի է, ապա համապատասխան պայմանական հավանականությունները հավասար են 1-ի,

$$P_{B_1}(A) = P_{B_2}(A) = P_{B_3}(A) = 1.$$

Ըստ լրիվ հավանականության բանաձեկի, հավանականությունը, որ խափանվել են երկու տարր,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) + \\ &+ P(B_4) \cdot P_{B_4}(A) + P(B_5) \cdot P_{B_5}(A) + P(B_6) \cdot P_{B_6}(A) = \\ &= 0,056 \cdot 1 + 0,036 \cdot 1 + 0,096 \cdot 1 = 0,188: \end{aligned} \quad (*)$$

Ըստ Բայեսի բանաձեկի, որոնելի հավանականությունը, որ խափանվել են առաջին և երկրորդ տարրերը,

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,056}{0,188} \approx 0,3:$$

109. Գործիքի անկախ աշխատող 4 լապտերներից երկուսը խափանվեցին: Դանել հավանականությունը, որ խափանվել են առաջին և երկրորդ լապտերները, եթե առաջին, երկրորդ, երրորդ և չորրորդ լապտերների համար խափանվելու հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,2$, $p_3 = 0,3$ և $P_4 = 0,4$:

Պատ.՝ $P \approx 0,039:$

ԳԼՈՒԽ ԵՐՐԱՐԴԻ

ՓՈՐՁԵՐԻ ԿՐԿՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

§ 1. Բեռնուլլիի բանաձեռք

Եթե կատարվում են փորձեր, որոնցում A պատահության գույքը հավանականությունը յուրաքանչյուր փորձում կախված չէ մյուս փորձերի ելքից, ապա այդպիսի փորձերը կոչվում են \bullet A պատահույթի նկատմամբ անկախ: Այս դիմքի § 1-4-ում դիտարկվում են անկախ փորձերը, որոնցից յուրաքանչյուրում պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը նույն է:

Բեռնուլիի բանաձևը՝ Հավանականությունը, որ անկախ փորձերում, որոնցից յուրաքանչյուրում պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը է թիւ ($0 < p < 1$), պատահույթը հանդես կգա ուղիղ կ անգամ, միևնույնի է, թե ինչ հաջորդականությամբ, հափառար է

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

կամ

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k},$$

որտեղ $q = 1 - p$.

Հավանականությունը, որ պատահույթը հանդես կգա ա) կ-ից ավելի քիչ անգամ, բ) կ-ից ավելի շատ անգամ, գ) կ-ից ոչ ավելի քիչ անգամ, դ) կ-ից ոչ ավելի շատ անգամ՝ զոհում են համապատասխանաբար հետեւյալ բանաձեռնությունը.

- ա) $P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k-1)$,
- բ) $P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(n)$,
- գ) $P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n)$,
- դ) $P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k)$,

110. Հավասարառությունը շրկու շախմատիստ շախմատ են խառզում։ Մըն է ավելի հավանական, շահել 4 խաղից 2-ր, թե՞ 6-ից՝ 3-ը (ոչ սքիները հաշվի չեն առնվազմ)։

Լուծում. Խաղամ են հավասարառություն շախմատիստներ, հետեւաբար տանելու հավանականությունը՝ $p = \frac{1}{2}$ և առրվագելու հավանականությունը՝ $q = \frac{1}{2}$, թանի որ բոլոր խառզերամ շահելու հավանականությունը հաստատուն է, և կախված չէ խաղերը շահելու հերթականությունից, ապա կիրառելի է Բանալլիի բանաձեռնությունը՝

Դանենք հավանականությունը, որ 4-ից երկու խաղ կրամանան։

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16},$$

Գանենք հավանականությունը, որ 6-ից 3 խաղ կշահան։

$$P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16},$$

Քանի որ $P_4(2) > P_6(3)$, ապա ավելի հավանական է շահել 2 խաղ 4-ից, քան 3-ը՝ 6-ից:

111. Երկու հավասարառություններ շախմատ են խաղում: Ո՞րն է ավելի հավանական: ա) շահել 1 խաղ 2-ից, թե՛ 2-ը՝ 4-ից. բ) շահել 2-ից ոչ քիչ խաղ 4-ից, թե՛ 3-ից ոչ քիչ խաղ 5-ից: Ոչ ոքիները հաշվի չեն առնվում:

Պատճ.՝ ա) ավելի հավանական է շահել 1 խաղ 2-ից, $P_2(1) = \frac{1}{2}$, $P_4(2) = \frac{3}{8}$. բ) ավելի հավանական է շահել 2-ից ոչ քիչ խաղ 4-ից. $P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 1 - P_4(0) - P_4(1) = \frac{11}{16}$, $P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = \frac{8}{16}$.

112. Մետաղադրամը գցում են 5 անգամ: Գտնել հավանականությունը որ «գերբը» կերևա. ա) 2-ից ավելի քիչ անգամ, բ) 3-ից ոչ քիչ անգամ:

Պատճ.՝ ա) $P = P_5(0) + P_5(1) = \frac{3}{16}$. բ) $Q = 1 - [P_5(0) + P_5(1)] = \frac{13}{16}$.

113. Գտնել հավանականությունը, որ A պատահույթը կերևա 3-ից ոչ քիչ անգամ 4 անկախ փորձերում, եթե մեկ փորձում A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է 0,4-ի:

Պատճ.՝ $P_4(3) + P_4(4) = 0,1792$:

114. B պատահույթը հանդես կդա այն դեպքում, եթե A պատահույթը հանդես գա 4-ից ոչ քիչ անգամ: Գտնել B պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը, եթե կատարվում են 5 անկախ փորձեր, որոնցից յուրաքանչյուրում A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է 0,8-ի:

Պատճ.՝ $P_5(4) + P_5(5) = 0,74$:

115. Ընտանիքում կա 5 երեխա: Գտնել հավանականությունը, որ նրանցից. ա) 2-ն են տղա, բ) 2-ից ոչ շատն են 58

տղաներ, դ) 2-ից ոչ քիչ տղաներ են և 3-ից ոչ շատ: Տղա-
յի ծնվելու հավանականությունը ընդունել 0,51:

Պատ.՝ Աբովնելի հավանականություններն են, ա) 0,31, բ) 0,48,
գ) 0,52, դ) 0,62:

116. 15 սմ երկարություն ունեցող ԱԲ հատվածը Ը կե-
տով բաժանված է 2:1 հարաբերությամբ: Այդ հատվածին
պատահականորեն նետված են 4 կետեր: Գտնել այն հավա-
նականությունը, որ նրանցից 2-ը կընկնեն Ը-ից ձախ և 2-ը՝
աջ: Ենթադրվում է, որ կետը հատվածի վրա ընկնելու հա-
վանականությունը համեմատական է հատվածի երկարու-
թյանը և կախված չէ նրա դիրքից:

$$\text{Պատ.՝ } P_4(2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27},$$

117. Յ երկարության ԱԲ հատվածի վրա պատահականո-
րեն նետված են 5 կետեր: Գտնել այն հավանականությունը,
որ 2 կետ կդանվեն Ա կետից Խ-ից ավելի քիչ հեռավորու-
թյան վրա, իսկ 3-ը՝ Խ-ից ավելի շատ հեռավորության վրա:
Ենթադրվում է, որ կետը հատվածի վրա ընկնելու հավանա-
կանությունը համեմատական է հատվածի երկարությանը և
կախված չէ նրա դիրքից:

$$\text{Պատ.՝ } P_5(2) = C_5^2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{a-x}{a}\right)^3,$$

118. Հատվածը բաժանված է 4 հավասար մասերի: Հատ-
վածի վրա պատահականորեն նետված են 8 կետեր: Գտնել
այն հավանականությանը, որ 4 մասերից՝ յուրաքանչ-
յուրի վրա կընկնի 2-ական կետ: Ենթադրվում է, որ կետը
հատվածի վրա ընկնելու հավանականությունը համեմատ-
կան է նրա երկարությանը և կախված չէ նրա դիրքից:

$$\text{Պատ.՝ } P = C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2.$$

§ 2. Լապլասի լոկալ և ինտեգրալ թեորեմները

Լապլասի լոկալ թեորեմը. Հավանականությունը, որ Ո անկախ վիրձերում, որոնցից յուրաքանչյուրում պատահույրի հանդես գալու հավանականությունն է p ($0 < p < 1$), պատահույրը հանդես կգա ուղիղ և անզամ (միենույն է բե ինչ հաջորդականությամբ), մոտավորապես հավասար է

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{\pi p q}} \cdot \varphi(x),$$

Այսուեղ

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}},$$

$\varphi(x)$ ֆունկցիայի աղյուսակը x -ի դրական արժեքների համար բերված է № 1 հավելվածում. x -ի բացասական արժեքների համար ևս օգտվում են այդ աղյուսակից [$\varphi(x)$ ֆունկցիան դույդ է, $\varphi(-x) = \varphi(x)$].

Լապլասի ինտեգրալ թեորեմը. Հավանականությունը, որ Ո անկախ վիրձերում, որոնցից յուրաքանչյուրում պատահույրի հանդես գալու հավանականությունն է p ($0 < p < 1$), պատահույրը հանդես կգա k_1 -ից ոչ քիչ և k_2 -ից ոչ շատ անզամ, մոտավորապես հավասար է

$$P_n(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

Այսուեղ

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \rho$$

Լապլասի ֆունկցիան է

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

Լապլասի ֆունկցիայի աղյուսակը x -ի դրական արժեքների համար ($0 \leq x \leq 5$) բերված է № 2 հավելվածում. x -ի 5-ից մեծ արժեքների համար վերցնում են $\Phi(x) = 0$. x -ի բացասական արժեքների համար օգտվում են այդ նույն աղյուսակից, հաշվի առնելով, որ Լապլասի ֆունկցիան կենտ է $[\Phi(-x) = -\Phi(x)]$:

119. Գտնել հավանականությունը, որ պատահութը հանդես կգա ողիղ 70 անգամ 243 փորձում, եթե յուրաքանչյուր փորձում այդ պատահութի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է 0,25-ի:

Լուծում: Բայս պայմանի $n = 243$, $k = 70$, $p = 0,25$, $q = 0,75$: Քանի որ $n = 243$ -ը բավականին մեծ թիվ է, օգտվում ենք Լազլասի լոկալ թեորեմից:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

$$\text{որտեղ } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}},$$

Գտնենք x -ի արժեքը:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0,25}{\sqrt{243 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} = \frac{9,25}{6,75} = 1,37,$$

Աղյուսակից (*Հավելված 1*) գտնում ենք

$$\varphi(1,37) = 0,1561:$$

Ուսնելի հավանականությունն է

$$P_{243}(70) = \frac{1}{6,75} \cdot 0,1561 = 0,0231,$$

120. Գտնել հավանականությունը, որ Λ պատահութը հանդես կգա 1400 անգամ 2400 փորձերում, եթե այդ պատահութի յուրաքանչյուր փորձում հանդես գալու հավանականությունը հավասար է 0,6-ի:

Լուծում: Քանի որ $n = 2400$ մեծ է, օգտվում ենք Լազլասի լոկալ թեորեմից:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

Հաշվենք x -ը՝

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1400 - 2400 \cdot 0,6}{\sqrt{2400 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = -\frac{40}{24} = -1,67,$$

$$\text{Քանի որ } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ ֆունկցիան դույդ է, ապա}$$

$$\varphi(-1,67) = \varphi(1,67),$$

Աղյուսակից (Հավելված 1) գտնում ենք,

$$\varphi(1,67) = 0,0989,$$

Որոնելի հավանականությունն է.

$$P_{2400}(1400) = \frac{1}{24} \cdot 0,0989 = 0,0041,$$

121. Մեկ անգամ կրակելիս թիրախի խոցման հավանականությունը հավասար է 0,8-ի: Գտնել հավանականությունը, որ 100 անգամ կրակելիս թիրախը կխոցվի ուղիղ 75 անգամ:

$$\text{Պատ. } P_{100}(75) = 0,04565,$$

122. Տղա ծնվելու հավանականությունը հավասար է 0,51-ի: Գտնել հավանականությունը, որ 100 նորածիններից 50-ը կլինեն տղա:

$$\text{Պատ. } P_{100}(50) = 0,0782,$$

123. Մետաղադրամը գցված է $2N$ անգամ (N -ը մեծ է): Գտնել հավանականությունը, որ «գերբը» կընկնի ուղիղ N անգամ:

$$\text{Պատ. } P_{2N}(N) = 0,5642 / \sqrt{N}.$$

124. Մետաղադրամը նետված է $2N$ անգամ: Գտնել հավանականությունը, որ «գերբը» կընկնի 2մոռով շատ անգամ, քան գիրը:

$$\text{Պատ. } P_{2N}(N+m) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \varphi\left(\sqrt{\frac{2}{N}} \cdot m\right),$$

125. Պատահութիւն հանդես գալու հավանականությունը 100 անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հաստատուն է և հավասար է 0,8-ի: Գտնել հավանականությունը, որ պատահութը հանդես կգա. ա) 70-ից ոչ քիչ և 90-ից ոչ շատ անգամ. բ) 75-ից ոչ քիչ անգամ. գ) 74-ից ոչ շատ անգամ:

Լուծում: Օգտվենք Լապլասի ինտեգրալ թեորեմից.

$$P_n(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

որտեղ $\Phi(x)$ -ը Լապլասի ֆունկցիան է:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

ա) Համարմանի $n = 100$, $p = 0,8$, $q = 0,2$, $k_1 = 75$, $k_2 = 90$: Հաշվենք x' և x'' .

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25,$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,5;$$

Հաշվի առնելով, որ Լապլասի ֆունկցիան կենտ է, այդինքն՝ $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ կստանանք.

$P_{100}(75; 90) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25)$: Աղյուսակից (Հավելված 2) կգտնենք.

$$\Phi(2,5) = 0,4938, \quad \Phi(1,25) = 0,3944,$$

Որոնելի հավանականությունը.

$$P_{100}(75; 90) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882,$$

բ) Այն պահանջը, որ պատահութեա հանգես գա 75-ից ոչ քիչ անգամ, նշանակում է, որ պատահութի հանգես գալու թիվը կարող է հավասար լինել 75 կամ 76, ..., կամ 100: Այսպիսով, գիտարկվող զեպքում պետք է զերցնել $k_1 = 75$, $k_2 = 100$: Այդ գեպքում

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25,$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 5,$$

Աղյուսակից (Հավելված 2) կդանենք

$$\Phi(1,25) = 0,3944, \quad \Phi(5) = 0,5,$$

Որոնելի հավանականությունը

$$P_{100}(75; 100) = \Phi(5) - \Phi(-1,25) = \Phi(5) + \Phi(1,25) = \\ = 0,5 + 0,3944 = 0,8944,$$

գ) «Ա-ն հանդես է եկել 75-ից ոչ քիչ» և «Ա-ն հանդես է եկել 74-ից ոչ շատ» պատահույթները հակադիր են, աստի նրանց հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի: Հետևաբար, որոնելի հավանականությունը.

$$P_{100}(0; 74) = 1 - P_{100}(75; 100) = 1 - 0,8944 = 0,1056,$$

126. Պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը 2100 անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է 0,7-ի: Գտնել հավանականությունը, որ պատահույթը հանդես կգա. ա) 1470-ից ոչ քիչ և 1500-ից ոչ շատ անգամ, բ) 1470-ից ոչ քիչ անգամ. գ) 1469-ից ոչ շատ անգամ:

$$\text{Պատ. ա)} P_{2100}(1470; 1500) = 0,4236, \quad \text{բ)} P_{2100}(1470; 2100) = \\ = 0,5, \quad \text{գ)} P_{2100}(0; 1469) = 0,5,$$

127. Պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը 21 անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում 0,7 է: Գտնել հավանականությունը, որ պատահույթը հանդես կգա փորձերից մեծամասնությունում:

$$\text{Պատ.} \quad P_{21}(11; 21) = 0,95945,$$

128. Մետաղադրամը գցված է $2N$ անգամ (N -ը մեծ է): Գտնել հավանականությունը, որ «գերբի» ընկնելու թիվը կգտնվի $N - \sqrt{2N}/2$ և $N + \sqrt{2N}/2$ թվերի միջև:

$$\text{Պատ.} \quad P = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) = 0,6826,$$

129. Պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է 0,8-ի: Քանի փորձ պետք է կատարել, որ 0,9 հավանականությամբ

Հնարավոր լինի սպասել, որ պատահութը հանդեմ կգա
75-ից ոչ քիչ անգամ:

Լուծում: Ըստ պայմանի $p=0,8$, $q=0,2$, $k_1=75$,
 $k_2=n$, $P_n=P(75; n)=0,9$:

Օդովենք Լապլասի ինտեղրալ խեռնեմից.

$$P_n(k_1; n) = \Phi(x'') - \Phi(x') = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \\ - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

Տեղադրելով խնդրի տվյալները, կստանանք

$$0,9 = \Phi\left(\frac{n - 0,8n}{\sqrt{n \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 0,8n}{\sqrt{n \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right)$$

կամ

$$0,9 = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right),$$

Ակնհայտ է, որ փորձերի թիվը՝ $n > 75$, ուստի

$$\frac{\sqrt{n}}{2} > \frac{\sqrt{75}}{2} \approx 4,33, \text{ Քանի որ } \text{Լապլասի } \Phi \text{ տարածության } \text{աճող } \xi$$

և $\Phi(4) \approx 0,5$, սպա կարելի է ակնհայտել $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 0,5$, զե-

տեաբար,

$$0,9 = 0,5 - \Phi\left(\frac{75 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right),$$

Ալսպիսով,

$$\Phi\left(\frac{75 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right) = -0,4, \quad (*)$$

Աղյուսակից ($\zeta_{\text{ավելիած 2}} \text{ կդանինք } \Phi(1,28) = 0,4$),
Ալստեղից և (*) առնչությունից, հաշվի առնելով, որ Լապ-
լասի Փոնկյան կենտ է, կստանանք:

$$\frac{75 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}} = -1,28,$$

Լուժելով այս հավասարումը, որպես $\sqrt{n-p}$ նկատմամբ
քառակուսի հավասարում, կստանանք

$$\sqrt{n} = 10;$$

Հետևաբար, փորձերի որոնելի թիվը՝ $n = 100$:

130. Դրական արդյունքի հավանականությունը ու փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է $0,9-\text{ի}$: Քանի՞ փորձ պետք է կատարել, որպեսզի $0,98$ հավանականությամբ հնարավոր լինի սպասել, որ $150-\text{ից}$ ոչ քիչ փորձեր կատան դրական արդյունք:

Պատ.³ $n = 177$.

§ 3. Հարաբերական հաճախության շեղումը հաստատուն հավանականությունից՝ անկախ փորձերում

Հարաբերական հաճախության հաստատուն հավանականությունից ունեցած շեղման գնահատականը: Հավանականությունը, որ ունեկախ փորձերում, որոնցից յուրաքանչյուրում պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է $p-\text{ի}$ ($0 < p < 1$), պատահույթի հանդես գալու հարաբերական հաճախության նրա հանդես գալու հավանականությունից ունեցած շեղման բացարձակ արժեքը չի գերազանցի դրական ε թիվը, մոտավորապես հավասար է $x = \varepsilon \sqrt{n/pq}$ արժեքի դևակում Լապլասի ֆաւնկցիայի կրկնապատճեն:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

131. Պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը 625 անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է $0,8-\text{ի}$: Գտնել հավանականությունը, որ պատահույթի հանդես գալու հարաբերական հաճախությունը կշեղվի նրա հավանականությունից բացարձակ արժեքով ոչ շատ, քան $0,04-\text{ը}$:

Լուժում: Ըստ պայմանի՝ $n = 625$, $p = 0,8$, $q = 0,2$, $\varepsilon = 0,04$: Պահանջվում է գտնել $P\left(\left|\frac{m}{625} - 0,8\right| \leq 0,04\right)$

Հավանականությունը՝ Օգտվենք հետևյալ բանաձևից:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

Ունենք.

$$P\left(\left|\frac{m}{625} - 0,8\right| \leq 0,04\right) = 2\Phi\left(0,04 \sqrt{\frac{625}{0,8 \cdot 0,2}}\right) = 2\Phi(2,5),$$

Աղյուսակից (հավելված 2) կդառնենք $\Phi(2,5) = 0,4938$: Հետեւարար,

$$2\Phi(2,5) = 2 \cdot 0,4938 = 0,9876:$$

Այսպիսով, որոնելի հավանականությունը մոտավորապես հավասար է 0,9876-ի:

132. Պատահութիւն հանդես գալու հավանականությունը 900 անկախ փորձերից լորաքանչյուրում հավասար է 0,5-ի: Գտնել հավանականությունը, որ պատահութիւն հանդես գալու հարաբերական հաճախությունը կշեղվի նրա հավանականությունից բացարձակ արժեքով ոչ շատ, քան 0,02-ը:

Պատ.՝ $P = 2\Phi(1,2) = 0,7698$.

133. Պատահութիւն հանդես գալու հավանականությունը 10000 անկախ փորձերից լորաքանչյուրում հավասար է 0,75-ի: Գտնել հավանականությունը, որ պատահութիւն հարաբերական հաճախությունը կշեղվի նրա հավանականությունից բացարձակ արժեքով ոչ շատ, քան 0,01-ը:

Պատ.՝ $P = 2\Phi(2,31) = 0,979$.

134. Ֆրանսիական զիտնական Բլոֆֆոնը (XVIII դ) մետաղադրամը զցել է 4040 անգամ, ընդ որում «գերբր» երեացել է 2048 անգամ: Գտնել հավանականությունը, որ Բլոֆֆոնի փորձերը կրկնելիս «գերբր» երեալու հարաբերական հաճախությունը կշեղվի նրա հավանականությունից բացարձակ արժեքով ոչ շատ, քան Բլոֆֆոնի փորձամ:

Պատ.՝ $P = 2\Phi(0,877) = 0,6196$.

135. Պատահութիւն հանդես գալու հավանականությունը անկախ փորձերից լորաքանչյուրում հավասար է 0,5-ի:

Գտնել փորձերի ո թիվը, որի դեպքում $0,7698$ հավանականությամբ հնարավոր լինի սպասել, որ պատահութիւնը կշեղվի նրա հավանականությունից ոչ շատ, քան $0,02$ -ը:

Լուծում: $P_{\text{ստ}} \text{ պայմանի } p = 0,5, q = 0,5, \varepsilon = 0,02,$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,5\right| \leqslant 0,02\right) = 0,7698;$$

$O_{\text{դուվենք}} \text{ հետևյալ բանաձևից.}$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

$P_{\text{ստ}} \text{ պայմանի}$

$$2\Phi\left(0,02 \sqrt{\frac{n}{0,5 \cdot 0,5}}\right) = 0,7698$$

կամ

$$\Phi(0,04 \cdot \sqrt{n}) = 0,3849,$$

Աղյուսակից ($\Phi(1,2) = 0,3849$) գտնենք $\Phi(1,2)$ հետևյալ գործար:

$$0,04 \sqrt{n} = 1,2$$

կամ

$$\sqrt{n} = 30,$$

Այսպիսով, փորձերի որոնելի թիվը՝ $n = 900$:

136. Քանի՞ անգամ պետք է գցել խաղուկը, որպեսզի

$$\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{6}\right| \leqslant 0,01$$

անհավասարության հավանականությունը լինի ոչ քիչ, քան հակառակ անհավասարության հավանականությունը, որտեղ մը 1 միավորի դուրս գալու թիվն է խաղուկը ո անգամ գցելիս:

Լուծում: $O_{\text{դուվենք}} \text{ հետևյալ բանաձևից.}$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - P\right| \leqslant \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

Հստ պայմանի $p = \frac{1}{6}$, $q = 5/6$, $\varepsilon = 0,01$: Տրվածին հակառակ անհավասարության իրականանալու հավանականությունը, այսինքն, որ $\left| \frac{m}{n} - \frac{1}{6} \right| > 0,01$, հավասար է

$$1 - 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right):$$

Հստ պայմանի պետք է տեղի ունենա

$$2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \geq 1 - 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

անհավասարությունը կամ

$$4\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \geq 1,$$

Ալսաեղից

$$\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \geq 0,25: \quad (*)$$

Աղբասակից (*հավելված 2*) կգտնենք $\Phi(0,67) = 0,2486$, $\Phi(0,68) = 0,2517$:

Կատարելով գծալին ինտերպոլացիա, կստանանք

$$\Phi(0,6745) = 0,25:$$

Հաշվի առնելով (*) առնչությունը և ի նկատի ունենալով, որ $\Phi(x)$ ֆունկցիան աճող է, կտնենանք

$$\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}} \geq 0,6745$$

կամ

$$0,01 \cdot \sqrt{\frac{n}{1,6 \cdot 5/6}} \geq 0,6745,$$

Ալսաեղից կգտնենք մետաղադրամը զցելու որոնելի թիվը՝ $n \geq 632$:

137. Պատահալիթի հանդես դալու հավանականությունը անկախ փորձերից լորաքանչլորում հավասար է 0,2-ի:

Դանել փորձերի ո թիվը, որի գեպքում $0,9876$ հավանականությամբ կարելի լինի սպասել, որ պատահութիւն հանդես գալու հարաբերական հաճախությունը կշեղվի նրա հավանականությունից բացարձակ արժեքով ոչ շատ, քան $0,04$ -ը:

Պատ.՝ $n = 625$,

138. Սափորում կան սպիտակ և սև գնդակներ՝ $4:1$ հարաբերությամբ: Գնդակը հանելուց հետո նշում են նրա գույնը և այն վերադարձնում սափոր: Ինչի՞ է հավասար հանումների ո թիվը, որի գեպքում $0,9722$ հավանականությամբ կարելի լինի սպասել, որ սպիտակ գնդակի գույնը հարաբերական հաճախության նրա հավանականությունից ունեցած շեղման բացարձակ արժեքը կլինի ոչ շատ, քան $0,01$ -ը:

Պատ.՝ $n = 7744$,

139. Պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը 400 անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է $0,8$ -ի: Գտնել այնպիսի դրական ε թիվ, որ $0,9876$ հավանականությամբ պատահույթի հանդես գալու հարաբերական հաճախության նրա հավանականությունից ունեցած շեղման բացարձակ արժեքը չգերազանցի ε -ը:

Լուծում: Ըստ՝ պայմանի $n = 400$, $p = 0,8$, $q = 0,2$ կամ

$$2 \Phi \left(\varepsilon \sqrt{\frac{400}{0,8 \cdot 0,2}} \right) = 0,9876$$

Կամ

$$\Phi(50 \varepsilon) = 0,4938:$$

Աղյուսակից ($հավելված 2$) կդտնենք $\Phi(2,5) = 0,4938$: Հետեաբար,

$$50 \varepsilon = 2,5:$$

Այստեղից

$$\varepsilon = \frac{2,5}{50} = 0,05:$$

140. Պատահութիւնի հանդես գալու հավանականությունը
900 անկախ փորձերից լուրաքանչյուրում հավասար է $0,5$ -ի:
Դանել այնպիսի գրական է թիվ, որ $0,7698$ հավանականությամբ պատահութիւնի հանդես գալու հարաբերական հաճախության նրա հավանականությունից ունեցած շեղման բացարձակ արժեքը չգերազանցի է:

Պատ.՝ $\varepsilon = 0,02$:

141. Պատահութիւնի հանդես գալու հավանականությունը
10000 անկախ փորձերից լուրաքանչյուրում հավասար է $0,75$ -ի:
Դանել այնպիսի գրական է թիվ, որ $0,979$ հավանականությամբ պատահութիւնի հանդես գալու հարաբերական հաճախության նրա հավանականությունից ունեցած շեղման բացարձակ արժեքը չգերազանցի է:

Պատ.՝ $\varepsilon = 0,01$:

142. Տեխնիկական հսկողության բաժինը սատուգում է
900 դետալ ըստ միօրինակության: Հավանականությունը, որ
դետալը միօրինակ է, հավասար է $0,9$ -ի: $0,9544$ հավանականությամբ դանել սահմանները, որոնցում կդանական սատուգում ծների մեջ միօրինակ դետալների ու թիվը:

Լուծում: Բառ պարբանի $n = 900$, $p = 0,9$, $q = 0,1$
կամ

$$2 \Phi \left(\varepsilon \sqrt{\frac{900}{0,9 \cdot 0,1}} \right) = 0,9544,$$

$$\Phi(100 \varepsilon) = 0,4772,$$

Աղյուսակից ($հավելված 2$) կդանական Փ (2) = 0,4772: Հետեւաբար,

$$100 \varepsilon = 2,$$

Այսաղից

$$\varepsilon = 0,02,$$

Այսպիսով, $0,9544$ հավանականությամբ միօրինակ դե-

տալների հարաբերական հաճախության շեղումը 0,9 հավա-
նականությունից բավարարում է

$$\left| \frac{m}{900} - 0,9 \right| \leqslant 0,02$$

անհավասարությանը կամ

$$0,88 \leqslant \frac{m}{900} \leqslant 0,92$$

անհավասարությանը:

Այստեղից, 900 ստուգված դետալների մեջ միորինակների
ու թիվը 0,9544 հավանականությամբ ընկած է հետեւալ
սահմաններում. $792 \leqslant m \leqslant 828$:

143. Տեխնիկական հսկողության բաժինը ստուգում է
475 շինվածքի խոտանությունը: Շինվածքի խոտան լինելու
հավանականությունը 0,05 է: 0,9426 հավանականությամբ
գտնել սահմանները, որոնցում կգտնվի ստուգվածների մեջ
խոտան շինվածքների ու թիվը:

Պատ.՝ 14 $\leqslant m \leqslant 32$:

144. Խաղոսկրը գցում են 80 անգամ: 0,9973 հավանա-
կանությամբ գտնել սահմանները, որոնցում կգտնվի 6-ի
բացվելու ու թիվը:

Պատ.՝ 3 $\leqslant m \leqslant 23$:

§ 4. Անկախ փորձերում պատահույթի հանդես գալու ամենահավանական թիվը

Պատահույթի հանդես գալու ամենահավանական
թիվը: Պատահույթի երևալու k_0 թիվը (անկախ փորձերում,
որոնցից յուրաքանչյուրում պատահույթի հանդես գալու հա-
վանականությունը ը է) կոչում են ամենահավանական,
եթե հավանականությունը, որ պատահույթը հանդես կգա այդ
փորձերում k_0 անգամ, գերազանցում է (կամ առնվազն,
փոքր չէ) փորձերի մնացած հնարավոր ելքերի հավանա-
կանությունից:

Ամենահավանական k_0 թիվը որոշվում է

$$np - q \leq k_0 < np + p$$

կրկնակի անհավասարությունից, ընդ որում.

ա) եթե $np - q = n$ կոտորակ է, ապա գոյաթյուն ունի մեկ ամենահավանական k_0 թիվ,

բ) եթե $np - q < n$ ամբողջ թիվ է, ապա գոյաթյուն ունեն երկու ամենահավանական թվեր՝ k_0 և $k_0 + 1$,

գ) եթե $np - q > n$ ամբողջ թիվ է, ապա ամենահավանականն է $k_0 = np$ թիվը:

145. Փորձարկվում է ինչ-որ սարքի 15 տարրերից յուրաքանչյարք։ Հավանականությունը, որ տարրը կդիմանա փորձարկմանը հավասար է 0,9-ի։ Գտնել այն տարրերի ամենահավանական թիվը, որոնք կդիմանան փորձարկմանը։

Առ ծամակ բառ պարզանի $n = 15$, $p = 0,9$, $q = 0,1$ ։ Գտնենք ամենահավանական k_0 թիվը հետեւալ կրկնակի անհավասարությունից։

$$np - q \leq k_0 < np + p$$

Տեղադրելով ինդրի ավագները, կստանանք

$$15 \cdot 0,9 - 0,1 \leq k_0 < 15 \cdot 0,9 + 0,9$$

կամ

$$13,4 \leq k_0 < 14,4$$

Քանի որ k_0 -ն չամբողջ թիվ է և քանի որ $13,4$ ու $14,4$ թվերի միջև բնկած է մեկ ամբողջ թիվ՝ 14 -ը, ապա որոնելի ամենահավանական $թիվը՝ k_0 = 14$ ։

146. Տեխնիկական հսկողաթյան բաժինը ստուգում է 10 գետալների խմբաքանակը։ Հավանականությունը, որ գետալը միօրինակ է, հավասար է $0,75$ -ի։ Գտնել գետալների ամենահավանական թիվը, որոնք միօրինակ կհանաչվին։

$$\Phi_{\text{առաջ}} \cdot k_0 = 8$$

147. Ապրանքագիտաբ զնումը է ապրանքի 24 նմաց Հավանականությունը, որ լարաքանչյար նմաց կճանաչվի որպես վաճառման համար պիտանի։ Հավասար է $0,6$ -ի։

Գտնել ամենահավանական թիվը այն նմուշների, որոնք ապրանքագետը կճանաչի վաճառմանը պիտանի:

Լուծում: Ըստ պայմանի $n=24$, $p=0,6$, $q=0,4$:
Գտնենք ապրանքի վաճառելու համար պիտանի նմուշների ամենահավանական թիվը հետևյալ կրկնակի անհավասարությունից:

$$np - q \leq k_0 < np + p:$$

Տեղադրելով խնդրի տվյալները, կստանանք.

$$24 \cdot 0,6 - 0,4 \leq k_0 < 24 \cdot 0,6 + 0,6$$

կամ

$$14 \leq k_0 < 15:$$

Քանի որ $np - q = 14$ -ը ամբողջ թիվ է, ապա կան 2 ամենահավանական թվերը՝ $k_0 = 14$ և $k_0 + 1 = 15$:

148. Գտնել ծակողի կողմից ճիշտ ծակված պերֆոքարտերի ամենահավանական թիվը՝ $k_0 = 14$ և $k_0 + 1 = 15$:

$$\text{Պատ. } k_0 = 17, \quad k_0 + 1 = 18:$$

149. Երկու հավասարառության հակառակորդներ շախմատ են խաղում: Գտնել յուրաքանչյուր շախմատիստի շահումների ամենահավանական թիվը, եթե կիսադաշվի 2 N արդյունարար (առանց ոչոքիների) խաղ:

Լուծում: Հայտնի է, որ եթե փորձերի ո թվի և թ հավանականության արտադրյալը ամբողջ թիվ է, ապա ամենահավանական թիվը՝ $k_0 = np$:

Դիտարկող խնդրում փորձերի ո թիվը հավասար է խաղացված խաղերի թվին՝ 2 N. պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է 1 խաղում շահելու հավանականությանը, ալիսինքն՝ $p = \frac{1}{2}$ (ըստ պայմանի հակառակորդներն հավասարազոր են):

$$\text{Քանի որ } np = 2 N \cdot \frac{1}{2} = N \text{ արտադրյալը ամբողջ թիվը}$$

է, ապա շահած խաղերի որոնելի ամենահավանական թիվը հավասար է N-ի:

150. Երկու հրաձիգ կրակում են թիրախին: Վրիպելու հավանականությունը մեկ անգամ կրակելիս առաջին հրաձիգի համար հավասար է 0,2-ի, իսկ երկրորդի համար՝ 0,4-ի: Գտնել համազարկերի ամենահավանական թիվը, որոնց գեղքում չի լինի թիրախին ոչ մի դիպում, եթե հրաձիգները տալիս են 25 համազարկ:

Լուծում: Հրաձիգների վրիպումները անկախ պատահայիններ են, հետեւաբար կիրառելի է անկախ պատահոյթների հավանականությունների բազմապատկման թեորեմը: Հավանականությունը, որ երկու հրաձիգն էլ մեկ համազարկում կվրիպեն,

$$p = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08;$$

Թանի որ $n_p = 25 \cdot 0,08 = 2$ արտազրգալը ամբողջ թիվ է, ապա համազարկերի ամենահավանական թիվը, որոնց գեղքում չի լինի ոչ մի դիպում,

$$k_0 = n_p = 2:$$

151. Երկու հրաձիգ միաժամանակ կրակում են թիրախին: Մեկ անգամ կրակելիս թիրախին զիսցնելու հավանականությանը առաջին հրաձիգի համար հավասար է 0,8-ի, իսկ երկրորդ հրաձիգի համար՝ 0,6-ի: Գտնել համազարկերի ամենահավանական թիվը, որոնց գեղքում երկու հրաձիգներն էլ կդիպչեն թիրախին, եթե արգում է 15 համազարկ:

$$\Phi_{\text{առ.}}: k_0 = 7:$$

152. Գանիճ անկախ փորձ պետք է կատարել, որոնցից յորքանշուրում պատահալիթի հանդիս գալու հավանականությունն է 0,4, որպեսզի պատահալիթի հանդիս գալու ամենահավանական թիվը արդ փորձում լինի 25:

Լուծում: Ըստ պայմանի $k_0 = 25$, $p = 0,4$, $q = 0,6$. Օգտագենք կրկնակի անհավասարաթյունից՝

$$n_p - q \leq k_0 < n_p + p$$

Անհայտ թիվը գտնելու համար աեղադրենք խնդրի տրված կանոնը, կտտանանք անհավասարությունների համակարգ։

$$0,4n - 0,6 \leqslant 25, \quad 0,4 n + 0,4 > 25,$$

Համակարգի առաջին անհավասարությունից կգտնենք

$$n \leqslant \frac{25,6}{0,4} = 64:$$

Համակարգի երկրորդ անհավասարությունից կունենանք

$$n > \frac{24,6}{0,4} = 61,5,$$

Այսպիսով, փորձերի որոնելի թիվը պետք է բավարարի հետևյալ կրկնակի անհավասարությանը՝

$$62 \leqslant n \leqslant 64:$$

153. Պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է 0,3-ի։ Գտնել փորձերի ո թիվը, որի գեպքում պատահույթի հանդես գալու ամենահավանական թիվը կլինի 30։

$$\text{Պատ.՝ } 100 \leqslant n \leqslant 102.$$

154. Պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է 0,7-ի։ Գտնել փորձերի ո թիվը, որի գեպքում պատահույթի հանդես գալու ամենահավանական թիվը կլինի 20։

$$\text{Պատ.՝ } 28 \leqslant n \leqslant 29.$$

155. Ինչի՞ է հավասար պատահույթի հանդես գալու ք հավանականությունը 49 անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում, եթե պատահույթի հանդես գալու ամենահավանական թիվը այդ փորձերում 30 է։

Լուծում: Ըստ պայմանի $n = 49$, $k_0 = 30$. Օգավելով կրկնակի անհավասարությունից

$$np - q \leqslant k_0 < np + p:$$

Անհայտ ք հավանականությունը գտնելու համար տեղապեսնք խնդրի ավալները, կստանանք անհավասարությունների համակարգ։

$$49p + p > 30, \quad 49p - (1 - p) \leqslant 30;$$

$\zeta_{\text{ամակարգի}} \text{առաջին} \quad \text{անհավասարությունից \quad կգտնենք}$
 $p > 0,6, \quad \zeta_{\text{ամակարգի}} \quad \text{երկրորդ} \quad \text{անհավասարությունից}$
 $\zeta_{\text{ամակարգի}} \leqslant 0,62,$

Այսպիսով, որոնելի հավանականությունը պետք է բավարարի հետեւյալ կրկնակի անհավասարությանը՝

$$0,6 < p \leqslant 0,62;$$

156. Ի՞նչի՞ է հավասար պատահայլթի հանգես գալու հավանականությունը 39 անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում, եթե պատահայլթի հանգես գալու ամենահավանական թիվը ալդ փորձերում 25 է։

$$\Phi_{\text{առ.}}: 0,625 < p \leqslant 0,65,$$

157. Մարտկոցը կատարել է 6 կրակոց։ Մեկ անգամ կրակելիս օրինկախն դիմքչելու հավանականությունը հավասար է 0,3-ի։ Գտնել. ա) դիպումների ամենահավանական թիվը, բ) դիպումների ամենահավանական թիվի հավանականությունը, գ) հավանականությունը, որ օրինկախ կքանդվի, եթե զրահ համար բավական է դունե երկու դիպում։

$$\text{Լուծում: } \text{Բառարարությունը: } n = 6, \quad p = 0,3, \quad q = 0,7:$$

ա) Գտնենք դիպումների ամենահավանական թիվը հետեւյալ բանաձևով.

$$np - q \leqslant k_0 < np + p,$$

Տեղադրելով խնդրի ավլալները, կստանանք.

$$6 \cdot 0,3 - 0,7 \leqslant k_0 < 6 \cdot 0,3 + 0,3$$

կամ

$$1,1 \leqslant k_0 < 2,1,$$

Այսուղից $k_0 = 2$.

բ) Դիպումների ամենահավանական թվի հավանականությունը գտնենք Բեռնուլիի բանաձևով.

$$P_6(2) = C_6^2 \cdot p^2 \cdot q^4 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^4 = 0,324,$$

գ) Գտնենք հավանականությունը, որ օրյենտը քանդված կլինի: Ըստ պայմանի դրա համար բավական է, որ լինի չկամ 3, կամ 4, կամ 5, կամ 6 դիպում: Այդ պատահույթներն անհամասնեղելի են, ուստի օրյենտի քանդվելու հավանականությունը հավասար է այդ պատահույթների հավանակությունների գումարին.

$$P = P_6(2) + P_6(3) + P_6(4) + P_6(5) + P_6(6),$$

Սակայն ավելի պարզ է սկզբում գտնել հակառակը պատահույթի (ոչ մի կամ մեկ դիպում) հավանականությունը:

$$Q = P_6(0) + P_6(1) = q^6 + C_6^1 p q^5 = 0,7^6 + 6 \cdot 0,3 \cdot 0,7^5 = 0,42:$$

Որոնելի հավանականությունը, որ օրյենտ կքանդվի:

$$P = 1 - Q = 1 - 0,42 = 0,58:$$

158. Գործիքը կազմված է անկախ աշխատող 5 տարրերից: Միացնելիս տարրի խափանվելու հավանականությունը հավասար է 0,2-ի: Գտնել, ա) խափանված տարրերի ամենահավանական թիվը՝ բ) խափանված տարրերի ամենահավանական թվի հավանականությունը, գ) գործիքը խափանվելու հավանականությունը, եթե դրա համար բավական է, որ խափանվեն գոնե 4 տարր:

$$\text{Պատ. ա)} k_0 = 1, \text{ բ)} P_5(1) = 0,41, \text{ գ)} P = 0,0067:$$

§ 5. Արտադրող ֆունկցիա

Այս գլուխ նախորդ պարագրաֆներում դիտարկվեցին պատահույթի հանդես գալու մի և նույն հավանականությամբ փորձեր Դիտարկենք այնպիսի փորձեր, որոնցում պատահույթի հանդես գալու հավանականությունները տարրեր են:

Թիցուք, կտարգում են ու անկախ փորձեր, ընդ որում առաջին փորձում A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է P_1 -ի, երկրորդում՝ P_2 , ..., n-րդում՝ P_n : A պատահույթի հան-

գես չդալու հավանականություններն համապատասխանաբար հավասար են q_1, q_2, \dots, q_n . $P_n(k)$ -ն A պատահույթի ուղիղ և անդամ հանդես գալու հավանականությունն է ու փորձերում:

$P_n(k)$ հավանականությունների արտադրող ֆունկցիա են անվանում հետևյալ հավասարությունով որպչի ֆունկցիան.

$$P_n(z) = (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2) \cdots (p_n z + q_n),$$

$P_n(k)$ հավանականությունը, որ ու անկախ փորձերում, որոնցից առաջնորդ պատահույթի հանդես գալու հավանականությունն է P_1 , երկրորդում՝ P_2 , և այլն, A պատահույթը հանդես կդառնուի ուղիղ և անդամ, հավասար է արտադրող ֆունկցիան շ-ի աստիճաններով զերլուծության մեջ z^{k-1} գործակցին: Օրինակ, եթե $n=2$, ապա

$$\varphi_2(z) = (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2) = p_1 p_2 z^2 + (p_1 q_2 + p_2 q_1)z + q_1 q_2,$$

Այսուեղ շեշտումը $p_1 p_2$ գործակցը հավասար է $P_2(2)$ հավանականությանը, որ 2 փորձերում Ա պատահույթը հանդես կդառնուի 2 անդամ, շ-ի $p_1 q_2 + p_2 q_1$ գործակցը հավասար է $P_2(1)$ հավանականությանը, որ Ա պատահույթը հանդես կդառնուի 1 անդամ. շ0-ի գործակցը, այսինքն $q_1 q_2$ աղատ անդամը հավասար է $P_2(0)$ հավանականությանը, որ Ա պատահույթը հանդես չի դառնուի անդամ:

159. Սարքը կազմված է 3 անկախ աշխատող տարրերից: Տարրերի անխափան աշխատելու հավանականությունները (t ժամանակամ) համապատասխանարար հավասար են՝ $p_1 = 0,7$, $p_2 = 0,8$, $p_3 = 0,9$: Գտնել հավանականությունը, որ t ժամանակամ անխափան կաշխատեն. ա) բոլոր տարրերը, բ) 2 տարր, գ) մեկ տարր, դ) ոչ մի տարր:

Լուծում: Քանի որ տարրերի անխափան աշխատելու հավանականությունները համապատասխանարար հավասար են՝ $p_1 = 0,7$, $p_2 = 0,8$, $p_3 = 0,9$, ապա հավանականությունները որ տարրերը կիսափանվեն.

$$q_1 = 0,3, \quad q_2 = 0,2, \quad q_3 = 0,1;$$

Կազմենք արտադրող ֆունկցիան.

$$\begin{aligned} \varphi_3(z) &= (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2)(p_3 z + q_3) = \\ &= (0,7z + 0,3)(0,8z + 0,2)(0,9z + 0,1) = \\ &= 0,504z^3 + 0,398z^2 + 0,092z + 0,006, \end{aligned}$$

ա) Հավանականությունը, որ 3 տարր անխափան կաշ-իստեն, հավասար է z^3 -ի գործակցին:

$$P_3(3) = 0,504;$$

բ) Հավանականությունը, որ 2 տարր անխափան կաշիստեն, հավասար է z^2 -ու գործակցին:

$$P_3(2) = 0,398;$$

գ) Հավանականությունը, որ 1 տարր անխափան կաշիստի, հավասար է z -ի գործակցին:

$$P_3(1) = 0,092;$$

դ) Հավանականությունը, ոչ մի տարր անխափան չի աշխատի, հավասար է ազատ անդամին:

$$P_3(0) = 0,006;$$

$$\text{Ս ու գում. } 0,504 + 0,398 + 0,092 + 0,006 = 1;$$

160. Երկու հրանոթից ուղղված է համազարկ նպատակելետին: Նպատակակելետին դիպչելու հավանականությունը առաջին հրանոթի համար 0,8 է, երկրորդի համար՝ 0,9: Գտնել հետևյալ պատճառովթների հավանականությունները. ա) նպատակին 1 դիպում, բ) մեկից ոչ քիչ դեպում:

Պատ.՝ ա) $P_2(2) = 0,72$, բ) $P_2(1) = 0,26$, գ) $P_2(0) = 0,02$, դ) $P_2(1) + P_2(2) = 0,98$:

161. Երեք հրանոթից ուղղված է համազարկ նպատակակելետին: Նպատակակելետին դիպչելու հավանականությունը առաջին հրանոթի համար 0,8 է, երկրորդի համար՝ 0,85, իսկ երրորդի համար՝ 0,9: Գտնել հետևյալ պատճառովթների հավանականությունները. ա) նպատակակելետին 3 դիպում, բ) 2 դիպում, գ) 1 դիպում, դ) ոչ մի դիպում, ե) գոնե մեկ դիպում:

Պատ.՝ ա) $P_3(3) = 0,612$, բ) $P_3(2) = 0,329$, գ) $P_3(1) = 0,056$, դ) $P_3(0) = 0,003$, ե) $P = 1 - q_1q_2q_3 = 0,997$:

162. Հաշվողական սարքի չորս տարր աշխատում են: անկախ: Առաջին տարրի խափանվելու հավանականությունը

և ժամանակում հավասար է $0,2\text{-ի}$, երկրորդի համար՝ $0,25\text{-ի}$,
երրորդի համար՝ $0,3\text{-ի}$, չորրորդի համար՝ $0,4\text{-ի}$: Գտնել
հավանականությունը, որ և ժամանակում կխափանվեն. ա)՝
4 տարր, բ) 3 տարր, գ) 2 տարր, դ) 1 տարր, ե) ոչ մի
տարր, զ) $2\text{-ից } n\leq շատ տարրեր:$

Պատ.՝ ա) $P_4(4)=0,006$, բ) $P_4(3)=0,065$, գ) $P_4(2)=0,254$,
դ) $P_4(1)=0,423$, ե) $P_4(0)=0,252$, զ) $P_4(0)+P_4(1)+P_4(2)=$
 $=0,929$:

163. Երկու մարտկոց, որոնցից յուրաքանչյուրը կազմ-
ված է 3-ական հրանոթից, համազարկ են ուղղում նպատա-
կակետին: Նպատակակետը կլոցվի, եթե յուրաքանչյուր
մարտկոց առ 2-ից ոչ պակաս դիպում: Նպատակակետին
դիպչելու հավանականություններն առաջին մարտկոցի հրա-
նոթների համար հավասար են $0,4\text{-ի}$, $0,5\text{-ի}$, $0,6\text{-ի}$, երկրոր-
դի համար՝ $0,5\text{-ի}$, $0,6\text{-ի}$, $0,7\text{-ի}$: Գտնել երկու մարտկոցից
մեկ համազարկով նպատակակետին խոցելու հավանականու-
թյունը:

Պատ.՝ $0,325$,

**Ե Ր Կ Ր Ո Ր Գ Մ Ա Ս
Պ Ա Տ Ա Հ Ա Կ Ա Ն Մ Ե Շ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն Ն Ե Ր**

ԳԼՈՒԽ ԶՈՐՅՈՐԴ

ԴԻՍԿՐԵՏ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵՇՈՒԹՅՈՒՆԵՐ

**§ 1. Դիսկրետ պատահական մեծության
հավանականությունների բաշխման օրենքը:
Բինոմական և Պուասոնի օրենքները**

Դիսկրետ կոչվում է այն պատահական մեծությունը, որի հնարավոր արժեքները առանձին մեկուսացված թվեր են (այսինքն՝ հնարավոր երկու հարկան արժեքների միջև չկան այլ հնարավոր արժեքներ), որ այդ մեծությունն ընդունում է որոշակի հավանականություններով։ Այլ խոսքերով, դիսկրետ պատահական մեծության հնարավոր արժեքները կարելի է համարակալել, դիսկրետ պատահական մեծության հնարավոր արժեքների թիվը կարող է լինել զերծավոր կամ անվերջ (զերծին զեպքում բոլոր հնարավոր արժեքների բազմությունը կոչում են հաշվելի)։

Դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման օրենք (*բաշխման շարք*) կոչվում է նրա հնարավոր արժեքների և համապատասխան հավանականությունների թվարկումը։ Դիսկրետ պատահական X մեծության բաշխման օրենքը կարելի է տալ աղյուսակի ձևով, որի առջին տողը պարունակում է հնարավոր չորս արժեքները, իսկ երկրորդը՝ թիվ հավանականությունները։

$$\begin{array}{lll} X & x_1 & x_2 \dots x_n \\ P & p_1 & p_2 \dots p_n, \end{array}$$

$$n\text{-բակեղ} \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1,$$

Դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման օրենքը կարող է տրված լինել և անալիտիկորեն (բանաձևի տեսքով)

$$P(X = x_i) = \varphi(x_i)$$

Կամ ինտեգրալ ֆունկցիայի միջոցով (տես զԼ. VI, § 1):

Դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման օրենքը կարելի է պատկերել զրաֆիլորեն, որի համար ուղղանկյուն կոռդինատային համակարգում կառուցում են $M_1(x_1, p_1)$, $M_2(x_2, p_2)$, ..., $M_n(x_n, p_n)$ (x_i -ն X -ի հնարավոր արժեքներն են, p_i -ն՝ համապատասխան հավանականությունները) կետերը և միացնում դրանք ուղղի հատվածներով: Ստացված պատկերը կոչվում է բաշխման բազմանկյունի:

Բինոմական կոչվում է այն զիսկրետ պատահական X մեծության բաշխման օրենքը, որը ու անկախ փորձերում, որոնցից յուրաքանչյուրում պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը՝ հավասար է P -ի, պատահույթի հանդես գալու թիվն է: Հնարավոր $X = k$ արժեքի (պատահարի k անդամ հանդես գալու) հավանականությունը՝ հաշվում են թեոնուլիի բանաձևով:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Եթե փորձերի թիվը մեծ է, իսկ յուրաքանչյուր փորձում պատահույթի հանդես գալու ը հավանականությունը՝ շատ փոքր, ապա օգտվում են մոտավոր

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

բանաձեխց, որտեղ k -ն ու անկախ փորձերում պատահույթի հանդես գալու թիվն է, $\lambda = np$ (ու փորձերում պատահույթի հանդես գալու միջին թիվը) և առում են, որ պատահական մեծությունը բաշխված է Պուասոնի օրենքով:

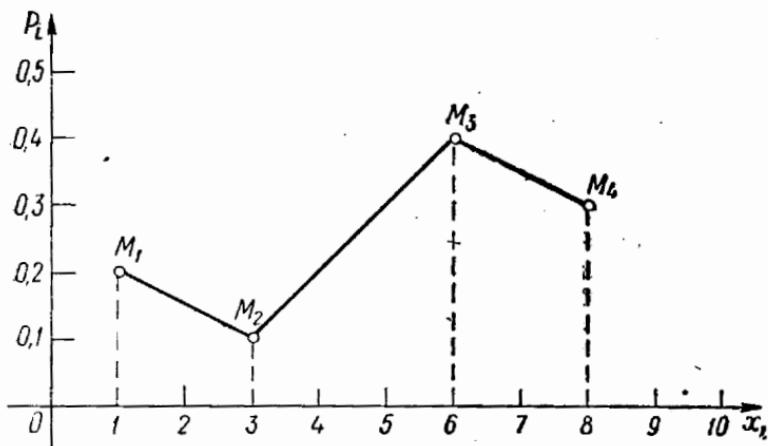
164. Դիսկրետ պատահական X մեծությանը տրված է բաշխման օրենքով (շարքով).

X	1	3	6	8
P	0,2	0,1	0,1	0,3

Կառացել բաշխման բազմանկյունը:

Լուծում: Կառացենք ուղղանկյան կոորդինատների համակարգը, ընդ որում արագիսների առանցքի վրա աեղադրենք հնարավոր x_i արժեքները, իսկ օրդինատների առանցքի վրա՝ համապատասխան p_i հավանականությունները: Կառացենք $M_1(1; 0,2), M_2(3; 0,1), M_3(6; 0,1), M_4(8; 0,3)$ կետերը: Միաց-

Նելով այդ կետերը ուղիղների հատվածներով, կստանանք արոնելի բաշխման բազմանկյունը (նկ. 5):



Նկ. 5

165. Դիսկրետ Խ պատահական մեծությունը տրված է բաշխման օրենքով:

$$a) \begin{array}{cccccc} X & 2 & 4 & 5 & 6 \\ P & 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4; \end{array}$$

$$b) \begin{array}{cccccc} X & 10 & 15 & 20 \\ P & 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{array}$$

Կառուցել բաշխման բազմանկյունը:

166. Սարքը կազմված է երեք աշխատող տարրերից: Յուրաքանչյուր տարրի խափանվելու հավանականությունը մեկ փորձում հավասար է 0,1-ի: Կազմել մեկ փորձում խափանված տարրերի բաշխման օրենքը:

Լուծում: Դիսկրետ Խ պատահական մեծությունն (մեկ փորձում խափանված տարրերի թիվը) ունի հետևյալ հնարիագոր արժեքները. $x_1 = 0$ (սարքի և ոչ մի տարր չի խափանվել), $x_2 = 1$ (խափանվել է 1 տարր), $x_3 = 2$ (խափանվել են 2 տարր) և $x_4 = 3$ (խափանվել են 3 տարր):

Տարրերի խափանվելը իրարից անկախ են, նրանց խափանվելու հավանականությունները իրար հավասար են, ուստի կիրառելի է Բեռնուլիի բանաձևը: Հաշվի առնելով, որ

Հստ պայմանի $n = 3$, $p = 0,1$, $\lambda_{\text{տեղաբար}} = 1 - 0,1 = 0,9$, կոտանանք $P_3(0) = q^3 = 0,9^3 = 0,729$; $P_3(1) = C_3^1 p q^2 = 3 \cdot 0,1 \cdot 0,9^2 = 0,243$;

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9 = 0,027; P_3(3) = p^3 = 0,1^3 = 0,001.$$

Ստուգում: $0,729 + 0,243 + 0,027 + 0,001 = 1$:
Գրենք X -ի որոնելի բաշխման բինոմական օրենքը:

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

167. Խմբաքանակում գետալների 10% -ը միօրինակ չեն: Պատահականորեն վերցված են 4 գետալ: Գրել գիտերական X մեծաթիւն՝ 4 վերցրածների մեջ ոչ միօրինակ գետալների թվի բաշխման բինոմական օրենքը և կառուցել ստացված բաշխման բազմանկանը:

Պատ.	X	0	1	2	3	4
P	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001	

168. Գրել գիտերեալ X մեծաթիւն՝ մետաղյա գրամք երա անդամ գցելիս «գերբի» երեալու թվի բաշխման բինոմական օրենքը:

Պատ.	X	0	1	2
P	1/4	1/2	1/4	

169. Երկու խաղոսից միաժամանակ զցում են 2 անգում: Գրել գիտերեալ X մեծաթիւն՝ երկու խաղոսիկների վրա զարդիւնք միավորների զարս զարս: Բաշխման բինոմական օրենքը:

Պատ.	X	0	1	2
P	9/16	6/16	1/16	

170. 10 գետալներից կազմված խմբաքանակամ կան 8 միօրինակ գետալներ: Պատահականորեն վերցված են 2 գետալ: Կազմել վերցրածների մեջ միօրինակ գետալների բաշխման օրենքը:

Լուծում:	X	պատահական	մեծաթիւնը	վերցրածների
				85

մեջ միօրինակ դետալների թիվն ունի հետևյալ հնարավոր արժեքները. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$,

2: Ըստ հետևյալ բանաձևի (տես խնդիր 17, գլ. 1, § 1)

$$P(x=k) = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$$

(Ն-ը դետալների թիվն է, ո-ը՝ խմբաքանակում միօրինակ դետալների թիվը, տ-ը՝ վերցրած դետալների թիվը, կ-ն՝ վերցրածների մեջ միօրինակ դետալների թիվը), կդանենք

$$P(X=0) = \frac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{\frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2}} = \frac{1}{45},$$

$$P(X=1) = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{8 \cdot 2}{45} = \frac{16}{45},$$

$$P(X=2) = \frac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^1} = \frac{\frac{1 \cdot 2}{45}}{\frac{28}{45}} = \frac{28}{45}$$

Կազմենք որոնելի բաշխման օրենքը.

X	0	1	2
P	1/45	16/45	28/45

$$0 + 1/45 + 16/45 + 28/45 = 1:$$

171. 6 դետալներից կազմված խմբաքանակում կան 4 միօրինակ դետալներ. Պատահականորեն վերցված է 3 դետալ. Գտնել դիմումը X պատահական մեծության՝ վերցրածների մեջ միօրինակ դետալների, բաշխման օրենքը.

Պատմ.	X	0	1	2	3
P	0	1/5	3/5	1/5	

172. Քննողը ուսանողին տալիս է լրացուցիչ հարցեր՝ Հավանականությունը, որ ուսանողը կպատասխանի ամեն մի

տրված հարցին, հավասար է $0,3$ -ի: Դասախոսը ընդհատում է քննությունը, երբ ուսանողը չի պատասխանում տրված հարցին: Պահանջվում է, ա) կազմել դիսկրետ X պատահական մեծության՝ լրացուցիչ հարցերի թվի, որ տալիս է դասախոսը ուսանողին, բաշխման օրենքը, բ) գտնել ուսանողին տրված լրացուցիչ հարցերի ամենահավանական կո թիվը:

Լուծում: ա) Դիսկրետ X պատահական մեծությունը՝ լրացուցիչ արված հարցերի թիվը, անի հետեւյալ հնարավոր արժեքները: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3, \dots$, $x_k = k, \dots$: Գլուխնենք այս հնարավոր արժեքների հավանականությունները:

X մեծությունը կընդունի $x_1 = 1$ հնարավոր արժեքը ($\varphi_{\text{ըն-նողը}} \text{ աւալիս է } M_{\text{իայն}} 1 \text{ հարց}$), եթե ասանողը չպատասխանի առաջին հարցին: Այս հնարավոր արժեքի հավանականությունը հավասար է $1 - 0,9 = 0,1$: Այսպիսով՝ $P(x=1) = 0,1$:

X մեծությունը կընդունի հնարավոր $x_2 = 2$ արժեքը ($\varphi_{\text{ըն-նողը}} \text{ կտա } M_{\text{իայն}} 2 \text{ հարց}$)՝ եթե ասանողը պատասխանի առաջին հարցին ($M_{\text{իայն}} 1 \text{ հարցին } \text{ հավանականությունը } \text{ հավասար է } 0,9$) և չպատասխանի երկրորդին ($M_{\text{իայն}} 2 \text{ հարցին } \text{ հավանականությունը } \text{ հավասար է } 0,1$ -ի): Այսպիսով՝ $P(x=2) = 0,9 \cdot 0,1 = 0,09$:

Համանմանորեն կդանենք.

$$P(X=3) = 0,9^2 \cdot 0,1 = 0,081, \dots, P(X=k) = 0,9^{k-1} \cdot 0,1, \dots$$

Գրենք որոնելի բաշխման օրենքը.

X	1	2	3	\dots	k	\dots
P	0,1	0,09	0,081	$0,9^{k-1}$	0,1	\dots

բ) Տրված հարցերի ամենահավանական թիվը՝ k_0 -ն (Ն-ի ամենահավանական հնարավոր արժեքը), ալիքներ՝ դասախոսի արված հարցերի թիվը, որն անի ամենամեծ հավանականությունը, ինչպես երեսմ է բաշխման օրենքից: Հավասար է 1-ի:

173. Հավանականությունը, որ հրաձիղը կցիցնի թիրախին մեկ անգամ կրակելիս, $0,8$ է: Հրաձիղն արված են

Գիամփուշտներ այնքան ժամանակ, քանի դեռ նա չի վրիպել: Պահանջվում է. ա) կազմել դիսկրետ պատահական Հմեծության՝ հրաձգին տրված գիամփուշտների թվի բաշխման օրենքը, բ) գտնել հրաձգին տված գիամփուշտների ամենահավանական թիվը:

Պատ.	X	1	2	3	...	k	...
	P	0,2	0,16	0,128...		0,8k-1	0,2...
բ)	$k_0 = 1$						

174. Երկու հրանոթից հաջորդաբար կրակում են նպատակակետին, մինչև նրանցից մեկով առաջին անգամ դիպչելը: Նպատակակետին դիպցնելու հավանականությունը առաջին թնդանոթով 0,3 է, երկրորդով՝ 0,7: Կրակել սկսում է առաջին թնդանոթը: Կազմել դիսկրետ X և Y պատահական մեծությունների՝ համապատասխանաբար առաջին և երկրորդ թնդանոթների ծախսած արկերի թվերի բաշխման օրենքները:

Պատ.	X	1	2...		k...
	P	$0,3 + 0,7^2$	$0,3 \cdot 0,7(0,3 + 0,7^2)$	$0,3^k - 10,7^{k-1}(0,3 + 0,7^2)$	
	Y	0	1...		k...
	P	0,3	$0,7(0,7 + 0,3^2)...$	$0,7^k \cdot 0,3^{k-1}(0,7 + 0,3^2)...$	

175. Երկու ոմբակոծիչներ ոռոմբեր են գցում նպատակակետին մինչև առաջին դիպումը: Նպատակակետին դիպցնելու հավանականությունը առաջին ոմբակոծիչի համար հավասար է 0,7-ի, երկրորդի համար՝ 0,8-ի: Սկզբում ոռոմբեր է գցում առաջին ոմբակոծիչը: Կազմել դիսկրետ X և Y պատահական մեծության՝ երկու ոմբակոծիչներով գցված ոռոմբերի թվի բաշխման օրենքի առաջին չորս անդամը (այսինքն՝ սահմանափակվել X-ի 1, 2, 3 և 4 հնարավոր արժեքներով):

Պատ.	X	1	2	3	4
	P	0,7	0,24	0,042	0,0144

176. Դասագիրքը հրատարակվել է 100000 օրինակ տպաքանակով: Հավանականությունը, որ դասագիրքը բրոցուր-

զած է սխալ, հավասար է 0,001-ի: Գտնել հավանականությունը, որ տպաքանակի մեջ կլինի օ խոտանված գիրք:

Լուծում: Ըստ պայմանի $n = 1000000$, $p = 0,001$,
 $k = 5$: Պատահութիւները, որ գրքերը բրոցլուրված են ոչ ճիշտ,
 անկախ են, ո թիվը մեծ է, իսկ թ հավանականութիւնը
 փոքր է, առաջի օգտված ենք Պատասխնի բաշխումից.

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

Պանելը իշխ.

$$\lambda = np = 100000 \cdot 0,001 = 100$$

Արտնելի հայանական թշունը.

$$P_{10000}(5) = \frac{10^5 \cdot e^{-1}}{5!} = \frac{10^5 \cdot 0,000045}{120} = 0,0375$$

177. Սարքը կազմված է իրարից անկախ աշխատող 1000 տարրից: Ե ժամանակում լուրաքանչյուր տարրի խափանվելու հավանականությունը հավասար է 0,002-ի: Գրանել հավանականությունը, որ Ե ժամանակում կիսափանվեն ճիշտ Յ տարրի:

$$3 \text{ m g m if } f_{\text{Nyquist}}^{\text{e}} \text{ e}^{-2} = 0,13534$$

Q_{min.} P₁₀₀(3) = 0,18:

178. Ավատմատ հաստացը պրոցեսմ է գետալներ Հայաստանութիւնը, որ պատրաստված գետալը կլինի խռուան, հավասար է 0,1-ի։ Գանել հավանականութիւնը՝ որ 200 գետալների մեջ կլինի ճիշտ 4 խռուան։

$P_{200}(4) = 0.09$:

179. Գործարանը բազա տղարկեց 500 շինվածք։ Ճանապարհին շինվածքի վնասվելու ճավանականությանը 0,002 է։ Դանականությանը հավանականությանը, որ ճանապարհին վնասված շինվածքների թիվը կլինի, ա) ճիշտ՝ Յ, բ) չից քիչ, գ) Յ-ից շատ, դ) գունե մեկը։

І. м. ф. т. д. т. п. = 500 і. б. ф. д. і. р. = 0,002 і. а. ф. в. н. а.
і. а. н. а. і. ф. в. н. в. ф. в. ф. р. і. к. ү. ф. в. а. р. і. ф. в. л. ү. ф. в. в. а. і. ф. в. (з бін-

վածքի վնասվելը) անկախ են, ուստի տեղի ունի Պուասոնի բանաձևը.

$$P_n(k) = \frac{e^{-k} k^k}{k!},$$

ա) Գտնենք λ -ն.

$$\lambda = np = 500 \cdot 0,002 = 1;$$

Գտնենք հավանականությունը, որ վնասված է ուղիղ 3 ($k = 3$) շինվածք.

$$P_{500}(3) = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{0,36788}{6} = 0,0613,$$

բ) Գտնենք հավանականությունը, որ կվնասվի 3-ից ավելի քիչ շինվածք.

$$P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) = e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} =$$

$$= \frac{5}{2} e^{-1} = \frac{5}{2} \cdot 0,36788 = 0,9197;$$

Գտնենք P հավանականությունը, որ վնասված կլինի 3-ից ավելի շատ շինվածք: «Վնասված է 3-ից ավելի շատ շինվածք» և «Վնասված է 3-ից ոչ շատ շինվածք» պատճենությունելը (այդ պատճենությի հավանականությունը՝ նշանակենք Q -ով) հակադիր են, ուստի

$$P + Q = 1:$$

Այսաեղից,

$$P = 1 - Q = 1 - [P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) + P_{500}(3)]:$$

Օգտագործելով վերն ստացված արդյունքը, կունենանք.

$$P = 1 - [0,9197 + 0,0613] = 0,019:$$

գ) Գտնենք P_1 հավանականությունը, որ կվնասվի գոնե մեկ շինվածք: «Վնասված է գոնե մեկ շինվածք» և «չի վնաս-

ված ոչ մի շինվածք» պատահութները (այդ պատահութի հավանականությունը նշանակենք Q_1 -ով) հակադիր են, հետեւաբար,

$$P_1 + Q_1 = 1:$$

Այստեղից, որոնելի հավանականությունը, որ վնասված կլինի գոնե մեկ շինվածք, հավասար է

$$P_1 = 1 - Q_1 = 1 - P_{500}(0) = 1 - e^{-1} = 1 - 0,36788 = 0,632.$$

180. Խանութն ստացավ 1000 շիշ հանքային չար: Հաւանականությունը, որ փոխադրելիս շիշը կչարգվի, հավասար է 0,003-ի: Գտնել հավանականությունը, որ խանութը կսահանա ջարդված շներ: ա) ճիշտ երկու, բ) 2-ից քիչ, գ) 2-ից շատ, դ) գոնե մեկ հատ:

$$\text{Տույժում: } P_{\text{ճիշտ}} = e^{-1} = 0,36788,$$

$$\text{Պատ.՝ ա) } P_{100}(2) = 0,224, \text{ բ) } P_{1000}(0) + P_{1000}(1) = 0,1992,$$

$$\text{գ) } P_{1000}(k > 2) = 0,5678, \text{ դ) } P = 1 - P_{1000}(0) = 0,95,$$

181: Սարքը կազմված է մեծ թվով անկախ աշխատաղ տարրերից՝ յուրաքանչյուր տարր Տ ժամանակում խափանվելու միենալուն (շատ իփոքը) հավանականությամբ: Գտնել Տ ժամանակում խափանված տարրերի միջին թիվը, եթե հավանականությանը, որ այդ ժամանակում կխափանվի զո՞նե մեկ տարր հավասար է 0,98-ի:

Լուծում: Խնդրի պարմաններից հետեւամ է (քանի որ տարրերի թիվը մեծ է, տարրերն աշխատամ են անկախ և յուրաքանչյուր տարրի խափանվելու հավանականությունը փոքր է), որ խափանվածների թիվը բաշխված է Պտասսոնի օրենքով, ընդ որում պահանջվամ է դանել: պարամետրը (խափանվածների միջին թիվը):

Հավանականությունը, որ կխափանվի զոնե մեկ տարրու ըստ պարմանի հավասար է 0,98-ի, հետեւաբար (տես խընդիր 179-ի դ) կիսը),

$$1 - e^{-1} = 0,36788,$$

Ալյստեղից

$$e^{-\lambda} = 1 - 0,98 = 0,02:$$

e^{-x} ֆունկցիայի աղյուսակից կգտնենք, $\lambda = 3,9$: Ալյսպի-սով, սարքը Տ ժամանակում աշխատելիս կխափանվի մոտ 4 տարբ:

182. Գտնել շինվածքների խմբաքանակում խոտան շին-վածքների միջին λ թիվը, եթե հավանականությունը, որ այդ խմբաքանակում պարունակվում է գոնե մեկ խոտան շինվածք, հավասար է 0,95-ի. Ենթադրվում է, որ խոտան շինվածքների թիվը գիտարկվող խմբաքանակում բաշխված է Պուասսոնի օրենքով:

$$\text{Ցուցում: } \text{Ըստունել } e^{-3} = 0,05:$$

Պատճ. $\lambda = 3$:

183. Ապացուցել, որ անկախ փորձերում պատահույթի երեսու թվերի Պուասսոնի օրենքով հաշված հավանականու-թյունների գումարը հավասար է 1-ի: Ենթադրվում է, որ փորձերը կատարվում են անվերջ թվով անդամ:

Լուծում: Հստ Պուասսոնի օրենքի.

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

0 դաշտներ e^x ֆունկցիայի Մակորենի շարքի վերլուծու-թյունից.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x_2}{2!} + \dots$$

Հայտնի է, որ այս շարքը զուգամետ է x -ի ցանկացած ար-ժեքի գեպքում, ուստի, տեղադրելով $x = \lambda$, կստանանք.

$$e^{\lambda} = 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!},$$

Գանենք հավանականությունների որոնելի $\sum_{k=0}^{\infty} P_n(k)$, գումարը, հաշվի առնելով, որ $e^{-\lambda}$ -ն կախված չէ կ-ից և, հետեւ կարող է դուրս գալ գումարանշանի տակից.

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^0 = 1;$$

Դիտություն, ենդը պնդումը անմիջապես հետեւմ է այն բանից, որ լրիվ խումբ կազմող պատահութների հավանականությանների գումարը հավասար է 1-ի, ներկած ապացույցը հետապնդում է ուսուցողական նպատակները:

§ 2. Պատահութների պարզագույն հոսք

Պատահույթների հոսք կոչվում է այն պատահույթների հաջորդականությունը, որ հանդես են դաշտակի պատահակի պատահական ակրներին:

Պարզագույն (սպուսառներն) կոչվում է պատահույթների այն հոսքը, որն օժագած է հատկայի Յ հատկություններով, սաացինարություն (անփոփոխ թյուն), և հետազողեցության բացակայությունը և օրդինարություն (սովորականություն):

Ստացինարության հատկությունն այն է, որ ցանկացած ժամանակամիջոցում է հատ պատահույթի երեալու հավանականությունը կախված է միայն կ թվից և ժամանակամիջոցից աեղողությունից և կախված չէ նրա հաշվաման սկզբից: Այլ կերպ ասած, և տեսդություն ժամանակամիջոցում է հատ պատահույթների հանդես դարձնելու համար միայն կ-ից կախված ֆունկցիա է:

Հետազոցության բացակայության հատկությունն այն է, որ ցանկացած ժամանակամիջոցում է հատ պատահույթների հանդես դարձնելու հավանականությունը կախված չէ: այն բանից, թե երեալու են կամ չեն երեալու պատահույթները զիտարկվող ժամանակամիջոցին նախորդող ակնթարթներին: Այլ կերպ ասած, հոսքի համապատասխությունը չի ապահովում մոտ պատահույթների հանդես դարձնելու համար:

Օրդինարության հատկությունն այն է, որ փոքր ժամանակամիջոցում 2 կամ ավելի պատահույթների հանդես դարձնելու մասնաբ է: Այլ խոսքով, փոքր ժամանակամիջոցում մեկից ավելի

պատահույթների հանդես գալու հավանականությունը արհամարհելիորեն փոքր է համեմատած միայն մեկ պատահույթի հանդես գալու հավանականության հետ:

Հոսքի և լարվածություն (ինտենսիվություն) կոչվում է միավոր ժամանակում հանդես եկող պատահույթների միջին թիվը:

Եթե հոսքի հաստատուն լարվածությունը հայտնի է, ապա է ժամանակում պարզագույն հոսքի և պատահույթների հանդես գալու հավանականությունն որոշվում է Պուասսոնի բանաձևով.

$$P_t = \frac{(\lambda t)^{ke-\lambda t}}{k!},$$

Դիտողություն: Ստացիոնարության հատկությամբ օժտված հոսքը կոչվում են ստացիոնար, հակառակ դեպքում՝ ոչ ստացիոնար:

184. Ցույց տալ, որ է ակողղությամբ ժամանակամիջոցում պատահույթների երեալու հավանականությունը որոշող Պուասսոնի բանաձևը՝

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^{ke-\lambda t}}{k!},$$

կարելի է դիտել որպես պատահույթների պարզագույն հոսքի մաթեմատիկական մոդել, այլ խոսքով, ցույց տալ, որ Պուասսոնի բանաձևը արտացոլում է պարզագույն հոսքի բոլոր հատկությունները:

Էտօմ: (*) բանաձևից երեսում է, որ է ակողղության ժամանակամիջոցում կ պատահույթների հանդես գալու հավանականությունը, աված և լարվածության դեպքում, հանդիսանում է միայն կ-ից և կ-ից ֆունկցիան, որն արտացոլում է պարզագույն հոսքի ստացիոնարության հատկությունը:

(*) բանաձևը չի օգտագործում դիտարկվող է ակողական ժամանակամիջոցից առաջ պատահույթների երեալու մասին տեղեկությունը, որը արտացոլում է հետազոտության բացակայության հասկությունը:

Ցույց տանք, որ դիտարկվող բանաձևն արտացոլում է օրդինարության հասկությունը: Տեղադրելով $k=0$ և $k=1$, գտնենք պատահույթի չերեալու և մեկ անգամ երեալու հավանականությունները:

$$P_t(0) = e^{-\lambda t}, \quad P_t(1) = \lambda t e^{-\lambda t};$$

Հետևաբար, մեկից ավելի պատահութների հանդես գալու հավանականությունը.

$$P_t(k > 1) = 1 - [P_t(0) + P_t(1)] = 1 - [e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t}];$$

Օգտագործելով $e^{-\lambda t}$ ֆունկցիայի զերլուծությունը Մակըրենի շարքի, տարրական ձևափոխություններից հետո, կոսանանք.

$$P_t(k > 1) = \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \dots$$

Համեմատելով $P_t(1)$ -ը և $P_t(k > 1)$ -ը, եզրակացնում ենք, որ է-ի փոքր արժեքների դեպքում մեկից ավելի պատահութների հանդես գալու հավանականությունը արհամարձելիորեն փոքր է մեկ պատահութի հանդես գալու հավանականության համեմատած լամբարդ, որ արտացոլում է օրդինարական համակությունը:

Այսպիսով, Պատաստնի բանաձեն արտացոլում է պարզագույն հոսքի բոլոր Յ հատկաթյունները, տասի այն կարելի է դիտել որպես այդ հոսքի մաթեմատիկական մագել:

185. Մեկ բոպեամ տաքսիների դիտականությունը կատարված պատվերների միջին թիվը հավասար է Յ-ի։ Գտնել հավանականությունը, որ 2 բոպեամ կդառ. ա) 4 կանչ, բ) 4-ից ավելի քիչ կանչ, գ) 4-ից ոչ պակաս կանչ։

Լուծում։ Բառ պայմանի՝ $\lambda = 3$, $t = 2$, $k = 2$ ։ Օգտագինք Պատաստնի բանաձեից,

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!},$$

ա) Որոնելի հավանականությունը, որ 2 բոպեամ կատարված պականչը կանչ

$$P_2(4) = \frac{6^4 e^{-6}}{4!} = \frac{1296 \cdot 0,0025}{24} = 0,135;$$

բ) «Եկել է 4-ից ավելի քիչ կանչ» պատահույթը տեղի կունենա, եթե տեղի ունենա հետեւյալ անհամատեղելի պատահույթներից մեկը. 1) եկել է 3 կանչ, 2) եկել է 2 կանչ, 3) եկել է 1 կանչ, 4) ոչ մի կանչ չի եկել: Այս պատահույթներն անհամատեղելի են, ուստի կիրառելի է անհամատեղելի պատահույթների հավանականությունների գումարման թեորեմը.

$$\begin{aligned} P_2(k < 4) &= P_2(3) + P_2(2) + P_2(1) + P_2(0) = \\ &= \frac{6^3 \cdot e^{-6}}{3!} + \frac{6^2 \cdot e^{-6}}{2!} + \frac{6 \cdot e^{-6}}{1!} + e^{-6} = e^{-6}(36 + 18 + 6 + 1) = \\ &= 0,0025 \cdot 61 = 0,1525: \end{aligned}$$

գ) «Եկել է 4-ից պակաս կանչ» և «Եկել է 4-ից ոչ պակաս կանչ» պատահույթները հակադիր են, ուստի որոնելի հավանականությունը, որ 2 բոպեռմ կգա 4-ից ոչ պակաս կանչ

$$P(k \geq 4) = 1 - P(k < 4) = 1 - 0,1525 = 0,8475:$$

186. Մեկ բոպեռմ Ա.ՀԿ (ավտոմատ հեռախոսակայան) եկած կանչերի միջին թիվը 2 է: Գտնել հավանականությունը, որ 4 բոպեռմ կգա.

ա) Յ կանչ, բ) Յ-ից ավելի պակաս կանչ, գ) Յ-ից ոչ պակաս կանչ: Կանչերի հոսքը ենթադրվում է պարզագույն:

Պատ.՝ ա) $P_4(2) = 0,256$, բ) $P_4(k < 3) = 0,0123$, գ) $P_4(k \geq 3) = 0,9887$:

187. Ապացուցել, որ պատահույթների պարզագույն ստացիոնար հոսքի համար

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(k \geq 1)}{P(k = 1)} = 1:$$

Ցուցումներ : 1. Օգտվել հակադիր պատահույթների հավանականությունների գումարման թեորեմից.

$$P_t(k = 0) + P_t(k \geq 1) = 1,$$

2. Որոնելի սահմանը գտնելիս օգտվել լույսի տալի կանոնից:

§ 3. Դիսկրետ պատահական մեծության բնութագրիչները

Որպես պատահական մեծության միջին արժեքի բնութաղըիշ ժառայում է մաթեմատիկական սպասումը:

Դիսկրետ պատահական մեծության մարեմատիկական սպասում կոչվում է նրա բոլոր հնարավոր արժեքների և նրանց հավանականությունների արտադրյալների գումարը.

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n,$$

Եթե պատահական մեծությունը ընդունում է հաշվելի բաղմությամբ հնարավոր արժեքներ՝ սպասումը կազմությունների գումարը հավասար է 1-ի:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$

ընդ որում, ենթադրվում է, որ հավասարության աջ կողմում դառնդող շարքը բացարձակ գուգամնեա է, և բոլոր թիվները հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի:

Մաթեմատիկական սպասումը օժտված է հետեւյալ հատկություններով:

Համեմություն 1. Հաստատուն մեծության մարեմատիկական սպասումը հավասար է նենց իրեն՝ հաստատութիւն:

$$M(c) = c;$$

Համեմություն 2. Պատահական մեծությունների գումարի մարեմատիկական սպասումը հավասար է գումարելիների մարեմատիկական սպասումների գումարին:

$$M(X_1 : X_2 : \dots : X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n);$$

Համեմություն 3. Փոխադարձ անկախ պատահական մեծությունների արտադրյալի մարեմատիկական սպասումը հավասար է արտադրյալի մարեմատիկական սպասումների արտադրյալին:

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdots X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdots M(X_n);$$

Համեմություն 4. Բինոմական բաշխման մարեմատիկական սպասումը հավասար է փոքրերի բանի և մեկ փորձում սպատանությի երեալու հավանականության սուբադրյալին.

$$M(X) = np;$$

Պատահական մեծության հնարավոր արժեքների մաթեմատիկական սպասումն շուրջը ցըման բնութագրերն են հանդիսանում, մասնաւորապես, դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեզումը:

Պատահական X մեծության դիսպերսիա կոչվում է շեզման քառակուսու միջին արժեքը.

$$D(X) = M[X - M(X)]^2:$$

Դիսպերսիան հարմար է հաշվել հետեւյալ բանաձևով.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2:$$

Դիսպերսիան օժագած է հետեւյալ հատկություններով,

չառ կռւթյուն 1. Հաստատունի դիսպերսիան հավասար է զրոյի.

$$D(c) = 0:$$

չառ կռւթյուն 2. Հաստատուն արտադրիչը կարելի է դուրս բերել դիսպերսիայի նշանի տակից՝ նախապես այն բարձրացնելով քառակուսի.

$$D(CX) = C^2 \cdot D(X):$$

չառ կռւթյուն 3. Անկախ պատահական մեծությունների գումարի դիսպերսիան հավասար է գումարելիների դիսպերսիաների գումարին:

$$D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n):$$

Բինոմական բաշխման դիսպերսիան հավասար է փորձերի թվի և մեկ փորձում պատահույթի երկալու ու շերեալու հավանականությունների արտադրյալին.

$$D(X) = \text{որդ:}$$

Պատահական մեծության միջին քառակուսային շեղում կոչվում է դիսպերսիայից քառակուսի արմատը.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}:$$

188. Գտնել տրված բաշխման օրենքով X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը.

ա) $X = 4 \quad 6 \quad 10$	բ) $X = 0,21 \quad 0,54 \quad 0,61$
$P = 0,2 \quad 0,3 \quad 0,5$	$P = 0,1 \quad 0,5 \quad 0,4$

Լուծում: ա) Մաթեմատիկական սպասումը հավասար է X -ի բոլոր հնարավոր արժեքների և նրանց հավանականությունների արտադրյալների գումարին:

$$M(X) = -4 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,5 = 6:$$

$$\text{Պատ. բ) } M(X) = 0,535:$$

189. Գտնել Z պատահական մեծության մաթեմատիկա-

կան սպասումը, եթե հայտնի են X -ի և Y -ի մաթեմատիկական սպասումները.

$$ա) Z = X + 2Y, M(X) = 5, M(Y) = 3;$$

$$բ) Z = 3X + 4Y, M(X) = 2, M(Y) = 6:$$

Լուծում: ա) Օգտագործելով մաթեմատիկական սպասման հատկությունները (գումարի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է գումարելիների մաթեմատիկական սպասումների գումարին: Հաստատոն արտադրիչը կարելի է դուրս բերել մաթեմատիկական սպասման նշանի տակից), կստանանք.

$$M(Z) = M(X + 2Y) = M(X) + M(2Y) = M(X) + 2M(Y) = 5 + 2 \cdot 3 = 11:$$

$$\text{Պատ. բ) } M(Z) = 30:$$

190. Օգտագործելով մաթեմատիկական սպասման հատկությունները ապացուցել, որ ա) $M(X - Y) = M(X) - M(Y)$, բ) $X - M(X)$ շեղման մաթեմատիկական սպասումը հավասար է զրոյի:

191. Դիսկրետ X պատահական մեծությունն ընդունում է 3 հնարավոր արժեքներ, $x_1 = 4\text{-ը}$, $p_1 = 0,5$ հավանականությամբ, $x_2 = 6\text{-ը}$, $p_2 = 0,3$ հավանականությամբ և $x_3 = 8\text{-ը}$, p_3 հավանականությամբ: Գտնել x_3 -ը և p_3 -ը, գիտենալով, որ $M(X) = 8$:

$$\text{Պատ. } x_3 = 21, \quad p_3 = 0,2:$$

192. Տրված է դիսկրետ X պատահական մեծության հնարավոր արժեքների թվարկումը,

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 1,$$

ինչպես նաև հայտնի են այդ մեծության և նրա քառակուսու մաթեմատիկական սպասումները.

$$M(X) = 0,1, \quad M(X^2) = 0,9:$$

Գտնել x_1, x_2, x_3 հնարավոր արժեքներին համապատասխանող p_1, p_2, p_3 հավանականությունները:

Լուծում: Օգտվելով այն բանից, որ X -ի բոլոր հնարավոր արժեքների հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի, ինչպես նաև հաշվի առնելով որ $M(X) = 0,1$, $M(X^2) = 0,9$, կազմենք անհայտ հավանականությունների նկատմամբ գծային Յ հավասարումների համակարգը:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad (-1)p_1 + 0 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 = 0,1, \quad (-1)^2 p_1 + + 0^2 p_2 + 1^2 \cdot p_3 = 0,9;$$

Լուծելով այս համակարգը կդառնենք որոնելի հավանականությունները:

$$p_1 = 0,4, \quad p_2 = 0,1, \quad p_3 = 0,5;$$

193. Տրված է դիսկրետ X պատահական մեծության հնարավոր արժեքների թվարկումը,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3,$$

ինչպես նաև հայտնի են այդ պատահական մեծության և նրա քառակուսու մաթեմատիկական սպասումները.

$$M(X) = 2,3, \quad M(X^2) = 5,9;$$

Գտնել X -ի հնարավոր արժեքներին համապատասխանող հավանականությունները:

$$\text{Պատ.} \quad p_1 = 0,2, \quad p_2 = 0,3, \quad p_3 = 0,5;$$

194. 10 դետալների խմբաքանակում պարունակվում է 3 ոչ միօրինակ դետալներ: Պատահականորեն ընտրված են 2 դետալ: Գտնել դիսկրետ պատահական X մեծության՝ 2 ընտրվածների մեջ ոչ միօրինակ դետալների մաթեմատիկական սպասումը:

Ցուցում: Օգտվել դլ. 1, § 1, խնդիր 17-ի լուծումից:

$$\text{Պատ.} \quad M(X) = \frac{3}{5};$$

195. а) Աղացուցել, որ մեկ փորձում A պատահութիւն

Երեալու թվի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է Ա եպատաճութի երեալու թի հավանականությանը:

Ցուցում: Դիսկրետ Խ պատաճական մեծությունը՝ մեկ փորձում պատաճութի երեսումների թիվը, ունի միայն 2 հնարավոր արժեքներ. $x_1 = 1$ (Ա պատաճութը աեղի է ունեցել) և $x_2 = 0$ (Ա պատաճութը աեղի չի ունեցել):

բ) Ապացուցել, որ զիսկրետ Խ պատաճական մեծության՝ Ո անկախ փորձերում Ա պատաճութի երեսումների թվի, որոնցից լուրաքանչյուրում պատաճութի երեալու հավանականությունը հավասար է թիվի, մաթեմատիկական սպասումը հավասար է փորձերի թվի և մեկ փորձում՝ պատաճութի երեալու հավանականության արտադրյալին, այսինքն՝ ապացուցել, որ բինոմական բաշխման մաթեմատիկական սպասումը $M(X) = np$:

196. Գտնել զիսկրետ Խ պատաճական մեծության՝ 5 խաղոսկրերի այնպիսի նեսումների թիվի մաթեմատիկական սպասումը, որոնցից լուրաքանչյուրում 2 խաղոսկրի վրա կերեա մեկական միավոր, եթե նեսումների ընդհանուր թիվը հավասար է 20-ի:

Լուծում: Օգտվենք հետեւալ բանաձեից.

$$M(X) = np,$$

որտեղ n -ը՝ փորձերի ընդհանուր թիվն է (n խաղոսկրերի նեսումների), X -ը՝ մեկ հետաքրքրող պատաճութի (5-ից 2 խաղոսկրի վրա կերեա մեկական միավոր) երեալու թիվն է այդ ո փորձերում,

թիվը մեկ փորձում զիտարկվող պատաճութի երեալու հավանականությունն է:

Բառ պայմանի $n = 20$. Մնամ է գանել թիվը՝ այնի բանի հավանականությունը, որ 5 խաղոսկրերից 2-ի նիստերի վրա կերեա մեկական միավոր Այդ հավանականությունը հաշվենք Բետոնալիի բանաձեռի, հաշվի առնելով, որ մեկ խաղոսկրի նիստին միավորի երեալու հավանականությունը՝ $P = \frac{1}{6}$ և հետեւաբար չերեալու հավանականությունը՝

$$q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6},$$

$$P = P_5(2) = C_5^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 5^3}{1 \cdot 2 \cdot 6^5} = \frac{5^4}{3 \cdot 6^4},$$

Որոնելի մաթեմատիկական սպասումը .

$$M(X) = n \cdot P = 20 \cdot \frac{5^4}{3 \cdot 6^4} = 3:$$

197. Սարքը կազմված է ո տարրից: Փորձի ժամանակ ցանկացած տարրի խափանվելու հավանականությունը հավասար է թի: Գտնել այն փորձերի թվի մաթեմատիկական սպասումը, որոնցից յուրաքանչյուրում՝ կխափանվի ճիշտ ո տարր, եթե ընդամենը կատարված է N փորձ: Ենթադրվում է, որ փորձերը միմյանցից անկախ են.

Լուծում: Նշանակենք X-ով այն փորձերի թիվը, որոնցում կխափանվեն ճիշտ ո տարր: Քանի որ փորձերը անկախ են և մեզ հետաքրքրող պատահութիւնների վեջեն կփորձում կխափանվի ճիշտ ո տարր) հավանականությունն այդ փորձերում նույնն է, ապա ճիշտ է

$$M(X) = NP \quad (*)$$

բանաձեռ, որտեղ N-ը փորձերի ընդհանուր թիվն է, P-ն՝ հավանականությունը, որ 1 փորձում կխափանվի ճիշտ ո տարր: Գտնենք P հավանականությունը Բեռնուլլիի բանաձեռի:

$$P = C_n^m p^m q^{n-m}: \quad (**) \quad$$

Տեղադրելով $(**)$ -ը $(*)$ -ի մեջ, կստանանք որոնելի մաթեմատիկական սպասումը:

$$M(X) = N \cdot C_n^m p^m q^{n-m}: \quad$$

198. Գցում են ո խաղոսկր: Գտնել այն նետումների թվի մաթեմատիկական սպասումը, որոնցից յուրաքանչյուրում կընկնեն ճիշտ ո 6-լակ, եթե նետումների ընդհանուր թիվը N է:

$$\text{Պատ. } M(X) = N \cdot C_n^m \left(\frac{1}{6}\right)^m \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-m},$$

199. Գցում են ո խաղոսկրի: Գտնել այն միավորների թվի գումարի մաթեմատիկական սպասումը, որոնք կընկնեն բոլոր նիստերի վրա:

Լուծում: Նշանակենք X_i -ով այն միավորների թվի գումարը, որոնք կընկնեն բոլոր նիստերի վրա, X_i ($i=1, 2, \dots, n$) ի-րդ խաղոսկրի նիստին երևացած միավորների թիվը: Այդ դեպքում, ակնհայտ է:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n:$$

Հետեաբար,

$$\begin{aligned} M(X) &= M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + \\ &\quad + M(X_n): \end{aligned} \quad (*)$$

Ակնհայտ է, որ բոլոր X_i մեծություններն ունեն նույն բաշխումը և, հետեաբար, մինույն թվային բնութագրիչները և, մասնավորապես, մինույն մաթեմատիկական սպասումները՝ այսինքն՝

$$M(X_1) = M(X_2) = \dots = M(X_n):$$

$$(*)\text{-ի } շնորհիվ կստանանք \quad (**)$$

$$M(X) = n \cdot M(X_1):$$

Այսպիսով, բավական է հաշվել X_1 մեծության մաթեմատիկական սպասումը, այսինքն՝ առաջին խաղոսկրի վրա բացվող միավորների մաթեմատիկական սպասումը: Դրահամար գրենք X_1 -ի բաշխման օրենքը.

X_1	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Գտնենք $M(X_1)$ -ը.

$$M(X_1) = 1 \cdot 1/6 + 2 \cdot 1/6 + 3 \cdot 1/6 + 4 \cdot 1/6 + 5 \cdot 1/6 +$$

$$+ 6 \cdot 1/6 = \frac{7}{2}, \quad (***)$$

Տեղադրելով $(***)$ -ը $(**)$ -ի մեջ, գերզնականապես կստանանք.

$$M(X) = \frac{7}{2}n:$$

200. Տեխնիկական հակողության բաժինը ստուգում է շինվածքներն ըստ միօրինակության: Հավանականությունը, որ շինվածքը միօրինակ է, հավասար է $0,9 - \rho$: Յուրաքանչյուր խմբաքանակում պարունակվում է 5 շինվածք: Դանել դիսկրետ X պատահական մեծության՝ այն խմբաքանակի թվի, որոնցից յուրաքանչյուրում կլինի ճիշտ 4 միօրինակ շինվածք, մաթեմատիկական սպասումը, եթե պետք է ստուգվի 50 խմբաքանակ:

$$\text{Պատ. } M(X) = 50 \cdot C_5^4 \cdot 0,9^4 \cdot 0,1 \approx 16:$$

201. Ապացուցել. 1) $M(Y) = aM(X) + b$, եթե $Y =$

$$= aX + b, \quad 2) \quad M(Y) = \sum_{i=1}^n a_i = M(X_i) + b, \quad \text{եթե } Y =$$

$$= \sum_{i=1}^n (a_i X_i) + b:$$

202. Ապացուցել, որ դիսկրետ X պատահական մեծության՝ լրիվ խոմք կազմող անհամատեղելի A_1, A_2, \dots, A_n պատահութների հավանականությունների մաթեմատիկական սպասումն ունի ամենափոքրը արժեքը, եթե բոլոր պատահութների հավանականությունները միևնույնն են:

Լուծում: X մեծության հնարավոր արժեքներն, ըստ պայմանի, հավասար են A_i պատահութների հավանականություններին. P_i հնարավոր արժեքների հավանականությունը ևս հավասար է P_i -ի: Այսպիսով, X -ն ունի հետևյալ բաշ-

Խումբ:

$$\begin{array}{c} X \\ P \end{array} \quad \begin{array}{c} p_1 \\ p_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} p_2 \cdots p_n \\ p_2 \cdots p_n \end{array}$$

Գտնենք X -ի մաթեմատիկական սպասումը:

$$M(X) = p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2;$$

Դիտարկվող պատահույթները կազմում են լրիվ խումբ, ուստի

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1:$$

Դիֆերենցիալ հաշվից հայտնի է, որ եթե անկախ փոփով խականների գումարը հաստատան է, ապա այդ փոփոխականների քառակուսիների գումարն անի ամենափոքր արժեքը փոփոխականների հավասարաթիվն գեպօւմ: Դիտարկվող խնդրի նկատմամբ այդ նշանակում է. (*) գումարը, արմինքն՝ մաթեմատիկական սպասումը անի ամենափոքր արժեքը, եթե բոլոր պատահույթների հավանականաթիվները, որոնք կազմում են լրիվ խումբ, հավասար են իրար, որը և պահանջվամ էր ապացացել:

203. Ապացացել, որ գիտլւա պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը գունդում է նրա հնարավոր արժեքներից ամենամեծի և ամենափոքրի միջև:

Լուծում: Դիցանք X -ը գիտլեա պատահական մեծություն է, որը արված է բաշխման օրենքով.

$$\begin{array}{c} X \\ P \end{array} \quad \begin{array}{c} x_1 \\ p_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} x_2 \cdots x_n \\ p_2 \cdots p_n \end{array}$$

Նշանակենք հնարավոր ամենափոքր և ամենամեծ արժեքները համապատասխանաբար ուսուի և M -ով: Այդ գեղբարձ

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n \leq M \cdot p_1 + M \cdot p_2 + \cdots + M \cdot p_n = M \cdot (p_1 + p_2 + \cdots + p_n) = M:$$

Այսպիսով,

$$M(X) \leq M, \quad (*)$$

Նույն ձևով հեշտ արտածել, որ

$$M(X) \geq m:$$

Միավորելով $(*)$ -ը և $(**)$ -ը զերչնականապես կունենանք.

$$m \leq M(X) \leq M:$$

204. Դիսկրետ Խ պատճեկան մեծովիյունն ընդունում է կ-հատ գրական արժեքներ՝ x_1, x_2, \dots, x_k , համապատասխանաբար p_1, p_2, \dots, p_k հավանականություններով: Ենթադրելով, որ հնարավոր արժեքները գրված են աճման կարգով, ապացուցել որ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(MX^{n+1})}{M(X^n)} = x_k:$$

Լուծում: Նկատի ոնքենալով, որ

$$P(X^{n+1} = x_i^{n+1}) = P(X = x_i) = p_i \text{ և } P(X^n = x_i^n) = p_i,$$

կստանանք

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M(X^{n+1})}{M(X^n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1^{n+1}p_1 + \dots + x_{k-1}^{n+1}p_{k-1} + x_k^{n+1}p_k}{x_1^n p_1 + \dots + x_{k-1}^n p_{k-1} + x_k^n p_k} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_k^{n+1}p_k \left[\left(\frac{x_1}{x_k} \right)^{n+1} \cdot \frac{p_1}{p_k} + \dots + \left(\frac{x_{k-1}}{x_k} \right)^{n+1} \cdot \frac{p_{k-1}}{p_k} + 1 \right]}{x_k^n p_k \left[\left(\frac{p_1}{x_k} \right)^n \cdot \frac{p_1}{p_k} + \dots + \left(\frac{p_{k-1}}{x_k} \right)^n \cdot \frac{p_{k-1}}{p_k} + 1 \right]} = \\ &= x_k \frac{\frac{p_1}{p_k} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_1}{x_k} \right)^{n+1} + \dots + \frac{p_{k-1}}{p_k} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{k-1}}{x_k} \right)^{n+1} + 1}{\frac{p_1}{p_k} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_1}{x_k} \right)^n + \dots + \frac{p_{k-1}}{p_k} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{k-1}}{x_k} \right)^n + 1}, \end{aligned}$$

Քանի որ ըստ պայմանի X -ի հնարավոր արժեքները

գրված են աճման կարգով, այսինքն՝ $x_i < x_k$ $i = 1, 2 \dots (k-1)$,
ապա

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_i}{x_k} \right)^{n+1} = 0 \quad \text{և} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_i}{x_k} \right)^n = 0;$$

Հետեւաբար,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M(X^{n+1})}{M(X^n)} = x_k;$$

205. Ապացուցել, որ եթե X_1, X_2, \dots, X_n պատահական մեծություններն անկախ են, դրական և միատեսակ են բաշխված, ապա

$$M \left[\frac{X_1}{X_1 + X_2 + \dots + X_n} \right] = \frac{1}{n},$$

ևուժում : Դիտարկենք հետեւալ պատահական մեծությունները.

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}, \quad Y_2 = \frac{X_2}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}, \dots,$$

$$Y_n = \frac{X_n}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}, \quad (*)$$

Նկատենք, որ այդ կոստակների հայտարարները չեն կարող զրություններ, քանի որ $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ մեծություններն դրական են:

Իսա պայմանի X_i մեծությունները միատեսակ են բաշխված, ասաի Y_i մեծությունները ևս միատեսակ են բաշխված և, հետեւաբար, անեն միենալին թվային բնաթագրիչները, մասնավորապես, միենալին մաթեմատիկական սպառամամբը

$$M(Y_1) = M(Y_2) = \dots = M(Y_n); \quad (**)$$

Հեշտ է ահսնել, որ

$$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = 1,$$

ուստի,

$$M(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) = M(1) = 1:$$

Գումարի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է գումարելիների մաթեմատիկական սպասումների գումարին, ուստի

$$M(Y_1) + M(Y_2) + \dots + M(Y_n) = 1:$$

(**) Ենորհիվ կունենանք

$$n \cdot M(Y_1) = 1:$$

Այստեղից

$$M(Y_1) = \frac{1}{n},$$

չաշվի առնելով (*)-ը, զերշնականապես կստանանք

$$M\left[\frac{X_1}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}\right] = \frac{1}{n},$$

206. Ապացուցել, որ եթե պատահական X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 մեծությունները անկախ են, դրական և միատեսակ բաշխված, ապա

$$M\left[\frac{X_1 + X_2 + X_3}{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}\right] = \frac{3}{5},$$

Ցուցում. Մաթեմատիկական սպասման նշանի տակ կանգնած կոտորակը ներկայացնել Յ կոտորակների գումարի տեսքով և օգավել 205-րդ խնդրի լուծումից:

207. Գտնել Պուասոնի օրենքով բաշխված դիսկրետ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը.

$$\begin{array}{ccccccc} X & 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ p & e^{-\lambda} & \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!} & \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} & \dots & \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} & \dots \end{array}$$

Լուծում: Հստ մաթեմատիկական սպասումի սահման-

Ճան այն գեպքի համար, երբ X-ի հնարավոր արժեքների թիվը հաշվելի է.

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

Հաշվի առնելով, որ $k=0$ դեպքում գումարի առաջին անգամը հավասար է զրոյի, ընդունենք որպես գումարման կ ինդեքսի ամենափոքր արժեքը 1-ը.

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!},$$

Տեղադրելով $k-1=m$, կստանանք

$$M(X) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!},$$

Նկատի անենալով, որ $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{\lambda}$, վերջնականապես կտնե-

նանք

$$M(X) = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda,$$

Այսպիսայ,

$$M(X) = \lambda,$$

ալիքնքն՝ Պատաստնի բաշխման մաթեմատիկական սպասամը հավասար է արդ բաշխման λ պարամետրին:

208. Պատահական X և Y մեծոթլուններն անկախ են: Գտնել պատահական $Z = 3X + 2Y$ մեծոթլան գիտպերսիան, եթե հայտնի է, որ $D(X) = 5$, $D(Y) = 6$:

Լուծում: Քանի որ X և Y մեծոթլուններն անկախ են, տպա անկախ են նույն 3X և 2Y մեծոթլունները: Օգտագործելով գիտպերսիալի հատկոթլունները (անկախ պատահական

մեծությունների գումարի դիսպերսիան հավասար է գումարելիների դիսպերսիաների գումարին, հաստատուն արտադրիչը կարելի է գուրս բերել դիսպերսիայի նշանի տակից՝ այն բարձրացնելով քառակուսի), կտանանք

$$\begin{aligned} D(Z) &= D(3X + 2Y) = D(3X) + D(2Y) = \\ &= 9D(X) + 4D(Y) = 9 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 69: \end{aligned}$$

209. Գտանական X և Y մեծություններն անկախ են: Գտնել պատահական $Z = 2X + 3Y$ մեծության դիսպերսիան, եթե հայտնի է, որ $D(X) = 4$, $D(Y) = 5$:

$$\text{Պատ. } D(Z) = 61:$$

210. Գտնել դիսպերսիա X պատահական մեծության դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը, որը տրված է հետեւյալ բաշխման օրենքով:

$$\begin{array}{ccccc} X & -5 & 2 & 3 & 4 \\ P & 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2: \end{array}$$

Լուծում: Դիսպերսիան կարելի է հաշվել ելնելով նրա սահմանումից, բայց մենք օգտվենք հետեւյալ բանաձեկից.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

որն ավելի արագ կհասցնի նպատակին:

Գտնենք X -ի մաթեմատիկական սպասումը.

$$M(X) = -5 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 = -0,3:$$

Գրենք X^2 -ու բաշխման օրենքը:

$$\begin{array}{ccccc} X^2 & 25 & 4 & 9 & 16 \\ P & 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{array}$$

Գտնենք X^2 -ու մաթեմատիկական սպասումը:

$$M(X^2) = 25 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,1 + 16 \cdot 0,2 = 15,3:$$

Գտնենք որոնելի դիսպերսիան.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 15,3 - (0,3)^2 = 15,21;$$

Գտնենք որոնելի միջին քառակուսային շեղումը.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{15,21} = 3,9;$$

211. Գտնել բաշխման

ա)	X	4,3	5,1	10,6	μ) X	131	140	160	180
	P	0,2	0,3	0,5	P	0,05	0,1	0,25	0,6

օրենքով տրված գիտկրետ X պատահական մեծության գիւղերսիան և միջին քառակուսային շեղումը:

$$\text{Պատ. ա) } D(X) \leq 8,545, \quad \sigma(X) \leq 2,923,$$

$$\text{Ժ) } D(X) \leq 248,35, \quad \sigma(X) \leq 15,77;$$

212. Գիտկրետ X պատահական մեծության տնի միան երկու հնարավոր x_1 և x_2 արժեքներ, ընդ որում հավասարահնարավոր: Ալացուցել, որ X մեծության գիտկրսիան հավասար է հնարավոր արժեքների կիսատարբերության քառակուսուն:

$$D(X) = \left| \frac{x_2 - x_1}{2} \right|^2,$$

Եւ ժում: Գտնենք X-ի մաթեմատիկական սպասումը, հաշվի առնելով, որ հնարավոր x_1 և x_2 արժեքների հավանականությաններն հավասար են իրար, և հետևաբար, նրանցից յուրաքանչյորը հավասար է $1/2$ -ի.

$$M(X) = x_1 \cdot \frac{1}{2} + x_2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

Գտնենք X^2 -ու մաթեմատիկական սպասումը.

$$M(X^2) = x_1^2 \cdot \frac{1}{2} + x_2^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2},$$

Գտնենք X-ի գիտկրսիան:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} - \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 = \left| \frac{x_2 - x_1}{2} \right|^2,$$

213. Գտնել գիսկրետ Խ պատահական մեծության՝ 5 անկախ փորձերում Ա պատահույթի երկալու թվի գիսպերսիան, եթե յուրաքանչյուր փորձում Ա պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է 0,2-ի:

Լուծում: Անկախ փորձերում պատահույթի երկալու թվի գիսպերսիան (յուրաքանչյուր փորձում պատահույթի երկալու նույն հավանականությամբ) հավասար է փորձերի թվի և պատահույթի երկալու ու չերկալու հավանականությունների արտադրյալին.

$$D(X) = npq:$$

Հստ պայմանի $n=5$, $p=0,2$, $q=1-0,2=0,8$: Որոնելի գիսպերսիան՝ $D(X)=npq=5 \cdot 0,2 \cdot 0,8=0,8$:

214. Գտնել գիսկրետ Խ պատահական մեծության՝ 10 անկախ փորձերում ինչ-որ սարքի տարրի խափանումների թվի գիսպերսիան, եթե յուրաքանչյուր փորձում տարրի խափանվելու հավանականությունը հավասար է 0,9-ի:

$$\text{Պատ. 1 } D(X)=0,9:$$

215. Գտնել գիսկրետ Խ պատահական մեծության՝ 2 անկախ փորձերում Ա պատահույթի երկալու թվի գիսպերսիան, եթե այդ փորձերում պատահույթի երկալու հավանականությունները նույնն են և հայտնի է որ $M(X)=1,2$:

Լուծում: Առաջին եղանակ: X -մեծության հնարավոր արժեքները այսպիսին են $x_1=0$ (պատահույթը չի երեցացել), $x_2=1$ (պատահույթը երեցացել է 1 անգամ) և $x_3=2$ (պատահույթը հանդես է եկել 2 անգամ):

Հնարավոր արժեքների հավանականությունները կգտնենք Բեռնուլիի բանաձևով:

$$P_0(0) = p^2, \quad P_0(1) = C_2^1 p q = 2pq, \quad P_0(2) = p^2:$$

Գրենք X -ի բաշխման օրենքը:

$$\begin{array}{cccc} \text{Հնարավոր} & \text{արժեքները} & 0 & 1 & 2 \\ \text{հավանականությունները} & & q^2 & 2pq & p^2 \end{array}$$

Գտնենք $M(X)$ -ը:

$$M(X) = 2pq + 2p^2 = 2p(q+p) = 2p:$$

Հստ պայմանի $M(X) = 1,2$, ալսինքն՝ $2p = 1,2$: Այստեղից
 $p = 0,6$ և, հետեւքար, $q = 1 - 0,6 = 0,4$:

Որոնելի գիտակերսիան

$$D(X) = npq = 2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,48:$$

Եթերութեղանակ: Օգավենք $M(X) = np$ բանաձեից:
 Հստ պայմանի $M(X) = 1,2$, $n=2$: Հետեւքար, $1,2 = 2p$: Այս-
 տեղից $p = 0,6$ և նշանակամ է, $q = 0,4$:

Գտնենք որոնելի գիտակերսիան,

$$D(X) = npq = 2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,48:$$

Հասկանալի է, երկրորդ եղանակը ավելի արագ է հասցնում
 նպատակին:

216. Գտնել գիտերեա X պատահական մեծոթյան՝ 2 ան-
 կախ փորձերում Ա պատահութիւն երեալու թվի գիտակերսիան,
 եթե արդ փորձերում պատահութիւն երեալու հայտանականու-
 թյունները նույն է և հայտնի է, որ $M(X) = 0,9$:

Պատ.՝ $D(X) = 0,495$.

217. Կատարվում են անկախ փորձեր Ա պատահութիւնը յա-
 րաքանչյուր փորձում երեալու միենալին հայտանականությամբ:
 Գտնել Ա պատահութիւն երեալու հայտանականությունը, եթե
 3 անկախ փորձերում պատահութիւն երեալու թվի գիտակեր-
 սիան հայտասար է $0,63$ -ի:

Պատ.՝ $p_1 = 0,3$, $p_2 = 0,7$:

218. Գիտերեա X պատահական մեծոթյանն անի միայն
 երկու հնարավոր արժեքներ՝ x_1 և x_2 , բնդ որում $x_2 > x_1$. Հա-
 զանականությանը, որ X -ը կրնականի x_1 արժեքը, հայտասար
 է $0,6$ -ի: Գտնել X -ի բաշխման օրենքը, եթե մաթեմաти-
 կական սպասամն աղետակերսիան հայտնի են.

$$M(X) = 1,4, \quad D(X) = 0,24:$$

Լուծում: Գիտերեա պատահական մեծոթյանը բոլոր
 113.

Հնարավոր արժեքների հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի, ուստի հավանականությունը, որ X -ը կընդունի x_2 արժեքը հավասար է $1 - 0,6 = 0,4$:

Գրենք X -ի բաշխման օրենքը.

$$\begin{array}{ccc} X & x_1 & x_2 \\ p & 0,6 & 0,4 \end{array} \quad (*)$$

x_1 -ի և x_2 -ի արժեքները գտնելու համար պետք է կազմել նրանց կապող երկու հավասարում: Այդ նպատակով արտահայտենք հայտնի մաթեմատիկական սպասումն ու դիսպերսիան x_1 -ի ու x_2 -ի միջոցով:

Գտնենք $M(X)$ -ը

$$M(X) = 0,6x_1 + 0,4x_2:$$

Հստ պայմանի $M(X) = 1,4$, հետևաբար,

$$0,6x_1 + 0,4x_2 = 1,4: \quad (**)$$

x_1 -ը և x_2 -ը կապող մեկ հավասարումն ստացված է: Երկրորդ հավասարումը ստանալու համար արտահայտենք հայտնի դիսպերսիան x_1 -ով և x_2 -ով:

Գրենք հետեւալ բաշխման օրենքը.

$$\begin{array}{ccc} X^2 & x_1^2 & x_2^2 \\ p & 0,6 & 0,4: \end{array}$$

Գտնենք $M(X^2)$ -ն

$$M(X^2) = 0,6x_1^2 + 0,4x_2^2:$$

Գտնենք դիսպերսիան.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 0,6x_1^2 + 0,4x_2^2 - 1,4^2:$$

Տեղադրելով $D(X) = 0,24$ -ը, տարրական ձևափոխություններից հետո կստանանք:

$$0,6x_1^2 + 0,4x_2^2 = 22: \quad (***)$$

Միավորելով $(**)$ -ը, և $(***)$ -ը, կունենանք հավասարումների հետեւալ համակարգը,

$$\begin{cases} 0,6x_1 + 0,4x_2 = 1,4, \\ 0,6x_1^2 + 0,4x_2^2 = 2,2; \end{cases}$$

Լուծելով այս համակարգը, կդանենք 2 լուծում՝

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2 \quad և \quad x_1 = 1,8, \quad x_2 = 0,8;$$

Ըստ պայմանի $x_2 > x_1$, ուստի խնդրին բավարարում է միայն առաջին լուծումը.

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2; \quad (***)$$

Տեղադրելով $(****)$ -ը $(*)$ -ի մեջ, կստանանք սրոնելի բաշխման օրենքը.

X	1	2
p	0,6	0,4

219. Դիսկրետ X պատահական մեծաթիւնն անի միայն 2 հնարավոր արժեքներ՝ x_1 և x_2 , բնդ որում $x_1 < x_2$: Հավանականությունը, որ X-ը կընդունի x_1 արժեքը, հավասար է 0,2-ի: Գտնել X-ի բաշխման օրենքը, զիանալով նրա մաթեմատիկական սպասումն՝ $M(X) = 2,6$, և միջին քառակառային շեղումը՝ $\sigma(x) = 0,8$:

Պատ.	X	1	3
p		0,2	0,8

220. Դիսկրետ X պատահական մեծաթիւնն անի միայն 3 հնարավոր արժեքներ, $x_1 = 1$, x_2 և x_3 , բնդ որում $x_1 < x_2 < x_3$: Հավանականությունները, որ X-ը կընդունի x_1 և x_3 արժեքները համապատասխանաբար հավասար են 0,3-ի և 0,2-ի: Գտնել X մեծաթիւն բաշխման օրենքը, եթե նրա մաթեմատիկական սպասումն է $M(X) = 2,2$ և զիսպերսիսն՝

$$D(X) = 0,76:$$

Պատ.	X	1	2	3
p		0,3	0,2	0,5

221. Գցված են ո խաղոսկրեր: Գտնել միավորի գումարի գիսպերսիան, որոնք կարող են երեալ բոլոր նիստերի վրա:

Լուծում: Եշանակենք X -ով հետեւալ գիսկրետ պատահական մեծությունը՝ միավորների գումարը, որոնք կերեան բոլոր նիստերին, X_i -ով ($i=1,2,\dots,n$) լրդ խաղոսկրի նիստին երեացած միավորներն թիվը: Այն ժամանակ

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n:$$

Այնհայտ է, որ բոլոր X_i մեծություններն ունեն միևնույն բաշխումը, հետեւաբար, միևնույն թվային բնութագրիչները, մասնավորապես, միևնույն գիսպերսիաները, այսինքն՝

$$D(X_1) = D(X_2) = \cdots = D(X_n): \quad (*)$$

Քանի որ գիտարկվող պատահական մեծություններն անկախ են, ապա նրանց գումարի գիսպերսիան հավասար է գումարելիների գիսպերսիաների գումարին.

$$\begin{aligned} D(X) &= D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \\ &= D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n): \end{aligned}$$

(*)-ն շնորհիվ կոտանանք

$$D(X) = n \cdot D(X_1): \quad (**)$$

Այսպիսով, բավական է հաշվել պատահական X_1 մեծության գիսպերսիան, այսինքն՝ միավորների թվի գիսպերսիան, որ կարող են երեալ «առաջին» խաղոսկրի վրա: Կատարենք այդ: Գրենք X_1 -ի բաշխման օրենքը.

X_1	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Գտնենք $M(X_1^2)$ -ն ու $D(X_1)$ -ը.

$$M(X_1^2) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6},$$

$$D(X_1) = M(X_1^2) - [M(X_1)]^2 = \frac{91}{6} - (\frac{7}{2})^2 = \frac{35}{12}; \quad (***)$$

**Գառնենք որոնելի դիսպերսիան, որի համար աեղագրենք
(***)-ը (**)-ի մեջ.**

$$D(X) = \frac{35}{12} \text{ ո:}$$

222. Յուրաքանչյուր փորձամ պատճենաթի հանդես գտն հավանականությունը հավասար է $p(0 < p < 1)$: Փորձերը կատարվում են այնքան ժամանակ, քանի զես պատճենաթի հանդես չի եկել: Գանել. ա) դիսկրետ X պատճենական մեծության փորձերի թվի, որն անհրաժեշտ է կատարել մինչեւ պատճենաթի երեսը, մաթեմատիկական սպասմը, բ) X մեծության դիսպերսիան:

Լուծում: ա) Կազմենք X մեծություն՝ փորձերի թվի, որն անհրաժեշտ է կատարել մինչեւ պատճենաթի երեսը. բաշխման օրենքը.

$$\begin{array}{ccccccc} X & 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ p & p & qp & q^2p & \dots & q^{k-1}p & \dots \end{array} \quad (1)$$

Այսակա գ $q = 1-p$ -ն պատճենաթի չերեալու հավանականությունն է:

Գանենք $M(X)$ -ը

$$M(X) = 1 \cdot p = 2 \cdot qp + 3 \cdot q^2p + \dots + kp^{k-1}p + \dots =$$

$$= p(1 + 2q + 3q^2 + \dots + kp^{k-1} + \dots) = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} =$$

$$= p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Այսպիսով,

$$M(X) = \frac{1}{p},$$

Պարզ արանում: $\delta_{n+j} = \text{տանը}, \text{ որ } 1 + 2q + 3q^2 + \dots +$
 $+ kq^{k-1} + \dots = \frac{1}{(1-q)^2}, \text{ քանի որ } 0 < q < 1, \text{ ապա } (q-1) \text{ նկատմամբ}$

աստիճանային շարքը՝

$$S = 1 + q + q^2 + \dots + q^k + \dots = \frac{1}{1-q}$$

Կարելի է անդամ առ անդամ դիֆերենցել և շարքի անդամների ածանցյալների գումարը հավասար կլինի շարքի գումարի ածանցյալին, այսինքն՝

$$S' = 1 + 2q + 3q^2 + \dots + kq^{k-1} + \dots = \frac{1}{(1-q)^2}, \quad (**)$$

բ) $\Phi_{n+1} - X \cdot M(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ հետևյալ բանաձևի.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2:$$

$$\text{Հաշվի առնելով, որ } M(X) = \frac{1}{p}, \text{ կստանանք}$$

$$D(X) = M(X^2) - \frac{1}{p^2} \quad (***)$$

Մնամ է գտնել $M(X^2)$ -ն: $q_{p+1} - X^2 - m \cdot p \cdot 2^{\text{իմաման}} \circ p+1 - p$ օգտագործելով ($*$)-ը.

X^2	1^2	2^2	3^2	\dots	k^2	\dots
P	p	qp	$q^2 p$	\dots	$q^{k-1} p$	\dots

$q_{m+1} - M(X^2)$.

$$\begin{aligned} M(X^2) &= 1^2 \cdot p + 2^2 \cdot qp + 3^2 \cdot q^2 p + \dots + k^2 \cdot q^{k-1} p + \dots = \\ &= p(1^2 + 2^2 \cdot q^2 + 3^2 \cdot q^2 + \dots + k^2 \cdot q^{k-1} + \dots) = \\ &= p \cdot \frac{1+q}{(1-q)^3} = p \cdot \frac{1+(1-p)}{p^3} = \frac{2-p}{p^2}, \end{aligned}$$

Այսպիսով,

$$M(X^2) = \frac{2-p}{p^2}, \quad (****)$$

Գանենք որոնելի գիտերսիան, որի համար տեղադրենք $(****)$ -ը $(***)$ -ի մեջ.

$$D(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2},$$

Պարզ արանում է 8ույց առաջ, որ

$$1^2 + 2^2 \cdot q + 3^2 \cdot q^2 + \cdots + k^2 \cdot q^{k-1} + \cdots = \frac{1+q}{(1-q)^3},$$

P_{ppq} ,

$$\int_0^q (1^2 + 2^2q + 3^2q^2 + \cdots + k^2q^{k-1} + \cdots) dq =$$

$$= [q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + kq^k + \cdots]_0^q =$$

$$= q(1 + 2q + 3q^2 + \cdots + kq^{k-1} + \cdots) = \frac{q}{(1-q)^2} [m^k \cdot n \cdot (**)-p].$$

Գիֆերենցելով հայաստանության 2 ժամը բառ պի, կոտանանք:

$$1^2 + 2^2q + 3^2q^2 + \cdots + k^2q^{k-1} + \cdots = \frac{1+q}{(1-q)^3},$$

223. Կատարվում են ինչ-որ առրի բազմակի փորձարշամները ըստ հասալիության ալիքան ժամանակի, միշտ տարբե կիսափանիքի: Գանեն, ա) գիտերիս պատահական X մեծության՝ փորձերի թվի, որ պետք է անցկացնել, մաթեմատիկական սպասառմը, բ) X-ի գիտերսիան: Տարրի խափանվելու հայտնականությունը՝ բորբանչության փորձարշամնակառը է 0,1-ի:

Ցուցում: Օգտել 222 խնդրի արդյունքներից:

Պատճենական: ա) $M(X) = 10$, բ) $D(X) = 90$:

$$224. Ապացուցել M \left[X - \frac{x_1 + x_k}{2} \right]^2 \geq D(X) \quad անհայտառություն:$$

յությունը, որտեղ x_i -ը և x_k -ն X պատահական մեծության ցանկացած 2 հնարավոր արժեքներն են:

Լուծում: 1) $\text{Դիցուք } \frac{x_i+x_k}{2} = M(X)$: Ապացուցենք, որ այդ գեղը բում

$$M\left[X - \frac{x_i+x_k}{2}\right]^2 = D(X): \quad (*)$$

2) $\text{Դիցուք } \frac{x_i+x_k}{2} \neq M(X)$: Ապացուցենք, որ այդ գեղը բում

$$M\left[X - \frac{x_i+x_k}{2}\right]^2 > D(X):$$

Զեափոխենք անհավասարության ձախ մասը՝ օգտագործելով մաթեմատիկական սպասման հատկությունները.

$$M\left[X - \frac{x_i+x_k}{2}\right]^2 = M(X^2) - 2\frac{x_i+x_k}{2} \cdot M(X) + \left(\frac{x_i+x_k}{2}\right)^2,$$

$\zeta_{\text{ավասարության}} \quad \text{աչ} \quad \text{մասում} \quad \text{հանելով} \quad \text{և} \quad \text{գումարելով}$
 $[M(X)]^2, \quad \text{կստանանք}$

$$M\left[X - \frac{x_i+x_k}{2}\right]^2 = D(X) + \left[M(X) - \frac{x_i+x_k}{2}\right]^2 > D(X): \quad (**)$$

Միավորելով $(*)$ -ը և $(**)$ -ը, զերչնականապես՝ կոնեցնանք.

$$M\left[X - \frac{x_i+x_k}{2}\right]^2 \geq D(X):$$

225. Ապացուցել, որ եթե X պատահական մեծությունն ամենամեծ և ամենափոքր հնարավոր արժեքները, որոնք համապատասխանաբար հավասար են ա-ի և բ-ի, ապա այդ պատահական մեծության գիսպերթիան չի գերազանցի այդ արժեքների կիսմատարբերության քառակուսուն.

$$D(X) \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2:$$

և ուժում : Օպավենք

$$D(X) \leq M \left[X - \frac{a+b}{2} \right]^2 \quad (*)$$

անհավասարությունից (աես խնդիր (224):

Ապացուցենք այժմ, որ

$$M \left[X - \frac{a+b}{2} \right]^2 \leq \left[\frac{b-a}{2} \right]^2,$$

(Այսականից և $(*)$ -ից հետևում է ապացուցվող անհավասարության իրավացիությունը): Այս նպատակով ձեռփոխենք մաթեմատիկական սպասումը:

$$\begin{aligned} M \left[\frac{b-a}{2} \right]^2 &= M \left[X - \frac{a+b}{2} + (b-X) \right]^2 = \\ &= M \left[X - \frac{a+b}{2} \right]^2 + M \left[(b-X)(X-a) \right], \end{aligned}$$

Հավասարության աջ մասի երկրորդ գոմարելին բացառական չէ (այդ հետևում է այն բանից, որ Ե-ն ամենամեծ և ա-ն ամենափոքր հնարավոր արժեքներն են), ոստի առաջին գոմարելին չի դերավանցում ողջ զոմարը,

$$M \left[X - \frac{a+b}{2} \right]^2 \leq M \left[\frac{b-a}{2} \right]^2,$$

Հաշվի առնելով, որ հաստատան մեծության մաթեմատիկական սպասումը հավասար է իրեն՝ հաստատանին, վերջնականապես կստանանք.

$$M \left[X - \frac{a+b}{2} \right]^2 \leq \left(\frac{b-a}{2} \right)^2,$$

226. Ապացուցել, որ եթե X -ը և Y -ը անկախ պատճենական մեծություններ են, ապա

$$D(XY) = D(X) \cdot D(Y) + n^2 D(X) + m^2 D(Y),$$

որտեղ $m = M(X)$ և $n = M(Y)$:

Լուծում: Բայց դիսպերսիալի հաշվման բանաձևի

$$D(XY) = M[(XY)^2] - [M(XY)]^2$$

Հաշվի առնելով, որ $X \sim \mu$ և $Y \sim \mu$ անկախ պատահական մեծություններ են և, հետեւաբար, X^2 ու Y^2 ևս անկախ են և որ անկախ պատահական մեծությունների արտադրյալի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է նրանց մաթեմատիկական սպասումների արտադրյալին, կստանանք,

$$D(XY) = M[X^2 \cdot Y^2] - [M(X) \cdot M(Y)]^2 =$$

$$= M(X^2)M(Y^2) - m^2n^2: \quad (*)$$

Բայց դիսպերսիալի սահմանման

$$D(X) = M(X^2) - m^2, \quad D(Y) = M(Y^2) - n^2:$$

Այսուեղից

$$M(X^2) = D(X) + m^2, \quad M(Y^2) = D(Y^2) = + n^2: \quad (**)$$

Տեղադրելով $(**)$ -ը $(*)$ -ի մեջ, պարզեցումներից հետո զերչ-նականապես կունենանք

$$D(XY) = D(X)D(Y) + n^2D(X) + m^2D(Y)$$

227. Գտնել Պուասսոնի օրենքով բաշխված դիսպերս X պատահական մեծության դիսպերսիան:

$$\begin{array}{ccccccc} X & 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ P & e^{-\lambda} & \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!} & \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} & \dots & \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} & \dots \end{array}$$

Լուծում: Օգտվենք հետեւյալ բանաձևից.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2:$$

Քանի որ $M(X) = \lambda$ (տես խնդիր 207), ապա

$$D(X) = M(X^2) - \lambda^2: \quad (*)$$

Գրենք պատահական X^2 մեծության բաշխումը, հաշվի առնելով, որ հավանականությանը, որ X^2 -ն կընդունի k^2 արժեքը, հավասար է հավանականությանը, որ X -ը կընդունի k արժեքը (այդ հետևում է այն բանից, որ X -ի հնարավոր արժեքները բացասական չեն):

$$\begin{array}{ccccccc} X^2 & 0^2 & 1^2 & 2^2 & \dots & k^2 & \dots \\ P & e^{-\lambda} & \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!} & \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} & \dots & \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} & \dots \end{array}$$

Դանենք X^2 -ու մաթեմատիկական սպասումը:

$$M(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

Հաշվի առնելով, որ $k=0$ գեղքում գումարի առաջին անդամը հավասար է զրոյի, կստանանք,

$$\begin{aligned} M(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{k \lambda^k e^{-\lambda}}{k(k-1)!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} [(k-1)+1] \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda \left[\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} \right], \end{aligned}$$

Տեղադրելով $k-1=m$, կտանենանք

$$M(X^2) = \lambda \left[\sum_{m=0}^{\infty} m \cdot \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \right],$$

Ի նկատի ունենալով, որ

$$\sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \lambda \quad (\text{անհ'ս. խնդիր 207}):$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1,$$

անհնգ

$$M(X^2) = \lambda(\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda: \quad (**)$$

Տեղադրենք $(**)$ -ը $(*)$ -ի մեջ.

$$D(X) = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda:$$

Այսպիսով, Պուասոնի բաշխման գիսպերսիան հավասար է λ պարամետրին:

§ 4. Տեսական մոմենտները

X պատահական մեծության k-րդ կարգի սկզբնական մոմենտ կոչվում է X^k մեծության մաթեմատիկական սպառումը.

$$v_k = M(X^k):$$

Մասնավորապես, առաջին կարգի սկզբնական մոմենտը հավասար է մաթեմատիկական սպառմանը.

$$v_1 = M(X):$$

X պատահական մեծության k-րդ կարգի կենտրոնական մոմենտ կոչվում է $[X - M(X)]^k$ մեծության մաթեմատիկական սպառումը.

$$v_k = M[X - M(X)]^k:$$

Մասնավորապես առաջին կարգի կենտրոնական մոմենտը հավասար է զիսպերսիա-

յին.

$$v_1 = M[X - M(X)] = 0:$$

Երկրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտը հավասար է զիսպերսիա-

$$\mu_2 = M[X] - M(X)^2 = D(X):$$

Կենտրոնական մոմենտներն նպատակահարմար է հաշվել, օդտաքարժելով կենտրոնական մոմենտներն սկզբնականներով արտահայտող բանաձևերը.

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,$$

$$\nu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3;$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4$$

228. Դիսկրետ X պատահական մեծաթիւնը արված է բաշխման օրենքով.

X	1	3
p	0,4	0,6

Գտնել առաջին, երկրորդ և երրորդ կարգի սկզբնական մոմենտները:

Լուծում: Գտնենք առաջին կարգի սկզբնական մոմենտը.

$$\nu_1 = M(X) = 1 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,6 = 2,2;$$

Գրենք X_1 մեծաթիւն բաշխման օրենքը.

X_1	1	9
p	0,4	0,6

Գտնենք երկրորդ կարգի սկզբնական մոմենտը.

$$\nu_2 = M(X^2) = 1 \cdot 0,4 + 9 \cdot 0,6 = 5,8;$$

Գրենք X_2 մեծաթիւն բաշխման օրենքը

X^3	1	27
p	0,4	0,6

Գտնենք երրորդ կարգի սկզբնական մոմենտը.

$$\nu_3 = M(X^3) = 1 \cdot 0,4 + 27 \cdot 0,6 = 16,6;$$

229. Դիսկրետ Խ պատահական մեծությունը տրված է բաշխման օրենքով.

X	2	3	5
p	0,1	0,4	0,5

Գտնել առաջին, երկրորդ և երրորդ կարգի սկզբնական մոմենտները

$$\text{Պատ. } v_1 = 3,9, \quad v^2 = 16,5 \quad v_3 = 74,1;$$

230. Դիսկրետ Խ պատահական մեծությունը տրված է բաշխման օրենքով.

X	1	2	4
p	0,1	0,3	0,6

Գտնել առաջին, երկրորդ, երրորդ և չորրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտները:

Լուծում: Առաջին կարգի կենտրոնական մոմենտը հավասար է զրոյի.

$$\mu_1 = 0;$$

Կենտրոնական մոմենտների հաշվման համար նպատակահարմար է օգտվել կենտրոնական մոմենտները սկզբնականներով արտահայտող բանաձևերից, ուստի նախ գտնենք սկզբնական մոմենտները.

$$v_1 = M(X) = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,6 = 3,1;$$

$$v_2 = M(X^2) = 1 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 + 16 \cdot 0,6 = 10,9;$$

$$v_3 = M(X^3) = 1 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,3 + 64 \cdot 0,6 = 40,9;$$

$$v_4 = M(X^4) = 1 \cdot 0,1 + 16 \cdot 0,3 + 256 \cdot 0,6 = 158,5;$$

Գտնենք կենտրոնական մոմենտները.

$$\mu_2 = v_2 - v_1^2 = 10,9 - 3,1^2 = 1,29;$$

$$\begin{aligned}\mu_3 &= \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^2 = 40,9 - 3 \cdot 3,1 \cdot 10,9 + 2 \cdot 3,1^2 = \\ &= -0,888;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_4 &= \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4 = 158,5 - 4 \cdot 40,9 \cdot 3,1 + 6 \cdot 10,9 \cdot \\ &\quad \cdot 3,1^2 - 3 \cdot 3,1^4 = 2,7777;\end{aligned}$$

231. Դիսկրետ պատահական մեծությունը տրված է բաշխման օրենքով.

$$\begin{array}{ccc} X & 3 & 5 \\ p & 0,2 & 0,8 \end{array}$$

Գտնել առաջին, երկրորդ, երրորդ և չորրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտները:

Ցուցում: Նախ գտնել սկզբնական մոմենտները և նրանցով արտահայտել կենտրոնական մոմենտները:

$$\text{Պատ. } \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0,64, \quad \mu_3 = -1,12, \quad \mu_4 = 1,33;$$

232. Ապացացել, որ երկրորդ կարգի կենտրոնական $\mu_2 = M[X - M(X)]^2$ մոմենտը (դիսպերսիան) փոքր է երկրորդ կարգի սովորական $\mu_2 = M[X - C]^2$ մոմենտից ցանկացած $C \neq M(X)$ -ի գեպքում:

Լուծում: Գրելու պարզաթյան համար նշանակենք $M(X) = m$. Մաթեմատիկական սպասման նշանի տակ դաշտը նշանենք և համենք մուլտիպլիքատորը:

$$\begin{aligned}\mu'_2 &= M[X - C]^2 = M[(X - m) + (m - C)]^2 = \\ &= M[(X - m)^2 + 2(m - C)(X - m) + (m - C)^2];\end{aligned}$$

Գտամարի մաթեմատիկական սպասմար հավասար է դաշտելիների մաթեմատիկական սպասումների գումարին, ուստի

$$\mu'_2 = M[X - m]^2 + M[2(m - C)(X - m)] + M[m - C]^2;$$

Հանենք $2(m - C)$ հաստատուն մեծությունը մաթեմատիկական սպասման նշանի տակից և հաշվի առնելով, որ $(m - C)^2$ հաստատունի մաթեմատիկական սպասումը հավա-

սար է իրեն՝ հաստատունին և որ ըստ սահմանման $M[X - m]^2 = \mu_2$ կստանանք

$$\mu_2' = \mu_2 + 2(m - C) \cdot M[X - m] + (m - C)^2:$$

Ի նկատի ունենալով, որ $X - m$ շեղման մաթեմատիկական սպասումը հավասար է զրոյի, ունենք

$$\mu_2' = \mu_2 + (m - C)^2:$$

Այսաեղից

$$\mu_2 = \mu_1' - (m - C)^2:$$

Այս հավասարությունից եզրակացնում ենք, որ երկրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտը ցանկացած $C \neq m$ դեպքում փոքր է երկրորդ կարգի սովորական մոմենտից:

233. Ապացուցել, որ երրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտը կապված է սկզբնական մոմենտների հետ հետեւյալ հավասարությունով.

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3:$$

Լուծում: Կենտրոնական մոմենտի սահմանումից

$$\mu_3 = M[X - M(X)]^3:$$

Օգտագործելով մաթեմատիկական սպասման հատկությունները և հաշվի առնելով, որ $M(X) \sim \rho$ հաստատուն մեծություն է, կստանանք.

$$\begin{aligned} \mu_3 &= M[X^3 - 3X^2 \cdot M(X) + 3X \cdot M^2(X) - M^3(X)] = \\ &= M(X^3) - 3M(X) \cdot M(X^2) + 3M^2(X) \cdot M(X) - M[M^3(X)] = \\ &= M(X^3) - 3M(X) \cdot M(X^2) + 3M^3(X) - M^3(X) = M(X^3) - \\ &\quad - 3M(X) \cdot M(X^2) + 2M^3(X); \end{aligned} \tag{*}$$

Հստ սկզբնական մոմենտի սահմանման

$$v_1 = M(X), \quad v_2 = M(X^2), \quad v_3 = M(X^3); \quad (**)$$

Տեղադրելով $(**)$ -ը $(*)$ -ի մեջ, զերչնականապես կստանանք

$$μ_3 = v_3 - 3v_1 \cdot v_2 + 2v_1^3;$$

234. Ապացուցել, որ չորրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտը կապված է սկզբնական մոմենտների հետ հետևյալ հավասարությունով.

$$μ_4 = v_4 - 4v_1 v_3 + 6v_1^2 v_2 - 3v_1^4;$$

235. Դիցուք $X = X_1 + X_2$, որտեղ X_1 -ը և X_2 -ը համապատասխանաբար $μ_3$ -ի և $μ_3^2$ -ի հավասար երրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտներ ունեցող անկախ պատահական մեծություններ են: Ապացուցել, որ $μ_3 = μ_3^1 + μ_3^2$, որտեղ $μ_3^1$ X մեծության երրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտն է:

Լուծում: Գրառման պարզեցման համար մտցնենք մասթեմատիկական սպասումների հետեւյալ նշանակումները.

$$M(X_1) = a_1, \quad M(X_2) = a_2,$$

Այդ դեպքում

$$M(X) = M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2) = a_1 + a_2,$$

Երրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտի սահմանման համաձայն.

$$\begin{aligned} μ_3 &= M[X - M(X)]^3 = M[(X_1 + X_2) - (a_1 + a_2)]^3 = \\ &= M[(X_1 - a_1) + (X_2 - a_2)]^3; \end{aligned}$$

Օգտագործելով մաթեմատիկական սպասման հասկությունները (գումարի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է զումարելիների մաթեմատիկական սպասումների գումարին, անկախ մեծությունների արագրալի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է արագրիչների մաթեմա-

տիկական սպասումների արտադրյալին), կստանանք

$$\begin{aligned} \mu_3 &= M[(X_1 - a_1)^3 + 3(X_1 - a_1)^2 \cdot (X_2 - a_2) + 3(X_1 - \\ &- a_1) \cdot (X_2 - a_2)^2 + (X_2 - a_2)^3] = M(X_1 - a_1)^3 + M[3(X_1 - \\ &- a_1)^2 \cdot M(X_2 - a_2) + M[3(X_2 - a_2)^2] \cdot \\ &\cdot M(X_1 - a_1) + M(X_2 - a_2)^3]; \end{aligned}$$

Հաշվի առնելով, որ շեղման մաթեմատիկական սպասումը (պատահական մեծության և նրա մաթեմատիկական սպասուման տարբերության միջեւ) հավասար է զրոյի, այսինքն՝ $M(X_1 - a_1) = 0$ և $M(X_2 - a_2) = 0$, վերջնականապես կունենանք.

$$\mu_3 = M(X_1 - a_1)^3 + M(X_2 - a_2)^3 = \mu_3^1 + \mu_3^2;$$

ՀԱՆԳԵՐՈՐԴԻ ԿԱՌԵ
ՄԵԾ ԹՎԵՐԻ ՕՐԵՆՔԸ

§ 1. Զերիշեկի անհավասարությունը

Զերիշեկի անհավասարությունը: Հավանականությունը, որ պատահական X մեծության շեղումը իր մաքեմատիկական սպասումից բացարձակ արժեքով փոքր է դրական ε թվից, փոքր չեւ բան $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

236. Օգտագործելով Զերիշեկի անհավասարությունը, գլուխահատել հավանականությունը, որ պատահական X մեծությունը կշեղվի իր մաթեմատիկական սպասումից ավելի քիչ, քան 3 միջին քառակուսային շեղում:

$$\text{Պատ. } P(|X - M(X)| < 3\sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{8}{9};$$

237. Օգտագործել Զերիշեկի անհավասարությունը հետեւ լալ տեսքով։

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

Ցուցում։ Օգտագործել այն բանից, որ $|X - M(X)| < \varepsilon$ և $|X - M(X)| \geq \varepsilon$ պատճենությունները հակադիր են։

238. Օգտագործելով Զերիշեկի անհավասարությունը 237 խնդրում բերված տեսքով, գնահատել հավանականությունը, որ պատահական X մեծությունը կը լինի իր մաթեմատիկական սպասումից ոչ քիչ, քան 2 քառակուսային շեղում։

$$\text{Պատ.՝ } P(|X - M(X)| \geq 2\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{4\sigma^2} = \frac{1}{4},$$

239. Օգտագործելով Զերիշեկի անհավասարությունը, գնահատել հավանականությունը, որ $|X - M(X)| < 0,2$, եթե $D(X) = 0,004$ ։

$$\text{Պատ.՝ } P(|X - M(X)| < 0,2) \geq 1 - \frac{0,004}{0,04} = 0,9,$$

240. Տրված ξ

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 0,9 \text{ և } D(X) = 0,009:$$

Օգտագործելով Զերիշեկի լանհավասարությունը, դանել ε -ը։
Պատ.՝ $\varepsilon = 0,3$ ։

241. Սարքը կազմված է 10 անկախ աշխատաղ տարրերից։ Յուրաքանչյուր տարրի խափանվելու հայտականությունը T ժամանակամ հավասար է $0,05$ -ի։ Զերիշեկի անհավասարության օգնությամբ գնահատել հավանականությունը, որ խափանված տարրերի թվի և T ժամանակամ եղած խափանամների միջին թվի (մաթեմատիկական սպասման) տարրերաթյան բացարձակ տրմեքը. ա) փոքր է 2 -ից, բ) փոքր չէ երկուսից։

Լուծում։ ա) նշանակենք X -ով հետեւյալ գիտլիքա պատահական մեծաթյունը՝ խափանված տարրերի թիվը T ժամա-

Հակում: Ալդ գեպքում

$$M(X) = np = 10 \cdot 0,05 = 0,5,$$

$$D(X) = npq = 10 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 0,475$$

Օգտվենք Զերիշևի անհավասարությունից.

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

Տեղադրելով այստեղ $M(X) = 0,5$; $D(X) = 0,475$, $\varepsilon = 2$, կստանանք

$$P(|X - 0,5| < 2) \geq 1 - \frac{0,475}{4} = 0,88:$$

բ) $|X - 0,5| < 2$) և $|X - 0,5| \geq 2$ պատահութներն հակառակի են, ուստի նրանց հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի:

Հետեւաբար,

$$P(|X - 0,5| > 2) \leq 1 - 0,88 = 0,12:$$

242. Լուսավորման ցանցում զուգահեռ միացված են 20 լամպեր: Հավանականությունը, որ Տ ժամանակում լամպը կմիանա, հավասար է 0,8-ի: Օգտվելով Զերիշևի անհավասարությունից, գնահատել հավանականությունը, որ միացված լամպերի թվի և Տ ժամանակում միացված լամպերի միջին թվի (մաթեմատիկական սպասման) տարրերության բացարձակ արժեքը կլինի: ա) Յ-ից փոքր, բ) Յ-ից ոչ քիչ:

$$\text{Պատ.՝ ա) } P(|X - 16| < 3) \geq 0,64, \quad \text{բ) } P(|X - 16| \geq 3) \leq 0,36:$$

243. Ա պատահութիւն երևալու հավանականությունը լուրաքանչյուր փորձում հավասար է $1/2$ -ի: Օգտագործելով Զերիշևի անհավասարությունը, գնահատել հավանականությունը, որ Ա պատահութիւն երևալու X թիվը կգտնվի

40-ից 60 սահմաններում, եթե կատարվի 100 անկախ փորձ:

Եռծում: Գտնենք դիսկրետ X պատահական մեծության՝ 100 անկախ փորձերում A պատահութիւնը երևալու թվի, մաթեմատիկական սպասումն ու դիսպերսիան:

$$M(X) = np = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50, D(X) = npq = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25;$$

Դտնենք պատահութիւնը երևալու տրված թվի և $M(X) = 50$ մաթեմատիկական սպասման առավելագույն աարգերությունը.

$$\varepsilon = 60 - 50 = 10,$$

Օգտվենք Զեբիշենի անհավասարությունից՝ հետևյալ տեսքով:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

Տեղադրելով $M(X) = 50, D(X) = 25, \varepsilon = 10$, կստանանք

$$P(|X - 50| < 10) \geq 1 - \frac{25}{10^2} = 0,75:$$

244. Պատահութիւնը երևալու հավանականությունն ամեն փորձում հավասար է $1/4$ -ի: Օգտագործելով Զեբիշենի անհավասարությունը, գնահատել հավանականությունը, որ պատահութիւնը երևալու X թիվը գտնվում է 150 -ից 250 սահմաններում, եթե կատարված է 300 փորձ:

$$\text{Պատ.՝ } P(|X - 200| < 50) \geq 1 - \frac{150}{50^2} = 0,94:$$

245. Դիսկրետ պատահական X մեծությունը արված է բաշխման օրենքով՝

X	0,3	0,6
p	0,2	0,8:

Օգտագործելով զերիշեկի անհավասարությունը, գնահաւաք հավանականությունը, որ $|X - M(X)| < 0,2$:

Էռ ժում: Գտնենք X մեծության մաթեմատիկական սպասումն ու դիսպերսիան.

$$M(X) = 0,3 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,8 = 0,54;$$

$$\begin{aligned} D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 &= (0,3^2 \cdot 0,2 + 0,6^2 \cdot 0,8) - 0,54^2 = \\ &= 0,0144; \end{aligned}$$

Օգտվենք զերիշեկի անհավասարությունից հետևյալ տեսքով.

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

*Տեղադրելով $M(X) = 0,54$, $D(X) = 0,0144$, $\varepsilon = 0,2$, զերշնականություններ կունենանք

$$P(|X - 0,54| < 0,2) \geqslant 1 - \frac{0,0144}{0,04} = 0,64;$$

246. Դիսկրետ X պատահական մեծությունը տրված է բաշխման օրենքով.

X	0,1	0,4	0,6
p	0,2	0,3	0,5

Օգտագործելով զերիշեկի անհավասարությունը, գնահաւաք հավանականությունը, որ $|X - M(X)| < \sqrt{0,4}$:

$$\text{Պատ.՝ } P(|X - 0,44| < \sqrt{0,4}) \geqslant 1 - \frac{0,0364}{0,4} = 0,909;$$

§ Զերիշեկի թեորեմը.

Զերիշեկի թեորեմը: Եթե զույգ առ զույգ անկախ պատահական մեծությունների $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ հաջորդականությունն ունի վերջավոր մաքսատիկական սպասումներ և այլ մեծությունների դիսպերսիաները հավասարաչափ սահմանափակ են (չեն գերազանցում հաստատուն C

րիվը), ապա պատահական մեծությունների միջին քվաբանականը զուգամիտում է բայց հավանականության երանց մաքեմատիկական սպասումների միջին քվաբանականին, այսինքն՝ եթե ε -ը ցանկացած դրական թիվ է, ապա

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

Մասնավորապես, զույգ առ զույգ անկախ մեծությունների հաջորդականության միջին թվաբանականը, որոնց գիսպերսիաները հավասարաչափ սահմանափակ են և որոնք ունեն միևնույն մաթեմատիկական սպասումը՝ այս գուգամիտում է բայց հավանականության մաթեմատիկական սպասմանը՝ այն, այսինքն՝ եթե ε -ը ցանկացած դրական թիվ է, ապա

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

Տ 247. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ անկախ պատահական մեծությունների հաջորդականությունը արված է բաշխման օրենքով.

(39)

$$X_n = \begin{cases} n & 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{M}(x_n) = q_n p + (1-q_n)p^2 = 1 - \frac{1}{n^2} = 1/2n^2$$

$q_n p_n$ է արդյոք $2q_n p_n$ թեսորեմը արված հաջորդականության համար:

Լուծում: Որպեսզի պատահական մեծությունների հաջորդականության համար կիրառելի լինի $2q_n p_n$ թեսորեմը, բայց արդ մեծությունները լինեն զարդ առ զարդ անկախ, ունենան վերջավոր մաթեմատիկական սպասումներ և հայտառաբաշափ սահմանափակ գիսպերսիաներ:

Քանի որ պատահական մեծությունները անկախ են, ապա նրանք առավել են զարդ առ զարդ անկախ են, այսինքն՝ $2q_n p_n$ թեսորեմի առաջին պահանջը կատարված է:

Ստուգենք, կատարված է արդյոք մաթեմատիկական սպասումների վերջավոր լինելու պահանջը.

$$M(X_n) = -n\alpha \cdot \frac{1}{2n^2} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + n\alpha \cdot \frac{1}{2n^2} = 0;$$

Այսպիսով, յուրաքանչյուր պատահական մեծություն ունի վերջավոր (զրոյի հավասար) մաթեմատիկական սպասում, այսինքն՝ թեորեմի երկրորդ պայմանը կատարված է:

Ստուգենք, կատարված է արդյոք գիսպերսիաների հավասարաչափ սահմանափակության պահանջը:

Դրենք X_n^2 -ու բաշխման օրենքը.

$$\begin{array}{cccc} X_n^2 & n^2\alpha^2 & 0 & n^2\alpha^2 \\ p & 1/2n^2 & 1 - \frac{1}{n^2} & 1/2n^2, \end{array}$$

Կամ գումարելով նույն հնարավոր արժեքների հավանականությունները.

$$\begin{array}{ccc} X_n^2 & n^2\alpha^2 & 0 \\ p & 1/n^2 & 1 - 1/n^2, \end{array}$$

Գտնենք $M(X_n^2)$ մաթեմատիկական սպասումը:

$$M(X_n^2) = n^2\alpha^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \alpha^2;$$

Գտնենք $D(X_n)$ գիսպերսիան, հաշվի առնելով, որ

$$D(X_n) = M(X_n^2) - [M(X_n)]^2 = \alpha^2;$$

Այսպիսով, արված պատահական մեծությունների գիսպերսիաներն հավասարաչափ սահմանափակ են α^2 թվով, այսինքն՝ երրորդ պահանջը կատարված է:

Եվ այսպես, քանի որ բոլոր պահանջները կատարված են, պատահական մեծությունների գիտարկվող հաջորդականության նկատմամբ Զերիշենք թեորեմը կիրառելի է:

248. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ անկախ պատահական մեծությունների հաջորդականությունը տրված է բաշխման օրենքով:

$$\begin{array}{ccccc} X_n & & a & & -a \\ p & & \frac{n}{2n+1} & & \frac{n+1}{2n+1} \end{array}$$

Կիրառելի՞ է արգլոք Զերիշեկի թեորեմը տրված հաջորդականության նկատմամբ:

Պատ.՝ Կիրառելի է, X_n -ի մաթեմատիկական սպասումները վերջավոր են և հավասար $= \frac{a}{2n+1}$, Դիսպերսիաները հավասարաչափ սահմանափակ են a^2 թվով:

249. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ անկախ պատահական մեծությունների հաջորդականությունը տրված է բաշխման օրենքով:

$$\begin{array}{ccccc} X_n & & n+1 & & -n \\ p & & \frac{n}{2n+1} & & \frac{n+1}{2n+1} \end{array}$$

ա) Համոզվել, որ Զերիշեկի թեորեմի պահանջը գիտական սիմետրի հավասարաչափ սահմանափակության մասին էշի կատարված:

բ) Կարելի՞ է արտեղից եզրակացնել, որ գիտարկվող հաջորդականության նկատմամբ Զերիշեկի թեորեմը կիրառելի չէ:

Պատ.՝ ա) n -ը աճելիս $D(X_n) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n+1}$ դիսպերսիաները անվերջորեն աճում են, բ) չի կարելի, քանի որ գիտարկության միայն բավարար է, բայց անհրաժեշտ չէ:

250*. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ անկախ պատահական մեծությունների հաջորդականությունը տրված է բաշխման օրենքով:

$$\begin{array}{ccccc} X_n & & -n\alpha & & 0 & & n\alpha \\ p & & \frac{1}{2^n} & & 1 - \frac{1}{2^{n-1}} & & \frac{1}{2^n} \end{array}$$

Կիրառելի՞ է, արդյոք, արված հաջորդականության նկատմամբ Զերիշելի թեորեմը:

Լուծում: Քանի որ X_n պատահական մեծություններն անկախ են, ապա նրանք ևս զույգ առ զույգ անկախ են, այսինքն՝ Զերիշելի թեորեմի առաջին պահանջը կատարված է:

Հեշտ է գտնել, որ $M(X_n) = 0$, այսինքն՝ մաթեմատիկական սպասումների վերջավորության պահանջը կատարված է:

Մնում է ստուգել դիսպերսիաների հավասարաչափ սահմանափակության պահանջի կատարվելը: Հստ

$$D(X_n) = M(X_n^2) - [M(X_n)]^2$$

բանաձեռի, հաշվի առնելով, որ $M(X_n) = 0$, կդառնենք ($հաշվումները$ թողնվում են ընթերցողին)

$$D(X_n) = \frac{n^2}{2^{n-1}} \cdot 2^n:$$

Ժամանակավորապես ենթադրենք, որ n -ը փոխվում է անընդհատորեն ($որպեսզի$ ընդգծենք այդ, նշանակենք n -ը x -ով), և հետազոտենք

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2^{x-1}}$$

ֆունկցիան ըստ էքստրեմումների:

Հավասարեցնելով այս ֆունկցիայի առաջին կարգի ածանցյալը զրոյի, գտնենք կրիտիկական կետերը՝ $x_1 = 0$ և $x_2 = \frac{2}{\ln 2}$:

Դեռ գցենք առաջին կետը որպես հետաքրքրություն չներկայացնող կետ ($ուղի չի ընդունում զրոյի հավասար արժեքներ$). Հեշտ է տեսնել, որ $x_2 = \frac{2}{\ln 2}$ կետում $\varphi(x)$

ֆունկցիան ունի մաքսիմում: Հաշվի առնելով, որ $\frac{2}{\ln 2} \cong$

$\cong 2,9$, և որ ուղղ դրական ամբողջ թիվ է, հաշվենք $D(X_n) = \frac{n^2}{2n-1} x^2$ գիսպերսիան 2,9-ին ամենամոտ ($n=2$ -ից և ձախից) ամբողջ թվերի համար, այսինքն՝ $n=2$ -ի և $n=3$ -ի համար:

$n=2$ գեպքում $D(X_2) = 2x^2$, $n=3$ գեպքում $D(X_3) = \frac{9}{4} x^2$. Այս հայտն է, որ

$$\frac{9}{4} x^2 > 2 x^2;$$

Այսպիսով, հնարավոր ամենամեծ գիսպերսիան հայտնար է $\frac{9}{4} x^2$, այսինքն՝ պատահական X_n մեծությունների գիսպերսիաները հավասարաչափ սահմանափակ են $\frac{9}{4} x^2$ թվով:

Եվ այսպես, զերիշեի թեորեմի բոլոր պահանջները կատարված են, հետեաբար, գիտարկիող հաջորդականաթյան նկատմամբ արդ թեորեմը կիրառելի է:

251. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ անկախ պատահական մեծությունների հաջորդականաթյանը արված է բաշխման օրենքով.

$$X_n = \sqrt{3} - 0 + \sqrt{3}$$

$$p = 1/3 \quad 1/3 \quad 1/3$$

Կիրառելի է արդյոք, արված հաջորդականաթյան նկատմամբ զերիշեի թեորեմը:

$$\Phi_{\text{առ.}} \cdot \Phi_{\text{առելի}} = 1, \quad M(X_n) = 0, \quad D(X_n) = 2,$$

Գիտությունների մանի որ X պատահական մեծությունները միասնակ են բաշխված և անկախ են, ապա կիսվեն թեորեմին ծանոթ ընթերցողը կարող է սահմանափակվել միայն մաթեմատիկական սպասամբ հաշվելով և համոզվել, որ այն վերջապար է:

ՎԵՑԵՐՈՐԴԻ ԳԼՈՒԽ

ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԲԱՇԽՄԱՆ ՑՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ

§ 1. Պատահական մեծության

հավանականությունների բաշխման ինտեգրալ
ֆունկցիան

Բաշխման ինտեգրալ ֆունկցիա կոչվում է $F(x)$ ֆունկցիան,
որ յուրաքանչյուր x արժեքի համար որոշում է հավանականությունը,
որ X պատահական մեծությունն ընդունում է x -ից փոքր արժեք,
այսինքն՝

$$F(x) = P(X < x),$$

Հաճախ «ինտեգրալ ֆունկցիա» տերմինի փոխարեն օգտագործում են «բաշխման ֆունկցիա» տերմինը:

Ինտեգրալ ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով.

Համար կություն 1. Ինտեգրալ ֆունկցիայի արժեքները պատկանում են $[0,1]$ հատվածին.

$$0 \leq F(x) \leq 1;$$

Համար կություն 2. Ինտեգրալ ֆունկցիան չնվազող է, այսինքն՝

$$F(x_2) \geq F(x_1), \text{ եթե } x_2 > x_1;$$

Հետևանք 1. Հավանականությունը, որ X պատահական մեծությունը կրնդունի (ա, բ) միջակայքին պատկանող արժեք, հավասար է այդ միջակայքում ինտեգրալ ֆունկցիայի անիմ:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a);$$

Հետևանք 2. Հավանականությունը, որ անընդհատ պատահական X մեծությունը կրնդունի մեկ որոշակի արժեք, օրինակ x_1 , հավասար է զրոյի.

$$P(X = x_1) = 0;$$

Համար կություն 3. Եթե X պատահական մեծության բալոր հնարավոր արժեքները պատկանում են (ա, բ) միջակայքին, ապա

$$F(x) = 0, \text{ եթե } x \leq a, \quad F(x) = 1, \text{ եթե } x \geq b;$$

Հետևանք: Ճիշտ են հետևյալ սահմանային առնչությունները՝

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1;$$

252. X պատահական մեծությունը տրված է ինտեգրալ ֆունկցիայով.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1, \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, & -1 < x \leq \frac{1}{3}, \\ 1 & x > \frac{1}{3}, \end{cases}$$

Գտնել հավանականությունը, որ փորձի հետևանքով X մեծությունը կընդունի $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ միջակալքում ընկած արժեքը:

Լուծում: Հավանականությունը, որ X-ը կընդունի (a, b) միջակալքում ընկած արժեքը, հավասար է այդ միջակալքում ինտեգրալ ֆունկցիայի աճին:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a),$$

Տեղադրելով $a = 0, b = 1/3$, կստանանք

$$\begin{aligned} P(0 < X < \frac{1}{3}) &= F\left(\frac{1}{3}\right) - F(0) = \\ &= \left[\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \right]_{x=0}^{\frac{1}{3}} - \left[\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \right]_{x=0}^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

253. Պատահական X մեծությունը ամբողջ OX առանցքի վրա տրված է ինտեգրալ ֆունկցիայով.

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{2},$$

Գտնել հավանականությունը, որ փորձի հետևանքով X մեծությունը կընդունի արժեք $(0, 1)$ միջակալքում:

$$\text{Պատ.՝ } P(0 < X < 1) = \frac{1}{4},$$

254. X պատահական մեծությունը տրված է ինտեգրալ
ֆունկցիայով.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad b_{pp} \quad x \leq -2, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{2}, \quad b_{pp} - 2 < x \leq 2, \\ 1, & \quad b_{pp} \quad x > 2; \end{cases}$$

Դանել հավանականությունը, որ փորձի հետևանքով X մեծությունը կընդունի (-1; 1) միջակայքում ընկած արժեքը:
Պատ.՝ $P(-1 < X < 1) = 1/3$.

255. Անընդհատ X պատահական մեծության (ինչոր սարքի անխափան աշխատելու ժամանակամիջոցը) ինտեգրալ ֆունկցիան հավասար է

$$F(x) = 1 - e^{-x/T} \quad (x \geq 0),$$

Դանել $X \geq T$ ժամանակամիջոցում սարքի անխափան աշխատելու հավանականությունը:

$$\text{Պատ.՝ } P(X \geq T) = 1 - P(X < T) = 1 - P(0 < X < T) = \frac{1}{e},$$

256. X պատահական մեծությունը տրված է ինտեգրալ
ֆունկցիայով.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad b_{pp} \quad x \leq 2, \\ 0,5x - 1, \quad b_{pp} \quad 2 < x \leq 4, \\ 1 & , \quad b_{pp} \quad x > 4; \end{cases}$$

Դանել հավանականությունը, որ փորձի արդյունքում X-ը կընդունի հետևյալ արժեքները ա) 0,2-ից փոքր, բ) 3-ից փոքր, գ) 3-ից ոչ փոքր, դ) 5-ից ոչ փոքր:

Լուծում. ա) Քանի որ $x \leq 2$ դեպքում $F(x) = 0$, ապա $F(0,2) = 0$, այսինքն՝ $P(X < 0,2) = 0$:

$$\text{բ) } P(X < 3) = F(3) = [0,5x - 1]_{x=3} = 1,5 - 1 = 0,5;$$

գ) $X \geq 3$ և $X < 3$ պատահությունները հակադիր են, ուստի

$$P(X \geq 3) + P(X < 3) = 1.$$

Այստեղից, հաշվի առնելով, որ $P(X < 3) = 0,5$ (աեւ բ կեզարը), կստանանք

$$P(X \geq 3) = 1 - 0,5 = 0,5,$$

դ) հակադիր պատահությունների հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի, ուստի

$$P(X \geq 5) + P(X < 5) = 1.$$

Այստեղից, օգտագործելով այն պայմանը, որի շնորհիվ $x > 4$ գեպքամ F(x) = 1, կստանանք

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - 1 = 0.$$

257. X պատահական մեծությունը արված է ինտեգրալ ֆունկցիայով.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & hpp \quad x \leq 0, \\ x^2, & hpp \quad 0 < x \leq 1, \\ 1, & hpp \quad x > 1. \end{cases}$$

Գտնել հավանականությունը, որ 4 անկախ փորձերի արդյունքամ X մեծությունը ազդիղ 3 անգամ կընդունի ($0,25, 0,75$) միջակալքին պատկանալ արժեքը:

$$\text{Պատ.՝ } p = P(0,25 < X < 0,75) = 0,5, \quad P_4(3) = C_4^3 p^3 q = 0,25,$$

258. X պատահական մեծությունը արված է ամբողջ ՕX առանցքի վրա ինտեգրալ ֆունկցիայով.

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{x}{2},$$

Գտնել հետեւյալ պարմանին բավարարող հնարավոր x_1 արժեքը. $1/4$ հավանականությունը պատահական X մեծությունը փորձի հետանքով ընդունած է x_1 -ից մեծ արժեք:

Հուծում մէտք առ Տ $\leqslant x_1$ և $T > x_1$ պատահությունները հակադիր են, ոստի

$$P(T \leqslant x_1) + P(T > x_1) = 1,$$

Հետևաբար,

$$P(T \leqslant x_1) = 1 - P(T > x_1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

Քանի որ $P(T = x_1) = 0$, ապա

$$P(T \leqslant x_1) = P(T = x_1) + P(T < x_1) = P(T < x_1) = \frac{3}{4};$$

Լստ ինտեգրալ ֆունկցիայի սահմանման

$$P(T < x_1) = F(x_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_1}{2},$$

Հետևաբար,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_1}{2} = \frac{3}{4},$$

Կամ

$$\operatorname{arctg} \frac{x_1}{2} = \frac{\pi}{4},$$

Ալստեղից

$$\frac{x_1}{2} = 1 \quad \text{կամ} \quad x_1 = 2,$$

259. T պատահական մեծությունը տրված է ամբողջ ՕՇ առանցքի վրա ինտեգրալ ֆունկցիայով:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{2},$$

Գտնել հետեւյալ պայմանին բավարարող հնարավոր x_1 արժեքը՝
 $1/6$ հավանականությամբ պատահական T մեծությունը փորձեարդյունքում ընդունում է x_1 -ից մեծ արժեք:

$$\text{Պատ. } x_1 = 2\sqrt{3},$$

260. Դիսկրետ Խ պատահական մեծությունը՝ տրված է բաշխման օրենքով:

X	2	4	7
p	0,5	0,2	0,3

Գտնել $F(x)$ ինտեգրալ ֆունկցիան և գծել դրաֆիկը:

Լուծում: 1. Եթե $x \leq 2$, ապա $F(x) = 0$: Իրոք, 2-ից փոքր արժեքներ X մեծությունը չի ընդունում: Հետևաբար $x \leq 2$ դեպքում

$$F(x) = P(X < x) = 0:$$

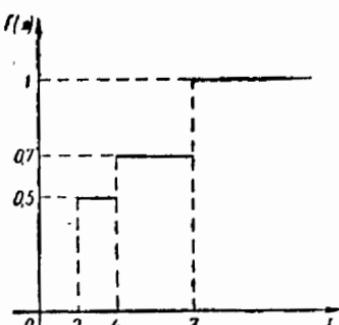
2. Եթե $2 < x \leq 4$, ապա $F(x) = 0,5$: Իրոք, X -ը կարող է ընդունել 2 արժեքը 0,5 հավանականությամբ:

3. Եթե $4 < x \leq 7$, ապա $F(x) = 0,7$: Իրոք, X -ը կարող է ընդունել 2 արժեքը 0,5 հավանականությամբ և 4 արժեքը 0,2 հավանականությամբ. Հետևաբար, արդ արժեքներից մեկը, միևնույնն է թե որը, X -ը կարող է ընդունել (ըստ անհամատեղելի պատահությունների հավանականությունների գումարման թերումի) $0,5 + 0,2 = 0,7$ հավանականությամբ:

4. Եթե $x > 7$, ապա $F(x) = 1$: Իրոք, $X \leq 7$ պատահությը ստուգվ է և նրա հավանականությունը հավասար է 1-ի:

Եվ այսպես, որոնելի ինտեգրալ ֆունկիան ունի հետեւյալ տեսքը:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{հրպ } x \leq 2 \\ 0,5, & \text{հրպ } 2 < x \leq 4 \\ 0,7, & \text{հրպ } 4 < x \leq 7 \\ 1, & \text{հրպ } x > 7 \end{cases}$$



Այս ֆունկիայի դրաֆիկը բերված է նկ. 6-ում:

261. Դիսկրետ պատահական մեծությունը տրված է բաշխման օրենքով:

նկ. 6

X	3	4	7	10
p	0,2	0,1	0,4	0,3;

Գտնել ինտեգրալ ֆունկցիան և կառուցել գրաֆիկը

$$F(x) = \begin{cases} 0, & b_{pp} \leq x \leq 3 \\ 0,2, & b_{pp} < x \leq 4 \\ 0,3, & b_{pp} < x \leq 7 \\ 0,7, & b_{pp} < x \leq 10 \\ 1, & b_{pp} > 10 \end{cases}$$

§ 2. Անընդհատ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման դիֆերենցիալ ֆունկցիա

Հավանականությունների բաշխման դիֆերենցիալ ֆունկցիա զուգում է ինտեգրալ ֆունկցիայի առաջին կարգի ածանցյալը.

$$f(x) = F'(x);$$

Հաճախ, «դիֆերենցիալ ֆունկցիա» տերմինի փոխարեն օգտագործում են «հավանականությունների խոռոչյուն» անունը:

Հավանականությունը, որ անընդհատ X պատահական մեծությունը ընդունում է (a, b) միջակայքին պատկանող արժեքներ, որում է

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx \text{ հավասարությամբ:}$$

Գիտենալով դիֆերենցիալ ֆունկցիան, կարող ենք գտնել ինտեգրալ ֆունկցիան:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx:$$

Դիֆերենցիալ ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով:

Համեմություն 1: Դիֆերենցիալ ֆունկցիան ոչ բացասական է, այսինքն՝ $f(x) \geq 0$:

Համեսկությունը՝ Դիֆերենցիալ ֆունկցիայի անխականը ինտեգրալը՝ ∞ մինչև $+\infty$ միջակայքում հավասար է 1-ի.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$$

Մասնավորաբար, եթե պատահական մեծության ըուլոր հնարավոր արժեքները պատկանում են (a, b) միջակայքին, ապա

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

262. Տրված է անընդհատ X պատահական մեծության բաշխման ինտեգրալ ֆունկցիան.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{հրա} \quad x \leq 0, \\ \sin x, & \text{հրա} \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{հրա} \quad x > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

Գտնել $f(x)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան:

Լուծում: Դիֆերենցիալ ֆունկցիան հավասար է ինտեգրալ ֆունկցիայի առաջին ածանցյալին.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{հրա} \quad x < 0, \\ \cos x, & \text{հրա} \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{հրա} \quad x > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

Նկատենք, որ $x=0$ դեպքում $F'(x)$ ածանցյալը դուրս չտնիւ:

263. Տրված է անընդհատ X պատահական մեծության ինտեգրալ ֆունկցիան.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{հրա} \quad x \leq 0, \\ \sin 2x, & \text{հրա} \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 1, & \text{հրա} \quad x > \frac{\pi}{4}, \end{cases}$$

Գտնել $f(x)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան:

$$\text{Պատ.՝ } f(x) = 2 \cos 2x \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \text{ միջակայքում. այդ միջակայքից} \\ \text{դուրս } f(x) = 0.$$

264. Անընդհատ X պատահական մեծությունը տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիով՝ $f(x) = \frac{2}{3} \sin 3x \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ միջակայքում. այդ միջակայքից դուրս $f(x) = 0$. Գտնել հավանականությունը, որ X -ը կընդունի $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ միջակայքին պատկանող արժեք:

Դուժում: Օգտվենք հետևյալ բանաձևից.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx,$$

Հստ պայմանի $a = \frac{\pi}{6}$, $b = \frac{\pi}{4}$, $f(x) = \frac{2}{3} \sin 3x$. Հետեւ գաբար, որոնելի հավանականությունը՝

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3} \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin 3x dx = \frac{\sqrt{2}}{9}$$

(բաց թողնված հաշվումները թողնվում են ընթերցողին):

265. Անընդհատ պատահական մեծությունը $(0, \infty)$ միջակայքում տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիով՝

$$f(x) = ae^{-\alpha x} (\alpha > 0),$$

այդ միջակայքից դուրս $f(x) = 0$. Գտնել հավանականությունը, որ X -ը կընդունի $(1, 2)$ միջակայքին պատկանող արժեք:

$$\text{Պատ.՝ } P(1 < X < 2) = (e^{-\alpha} - 1) / e^{2\alpha},$$

266. Անընդհատ X պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան $(-\pi/2, \pi/2)$ միջակայքում՝ $f(x) = \frac{2}{\pi} \cos^2 x$. այդ միջակայքից դուրս $f(x) = 0$. Գտնել հավանականությունը.

թրունը, որ 3 անկախ փորձերում X-ը ճիշտ 2 անգամ կընդունի $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ միջակալքում ընկած արժեքը:

$$\text{Պատճ. } p = P(0 < X < \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi + 2}{4\pi},$$

$$P_3(2) = C_3^2 \left(\frac{\pi + 2}{4\pi}\right)^2 \cdot \frac{3\pi - 2}{4\pi},$$

267. Տրված է անընդհատ X պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & L_{PP} \quad x \leq 0, \\ \cos x, & L_{PL} \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & L_{PL} \quad x > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

Գտնել F(x) ինտեգրալ ֆունկցիան:

Լուծում: Օդապենք հետեւալ բանաձևից.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx,$$

Եթե $x \leq 0$, ապա $f(x) = 0$, հետեւալուր,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 \cdot dx = 0;$$

Եթե $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$, ապա

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^x \cos x dx = \sin x,$$

Եթե $x > \frac{\pi}{2}$, ապա

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^x 0 \cdot dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1,$$

Եղ այսպիս, որոնելի ինտեգրալ ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & b_{pp} \quad x \leq 0, \\ \sin x, & b_{pp} \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & b_{pp} \quad x > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

268. Տրված է անընդհատ X պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & b_{pp} \quad x \leq 0, \\ \sin x, & b_{pp} \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & b_{pp} \quad x > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

Գտնել $F(x)$ ինտեգրալ ֆունկցիան:

$$\text{Պատ. } F(x) = \begin{cases} 0, & b_{pp} \quad x \leq 0, \\ 1 - \cos x, & b_{pp} \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & b_{pp} \quad x > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

269. Տրված է անընդհատ X պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & b_{pp} \quad x \leq 1, \\ x - \frac{1}{2}, & b_{pp} \quad 1 < x \leq 2, \\ 0, & b_{pp} \quad x > 2, \end{cases}$$

Գտնել $F(x)$ ինտեգրալ ֆունկցիան:

$$\text{Պատ. } F(x) = \begin{cases} 0, & b_{pp} \quad x \leq 1, \\ \frac{1}{2}(x^2 - x), & b_{pp} \quad 1 < x \leq 2, \\ 1, & b_{pp} \quad x > 2, \end{cases}$$

270. Տրված է անընդհատ X պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & b_{pp}, \quad x \leq -\frac{\pi}{6}, \\ 3 \sin 3x, & b_{pp}, \quad -\pi/6 < x \leq \pi/3, \\ 0, & b_{pp}, \quad x > \pi/3. \end{cases}$$

Գտնել $F(x)$ ինտեգրալ ֆունկցիան:

$$\text{Պատճ. } F(x) = \begin{cases} 0, & b_{pp}, \quad x \leq -\frac{\pi}{6}, \\ -\cos 3x, & b_{pp}, \quad -\pi/6 < x \leq \pi/3, \\ 1, & b_{pp}, \quad x > \pi/3. \end{cases}$$

271. Անընդհատ X պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան տրված է ամբողջ OX առանցքի վրա հետևյալ հավասարությունով.

$$f(x) = \frac{4c}{e^x + e^{-x}},$$

Գտնել հարատառուն C պարամետրը:

Լուծում: $f(x)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան պետք է լարվարի հետեւալ պարզանին.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1:$$

Պահանջենք, որ այդ պարզանիր կատարվի՝ արված ֆունկցիայի համար.

$$4C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = 1,$$

Այսադեպի,

$$C = \frac{1}{4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}}, \quad (1)$$

Ակզբում գտնենք անորոշ ինտեգրալը.

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = \operatorname{arctg} e^x,$$

Այսուհետև հաշվենք անիսկական ինտեգրալը.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} e^x \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} e^x \Big|_0^b = \end{aligned}$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} [\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} e^a] + \lim_{b \rightarrow \infty} [\operatorname{arctg} e^b - \operatorname{arctg} 1] = \pi/2.$$

Այսպիսով,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{\pi}{2}, \quad (**)$$

Տեղադրելով $(**)$ -ը $(*)$ -ի մեջ, վերջնականապես կստանանք

$$\oint C = \frac{1}{2\pi} i,$$

272. Անընդհատ X պատահական մեծովթյան դիֆերենցիալ ֆունկցիան տրված է ամբողջ Ox առանցքի վրա հետեւյալ հավասարությունով.

$$f(x) = \frac{2C}{1+x^2},$$

Գտնել հաստատուն C պարամետրը:

$$\text{Պատ. } C = \frac{1}{2\pi} i,$$

273. Անընդհատ X պատահական մեծովթյան դիֆերենցիալ ֆունկցիան $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում հավասար է $f(x) = C \sin 2x$. այդ միջակայքից դուրս $f(x) = 0$: Գտնել հաստատուն C պարամետրը:

$$\text{Պատ. } C = 1,$$

$$M(X) = \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{x dx}{\sqrt{c^2 - x^2}},$$

Հաշվի առնելով, որ ենթախտեգրալ ֆունկցիան կենա է և ինտեգրման սահմանները սիմետրիկ են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, եղբակացնում ենք, որ ինտեգրալը հավասար է զրոյի: Հետեւքար,

$$M(X) = 0.$$

Այս արդյունքը կարելի է ստանալ անմիջապես, եթե ի նկատի ունենանք, որ բաշխման կորը սիմետրիկ է $x = 0$ ուղղի նկատմամբ:

278. X պատահական մեծությունը տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով (*Լապլասի բաշխում*):

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|},$$

Գտնել X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը:

$$\text{Պատ.՝ } M(X) = 0,$$

279. X պատահական մեծությունը տրված է $(0, 1)$ միջակայքում դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝ $f(x) = c(x^2 + 2x)$. այդ միջակայքից գուրս $f(x) = 0$: Գտնել. ա) պարամետրը, բ) X մեծության մաթեմատիկական սպասումը:

$$\text{Պատ.՝ } a) c = 3/4, \quad b) M(X) = 11/16,$$

280. Գտնել ինտեգրալ ֆունկցիայով տրված X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } x \leq 0, \\ \frac{x}{4}, & \text{եթե } 0 < x \leq 4, \\ 1, & \text{եթե } x > 4. \end{cases}$$

I. ու ծու մ: Գտնենք Խ-ի դիֆերենցիալ ֆունկցիան:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 < x \leq 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Գտնենք սրոնելի մաթեմատիկական սպասումը:

$$M(X) = \int_0^4 x f(x) dx = \int_0^4 x \frac{1}{4} dx = \left. \frac{x^2}{8} \right|_0^4 = 2,$$

281. X պատահական մեծությունը, որի հնարավոր արժեքները ոչ բացասական են, արված է ինտեգրալ ֆունկցիայով.

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha |x|} \quad (\alpha > 0),$$

Գտնել X մեծության մաթեմատիկական սպասումը:

$$\text{Պատ.՝ } M(X) = \frac{1}{\alpha},$$

282. X պատահական մեծությունը արված է $(0, \pi)$ միջակայքում դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝ $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin x$, այդ միջակայքից դուրս $f(x) = 0$: Գտնել $Y = \varphi(X) = X^2$ ֆունկցիայի մաթեմատիկական սպասումը (նախապես չգտնելով Y -ի դիֆերենցիալ ֆունկցիան):

I. ու ծու մ: Օգտվենք X պատահական արգումենտից, $\varphi(X)$ ֆունկցիայի մաթեմատիկական սպասման հաշվմանը բանաձևից:

$$M[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx,$$

որտեղ a -ն ու b -ն ինտերվալի ծայրակետերն են, ուր ընկած են X-ի հնարավոր արժեքները: Տեղադրելով $\varphi(x) = x^2$,

$f(x) = \frac{1}{2} \sin x$, $a=0$, $b=\pi$ և ինտեգրելով մասերով, վերջնահանապես կստանանք

$$M(X^2) = \frac{1}{2} \int_0^\pi x^2 \cdot \sin x \, dx = \frac{\pi^2 - 4}{2},$$

283. X պատահական մեծությունը արված է $(0, \pi/2)$ միջակայքում դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝ $f(x) = \cos x$. այդ միջակայքից դուրս $f(x) = 0$: Գտնել $Y = \varphi(X) = X^2$ ֆունկցիայի մաթեմատիկական սպասումը (նախապես չգտնելով Y -ի դիֆերենցիալ ֆունկցիան):

$$\text{Պատ.՝ } M(X^2) = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \, dx = \frac{\pi^2 - 8}{4},$$

284. X պատահական մեծությունը արված է $(0, 1)$ միջակայքում դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝ $f(x) = x + 0,5$, այդ միջակայքից դուրս $f(x) = 0$: Գտնել $Y = X^3$ ֆունկցիայի մաթեմատիկական սպասումը (նախապես չգտնելով Y -ի դիֆերենցիալ ֆունկցիան):

$$\text{Պատ.՝ } M(X^3) = 13/40,$$

285. X պատահական մեծությունը արված է $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ միջակայքում դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝ $f(x) = 2 \cos 2x$. այդ միջնակայքից դուրս $f(x) = 0$: Գտնել. ա) յոդանու, բ) X -ի միջնաթիվը (մեզիանը):

Առ ծառայ ա) Հեշտ է համոզվել, որ $f(x) = 2 \cos 2x$ ֆունկցիան $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ միջակայքում չափավոր է, առանձին և X -ը չափավոր:

բ) Գտնենք $M_c(X) = m_c$ միջնաթիվը, օգտվելով միջնաթիվի սահմանումից.

$$P(X < m_c) = P(X > m_c),$$

կամ, որ նույնն է,

$$P(X < m_e) = \frac{1}{2},$$

Հաշվի առնելով, որ ըստ պայմանի X -ի հարավոր արժեքները գրական են, արտագրենք այս հավասարությունը հետևյալ կերպ։

$$P(0 < X < m_e) = \frac{1}{2},$$

կամ

$$2 \int_0^{m_e} \cos 2x dx = \sin 2m_e = \frac{1}{2},$$

Այստեղից

$$2m_e = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6},$$

Հետեւաբար, որոնելի միջնաթիվը

$$m_e = \frac{\pi}{12},$$

286. X պատահական մեծությունը ($2, 4$) միջակայքում տրված է գիֆերենցիալ ֆունկցիայով։

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6.$$

այդ միջակայքից դուքս $f(x) = 0$ ։ Գտնել X մեծության մոդան, մաթեմատիկական սպասումը և միջնաթիվը։

Լուծում։ Դիֆերենցիալ ֆունկցիան ներկայացնենք հետևյալ տեսքով։

$$f(x) = \frac{3}{4}(x - 3)^2 + \frac{3}{4},$$

Այստեղից երկում է, որ $x = 3$ դեպքում գիֆերենցիալ ֆունկցիան հասնում է մաքսիմումի, հետեւաբար, $M_0(X) = 3$ (H արկե, կարելի էր գտնել մաքսիմումը գիֆերենցիալ հաշվի մեթոդներով):

Քանի որ բաշխման կորը սիմետրիկ է՝ $x=3$ ուղղի նկատմամբ, ապա $M(X) = 3$ և $M_c(X) = 3$:

287. X պատահական մեծովթյունը ($3, 5$) միջակալքում տրված է զիֆերենցիալ ֆունկցիայով:

$$f(x) = \frac{3}{4} x^2 + 6x - \frac{45}{4},$$

այդ միջակալքից դուրս $f(x) = 0$: Գտնել X-ի մոդան, մաթեմատիկական սպասումը և միջնաթիվը:

Պատ.՝ $M_0(X) = M(X) = M_c(X) = 4$:

288. X պատահական մեծովթյունը ($-1, 1$) միջակալքում տրված է զիֆերենցիալ ֆունկցիայով:

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}}.$$

այդ միջակալքից դուրս $f(x) = 0$: Գտնել ա) մոդան, բ) X-ի միջնաթիվը:

Պատ.՝ ա) X-ը մոդա չունի (զիֆերենցիալ ֆունկցիան մաքսիմում չունի) բ) $M_c(X) = 0$ (բաշխման կորը սիմետրիկ է $x=0$ ուղղի նկատմամբ):

289. X պատահական մեծովթյունը $x=0$ դեպքում տըրված է զիֆերենցիալ ֆունկցիայով (վելքուլի բաշխում)

$$f(x) = \frac{n}{x_0} x^{n-1} e^{-x^n/x_0},$$

$f(x) = 0$ $x < 0$ դեպքում: Գտնել X-ի մոդան:

$$\text{Պատ. } M_0(X) = \left[\frac{(n-1)x_0}{n} \right]^{1/n},$$

290. Ապացուցել, որ անընդհատ պատահական մեծովթյան մաթեմատիկական սպասումը գտնվում է նրա հնարավոր ամենամեծ և ամենափոքր արժեքների միջև:

Լուծում: Դիցուք X-ը անընդհատ պատահական մեծովթյուն է, որը տրված է $[a, b]$ հասածածում զիֆերենցիալ

Գունկցիալով՝ $f(x)$ - այդ միջակայքից գուրս $f(x) = 0$, Այդ դեպքում

$$a \leq x \leq b:$$

Հաշվի առնելով, որ $f(x) \geq 0$, կստանանք

$$af(x) \leq xf(x) \leq bf(x),$$

Ինտեղրենք այս կրկնակի անհավասարությունը ա-ից մինչև բ սահմաններում

$$a \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b xf(x) dx \leq b \int_a^b f(x) dx,$$

Նկատի ունենալով, որ

$$\int_a^b f(x) dx = 1, \quad \int_a^b xf(x) dx = M(X),$$

գերշնականապես կստանանք

$$a \leq M(X) \leq b:$$

291. Ապացուցել, որ եթե

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [xF(x)] = 0 \text{ և } \lim_{x \rightarrow \infty} [x(1 - F(x))] = 0,$$

ապա

$$M(X) = \int_0^\infty [1 - F(x)] dx = \int_{-\infty}^0 F(x) dx,$$

Յուրաքանչյուր Ռուենք

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_{-\infty}^0 xf(x) dx + \int_0^{\infty} xf(x) dx,$$

Եռավիճ գումարելիում $f(x)$ -ը փոխարինել $F'(x)$ -ով, իսկ երկրորդում՝ $-[1 - F(x)]'$ -ով:

292. X պատահական մեծությունը ($-c, c$) միջակալքում արված է դիֆերենցիալ ֆունկցիալով.

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{c^2 - x^2}},$$

այդ միջակալքից դուրս $f(x) = 0$: Գտնել X-ի դիսպերսիան: Լուծում: Փնտրենք դիսպերսիան հետևյալ բանաձևով

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x) dx,$$

$\text{Տեղադրելով } M(X) = 0 \text{ (բաշխման կորը սիմետրիկ է } x = 0 \text{ ուղղի նկատմամբ), a = -c, b = c, f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{c^2 - x^2}},$

կստանանք

$$D(X) = \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{x^2 dx}{\sqrt{c^2 - x^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^c \frac{x^2 dx}{\sqrt{c^2 - x^2}},$$

$\text{Կատարելով } x = c \sin t \text{ տեղադրումը, վերջնականապես կունենանք.}$

$$D(X) = \frac{c^2}{2},$$

293. X պատահական մեծությունը ($-3, 3$) միջակալքում արված է դիֆերենցիալ ֆունկցիալով.

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{9 - x^2}}.$$

այդ միջակալքից դուրս $f(x) = 0$: ա) գտնել X-ի դիսպերսիան, բ) ի՞նչն է հավանական փորձի արդյունքում կստացվի $X < 1$, թե $X > 1$:

$$\text{Պատ. ա) } D(X) = 4,5. \quad \text{բ) } P(-3 < X < 1) = 5,5 + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{3}.$$

$$P(1 < X < 3) = 0,5 - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{3},$$

294. Ապացուցել, որ անընդհատ X պատահական մեծության գիսպերսիան կարող է հաշվվել հետևյալ բանաձևով.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2;$$

Ցուցում: Օքտվել հետեւյալ բանաձևից.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx$$

և հետեւյալ հավասարություններից

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = M(X), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1,$$

295. X պատահական մեծությունը ($0, \pi$) միջակալքում արգած է զիֆերենցիալ ֆունկցիայով,

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin x,$$

այդ միջակալքից գուրմ $f(x) = 0$: Գտնել X -ի գիսպերսիան:
Լուծում: Գտնենք գիսպերսիան ըստ հետեւյալ բանաձևի.

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - [M(X)]^2;$$

Տեղադրելով այսաեղ $M(X) = \frac{\pi}{2}$ (բաշխման կորը սիմետրիկ է $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ուղղի նկատմամբ), $a = 0$, $b = \pi$, $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$, կսահնանք

$$D(X) = \frac{1}{2} \int_0^\pi x^2 \sin x dx - \left[\frac{\pi}{2} \right]^2, \quad (*)$$

Երկու անդամ ինտեգրելով մասերով, կգտնենք

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \pi^2 - 4; \quad (**)$$

Տեղադրելով $(**)$ -ը $(*)$ -ի մեջ, զերչնականապես կստանանք

$$D(X) = \frac{\pi^2 - 8}{4};$$

296. X պատահական մեծությունը $(0, 5)$ միջակայքում

արված է դիֆերենցիալ ֆունկցիով:

$$f(x) = \frac{2}{25}x$$

այդ միջակայքից դուրս $f(x) = 0$. Գտնել X -ի դիսպերսիան.

$$\text{Պատ. } D(X) = \frac{25}{18};$$

297. Գտնել ինտեգրալ ֆունկցիով արված X պատահական մեծության դիսպերսիան.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, & -2 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2, \end{cases}$$

Լուծում: Գտնենք դիֆերենցիալ ֆունկցիան,

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{1}{4}, & -2 < x < 2, \\ 0, & x > 2, \end{cases}$$

Գտնենք մաթեմատիկական սպասումը.

$$M(X) = \int_{-2}^2 x f(x) dx = \int_{-2}^2 x \cdot \frac{1}{4} dx = 0.$$

(Ինթեփական գրական կինա է, ինտեգրման սահման-

Ները սիմետրիկ են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ):

Գտնենք որոնելի գիսպերսիան, հաշվի առնելով, որ $M(X) = 0$.

$$D(X) = \int_{-2}^2 [x - M(X)]^2 f(x) dx = \int_{-2}^2 x^2 \cdot \frac{1}{4} dx = \\ = \frac{2}{4} \int_0^2 x^2 dx = \frac{4}{3},$$

298. X պատահական մեծությունը տրված է ինտեգրալ ֆունկցիայով.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x_0^3}{x^2}, & \text{եթե } x \geqslant x_0 (x_0 > 0) \\ 0, & \text{եթե } x < x_0 \end{cases}$$

Գտնել X-ի մաթեմատիկական սպասումը, գիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը:

Ցուցում: Նախ գտնել գիֆերենցիալ ֆունկցիան, օգտել հետևյալ բանաձևից.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = [M(X)]^2,$$

$$\text{Պատ. } M(X) = 3x_0/2, \quad D(X) = 3x_0^2/4, \quad \sigma(X) = \sqrt{3}x_0/2,$$

299. X պատահական մեծությունը $(0, \pi)$ միջակալքում տրված է գիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝ $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$. այդ միջակալքից դուրս $f(x) = 0$: Գտնել $Y = \varphi(X) = X^2$ ֆունկցիայի գիսպերսիան, նախապես չգտնելով Y-ի գիֆերենցիալ ֆունկցիան:

Լուծում: Օգտվենք հետևյալ բանաձևից.

$$D(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi^2(x) f(x) dx = [M[\varphi(X)]]^2,$$

$$\text{Տեղադրելով } \varphi(x) = x^2, \quad f(x) = \frac{1}{2} \sin x, \quad a = 0, \quad b = \pi,$$

$$M[\varphi(X)] = M(X^2) = \frac{\pi^2 - 4}{2} \quad (\text{աես խնդիր 282}), \quad \text{կստանանք}$$

$$D(X^2) = \frac{1}{2} \int_0^\pi x^4 \sin x \, dx - \left[\frac{\pi^2 - 4}{2} \right]^2, \quad (*)$$

Ինտեգրելով մասերով, կգտնենք

$$\int_0^\pi x^4 \sin x \, dx = \pi^4 - 12\pi^2 + 48; \quad (**)$$

Տեղադրելով $(**)$ -ը $(*)$ -ի մեջ, զերչնականապես կունենանք.

$$D(X^2) = \frac{\pi^4 - 16\pi^2 + 80}{4};$$

300. X պատահական մեծությունը $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ միշտակալքում արված է զիֆերենցիալ ֆունկցիալով՝ $f(x) = \cos x$. այդ միշտակալքից դուրս $f(x) = 0$: Գտնել $Y = \varphi(X) = X^2$ ֆունկցիայի դիսպերսիան, նախապես չզանելով Y -ի զիֆերենցիալ ֆունկցիան:

Ցուցում: Օգտվել հետեւյալ բանաձևից.

$$D[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi^2(x) f(x) dx - [M[\varphi(X)]]^2$$

$$\text{և այն բանից, որ } M(X^2) = \frac{\pi^2 - 4}{2} \quad (\text{աես խնդիր 283}):$$

$$\text{Պատ. } D(X^2) = 20 - 2\pi^2,$$

301. X պատահական մեծությունը արված է զիֆերենցիալ ֆունկցիալով $x \geq 0$ դեպքում՝ $f(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$; $f(x) = 0$, եթե $x < 0$: Գտնել. ա) մաթեմատիկական սպասումը. բ) X -ի դիսպերսիան:

Լուծում: ա) Գտնենք մաթեմատիկական սպասումը.

$$M(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x \cdot x^n e^{-x} dx = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^{n+1} e^{-x} dx,$$

Օգտվենք այսպես կոչված գամմա ֆունկցիայից, որը որոշվում է հետևյալ հավասարությունով՝

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx: \quad (*)$$

Ինչպես տեսնում ենք արդումենալ (Ո ամբողջ թիվը), որը գտնվում է գամմա ֆունկցիայի նշանի տակ, $1-n$ մեծ է ինտեգրալի նշանի տակ գտնվող x -ի ցուցչից: Հետեւաբար,

$$\int_0^{\infty} x^{n+1} e^{-x} dx = \Gamma(n+2): \quad (**)$$

Տեղադրելով $(**)$ -ը $(*)$ -ի մեջ, կստանանք

$$M(X) = \frac{\Gamma(n+2)}{n!}, \quad (***)$$

Օգտվենք գամմա ֆունկցիայի հետևյալ հատկությունից:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Ինչպես տեսնում ենք, գամմա ֆունկցիան ամբողջ արդումենալի գելքում հավասար է արդումենալից մեկով պակաս թվի ֆակտորիալին: Հետեւաբար,

$$\Gamma(n+2) = (n+1)! \quad (****)$$

Տեղադրելով $(****)$ -ը $(***)$ -ի մեջ, կստանանք

$$M(X) = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{n!} = n + 1,$$

բ) Գտնենք դիսպերսիան, հաշվի առնելով որ,

$$M(X) = n + 1, \int_0^{\infty} x^{n+2} e^{-x} dx = \Gamma(n+3),$$

կատանակը

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^2 \cdot x^n e^{-x} dx = \\ &= (n+1)^2 = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^{n+2} e^{-x} dx = (n+1)^2 = \frac{\Gamma(n+3)}{n!} = \\ &= (n+1)^2 = \frac{(n+2)!}{n!} = (n+1)^2 = \frac{n!(n+1)(n+2)}{n!} = \\ &= (n+1)^2 = n+1, \end{aligned}$$

Եթե այսպիս, $D(X) = n + 1$:

302. *X պատահական մեծոթյունը $x \geq 0$ գեղքոմ աղբամած է զիֆերենցիալ ֆունկցիալով (դամմա բաշխում)*

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{z+1}\Gamma(z+1)} x^z e^{-x/\beta} \quad (z > -1, \beta > 0)$$

f(x) = 0, $x < 0$ գեղքոմ: Գոնել, ա) մաթեմատիկական ապահովել բ) X -ի գիտակիրսիան:

Ցուցում: ա) $M(X) = (z+1)\beta$, բ) $D(X) = (z+1)\beta^2$

303. *Ազացոցել, որ ցանկացած անլինգատա պատահական մեծոթյան առաջին կարգի կինարանական մոմենտը հավասար է զրով*

Փունկցիալով՝ $f(x)$. այդ միջակայքից դուրս $f(x) = 0$. Այդ գեղըում

$$a \leq x \leq b:$$

Հաշվի առնելով, որ $f(x) \geq 0$, կտանանք

$$af(x) \leq xf(x) \leq bf(x):$$

Ինտեգրենք այս կրկնակի անհավասարությունը այց մինչև Յահաններում

$$a \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b xf(x) dx \leq b \int_a^b f(x) dx,$$

Նկատի ունենալով, որ

$$\int_a^b f(x) dx = 1, \quad \int_a^b xf(x) dx = M(X),$$

վերջնականապես կտանանք

$$a \leq M(X) \leq b:$$

291. Ապացուցել, որ եթե

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [xF(x)] = 0 \text{ և } \lim_{x \rightarrow \infty} [x(1 - F(x))] = 0,$$

ապա

$$M(X) = \int_0^\infty [1 - F(x)] dx = \int_{-\infty}^0 F(x) dx,$$

Ցուցում. Ունենք

$$M(X) = \int_{-\infty}^\infty xf(x) dx = \int_{-\infty}^0 xf(x) dx + \int_0^\infty xf(x) dx,$$

Առաջին գումարելում $f(x) - 0$ փոխարինել $F'(x) - ով,$ իսկ երկրորդում՝ $-[1 - F(x)]' - ով:$

292. X պատահական մեծությունը ($-c, c$) միջակալքում արված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով.

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{c^2 - x^2}},$$

այդ միջակալքից դուրս $f(x) = 0$: Գտնել X-ի դիսպերսիան: Առ այս մեջ Փնտրենք դիսպերսիան հետևյալ բանաձևով

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x) dx,$$

$S_{\text{եղագրելով}} M(X) = 0$ (բաշխման կորը սիմետրիկ է $x = 0$ ուղղի նկատմամբ), $a = -c$, $b = c$, $f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{c^2 - x^2}}$,

կստանանք

$$D(X) = \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{x^2 dx}{\sqrt{c^2 - x^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^c \frac{x^2 dx}{\sqrt{c^2 - x^2}},$$

Կատարելով $x = c \sin t$ տեղագրումը, վերջնականապես կռւնենանք.

$$D(X) = \frac{c^2}{2},$$

293. X պատահական մեծությունը ($-3, 3$) միջակալքում արված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով:

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{9 - x^2}}.$$

այդ միջակալքից դուրս $f(x) = 0$: ա) գտնել X-ի դիսպերսիան, բ) ի՞նչն է հավանական փորձի արդյունքում կստացվի $X < 1$, թե $X > 1$:

$$\text{այսուհետև:} \quad \text{ա)} \quad D(X) = 4,5. \quad \text{բ)} \quad P(-3 < X < 1) = 5,5 + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{3},$$

$$P(1 < X < 3) = 0,5 - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{3},$$

294. Ապացուցել, որ անընդհատ X պատահական մեծության դիսպերսիան կարող է հաշվել հետևյալ բանաձևով.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2,$$

Յուրաքանչյուր օգտվել հետևյալ բանաձևից.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx$$

և հետևյալ հավասարություններից

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = M(X), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$$

295. X պատահական մեծությունը ($0, \pi$) միջակալքում տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով,

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin x,$$

այդ միջակալքից դուրս $f(x) = 0$: Գտնել X -ի դիսպերսիան: Լուծում: Գտնենք դիսպերսիան ըստ հետևյալ բանաձևի:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - [M(X)]^2:$$

Տեղադրելով ախտել $M(X) = \frac{\pi}{2}$ (բաշխման կորը սիմետրիկ է և $x = \frac{\pi}{2}$ ուղղի նկատմամբ), $a = 0$, $b = \pi$, $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$, կստանանք

$$D(X) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx - \left[\frac{\pi}{2} \right]^2, \quad (*)$$

Երկու անգամ ինտեգրելով՝ մասերով, կդանենք

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \pi^2 - 4; \quad (**)$$

Տեղադրելով $(**)$ -ը $(*)$ -ի մեջ, վերջնականապես կստանանք

$$D(X) = \frac{\pi^2 - 8}{4};$$

296. X պատահական մեծությունը $(0, 5)$ միջակալքում արված է դիֆերենցիալ ֆունկցիոնով:

$$f(x) = \frac{2}{25}x$$

այդ միջակալքից դուրս $f(x) = 0$: Գտնել X -ի դիսպերսիան.

$$\text{Պատ.՝ } D(X) = \frac{25}{18};$$

297. Գտնել ինտեգրալ ֆունկցիոնով արված X պատահական մեծության դիսպերսիան.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, & -2 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2, \end{cases}$$

Լուծում: Գտնենք դիֆերենցիալ ֆունկցիան,

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{1}{4}, & -2 < x < 2, \\ 0, & x > 2, \end{cases}$$

Գտնենք մաթեմատիկական սպասումը:

$$M(X) = \int_{-2}^2 x f(x) dx = \int_{-2}^2 x \cdot \frac{1}{4} dx = 0.$$

(Ինթերակտիվ ֆունկցիան կենտ է, ինտեգրման սահմանը՝

Ները սիմետրիկ են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ):

Գտնենք որոնելի գիսպերսիան, հաշվի առնելով, որ $M(X) = 0$.

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-2}^2 [x - M(X)]^2 f(x) dx = \int_{-2}^2 x^2 \cdot \frac{1}{4} dx = \\ &= \frac{2}{4} \int_0^2 x^2 dx = \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

298. X պատահական մեծությունը տրված է ինտեգրալ ֆունկցիայով.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x_0^3}{x^2}, & \text{եթե } x \geqslant x_0 (x_0 > 0) \\ 0, & \text{եթե } x < x_0 \end{cases}$$

Գտնել X-ի մաթեմատիկական սպասումը, գիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը:

Ցուցում: Նախ գտնել գիֆերենցիալ ֆունկցիան, օգտվել հետևյալ բանաձևից.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = [M(X)]^2,$$

$$\text{Պատ. } M(X) = 3x_0/2, \quad D(X) = 3x_0^2/4, \quad \sigma(X) = \sqrt{3}x_0/2,$$

299. X պատահական մեծությունը $(0, \pi)$ միջակալքում տրված է գիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝ $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$. այդ միջակալքից դուրս $f(x) = 0$: Գտնել $Y = \varphi(X) = X^2$ ֆունկցիայի գիսպերսիան, նախապես չգտնելով Y -ի գիֆերենցիալ ֆունկցիան:

Լուծում: Օգտվենք հետևյալ բանաձևից.

$$D(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi^2(x) f(x) dx = [M[\varphi(X)]]^2,$$

$$\text{Տեղադրելով } \varphi(x) = x^2, \quad f(x) = \frac{1}{2} \sin x, \quad a = 0, \quad b = \pi, \\ M[\varphi(X)] = M(X^2) = \frac{\pi^2 - 4}{2} \quad (\text{այս խնդիրը 282}), \quad \text{կստանանք}$$

$$D(X^2) = \frac{1}{2} \int_0^\pi x^4 \sin x \, dx - \left[\frac{\pi^2 - 4}{2} \right]^2; \quad (*)$$

Ինտեգրելով՝ մասերով, կդառնենք

$$\int_0^\pi x^4 \sin x \, dx = \pi^4 - 12\pi^2 + 48; \quad (**)$$

Տեղադրելով $(**)$ -ը $(*)$ -ի մեջ, վերջնականապես կունենանք.

$$D(X^2) = \frac{\pi^4 - 16\pi^2 + 80}{4};$$

300. X պատահական մեծոթյունը $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ միջակալքում արված է զիֆերենցիալ ֆունկցիալով՝ $f(x) = \cos x$. այդ միջակալքից գուրս $f(x) = 0$, Գտնել $Y = \varphi(X) = X^2$ ֆունկցիայի դիսպերսիան, նախապես չգտնելով Y -ի զիֆերենցիալ ֆունկցիան:

Ցուցում. Օգտվել հետեւյալ բանաձևից.

$$D[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi^2(x) f(x) dx - [M[\varphi(X)]]^2$$

և այն բանից, որ $M(X^2) = \frac{\pi^2 - 8}{4}$ (այս խնդիրը 283),

$$\text{Պատ. } D(X^2) = 20 - 2\pi^2,$$

301. X պատահական մեծոթյունը արված է զիֆերենցիալ ֆունկցիալով՝ $x \geq 0$ դեպքում՝ $f(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$; $f(x) = 0$, եթե $x < 0$; Գտնել. ա) մաթեմատիկական սպասմանը. բ) X -ի դիսպերսիան:

Լուծում: ա) Գտնենք մաթեմատիկական սպասումը.

$$M(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x \cdot x^n e^{-x} dx = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^{n+1} e^{-x} dx,$$

Օգտվենք այսպես կոչված գամմա ֆունկցիայից, որը որոշվում է հետևյալ հավասարությունով:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx; \quad (*)$$

Ինչպես տեսնում ենք արգումենտը (ու ամբողջ թիվը), որը գտնվում է գամմա ֆունկցիայի նշանի տակ, $1-n$ մեծ է ինտեգրալի նշանի տակ գտնվող x -ի ցուցչից: Հետևաբար,

$$\int_0^{\infty} x^{n+1} e^{-x} dx = \Gamma(n+2); \quad (**)$$

Տեղադրելով $(**)$ -ը $(*)$ -ի մեջ, կստանանք

$$M(X) = \frac{\Gamma(n+2)}{n!}, \quad (***)$$

Օգտվենք գամմա ֆունկցիայի հետևյալ հատկությունից:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Ինչպես տեսնում ենք, գամմա ֆունկցիան ամբողջ արգումենտի գեղքում հավասար է արգումենտից մեկով պակաս թվի ֆակտորիալին: Հետևաբար,

$$\Gamma(n+2) = (n+1)! \quad (****)$$

Տեղադրելով $(****)$ -ը $(***)$ -ի մեջ, կստանանք

$$M(X) = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{n!} = n + 1;$$

բ) Գտնենք դիսպերսիան, հաշվի առնելով ու,

$$M(X) = n + 1, \int_0^{\infty} x^{n+2} e^{-x} dx = \Gamma(n+3),$$

Կատանակք

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^2 \cdot x^n e^{-x} dx = \\ &= (n+1)^2 = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^{n+2} e^{-x} dx = (n+1)^2 = \frac{\Gamma(n+3)}{n!} = \\ &= (n+1)^2 = \frac{(n+2)!}{n!} = (n+1)^2 = \frac{n!(n+1)(n+2)}{n!} = \\ &= (n+1)^2 = n+1, \end{aligned}$$

Եթե այսպիս, $D(X) = n + 1$:

302. X պատահական մեծոթյունը $x \geq 0$ գեպքամ ալիքած է զիֆերենցիալ ֆոնկցիալով (գամմա բաշխում)

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{z+1}\Gamma(z+1)} x^z e^{-x/\beta} \quad (z > -1, \beta > 0)$$

$f(x) = 0, x < 0$ գեպքամ Գանել. այս մաթեմատիկական սպասամբը μ) X-ի գիտակերպություն:

Յուրաքանչյուր կառարել է $y = \frac{x}{\beta}$ անդաղբամբը և օգովել գամմա

ֆոնկցիայից:

$$\text{Պատ.} \quad a) M(X) = (z+1)\beta, \quad b) D(X) = (z+1)\beta^2,$$

303. Ապացուցել, որ ցանկացած անընդհատ պատահական մեծոթյան սուազին կարդի կենարունական մոմենտը հավասար է զբովին

Լուծում: Առաջին կարգի կենտրոնական մոմենտի սահմանման համաձայն.

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)] f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx - \\ - M(X) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx:$$

Հաշվի առնելով, որ

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = M(X) \text{ և } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1,$$

կստանանք

$$\mu_1 = M(X) - M(X) = 0:$$

304. Ապացուցել, որ երկրորդ կարգի սովորական մոմենտը՝

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^2 f(x) dx ,$$

ունի ամենափոքր արժեկը, եթե $c = M(X)$:

Լուծում: Զետվոխենք քաշը հետևյալ կերպում

$$\mu_2' = \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [(x - M(X)) + (M(X) - \\ - c)]^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx + 2(M(X) - \\ - c) \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)] f(x) dx + [M(X) - c]^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

Նկատի ունենալով հետևյալ հավասարությունները.

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)] f(x) dx = \mu_1 = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx = \mu_2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1,$$

Կստանանք

$$\mu_2 = \mu_2 + [M(X) - c]^2, \quad (*)$$

Այստեղից երևում է, որ μ_2 -ն անի ամենափոքր արժեքը $c = M(X)$ գեպօւմ, ինչ որ պահանջվում էր սպացուցել:

Նկատենք, որ (*)-ից հետևում է, որ $\mu_2 = \mu_2 - [M(X) - c]^2$, այսինքն՝ երկրորդ կարգի կենարունական մոմենտը փոքր է ցանկացած երկրորդ կարգի սովորական մոմենտից, եթե $c \neq M(X)$:

305. X պատահական մեծոթյունը արված է (0, 2) միշտակալքում գիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝ $f(x) = 0,5x$. այդ միշտակալքից գտնրս $\bar{f}(x) = 0$: Գտնել առաջին, երկրորդ, երրորդ և չորրորդ կարգի սկզբնական և կենարունական մոմենտները:

Լուծում: Բառ

$$\nu_k = \int_0^2 x^k f(x) dx$$

բանաձեի, գտնենք սկզբնական մոմենտները:

$$\nu_1 = \int_0^2 x \cdot (0,5x) dx = \frac{4}{3}, \quad \nu_2 = \int_0^2 x^2 \cdot (0,5x) dx = 2,$$

$$\nu_3 = \int_0^2 x^3 \cdot (0,5x) dx = 3,2, \quad \nu_4 = \int_0^2 x^4 \cdot (0,5x) dx = \frac{16}{3},$$

Գտնենք կենարունական մոմենտները: Ցանկացած պատահական մեծոթյուն առաջին կարգի կենարունական մոմենտը՝ $\nu_1 = 0$:

Օգտավենք կենտրոնական մոմենտները սկզբնականներով արատահայտող բանաձևերից:

$$\begin{aligned} \nu_2 &= v_2 - v_1^2, \quad \nu_3 = v_3 - 3v_1 v_2 + 2v_1^3, \quad \nu_4 = v_4 - 4v_1 v_3 + \\ &+ 6v_1^2 v_2 - 3v_1^4; \end{aligned}$$

Տեղադրելով այս բանաձևերում սկզբնական մոմենտների նախօրոք գտնված արժեքները, կստանանք

$$\nu_2 = 2/9, \quad \nu_3 = -8/135, \quad \nu_4 = 16/135;$$

306. X պատահական մեծությունը ($0, 1$) միջակայքում տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝ $f(x) = 2x$. այդ միջակայքից դուրս $f(x) = 0$: Գտնել առաջին, երկրորդ, երրորդ և չորրորդ կարգի սկզբնական և կենտրոնական մոմենտները:

$$\text{Պատ. } v_1 = 2/3, \quad v_2 = \frac{1}{2}, \quad v_3 = 2/5, \quad v_4 = 1/3, \quad \mu_1 = 0, \mu_2 = 1/18,$$

$$\mu_3 = -1/135, \quad \mu_4 = 1/135;$$

§ 4. Հավասարաչափ բաշխում

Հավասարաչափ է կոչվում անընդհատ X պատահական մեծության հավանականությունների այն բաշխումը, եթե (a, b) միջակայքում, որին պատկանում են X-ի բոլոր հսարակոր արժեքները, դիֆերենցիալ ֆունկցիան պահպանում է հաստատուն արժեք, այն է՝ $f(x) = \frac{1}{b-a}$, այդ միջակայքից դուրս $f(x) = 0$:

307. Հավասարաչափ բաշխման դիֆերենցիալ ֆունկցիան (a, b) միջակայքում պահպանում է շեշտական հաստատուն արժեք, այդ միջակայքից դուրս $f(x) = 0$: Գտնել հաստատուն և պարամետրի արժեքը:

$$\text{Պատ. } c = \frac{1}{b-a};$$

308.Ամպերմետրի սանդղակի բաժանումի արժեքը հավասար է $0,1\text{A}\cdot\text{m}$: Ցուցմունքը կլորացնում են մինչև մոտակա ամբողջ բաժանումը: Գտնել հավանականությունը, որ

Հաշվարկելիս կլատարվի $0,02\text{-ից}$ գերազանցող սխալ:
 Լուծում: Հաշվարկի կլորացման սխալը կարելի է գիտել որպես X պատահական մեծություն, որը բաշխված է հավասարաչափ երկու հարեան ամբողջ բաժանումների միջև ընկած միջակայքում: Հավասարաչափ բաշխման դիֆերենցիալ ֆունկցիան

$$f(x) = \frac{1}{b-a},$$

որտեղ $(b-a)$ -ն միջակայքի երկարությունն է, որի մեջ ընկած են X -ի հնարավոր արժեքները. այդ միջակայքից դուրս $f(x) = 0$: Դիտարկվող խնդրում միջակայքի երկարությունը, որոնցում ընկած են X -ի հնարավոր արժեքները, հավասար է $0,1\text{-ի}$, ուստի

$$f(x) = \frac{1}{0,1} = 10:$$

Հեշտ է ըմբռնել, որ $հաշվարկի սխալը կգերազանցի 0,02\text{-ը}$, եթե այն ընկած լինի $(0,02, 0,08)$ միջակայքում:
 Բայց բահածին

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx,$$

կուտանանք

$$P(0,02 < X < 0,08) = \int_{0,02}^{0,08} 10 dx = 0,6:$$

309. Զափող գործիքի սանդղուի բաժանումի արժեքը հավասար է $0,2\text{-ի}$ Գործիքի ցացմանքը կլորացնում էն մինչև մոտակա ամբողջ բաժանումը Գտնել հավանականությունը, որ հաշվարկելիս կլատարվի սխալ. ա) $0,04\text{-ից}$ փոքր, բ) $0,05\text{-ից}$ մեծ:

- Պատճենական ա) $P(0 < X < 0,04) + P(0,16 < X < 0,20) = 0,4$,
 բ) $P(0,05 < X < 0,15) = 0,5$

310. Մի քանի երթուղարին ավարտուներ գնում են չվացուցակին խիստ համապատասխան Շարժման միջակար-

քը 5 բովեւ է: Գտնել հավանականությունը, որ կանգառին մոտեցած ուղեորը հերթական ավտոբուսին կսպասի Յ բովածից քիչ:

Պատ.՝ $P(2 < X < 5) = 0,6$:

311. Եկեկորական ժամացույցի բովեացույց ոլաքը լուրաքանչյուր բովեի վերջում տեղափոխվում է թուիչքով: Գտնել հավանականությունը, որ տվյալ ակնթարթին ժամացույցը ցույց կտա ժամանակ, որը տարբեր է ճշգրտից ոչ ավելի, քան 20 վրկ.

Պատ.՝ $P(0 < X < 1/3) = 1/3$:

312. Հավասարաչափ բաշխման օրենքը տրված է դիֆերենցիալ բաշխման $f(x) = \frac{1}{b-a}$ ֆունկցիայով (a, b) միջակայքում, այդ միջակայքից 'դուրս $f(x) = 0$: Գտնել $F(x)$ ինտեգրալ ֆունկցիան:

$$\text{Պատ.՝ } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{եթե } a < x \leq b, \\ 1, & \text{եթե } x > b: \end{cases}$$

313. Գտնել (a, b) միջակայքում հավասարաչափ բաշխմած պատահական X մեծության մաթեմատիկական սպառումը:

Լուծում: Հավասարաչափ բաշխման դիֆերենցիալ ֆունկցիայի գրաֆիկը սկիմետրիկ է $x = \frac{a+b}{2}$ ուղղի նկատմամբ, ուստի $M(X) = \frac{a+b}{2}$:

Եվ այսպես, (a, b) միջակայքում հավասարաչափ բաշխմած պատահական մեծության մաթեմատիկական սպառումը հավասար է միջակայքի ծայրերի կիսագումարին: Հասկանալի է, այդ արդյունքը կարելի է ստանալ ըստ հետևյալ բանաձևի:

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx:$$

314. Գտնել ($2, 8$) միջակալքում հավասարաչափ բաշխված պատահական X մեծության մաթեմատիկական սպառումը:

Պատ.³ $M(X) = 5$

315. Գտնել (a, b) միջակալքում հավասարաչափ բաշխված պատահական X մեծության դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը:

Լուծում: Օգտվենք հետեւյալ բանաձևեց:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) - [M(X)]^2,$$

$$\text{Տեղադրելով } f(x) = \frac{1}{b-a}, M(X) = \frac{a+b}{2} \text{ (աես խնդիր 313)}$$

և կատարելով տարրական հաշվումներ, գերզնականապես կստանանք.

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

Միջին քառակուսային շեղումը հավասար է դիսպերսիայի քառակուսի արմատին:

$$\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}},$$

316. Գտնել ($2, 8$) միջակալքում հավասարաչափ բաշխված X պատահական մեծության դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը:

Պատ.³ $D(X) = 3, \sigma(X) = \sqrt{3},$

317. Հավասարաչափ բաշխված X պատահական մեծությունը արված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով՝ $f(x) = \frac{1}{2\pi}$ ($a-1, a+1$) միջակալքում. այդ միջակալքից գտարս $f(x)=0$: Գտնել X -ի մաթեմատիկական սպառումը և դիսպերսիան:

Պատ.³ $M(X) = a$ (բաշխման էկորը՝ սիմերիկ է՝ $x=a$ ուղղի նկատմամբ). $D(X) = e^2/3,$

318. Շրջանի X տրամագիծը չափված է մոտավորապես, ընդ որում $a \leq X \leq b$: Դիտելով տրամագիծը որպես X պատահական մեծություն՝ հավասարաչափ բաշխված (a, b) միջակայքում, գտնել շրջանի մակերեսի մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան:

Լուծում: 1. Գտնենք շրջանի մակերեսի՝ պատահական $Y = \varphi(X) = \frac{\pi X^2}{4}$ մեծության, մաթեմատիկական սպասումը ըստ հետեւյալ բանաձևի.

$$M[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx:$$

Տեղադրելով $\varphi(x) = \frac{\pi x^2}{4}$, $f(x) = \frac{1}{b-a}$ և կատարելով ինտեգրում, կստանանք

$$M\left[\frac{\pi X^2}{4}\right] = \frac{\pi(b^2 + ab + a^2)}{12},$$

2. Գտնենք շրջանի մակերեսի դիսպերսիան ըստ հետեւյալ բանաձևի:

$$D[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi^2(x) f(x) dx - [M[\varphi(X)]]^2:$$

Տեղադրելով $\varphi(x) = \frac{\pi x^2}{4}$, $f(x) = \frac{1}{b-a}$ և կատարելով ինտեգրումը, կստանանք

$$D\left[\frac{\pi X^2}{4}\right] = \frac{\pi^2}{720} (b-a)^2(4b^2 + 7ab + 4a^2),$$

319. Խորանարդի X կողը չափված է մոտավորապես, ընդ որում $a \leq X \leq b$: Դիտելով խորանարդի կողը որպես պատահական X մեծություն՝ հավասարաչափ բաշխված (a, b)

միջակայքում, գտնել մաթեմատիկական սպասումը և դիմաբրախան խորանարդի ծավալի համար:

$$\text{Պատճ.՝ } M(X^3) = \frac{(b+a)(b^2+a^2)}{4},$$

$$D(X^3) = \frac{b^7-a^7}{7(b-a)} - \left[\frac{(b+a)(b^2+a^2)}{4} \right]^2;$$

320. Պատահական X և Y մեծություններն անկախ են և հավասարաչափ բաշխված. X -ը՝ (a, b) միջակայքում, Y -ը՝ (c, d) միջակայքում: Գտնել արտագրյալի մաթեմատիկական սպասումը:

Ցուցում: Օգտվել 313 խնդրի լուծումից:

$$\text{Պատճ.՝ } M(XY) = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}$$

321. X և Y պատահական մեծություններն անկախ են և հավասարաչափ բաշխված. X -ը՝ (a, b) միջակայքում, Y -ը՝ (c, d) միջակայքում: Գտնել XY արտագրյալի դիսպերսիան:

Լուծում: Օգտվենք հետեւյալ բանաձեից.

$$D(XY) = M[(XY)^2] - [M(XY)]^2 = M(X^2 \cdot Y^2) -$$

$$- [M(XY)]^2;$$

Քանի որ անկախ պատահական մեծությունների արտազըրդալի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է նրանց մաթեմատիկական սպասումների արտագրյալին, ապա

$$D(XY) = M(X^2) \cdot M(Y^2) - [M(X) \cdot M(Y)]^2, \quad (*)$$

Գտնենք $M(X^2)$ -ն ըստ հետեւյալ բանաձեի:

$$M[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx,$$

Տեղապուկով՝ $\varphi(x) = x^2$, $f(x) = \frac{1}{b-a}$ և կատարելով ինտեգրումը,

Կստանանք

$$M(X^2) = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}, \quad (**)$$

Նմանապես կդանինք

$$M(Y^2) = \frac{c^2 + cd + d^2}{3} \quad (***)$$

$$Տեղադրելով M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad M(Y) = \frac{c+d}{2}, \quad ինչպես նաև$$

(***) և (***)-ը (**) մեջ, գերշնականապես կստանանք.

$$D(XY) = \frac{(a^2 + ab + b^2)(c^2 + cd + d^2)}{9} - \frac{(a+b)^2(c+d)^2}{4},$$

§ 5. Նորմալ բաշխում

Նորմալ կոչվում է անընդհատ X պատահական մեծության հավանականությունների բաշխումը, եթե դիֆերենցիալ ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

որտեղ a -ն մաթեմատիկական սպասումն է, σ -ն՝ միջին X քառակուսային շեղումը:

Հավանականությունը, որ X -ը կընդունի (α, β) միջակայքին պատճենող արժեքը

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

$$\text{որտեղ } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \text{ լազլասի ֆունկցիան է:}$$

Հավանականությունը, որ շեղման բացարձակ արժեքը փոքր է դժական ծից.

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

Եսանավորապես, $a = 0$ դեպքում ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը..

$$P(|X| < \delta) = 2 \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

Նորմալ բաշխման ասխմեորիան (անհամաչափությունը), եքսցեպտ (զառիթափությունը), մողան և միջնարիվը համապատասխանաբար հավասար են:

$$A_s = 0, \quad E_k = 0, \quad M_0 = a, \quad M_c = a,$$

$$\text{որտեղ } a = M(X),$$

322. Նորմալ բաշխված անընդհատ X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը՝ $a=3$ և միջին քառակուսային շեղումը՝ $\sigma=2$: Գտնել X -ի դիֆերենցիալ ֆունկցիան:

$$\text{Պատ.՝ } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{8}},$$

323. Գտնել նորմալ բաշխված X պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան, դիտենալով, որ $M(X)=3$, $D(X)=16$:

$$\text{Պատ.՝ } f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{32}},$$

324. Նորմալ բաշխված X պատահական մեծությանը արված է դիֆերենցիալ ֆունկցիան:

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{50}},$$

Գտնել X -ի մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան:

$$\text{Պատ.՝ } M(X)=1, \quad D(X)=25,$$

325. Տրված է նորմալվորված նորմալ բաշխման ինտեգրալ ֆունկցիան.

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

Գտնել $f(x)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան:

$$\text{Պատ. } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

326. Աղացուցել, որ նորմալ բաշխման դիֆերենցիալ ֆունկցիայի և օպարամետրերը հանդիսանում են համապատասխանաբար X -ի մաթեմատիկական սպասումը և միջին քառակուսային շեղումը:

Ցուցում: $M(X) = D(X)$ և $\Phi(x) = \frac{x - a}{\sigma}$ և օգտագործել Պուասոնի ինտերպալը՝ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^{2/2}} dz = \sqrt{2\pi}$:

$$\text{Պուասուցել, որ } L\omega\eta\omega\eta$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^{2/2}} dz$$

ֆունկցիան կենտ է:

$$\Phi(-x) = -\Phi(x):$$

Ցուցում:

$$\Phi(-z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-x} e^{-z^{2/2}} dz.$$

Հավասարությունում տեղադրել $z = -t$:

328. Նորմալ բաշխված պատահական X մեծության մաթեմատիկական սպասումը և միջին քառակուսային շեղումը

Համապատասխանաբար հավասար են 10-ի և 2-ի: Գանել հավանականությունը, որ փորձի արդյունքում Խ-ը կընդունի (12, 14) միջակալքում ընկած արժեքը:

Լուծում: Օգտվենք հետեւյալ բանաձևից:

$$P(z < X < z) = \Phi\left(\frac{z-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\bar{x}}{\sigma}\right);$$

Տեղադրելով $\bar{x} = 12$, $\bar{z} = 14$, $a = 10$ և $\sigma = 2$, կստանանք

$$P(12 < X < 14) = \Phi(2) - \Phi(1);$$

Աղյուսակից (աես հավելված 2) գտնում ենք.

$$\Phi(2) = 0,4772, \quad \Phi(1) = 0,3413;$$

Որոնելի հավանականությունը

$$P(12 < X < 14) = 0,1359;$$

329. Նորմալ բաշխված X պատճական մեծության մաթիմատիկական սպասամբը և միջին քառակուսային շեղամը համապատասխանաբար հավասար են 20-ի և 5-ի: Գանել հավանականությունը, որ փորձի հետևանքով Խ-ը կընդունի (15, 25) միջակալքում ընկած արժեք:

$$\text{Պատ.} \quad P(15 < X < 25) = 0,6826$$

320. Ավտոմագը զրոշմում է զետալները գերահակված է գետալների X երկարաթյունը, որը բաշխված է նորմալ 50 մմ-ի հավասար մաթիմատիկական սպասամբով (նախադաշտային երկարաթյունը): Պատրասաված զետալների փառացի երկարաթյունը քիչ է 32 մմ-ից և շատ չէ 68 մմ-ից: Գանել հայտնականությունը, որ սպասահական վերցրած զետալի երկարաթյունը: ա) մեծ է 55 մմ-ից, բ) փոքր է 40 մմ-ից:

Պատ. ա) $P(32 < X < 68) = 1 - հավասարությունից նախապես գտնել շ-ն:$

$$\begin{aligned} \text{Պատ.} \quad \text{ա)} \quad P(55 < X < 68) &= 0,0823, \quad \text{բ)} \quad P(32 < X < 40) \\ &= 0,0027. \end{aligned}$$

331. Կատարվում են լիսեռի տրամագծի չափումներ առանց սխատեմատիկ (միկրոյն նշանի) սխալների: Զափումների X պատահական սխալներն ենթարկվում են նորմալ օրենքին $\sigma = 10$ մմ միջին քառակուսային շեղումով: Գտնել հավանականությունը, որ չափումը կկատարվի բացարձակ մեծությամբ 15 մմ-ը չգերազանցող սխալով:

Լուծում: Պատահական սխալների մաթեմատիկական սպասումը հավասար է 0 -ի, ուստի կիրառելի է հետևյալ բանաձևը.

$$P(|X| < \delta) = 2 \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

$S_{\text{Եղադրելով}} \delta = 15, \sigma = 10, \text{կամ} \delta/\sigma$

$$P(|X| < 15) = 2 \Phi(1,5):$$

Աղյուսակից ($\text{հավելված } 2$) գտնում ենք $\Phi(1,5) = 0,4332$: Որոնելի հավանականությունը

$$P(|X| < 15) = 2 \cdot 0,4332 = 0,8664:$$

332. Կատարվում է ինչոր նյութի կշռում առանց սխատեմատիկ սխալների: Կշռելու պատահական սխալները ենթարկվում են նորմալ բաշխման $\sigma = 20$ գ. միջին քառակուսային շեղումով: Գտնել հավանականությունը, որ կշռումը կկատարվի բացարձակ մեծությամբ 10 գ-ը չգերազանցող սխալով:

Պատ.՝ $P(|X| < 10) = 2\Phi(0,5) = 0,383:$

333. Զափումների պատահական սխալներն ենթարկվում են նորմալ օրենքին $\sigma = 20$ մմ միջին քառակուսային շեղումով և $a = 0$ մաթեմատիկական սպասումով: Գտնել հավանականությունը, որ 3 անկախ չափումներից գոնե մեկի սխալը բացարձակ մեծությամբ ≥ 4 մմ-ը

Պատ.՝ $P \approx 0,41:$

334. Ավտոմատը պատրագառամ է գնդիկների գնդիկը համարվում է պիտանի, եթե նրա տրամագծի X շեղումը նախագծված չափից բացարձակ արժեքով փոքր է $0,7$ մմ-ից: Համարելով, որ պատահական X մեծությունը բաշխված է նորմալ $\sigma = 0,4$ մմ միջին քառակուսային շեղումով, գտնել ինչքա՞ն կլինի պիտանի գնդիկների թիվը 100 պատրաստվածների մեջ:

Լուծում: Քանի որ X -ը նախագծված չափից գնդի տրամագծի շեղումն է, ապա $M(X) = a = 0$:

Օգտվենք հետևյալ բանաձեկից

$$P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

Տեղադրելով $\delta = 0,7$, $\sigma = 0,4$, կստանանք

$$P(|X| < 0,7) = 2\Phi\left(\frac{0,7}{0,4}\right) = 2\Phi(1,75) =$$

$$= 2,0,4599 = 0,92:$$

Այսպիսով, $0,7$ մմ-ից քիչ շեղման հավանականաթյանը հավասար է $0,92$ -ի: Այսական հասեամ է, որ 100 զբացիկից մոտ 92 -ը կլինեն պիտանի:

335. Ավտոմատի պատրաստած գետալը համարվում է պիտանի, եթե նրա վերահսկվող չափի շեղումը նախագըտվածից չի գերազանցած 10 մմ-ը: Վերահսկվող չափի պատահական շեղումները նախագծվածից ենթարկված են նորմալ բաշխման $\sigma = 5$ մմ միջին քառակուսային շեղումով: Եթե $a = 0$ մաթեմատիկական սպասամոլի Քանի՛ տակոս պիտանի գետալներ է պատրաստամ ավտոմատը:

Պատճենական մուտ 98%:

336. 30 մ երկարաթիւմը և 8 մ լայնութիւմը կամարչի երկանքով թուշող ոմբակածիչը սումբեր է զցամ: Պատահական X և Y մեծությունները (կամարչի սիմեորիդայի 183

ուղղաձիգ և հորիզոնական պուանցքների հեռավորությունները ուսումբի ընկնելու տեղից) անկախ են և նորմալ բաշխված համապատասխանաբար 6-ի և 4 մ-ի հավասար միջին քառակուսային շեղումներով և զրոյի հավասար մաթեմատիկական սպասումներով: Գտնել. ա) գցված մեկ ուսումբի կամուրջին դիպչելու հավանականությունը, բ) կամուրջի քանդվելու հավանականությունը, եթե գցված են երկու ուսումբ, ընդուրում հայտնի է, որ կամուրջը քանդվելու համար բավական է մեկ դիպում:

$$\text{Պատ. ա) } P(|X| < 15) \cdot P(|Y| < 4) = 2\Phi(2,5) \cdot 2\Phi(1) = 0,6741,$$

$$\text{բ) } P = 1 - (1 - 0,6741)^2 = 0,8938.$$

337. X պատահական մեծությունը բաշխված է նորմալ $a=10$ մաթեմատիկական սպասումով: X -ի $(10, 20)$ միջակայքն ընկնելու հավանականությունը հավասար է $0,3$ -ի: Ինչի՞ է հավասար X -ի $(0, 10)$ միջակայքն ընկնելու հավանականությունը:

Լուծում: Քանի որ նորմալ կորը սիմետրիկ է $X=a=10$ ողղի նկատմամբ, ապա վերևից նորմալ կորով ու ներքեից $(0, 10)$ և $(10, 20)$ միջակայքերով սահմանափակված մակերեսները հավասար են իրար: Քանի որ այդ մակերեսները թվապես հավասար են X -ի համապատասխան միջակայքերն ընկնելու հավանականություններին, ապա

$$P(0 < X < 10) = P(10 < X < 20) = 0,3:$$

338. X պատահական մեծությունը բաշխված է նորմալ $a=25$ մաթեմատիկական սպասումով: X -ի $(10, 15)$ միջակայքն ընկնելու հավանականությունը հավասար է $0,2$ -ի: Ինչի՞ է հավասար X -ի $(35, 40)$ միջակայքն ընկնելու հավանականությունը:

$$\text{Պատ. } P(35 < X < 40) = P(10 < X < 15) = 0,2:$$

339. Ապացուցել, որ

$$P(|X - a| < \sigma t) = 2\Phi(t),$$

այսինքն, որ տրված է-ի համար Լապլասի ֆունկցիայի կրկնառ պատիկի արժեքը որոշում է հավանականությունը, որ նորմալ բաշխված պատահական X մեծության $X - a$ շեղումը բաշարձակ արժեքով փոքր կլինի օւից:

$$\text{Ցուցում: } O\text{պալել } P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \text{ բանագեցից, անդադրելով } \frac{\delta}{\sigma} = t:$$

340. Արտածել «Յշի կանոնը». Հավանականությունը, որ նորմալ բաշխված պատահական մեծության շեղման բաշարձակ արժեքը կլինի փոքր միջին քառակտային շեղման հռապատիկից, հավասար է $0,9973$ -ի:

Ցուցում: $O\text{պավել } 339$ խնդրի լուծումից, անդադրելով $t=3$:

341. X պատահական մեծությունը բաշխված է նորմալ $a=10$ մաթեմատիկական սպասումով և $\sigma=5$ միջին քառակտային շեղումով: Գտնել այն միջակայքը, որի մեջ $0,9973$ հավանականությամբ կընկնի X -ը փորձի հետեանքով:

$$\text{Պատ. } (a - 3\sigma, a + 3\sigma) = (-5, 25):$$

342. X պատահական մեծությունը բաշխված է նորմալ $\sigma=5$ միջին քառակտային շեղումով: Գտնել այն միջակայքի երկարությունը, որի մեջ $0,9973$ հավանականությամբ կընկնի X -ը փորձի հետեանքով:

$$\text{Պատ. } 6\sigma=30 \text{ մմ.}$$

343. Ավագոմատ հաստոցը պատրաստում է լիսեսիկներ, ընդ որում ստագվում է նրանց X արամագիծը: Համարելով, որ X -ը նորմալ բաշխված պատահական մեծություն է, $a=10$ մմ մաթեմատիկական սպասումով և $\sigma=0,1$ մմ միջին քառակտային շեղումով, գտնել այն միջակայքը, որ-

տեղ 0,9973 հավանականությամբ կդանվեն պատրաստված լիսեռիկների տրամագծերը:

Պատ.՝ (9,7; 10,3)

344. Նորմալ բաշխված X պատահական մեծությունը տրված է դիֆերենցիալ ֆունկցիայով.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

Գտնել X -ի մոդան և միջնաթիվը:

Լուծում: $M_0(X)$ մոդա կոչվում է X -ի այն հնարավոր արժեքը, որի դեպքում դիֆերենցիալ ֆունկցիան ունի մաքս սիմում: Հեշտ է համոզվել, որ $x=a$ դեպքում $f'(x)=0$. $x < a$ դեպքում $f'(x) > 0$, $x > a$ դեպքում $f'(x) < 0$. այս պիսով, $x=a$ կետը մաքսիմումի կետն է, հետևաբար, $M_0(X)=a$:

Մե(X) միջնաթիվը է կոչվում X -ի այն հնարավոր արժեքը, որի դեպքում $f(x)$ օրդինատը կիսում է բաշխման կորով սահմանափակված մակերեսը: Քանի որ նորմալ կորը $\{f(x) | \text{ֆունկցիայի գրաֆիկը}\}$ սիմետրիկ է $x=a$ ուղղի նկատմամբ, ապա $f(a)$ օրդինատը կիսում է նորմալ կորով սահմանափակված մակերեսը: Հետեւաբար,

$$M_e(X)=a:$$

Եվ այսպես, նորմալ բաշխման մոդան և միջնաթիվը համընկնում են մաթեմատիկական սպասման հետ:

345. X պատահական մեծությունը բաշխված է նորմալ, ընդունում մաթեմատիկական սպասումը՝ $a=0$ և միջին քառակուսային շեղումը հավասար է σ -ի: Գտնել σ -ի արժեքը, որի դեպքում X -ը հավանականությունը, որ X -ը կընդունի (α, β) ($\alpha > 0$, $\beta > a$) միջակայքին պատկանող արժեք, կլինի ամենամեծը:

Ցուցում: Օգտվել հետեւյալ բանաձևից.

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{i/\sigma} e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{a/\sigma} e^{-z^2/2} dz = \Phi(z);$$

Գունել շ-ն $\Phi'(z) = 0$ հավասարումից:

$$\text{Պատ. } z = \sqrt{\frac{\beta^2 - a^2}{2(\ln \beta - \ln \alpha)}},$$

§ 6. Ցուցչային բաշխում և նրա թվակին բնութագրիչները

Ցուցչային (էքսպոնենցիալ է կոչվում այն անընդհատ Հ ալատահական մեծության հավանականությունների բաշխումը, որը նկարագրվում է հետեւյալ դիֆերենցիալ ֆունկցիայով.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & b_{pp} \quad x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & b_{pp} \quad x \geq 0, \end{cases} \quad (*)$$

որտեղ λ -ն դրական հաստատուն մեծություն է:
Ցուցչային բաշխման ինտեղրալ ֆունկցիան.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & b_{pp} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & b_{pp} \quad x \geq 0, \end{cases} \quad (**)$$

Ցուցչային օրենքով բաշխված անընդհատ Հ պատահական մեծության (a, b) միջակալքն ընկնելու հավանականությունը՝

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b},$$

Ցուցչային բաշխման մաթեմատիկական սպասումը, դիուպիրսիան և միջին քառակուսային շեղումը համապատասխանաբար հավասար են.

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda},$$

Այսպիսով, ցուցչային բաշխման մաթեմատիկական սպասումը և միջին քառակուսային շեղումը իրար հավասար են:

346. Գրել ցուցչային բաշխման դիֆերենցիալ և ինտե-գրալ ֆունկցիաները, եթե պարամետրը՝ $\lambda = 5$:

Լուծում: (*)-ի և (**) -ի մեջ տեղադրելով $\lambda = 5$, կը-տանանք

$$f(x) = \begin{cases} 0, & b_{pp} \quad x < 0, \\ 5e^{-5x}, & b_{pp} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & b_{pp} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-5x}, & b_{pp} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

347. Գրել ցուցչային բաշխման դիֆերենցիալ և ինտե-գրալ ֆունկցիաները, եթե պարամետրը՝ $\lambda = 6$

Պատճ. $f(x) = 6e^{-6x} (0, \infty)$ $d\delta\lambda_k w_{pp}$, այդ միջակայքից զուրս $f(x) = 0$, $F(x) = 1 - e^{-6x} (0, \infty)$ $d\delta\lambda_k w_{pp}$, այդ միջա-կայքից զուրս $F(x) = 0$,

348. Գտնել այն ցուցչային բաշխման λ պարամետրը, որը w) տրված ξ $f(x) = 0 \quad x < 0$ դեպքում, $f(x) = 2e^{-2x} \quad x \geq 0$ դեպքում, դիֆերենցիալ ֆունկցիայով, p) տրված ξ $F(x) = 0 \quad x < 0$ դեպքում, $F(x) = 1 - e^{-0.4x} \quad x \geq 0$ դեպ-քում, ինտեգրալ ֆունկցիայով:

Պատճ. w) $\lambda = 2$, p) $\lambda = 0.4$:

349. Ապացուցել, որ եթե անընդհատ պատահական X մեծությունը բաշխված ξ ցուցչային օրենքով, ապա X -ի (a, b) միջակայքն ընկնելու հավանականությունը հավա-սար $\xi e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$:

Լուծում: Առաջին եղանակ: Դիցուք, X մեծու-թյունը տրված ξ ինտեգրալ ֆունկցիայով՝

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0):$$

Այդ գեղքում $X \sim P$ (a, b) **միջակալքն** **ընկնելու** **հավանականությունը** (**տես զԼ.** 6, § 1)

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \\ = [1 - e^{-\lambda b}] - [1 - e^{-\lambda a}] = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b},$$

Եթե λ **որպես** **եղանակի**: **Դիցուք**, X **մեծոթյունը** **արվածէ** **է զիֆերենցիալ ֆանկցիոնիվ՝** $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x \geq 0$): **Այդ գեղքում** (**տես զԼ.** VI, § 2)

$$P(a < X < b) = \lambda \int_a^b e^{-\lambda x} dx = \lambda \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) \Big|_a^b = \\ = -[e^{-\lambda b} - e^{-\lambda a}] = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b},$$

350. Անընդհատ X **պատահական մեծոթյունը** **բաշխվածէ** **ցուցչային օրենքով**, **որը արվածէ է զիֆերենցիալ ֆանկցիոնիվ՝** $f(x) = 3e^{-3x}$ $x \geq 0$ **գեղքում**, $f(x) = 0$ $x < 0$ **զիազդում**: **Գտնել** **հավանականությունը**, **որ փորձի արդյունքում** X -ը **կընկնի** (0,13, 0,7) **միջակալքում**

Լուծում: **Օգտվենք** **հետեւալ բանաձեից**.

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b},$$

Հաշվի առնելով, **որ լսու պարմանի** $a = 0,13$, $b = 0,7$, $\lambda = 3$ **և օգտվելով** $e^{-x} \Phi_{\lambda}(x)$ **ֆանկցիայի** **արժեքների** **աղյուսակից**, **կրումանանք**.

$$P(0,13 < X < 0,7) = e^{-3 \cdot 0,13} - e^{-3 \cdot 0,7} = e^{-0,39} \dots e^{-2,1} = \\ = 0,677 - 0,122 = 0,555,$$

351. Անընդհատ X **պատահական մեծոթյունը** **բաշխվածէ** **ցուցչային օրենքով**, **որը արվածէ** **է** $x \geq 0$ **գեղքում** **զիֆերենցիալ ֆանկցիոնիվ՝**

$$f(x) = 0,04 \cdot e^{-0,004x},$$

Երբ $x < 0$ $f(x) = 0$, Գտնել հավանականությունը, որ փորձի արդյունքում X -ը կընկնի (1, 2) միջակայքը:

Պատ.³ $P(1 < X < 2) = 0,038$:

352. Անընդհատ X պատահական մեծությունը բաշխված է ցուցչային օրենքով, որը արված է ինտեղրակ ֆունկցիայով՝ $F(x) = 1 - e^{0,6x}$ $x \geqslant 0$ դեպքում, $F(x) = 0$ $x < 0$ դեպքում: Գտնել հավանականությունը, որ փորձի արդյունքում X -ը կընկնի (2, 5) միջակայքը:

Պատ.³ $P(2 < X < 5) = 0,252$:

353. Գտնել տված ցուցչային բաշխման մաթեմատիկական սպասումը:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geqslant 0), \quad f(x) = 0 \quad (x < 0);$$

Լուծում: Օգտվենք հետևյալ բանաձևից.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx;$$

Հաշվի առնելով, որ $f(x) = 0$ $x < 0$ դեպքում և $f(x) = e^{-\lambda x}$ $x \geqslant 0$ դեպքում, կստանանք

$$M(X) = \lambda \int_0^{\infty} x \cdot e^{-\lambda x} dx;$$

Ինտեղրելով մասերով, ըստ հետևյալ բանաձևի.

$$\int_0^{\infty} u dv = uv \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v du,$$

տեղադրելով $u = x$, $dv = e^{-\lambda x} dx$, որտեղից $du = dx$, $v = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x}$, և կատարելով հաշվումները, վերջնականապես կստանանք

$$M(X) = \frac{1}{\lambda},$$

այսինքն՝ ցուցչային բաշխման մաթեմատիկական սպասումը հավասար է λ -ի հակադարձ մեծությանը:

354. Գտնել $f(x) = 5 \cdot e^{-5x}$ ($x \geq 0$) դիֆերենցիալ ֆունկցիայի արված ցուցչային բաշխման մաթեմատիկական սպասումը:

Պատ.՝ $M(X) = 0,2$:

355. Գտնել $F(x) = 1 - e^{-0,1x}$ ($x \geq 0$) ինտեգրալ ֆունկցիայի արված ցուցչային բաշխման մաթեմատիկական սպասումը:

Պատ.՝ $M(X) = 10$:

356. Գտնել $f(x) = 0$, $x < 0$ դեպքում $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $x \geq 0$ դեպքում ցուցչային բաշխման. ա) դիսպերսիան, բ) միջին քառակուսային շեղումը:

Լուծում: ա) Օգտվենք հետեւյալ բանաձևից.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = [M(X)]^2;$$

Հաշվի առնելով, որ $f(x) = 0$ $x < 0$ դեպքում, $M(X) = \frac{1}{\lambda}$ (տես խնդիր 353), կստանանք

$$D(X) = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2},$$

Երկու անգամ ինտեգրելով մասերով, կդանենք

$$\lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2},$$

Հետեւաբար, որմնելի դիսպերսիան

$$D(X) = \frac{2}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2},$$

ալիքներ՝ ցուցչային բաշխման դիսպերսիան հավասար է λ^2 -ուն հակադարձ մեծությանը:

բ) Գտնենք միջին քառակուսային շեղումը.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda},$$

այսինքն՝ ցուցչային բաշխման միջին քառակուսային շեղումը հավասար է λ -ի հակագարձ մեծությանը:

357. Գտնել $f(x) = 10e^{-10x}$ ($x \geq 0$) դիֆերենցիալ ֆունկցիայով տրված ցուցչային բաշխման դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը:

Պատ.³ $D(X) = 0,01$, $\sigma(X) = 0,1$:

358. Գտնել $F(x) = 1 - e^{-0.4x}$ ($x \geq 0$) ինտեգրալ ֆունկցիայով տրված ցուցչային բաշխման դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը:

Պատ.³ $D(X) = 6,25$, $\sigma(X) = 2,5$:

359. Ուսանողը հիշում է, որ ցուցչային բաշխման դիֆերենցիալ ֆունկցիան $f(x) = 0$ $x < 0$ դեպքում, ունի $f(x) = Ce^{-\lambda x}$ ($x \geq 0$) տեսքը, սակայն նա մոռացել է, թե λ ինչի՞ է հավասար C հաստատունը: Պահանջվում է գտնել C -ն:

Ցուցում: Օգտվել դիֆերենցիալ ֆունկցիայի հետեւալ հատկությունից, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$,

Պատ.³ $C = 1$:

360. Գտնել ցուցչային բաշխման երրորդ կարգի տեսական կենտրոնական մոմենտը՝ $\mu_3 = M[X - M(X)]^3$:

Ցուցում: Օգտվել 353 և 356 խնդիրների լուծումներից:

Պատ.³ $\mu_3 = \frac{2}{\lambda^3}$:

361. Գտնել ցուցչային բաշխման $A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3(X)}$ ասիմետրիան:

Ցուցում: Օգտվել 353 և 360 խնդիրների լուծումներից:

Պատ.³ $A_s = 2$:

362. Գտնել ցուցչային բաշխման 4-րդ կարգի տեսական կենտրոնական մոմենտը՝ $\mu_4 = M[X - M(X)]^4$:

$$\text{Պատ. } \mu_4 = \frac{9}{\lambda^4} t.$$

363. Գտնել ցուցչային բաշխման $E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4(X)} = 3$

Եքոցեսը:

Պատ. $E_k = 6$:

364. Ապացուցել որ անընդհատ պատահական T մեծությունը՝ տրված λ ինտենսիվությամբ պարզագոյն հոսքի (տես գլ. IV, § 2) պատահությունների երկու հաջորդական երեքականությամբ միշտ եղած ժամանակն ունի ցուցչային բաշխում. $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ($t \geq 0$):

Լուծում: Ենթադրենք, որ t_0 ակնթարթում հանդես է եկել հոսքի A_1 պատահությունը. $T_{\text{իցուք}} = t_0 + t$ (t_0 որին ակնառության համար գծել ժամանակի առանցքը և նշել նրա վրա t_0 ու t_1 կետերը):

Եթե հոսքի A_1 -ին հետևող գոնե մեկ պատահություն հանդես կդա (տ₀, t₁) միշտակալքում. այն ընկած է օրինակ, (t₀, t₂) ներսի միշտակալքում, ապա երկու հաջորդական պատահությունների երեսումների միշտ եղած ժամանակի փոքր կիրակի տից, արմինքն կսատացվի, որ $T < t$.

Որպեսզի դանենք $P(T < t)$ հավանականությունը, ուշադրության առնենք, որ „(t₀, t₁) միշտակալքի մեջ կերեա հոսքի գոնե մեկ պատահություն“ և „(t₀, t₁) միշտակալքի ներսում չի երեա հոսքի ոչ մի պատահություն“ պատահությունները հակադիր են (նրանց հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի):

Հոսքի ոչ մի պատահությունը չերեալու հավանականությունը t ժամանակում

$$P_1(0) = \frac{(\lambda t)^0 \cdot e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-\lambda t}$$

Հետեւրար, հակադիր պատահությունի մեջ հետաքրքրող հավանականությունը՝

$$P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

կամ $[ըստ ինտեգրալ ֆունկցիայի սահմանման՝ F(t) = P(T < t)]$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել:

365. Տրված է պարզագույն հոսքի $\lambda = 5$ լարվածությունը Գտնել անընդհատ T պատահական մեծության՝ հոսքի 2 հաշորդական պատահությների երևումների միջև եղած ժամանակի, ա) մաթեմատիկական սպասումը, բ) դիսպերսիան, գ) միջին քառակուսային շեղումը:

Ցուցում: Օգտվել ՅԵՒ խնդրի լուծումից:

Պատ.³ ա) $M(T) = 0.2$, բ) $D(T) = 0.04$, գ) $\sigma(T) = 0.2$:

366. Ավտոմոբիլների տեխնիկական վիճակը ստուգելու համար խճուղում դրված է ստուգիչ կետ: Գտնել T պատահական մեծության՝ ստուգողի հերթական մեքենային սպասելու ժամանակի, մաթեմատիկական սպասումը և միջին քառակուսային շեղումը, եթե մեքենաների հոսքը-պարզագույն է և մեքենաների ստուգիչ կետով անցումների միջև եղած ժամանակը (ժամերով) բաշխված է ցուցչային օրենքով:

$$f(t) = 5e^{-5t};$$

Ցուցում: Ստուգողի մեքենային սպասելու ժամանակը և մեքենաների ստուգիչ կետով անցումների ժամանակը միատեսակ են բաշխված:

Պատ.³ $M(T) = \sigma(T) = 0.2$ ժ. Ստուգողը հերթական մեքենային կողասի միջին հաշվով 12 ր.:

§ 7. Հուսալիուրիան ֆունկցիան

Տարր է կոչվում ինչ-որ մի սարք, անկախ այն բանից սպարդա է այն, թե ըրարդ։ Դիցուք, տարրը սկսում է աշխատել ժամանակի $t_0 = 0$ ակնթարթում, իսկ տ ակնթարթում այն խափանվում է: Նշանակենք $T-\eta$ հետեւյալ անընդհատ պատահական միծությունը՝ տարրի անխափան աշխատանքի ժամանակի տևողությունը, λուրջ՝ խափանումների լարվածությունը (միավոր ժամանակում խափանումների միջին թիվը):

Հաճախ տարրի անխափան աշխատանքի ժամանակի տևողությունն ունի ցուցչային բաշխում, որի ինտեգրալ ֆունկցիան՝

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (\lambda > 0)$$

որոշում է տարրի խափանման հավանականությունը և տևողության ժամանակում:

Հուսալիության R(t) ֆունկցիա է՝ կոչվում և տևողության ժամանակում տարրի անխափան աշխատանքի հավանականությունը որոշող ֆունկցիան.

$$R(t) = e^{-\lambda t},$$

367. Տարրի անխափան աշխատանքի ժամանակի տևողությունն ունի ցուցչային բաշխում՝ $F(t) = 1 - e^{-0.01t}$ ($t > 0$): Գտնել հավանականությունը, որ $t = 50$ ժ. տևողության ժամանակում. ա) տարրը կխափանվի, բ) տարրը չի խափանվի:

Լուծում: ա) Քանի որ $F(t) = 1 - e^{-0.01t}$ ինտեգրալ ֆունկցիան որոշում է տարրի խափանման հավանականությունը և տևողության ժամանակամիջոցում, ապա ինտեգրալ ֆունկցիայի մեջ տեղադրելով $t = 50$, կստանանք խափանման հավանականությունը.

$$F(50) = 1 - e^{-0.01 \cdot 50} = 1 - e^{-0.5} = 1 - 0.606 = 0.394,$$

բ) «տարրը կխափանվի» և «տարրը չի խափանվի» պատճենայինները հակադիր են, ուստի հավանականությունը, որ տարրը չի խափանվի

$$P = 1 - 0.394 = 0.606,$$

Այս նույն արդյունքը կարելի է ստանալ անմիջականորեն, օգտվելով հուսալիության $R(t) = e^{-\lambda t}$ ֆունկցիայից, որը որոշում է t տևողության ժամանակում տարրի անխափան աշխատանքի հավանականությունը.

$$R(50) = e^{-0.01 \cdot 50} = e^{-0.5} = 0.606,$$

368. Տարրի անխափան աշխատանքի ժամանակի տևողությունն անի ցուցչային բաշխում՝ $F(t) = 1 - e^{-0.03t}$, Գտնել հավանականությունը, որ $t = 100$ տևողության ժամանակում տարրի անխափան աշխատանքի հավանականությունը.

մանակամիջոցում. ա) տարրը կիսափանվի, բ) տարրը չի խափանվի:

$$\text{Պատ.՝ ա) } F(100) = 0,95, \text{ բ) } R(100) = 0,05,$$

369. Փորձարկում են երկու անկախ աշխատող տարրեր: Առաջին տարրի անխափան աշխատանքի ժամանակի տևողությունն ունի ցուցչային $F_1(t) = 1 - e^{-0,02t}$ բաշխումը, իսկ երկրորդը՝ $F_2(t) = 1 - e^{-0,05t}$ բաշխումը: Գտնել հավանականությունը, որ $t = 6$ ժ. տևողության ժամանակամիջոցում. ա) 2 տարրն էլ կիսափանվեն, բ) 2 տարրն էլ չեն խափանվի, գ) միայն մեկ տարրը կիսափանվի, դ) գոնե մեկ տարր կիսափանվի:

Լուծում: ա) Առաջին տարրի խափանման հավանականությունը՝

$$P_1 = F(6) = 1 - e^{-0,02 \cdot 6} = 1 - e^{-0,12} = 1 - 0,887 = 0,113,$$

Երկրորդ տարրի խափանման հավանականությունը՝

$$P_2 = 1 - e^{-0,05 \cdot 6} = 1 - e^{-0,3} = 1 - 0,741 = 0,259,$$

Որոնելի հավանականությունը, որ 2 տարրն էլ կիսափանվեն, ըստ անկախ պատահարների հավանականությունների բազմապատկման թեորեմի՝

$$P_1 P_2 = 0,113 \cdot 0,259 = 0,03,$$

բ) Առաջին տարրի անխափան աշխատանքի հավանականությունը՝

$$q_1 = R_1(6) = e^{-0,02 \cdot 6} = e^{-0,12} = 0,887,$$

Երկրորդ տարրի անխափան աշխատանքի հավանականությունը՝

$$q_2 = R_2(6) = e^{-0,05 \cdot 6} = e^{-0,3} = 0,741,$$

Երկու տարրերի անխափան աշխատանքի որոնելի հավանականությունը՝

$$q_1 \cdot q_2 = 0,887 \cdot 0,741 = 0,66;$$

գ) Հավանականությունը, որ կիսափանվի միայն մեկ տարր՝

$$P_1 q_2 + P_2 q_1 = 0,113 \cdot 0,741 + 0,259 \cdot 0,887 = 0,31;$$

դ) Հավանականությունը, որ գոնե մեկ տարր չի խափանվի՝

$$P = 1 - q_1 q_2 = 1 - 0,66 = 0,34;$$

370. Փորձարկում են 3 միմյանցից անկախ աշխատող տարրեր Տարրերի անխափան աշխատանքի ժամանակի տևողությունները բաշխված են ցուցչային օրենքով. առաջին տարրի համար՝ $F_1(t) = 1 - e^{-0.1t}$, երկրորդ տարրի համար՝ $F_2(t) = 1 - e^{-0.2t}$, երրորդ տարրի համար՝ $F_3(t) = 1 - e^{-0.3t}$, Գանել հավանականությունը, որ ժամանակի (0,5) ժ. միջակալքում կխափանվեն. ա) միայն մեկ տարր, բ) միայն 2 տարր, գ) բոլոր 3 տարրերը:

$$\text{Պատ.՝ ա) } 0,445, \text{ բ) } 0,29, \text{ զ) } 0,05;$$

371. Կատարված է 3 միմյանցից անկախ աշխատող տարրերի փորձարկում: Տարրերի անխափան աշխատանքի ժամանակի տևողությունները բաշխված է ցուցչային օրենքով. առաջին տարրի համար՝ $f_1(t) = 0,1 \cdot e^{-0.1t}$, երկրորդի համար՝ $f_2(t) = 0,2e^{-0.2t}$, երրորդ տարրի համար՝ $f_3(t) = 0,3e^{-0.3t}$, Գանել հավանականությունը, որ ժամանակի (0,10) ժ. միջակալքում կխափանվեն. ա) դոնե 1 տարր, բ) 2-ից ոչ քիչ տարրեր:

Ցուցում: Օդավել 370 ինդիք լուծման ստացված արդյունքները:

$$\text{Պատ.՝ ա) } 0,95, \text{ բ) } 0,35;$$

372. Հասալիության ցուցչային օրենք կոչվում է

$$R(t) = e^{-rt}$$

Հավասարությունը որոշված հասալիության ֆանկցիան, որտեղ գրական է. թիվը խափանամների լարվածությանն է: Ապացուցել հասալիության ցուցչային օրենքի բնութագրիչ հասկությունը. և եռողության ժամանակի միջակալքում տարրը անխափան աշխատանքի հավանականությունը կախված

Հետո գիտարկվող միջակալքին նախորդող ժամանակում աշխատելոց, այլ կախված է միայն միջակալքի և տեղությունից (խափանումների տրված և լարվածության դեպքում):

Լուծում: Մտցնենք պատահույթների հետևյալ նշանակումները. A — t_0 տեղության $(0, t_0)$ միջակալքում տարրի անխափան աշխատանքը, B — t տեղության (t_0, t_0+t) միջակալքում տարրի անխափան ախատանքը:

Այդ դեպքում A·B-ն $t_0 + t$ տեղության $(0, t_0 + t)$ միջակալքում անխափան աշխատանքն է:

$R(t) = e^{-\lambda t}$ բանաձեռվ գտնենք այդ պատահույթների հավանականությունները.

$$P(A) = e^{-\lambda t_0}, \quad P(B) = e^{-\lambda t}, \quad P(AB) = e^{-\lambda(t_0+t)} = e^{-\lambda t_0} \cdot e^{-\lambda t},$$

Գտնենք պայմանական հավանականությունը, որ տարրը անխափան կաշխատի $(t_0, t_0 + t)$ միջակալքում այն պայմանով, որ այն անխափան աշխատել է նախորդող $(0, t_0)$ միջակալքում.

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{e^{-\lambda t_0} \cdot e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t_0}} = e^{-\lambda t},$$

Քանի որ ստացված բանաձեռում t_0 -ն չի պարունակվում, այլ պարունակվում է միայն t -ն, ապա այդ էլ հենց նշանակում է, որ նախորդ միջակալքում աշխատանքի ժամանակը չի ազդում հաջորդ միջակալքում՝ անխափան աշխատանքի հավանականության մեծության վրա և այն կախված է միայն հաջորդ միջակալքի (t_0, t_0+t) -ի երկարությունից, ինչոր պահանջվում էր ապացուցել:

Այլ խոսքերով, է տեղության ժամանակի միջակալքում անխափան աշխատելու $P_A(B)$ պայմանական հավանականությունը, հաշված այն ենթադրությամբ, որ տարրը անխափան է աշխատել նախորդ միջակալքում, հավասար է անպայման $P(B)$ հավանականությանը:

ՅՈԹԵՐՈՌԴ ԳԼՈՒԽ

ՄԵԿ ԵՎ ԵՐԿՈՒ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ԱՐԳՈՒՄԵՆՏՆԵՐԻ
ՖՈԽՆԿՑԻԱՅԻ ԲԱՇԽՈՒՄԸ

§ 1. ՄԵԿ պատահական արգումենտի ֆունկցիա

Եթե X պատահական մեծության յուրաքանչյուր հնարավոր արժեքին համապատասխանում է Y պատահական մեծության մեկ հնարավոր արժեքը, ապա Y -ը կոչվում է պատահական X արգումենտի ֆունկցիա և գրվում է՝ $Y = \varphi(X)$:

Եթե X -ը գիրք է տպատահական մեծություն է և $Y = \varphi(X)$ ֆունկցիան՝ մոնոտոն, ապա X -ի ասրբեր արժեքներին կհամապատասխանեն Y -ի տարրեր արժեքներ, ըստ որում X -ի և Y -ի համապատասխան արժեքների հավանականությունները կլինեն նույնը։ Այլ խոսքով, Y -ի հնարավոր արժեքները գտնում են

$$y_i = \varphi(x_i)$$

հավասարությունից, սրտեղ x_i -ն X -ի հնարավոր արժեքն է. Y -ի հնարավոր արժեքների հավանականությունները գտնում են

$$P(Y = y_i) = P(X = x_i)$$

Հավասարությունից:

Խսկ եթե $Y = \varphi(X)$ -ը ոչ մոնոտոն է, ապա, ընդհանրապես ասած, X -ի տարրեր արժեքներին կարող է համապատասխանել Y -ի միենալին արժեքները (այդպես կլինի՝ եթե X -ի հնարավոր արժեքներն ընկած են մի միջակայքում, որտեղ $\varphi(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն չէ), Այդ զեղչում Y -ի հնարավոր արժեքների հավանականությունները գտնելու համար պետք է զումարել X -ի այն հնարավոր արժեքների հավանականությունները, որոնց գեպքում Y -ն ընդունում է միենալին արժեքը, Այլ խոսքով, Y -ի կրկնվող արժեքի հավանականությունը հավասար է X -ի այն հնարավոր արժեքների հավանականությունների դումարին, որոնց գեպքում Y -ն ընդունում է միենույն արժեքը։

Եթե X -ը անընդհատ պատահական մեծություն է, որը տրված է զիֆերենցիալ $f(x)$ ֆունկցիայով, խսկ եթե $y = \varphi(x)$ -ը՝ զիֆերենցելի խիստ աճող կամ խիստ նվազող ֆունկցիա է, որի հակառակ ֆունկցիան է $x = \psi(y)$ -ը, ապա Y պատահական մեծության $g(y)$ զիֆերենցիալ ֆունկցիան գտնում են հետեւյալ հավասարությունից։

$$g(y) = \int [\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|$$

Եթե $y = \varphi(x)$ ֆունկցիան X -ի հնարավոր արժեքների միջակայշում մոնոտոն չէ, ապա պետք է այդ միջակայքը բաժանել այնպիսի

միջակայքերի, ուր գ (x) ֆունկցիան մոնոտոն է, և մոնոտոնության միջակայքերից յուրաքանչյուրի համար գտնել դիֆերենցիալ ցը (y) ֆունկցիաները, իսկ հետո ներկայացնել ց (y)-ը գումարի տեսքով:

$$g(y) = \Sigma g_i(y),$$

Օրինակ, եթե գ (x) ֆունկցիան մոնոտոն է 2 միջակայքերում, որոնց շում համապատասխան հակադարձ ֆունկցիաները հավասար են $\psi_1(y)$ և $\psi_2(y)$, ապա

$$g(y) = f[\psi_1(y)] \cdot |\psi'_1(y)| + f[\psi_2(y)] \cdot |\psi'_2(y)|.$$

373. Դիսկրետ X պատահական մեծությունը արված է բաշխման օրենքով.

X	1	3	5
---	---	---	---

P	0,4	0,1	0,5
---	-----	-----	-----

Գտնել $Y = 3X$ պատահական մեծության բաշխման օրենքը:
Լուծում: Գտնենք $Y = 3X$ մեծության հնարավոր արժեքները.

$$y_1 = 3 \cdot 1 = 3, \quad y_2 = 3 \cdot 3 = 9, \quad y_3 = 3 \cdot 5 = 15,$$

Մենք տեսնում ենք, որ X-ի տարբեր հնարավոր արժեքներին համապատասխանում են Y-ի տարբեր արժեքները:Այդ բացատրվում է նրանով, որ $y = \varphi(x) = 3x$ ֆունկցիան մոնոտոն է:

Գտնենք Y-ի հնարավոր արժեքների հավանականությունները: Որպեսզի $Y = y_1 = 3$, բավական է, որ X մեծությունն ընդունի $x_1 = 1$ արժեքը: Իսկ $X = 1$ պատահույթի հավանականությունը ըստ պայմանի հավասար է 0,4-ի, հետեւաբար, և $Y = y_1 = 3$ պատահույթի հավանականությունը նույնպես հավասար է 0,4-ի:

Համանմանորեն կտանանք Y-ի մնացած հնարավոր արժեքների հավանականությունները.

$$P(Y = 9) = P(X = 3) = 0,1,$$

$$P(Y = 15) = P(X = 5) = 0,5:$$

Գրենք Y-ի որոնելի բաշխման օրենքը.

Y 3 9 15

p 0,4 0,1 0,5

374. Դիսկրետ X պատահական մեծությունը տրված է բաշխման օրենքով.

X 3 6 10

p 0,2 0,1 0,7

Գտնել $Y = 2X + 1$ պատահական մեծության բաշխման օրենքը:

Y 7 13 21

Պատ.

p 0,2 0,1 0,7

375. Դիսկրետ պատահական X մեծությունը տրված է բաշխման օրենքով.

X -1 -2 1 2

p 0,3 0,1 0,2 0,4

Գտնել $Y = X^2$ պատահական մեծության բաշխման օրենքը:
Լուծում: Գտնենք Y -ի հնարավոր արժեքները.

$y_1 = x_1^2 = (-1)^2 = 1,$

$y_2 = x_2^2 = (-2)^2 = 4,$

$y_3 = x_3^2 = 1^2 = 1,$

$y_4 = x_4^2 = 2^2 = 4:$

Եզ այսպես, X -ի առարկեր արժեքներին համապատասխանում է Y -ի նույն արժեքը: Այդ բացարձում է նրանով, որ X -ի հնարավոր արժեքները պատկանում են այն միջակագիրին, որտեղ $Y = X^2$ ֆոնկցիան մոնուառն չէ:

Գտնենք Y -ի հնարավոր արժեքների հավանականությունները: Որպեսզի Y մեծությունը ընդունի $Y = 1$ արժեքը, բավական է, որ X մեծությունն ընդունի $X = -1$ կամ $X = 1$ արժեքները: Վերջին երկու պատահաւթյուններն անհամատահղելի են, նրանց հավանականություններն համապատասխանաբար հավասար են $0,3$ -ի և $0,2$ -ի: Աւստի $Y = 1$

պատահութիւն հավանականությունը ըստ գումարման թեորեմի կլինի.

$$P(Y=1) = P(X=-1) + P(X=1) = 0,3 + 0,2 = 0,5,$$

Համանմանորեն կդառնենք $Y=4$ հնարավոր արժեքի հավանականությունը.

$$P(Y=4) = P(X=-2) + P(X=2) = 0,1 + 0,4 = 0,5,$$

Գրենք Y մեծության որոնելի բաշխման օրենքը.

Y	1	4
p	0,5	0,5

376. Դիսկրետ X պատահական մեծությունը տրված է բաշխման օրենքով.

X	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
p	0,2	0,7	0,1

Գտնել $Y = \sin X$ պատահական մեծության բաշխման օրենքը:

Պատ.	Y	$\sqrt{2}/2$	1
	p	0,3	0,7

377. Տրված է պատահական այն X մեծության դիֆերենցիալ $f(x)$ ֆունկցիան, որի հնարավոր արժեքներնեւն կած են (a, b) միջակայքում: Գտնել $Y = 3X$ պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան:

Լուծում: Քանի որ $y = 3x$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է և խիստ աճող, ապա կիրառելի է

$$g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|, \quad (*)$$

բանաձևը, որտեղ $\psi(y)$ -ը $y = 3x$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան է:

Գտնենք $f(y)$,

$$\psi(y) = x = \frac{y}{3},$$

Գտնենք $f[\varphi(y)]$:

$$f[\psi(y)] f = f\left(\frac{y}{3}\right), \quad (**)$$

Գանենք $\psi'(y)$ ածանցյալը:

$$\psi'(y) = \left(\frac{y}{3}\right)' = \frac{1}{3},$$

Ակնհայտ է, որ

$$|\psi'(y)| = \frac{1}{3}; \quad (***)$$

Գանենք որոնելի դիֆերենցիալ ֆունկցիան, որի համար տեղադրենք $(**)-ը$ և $(***)-ը$ $(*)-ի$ մեջ:

$$g(y) = \frac{1}{3} f\left(\frac{y}{3}\right);$$

Քանի որ $X-y$ փոփոխվում է (a, b) միջակայքում և
 $y=3x$, ապա

$$3a < y < 3b;$$

378. Տրված է պատահական այն X մեծության դիֆերենցիալ $f(x)$ ֆունկցիան, որի հնարավոր արժեքներն ընկած են (a, b) միջակայքում: Գանել Y պատահական մեծության դիֆերենցիալ $g(y) = f(y)$ ֆունկցիան, եթե, ա) $Y = -3X$, բ) $Y = AX + B$:

$$\text{Պատճ. ա) } g(y) = \frac{1}{3} f\left[-\frac{y}{3}\right], \quad (-3b < y < -3a), \quad \text{բ) } g(y) = \\ = \frac{1}{|A|} f\left[\frac{y-B}{A}\right], \quad (Aa + B < y < Ab + B), \quad \text{եթե } A > 0 \text{ և} \\ \quad (Ab + B < y < Aa + B) \quad \text{եթե } A < 0,$$

379. X պատահական մեծությունը լուշաված է Կոշիի օրենքով:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

Գանել պատահական $Y = X^3 + 2$ մեծություն դիֆերենցիալ ֆունկցիան:

$$\text{Պատճ. գ) } g(y) = \frac{1}{3\pi} \left[(y-2)^{2/3} + (y-2)^{4/3} \right]^t,$$

380. Տրված է պատահական այն X մեծության դիֆերենցիալ $f(x)$ ֆունկցիան, որի հնարավոր արժեքներն ընկած են $(0, \infty)$ միջակայքում: Գտնել Y պատահական մեծության դիֆերենցիալ $g(y)$ ֆունկցիան, եթե $a) Y = e^{-x}$,
 $b) Y = \ln X$, $c) Y = X^3$, $d) Y = \frac{1}{X^3}$, $e) Y = \sqrt[X]{X}$:

Պատմ. $a) g(y) = \frac{1}{y} f\left[\ln \frac{1}{y}\right]$, $(0 < y < 1)$, $b) g(y) = e^y f[e^y]$
 $(-\infty < y < \infty)$, $c) g(y) = \frac{1}{3} \sqrt[3]{y^2} f[\sqrt[3]{y}]$, $(0 < y < \infty)$, $d) g(y) =$
 $= \frac{1}{2y\sqrt{y}} f\left[\frac{1}{\sqrt{y}}\right]$, $(0 < y < \infty)$, $e) g(y) = 2y f(y^2)$, $(0 < y < \infty)$:

381. Տրված է պատահական այն X մեծության դիֆերենցիալ $f(x)$ ֆունկցիան, որի հնարավոր արժեքներն ընկած են $(-\infty, \infty)$ միջակայքում: Գտնել Y պատահական մեծության $g(y)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան, եթե. $a) Y = X^2$,
 $b) Y = e^{-X^2}$, $c) Y = |X|$, $d) Y = \cos X$, $e) Y = \operatorname{arctg} X$,
 $f) Y = \frac{1}{1 + X^2}$:

Պատմ. $a) g(y) = \frac{1}{2\sqrt{-y}} [f(\sqrt{-y}) + f(-\sqrt{-y})]$, $(0 < y < \infty)$,
 $b) g(y) = \frac{1}{2y\sqrt{\ln \frac{1}{y}}} \left[f\left(\sqrt{\ln \frac{1}{y}}\right) + f\left(-\sqrt{\ln \frac{1}{y}}\right) \right]$,
 $(0 < y < 1)$,
 $c) g(y) = f(y) + f(-y)$, $(0 < y < \infty)$,
 $d) g(y) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} [f(2\pi k + \arccos y) + f(2\pi k - \arccos y)]$,
 $(-1 < y < 1)$,
 $e) g(y) = \frac{1}{\cos^2 y} f(\operatorname{tg} y)$, $\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$,
 $f) g(y) = \frac{1}{2y^2\sqrt{\frac{1}{y}-1}} \left[f\left(\sqrt{\frac{1}{y}-1}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{1}{y}-1}\right) \right]$,
 $(0 < y < \infty)$:

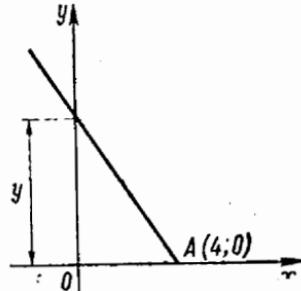
382. Ուղղանկուն կոռորդինատային համակարգում $A(4, 0)$ կետից պատահականորեն (կամայական և անկյան տակ) տարված է Օյ առանցքը հատող ճառագալթ: Գտնել տարված ճառագալթի Օյ առանցքի հետ հատման կետի յ օրդինատի հավանականությունների բաշխման $g(y)$ գիֆերենցիալ ֆունկցիան:

Լուծում: Ե անկյունը կարելի է գիտել որպես $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում հավասարաչափ բաշխված պատահական մեծություն, ընդ որում այդ միջակայքում գիֆերենցիալ ֆունկցիան

$$f(t) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\pi},$$

գիտարկող միջակայքից դուրս $f(t) = 0$:

Նկ. 7-ից հետևում է, որ յ օրդինատը և անկյան հետ կապված է հետեւալ կախվածությամբ:



Նկ. 7.

$$y = 4 \operatorname{tg} t:$$

Այս ֆունկցիան $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում մոնուոն աճող է, ուստի որոնելի գիֆերենցիալ $g(y)$ ֆունկցիան փնտելու համար կիրառելի է:

$$g(y) = f[\psi(y)] + [\psi'(y)]. \quad (*)$$

բանաձեռ, որտեղ $\psi(y)$ -ը $x = 4 \operatorname{tg} t$ ֆունկցիայի հակառարձ ֆունկցիան է:

Գտնենք $\psi'(y)$ -ը.

$$\psi(y) = t = \operatorname{arctg} \frac{y}{4},$$

Գտնենք $\psi'(y)$ -ը.

$$\psi'(y) = \frac{4}{16 + y^2},$$

Հետևաբար,

$$|\psi'(y)| = \frac{4}{16+y^2}, \quad (**)$$

$$\text{Գանձնք } f[\psi(y)]\text{-ը: Բանի որ } f(t) = \frac{1}{\pi}, \text{ ապա} \\ f[\psi(y)] = \frac{1}{\pi}, \quad (***)$$

Տեղադրելով $(**)$ -ը և $(***)$ -ը $(*)$ -ի մեջ, գերշնականապես կստանանք.

$$g(y) = \frac{4}{\pi(16+y^2)},$$

Ենտ որում $-\infty < y < \infty$ (գերշինը հետեւմ է այն բանից, որ $y = 4 \operatorname{tg} t$ և $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$),

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy = \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{16+y^2} = \frac{4}{\pi} \cdot 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{16+y^2} = \frac{4 \cdot 2 \cdot \pi}{\pi \cdot 4 \cdot 2} = 1,$$

383. X պատահական մեծությունը հավասարաչափ է բաշխված $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում: Գտնել պատահական Y $= \sin X$ մեծության g(y) գիֆերենցիալ ֆունկցիան:

Լուծում: Գտնենք X պատահական մեծության f(x) գիֆերենցիալ ֆունկցիան: X մեծությունը բաշխված է հավասարաչափ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում, ուստի այդ միջակայքում

$$f(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\pi},$$

դիտարկվող միջակայքից դուրս $f(x) = 0$:

$y = \sin x$ ֆունկցիան $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում մոնուան է, հետևաբար, այդ միջակայքում այն ունի հակադարձ ֆունկցիան:

$$x = \psi(y) = \arcsin y,$$

Գանհենք $\psi'(y)$ ածանցլալը.

$$\psi'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

Գանհենք որոնելի դիֆերենցիալ ֆունկցիան ըստ հետևյալ բանաձեռ:

$$g(y) = f[\psi(y)]|\psi'(y)|;$$

$$\begin{aligned} \text{Հաշվի առնելով, որ } f(x) = \frac{1}{\pi} \left(\ln \operatorname{arctan} x, f[\psi(y)] = \right. \\ \left. = \frac{1}{\pi} \right) \text{ և } |\psi'(y)| = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \text{ կստանանք} \end{aligned}$$

$$g(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}},$$

Քանի որ $y = \sin x$, լնդ որում $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, ապա
 $-1 < y < 1$: Այսպիսով, $(-1, 1)$ միջակալքում

$$g(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}},$$

$$ալդ միջակալքից դուրս $g(y) = 0$:$$

Ես ուղարկում:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 g(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi} \arcsin y \Big|_0^1 = \\ = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1, \end{aligned}$$

384. X պատահական մեծությունը հավասարաչափ է բաշխված $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ միջակալքում: Գանհել Y = sin X պատահական մեծության $g(y)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան:

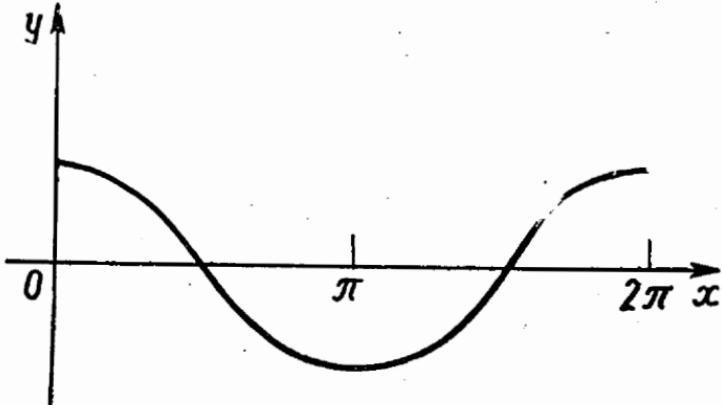
$$\text{Պատ. } g(y) = \frac{2}{\pi \sqrt{1-y^2}} (0, 1) \text{ միջակալքում, այդ միջակալքից դուրս } g(y) = 0,$$

385. Տրված է X պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան. $f(x) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ միջակայքում, այդ միջակայքից դուրս $f(x) = 0$. Գտնել $Y = \operatorname{tg} X$ պատահական մեծության $g(y)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան:

$$\text{Պատ. } g(y) = \frac{2}{\pi(1+y^2)}, (-\infty < y < \infty);$$

386. X պատահական մեծությունը բաշխված է հավասարաչափ ($0, 2\pi$) միջակայքում. Գտնել $Y = \cos X$ պատահական մեծության $g(y)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան:

Լուծում: Գտնենք X պատահական մեծության $f(x)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան. $(0, 2\pi)$ միջակայքում ունենք



Նկ. 8.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi - 0} = \frac{1}{2\pi},$$

այդ միջակայքից դուրս $f(x) = 0$:

$Y = \cos x$ հավասարումից գտնենք $x = \psi(y)$ հակադարձ ֆունկցիան: Քանի որ $(0, 2\pi)$ միջակայքում $y = \cos x$ ֆունկցիան մոնոտոն չէ, ապա բաժանենք այդ միջակայքը $(0, \pi)$ և $(\pi, 2\pi)$ միջակայքերի, որոնցում այդ ֆունկցիան մոնոտոն է (նկ. 8): $(0, \pi)$ միջակայքում հակադարձ ֆունկցիան՝ $\psi_1(y) = \arccos y$, $(\pi, 2\pi)$ միջակայքում հակադարձ ֆունկցիան՝ $\psi_2(y) = 2\pi - \arccos y$:

Որոնելի դիմերենցիալ ֆունկցիան կարող է գտնվել հետևյալ հավասարությունից.

$$g(y) = f[\psi_1(y)] \cdot |\psi'_1(y)| + f[\psi_2(y)] \cdot |\psi'_2(y)|; \quad (*)$$

Գտնենք հակադարձ ֆոնկցիաների ածանցյալները.

$$\psi_2'(y) = (\arccos y') = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$\psi_2'(y) = (2\pi - \arccos y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

Գտնենք ածանցյալների մոդուլները:

$$|\psi_1'(y)| = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad |\psi_2'(y)| = \frac{1}{V\sqrt{1-y^2}}, \quad (**)$$

$\zeta_{\omega_2} \neq 0$ առնելով, $\eta_P - f(x) = \frac{1}{2\pi}$, կստանանք

$$f[\psi_1(y)] = \frac{1}{2\pi}, \quad f[\psi_2(y)] = \frac{1}{2\pi}, \quad (***)$$

Տեղակրթությունը (**)-ը և (***)-ը (*)-ի մեջ, կոնհենանք

$$g(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{2\pi\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

Քանի՞ որ $y = \cos x$, լնկում $0 < x < 2\pi$, ապա $-1 < y < 1$.
Այսպիսով, $(-1, 1)$ միջակայքում որոնելի զիգերենցիալ
ֆունկցիան կլինի

$$g(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}},$$

ալիք միջակալքից դուրս $g(y) = 0$.

Unique function

$$\int_{-1}^1 g(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{dy}{1-y^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{dy}{1-y^2}} = \frac{2}{\pi} \arcsin 1 = \\ = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1.$$

387. X պատահական մեծությունը բաշխված է հավասարաչափական $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում: Գտնել $Y = \cos X$ պատահական մեծության $g(y)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան:

$$\text{Պատ.՝ } g(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}} (0, 1) \text{ միջակայքում, այդ միջակայքից դուրս } g(y) = 0.$$

388. X պատահական մեծությունը բաշխված է նորմալ ախին հավասար մաթեմատիկական սպասումով և օ-ին հավասար միջին քառակուսային շեղումով: Ապացուցել, որ $Y = AX + B$ գծային ֆունկցիան ևս բաշխված է նորմալ ընդուրում:

$$M(Y) = Aa + B, \quad \sigma(Y) = |A| \sigma:$$

Լուծում: Գրենք X պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

Քանի որ $y = Ax + B$ ֆունկցիան մոնուպոն է, ապա կիրառելի է հետեւյալ բանաձևը:

$$g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|: \quad (*)$$

Գտնենք $x = \psi(y)$ -ը $y = Ax + B$ հավասարումից:

$$\psi(y) = \frac{y - B}{A},$$

Գտնենք $f[\psi(y)]$ -ը:

$$f[\psi(y)] = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left[\frac{y-B}{A}-a\right]^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y-(Aa+B)]^2}{2(A\sigma)^2}}. \quad (**)$$

Գտնենք $\psi'(y)$ -ը:

$$\psi'(y) = \left[\frac{y-B}{A} \right]' = \frac{1}{A},$$

Գառնենք $|\psi'(y)| \sim_{\mathcal{L}}$.

$$|\psi'(y)| = \frac{1}{|A|}, \quad (***)$$

Տեղադրելով $(**)-\mathcal{L}$ և $(***)-\mathcal{L}$ $(*)-\mathcal{L}$ մէջ, կունենանք

$$g(y) = \frac{1}{(|A|z)\sqrt{\frac{2\pi}{2\pi}}} e^{-\frac{|y-(Az+B)|^2}{2(Az)^2}},$$

Այստեղից երկում է, որ $Y = AX + B$ գծային ֆունկցիան բաշխած է նորմալ, ընդ որում $M(Y) = Az + B$, $\sigma(Y) = |A|z$, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել:

389. Տրված է նորմալ բաշխած X պատահական մեծության գիֆերենցիալ ֆունկցիան՝ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $(-\infty < x < \infty)$: Գտնել պատահական $Y = X^2$ մեծության գ(y) գիֆերենցիալ ֆունկցիան:

Լուծում: $y = x^2$ հավասարումից գտնենք հակադարձ ֆունկցիան: Քանի որ $(-\infty, \infty)$ միջակայքում $y = x^2$ ֆունկցիան մոնոտոն չէ, ապա բաժանենք այդ միջակայքը $(-\infty, 0)$ և $(0, \infty)$ միջակայքերի, որոնցամ զիստրկվող ֆունկցիան մոնոտոն է: $(-\infty, 0)$ միջակայքում հակադարձ ֆունկցիան՝ $\psi_1(y) = -\sqrt{y}$, $(0, \infty)$ միջակայքում՝ $\psi_2(y) = \sqrt{y}$:

Որոնելի գիֆերենցիալ ֆունկցիան կարող է գտնվել հետեւալ հավասարությունից:

$$g(y) = f[\psi_1(y)] \cdot |\psi_1'(y)| + f[\psi_2(y)] \cdot |\psi_2'(y)|, \quad (*)$$

Գտնենք հակադարձ ֆունկցիաների ածանցյալները.

$$\psi_1'(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad \psi_2'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

Գտնենք ածանցյալների մոդուլները.

$$|\psi_1'(y)| = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad |\psi_2'(y)| = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad (**)$$

$$\zeta_{\omega_2} \psi \text{--} \text{առնելով}, \quad n! = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \psi_1(y) = -\sqrt{y},$$

$$\psi_2(y) = \sqrt{-y}, \quad \text{կստանանք}$$

$$f[\psi_1(y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2}, \quad f[\psi_2(y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2}, \quad (***)$$

*Տեղադրելով (**)-ը և կ-ը (***)-ը (*)-ի մեջ, կունենանք*

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2},$$

Քանի որ $y = x^2$, ըստ որում $-\infty < x < \infty$, ապա $0 < y < \infty$:
 Այսպիսով, $(0, \infty)$ միջակայքում որոնելի դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}$$

այդ միջակալիքից դուրս $g(y) = 0$:

Uniqueness:

$$\int_0^{\infty} g(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-y/2} dy.$$

Sekwazaprapenq y=t², k sekwazaprap, dy=2t dt, kuswazanwazap.

$$\int_0^{\infty} g(y) dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2/2} dt.$$

Հաշվի առնելով, որ Պուաստնի ինտեգրալը

$$\int_0^\infty e^{-t^2/2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2},$$

կառնենք

$$\int_0^{\infty} g(y) dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = 1,$$

390. *Տրված է նորմալ բաշխված X պատահական մեծու-*

թիման $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ զիֆերենցիալ ֆունկցիան: Գտնել
 $Y = \frac{1}{2} X^2$ պատահական մեծության զիֆերենցիալ ֆունկ-
 ցիան:

Պատ.՝ $g(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi y}} e^{-y}, (0, \infty)$ միջակայքում, այդ միջակայ-
 քից դուրս $g(y) = 0$.

391. Տրված է $f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\pi)}$ զիֆերենցիալ ֆունկ-
 ցիան: Գտնել $Y = \frac{1}{4} X^2$ պատահական մեծության $g(y)$
 զիֆերենցիալ ֆունկցիան:

Պատ.՝ $g(y) = \frac{2}{\pi \sqrt{2\pi y}} e^{-2y}, (0, \infty)$ միջակայքում, այդ միջա-
 կայքից դուրս $g(y) = 0$.

392. X պատահական մեծությանը տրված է $(0, \pi)$ միջակայքում $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$ զիֆերենցիալ ֆունկցիան: Այդ միջակայքից դուրս $f(x) = 0$: Գտնել $Y = \varphi(X) = X^2$ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասամբը, նախապես որոշելով Y մեծության զիֆերենցիալ ֆունկցիան:

Լուծում: Եկզրամ գտնենք Y պատահական մեծության $g(y)$ զիֆերենցիալ ֆունկցիան: Բանի որ $y = \varphi(x) = x^2$ ֆունկցիան x -ի զիտարկելով արժեքների համար ($0 < x < \pi$) խիստ աճող է, ապա $g(y)$ զիֆերենցիալ ֆունկցիան կիրառենք հետեւ համելալ բանաձևով.

$$g(y) = f(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|,$$

որտեղ $\psi(y) = \sqrt{y}$, $y = x^2$ ֆունկցիայի հակառակ ֆունկ-
 ցիան է: Տեղադրելով $\psi(y) = \sqrt{y}$ և $\psi'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ առնելով, որ
 $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$, $|\psi'(y)| = |(\sqrt{y})'| = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, կստանանք

$$g(y) = \frac{\sin \psi(y)}{4\sqrt{y}},$$

Գտնենք Ե մեծության որոնելի մաթեմատիկական սպառումը, հաշվի առնելով, որ Ե-ի հնարավոր արժեքները ընկած են $(0, \pi^2)$ միջակալքում [քանի որ $y = x^2$ և $0 < x < \pi$, ապա $0 < y < \pi^2$]:

$$M(Y) = \int_0^{\pi} yg(y) dy = \frac{1}{4} \int_0^{\pi^2} \frac{y \sin \sqrt{y}}{\sqrt{y}} dy:$$

Օգտվելով $y = t^2$ տեղադրումից, կստանանք

$$M(Y) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} t^2 \sin t dt:$$

Երկու անդամ ինտեգրելով մասերով, վերջնականապես կունենանք,

$$M(Y) = M(X^2) = \frac{\pi^2 - 4}{2},$$

Դիտությունն է վերը բերված լուծումը հետապնդում է ուսուցողական նորատակները: Շատ ավելի արագ նորատակին է հասցնում հետեւյալ բանաձեռը.

$$M[X^2] = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \frac{\pi^2 - 4}{2},$$

Այս զիտությունը վերաբերվում է և 393 խնդրին:

393. X պատահական մեծությունը տրված է $(0, \pi/2)$ միջակալքում $f(x) = \cos x$ դիֆերենցիալ ֆունկցիայով, այդ միջակայքից գուրս $f(x) = 0$: Գտնել Ե $= \varphi(X) = X^2$ ֆունկցիայի մաթեմատիկական սպառումը:

$$\text{Պատ. } M(Y) = \frac{(\pi^2 - 8)}{4},$$

394. X պատահական մեծությունը տրված է $(0, \pi)$ միջակալքում $f(x) = \frac{\sin x}{2}$ դիֆերենցիալ ֆունկցիայով, այդ միջակայքից գուրս $f(x) = 0$: Գտնել Ե $= \varphi(X) = X^2$ ֆունկցիայի դիսպերսիան, օգտագործելով գ(y) դիֆերենցիալ ֆունկցիան:

Լուծում: Օգտվենք հետևյալ բանաձևից.

$$D(Y) = \int_0^{\pi} y^2 g(y) dy - [M(Y)]^2,$$

որտեղ շն և ձն ինտերվալի ծայրերն են, որտեղ ընկած են Y -ի հարավոր արժեքները: Տեղաղբելով $g(y) = \frac{\sin y}{4\sqrt{y}}$:

$M(Y) = \frac{\pi^2 - 4}{2}$ (աես խնդիր 392) և հաշվի առնելով, որ $c = 0$ և $d = \pi^2$, (φ անի որ $y = x^2$ և $0 < x < \pi$, ապա $0 < y < \pi^2$), կսահնանք

$$D(Y) = D(X^2) = \int_0^{\pi^2} y \cdot \frac{\sin y}{4\sqrt{y}} dy - \left[\frac{\pi^2 - 4}{2} \right]^2, \quad (*)$$

Ինտեղբելով սկզբում $y = t^2$ անդադրումով, իսկ հետո 4 անգամ մասերով, կոնկանանք

$$\frac{1}{4} \int_0^{\pi^2} y \cdot \frac{\sin \sqrt{y}}{\sqrt{y}} dy = \frac{\pi^4}{2} - 6\pi^2 + 24: \quad (**)$$

Տեղադրելով $(**)$ -ը՝ $(*)$ -ի մեջ, վերջնականապես կստո-

$$\text{տանք } D(X^2) = \frac{\pi^4 - 16\pi^2 + 80}{4},$$

395. X պատահական մեծոթյունը արդյունք է $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

միջակայքում $f(x) = \cos x$ զիֆերենցիալ ֆունկցիայով, այդ ժիշտակալքեց գործը $f(x) = 0$: Գոնեւ $Y = \varphi(X) = X^2$ ֆունկցիայի զիսպերախան:

Ցուցում: Եամբ զանել $g(y) = \frac{\cos \sqrt{y}}{2\sqrt{y}}$ զիֆերենցիալ ֆունկցիան $Y = X^2$ մեծության համար:

$$D(Y) = \int_0^{\pi^2} y^2 g(y) dy - [M(Y)]^2$$

բանաձեկից, ուր $M(Y) = \frac{\pi^2 - 4}{8}$ (տես խնդիր 393): Ինտեղը հաշվելի է նաև նախ օգտվել $y = t^2$ տեղադրումից, իսկ հետո ինտեղը էլ մասերով:
Պատճ.՝ $D(X^2) = 20 - 2\pi^2$.

396. Խորանարդի կողը չափված է մոտավորապես, ընդունում $a \leqslant x \leqslant b$: Դիտելով խորանարդի կողը որպես պատահական մեծություն, որ բաշխված է (a, b) միջակայքում հավասարաչափ, գտնելու ա) խորանարդի ծավալի մաթեմատիկական սպասումը, բ) խորանարդի ծավալի դիսալերախան:

Ցուցում: Նախ գտնել $Y = X^3$ պատահական մեծության դիբերենցիալ ֆունկցիան՝

$$g(y) = \frac{1}{3(b-a)y^{2/3}}$$

օգտվել հետեւյալ բանաձեկից:

$$\begin{aligned} M(Y) &= \int_{a^3}^{b^3} yg(y) dy, \quad D(Y) = \int_{a^3}^{b^3} y^2 g(y) dy - [M(Y)]^2: \\ \text{Պատճ.՝ } M(Y) &= \frac{(b+a)(b^2+a^2)}{7(b-a)}, \quad D(Y) = \frac{b^7-a^7}{7(b-a)} - \\ &- \left[\frac{(b+a)(b^2+a^2)}{4} \right]^2, \end{aligned}$$

397. Տրված է X պատահական մեծության $F(x)$ ինտեղը գրալ ֆունկցիան: Գտնել $Y = 3X + 2$ պատահական մեծության $G(y)$ ինտեղը գրալ ֆունկցիան:

Լուծում: Բառ ինտեղը գրալ ֆունկցիայի սահմանման

$$G(y) = P(Y < y),$$

Քանի որ $y = 3x + 2$ ֆունկցիան աճող է, ապա $Y < y$ անհավասարությունը իրագործվում է, եթե տեղի ունի $X < x$ անհավասարությունը, ուստի

$$G(y) = P(Y < y) = P(X < x) = F(x): \tag{*}$$

$y = 3x + 2$ հավասարումից արտահայտենք x -ը,

$$x = \frac{y-2}{3}, \tag{**}$$

*Տեղադրելով $(**)$ -ը $(*)$ -ի մեջ, զերչնականապես կունեանք.*

$$G(y) = F\left[\frac{y-2}{3}\right],$$

398. Տրված է X պատահական մեծոթյան $F(x)$ ինտեղաբարակ ֆունկցիան: Գտնել $Y = -\frac{2}{3}X + 2$ պատահական մեծոթյան $G(y)$ ինտեղաբարակ ֆունկցիան:

Լուծում: Բայտ ինտեղաբարակ ֆունկցիայի սահմանման

$$G(y) = P(Y < y),$$

Քանի որ $y = -\frac{2}{3}x + 2$ ֆունկցիան նվազող է, ապա $Y < y$ անհավասարությունը իրագործվում է, եթե տեղի ունի $X > x$ անհավասարությունը, առանձին անհավասարությունը հավասար է 1-ի:

$$G(y) = P(Y < y) = P(X > x),$$

Քանի որ $X < x$ և $X > x$ պատահությունները հակադիր են, ապա այդ պատահությունների հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի.

$$P(X < x) + P(X > x) = 1,$$

Ալգորիթմ

$$P(X > x) = 1 - P(X < x) = 1 - F(x),$$

Հետեւարար,

$$G(y) = 1 - F(x), \quad (**)$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2 \text{ հավասարամիջոց արտահայտենք } x \text{-ը.}$$

$$x = \frac{3(2-y)}{2}, \quad (**)$$

*Տեղադրելով $(**)$ -ը $(*)$ -ի մեջ, զերչնականապես կունեանք.*

$$G(y) = 1 - F\left[\frac{3(2-y)}{2}\right],$$

399. Տրված է X պատահական մեծության $F(x)$ ինտեգրալ ֆունկցիան, Գտնել Y պատահական մեծության $G(y)$ ինտեգրալ ֆունկցիան, եթե $a) Y = 4X + 6$, $b) Y = -5X + 1$, $c) Y = aX + a$:

$$a) G(y) = F\left[\frac{y-6}{4}\right], \quad b) G(y) = 1 - F\left[\frac{1-y}{5}\right],$$

$$c) G(y) = F\left[\frac{y-a}{a}\right], \text{ եթե } a > 0, \quad G(y) = 1 - F\left[\frac{y-a}{a}\right], \text{ եթե } a < 0.$$

§ 2. Երկու պատահական արգումենտների ֆունկցիա

Եթե X և Y պատահական մեծությունների հնարավոր արժեքների յուրաքանչյուր դույզին համապատասխանում է Z պատահական մեծության մեկ հնարավոր արժեք, ապա Z -ը կոչվում է X և Y երկու պատահական արգումենտների ֆունկցիա և գրում են

$$Z = \varphi(X, Y),$$

եթե X -ը և Y -ը անկախ դիսկրետ պատահական մեծություններ են, ապա որպեսզի գտնենք $Z = X + Y$ ֆունկցիայի բաշխումը, պետք է դանենք Z -ի բոլոր հնարավոր արժեքները, որի համար բավական է X -ի յուրաքանչյուր հնարավոր արժեքը գումարել Y -ի բոլոր հնարավոր արժեքների հետ, իսկ Z -ի գտնված հնարավոր արժեքների հավանականությունները հավասար են X -ի և Y -ի գումարվող արժեքների հավանականությունների արտադրյալին:

Եթե X -ը և Y -ը անկախ անընդհատ պատահական մեծություններ են, ապա $Z = X + Y$ գումարը $g(z)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան (պայմանով, որ արգումենտներից գոնե մեկի դիֆերենցիալ ֆունկցիան արված է $(-\infty, +\infty)$ միջակայքում մեկ բանաձեռվ) կարող ենք գտնել

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z-x) dx$$

բանաձեռվ կամ սրան համարժեք

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y) f_2(y) dy$$

բանաձեռվ, որտեղ f_1 -ը և f_2 -ը արգումենտների դիֆերենցիալ ֆունկցիաներն են. Եթե արգումենտների հնարավոր արժեքները բացասա-

կամ չեն, ապա $Z = X + Y$ մեծության $g(z)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան գտնեմ են.

$$g(z) = \int_0^z f_1(x) f_2(z-x) dx$$

բանաձեռվ կամ սըան համարժեք

$$g(z) = \int_0^z f_1(z-y) \cdot f_2(y) dy$$

բանաձեռվ:

Այն գեղըում, եթիւ $f_1(x)$ և $f_2(y)$ եռկու դիֆերենցիալ ֆունկցիաներն էլ արված են վերջավոր միջակայքերում, $Z = X + Y$ մեծության $g(z)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան գտնելու համար նպատակահարմար է նախ դտնել $G(z)$ ինտեղրալ ֆունկցիան, իսկ հետո դիֆերենցել այն լուստ Z -ի.

$$g(z) = G'(z):$$

Եթե $X-\rho$ և $Y-\rho$ անկախ պատահական մեծություններ են, որոնք արված են համապատասխանաբար $f_1(x)$ և $f_2(y)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիաներով, ապա (X, Y) պատահական կետը D տիրություն լընկնելու հավանականությունը հավասար է այդ տիրությունի դիֆերենցիալ ֆունկցիաների արտադրյալի կունակի ինտեղրալին.

$$P[(X, Y) \subset D] = \int_D \int f_1(x) f_2(y) dx dy,$$

400. Դիսկրետ անկախ պատահական X և Y մեծությունները արված են բաշխումներով.

X	1	3	Y	2	4
P	0,3	0,7	P	0,6	0,4

Գտնել $Z = X + Y$ պատահական մեծության բաշխումը:

Լուծում: Որպեսզի կազմենք $Z = X + Y$ մեծության բաշխումը, պետք է գտնել Z -ի բոլոր հնարավոր արժեքներն ու նրանց հավանականությունները:

Z -ի հնարավոր արժեքները X -ի լուրաքանչյուր հնարավոր արժեքի և Y -ի բոլոր հնարավոր արժեքների դաշտարներն են,

$$z_1 = 1 + 2 = 3, \quad z_2 = 1 + 4 = 5, \quad z_3 = 3 + 2 = 5, \\ z_4 = 3 + 4 = 7;$$

Գանենք այս հնարավոր արժեքների հավանականությունները: Որպեսզի $Z = 3$, բավական է, որ X մեծություննը ընդունի $x_1 = 1$ արժեքը և Y մեծությունը՝ $y_1 = 2$ արժեքը: Այդ հնարավոր արժեքների հավանականությունները, ինչպես երեսմ է բաշխման տրված օրենքներից, համապատասխանաբար հավասար են $0,3 \cdot \frac{1}{2}$ և $0,6 \cdot \frac{1}{2}$: Քանի որ X և Y մեծություններն անկախ են, ապա $X = 1$ և $Y = 2$ պատահույթները ևս անկախ են և, հետեւբար, նրանց համատեղ հանգես գալու հավանականությունը (ալիքնքն՝ $Z = 3$ պատահույթի հավանականությունը) ըստ բազմապատկման թեորեմի հավասար է $0,3 \cdot 0,6 = 0,18$:

Համանմանորեն կդանենք.

$$P(Z = 1 + 4 = 5) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12,$$

$$P(Z = 3 + 2 = 5) = 0,7 \cdot 0,6 = 0,42,$$

$$P(Z = 3 + 4 = 7) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28,$$

Գանենք որոնելի բաշխումը, նախապես գումարելով $Z = z_2 = 5$ և $Z = z_3 = 5$ անհամատեղելի պատահույթների հավանականությունները ($0,12 + 0,42 = 0,54$):

	Z	3	5	7
P	0,18	0,54	0,28	

$$U առ ու գումար: 0,18 + 0,54 + 0,28 = 1:$$

401. X և Y գիսկրետ պատահական մեծությունները տրված են բաշխումներով.

ա)	X	10	12	16	Y	1	2
	P	0,4	0,1	0,5	P	0,2	0,8
բ)	X	4	10		Y	1	7
	P	0,7	0,3,		P	0,8	0,2,

Գանենք $Z = X + Y$ պատահական մեծության բաշխումը:
Պատ. ա) $Z = 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 17 \quad 18$, բ) $Z = 5 \quad 11 \quad 17$
P $0,08 \quad 0,32 \quad 0,02 \quad 0,08 \quad 0,10 \quad 0,40$, P $0,56 \quad 0,38 \quad 0,06$.

402. X և Y անկախ պատահական մեծությունները աղբյաժած են դիֆերենցիալ ֆունկցիաներով.

$$f_1(x) = e^{-x} \quad (0 \leq x \leq \infty),$$

$$f_2(y) = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} \quad (0 \leq y < \infty);$$

Դանել ալդ օրենքների բաղադրայթը, ալսինքն՝ Z = X + Y պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան:

Լուծում: Քանի որ արգումենտների հնարավոր արժեքները ոչ բացառական են, ապա կիրառելի է հետեւալ բանաձևը.

$$f(z) = \int_0^z f_1(x) f_2(z-x) dx,$$

Հետեւաբար,

$$f(z) = \int_0^z e^{-x} \left[\frac{1}{2} e^{-\frac{z-x}{2}} \right] dx,$$

Կատարելով տարրական ձևափոխությունները, կստանանք

$$f(z) = e^{-\frac{z}{2}} [1 - e^{-\frac{z}{2}}],$$

Այսակ զ ≥ 0 , քանի որ $Z = X + Y$ և X -ի ու Y -ի հնարավոր արժեքներն ոչ բացառական են.

Եթե այսպես, $f(z) = e^{-\frac{z}{2}} [1 - e^{-\frac{z}{2}}]$ ($0, \infty$) միջակալքում, այդ միջակալքից դուրս $f(z) = 0$:

Ի՞նթերցողին խորհուրդ ենք տալիս ստուգելու համար համոզվել, որ $\int_0^\infty f(z) dz = 1$,

403. X և Y անկախ պատահական մեծությունները աղբյաժած են դիֆերենցիալ ֆունկցիալով.

$$f_1(x) = \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} \quad (0 \leq x \leq \infty),$$

$$f_2(y) = \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} \quad (0 \leq y < \infty),$$

Գտնել այդ օրենքների բաղադրությը, այսինքն $Z = X + Y$ պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան:

$$\text{Պատ. } g(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{5}} (1 - e^{-\frac{2z}{15}}), & z \geq 0, \\ 0 & z < 0, \end{cases}$$

404. Անկախ նորմալ բաշխված X և Y պատահական մեծությունները տրված են դիֆերենցիալ ֆունկցիաներով.

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}},$$

Ապացուցել, որ այդ երկու օրենքների բաղադրությը, այսինքն $Z = X + Y$ պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան, ևս նորմալ օրենք է:

Լուծում: Օգտվենք հետեւյալ բանաձևից.

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z-x) dx,$$

Այդ դեպքում

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{\frac{(z-x)^2}{2}} dx,$$

Կատարելով տարրական հաշվումներ, կստանանք

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2-zx)} dx,$$

Ինտեգրալի նշանի տակ գտնվող ցուցչային ֆունկցիայի Φ տարրը լրացնելով մինչեւ լրիվ քառակուսի լինելը, $e^{-\frac{z^2}{4}}$ -ը դուրս բերենք ինտեգրալի նշանի տակից.

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}} e^{\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2} dx,$$

Հաշվի առնելով, որ հավասարության աջ մասում գրված Պուասոնի ինտեգրալը հավասար է $\sqrt{\pi}$, վերջնականապես կստանանք

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}},$$

ինթեցողին խորհուրդ ենք տալիս ստուգման համար համոզվել, որ $\int_{-\infty}^{\infty} g(z) dz = 1$. Դրա համար պետք է օգտվել $z = \sqrt{2t}$ աեղազբումից և ուշադրություն դարձնել, որ Պուասոնի ինտեգրալը,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t_2}{2}} dt = \sqrt{2\pi},$$

նկատենք, որ գիտարկվող խնդրում, հեշտ է համոզվել, որ

$$M(Z) = M(X) + M(Y) \quad \text{և} \quad z(z) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)},$$

Կարելի է ապացուցել, որ այդ բանաձևերն իրավացի են և ընդհանուր նորմալ օրենքները բաղադրելիս (այսինքն՝ եթե մաթեմատիկական սոլասումը տարբեր է զրոյից և միջին քառակուսային չեզումը հավասար չեն),

405. Տրված են անկախ, հավասարաչափ բաշխված X և Y պատահական մեծաթիւնների դիֆերենցիալ ֆունկցիաները՝ $f_1(x) = \frac{1}{2} (0, 2)$ միջակալքում, այդ միջակալքից զորս $f_1(x) = 0$, $f_2(y) = \frac{1}{2} (0, 2)$ միջակալքում, այդ

միջակալքից զորս $f_2(y) = 0$: Գտնել $Z = X + Y$ պատահական մեծաթիւն ինտեգրալ և դիֆերենցիալ ֆունկցիաները: Կառուցել $g(z)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիաի զրաֆիլը:

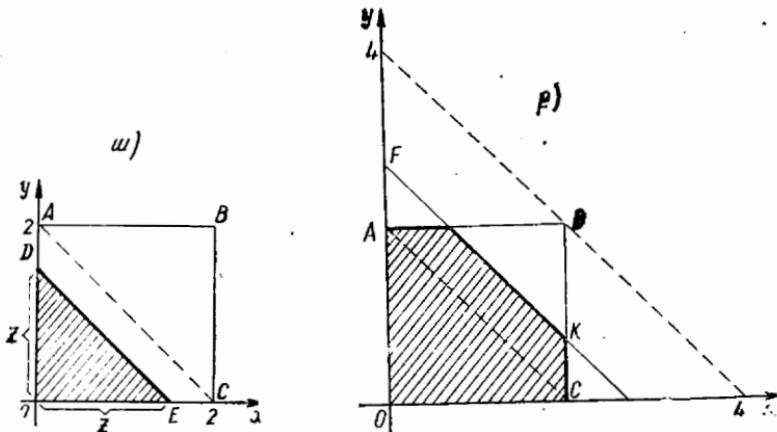
Լուծում: Բառ պարմանի X -ի հնարավոր արժեքները որոշվամ են $0 < x < 2$ անհավասարությունով, Y -ի հնարավոր արժեքները՝ $0 < y < 2$ անհավասարությունով: Այսուհեղից հետևամ է, որ (x, y) հնարավոր պատահական կետերը ընկած են $OABC$ քառակուսամ (նկ. 9, ա):

Ինտեգրալ ֆունկցիաի սահմանումից.

$$G(z) = P(Z < z) = P(X + Y < z),$$

$x + y < z$ անհավասարությանը բավարարում են xOy հարթության այն (x, y) կետերը, որոնք ընկած են $x + y = z$ ուղղից ներքեւ (այդ ուղիղը Ox և Oy առանցքներից հատում է z -ի հավասար հատվածներ), իսկ եթե վերցնենք միայն x -ի և y -ի հարավոր արժեքները, ապա $x + y < z$ անհավասարությունը իրագործվում է միայն $OABC$ քառակուսու $x + y = z$ ուղղից ներքեւ ընկած կետերի համար:

Մյուս կողմից, քանի որ X և Y մեծություններն անկախ են, ապա



նկ. 9.

$$G(z) = \iint_{(S)} f_1(x) f_2(y) dx dy = \frac{1}{4} \iint_{(S)} dx dy = \frac{1}{4} S,$$

որտեղ S -ը $OABC$ քառակուսու այն մասի մակերեսի մեծությունն է, որն ընկած է $x + y = z$ ուղղից ներքեւ, Ակներեք, որ S մակերեսի մեծությունը կախված է z -ի արժեքից: Եթե $z \leq 0$, ապա $S = 0$, այսինքն՝

$$G(z) = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0,$$

եթե $0 < z < 2$, ապա (նկ. 9, ա)

$$G(z) = \frac{1}{4} S_{\triangle ODE} = \frac{1}{4} \cdot \frac{z^2}{2} = \frac{z^2}{8},$$

Եթե $2 < z < 4$, ապա (*նկ. 9, բ*)

$$G(z) = \frac{1}{4} S_{OAHKC} = 1 - \frac{(4-z)^2}{8},$$

OAHKC պատկերի մակերեսը գունված է որպես OABC քառակուսու մակերեսի, որը, ակներևաբար, հավասար է $2^2 = 4$ և HBK ողղանկուն եռանկյան մակերեսին՝

$$S_{\triangle HBK} = \frac{HB^2}{2},$$

ըստ որում $HB = 2 - AH = 2 - AF = 2 - (z - 2) = 4 - z$
տարրերությանը:
Եթե $z > 4$, ապա

$$G(z) = \frac{1}{4} S_{OABC} = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1,$$

Եթե ալսպես, որոնելի ինտեգրալ ֆունկցիան ալսպիսին է.

$$G(z) = \begin{cases} 0 & b_{pp} z \leqslant 0, \\ z^2/8 & b_{pp} 0 < z < 2, \\ 1 - (4-z)^2/8 & b_{pp} 2 < z < 4, \\ 1 & b_{pp} z > 4, \end{cases}$$

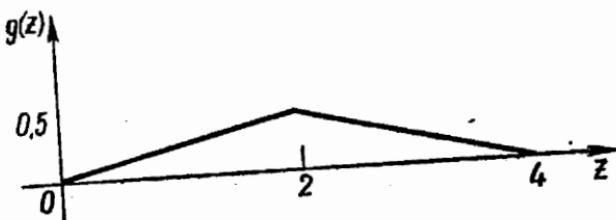
Գունենք $g(z) = G'(z)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիան.

$$g(z) = \begin{cases} 0 & b_{pp} z \leqslant 0, \\ \frac{z}{4} & b_{pp} 0 < z < 2, \\ 1 - \frac{z}{4} & b_{pp} 2 < z < 4, \\ 0 & b_{pp} z > 4, \end{cases}$$

$g(z)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիաին զրաֆիկը պատկերված է նկ. 10-ում:

Խորհուրդ ենք տալիս ընթերցողին ստուգելու համար
համոզվել, որ բաշխման $g(z)$ կորով սահմանափակված մակերեսը հավասար է 1-ի:

406. Տրված են հավասարաչափ բաշխված X և Y անկախ պատահական մեծությունների դիֆերենցիալ ֆունկցիաները. $f_1(x) = 1$ ($0, 1$) միջակալքում, այդ միջակալքից դուրս $f_1(x) = 0$, $f_2(y) = 1$ ($0, 1$) միջակալքում, այդ միջա-



Նկ. 10.

կալքից դուրս $f_2(y) = 0$: Գտնել պատահական $Z = X + Y$ մեծության ինտեգրալ և դիֆերենցիալ ֆունկցիաները: Կառուցել $g(z)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

$$\text{Պատմ. } G(z) = \begin{cases} 0, & b_{pp} \quad z < 0, \\ \frac{z^2}{2}, & b_{pp} \quad 0 < z < 1, \\ 1 - \frac{(2-z)^2}{2}, & b_{pp} \quad 1 < z < 2, \\ 1, & b_{pp} \quad z > 2, \end{cases}$$

$$g(z) = \begin{cases} 0 & b_{pp} \quad z < 0, \\ z & b_{pp} \quad 0 < z < 1, \\ 2-z & b_{pp} \quad 1 < z < 2, \\ 0 & b_{pp} \quad z > 2. \end{cases}$$

407. Տրված են հավասարաչափ բաշխված X և Y անկախ պատահական մեծությունների դիֆերենցիալ ֆունկցիաները. $f_1(x) = \frac{1}{2}$ ($1, 3$) միջակալքում, այդ միջակալքից դուրս $f_1(x) = 0$. $f_2(y) = \frac{1}{4}$ ($2, 6$) միջակալքում, այդ միջակալքից դուրս $f_2(y) = 0$: Գտնել պատահական մեծության ինտեգրալ և դիֆերենցիալ ֆունկցիաները: Կառուցել $g(z)$ դիֆերենցիալ ֆունկցիայի գրաֆիկը.

$$\text{Պատ. } G(z) = \begin{cases} 0 & b_{PP} \quad z < 3, \\ \frac{(z-3)^2}{16}, & b_{PP} \quad 3 < z < 5, \\ \frac{z}{4}-1 & b_{PP} \quad 5 < z < 7, \\ 1 - \frac{(9-z)^2}{16}, & b_{PP} \quad 7 < z < 9, \\ 1 & b_{PP} \quad z > 9, \end{cases}$$

$$g(z) = \begin{cases} 0 & b_{PP} \quad z < 3, \\ \frac{(z-3)}{8}, & b_{PP} \quad 3 < z < 5, \\ \frac{1}{4} & b_{PP} \quad 5 < z < 7, \\ \frac{(9-z)}{8} & b_{PP} \quad 7 < z < 9, \\ 0 & b_{PP} \quad z > 9, \end{cases}$$

ՈՒԹԵՐՈՐԴԻ ԳԼՈՒԽ

ԵՐԿՈՒ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

§ 1. Երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենք

Երկչափ անվանում են (X, Y) պատահական մեծությունը, որի համար հնարավոր արժեքներ են (x, y) թվաղույղերը. Միաժամանակ զիտարկվող X և Y բազաղրէները կազմում են երկու պատահական մեծությունների համակարգը.

Երկչափ մեծությունը երկրաչափորեն կարելի է մեկնաբանել որպես X կամ Y հարթության $M(X, Y)$ պատահական կետ կամ որպես պատահական $O M$ վեկտոր:

Երկչափ մեծությունը անվանում են դիսկրետ, եթե նրա բազաղրէնները զիսկերեալ են:

Երկչափ մեծությունը անվանում են անընդհատ, եթե նրա բազաղրէններն անընդհատ են:

Հնարավոր արժեքների և նրանց հավանականությունների համապատասխանությունը կոչվում է երկչափ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման օրենք:

Երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենքը կարելի է տալ. ա) երկու մուտքով պայուսակի տեսքով, որը պարունակում է

հնարավոր արժեքները և համապատասխան հավանականությունները, բ) անալիտիկորեն, օրինակ, ինտեղրալ ֆունկցիայի տեսքով:

Եթէափ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման ինտեղրալ ֆունկցիա անվանում են այն $F(x, y)$ ֆունկցիան, որը յուրաքանչյուր (x, y) թվազույգի համար որոշում է, այն բանի հավանականությունը, որ X -ը կընդունի x -ից փոքր արժեք և Y -ը կընդունի y -ից փոքր արժեք.

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y);$$

Եթէափառեն այդ հավասարությունը կարելի է մեկնաբանել հետեւյալ կերպ. $F(x, y)$ -ը այն բանի հավանականությունն է, որ (X, Y) պատահական կետը կընկնի (x, y) գագաթով այն ուղիղ անկյան մեջ, որը ընկած է այդ գագաթից ձախ և ներքեւ:

Ինտեղրալ ֆունկցիայ արտահայտության վոխարեն հաճախ օգտագործվում է ըրաշման ֆունկցիա արտահայտությունը:

Ինտեղրալ ֆունկցիան օժտված է հետեւյալ հատկություններով.

Համար կություն 1. Ինտեղրալ ֆունկցիայի արժեքները բավարարում են

$$0 \leq F(x, y) \leq 1$$

Կրկնակի անհավասարությանը:

Համար կություն 2. Ինտեղրալ ֆունկցիան բար յուրաքանչյուր արգումենտի չնվազող է.

$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y), \quad \text{եթե } x_2 > x_1,$$

$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1), \quad \text{եթե } y_2 > y_1;$$

Համար կություն 3. Տեղի ունեն հետեւյալ սահմանային առնչությունները.

$$1) F(-\infty, y) = 0,$$

$$3) F(-\infty, -\infty) = 0,$$

$$2) F(x, -\infty) = 0,$$

$$4) F(\infty, \infty) = 1,$$

Համար կություն 4. ա) Եթե $y = \infty$ համակարգի ինտեղրալ ֆունկցիան վեր է ածվամ X բաղադրիչի ինտեղրալ ֆունկցիայի.

$$F(x, \infty) = F_1(x),$$

բ) Եթե $x = \infty$ համակարգի ինտեղրալ ֆունկցիան վեր է ածվամ Y բաղադրիչի ինտեղրալ ֆունկցիայի,

$$F(\infty, y) = F_2(y);$$

Օգտագելով ինտեղրալ ֆունկցիայից, կարելի է հաշվել այն բանի հավանականությունը, որի պատահական կետը կը նկնի $x_1 < X < x_2$, $y_1 < Y < y_2$ ուղղանկյան մեջ:

$$P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)],$$

Ինտեղրալ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի խառը ածանցյալը կոչվում է անընդհատ երկչափ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման դիֆերենցիալ ֆունկցիա:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y},$$

Հաճախ ϵ դիֆերենցիալ ֆունկցիա՝ արտահայտության փոխարեն օգտագործում են հավանականությունների երկչափ խտությունը արտահայտությունը,

Դիֆերենցիալ ֆունկցիան կարելի է դիմել որպես պատահական կետի Δx և Δy կողմերով ուղղանկյան մեջ ընկնելու հավանականության և այդ ուղղանկյան մակերեսի հարաբերության սահման, եթե այդ կողմերը ձգտում են զրոյի, երկրաչափորեն այն մեկնաբանվում որպես մի մակերեսույթ, որը կոչվում է բաշխման մակերեսույթ:

Ունենալով դիֆերենցիալ ֆունկցիան, հետեւյալ բանաձևով կարելի է գտնել ինտեղրալ ֆունկցիան.

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy,$$

Հավանականությունը, որ (X, Y) պատահական կետը կը նկնի D տիրույթի մեջ, որոշվում է

$$P[(X, Y) \subset D] = \int_{(D)} \int f(x, y) dx dy$$

բանաձևով:

Դիֆերենցիալ ֆունկցիան օժտված է հետեւյալ հատկություններով: Համար կություն է, որ դիֆերենցիալ ֆունկցիան ոչ բացասական է.

$$f(x, y) \geq 0,$$

Համակություն 2. Դիֆերենցիալ ֆունկցիայից անվերջ սահմաններով կրկնակի անհական ինտեգրալը հավասար է մեկի:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

Մասնավորապես, եթե (X, Y) -ի բոլոր հնարավոր արձեքները պատկանում են վերջավոր D տիրույթին, ապա

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 1.$$

408. Տրված է դիսկրետ երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենքը՝

X	3	10	12
Y			
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Գտնել X և Y բաղադրիչների բաշխման օրենքները:
Լուծում: Գումարելով հավանականությունները՝ «ըստ սյուների», կստանանք X -ի հնարավոր արժեքների հավանականությունները. $p(3)=0,27$, $p(10)=0,43$, $p(12)=0,30$:
Գրեք X բաղադրիչի բաշխման օրենքը՝

$$\begin{array}{cccc} X & 3 & 10 & 12 \\ p & 0,27 & 0,43 & 0,30 \end{array}$$

$$Ստուգում: 0,27 + 0,43 + 0,30 = 1:$$

Գումարելով հավանականությունները՝ «ըստ տողերի», նույն ձևով գտնում ենք Y բաղադրիչի բաշխումը՝

$$\begin{array}{ccc} Y & 4 & 5 \\ p & 0,55 & 0,45 \end{array}$$

$$Ստուգում: 0,55 + 0,45 = 1:$$

409. Տրված է գիտելիքնետ երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենքը

X	26	30	41	50
Y				
2,3 2,7	0,05 0,09	0,12 0,30	0,08 0,11	0,04 0,21

Գտնել բաղադրիչների բաշխման օրենքները:

$$\text{Պատ.} \quad X \quad 26 \quad 30 \quad 41 \quad 50 \quad Y \quad 2,3 \quad 2,7 \\ p \quad 0,14 \quad 0,42 \quad 0,19 \quad 0,25 \quad p \quad 0,29 \quad 0,71,$$

410. Տրված է երկչափ պատահական մեծության ինտեղության ֆունկցիան՝

$$F(x, y) = \begin{cases} \sin x \cdot \sin y, & \text{եթև } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{եթև } x < 0 \text{ կամ } y < 0; \end{cases}$$

Գտնել (X, Y) պատահական կիրառ ՝ $x = 0, \quad x = \frac{\pi}{4},$
 $y = \frac{\pi}{6}, \quad y = \frac{\pi}{3}$ աղիղներով սահմանափակված աղղանկան մեջ ընկնելու հավանականությունը:
 Լուծում՝ Օգագոնք

$$P(x_1 < X < x_2, \quad y_1 < Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)] \text{ բանաձիյ:}$$

$$\text{Տեղադրենք } x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{4}, \quad y_1 = \frac{\pi}{6}, \quad y_2 = \frac{\pi}{3},$$

Կստանանք

$$P = \left[\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{3} - \sin 0 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right] - \left[\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6} - \sin 0 \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right] = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 0,26,$$

411. Գտնել (X, Y) պատահական կետը $x = 1, x = 2, y = 3, y = 5$ ուղղներով սահմանափակված ուղղանկան մեջ ընկնելու հավանականությունը, եթե հայտնի է ինտեգրալ ֆունկցիան.

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, & \text{եթե } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{եթե } x < 0 \text{ կամ } y < 0, \end{cases}$$

Պատ.՝ $P = 3/128,$

412. Տրված է երկչափ պատահական մեծության ինտեգրալ ֆունկցիան՝

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y}, & \text{եթե } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{եթե } x < 0 \text{ կամ } y < 0, \end{cases}$$

Գտնել համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան:
Լուծում: Օգտվենք

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

բանաձևից:

$\zeta_{x_2} \zeta_{y_2} f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \ln 3 \cdot (3^{-x} - 3^{-x-y}), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \ln^2 3 \cdot 3^{-x-y},$$

Այսպիսով, որոնելի դիֆերենցիալ ֆունկցիան կլինի՝

$$f(x, y) = \begin{cases} \ln^2 3 \cdot 3^{-x-y}, & \text{եթե } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{եթե } x < 0 \text{ կամ } y < 0, \end{cases}$$

Խորհուրդ ենք տալիս ընթերցողին համոզվելու համար ստուգել, որ

$$\ln^2 3 \int_0^\infty \int_0^\infty 3^{-x-y} dx dy = 1,$$

413. Տրված է երկչափ պատահական մեծության ինտեգրալ ֆունկցիան՝

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-4x})(1 - e^{-2y}), & \text{եթե } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{եթե } x < 0, y < 0, \end{cases}$$

Գտնել համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան:

Պատ.՝ $f(x, y) = 8e^{-4x-2y}$, եթե $x > 0, y > 0$, $f(x, y) = 0$, եթե
 $x < 0$ կամ $y < 0$:

414. Տրված է (X, Y) պատահական մեծությունների համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝

$$f(x, y) = \frac{1}{(16+x^2)(25+y^2)},$$

Գտնել համակարգի ինտեգրալ ֆունկցիան:

Ցուցում: Օկտվել հետևյալ բանաձևից՝

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy,$$

$$\text{Պատ.՝ } F(x, y) = \left(\frac{1}{4\pi} \arctg \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \right) \left(\frac{1}{5\pi} \arctg \frac{y}{5} + \frac{1}{10} \right),$$

415. Տրված է երկու պատահական մեծությունների համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝ $f(x, y) = \frac{1}{2} \sin(x+y)$,

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ քառակուսու մեջ, քառակուսուց դուրս $f(x, y) = 0$: Գտնել համակարգի ինտեգրալ ֆունկցիան տրված քառակուսու մեջ:

$$\text{Պատ.՝ } F(x, y) = \frac{1}{2} [\sin x + \sin y - \sin(x+y)],$$

416. $x^2 + y^2 \leq R^2$ շրջանում դիֆերենցիալ ֆունկցիան $f(x, y) = C(R - \sqrt{x^2 + y^2})$, շրջանից դուրս՝ $f(x, y) = 0$: Գտնել ա) C հաստատունը, բ) հավանականությունը, որ պատահական (X, Y) կեաը կընկնի $r = 1$ շառավղով, և $(0, 0)$ կենտրոնով շրջանի մեջ, եթե $R = 2$:

Լուծում: ա) Օգտավենք դիֆերենցիալ ֆունկցիալի երկրորդ հատկությունից

$$\iint_D C(R - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = 1,$$

Անցնելով բևեռային կոորդինատներին, կստանանք՝

$$C = \frac{1}{\iint_D (R - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy},$$

Անցնելով բևեռային կոորդինատներին, կստանանք՝

$$C = \frac{1}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (R - \rho) \rho d\rho} = \frac{R}{\pi R^3} = \frac{1}{\pi R^2};$$

բ) Քստ պայմանի $R = 2$, հետեւաբար, $C = \frac{3}{8\pi}$ և

$$f(x, y) = \frac{3}{8\pi} (2 - \sqrt{x^2 + y^2});$$

Պատահական կետի $r = 1$ շառավղով և $(0, 0)$ կենտրոնով շրջանն ընկնելու հավանականությունը՝

$$P[(X, Y) \in D_1] = \frac{3}{8\pi} \iint_{(D_1)} (2 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy,$$

Որոնելի հավանականությունը կստանանք անցնելով բևեռային կոորդինատների՝

$$P = \frac{3}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (2 - \rho) \rho d\rho = \frac{1}{2},$$

417. (X, Y) պատահական մեծությունների համակարգի բաշխման մակերեսությը R շառավղով կիսասֆերա է, որի կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում։ Գտնել համակարգի գիֆերենցիալ ֆունկցիան։

Պատ.՝ $f(x, y) = \frac{3}{2\pi R^3} \sqrt{R^3 - (x^2 + y^2)}$, եթե $x^2 + y^2 \leq R^2$
և $f(x, y) = 0$, եթե $x^2 + y^2 > R^2$.

418. Տրված է երկու պատահական մեծությունների համակարգի գիֆերենցիալ ֆունկցիան՝ $f(x, y) = \frac{C}{(9 + x^2)(16 + y^2)}$, Որոշել C հաստատունը։

$$\text{Պատ.}^{\wedge} C = \frac{12}{\pi^2};$$

419. Տրված է (X, Y) երկու պատահական մեծությունների համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝ $f(x, y) = \frac{C}{(x^2 + y^2 + 1)^3}$: Գտնել C հաստատունը:

Ցուցում. Անցնել բևեռային կոորդինատներին,

$$\text{Պատ.}^{\wedge} C = \frac{2}{\pi};$$

420. Առաջին քառորդում արդյած է երկու պատահական մեծությունների համակարգի ինտեգրալ ֆունկցիան՝

$$F(x, y) = 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y};$$

Առաջին քառորդից գորու $F(x, y) = 0$: Գտնել ω) համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան, ρ) (X, Y) պատահական կետը $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $C(2, 8)$ զարգաթներով եռանկյան մեջ ընկնելու հավանականությունը:

$$\text{Պատ.}^{\wedge} \omega) f(x, y) = \ln^2 2 \cdot 2^{-x-y} \quad \text{առաջին քառորդում}, \quad \text{այդ քառորդից գորու } \omega(x, y) = 0, \quad \rho) P = \frac{5}{3} \cdot 2^{12};$$

§ 2. Դիսկրետ երկչափ պատահական մեծության բաղադրիչների հավանականությունների պայմանական բաշխման օրենքները

Եթե աղբենք X և Y բաղադրիչները զիսկես են և նրանց հապավոր արժեքներն են՝ x_1, x_2, \dots, x_n ; y_1, y_2, \dots, y_m :

X բաղադրիչի պայմանական բաշխում, եթե $Y = y_j$ (j -ն պահանում է նույն արժեքը) X -ի բոլոր հապավոր արժեքների զիսկեսը կոչվում է պայմանական հավանականությունների համեյալ համայնակը:

$$P(x_1 | y_j), \quad p(x_2 | y_j), \quad \dots, \quad p(x_n | y_j);$$

Համանմանորեն սահմանվում է Y -ի պայմանական բաշխումը:

Բաղադրիչի պայմանական հավանականությունները հաշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$p(x_i | y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}, \quad p(y_j | x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)},$$

Հաշվումները ստուգելու համար նպատակահարմար է համոզվել, որ պայմանական բաշխման հավանականությունների գումարը հավասար է մեկի:

421. Տրված է գիսկրետ երկչափ պատահական մեծությունը՝

		X			
			$x_1 = 2$	$x_2 = 5$	$x_3 = 8$
Y	$y_1 = 0,4$		0,15	0,30	0,35
	$y_2 = 0,8$		0,05	0,12	0,03

Գտնել՝ ա) բաղադրիչների ոչ պայմանական բաշխումները, բ) X բաղադրիչի պայմանական բաշխումը, այն պարմանով, որ Y բաղադրիչը ընդունել է $y_1 = 0,4$ արժեքը, գ) Y-ի պայմանական բաշխումը, պայմանով, որ $X=x_2=5$:
 Լուծում: ա) Գումարելով հավանականությունները «ըստ սյուների», կազմենք X-ի բաշխման օրենքը՝

$$\begin{array}{cccc} X & 2 & 5 & 8 \\ p & 0,20 & 0,42 & 0,38 \end{array}$$

Գումարելով հավանականությունները «ըստ տողերի» գտնում ենք Y-ի բաշխման օրենքը՝

$$\begin{array}{ccc} Y & 0,4 & 0,8 \\ p & 0,80 & 0,20 \end{array}$$

բ) Հաշվենք X-ի հնարավոր արժեքների համապատասխան պայմանական հավանականությունները, այն պայմանով, որ Y բաղադրիչը ընդունել է $y_1 = 0,4$ արժեքը՝

$$p(x_1/y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,15}{0,80} = \frac{3}{16},$$

$$p(x_2/y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,30}{0,80} = \frac{3}{8},$$

$$p(x_3/y_1) = \frac{p(x_3, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,35}{0,80} = \frac{7}{16},$$

Կազմենք Խ-ի որոնելի պայմանական բաշխման օրենքը՝

$$\begin{array}{cccc} X & 2 & 5 & 8 \\ p(X/y_1) & 3/16 & 3/8 & 7/16 \end{array}$$

$$Ստուգում: \frac{3}{16} + \frac{3}{8} + \frac{7}{16} = 1.$$

գ) Նման ձևով կատանենք Ү-ի պայմանական բաշխման օրենքը՝

$$\begin{array}{ccc} Y & 0,4 & 0,8 \\ p(Y/x_2) & 5/7 & 2/7 \end{array}$$

$$Ստուգում: \frac{5}{7} + \frac{2}{7} = 1.$$

422. Տրված է երկչափ դիսկրետ պատահական մեծությունը՝

Y	X	3	6
10		0,25	0,10
14		0,15	0,05
18		0,32	0,13

Գտնել ա) Խ-ի պայմանական բաշխման օրենքը, այն պայմանով, որ $Y = 10$, բ) Y -ի պայմանական բաշխման օրենքը, այն պայմանով, որ $X = 6$.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Պատ. ա) } & X & 3 & 6 & ; \quad \text{բ) } & Y & 10 & 14 & 17 \\ p(X/10) & 5/7 & 2/7 & ; & p(Y/6) & 5/14 & 5/28 & 13/28 \end{array}$$

**§ 3. Անընդհատ երկչափ պատահական մեծության
բաղադրիչների դիֆերենցիալ և պայմանական
դիֆերենցիալ ֆունկցիաների որոշումը**

Բաղադրիչներից մեկի դիֆերենցիալ ֆունկցիան հավասար է համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիայի անվերջ սահմաններով անհսկական ինտեգրալին. ըստ որում ինտեգրման փոփոխականը համապատասխանում է մյուս բաղադրիչին:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx,$$

Այստեղ ենթադրվում է, որ բազալլիչներից յուրաքանչյուրի հնարավոր արժեքները պատկանում են ամբողջ թվային առանցքին, իսկ եթե հնարավոր արժեքները պատկանում են մի վերջավոր միջակայքի, ապա որպես ինտեգրման սահմաններ վերցվում են համապատասխան վերջավոր թվերը:

Հաղադրիչի գ(x|y) պայմանական դիֆերենցիալ ֆունկցիա, եթե $Y = y$, կոչվում է համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիայի հարաբերությունը $Y=y$ -ի դիֆերենցիալ ֆունկցիային՝

$$\varphi(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx},$$

Նման ձևով որոշվում է Y բաղադրիչի պայմանական դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝

$$\psi(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy},$$

Եթե X և Y պատահական մեծությունների պայմանական դիֆերենցիալ ֆունկցիաները հավասար են նրանց ոչ պայմանական դիֆերենցիալ ֆունկցիաներին, ապա այդպիսի մեծությունները անկախ են:

Երկչափ անընդհատ պատահական մեծության բաշխումը կոչվում է հավասարաչափ, եթե աիրույթում, որին պատկանում են (x, y) բոլոր հնարավոր արժեքները, դիֆերենցիալ ֆունկցիան պահպանում է հաստատուն արժեք:

423. Տրված է անընդհատ երկչափ պատահական մեծության գիֆերենցիալ ֆունկցիան՝

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)},$$

Գտնել՝ ա) բաղադրիչների գիֆերենցիալ ֆունկցիաները,
բ) բաղադրիչների պայմանական գիֆերենցիալ ֆունկցիաները:

Լուծում: ա) Գտնենք X -ի գիֆերենցիալ ֆունկցիան՝

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)} dy,$$

Ինտեգրման ү փոփոխականից չկախված $e^{-\frac{x^2}{2}}$ արտադրիչը դուրս բերենք ինտեգրալի նշանից և մնացած աստիճանացուցը լրացնենք մինչև լրիվ քառակուսի: Այդ գեպքամ

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{\frac{5}{2}}y + \sqrt{\frac{2}{5}}x\right)^2} d\left(\sqrt{\frac{5}{2}}y + \sqrt{\frac{2}{5}}x\right),$$

$$\zeta_{\text{աշշի առնելով}}, \text{որ } \Psi_{\text{ասսոսնի ինտեգրալը}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi},$$

կոստանանք,

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{2}{5\pi}} e^{-0.4x^2},$$

Նման ձեռք կդանենք Y -ի գիֆերենցիալ ֆունկցիան՝

$$f_2(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2y^2},$$

բ) Գտնենք բաղադրիչների պայմանական գիֆերենցիալ ֆունկցիաները Կատարելով ասրբական հաշվումներ, կոստանանք՝

$$\varphi(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5(x+y)^2},$$

$$\psi(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{5}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.1(x+5y)^2},$$

424. Անընդհատ երկչափ պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան

$$f(x, y) = C e^{-x^2 - 2xy - 4y^2},$$

Գտնել՝ ա) C հաստատուն արտադրիչը, բ) բաղադրիչների դիֆերենցիալ ֆունկցիաները, գ) բաղադրիչների պայմանական դիֆերենցիալ ֆունկցիաները:

$$\text{Պատ.} \quad \text{ա) } C = \frac{\sqrt{3}}{\pi}, \quad \text{բ) } f_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}} e^{-0.75x^2},$$

$$f_2(y) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} e^{-3y^2}, \quad \text{զ) } \varphi(x | y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+y)^2},$$

$$\psi(y | x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.25(x+4y)^2},$$

425. Անընդհատ երկչափ պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան $f(x, y) = \cos x \cos y, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},$

$0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ բառակուսու մեջ, բառակուսուց դուրս $f(x, y) = 0$:

Ապացուցել, որ X և Y բաղադրիչներն անկախ են:

Ցուցում: Համոզվել, որ բաղադրիչների ոչ պայմանական դիֆերենցիալ ֆունկցիան հավասար էն համապատասխան պայմանական ֆունկցիաներին:

426. (X, Y) անընդհատ երկչափ պատահական մեծությունը բաշխված է հավասարաչափ 2a և 2b կողմերով ուղղղանկան ներսում, որի սիմետրիայի կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, իսկ կողմերը զուգահեռ են առանցքներին: Գտնել՝ ա) համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան, բ) բաղադրիչների դիֆերենցիալ ֆունկցիաները:

Պատ. ա) $f(x, y) = \frac{1}{4ab}$ սրգած ուղղանկյան ներսում, նրանից դուրս $f(x, y) = 0$, բ) $f_1(x) = \frac{1}{2a}$, $b_{PP} |x| \leq a$, $f_1(x) = 0$, b_{PP} $|x| > a$, $f_2(y) = \frac{1}{2b}$, $b_{PP} |y| \leq b$, $f_2(y) = 0$, $b_{PP} (y) > b$,

427*. Անընդհատ երկչափ պատահական մեծությունը բաշխված է հավասարաչափ $O(0, 0)$, $A(0, 4)$, $B(3, 4)$, $C(6, 0)$ գագաթներով ուղղանկյուն սեղանի ներսում: Գտնել՝ ա) համակարգի գիֆերենցիալ ֆունկցիան, բ) բաղադրիչների գիֆերենցիալ ֆունկցիաները:

Պատ. ա) $f(x, y) = \frac{1}{18}$ սեղանի ներսում, նրանից դուրս $f(x, y) = 0$,

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & b_{PP}, \quad x < 0, \\ \frac{2}{9}, & b_{PP}, \quad 0 < x < 3, \\ -\frac{2}{27}x + \frac{4}{9}, & b_{PP}, \quad 3 < x < 6, \\ 0 & b_{PP}, \quad x > 6, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 0, & b_{PP}, \quad y < 0, \\ -\frac{1}{24}y + \frac{1}{3}, & b_{PP}, \quad 0 < y < 4, \\ 0 & b_{PP}, \quad y > 4, \end{cases}$$

428. (X, Y) անընդհատ երկչափ պատահական մեծությունը բաշխված է հավասարաչափ $O(0, 0)$, $A(0, 8)$, $B(8, 0)$ գագաթներով ուղղանկյուն եռանկյան մեջ: Գտնել՝ ա) համակարգի գիֆերենցիալ ֆունկցիան, բ) բաղադրիչների գիֆերենցիալ և պարմանական գիֆերենցիալ ֆունկցիաները:

$$\text{Պատ. ա) } f(x, y) = \frac{1}{32}, \quad \text{բ) } f_1(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{32}x \quad (0 < x < 8),$$

$$f_2(y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{32}y, \quad (0 < y < 8), \quad \varphi(x|y) = \frac{1}{8-y} \quad (0 < y < 8),$$

$\psi(y|x) = \frac{1}{8-x}$ ($0 < x < 8$): Եշտած միջակայքերից դուքս բոլոր ֆունկցիաները հավասար են՝ զըսյի:

429*. (X, Y) անընդհատ երկչափ պատահական մեծությունը բաշխված է հավասարաչափ $A(-6, 0)$, $B(-3, 4)$, $C(3, 4)$, $D(6, 0)$ սեղանի մեջ: Գտնել՝ $a)$ համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան, $b)$ բաղադրիչների դիֆերենցիալ ֆունկցիաները:

$$Պատ.՝ a) f(x, y) = \frac{1}{36},$$

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & b_{pp} \quad x < -6, \\ \frac{1}{27}x + \frac{2}{9}, & b_{pp} \quad -6 < x < -3, \\ \frac{1}{9}, & b_{pp} \quad -3 < x < 3, \\ -\frac{1}{27}x + \frac{2}{9}, & b_{pp} \quad 3 < x < 6, \\ 0, & b_{pp} \quad x > 6 \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 0, & b_{pp} \quad y < 0, \\ -\frac{1}{24}y + \frac{1}{3}, & b_{pp} \quad 0 < y < 4, \\ 0, & b_{pp} \quad y > 4, \end{cases}$$

§ 4. Երկու անընդհատ պատահական մեծությունների համակարգի թվային բնութագրիչները

Խմանալով բաղադրիչների դիֆերենցիալ ֆունկցիաները, կարելի է գտնել մաթեմատիկական սպասումները և դիսպերսիաները՝

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx, \quad M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) dy,$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f_1(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x) dx - [M(X)]^2,$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} [y - M(Y)]^2 f_2(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_2(y) dy - [M(Y)]^2,$$

Ելքեմն ավելի հարմար է օգտվել համակարգի զիֆերենցիալ փունկցիան պարունակող բանաձևերից (կրկնակի ինտեղրաները հաշվվում են համակարգի հնարավոր արժեքների տիրույթով):

$$M(X) = \int \int x f(x, y) dx dy, M(Y) = \int \int y f(x, y) dx dy,$$

$$D(X) = \int \int [x - M(X)]^2 f(x, y) dx dy = \int \int x^2 f(x, y) dx dy - [M(X)]^2,$$

$$D(Y) = \int \int [y - M(Y)]^2 f(x, y) dx dy = \int \int y^2 f(x, y) dx dy - [M(Y)]^2.$$

(X, Y) համակարգի կոչ կարդի սկզբանական մոմենտ կոչվում է $X^k Y^l$ արտազդայի մաթեմատիկական սոլասումը:

$$\mu_{k, l} = M[X^k Y^l],$$

Մասնավորապես, $\mu_{1,0} = M(X)$, $\mu_{0,1} = M(Y)$:

(X, Y) համակարգի կոչ կարդի կենտրոնական $\mu_{k, l}$ մոմենտ կոչվում է համապատասխան շեղումների կոչ և աստիճանների արտազդայի մաթեմատիկական սոլասումը:

$$\mu_{k, l} = M\{[X - M(X)]^k [Y - M(Y)]^l\},$$

Մասնավորապես,

$$\mu_{1, 0} = M[X - M(X)] = 0, \mu_{0, 1} = M[Y - M(Y)] = 0,$$

$$\mu_{2, 0} = M[X - M(X)]^2 = D(X), \mu_{0, 2} = M[Y - M(Y)]^2 = D(Y),$$

(X, Y) համակարգի μ_{xy} կոռելյացիոն մոմենտ կոչվում է 1-1 կարգի $\mu_{1, 1}$ կենտրոնական մոմենտը:

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\},$$

X և Y մեծությունների կոռելյացիայի զործակից կոչվում է կոռելյացիոն մոմենտի հարաբերությունը այդ մեծությունների միջև քառակուսային շեղումների արտազդային:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

Կոռելյացիայի զործակիցը վերացական մեծություն է, բայց սրբած $|r_{xy}| \leq 1$, կոռելյացիայի զործակիցը ծառայում է որպես X և Y մեծությունների միջև գծային կապի սերտության գնահատական՝ սրբած մոտ է կոռելյացիայի զործակիցի բացարձակ արժեքը 1-ի, այնուան կապը ուժեղ է, որը ան մոտ է կոռելյացիայի զործակիցը 0-ի, այնուան կապը թույլ է:

Պատահական մեծությունները կոչվում են կոռելացված, եթե նրանց կոռելացիոն մոմենտը 0-ից տարբեր է:

Պատահական մեծությունները կոչվում են չկոռելացված, եթե նրանց կոռելացիոն մոմենտը հավասար է 0-ի:

Եթեւ կոռելացված մեծությունները անկախ չեն, եթե երկու մեծությունները անկախ չեն, ապա նրանք կարող են լինել ինչպես կոռելացված, այնպես էլ չկոռելացված:

Եթեւ մեծությունների անկախությունից հետևում է նրանց չկոռելացված լինելը, բայց չկոռելացված լինելուց գեռ չի հետևում այդ մեծությունների անկախությունը (նորմալ բաշխված մեծությունների չկոռելացված լինելուց հետևում է նրանց անկախությունը):

Անընդհատ X և Y մեծությունների կոռելացիոն մոմենտը կարելի է գտնել

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [X - M(X)] [Y - M(Y)] f(x, y) dx dy \quad \text{կամ}$$

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy - M(X) \cdot M(Y),$$

բանաձևերով:

430. Տրված է (X, Y) անընդհատ երկչափ պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան.

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-x^2-y^2}, & (x > 0, y > 0), \\ 0 & , \quad (x < 0 \text{ կամ } y < 0): \end{cases}$$

Գտնել՝ ա) X և Y բաղադրիչների մաթեմատիկական սպասումները, բ) բաղադրիչների դիսպերսիաները:

Լուծում: ա) Ազգրից գտնենք X -ի դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝

$$f_1(x) = \int_0^{\infty} f(x, y) dy = 4xe^{-x^2} \int_0^{\infty} ye^{-y^2} dy = 2xe^{-x^2} \quad (x > 0):$$

Նույն կերպ ստանում ենք

$$f_2(y) = 2ye^{-y^2}, \quad (y > 0):$$

Գտնենք X բաղադրիչի մաթեմատիկական սպասումը՝

$$M(X) = \int_0^{\infty} xf_1(x) dx = \int_0^{\infty} x(2xe^{-x^2}) dx:$$

Ինտեգրելով՝ մասերով և հաշվի առնելով, որ Պուասոնի
ինտեգրալը $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, կստանանք $M(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

ակնհայտ է, որ $M(Y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

բ) Գտնենք X -ի դիսպերսիան՝

$$D(X) = \int_0^{\infty} x^2 f_1(x) dx - [M(X)]^2 =$$

$$= \int_0^{\infty} x^2 (2xe^{-x^2}) dx - \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right]^2 = 1 - \frac{\pi}{4}, \quad \text{ակնհայտ է, որ}$$

$$D(Y) = 1 - \frac{\pi}{4},$$

431. Տրված է (X, Y) երկչափ պատահական մեծոթիւնների գիֆերենցիալ ֆունկցիան՝

$$f(x, y) = \begin{cases} 36xye^{-(x^2+y^2)}, & (x > 0, y > 0) \\ 0, & (x < 0 \text{ կամ } y < 0), \end{cases}$$

Գտնել բաղադրիչների մաթեմատիկական սպասումները և դիսպերսիաները՝

$$\text{Պատ.՝ } M(X) = M(Y) = \frac{\sqrt{3\pi}}{6}, \quad D(X) = D(Y) = \frac{4 - \pi}{12}.$$

432. Տրված է (X, Y) երկչափ անընդհատ պատահական մեծոթիւնների գիֆերենցիալ ֆունկցիան՝ $f(x, y) = 2\cos x \cos y$ $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{4}$. Քսանակուստ մեջ, քսանակուստ գործությունը $f(x, y) = 0$. Գտնել բաղադրիչների մաթեմատիկական սպասումները՝

$$\text{Պատ.՝ } M(X) = M(Y) = \frac{\pi + 4 - 4\sqrt{2}}{4},$$

433. Տրված է (X, Y) երկչափ անընդհատ պատահական մեծոթիւնների գիֆերենցիալ ֆունկցիան՝ $f(x, y) = \frac{1}{2}\sin(x+y)$.

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ քառակուսու մեջ, քառակուսուց գուրս՝ $f(x, y) = 0$: Գտնել բաղադրիչների մաթեմատիկական սպասումները և դիսպերսիաները:

$$\text{Պատ.} \quad M(X) = M(Y) = \frac{\pi}{4}, \quad D(X) = D(Y) = \frac{\pi^2 + 8\pi - 32}{16};$$

434. Տրված է (X, Y) երկչափ անընդհատ պատահական մեծության դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝ $f(x, y) = \frac{1}{4} \sin xy$, $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$. Քառակուսու մեջ, քառակուսուց գուրս $f(x, y) = 0$: Գտնել՝ ա) բաղադրիչների մաթեմատիկական սպասումները և դիսպերսիաները, բ) կոռելյացիոն մոմենտը:

$$\text{Պատ.} \quad \text{ա)} \quad M(X) = M(Y) = \frac{\pi}{2}, \quad D(X) = D(Y) = \pi^2 - 4,$$

$$\text{բ)} \quad \mu_{xy} = 0;$$

435. Տրված են (X, Y) անընդհատ երկչափ պատահական մեծության անկախ բաղադրիչների դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝ $g(x, y)$:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & b_{pp} x < 0, \\ 5e^{-5x}, & b_{pp} x \geq 0, \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} 0, & b_{pp} y < 0, \\ 2e^{-2y}, & b_{pp} y \geq 0; \end{cases}$$

Գտնել՝ համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան, բ) համակարգի ինտեգրալ ֆունկցիան:

Ցուցում. Եթե համակարգի բաղադրիչները անկախ են, ապա համակարգի դիֆերենցիալ և ինտեգրալ ֆունկցիաները հավասար են համապատասխանաբար բաղադրիչների դիֆերենցիալ և ինտեգրալ ֆունկցիաների արտագրյալին:

$$\text{Պատ.} \quad \text{ա)} \quad f(x, y) = \begin{cases} 0, & b_{pp} x < 0 \text{ կամ } y < 0, \\ 10e^{-(5x+2y)}, & b_{pp} x > 0, \quad y > 0, \end{cases}$$

$$\text{բ)} \quad F(x, y) = \begin{cases} 0, & b_{pp} x < 0, \quad b_{pp} y < 0, \\ (1 - e^{-5x})(1 - e^{-2y}), & b_{pp} x > 0, \quad y > 0; \end{cases}$$

436. (X, Y) երկչափ անընդհատ պատահական մեծությունը բաշխված է հավասարաչափ շառավղով շրջանում,

որի կենտրոնը գտնվում է սկզբնակետում: Ապացուցել, որ X -ը և Y -ը անկախ չեն, բայց չկոուելացված են:

Ցուցում: Համեմատել բաղադրիչների պայմանական և ոչ պայմանական դիֆերենցիալ ֆունկցիաները, համոզվել, որ կոռելյացիոն մոմենտը հավասար է 0-ի:

$$\text{Պատ.} \quad f_1(x) = -\frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2 - x^2}, \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{r^2 - y^2}},$$

$$f_2(y) = \frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2 - y^2}, \quad \psi(y | x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

437. Ապացուցել, որ եթե (X, Y) համակարգի դիֆերենցիալ ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել երկու ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով, որոնցից մեկը կախված է միայն X -ից, իսկ մյուսը՝ միայն Y -ից, ապա X և Y մեծոթունները անկախ են:

Լուծում: Պայմանի համաձայն

$$f(x, y) = \varphi(x) \psi(y), \quad (*)$$

Գտնենք բաղադրիչների դիֆերենցիալ ֆունկցիաները՝

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) dy, \quad (***)$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \psi(y) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx. \quad (****)$$

Արտահայտենք $\varphi(x) \cdot \mu^x \cdot e^{-\mu y}$ և $\psi(y) \cdot \mu^y \cdot e^{-\mu x}$:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) dy, \quad \psi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

Համաձայն $(*)$ -ի

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) dy \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx}.$$

Հաշվի առնելով, որ գիֆերենցիալ ֆունկցիալի երկրորդ
հատկության համաձայն

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1,$$

հետևաբար,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \psi(y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) dy = 1,$$

վերջնականապես կստանանք

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y),$$

Այսպիսով, գիտարկվող երկչափ պատճական մեծության գիֆերենցիալ ֆունկցիան հավասար է բաղադրիչների գիֆերենցիալ ֆունկցիաների արտադրյալին: Այստեղից հետեւմ է, որ X -ը և Y -ը անկախ են, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել:

438. Ապացուցել, որ եթե X -ը և Y -ը կախված են գծայնորեն՝ $Y = aX + b$, ապա կոռելյացիալի գործակցի բացարձակ արժեքը հավասար է մեկի:

Լուծում: Համաձայն կոռելյացիալի գործակցի սահմանման

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

որտեղ

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}, \quad (*)$$

Դանենք Y -ի մաթեմատիկական սպասումը՝

$$M(Y) = M(aX + b) = aM(X) + b, \quad (**)$$

Տեղադրելով $(**)$ -ը $(*)$ -ի մեջ, տարրական ձևավորություններից հետո կստանանք.

$$\mu_{xy} = aM[X - M(X)]^2 = aD(X) = a\sigma_x^2,$$

Հաշվի առնելով, որ

$$Y - M(Y) = (aX + b) - (aM(X) + b) = a[X - M(X)],$$

գտնենք Y -ի դիսպերսիան՝

$$D(Y) = M[Y - M(Y)]^2 = a^2 M[X - M(X)]^2 = a^2 \sigma_x^2,$$

$$\text{Այստեղից } \sigma_y = |a| \sigma_x:$$

Հետևաբար, կոռելացիայի զորժակացը

$$\rho_{xy} = \frac{\rho_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{a \sigma_x^2}{\sigma_x(|a| \sigma_x)} = \frac{a}{|a|},$$

եթե $a > 0$, ապա $\rho_{xy} = 1$; եթե $a < 0$, ապա $\rho_{xy} = -1$ ։
Այսպիսով, $|\rho_{xy}| = 1$, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել:

Ե Ր Բ Ո Ր Դ մ ա ս

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐԻԵՐԸ

Ի Ն Ն Ե Բ Ո Ր Դ Գ Լ Ո Ւ Խ
ԸՆՏՐԱԿԱՑԻՒՆ ԵՊԱՆԱԿ

§ 1. Ընտրանքի վիճակագրական բաշխումը

Ենթադրենք X քանակական (դիմքեա կամ անընդհատ) հայտանիշի ուսումնասիրման համար զլիալոր համախմբությունից հանված է ո ծավալի x_1, x_2, \dots, x_n ընտրանք: X հայտանիշի դիտված x_i արժեքները կոչվում են տարրերակներ, իսկ անման կարգով գրված տարրերակների հաջորդականությունը՝ վարիացիոն շարք: Վարիացիոն շարքի x_i տարրերակների և նրանց համապատասխան n_i հաճախությունների (բոլոր հաճախությունների գումարը հավասար է ընտրանքի ո ծավալին) կամ հարաբերական w_i հաճախությունների համախությունում են ընտրանքի վիճակագրական բաշխում: Ընտրանքի վիճակագրական բաշխումը կարելի է տալ նաև, հաջորդական միջակայքերի և համապատասխան հաճախությունների տեսքով (m_i հակայքի հաճախությունը որոշվում է որպես այդ միջակայքին պատկանող տարրերակների հաճախությունների գումար):

439. 1) Ընտրանքը արված է հաճախությունների բաշխուման տեսքով:

$$x_i \quad 2 \quad 5 \quad 7$$

$$n_i \quad 1 \quad 3 \quad 6$$

Գտնել հարաբերական հաճախությունների բաշխումը:

Լուծում: Հաշվենք ընտրանքի ծավալը՝

$$n = 1 + 3 + 6 = 10:$$

Հաշվենք հարաբերական հաճախությունները՝

$$w_1 = \frac{1}{10} = 0,1; \quad w_2 = \frac{3}{10} = 0,3; \quad w_3 = \frac{6}{10} = 0,6;$$

Կազմենք հարաբերական հաճախությունների որոնելի բաշխումը՝

x_i	2	5	7
w_i	0,1	0,3	0,6

$$U \text{ առ գումար: } 0,1 + 0,3 + 0,6 = 1:$$

440. Ընտրանքը տրված է հաճախությունների բաշխուման տեսքով՝

x_i	4	7	8	12
n_i	5	2	3	10

Գտնել հարաբերական հաճախությունների բաշխումը:

Պատ.	x_i	4	7	8	12
	w_i	0,25	0,10	0,15	0,50

§ 2. Ընտրանքային բաշխման ֆունկցիա

Ընտրանքային բաշխման ֆունկցիա (μ -արանքի բաշխման ֆունկցիա) կոչվում է $F^*(x)$ ֆունկցիան, որը չ-ի յուրաքանչյուր արժեքի համար հավասար է $X < x$ պատահույթի հարաբերական հաճախությանը՝

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

որտեղ n_x -ը չ-ից փոքր տարբերակների թիվն է, n -ը՝ μ -արանքի ծավալը:

Ընտրանքային ֆունկցիան օժտված է հետեւյալ հատկություններով՝

Համեմություններ 1. Ընտրանքային ֆունկցիայի արժեքները պատկանում են $[0, 1]$ հատվածին:

Համեմություններ 2. $F^*(x)$ -ը չնվազող ֆունկցիա է:

Համեմություններ 3. Եթե x_1 -ը ամենավորը տարբերակն է, իսկ X_{n-p} ամենամեծը, ապա $F^*(x) = 0$, եթե $x \leq x_1$ և $F^*(x) = 1$, եթե $x > X_n$.

441. Գտնել հետևյալ ընտրանքի բաշխմանը համապատասխան ընտրանքային ֆունկցիան:

$$x_i \quad 1 \quad 4 \quad 6$$

$$n_i \quad 10 \quad 15 \quad 25$$

Լուծում: Գտնենք ընտրանքի ժավալը՝

$$n = 10 + 15 + 25 = 50,$$

Այնավոք տարրերակը հավասար է 1-ի, հետևաբար՝

$$F^*(x) = 0, \quad b_{pp} \quad x \leq 1,$$

$X < 4$, այսինքն $x_1 = 1$ արժեքը դիտվել է 10 անգամ, հետևաբար

$$F^*(x) = \frac{10}{50} = 0,2, \quad b_{pp} \quad 1 < x \leq 4,$$

$x < 6$, այսինքն $x_1 = 1$ և $x_2 = 4$ արժեքները դիտվել են $10 + 15 = 25$ անգամ, հետևաբար՝

$$F^*(x) = \frac{25}{50} = 0,5, \quad b_{pp} \quad 4 < x \leq 6,$$

Քանի որ $x = 6$ — ամենամեծ տարրերակն է, ապա

$$F^*(x) = 1, \quad b_{pp} \quad x > 6,$$

Կազմենք որոնելի ընտրանքային ֆունկցիայի արտահայտությունը՝

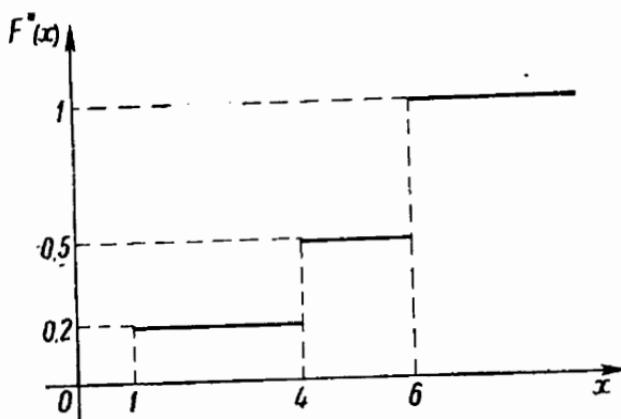
$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & b_{pp} \quad x \leq 1, \\ 0,2, & b_{pp} \quad 1 < x \leq 4, \\ 0,5, & b_{pp} \quad 4 < x \leq 6, \\ 1, & b_{pp} \quad x > 6, \end{cases}$$

Այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 11-ում:

442. Գտնել տրված ընտրանքին համապատասխան բաշխման ընտրանքային ֆունկցիան:

$$a) \quad x_i \quad 2 \quad 5 \quad 7 \quad 8 \\ n_i \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 4;$$

$$b) \quad x_i \quad 4 \quad 7 \quad 8 \\ n_i \quad 5 \quad 2 \quad 3;$$



նկ. 11

Պատճ. a) $F^*(x) = \begin{cases} 0 & b_{pp} \quad x \leq 2, \\ 0,1 & b_{pp} \quad 2 < x \leq 5, \\ 0,4 & b_{pp} \quad 5 < x \leq 7, \\ 0,6 & b_{pp} \quad 7 < x \leq 8, \\ 1 & b_{pp} \quad x > 8, \end{cases}$

b) $F^*(x) = \begin{cases} 0 & b_{pp} \quad x \leq 4, \\ 0,4 & b_{pp} \quad 4 < x \leq 7, \\ 0,7 & b_{pp} \quad 7 < x \leq 8, \\ 1 & b_{pp} \quad x > 8 \end{cases}$

§ 3. Պոլիգոն և հիստոգրամ

Ա. Դիսկրետ բաշխումով X հայտանիշ

Հանախուրյունների պոլիգոն կոչվում է այն բեկյալը, որի հատվածները միացնում են $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$ կետերը, որտեղ x_i -ը՝ ընտրանքի տարրերիներն են, իսկ n_i -ը՝ նրանց համապատասխան հաճախությունները:

Հարաբերական հաճախուրյունների պոչվում է այն բեկ-
յալը, որի համապատճերը միացնում են (x_1, w_1), (x_2, w_2), ..., (x_k, w_k)
կետերը, որտեղ x_i -երը ընտրանքի տարրերակներն են, իսկ w_i -երը՝
նրանց համապատասխան հարաբերական հաճախությունները:

Բ. Անընդհատ բաշխումով X հայտանիշ:

Եթե հայտանիշը բաշխված է անընդհատ, բոլոր գիտված ար-
ժեքները պարունակում միջակայքը տրնում են ի երկարության մի
շարք մասնակի միջակայքերի և որոշում են ի-րդ միջակայքում ընկած
տարրերակների հաճախությունների ու գումարը: Հաճախուրյունների
հիստոգրամ անվանում են այն ուղղանկյուններից կազմված սանդղաձև
պատկերը, որնց հիմքերը ի երկարությամբ մասնակի միջակայքերն
են, իսկ բարձրությունները հավասար են համապատասխան $\frac{n_i}{h}$ (հա-
ճախությունների խտության) հարաբերությանը: ի-րդ մասնակի ուղ-
ղանկյան մակերեսը հավասար է $h \cdot \frac{n_i}{h} = n_i$, ի-րդ միջակայքն ընկած
տարրերակների հաճախությունների գումարին: Հաճախությունների
հիստոգրամի մակերեսը հավասար է բոլոր հաճախությունների գումա-
րին, այսինքն՝ ընտրանքի ծավալին:

Հարաբերական հաճախուրյունների հիստոգրամ կոչվում է այն
ուղղանկյուններից կազմված սանդղաձև պատկերը, որնց հիմքերը ի
երկարությամբ մասնակի միջակայքերն են, իսկ բարձրությունները
հավասար են համապատասխան $\frac{w_i}{h}$ (հարաբերական հաճախություն-
ների խտության) հարաբերությանը: ի-րդ մասնակի ուղղանկյան մա-
կերեսը հավասար է $h \cdot \frac{w_i}{h} = w_i$, ի-րդ միջակայքն ընկած տարրերակ-
ների հարաբերական հաճախությունների գումարին: Հարաբերական
հաճախությունների հիստոգրամի մակերեսը հավասար է բոլոր հարա-
բերական հաճախությունների գումարին, այսինքն՝ մեկի:

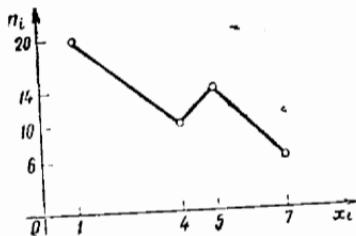
**443. Ընտրանքի տրված բաշխումով կառուցել հաճախու-
թյունների պոլիգոնը:**

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

Լուծում: Աբսցիսների առանցքի վրա տեղադրենք x_i
տարրերակները, իսկ օրդինատների առանցքի վրա՝ նրանց
համապատասխան n_i հաճախությունները: (x_i , n_i) կետերը

միացնելով տղղի հատվածներով, կստանանք հաճախությունների որոնելի պոլիգոնը (նկ. 12):

444. Ընտրանքի տրված բաշխումով կառուցել հաճախությունների պոլիգոնը:



նկ. 12

ա)	x_i	2	3	5	6
	n_i	10	15	5	20

բ)	x_i	15	20	25	30	10
	n_i	10	15	30	20	25

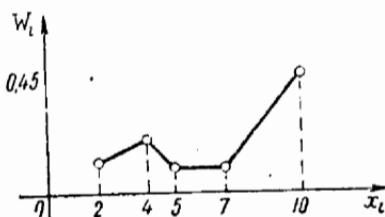
445. Ընտրանքի տրված բաշխումով կառուցել հարաբերական հաճախությունների պոլիգոնը:

ա)	x_i	2	4	5	7	10
	w_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

բ)	x_i	1	4	5	8	9
	w_i	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1

գ)	x_i	20	40	65	80
	w_i	0,1	0,2	0,3	0,4

I. ուժում: ա) Արևաշխների առանցքի վրա ակտորինք x_i տարրերակները, իսկ օրդինատների առանցքի վրա՝ համապատասխան հարաբերական w_i հաճախությունները: (x_i, w_i): կետերը միացնելով տղղի հատվածներով, կստանանք հարաբերական հաճախությունների որոնելի պոլիգոնը (նկ. 13):

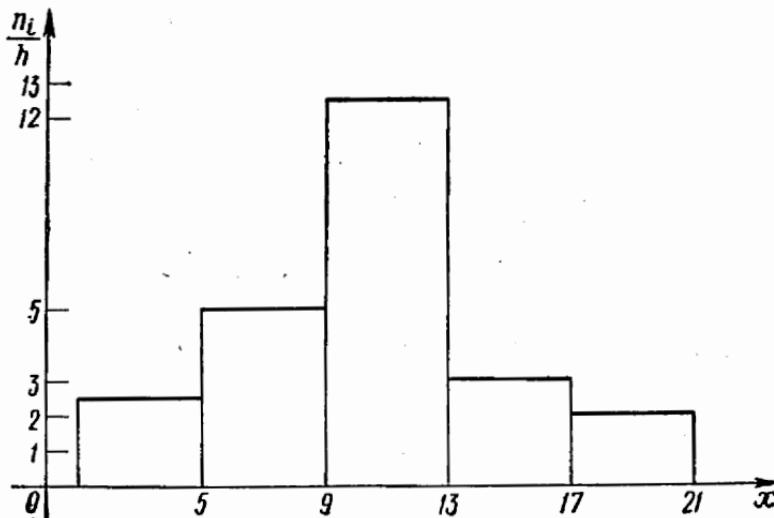


նկ. 13

446. Տրված $n=100$ ժակալի ընտրանքի բաշխումով, կառուցել հաճախությունների հիստոգրամը:

Միջակայքի հաճարը	Մասնակի ինտերվալը	Միջակայքի $\text{տար-$	$\text{Հաճա-$
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i/h
1	1—5	10	2,5
2	5—9	20	5
3	9—13	50	12,5
4	13—17	12	3
5	17—21	8	2

Լուծում: Աբացիսների առանցքի վրա կառուցենք $h=4$ երկարությամբ տրված միջակայքերը: Տանենք այդ միջակայքերի վրա աբացիսների առանցքին զուգահեռ հատվածներ, որոնք գտնվում են նրանից $\frac{n_i}{h}$ համապատասխան հաճախության խոռոչանը հավասար հեռավորության վրա օրինակ, (1,5) միջակայքի վրա գծենք աբացիսների առանց-



Քին գուգահեռ հատված, որի հեռավորությունը այդ առանցքից հավասար է $\frac{n_i}{h} = \frac{10}{4} = 2,5$: Հաճախանմանորեն կառուցվում են մյուս հատվածները: Հաճախանմանորենի որոշնելի հիստոգրամը պատկերված է նկ. 14-ում:

447. Ընտրանքի արված բաշխումով կառուցել հաճախանմանների հիստոգրամը

ա)

$\sum_{\text{համարը}}^{\text{Միջակայքի}}$	$\sum_{\text{միջակայքը}}^{\text{Մասնակի}}$	$\sum_{\text{միջակայքի տարրերը}}^{\text{Միջակայքի հաճախությունների գումարը}}$	$\sum_{\text{իտությունը}}^{\text{Հաճախության խտությունը}}$
i	$x_i - x_{i+1}$	n _i	n _i /h
1	2—7	5	
2	7—12	10	
3	12—17	25	
4	17—22	6	
5	22—27	4	

բ)

$\sum_{\text{համարը}}^{\text{Միջակայքի}}$	$\sum_{\text{միջակայքը}}^{\text{Մասնակի}}$	$\sum_{\text{միջակայքի տարրերը}}^{\text{Միջակայքի հաճախությունների գումարը}}$	$\sum_{\text{իտությունը}}^{\text{Հաճախության խտությունը}}$
i	$x_i - x_{i-1}$	n _i	n _i /h
1	3—5	4	
2	5—7	6	
3	7—9	20	
4	9—11	40	
5	11—13	20	
6	13—15	4	
7	15—17	6	

Յուրաքանչյան հաշվել բոլոր միջակայքերին համապատասխան հաճախությունների $\frac{n_i}{h}$ խտությունները և լրացնել աղյուսակի վերջին սյունը:

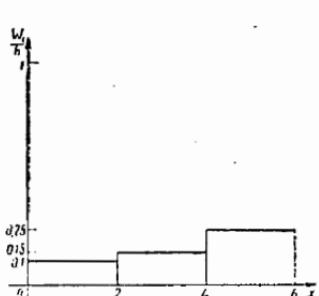
448. Ըստրանքի տրված բաշխումով կառուցել հարաբերական հաճախությունների հիմոդրամը:

$\sum_{\text{համարը}}^{\text{Միջակայքի}}$	$\sum_{\text{ասնակի}}^{\text{միջակայքը}}$	$\sum_{\text{ինքը}}^{\text{միջակայքի}} \text{տարբերակների} \text{հաճախությունների} \text{գումարը}$
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	0—2	20
2	2—4	30
3	4—6	50
		$n = \sum n_i = 100$

Լուծում: Հաշվինք հարաբերական հաճախությունները՝

$$w_1 = \frac{20}{100} = 0,2, \quad w_2 = \frac{30}{100} = 0,3, \quad w_3 = \frac{50}{100} = 0,5:$$

Գտնենք հարաբերական հաճախությունների խտությունները, հաշվի առնելով, որ միջակայքի երկարությունը $h=2$.



Նկ. 15

$$\frac{w_1}{h} = \frac{0,2}{2} = 0,1,$$

$$\frac{w_2}{h} = \frac{0,3}{2} = 0,15,$$

$$\frac{w_3}{h} = \frac{0,5}{2} = 0,25:$$

Աբսցիսների առանցքի վրա կառուցենք տրված մասնակի միջակայքերը: Այդ միջակայքերի վրա տանենք հատվածներ, որոնք զուգահեռ են աբսցիսների առանցքին և գույնականությամբ համապատասխան հաճախություններին:

Համապատասխան հաճախություններին համապատասխան հարաբերական հաճախություններին հավասար հեռավորության վրա: Օրինակ, $(0, 2)$ միջակայքի վրա կառուցենք աբսցիսների առանցքին գույնականությամբ համապատասխան հաճախություններին: Այդ միջակայքի վրա կառուցենք աբսցիսների առանցքին համապատասխան հաճախություններին:

Հարաբերական հաճախությունների որոնելի հիմոդրամը պատկերված է նկ. 15-ում:

449. Ընտրանքի տվյալները բաշխումով կառուցել հարաբերական հաճախությունների հիստոգրամը:

ա)

$I_{\text{իջակայքի}}^{U}$ համարը	$I_{\text{ասնակի}}^{U}$ $I_{\text{իջակայքը}}$	$I_{\text{ասնակի}}^{U}$ $I_{\text{իջակայքի}}^{U}$ $\text{տարբերակների հաճախությունների գումարը}$
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	10—15	2
2	15—20	4
3	20—25	8
4	25—30	4
5	30—35	2
		$n = \sum n_i = 20$

բ)

$I_{\text{իջակայքի}}^{U}$ համարը	$I_{\text{ասնակի}}^{U}$ $I_{\text{իջակայքը}}$	$I_{\text{ասնակի}}^{U}$ $I_{\text{իջակայքի}}^{U}$ $\text{տարբերակների հաճախությունների գումարը}$
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	2—5	6
2	5—8	10
3	8—11	4
4	11—14	5
		$n = \sum n_i = 25$

Տակ պատճեն նախապես գտնել հարաբերական հաճախությունները և նրանց խորոշ յուրաքանչյուր միջակայքի համար:

ՏԱՄՆԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ԲԱՇԽԵՄԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ՎԵՃԱԿԱԳՐԱԿԱՆ
ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐԸ

§ 1. Կետային գնահատականներ

Կետային կոչվում է այն վիճակադրական գնահատականը, որը որոշվում է մեկ թվով:

Յնչեղելի կոչվում է այն կետային գնահատականը, որի մաթեմատիկական սպասումը ընտրանքի ցանկացած ծավալի դեպքում հավասար է գնահատվող պարամետրին:

Ենթելի է կոչվում այն կետային գնահատականը, որի մաթեմատիկական սպասումը հավասար չէ գնահատվող պարամետրին:

Գլխավոր միջինի (մաթեմատիկական սպասման) համար անշեղելի գնահատական ծառայում է ընտրանքային միջինը:

$$\bar{x}_e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i,$$

որտեղ x_i -ն ընտրանքի տարբերակն է, n_i -ն՝ այդ տարբերակի հաճախությունը, $n = \sum_{i=1}^k n_i$ ՝ ընտրանքի ծավալը:

Դիտողը պարզ է, որ եթե x_i սկզբնական տարբերակները մեծ թվեր են, ապա հաշվումների պարզության համար նպատակահարմաք է բոլոր տարբերակներից հանել միենունը C հաստատունը, այսինքն անցնել պայմանական սի = $x_i - C$ տարբերակներին (որպես C օգտակար է ընտրել ընտրանքային միջինին մոտ որևէ թիվ, բայց քանի որ ընտրանքային միջինը անհայտ է, ապա C հաստատունը ընտրում են «աչքաշափով»): Այդ դեպքում

$$\bar{x}_e = C + \frac{1}{n} \sum n_i u_i,$$

Գլխավոր դիսպերսիայի համար շեղելի գնահատական է ծառայում ընտրանքային դիսպերսիան:

$$D_e = \frac{1}{n} \sum n_i (x_i - \bar{x}_e)^2,$$

Այս գնահատութեանը շեղելի է, քանի որ

$$M[D_e] = \frac{n-1}{n} D_q,$$

Ավելի հարմար է

$$D_e = (\bar{x}^2) - [\bar{x}]^2 = \frac{1}{n} \sum n_i x_i^2 - \left[\frac{1}{n} \sum n_i x_i \right]^2$$

բանաձևը:

Դիտողություն 2: Եթե x_i սկզբնական տարրերակները մեծ թվեր են, ապա նորատարակամար է բոլոր տարրերակներից հանել միենունը C հաստատունը, որը հավասար է կամ քիչ է տարրերիում ընտրանքային միջինից, այսինքն անցնել պայմանական $u_i = x_i - C$ տարրերակներին (q բանից դիսպերսիան չի փոխվում): Այդ գեղեցում

$$D_e(X) = D_e(u) = \bar{u}^2 - [\bar{u}]^2 = \frac{1}{n} \sum n_i u_i^2 - \left[\frac{1}{n} \sum n_i u_i \right]^2:$$

Դիտողություն 3: Եթե սկզբնական տարրերակները տասնորդական կոտորակներ են և ստորակետից հետո պարունակում են կ նիշ, ապա կոտորակների նկատմամբ զործողություններ կատարելուց խոռոչափելու համար սկզբնական տարրերակները բազմապատճեւմ են $C = 10^k$ հաստատունով, այսինքն անցնում են պայմանական $u_i = Cx_i$ տարրերակներին: Դրանից դիսպերսիան կմեծանա C^2 անգամ: Այդ պատճառով, պայմանական տարրերակներով դիսպերսիան հաշվելուց հետո, անհրաժեշտ է այն բաժանել C^2 -ու վրա,

$$D_e(X) = \frac{D_e(u)}{C^2},$$

Գլխավոր դիսպերսիայի համար անշեղելի գնահատական ժառանգում է, ուղղված ընտրանքային դիսպերսիան՝

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_e = \frac{1}{n-1} \sum n_i (x_i - \bar{x}_e)^2,$$

Ավելի հարմար է

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum n_i x_i^2 - \frac{1}{n} \left[\sum n_i x_i \right]^2 \right\} \text{բանաձևը:}$$

Պայմանական տարրերակներով այն ունի հետեւյալ տեսքը՝

$$S_u^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum n_i u_i^2 - \frac{1}{n} \left[\sum n_i u_i \right]^2 \right\},$$

Ենդ որում, եթե $u_i = x_i - C$, ապա $s_x^2 = s_u^2$, եթե $u_i = Cx_i$, ապա
 $s_x^2 = \frac{s_u^2}{C^2}$:

Դիտություն 4: Մեծ թվով ավալներ լինելու դեպքում օգտվում են արտադրյալների եղանակից (տես զլ. XI, § 1) կամ զումարների եղանակից (տես զլ. XI, § 2):

450. Գլխավոր համախմբությունից հանված է $n = 50$ ժավալի ընտրանք՝

տարբերակը	x_i	2	5	7	10
հաճախությունը	n_i	16	12	8	14

Հաշվել գլխավոր միջինի անշեղելի գնահատականը:

Լուծում: Գլխավոր միջինի համար անշեղելի գնահատական ծառայում է ընտրանքային միջինը՝

$$\bar{x}_c = \frac{1}{n} \sum n_i x_i = \frac{16 \cdot 2 + 12 \cdot 5 + 8 \cdot 7 + 14 \cdot 10}{50} = 5,76,$$

451. Գլխավոր համախմբությունից հանված է $n = 60$ ժավալի ընտրանք՝

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Գտնել գլխավոր միջինի անշեղելի գնահատականը:

Պատ.՝ $\bar{x}_c = 4$.

452. Տրված է ո ժավալի ընտրանքի սկզբնական տարբերակների բաշխումը՝

x_1, x_2, \dots, x_k

n_1, n_2, \dots, n_k

Ապացուցել, որ

$$\bar{x}_e = C + \frac{1}{n} \sum n_i u_i,$$

որտեղ $u_i = x_i - C$ -ը պարբանական տարբերակներն են:
և ծում մում Քանի որ $u_i = x_i - C$, ապա $n_i u_i = n_i(x_i - C)$.
գումարելով ձախ և աջ մասերը ըստ բոլոր էերի, ստանում
ենք՝

$$\sum n_i u_i = \sum n_i (x_i - C)$$

Կամ

$$\sum n_i u_i = \sum n_i x_i - C \sum n_i = \sum n_i x_i - Cn:$$

Այսաեղից

$$\sum n_i x_i = Cn + \sum n_i u_i:$$

Հետեւաբար,

$$\frac{1}{n} \sum n_i x_i = C + \frac{1}{n} \sum n_i u_i$$

Կամ

$$\bar{x}_e = C + \frac{1}{n} \sum n_i u_i,$$

ինչ պահանջվում էր ապացուցել:

453. Տրված $n = 10$ ծավալի բնարանքի բաշխումով
գանել ընարանքային միջինը:

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

և ծում մում Ակզենական տարբերակները մեծ թվեր են,
ուսափ անցնենք $u_i = x_i - 1270$ պարբանական տարբերակ-
ներին: Արդյանքում ստանում ենք պարմանական տարբե-
րակների հետեւաբար բաշխումը՝

u_i	-20	0	10
n_i	2	5	3

Գտնենք որոնելի ընտրանքային միջինը:

$$\bar{x}_e = C + \frac{1}{n} \sum n_i u_i = 1270 + \frac{2(-20) + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 10}{10} = \\ = 1269.$$

454. Տրված $n=20$ ժակալի ընտրանքի բաշխումների գտնել ընտրանքային միջինը:

x_i	2560	2600	2620	2650	2700
n_i	2	3	10	4	1

Ցուցում: Անցնել $u_i = x_i - 2620$ պայմանական տարբերակներին:

Պատ.՝ $\bar{x}_p = 2621$.

455. $n=41$ ժակալի ընտրանքի օգնությամբ հաշված է գլխավոր դիսպերսիայի $D_e=3$ շեղելի գնահատականը:

Գտնել գլխավոր համախմբության դիսպերսիայի անշեղելի գնահատականը:

Լուծում: Որոնելի անշեղելի գնահատականը հավասար է ուղղված դիսպերսիային՝

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_e = \frac{41}{40} \cdot 3 = 3,075.$$

456. $n=51$ ժակալի ընտրանքի օգնությամբ հաշված է գլխավոր դիսպերսիայի $D_e=5$ շեղելի գնահատականը: Գտնել գլխավոր համախմբության դիսպերսիայի անշեղելի գնահատականը:

Պատ.՝ $s^2 = 5,1$.

457. Զողի երկարությունը միւնույն գործիքով (առանց սիստեմատիկ սխալների) չափված է 5 անգամ: Ստացվել են հետեւյալ արդյունքները՝ 92, 94, 103, 105, 106 (մմ): Գըտնել՝ ա) ձողի միջին ընտրանքային երկարությունը, բ) գործիքի սխալի ընտրանքային և ուղղված դիսպերսիաները:

Lուծում: **a)** Գտնենք ընտրանքային միջինը՝

$$\bar{x}_e = 92 + \frac{0+2+11+13+14}{5} = 92 + 8 = 100:$$

b) Գտնենք ընտրանքային գիսպերսիան՝

$$D_e = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x}_e)^2 = \frac{(92 - 100)^2 + (94 - 100)^2 + (103 - 100)^2}{5} + \\ + \frac{(105 - 100)^2 + (106 - 100)^2}{5} = 34:$$

Գտնենք տղղված գիսպերսիան՝

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_e = \frac{5}{4} \cdot 34 = 42,5:$$

458. Մի որոշ ֆիզիկական մեծություն միենացն գործիքով (առանց սիստեմատիկ սխալների) չափված է 4 անգամ: Ատացվել են հետեւյալ արդյունքները՝ 8, 9, 11, 12: Գտնել՝ **a)** չափման արդյունքների միջին ընտրանքայինը, **b)** գործիքի սխալի ընտրանքային և տղղված գիսպերսիաները:

Պատ. **a)** $\bar{x}_e = 10$, **b)** $D_e 2,5$; $s^2 = \frac{10}{3}$.

459. Ստորև բերված են պատահականորեն ընտրված 100 առանողների հասակի (սմ) չափման արդյունքները՝

հասակը	154 — 158	158 — 162	162 — 166	166 — 170	170 — 174	174 — 178	178 — 182
հասակների թիվը	10	14	26	28	12	8	2

Գտնել տաճանողների հասակի ընտրանքային միջինը և ընտրանքային գիսպերսիան:

Ցուցում: Գտնել միջակայքերի միջնակետերը և ընդունել դրանց որպես տարբերակներ:

$$\text{Պատ. } \bar{x}_e = 166, D_e = 33,44;$$

460. Տրված $n=10$ ծավալի ընտրանքի բաշխումով գտնել ընտրանքային դիսպերսիան:

x_i	186	192	194
n_i	2	5	3

Լուծում: Տարբերակները համեմատաբար մեծ թվեր են, ուստի անցնում ենք $u_i = x_i - 191$ պայմանական տարբերակ-ներին (տարբերակներից հանում ենք $C = 191$ թիվը, որը մոտ է ընտրանքային միջինին): Արդյունքում ստանում ենք պայմանական տարբերակների հետեւյալ բաշխումը.

u_i	-5	1	3
n_i	2	5	3

Հաշվենք որոնելի ընտրանքային դիսպերսիան՝

$$D_e = \frac{1}{n} \sum n_i u_i^2 - \frac{1}{n} \left[\sum n_i u_i \right]^2 = \frac{2 \cdot 5^2 + 5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 3^2}{10} - \left[\frac{(2(-5) + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 3)}{10} \right]^2 = 8,2 - 0,16 = 8,04,$$

461. Տրված $n=100$ ծավալի ընտրանքի բաշխումով գտնել ընտրանքային դիսպերսիան:

x_i	340	360	375	380
n_i	20	50	18	12

Ցուցում: Անցնել $u_i = x_i - 360$ պայմանական տարբերակներին՝
Պատ. $D_e(x) = D_e(u) = 167,29$:

462. Տրված $n=100$ ծավալի ընտրանքի բաշխումով գտնել ընտրանքային դիսպերսիան:

x_i	2502	2804	2903	3028
n_i	8	30	60	2

Յու ցու մէ Անցնել $u_i = x_i - 2844$ պայմանական տարբերակներին:

$$\text{Պատ.՝ } D_e(x) = D_e(u) = 12603:$$

463. Տրված $n=10$ ծավալի ընտրանքի բաշխումով գըտնել ընտրանքային դիսպերսիան:

x_i	0,01	0,04	0,08
n_i	5	3	2

Լուծում: Որպեսզի խուսափենք կոտորակների հետ գործողություններ կատարելուց, անցնենք $u_i = 100x_i$ պայմանական տարբերակներին: Արդյունքում կստանանք հետեւյալ բաշխումը՝

x_i	1	4	8
n_i	5	3	2

Հաշվենք պայմանական տարբերակների ընտրանքային դիսպերսիան:

$$D_e(u) = \frac{1}{n} \sum n_i u_i^2 - \frac{1}{n} \left[\sum n_i u_i \right]^2,$$

Այս բանաձեի մեջ տեղագրելով պայմանական տարբերակների և նրանց հաճախությունների արժեքները, կստանանք՝

$$D_e(u) = 7,21:$$

Գտնենք սկզբնական տարբերակների սրտելի ընտրանքային դիսպերսիան:

$$D_p(x) = \frac{D_e(u)}{100^2} = \frac{7,21}{10000} = 0,0007:$$

464. Տրված $n=50$ ծավալի ընտրանքի բաշխումով գտնել ընտրանքային դիսպերսիան:

x_i	0,1	0,5	0,6	0,8
n_i	5	15	20	10

Ցուցում: Անցնել $u_i = 10x_i - 10$ պայմանական տարբերակներին:

$$\text{Պատ.՝ } D_e(x) = \frac{D_e(u)}{10^2} = \frac{31,664}{100} = 0,32;$$

465. Տրված $n=50$ ծավալի ընտրանքի բաշխումով գըտնել ընտրանքային դիսպերսիան:

x_i	18,4	18,9	19,3	19,6
n_i	5	10	20	15

Ցուցում: Անցնել $u_i = 10x_i - 195$ պայմանական տարբերակներին:

$$\text{Պատ.՝ } D_e(x) = \frac{D_e(u)}{10^2} = \frac{59,16}{100} = 0,5916;$$

466. Տրված $n=10$ ծավալի ընտրանքի բաշխումով գըտնել ուղղված ընտրանքային դիսպերսիան:

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

Լուծում: Անցնենք $u_i = x_i - 104$ պայմանական տարբերակներին: Արդյունքում կստանանք հետևյալ բաշխումը՝

u_i	-2	0	4
n_i	2	3	5

Գտնենք պայմանական տարբերակների ուղղված ընտրանքային դիսպերսիան՝

$$s_u^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum n_i u_i^2 - \left[\frac{1}{n} \sum n_i u_i \right]^2 \right\},$$

Տեղադրելով այս բանաձևում պայմանական տարբերակների, նրանց հաճախությունների և ընտրանքի ծավալի արժեքները, կստանանք

$$s_u^2 = 9,49;$$

Բոլոր սկզբնական տարրերակները պակասեցվել են միևնույն C = 104 չափով, աստի դիսպերսիան չի փոխվել, այսինքն որոնելի դիսպերսիան հավասար է պարբանական տարրերակների դիսպերսիային՝

$$S_x^2 = S_u^2 = 9,49:$$

467. Տրված n = 100 ծավալի ընտրանքի բաշխումով գոներ տղղված ընտրանքային դիսպերսիան:

$$x_i \quad 1250 \quad 1275 \quad 1280 \quad 1300$$

$$n_i \quad 20 \quad 25 \quad 50 \quad 5$$

Ցուցում: Անցնել u_i = x_i - 1275 պայմանական տարրերակներին:

$$\text{Պատ.՝ } S_x^2 = S_u^2 = 170,42:$$

468. Տրված n = 10 ծավալի ընտրանքի բաշխումով գլուներ տղղված ընտրանքային դիսպերսիան:

$$x_i \quad 0,01 \quad 0,05 \quad 0,09$$

$$n_i \quad 2 \quad 3 \quad 5$$

Լուծում: Կոտորակների հետ զործողություններ կատարելուց խոսսափելու համար անցնենք u_i = 100 x_i պայմանական տարրերակներին: Արդյանքում կստանանք հետեւյալ բաշխումը

$$u_i \quad 1 \quad 5 \quad 9$$

$$n_i \quad 2 \quad 3 \quad 5$$

Գտնենք պայմանական տարրերակների ընտրանքային աղղված դիսպերսիան՝

$$S_u^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum n_i u_i^2 - \frac{1}{n} \left[\sum n_i u_i \right]^2 \right\},$$

Տեղադրելով այս բանաձեռնում խնդրի տվյալները, կստանանք

$$S_u^2 = 85,28;$$

Դանենք սկզբնական տարբերակների որոնելի ուղղված դիսերսիան՝

$$S_x^2 = \frac{S_u^2}{100^2} = \frac{85,28}{10000} = 0,0085;$$

469. Տրված $n=20$ ծավալի ընտրանքի բաշխումով գըտնել ուղղված ընտրանքային դիսպերսիան.

x_i	0,1	0,5	0,7	0,9
n_i	6	12	1	1

Յու ց ում : Անցնել $u_i = 10x_i$ պայմանական տարբերակներին:

$$\text{Պատ.՝ } S_x^2 = \frac{S_u^2}{10^2} = \frac{5,25}{100} = 0,0525;$$

470. Տրված $n=10$ ծավալի ընտրանքի բաշխումով գըտնել ուղղված ընտրանքային դիսպերսիան:

x_i	23,5	26,1	28,2	30,4
n_i	2	3	4	1

Յու ց ում : Անցնել $u_i = 10x_i - 268$ պայմանական տարբերակներին:

$$\text{Պատ.՝ } S_x^2 = \frac{S_u^2}{100} = \frac{489}{100} = 4,89;$$

§ 2. Միջակայքային գնահատականներ

Գնահատվող պարամետրը ծածկող միջակայքի երկու ծայրերով որոշվող գնահատականը կոչվում է միջակայքային:

Տվյալ շեմանին գնահատվող պարամետրը ծածկող միջակայքը կոչվում է վստահելի:

Հետեւյալ վստահելի միջակայքը ծառայում է նորմալ օրենքով բաշխագած քանակական Խ հայտանիշի մաթեմատիկական սպասման զնահատման համար ընտրանքային \bar{x}_r միջինի օգնությամբ, եթե հայտնի է գլխական գործամարտ ի մը ու թյան ու միջին քառակուսային 2 եղումը:

$$\bar{x}_r - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_r + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

որտեղ $t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ է զնահատման ճշտությունն է, ուշը ընտրանքի ծառագալը, t_{γ} ՝ կապվածի $\Phi(t)$ ֆունկցիայի արգումենտի այն արժեքն է ($\text{հավելված } 2$), որի համար $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$, անհայտ օրինակում (b_{pp} ընտրանքի ծառագալը՝ $n > 30$):

$$\bar{x}_r - t \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_r + t \frac{s}{\sqrt{n}},$$

որտեղ s -ը ուղղված միջին քառակուսային շեղումն է, t_{γ} ՝ γ -ն որոշում են աղյուսակից (հավելված 3) տրված ուղղ ու ցողվ:

Հետեւյալ վստահելի միջակայքը ծառայում էն տրված ց հուսուլիությամբ, նորմալ բաշխված քանակական Խ հայտանիշի օ միջին քառակուսային շեղման զնահատման համար, ուղղված ընտրանքային միջին քառակուսային օգնությամբ:

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \quad (b_{pp} \cdot q < 1),$$

$$0 < \sigma < s(1+q) \quad (b_{pp} \cdot q > 1),$$

որտեղ q -ն որոշվում է աղյուսակից (հավելված 4) հայտնի ու ցողի միջոցով:

471. Նորմալ օրենքով բաշխված գլխավոր համախմբության Խ քանակական հայտանիշի անհայտ ամաթեմատիկական սպասման զնահատման համար գտնել $0,95$ հուսուլիությանը համապատասխան վստահելի միջակայքը, եթե արված են զլասավոր միջին քառակուսային շեղումը՝ $\sigma = 5$, ընտրանքային միջինը՝ $\bar{x}_r = 14$ և ընտրանքի ծառագալը՝ $n = 25$:

Լուծումները կազմում են գունդը

$$x_e - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X}_e + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (*)$$

վատահելի միջակայքը: Այստեղ բացի t -ից, բոլոր միհաւթյունները հայտնի են: Գանենք t -ն: $2\Phi(t) = 0,95$ առնչությունից ստանում ենք $\Phi(t) = 0,475$: Աղյուսակից (հավելված 2) գտնում ենք $t = 1,96$: $S\Phi\varphi\theta\pi\eta t = 1,96$ $x_e = 14$, $\sigma = 5$, $n = 25$, $(*)$ -ից ստանում ենք որոնելի վստահելի միջակայքը:

$$12,04 < a < 15,96,$$

472. Նորմալ օրենքով բաշխված գլխավոր համախմբության X քանակական հայտանիշի անհայտ ա մաթեմատիկական սպասման գնահատման համար գտնել 0,99 հուսալիությանը համապատասխան վստահելի միջակայքը, եթե տրված են σ-ն՝ գլխավոր միջին քառակուսային շեղումը, \bar{x}_c -ն՝ ընտրանքային միջինը և n -ը՝ ընտրանքի ծավալը:

w) $\sigma=4$, $\bar{x}_t=10,2$, n=16,

f) $\sigma=5$, $\bar{x}_f=16,8$, $n=25$:

¶_{min.}: a) 7,63 < a < 12,77, b) 14,23 < a < 19,37.

473. Միւնույն գործիքով, որի չափման պատահական սխալների միջին քառակուսային շեղումը՝ $s=40$ մ, 5 անգամ չափված է թնդանոթից մինչև նպատակակետը եղած հեռավորությունը: Գտնել մինչև նպատակակետը եղած անուավորության գնահատման համար $\gamma=0,95$ հոսալիությանը համապատասխան վստահելի միջակայք, եթե չափումների արդյունքների միջին \bar{x} ֆվաբանականը՝ $\overline{x_s}=2000$ մ:

¶_{min.}, 1960, 8 < a < 2039, 2,

474. Մեծ թվով ռադիոլամպերի խմբաքանակից զերց-
րած ընտրանքը բաղկացած է 100 լամպից: Ընտրանքի լամ-

պերի այրման միջին տեղաթյունը հավասար է 1000 ժ-ի։
 Համախմբության լամպի և միջին այրման ժամանակի գնահատման համար գտնել $\gamma = 0,95$ հուսալիությանը համապատասխանող վստահելի միջակայք, եթե հայտնի է, որ լամպի այրման ժամանակի միջին քառակառային շեղումը՝ $\sigma = 40$ ժ։

Պատ.՝ 992, 16 < $a < 1007$, 84։

475. Ավտոմատ հասացը մամլում է լիսեռներ։ $n = 100$ ծավալի ընտրանքով հաշված է պատրաստված լիսեռների արամագծերի ընտրանքային միջինը: 0,95 հուսալիությամբ գտնել նշանակած ընտրանքային միջինը գնահատում է պատրաստված լիսեռների արամագծերի մաթեմատիկական սպասումը, եթե հայտնի է, որ նրանց միջին քառակառային շեղումը՝ $\sigma = 2$ մմ։

$$\text{Պատ.՝ } \hat{n} = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{100}} = 0,392 \text{ մմ.}$$

476. Գտնել ընտրանքի մինիմալ ծավալը, որի գեպքոմ 0,975 հուսալիությամբ, ընտրանքային միջինի օգնությամբ գլխավոր համախմբության և մաթեմատիկական սպասումն գնահատման ճշտությունը հավասար կլինի՝ $\delta = 0,3$, եթե հայտնի է նորմալ բաշխված գլխավոր համախմբության միջին քառակառային $\sigma = 1,2$ շեղումը։

Լուծում: Օգավենք ընտրանքային միջինի օգնությամբ գլխավոր համախմբության մաթեմատիկական սպասումն գնահատման ճշտությունը որոշող բանաձևից՝

$$\hat{n} = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

Ալսահղից՝

$$n = \frac{t^2 \sigma^2}{\delta^2} \quad (*)$$

Պարմանի համաձայն $\gamma = 0,975$, կամ $2\Phi(t) = 0,975$, համեմատած 273

վարար, $\Phi(t)=0,4875$: Աղյուսակից (*հավելված 2*) գոնում ենք՝ $t=2,24$: Տեղադրելով (*) բանաձևում $t=2,24$, $a=1,2$, $b=0,2$, ստանում ենք ընտրանքի որոնելի ժավալը՝ $n=81$:

477. Գտնել ընտրանքի մինիմալ ժավալը, որի գեպքում $0,925$ հուսալիությամբ ընտրանքալին միջինի օգնությամբ նորմալ բաշխված զլիսավոր համախմբության մաթեմատիկական սպասման գնահատման ճշտությունը հավասար կլինի $0,2$ -ի, եթե հայտնի է զլիսավոր համախմբության միջին քառակուսային $a=1,5$ շեղումը:

Պատ.՝ $n=179$:

478. Գլխավոր համախմբությունից վերցված ξ $n=10$ ժավալի ընտրանք՝

$$\text{տարբերակը՝ } x_i \quad -2 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$\text{հաճախությունը՝ } n_i \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 1$$

Ընտրանքային միջինով, վստահելի միջակայքի օգնությամբ գնահատել $0,095$ հուսալիությամբ, զլիսավոր համախմբության նորմալ բաշխված հայտանիշի և մաթեմատիկական սպասումը:

Լուծում: Ընտրանքային միջինը և տղղված միջին քառակուսային շեղումը որոշում ենք հետևյալ բանաձևերով՝

$$\bar{x}_e = \frac{1}{n} \sum n_i x_i, \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum n_i (x_i - \bar{x}_e)^2},$$

Տեղադրելով այս բանաձևերում խնդրի տվյալները, կըստանանք՝

$$\bar{x}_e = 2, \quad s = 2,4,$$

Գտնենք t_{γ} և: Օգտվելով աղյուսակից (*հավելված 3*), $\gamma=0,95$ և $n=10$ արժեքներով գտնում ենք $t_{\gamma}=2,26$:

Գտնենք որոնելի վստահելի միջակայքը

$$\bar{x}_e - t_{\gamma} \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_e + t_{\gamma} \frac{s}{\sqrt{n}},$$

Տեղապրելով $\bar{x}_e = 2$, $t_{\gamma} = 2,26$, $s = 2,4$, $n = 10$, կըստանանք որոնելի վատահելի $0,3 < a < 3,7$ միջակայքը, որը ծածկում է անհայտ մաթեմատիկական սպասումը $0,95$ հասալիությամբ:

479. Գլխավոր համախմբությունից վերցված է $n = 12$ ծավալի ընտրանք՝

տարրերակը x_i	-0,5	-0,4	-0,2	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
հաճախությունը n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Վատահելի, միջակայքի օգնությամբ գնահատել, $0,95$ հասալիությամբ, գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխված հալաւանիշի մաթեմատիկական սպասումը:

Պատ.՝ $-0,04 < a < 0,88$,

480. Մի որոշ ֆիզիկական մեծության արժեքի 9 անկախ, միատեսակ ճշտության չափումներից ստացված տվյալներով հաշված են չափման արդյունքների միջին թվաբանականը՝ $\bar{x}_e = 30,1$ և ողղված միջին քառակուսային $s = 6$ շեղումը. $\gamma = 0,99$ հուսալիությամբ գնահատել չափող մեծության ճշդրիտ արժեքը վստահելի միջակայքի օգնությամբ:

Լուծում: Չափող մեծության ճշդրիտ արժեքը հավասար է նրա մաթեմատիկական սպասմանը: Հետեւրար, ինդիքը բերվում է մաթեմատիկական սպասման գնահատմանը (անհայտ օ-ի գեպքոմ) վստահելի միջակայքի օգնությամբ:

$$\bar{x}_e - t_{\gamma} \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_e + t_{\gamma} \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (*)$$

Ալտանդ, բացի t_{γ} մից, բոլոր մեծությանները հայտնի են: Գանձնք t_{γ} մու Աղբառակից ($հաղիւլած 3$) անհենարով $\gamma = 0,95$ և $n = 9$, սահմանմանը $t_{\gamma} = 3,36$:

Տեղադրելով $(*)$ -ում $\bar{x}_e = 30,1$, $t_y = 3,36$, $s = 6$, $n = 9$,
կստանանք որոնելի միջակայքը՝

$$23,38 < a < 36,82.$$

481. Եթի որոշ գիպիկական մեծության արժեքի 16 անկախ, միատեսակ ճշտության չափամոներից ստացված արվագանքներով հաշված են չափման արդյունքների միջին թվաբանականը՝ $\bar{x}_e = 42,8$ և ուղղված միջին քառակուսային $s = 8$ շեղումը: $\gamma = 0,999$ հուսալիությամբ գնահատել չափվող մեծության ճշգրիտ արժեքը:

$$\text{Պատ.՝ } 34,66 < a < 50,94:$$

482. Գլխավոր համախմբությունից վերցրած $n = 16$ ծավալի ընտրանքի տվյալներով, հաշված է նորմալ բաշխված քանակական հալտանիշի տղղված միջին քառակուսային $s = 1$ շեղումը: Գտնել $\gamma = 0,95$ հուսալիությամբ գլխավոր միջին քառակուսային շեղումը ծածկող վստահելի միջակայքը:

ζ ու δ ում: Խնդիրը բերվում է

$$s(1 - q) < \sigma < s(1 + q), \quad (եթե \quad q < 1) \quad (*)$$

կամ

$$0 < \sigma < s(1 + q), \quad (եթե \quad q > 1)$$

վստահելի միջակայքի որոնմանը:

$\gamma = 0,95$ և $n = 16$ տվյալներով աղյուսակից (հավելված 4) գտնում ենք $q = 0,44$: Քանի որ $q < 1$, ապա, տեղադրելով $(*)$ -ում $s = 1$, $q = 0,44$, կգտնենք որոնելի վստահելի միջակայքը՝

$$0,56 < \sigma < 1,44:$$

483. Նորմալ բաշխված քանակական հալտանիշի գլխավոր համախմբությունից վերցրած n ծավալի ընտրանքի տվյալներով հաշված է տղղված միջին քառակուսային s շեղումը: Գտնել, $\gamma = 0,999$ հուսալիությամբ, գլխավոր միջին

քառակուսային շեղումը ծածկող վստահելի միջակայքը, եթե
ա) $n=10$, $s=5,1$, μ) $n=50$, $s=14$:

Պատ. ա) $0 < z < 14,28$, μ) $7,98 < z < 20,02$:

484. Միենայն գործիքով (առանց սիստեմատիկ սխալ-ների) կատարված են մի որոշ ֆիզիկական մեծության 12 չափումներ, ընդ որում չափման պատահական սխալների ուղղված միջին քառակուսային s սխալի համար ստացվել է $0,6$ արժեքը: Գանել գործիքի ճշտությունը $0,99$ հասալիամբ:

Լուծում: Գործիքի ճշտությունը բնորոշված է չափման պատահական սխալների միջին քառակուսային շեղումով: Հետևաբար, ինդիքը բերված է վստահելի միջակայքի որոշմանը, որը $\gamma=0,99$ հասալիությամբ ծածկում է սննդայտ միջին քառակուսային շեղումը:

$$s(1-q) < z < s(1+q): \quad (*)$$

$\gamma=0,99$, $n=12$ ավալներով ազդակակից (γ ավելիքած -4) գանում ենք $q=0,9$: Տեղագրելով $s=0,6$, $q=0,9$ (3) բաշխածի մեջ, վերջնականապես կստանանք՝

$$0,06 < z < 1,14:$$

485. Միենայն գործիքով (առանց սիստեմատիկ սխալի) կատարված են մի որոշ ֆիզիկական մեծության 10 չափումներ, ընդ որում չափման պատահական սխալների ուղղված միջին քառակուսային շեղման համար ստացվել է $0,8$ արժեքը: Գանել գործիքի ճշտությունը $0,95$ հասալիությամբ:

Պատ. $0,28 < z < 1,32$:

ՏԱՄՆ ՄԵԿԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

**ԸՆՏՐԱՆՔԻ ՏԵՂԵԿԱՏՈՒ ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՆ
ՄԵԹՈԴՆԵՐԸ**

**§ 1. Ընտրանքային միջինի և դիսպերսիայի
հաշվառման արտադրյալների մեթոդը**

Ա. Հավասարահեռ տարբերակներ

Ենթադրենք ընտրանքը տրված է հավասարահեռ տարբերակների և նրանց համապատասխան հաճախությունների բաշխման տեսքով։ Այդ դեպքում ընտրանքային միջինը և դիսպերսիան հարմար է հաշվել արտադրյալների մեթոդով, հետեւյալ բանաձեռքի օգնությամբ։

$$\bar{x}_e = M_1^* h + C, \quad D_e = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2,$$

որտեղ \bar{x}_e քայլն է (հարկան տարբերակների միջև եղած տարբերությունը), C -ն՝ կեղծ զրոն (ամենամեծ հաճախությունն ունեցող տարբերակը),

$$u_i = \frac{x_i - C}{h} = \text{պայմանական տարբերակներն են},$$

$$M_1^* = \frac{1}{n} \sum n_i u_i = \text{առաջին կարգի պայմանական մոմենտն է},$$

$$M_2^* = \frac{1}{n} \sum n_i u_i^2 = \text{երկրորդ կարգի պայմանական մոմենտն է},$$

Խնդիր 486-ում ցույց է տված, թե ինչպես գործնականում օգտվել արտադրյալների մեթոդից։

486. Արտադրյալների մեթոդով հաշվել ընտրանքային միջինը և դիսպերսիան, եթե տված է $n = 100$ ժակալի ընտրանքի բաշխումը՝

տարբերակը x_i	12	14	16	18	20	22
-----------------	----	----	----	----	----	----

հաճախությունը n_i	5	15	50	16	10	4
---------------------	---	----	----	----	----	---

Հուծում: Կազմենք հաշվարկային աղյուսակը (աղյուսակ 1), որի համար՝

1) առաջին սյունակում գրենք տարբերակները,

2) երկրորդ սյունակում գրենք հաճախությունները, հաճախությունների գումարը (100) տեղադրենք սյունակի վերջին վանդակում,

3) որպես կեղծ գրո (C) ընտրենք այն տարբերակը (16), որի հաճախությունը ամենամեծն է (որպես C կարելի է վերցնել սյունակի միջին մասում ընկած ցանկացած տարբերակը), երրորդ սյունակի այն վանդակում, որը պատկանում է կեղծ գրոն պարունակող սյունակը գրենք 0, զլոցից վերև հաջորդաբար գրում ենք —1, —2, իսկ զլոցից ներքեալ 1, 2, 3:

4) Պայմանական տարբերակների և ու հաճախությունների արտադրյալները գրում ենք չորրորդ սյունակում, որոշում ենք բացառական թվերի գումարը (—25) և գրական թվերի գումարը (48), այնուհետև գումարելով գրանք, արդյունքը (23) աեղագործում ենք չորրորդ սյունակի վերջին վանդակում,

5) պայմանական տարբերակների քառակուսիների և հաճախությունների $u_i^2 n_i$ արտադրյալները գրում ենք հինգերորդ սյունակում (հարմար է բազմապատճել երրորդ և չորրորդ սյունակների համապատասխան առղերի թվերը՝ $u_i u_i \cdot u_i = n_i u_i^2$), սյունակի թվերի գումարը (127) գրում ենք հինգերորդ սյունակի վերջին վանդակում:

6) Հաճախությունների և պայմանական տարբերակներից 1-ով մեծ թվերի քառակուսիների արտադրյալները $n_i(u_i + 1)^2$ գրում ենք վեցերորդ հակիչ սյունակում, սյունակի թվերի գումարը (273) աեղագործում ենք վերջին վանդակում:

Արդյունքամ ստանում ենք հաշվարկային աղյուսակը (աղյուսակ 1):

Հաշվառամների ստացման համար օգտվում ենք ներկայալ նույնաթյունից:

$$\sum n_i(u_i+1)^2 = \sum n_i u_i^2 + 2 \sum n_i u_i + n_i$$

Ա ա ռ ո գ ո ւ մ ն

$$\sum n_i(u_i + 1)^2 = 273, \quad \sum n_i u_i^2 + 2 \sum n_i u_i + n = \\ = 127 + 2 \cdot 23 + 100 = 273;$$

Ստուգիչ գումարների համընկնումը, վկայում են հաշվումների ճշտության մասին:

Հաշվենք առաջին և երկրորդ կարգի պայմանական մումենաները՝

$$M_1^* = \frac{1}{n} \sum n_i u_i = \frac{23}{100} = 0,23, \quad M_2^* = \sum n_i u_i^2 = \\ = \frac{127}{100} = 1,27,$$

Գտնենք քայլը (ցանկացած երկու հարկեան տարբերակների տարբերությունը), $h = 14 - 12 = 2$:

Հաշվենք որոնելի ընտրանքային միջինը և դիսպերսիան, հաշվի առնելով, որ կեղծ զրոն՝ (ամենամեծ հաճախությունն անեցող տարբերակը) $C = 16$:

$$\bar{x}_c = M_1^* h + C = 0,23 \cdot 2 + 16 = 16,46,$$

$$D_c = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2 = (1,27 - 0,23^2) \cdot 2^2 = 4,87:$$

Ա գ յ ո ւ ս ա կ 1

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i(u_i + 1)^2$
12	5	-2	-10	20	5
14	15	-1	-15	15	-

1	2	3	4	5	6
16	50	0	-25	--	50
18	16	1	16	16	64
20	10	2	20	40	90
22	4	3	12	36	64
			48		
n=100			$\sum n_i u_i = 23$	$\sum n_i u_i^2 = 127$	$\sum n_i (u_i + 1)^2 = 273$

487. Ընտրանքի տրված բաշխումով, հաշվել ընտրանքային միջինը և դիսպերան, օգտվելով արտադրյալների մեթոդից.

ա) տարբերակը x_i 18,6 19,0 19,4 19,8 20,2 20,6

հաճախում-
թվունը n_i 4 6 30 40 18 2;

բ) տարբերակը x_i 65 70 75 80 85

հաճախում-
թվունը n_i 2 5 25 15 3;

Պատ' ա) $\bar{x}_e = 76,2$, $D_e = 18,56$, բ) $\bar{x}_e = 19,672$, $D_e = 0,169$.

բ) Ոչ հավասարահեռ տարբերակներ

Եթե ոկզրնական տարբերակները հավասարահեռ չեն, ապա ընտրանքի բոլոր տարբերակները պարունակող միջակայքը բաժանում են միատեսակ ի երկարության մի քանի մասնակի միջակայքերի (յուրաքանչյուր մասնակի միջակայք պետք է պարունակի առնվազն 8-10 տարբերակ), Այնուհետեւ դանում են մասնակի միջակայքերի

միջնակետերը, որոնք և կկազմեն հավասարահեռ տարբերակների հաջորդականություն։ Որպես յուրաքանչյուր միջակայքի միջնակետի հաճախությունը ընդունվում է բոլոր այն տարբերակների գումարացին հաճախությունը, որոնք ընկնում են այդ մասնակի միջակայքի մեջ։

Ընտրանքային դիսպերսիան հաշվելիս խմբավորման հետևանքով առաջացած սխալը փոքրացնելու համար (հատկապես, եթե միջակայքերի թիվը փոքր է) մտցնում են Շեպպարդի ուղղումը՝ դիսպերիսիայի ստացված արժեքից հանում են մասնակի միջակայքի երկարության քառակուսու մեկ տասներկուերորդ մասը։

Այսպիսով, հաշվի առնելով Շեպպարդի ուղղումը, դիսպերսիան պետք է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$D' = D_e - \frac{h^2}{12},$$

488. Տրված $n=100$ ժամալի ընտրանքի բաշխումով հաշվել ընտրանքային միջինը և դիսպերսիան, օգտվելով արտադրյալների մեթոդից

x_i	2	3	7	9	11	12,5	16	18	23	25	26
n_i	3	5	10	6	10		4	12	13	8	20

Լուծում: $2-26$ միջակայքը՝ բաժանենք $h=6$ երկարության չորս մասնակի միջակայքերի՝

$$2-8, \quad 8-14, \quad 14-20, \quad 20-26,$$

Որպես նոր y_i տարբերակներ վերցնելով այդ միջակայքերի միջնակետերը, կստանանք հետևյալ հավասարահեռ տարբերակները՝

$$y_1=5, \quad y_2=11, \quad y_3=17, \quad y_4=23,$$

Որպես նոր $y_1=5$ տարբերակի n_1 հաճախությունը ընդունելով առաջին միջակայքում եղած տարբերակների հաճախությունների գումարը, կունենանք՝ $n_1=3+5+10=18$:

Նոյն կերպ, հաշվելով մյուս տարբերակների հաճախությունները, կստանանք հավասարահեռ տարբերակների 282

Հետեւյալ բաշխումը՝

$$y_i \quad 5 \quad 11 \quad 17 \quad 23$$

$$n_i \quad 18 \quad 20 \quad 25 \quad 37$$

Օգովելով արտադրյալների մեջողից, ստանում ենք՝

$$\bar{y}_e = 15,86, \quad D_e = 45,14,$$

Նկատի ունենալով, որ մասնակի միջակայքերի թիվը
(4) փոքր է, հաշվի ենք առնում Շեպպարդի ողղումը:

$$D_e' = D_e - \frac{h^2}{12} = 45,14 - \frac{6^2}{12} = 42,14,$$

Նկատենք, որ սկզբնական տարբերակներով հաշվելիս ընտրանքային դիսպերսիալի համար ստացվում է 42,6 արժեքը:

489. Ոչ հավասարահեռ տարբերակներով ընտրանքի դիսպերսիան հաշվելիս ընտրանքը տրոհվել է $h = 12$ երկարության 5 միջակայքերի: Հավասարահեռ տարբերակների ($\text{մասնակի } m_{\text{միջակայքերի }} m_{\text{միջնակետերի }}$) ընտրանքային դիսպերսիան՝ $D_e = 52,4$: Գտնել ընտրանքի դիսպերսիան, հաշվի առնելով Շեպպարդի ողղումը:

$$\Phi_{\text{առ}} \cdot D_e' = 40,4:$$

490. $a = 50$ ծավալի ընտրանքի ոչ հավասարահեռ տարբերակների սպած բաշխումով, օգովելով արտադրյալների մեջողից, դանել ընտրանքային միջինը և գիտպերսուանուան:

$$\begin{array}{cccccccccccc} x_i & 6 & 8 & 11 & 13 & 15,5 & 17,5 & 20 & 23,5 & 24,5 & 26 \\ n_i & 1 & 9 & 6 & 6 & 4 & 6 & 8 & 5 & 4 & 1 \end{array}$$

բ) Գտնել ընտրանքային դիսպերսիան, հաշվի առնելով Շեպպարդի ողղումը:

Ցուցում: 6-26 միջակայքը տրոհել $h=4$ երկարության 5 մասնակի միջակայքերի:

Պատ. ա) $\bar{y}_e = 15,68$, $D_e = 32$, բ) $D_e' = 301/3$:

491. ա) $n=100$ ծավալի ընտրանքի ոչ հավասարանեռ տարրերակների տված բաշխումով գտնել ընտրանքային միջինը և դիսպերսիան, օգտվելով արտադրյաների մեթոդից:

x_i	10	13	15	17	19	23	24	26	28	32	34	35
n_i	2	4	6	8	9	6	20	15	10	8	7	5

բ) գտնել ընտրանքային դիսպերսիան, հաշվի առնելով ծեպպարդի ուղղումը:

Ցուցում: 10-35 միջակայքը բաժանել $h=5$ երկարության 5 մասնակի միջակայքերի: $x=15$ տարրերակի հաճախությունը (այսինքն 6 հաճախությունը) բաշխել հավասարապես երկրորդ և երրորդ մասնակի միջակայքերի վրա (քանի որ 15 տարրերակը ընկածէ միջակայքի ծայրակետում):

Պատ. ա) $\bar{y}_e = 24,35$, $D_e = 31,83$, բ) $D_e = 29,75$:

§ 2. Ընտրանքային միջինի և դիսպերսիայի հաշվման գումարների մեթոդը

Ենթադրենք ընտրանքը տված է հավասարանեռ տարրերակների և համապատասխան հաճախությունների բաշխման տեսքով: Այդ գեղքում, ինչպես ասված է § 1-ում, ընտրանքային միջինը և դիսպերսիան կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևերով՝

$$\bar{x}_e = M_1^* h + C, \quad D_e = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2,$$

Գումարների մեթոդից օգտվելիս առաջին և երկրորդ կարգի պայմանական մոմենտները հաշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$M_1^* = \frac{d_1}{n}, \quad M_2^* = \frac{s_1 + 2s_2}{n},$$

որտեղ $d_1 = a_1 - b_1$, $s_1 = a_1 + b_1$, $s_2 = a_2 + b_2$. Այսպիսով, վերջնահաշվում պետք է հաշվել a_1 , a_2 , b_1 , b_2 թվերը՝ 492 խնդրում ցույց է տրված, թե գործնականում ինչպես են հաշվում այդ թվերը:

492. $n = 100$ ծավալի ընարանքի տված բաշխումով, հաշվել ընարանքային միջինը և դիսպերսիան, օգտվելով գումարների մեթոդից:

x_i	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84
n_i	2	4	6	8	12	30	18	8	7	5

Լուծում: Կազմենք հաշվարկային աղյուսակը (աղյուսակ 2), որի համար՝

1) սուաշին սլանակում գրենք աարբերակները,

2) երկրորդ սլանակում գրենք հաճախատթյանները, ահազարելով արդ սլանակի վերջին վանդակում բոլոր հաճախատթյանների գումարը (100),

3) որպես կեղծ զբո՞ւ C, ընարաւմ ենք այն աարբերակը (68), որի հաճախատթյանը ամենամեծն է (որպես C կարելի է վերցնել սլանակի միջին մասում ընկած ցանդացած աարբերակը): Կեղծ զբո՞ւ պարունակող առողի վանդակներաւմ գրենք զբոներ, չորրորդ սլանակում, արդեն զրված զրոյից վերե և ներքե, նույնպես գրենք մեկական զբո՞ւ:

4) երրորդ սլանակի զրոյից վերե ընկած չլրացված վանդակներաւմ (բացի ամենավերին վանդակից) հաջորդաբար գրենք կոտակիած հաճախատթյանները՝ $2; 2 + 4 = 6; 6 + 6 = 12; 12 + 8 = 20; 20 + 12 = 32$: Գոմարելով բոլոր կոտակիած հաճախատթյանները, կոտանանք $b_1 = 72$ թիվը, որը կուղագրենք երրորդ սլանակի վերին վանդակում: Զբոյից ներքե ընկած չլրացված վանդակներաւմ (բացի ստորին վանդակից) հաջորդաբար գրենք կոտակիած հաճախատթյանները՝ $5; 5 + 7 = 12; 12 + 8 = 20; 20 + 18 = 38$: Գոմարելով բոլոր կոտակիած հաճախատթյանները, կոտանանք $a_1 = 75$ թիվը, որը աեղագրաւմ ենք երրորդ սլանակի ստորին վանդակում:

5) նման ձեռով լրացված է չորրորդ սլանակը, ընդ որում

Գումարվում են երրորդ սյունակի հաճախությունները: Գումարելով զրոյից վերև ընկած կուտակված հաճախությունները, ստանում ենք $b_2 = 70$ թիվը, որը տեղադրում ենք չորրորդ սյունակի ամենավերին վանդակում: Զրոյից ներքեւ ընկած կուտակված հաճախությունների գումարը՝ $a_2 = 59$, գրում ենք չորրորդ սյունակի ստորին վանդակում:

Արդյունքում ստանում ենք հաշվարկային աղյուսակը (աղյուսակ 2):

Դանենք d_1, s_1, s_2 մեծությունները:

$$d_1 = a_1 - b_1 = 75 - 72 = 3,$$

$$s_1 = a_1 + b_1 = 75 + 72 = 147,$$

$$s_2 = a_2 + b_2 = 59 + 70 = 129:$$

Գտնենք առաջին և երկրորդ կարգի պայմանական մոմենտները:

$$M_1^* = \frac{d_1}{n} = \frac{3}{100} = 0,03,$$

$$M_2^* = \frac{s_1 + 2s_2}{n} = \frac{147 + 2 \cdot 129}{100} = 4,05:$$

Աղյուսակ 2

1	2	3	4
x_i	n_i	$b_1 = 72$	$b_2 = 70$
48	2	2	2
52	4	6	8
56	6	12	20

60	8	20	40
64	12	32	0
68	30	0	0
72	18	38	0
76	8	20	37
80	7	12	17
84	5	5	5
	$n=100$	$a_1 = 75$	$a_2 = 59$

Հաշվենք որոնելի ընտրանքային միջինը և դիսպերսիան, հաշվի առնելով, որ քայլը (b բկա հարեան տարբեքակների տարբերությանը) $h = 4$, իսկ կեղծ զրոն $C = 68$:

$$x_c = M_1^* h + C = 0,03 \cdot 4 + 68 = 68,12;$$

$$D_c = [M_1^* - (M_1^*)^2] \cdot h^2 = [4,05 - 0,03^2] 4^2 \approx 64,78;$$

493. $n = 100$ ժագալի ընտրանքի տված բաշխումով հաշվել ընտրանքային միջինը և դիսպերսիան, օգտվելով գոմարների մեթոդից:

ա)

տարբերակը	x_i	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
հաճախությունը	n_i	4	6	8	15	25	20	8	7	5	2

բ)

տարբերակը	x_i	122	128	134	140	146	152	158	164	170	176
հաճախությունը	n_i	7	8	12	16	4	20	13	10	7	3;

գ)

տարբերակը	x_i	12	14	16	18	20	22;
-----------	-------	----	----	----	----	----	-----

հաճախությունը	n_i	5	15	50	16	10	4
---------------	-------	---	----	----	----	----	---

գ)

տարբերակը	x_i	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0
-----------	-------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

հաճախությունը	n_i	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1,
---------------	-------	---	---	---	----	----	----	----	----	---	----

Պատասխան) $\bar{x}_e = 51,1$, $D_e = 101,29$, բ) $\bar{x}_e = 147,62$, $D_e = 212,3$,

գ) $\bar{x}_e = 16,46$, $D_e = 4,87$ դ) $\bar{x}_e = 11,114$, $D_e = 0,14$

§ 3. Էմպիրիկ բաշխման ասիմետրիան և էքսցեսը

Էմպիրիկ բաշխման ասիմետրիան և էքսցեսը որոշվում են համապատասխանաբար

$$a_s = \frac{m_3}{\sigma_e^2}, \quad e_k = \frac{m_4}{\sigma_e^4} - 3$$

բանաձևերով, որտեղ σ_e^2 -ն ընտրանքային միջին քառակուսային զեղումն է; m_3 -ը՝ և m_4 -ը՝ 3-րդ և 4-րդ կարգի կենտրոնական էմպիրիկ մոմենտները՝

$$m_3 = \frac{1}{n} \sum n_i (x_i - \bar{x}_e)^3, \quad m_4 = \frac{1}{4} \sum n_i (x_i - \bar{x}_e)^4.$$

ի քայլով (քայլը հավասար է ցանկացած հարկան տարբերակների տարբերությանը) հավասարահեռ տարբերակների դեպքում այդ մոմենտները հարմար է հաշվել հետեալ բանաձևերով՝

$$m_3 = [M_3^* - 3M_1^* M_2^* + 2(M_1^*)^3]h^3,$$

$$m_4 = [M_4^* - 4M_1^* M_3^* + 6(M_1^*)^2 M_2^* - 3(M_1^*)^4]h^4,$$

որտեղ

$$M_k^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i k \text{ մեծությունները } k-\text{րդ } \text{ հարզի } \text{պայմանական } \text{մոմենտներն } \text{են, } u_i = \frac{x_i - C}{h} \text{ պայմանական } \text{ տարբերակներ } \text{ են:}$$

Այստեղ x_i մեծությունները սկզբնական տարբերակներն են, C -ն՝ կեղծ գրուն, այսինքն այն տարբերակը, որի հաճախությունը ամենամեծն է (կամ վարիացիոն շարքի միջին մասի ցանկացած տարբերակ): Այսպիսով, ասիմետրիան և էքսցեսը դանելու համար անհրաժեշտ է հաշվել պայմանական մոմենտները, զա կարելի է անել արտադրյալների մերողով կամ զումարների մերողով:

Ա. Արտադրյալների մեթոդը

494. $n = 100$ ծավալի ընարանքի տվյալները բաշխումով, օգտագելով արտադրյալների մեթոդից, գտնել ասիմետրիան և էքսցեսը:

տարբերակը	x_i	12	14	16	18	20	22
-----------	-------	----	----	----	----	----	----

հաճախու-	n_i	5	15	50	16	10	4
թյունը							

Լուծում: Օգտվում ենք արտադրյալների մեթոդից: Կազմենք հաշվողական աղյուսակը (աղյուսակ 3): Այս գըլիսի § 1-ում 486 խնդիրը լուծելիս արդեն ցայց է արված, թե ինչպես են լրացվում աղյուսակի 1—5 սլանակները, ուստի սահմանափակինք համառուս պարզաբանումներով:

Վեցերորդ սլանակը լրացնելիս հարմար է բազմապատկեր 3-րդ և 5-րդ սլանակների համապատասխան թվերը:

Ցոթերորդ սյունակը լրացնելիս հարմար է բազմապատկել 3-րդ և 6-րդ սյունակների համապատասխան թվերը:

Ութերորդ սյունակը ծառայում է հաշվումների ստուգման համար, ընդ որում պետք է օգտվել հետեւյալ նույնությունից՝

$$\sum n_i(u_i + 1)^4 = \sum n_i u_i^4 + 4 \sum n_i u_i^3 + \\ + 6 \sum n_i u_i^2 + 4 \sum n_i u_i + n_i$$

Բերենք հաշվարկային աղյուսակը.

Աղյուսակ 3

1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i u_i^3$	$n_i u_i^4$	$n_i(u_i + 1)^4$
12	5	-2	-10	20	-40	80	5
14	15	-1	-15	15	-15	15	-
16	50	0	-25	-	-55	-	50
18	16	1	16	16	16	16	256
20	10	2	20	40	80	160	810
22	4	3	12	36	108	324	1024
			48		204		
	$n=100$		$\sum n_i u_i =$ $= 23$	$\sum n_i u_i^2 =$ $= 127$	$\sum n_i u_i^3 =$ $= 149$	$\sum n_i u_i^4 =$ $= 595$	$\sum n_i(u_i + 1)^4 =$ $= 2145$

Ստուգում:

$$\sum n_i(u_i + 1)^4 = 2145,$$

$$\begin{aligned} \sum n_i u_i^4 + 4 \sum n_i u_i^3 + 6 \sum n_i u_i^2 + 4 \sum n_i u_i + n = \\ = 595 + 4 \cdot 149 + 6 \cdot 127 + 4 \cdot 23 + 100 = 2145, \end{aligned}$$

Ստուգիչ գումարների համընկնումը վկայում է հաշվումների ճշտության մասին:

Դանենք 3-րդ և 4-րդ կարգի պայմանական մոմենտները (առաջին և երկրորդ կարգի պայմանական մոմենտները հաշվել ենք 486 խնդրում՝ $M_1^* = 0,23$, $M_2^* = 1,27$)

$$M_3^* = \frac{1}{n} \sum n_i u_i^3 = \frac{149}{100} = 1,49;$$

$$M_4^* = \frac{1}{n} \sum n_i u_i^4 = \frac{595}{100} = 5,95,$$

Գտնենք երրորդ և չորրորդ կարգի կենտրոնական էմպիրիկ մոմենտները՝

$$m_3 = [M_3^* - 3M_1^* M_2^* + 2(M_1^*)^3]h^3.$$

$$m_4 = [M_4^* - 4M_1^* M_3^* + 6(M_1^*)^2 M_2^* - 3(M_1^*)^4]h^4,$$

Տեղադրելով $h = 2$, $M_1^* = 0,23$, $M_2^* = 1,27$, $M_3^* = 1,49$, $M_4^* = 5,95$, կստանանք $m_3 = 5,124$, $m_4 = 79,582$:

Հաշվի առնելով, որ $D_c = 4,87$ (առև 486 խնդրը), կդանենք որոնելի ասիմետրիան և էքսցեսը՝

$$a_s = \frac{m_3}{\sigma_r^3} = \frac{5,124}{(\sqrt[4]{4,87})^3} = 0,49;$$

$$e_k = \frac{m^4}{\sigma_r^4} - 3 = \frac{79,582}{(\sqrt[4]{4,87})^4} - 3 = 0,36,$$

495. $n = 100$ ժավալի ընտրանքի տված բաշխումով, արտադրյալների մեթոդի օգնությամբ, գտնել ասիմետրիան և էքսցեսը:

ա)	x_i	2,6	3,0	3,4	3,8	4,2	μ)	x_i	1	6	11	16	21
	n_i	5	20	45	15	12;		n_i	5	25	40	20	10

Պատ.՝ $a_s = 0,145$, $e_k = -0,337$, μ) $a_s = 0,18$, $e_k = -0,45$:

Բ. Գումարների մեթոդը

496. $n = 100$ ժավալի ընտրանքի տված բաշխումով, գումարների մեթոդի օգնությամբ, գտնել ասիմետրիան և էքսցեսը.

x_i	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84
n_i	2	4	6	8	12	30	18	8	7	5

Լուծում: Օգտվում ենք գումարների մեթոդից, դրա համար կազմենք հաշվարկալին աղյուսակ (աղյուսակ 4): Այս գլխի \S 2-ում, 492 խնդիրը լուծելիս արդեն ասվեց, թե ինչպես լրացնել հաշվարկացին աղյուսակի 1—4 սյունակները, ուստի սահմանափակվենք համառոտ պարզաբանումներով:

Հինգերորդ սյունակը լրացնելիս կեղծ զրոն (68) պարունակող տողի համապատասխան վանդակում գրենք զրո, այդ 0-ից վերև և ներքեւ տեղադրենք ևս 2-ական զրոներ:

Զրոներից վերև գտնվող վանդակներում գրենք 4-րդ սյունակի կուտակված հաճախությունները վերից զար, արդյունքում ստացվում են հետեւյալ կուտակված հաճախությունները՝ $2; 2 + 8 = 10; 2 + 8 + 20 = 30$: Գումարելով կուտակված հաճախությունները, կստանանք $b_3 = 2 + 10 + 30 = 42$ թիվը, որը գրում ենք 5-րդ սյունակի վերին վանդակում:

Զրոներից ներքեւ գտնվող վանդակներում գրենք

4-րդ սյունակի կուտակված հաճախությունները վարից վեր, արդյունքում ստացվում են հետեւյալ կուտակված հաճախությունները՝ 5; $5 + 17 = 22$: Գումարելով կուտակված հաճախությունները, կստանանք $a_3 = 5 + 22 = 27$ թիվը, որը գրում ենք հինգերորդ սյունակի ստորին վանդակում:

Նման եղանակով լրացնում ենք 6-րդ սյունակը, ընդուրում գումարում ենք 5-րդ սյունակի հաճախությունները: Գումարելով զրոներից վեր ընկած կուտակված հաճախությունները, ստանում ենք $b_4 = 2 + 12 = 14$ թիվը, որը գրում ենք 6-րդ սյունակի վերին վանդակում: Գումարելով զրոներից ներքեւ ընկած կուտակված գումարները (m_4 խընդուրում միայն 1 գումարելի է), ստանում ենք $a_4 = 5$ թիվը, որը գրում ենք 6-րդ սյունակի ստորին վանդակում:

Արգյունքում ստանում ենք հաշվարկային աղյուսակը (աղյուսակ 4):

Սառաջում: Երրորդ սյունակի զրոյից վեր, ձախ և ներքեալ հարկան 3 թվերի գումարը պետք է լինի հավասար ընտրանքի ծավալին ($32 + 30 + 38 = 100$), սանդղաձեւ զծի 2 հարկան աստիճաններից (q^2 երբ ավելի հաստ են)՝ վերեւ ընկած երկու թվերի գումարը պետք է լինի հավասար նախորդ աստիճանից վերեւ գտնվող b_1 թվին (σ աստիճաններով գեպի վերև շարժվելիս), $32 + 40 = 72 = b_1$, $40 + 30 = 70 = b_2$, $30 + 12 = 42 = b_3$: Նման ձեռվ ստուգում են զեպի ներքեալ ամսող «սանդղաձեւ աստիճաններից» ներքեւ ընկած 2 թվերի գումարը՝ $38 + 37 = 75 = a_1$, $37 + 22 = 59 = a_2$, $22 + 5 = 27 = a_3$:

Եթե նշված հավասարություններից զոնե մեկը ճիշտ չէ, ապա պետք է փնտել հաշվումներում եղած սխալը:

Որոշենք d_i ($i = 1, 2, 3$) և s_i ($i = 1, 2, 3, 4$) մեծությունները՝

$$d_1 = a_1 - b_1 = 75 - 72 = 3, \quad d_2 = a_2 - b_2 = 59 - 70 = -11,$$

$$d_3 = a_3 - b_3 = 27 - 42 = -15,$$

$$s_1 = a_1 + b_1 = 75 + 72 = 147, \quad s_2 = a_2 + b_2 = 59 + 70 = 129,$$

$$s_3 = a_3 + b_3 = 27 + 42 = 69, \quad s_4 = a_4 + b_4 = 5 + 14 = 19,$$

U. Q. J. n. L. u. m. l. - 4

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i	$b_1=72$	$b_2=70$	$b_3=42$	$b_4=14$
48	2	2	2	2	2
52	4	6	8	10	12
56	6	12	20	30	0
60	8	20	40	0	0
64	12	32	0	0	0
68	30	0	0	0	0
72	18	38	0	0	0
76	8	20	37	0	0
80	7	12	17	22	0
84	5	5	5	5	5
	$n = 100$	$a_1 = 75$	$a_2 = 59$	$a_3 = 27$	$a_4 = 5$

Գանհենք 1-ին, 2-րդ, 3-րդ և 4-րդ կարգի պայմանական մոմենտները՝

$$M_1^* = \frac{d_1}{n} = \frac{3}{100} = 0,03; \quad M_2^* = \frac{s_1 + 2s_2}{n} =$$

$$= \frac{147 + 2 \cdot 129}{100} = 4,05;$$

$$M_3^* = \frac{d_1 + 6d_2 + 6d_3}{n} = \frac{3 + 6(-11) + 6(-15)}{100} = -1,53;$$

$$M_4^* = \frac{s_1 + 14s_2 + 36s_3 + 24s_4}{n} = \frac{147 + 14 \cdot 129 + 36 \cdot 69 + 24 \cdot 19}{100} =$$

$$= 48,93,$$

Հաշվենք 3-րդ և 4-րդ կարգի կենտրոնական էմպիրիկ մոմենտները՝

$$m_3 = [M_3^* - 3M_1^* M_2^* + 2(M_1^*)^3]h^3 = [-1,53 - 3 \cdot$$

$$\cdot 0,03 \cdot 4,05 + 2(0,03)^3] \cdot 4^3 = -121,248;$$

$$m_4 = [M_4^* - 4M_1^* M_3^* + 6(M_1^*)^2 M_2^* - 3(M_1^*)^4] \cdot h^4 =$$

$$= [48,93 - 4 \cdot 0,03 \cdot (-1,53) + 6(0,03)^2 \cdot 4,05 - 3 \cdot (0,03)^4]4^4 =$$

$$= 49,135,$$

Գանհենք որոնելի ասխմեարիան և էքսցեսը, նկատի ունենալով, որ $\sigma_e = \sqrt{D_e} = \sqrt{64,78}$ (D_e գիսպերսիան հաշվելենք ավելի շուտ, տես 492 խնդիրը),

$$a_s = \frac{m^3}{\sigma_e^3} = \frac{-121,248}{(\sqrt{64,78})^3} = -0,23;$$

$$e_k = \frac{m_4}{\sigma_e^4} = \frac{49,134}{(\sqrt{64,78})^4} = 0,01,$$

497. $n = 100$ ժակալի ընտրանքի տված բաշխումով,
օգպելով գումարների մեթոդից, հաշվել ասիմետրիան և
էքսցեսը:

ա) x_i 10,2 10,4 10,6 10,8 11,0 11,2 11,4 11,6 11,8 12,0;

n_i 2 3 8 13 25 20 12 10 6 1

բ) x_i 12 14 16 18 20 22

n_i 5 15 50 16 10 4,

Պատ. ա) $a_s = -0,01$, $e_k = -0,24$, բ) $a_s = 0,49$, $e_k = 0,36$,

ՏԱՄՆԵՐԿԱՒԵՐՈՐԴԻ ԳԼՈՒԽ

ԿՈՌԵԼԱՑԻԱՑԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԸ

§ 1. Գծային կոռելյացիա

Եթե X -ը X -ի վրա և X -ը Y -ի վրա ուղղեսիայի գծերը ուղիղ-ներ են, ապա կոռելյացիան կոչվում է գծային:

Եթե X -ի վրա ուղղեսիայի ուղիղ գծի ընտրանքային հավասարումն ունի հնարելյալ տեսքը՝

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_c \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}), \quad (*)$$

որտեղ \bar{y}_x -ը պայմանական միջինն է, \bar{x} և \bar{y} -ը X և Y հայտանիշների ընտրանքային միջիններն են, σ_x -ը և σ_y -ը՝ ընտրանքային միջին քառակուսային շեղումները, r_c ՝ ընտրանքային կոռելյացիայի գործակեցը, σ_y ՝ որում:

$$r_c = \frac{\sum n_{xy} xy - \bar{n} \bar{x} \bar{y}}{\bar{n} \sigma_x \sigma_y},$$

X-ը Y-ի վրա ռեգրեսիայի ուղղի քննրանքային հավասարաւմն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y}), \quad (**)$$

Եթե X և Y հայտանիշների նկատմամբ կատարած զիտումների տվյալները տրված են հավասարահեռ տարրերակներով կոռելյացիոն աղյուսակի տեսքով, ապա նորառակահարմար է անցնել

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1}, \quad v_i = \frac{y_i - C_2}{h_2}$$

պայմանական տարրերակներին, որում $C_1 = \bar{x}$ տարրերակների կեղծ զրոն է (հաշվման նոր սկիզբը), որպես կեղծ զրո հարմար է ընտրել այն տարրերակը, որն ընկած է վարիացիոն շարքի միջին մասում (պայմանավորվենք որպես կեղծ զրո վերցնել ամենամեծ հաճախությունն ունեցող տարրերակը): $h_1 = r_{xy}$ քայլն է, $|r_{xy}| \leq 1$, $|r_{xy}| < 1$ դրկու հարկան տարրերակները տարրերությունը, $C_2 = \bar{y}$ և $h_2 = r_{yy}$ յ տարրերակների կեղծ զրոն և քայլը:

Այդ գեպքում

$$r_{xy} = \frac{\sum n_{uv} uv - \bar{u}\bar{v}}{\sqrt{n\sigma_u^2 \sigma_v^2}},$$

$r_{yy} = \frac{1}{n} \sum n_{vv} vv$ արտահայտությունը հարմար է հաշվել, օդաբար աղյուսակ 7-ից (ան 498 խնդրի լուծումը):

Այս աղյուսակը մեծությունները կարելի է գտնել կամ արտազբայալների մեթոդով (եթե տվյալների քանակը մեծ է), կամ անմիջապես, հետեւյալ բանաձեռքի օգնությամբ՝

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum n_{uu}, \quad \bar{v} = \frac{1}{n} \sum n_{vv}, \quad \sigma_u = \sqrt{\bar{u}^2 - (\bar{u})^2},$$

$$\sigma_v = \sqrt{\bar{v}^2 - (\bar{v})^2},$$

Ունենալով այդ մեծությունները, (*) և (**) ռեզըեսիայի հավասարումներում եղած մեծությունները կարելի է հաշվել

$$x = u \bar{h}_1 + C_1; \quad y = \bar{v} h_2 + C_2; \quad \sigma_x = \sigma_u \cdot h_1; \quad \sigma_y = \sigma_v \cdot h_2$$

բանաձևերով:

Գծային կոռելյացիոն կախվածության ուժը գնահատվում է կոռելյացիայի ընտրանքային գործակցով: Որքան մոտ է $|r_c|$ մեկին, այնքան կապը ուժեղ է, որքան մոտ է $|r_c|$ զրոյին, այնքան կապը թույլ է:

498. Կոռելյացիոն աղյուսակ ծառմ բերված տվյալներով, գտնել Y -ը X -ի վրա ոեզրեսիայի ուղղի ընտրանքային հավասարումը:

Լուծում: Կազմենք պայմանական տարբերակների կոռելյացիոն աղյուսակ 6-ը , վերցնելով որպես կեղծ զրուներ $C_1 = 30$ և $C_2 = 36$ թվերը (այդ տարբերակներից լուրաքանչյուրը ընկած է համապատասխան վարիացիոն շարքի միջին մասում), իսկ $h_1 = 5$, $h_2 = 10$:

$\zeta_{w_2} q_{E_n} \bar{u}$ -ը և \bar{v} -ը:

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum n_u u = \frac{4 \cdot (-2) + 14 \cdot (-1) + 46 \cdot 0 + 16 \cdot 1 + 20 \cdot 2}{100} = \\ = 0,34,$$

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum n_v v = \frac{10 \cdot (-2) + 18 \cdot (-1) + 44 \cdot 0 + 22 \cdot 1 + 6 \cdot 2}{100} =$$

$$= -0,04:$$

$\zeta_{w_2} q_{E_n} \circ \sigma$ աժանդակ \bar{u}^2 և \bar{v}^2 մեծությունները:

$$\bar{u}^2 = \frac{1}{n} \sum n_u u^2 = \frac{4 \cdot 4 + 14 \cdot 1 + 16 \cdot 1 + 20 \cdot 4}{100} = \\ = 1,26;$$

X Y	20	25	30	35	40	n_y
16	4	6	—	—	—	10
26	—	8	10	—	—	18
36	—	—	32	3	9	44
46	—	—	4	12	6	22
56	—	—	—	1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	n=100

u v	-2	-1	0	1	2	n_v
-2	4	6	—	—	—	10
-1	—	8	10	—	—	18
0	—	—	32	3	9	44
1	—	—	4	12	6	22
2	—	—	—	1	5	6
n_u	4	14	46	16	20	n=100

$$\overline{v^2} \frac{1}{n} \sum n_{uv} v^2 = \frac{10 \cdot 4 + 18 \cdot 1 + 22 \cdot 1 + 6 \cdot 4}{100} = 1,04,$$

Գամենենք σ_u -ն և σ_v -ն:

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2} = \sqrt{1,26 - 0,34^2} = 1,07;$$

$$\sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\bar{v})^2} = \sqrt{1,04 - 0,04^2} = 1,02;$$

Հաշվենք $\sum n_{uv} uv$ արտահայտության արժեքը, դրա համար կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 7-ը: Ալդ աղյուսակի վերջին սյունակի թվերը գումարելով, ստանում ենք՝

$$\sum_v \cdot u = \sum n_{uv} u \cdot v = 82:$$

Հաշվումների ճշտությունը ստուգելու համար գտնում ենք վերջին տողի թվերի գումարը՝

$$\sum_u u \cdot v = \sum n_{uv} \cdot uv = 82:$$

Գումարների համընկնումը վկայում է այն մասին, որ հաշվումները կատարված են ճիշտ:

Պարզաբանումներ աղյուսակ 7-ը կազմելու վերաբերյալ:

1. Ա տարբերակի և n_{uv} հաճախության n_{uv} և արտադրյալը զրում ենք հաճախությունը պարունակող վանդակի վերին աջ անկյունում: Օրինակ, առաջին տողի վանդակների վերին աջ անկյուններում գրված են $4 \cdot (-2) = -8$ և $6 \cdot (-1) = -6$ արտադրյալները:

2. Միևնույն տողի բոլոր վանդակների վերին աջ անկյուններում գրված թվերի գումարը գրում ենք այդ տողի շնորհականակիք վանդակում: Օրինակ, առաջին տողի համար

$$U = -8 + (-6) = -14:$$

3. Վերջապես, բազմապատկում ենք և առաջած արտադրյալը գրում չVU սյունակից վանդակում: Օրինակ, աղյուսակի առաջին տողում $v = -2$, $U = -14$, հետևաբար,

$$vU = (-2) \cdot (-14) = 28:$$

4. Գումարելով և VU սյունակից բոլոր թվերը ստանում ենք $\sum vU$ գումարը, որը հավասար է որոնելի $\sum n_{uv} \cdot v$ գումարին: Օրինակ, աղյուսակ 7-ում $\sum_v vU = 82$, հետևաբար, որոնելի գումարը $\sum n_{uv} \cdot v = 82$,

Սխալներից խուսափելու համար նման հաշվումները կատարում ենք նաև սյունակների նկատմամբ: Եթե n_{uv} արտադրյալները գրում ենք հաճախությունը պարունակող վանդակի ներքեխ ձախ անկյունում, գումարելով սյունակի վանդակների ներքեխ ձախ անկյուններում՝ դրված թվերը՝ ստացված արդյունքը գրում ենք չV տողում», վերջապես յուրաքանչյուր տարրերակ բազմապատկում ենք V-ով և արտադրյալը գրում վերջին տողի վանդակում:

Գումարելով վերջին տողի բոլոր թվերը, ստանում ենք $\sum_u uV$ գումարը, որը նույնպես հավասար է որոնելի $\sum n_{uv} \cdot U \cdot V$ գումարին: Օրինակ, աղյուսակ 7-ում $\sum_u uV = 82$, հետևաբար, $\sum n_{uv} \cdot u \cdot v = 82$,

Հաշվենք ընտրանքային կուելլացիայի որոնելի գործակիցը:

$$r_p = \frac{\sum n_{uv} \cdot u \cdot v - \bar{u} \bar{v}}{n \sigma_u \sigma_v} = \frac{82 - 100 \cdot 0,34(-0,04)}{100 \cdot 1,07 \cdot 1,02} = 0,76:$$

Դանենք h_1 և h_2 քայլերը (ցանկացած երկու տարրերակների միջև եղած տարրերությունը

$$(h_1 = 25 - 20 = 5; \quad h_2 = 26 - 16 = 10;$$

v	u	-2	-1	0	1	2	$U = \sum u_{uv} \cdot u$	$v \cdot U$
-2		-8	-6				-14	28
		4	6					
		-8	-12					
-1			-8	0			-8	8
			8	10				
			-8	-10				
0				0	3	18	21	24
				32	3	9		
				0	0	0		
1				0	12	12	24	24
				4	12	6		
				4	12	6		
2					1	10	11	22
					1	5		
					2	10		
$V = \sum v_{uv} \cdot v$		-8	-20	-6	14	16		$\sum v \cdot V = 82$
$u \cdot V$		16	20	0	14	32	$\sum u \cdot V = 82 \leftarrow$	\downarrow

Ոլոշենք \bar{x} և \bar{y} մեծությունները, հաշվի առնելով, որ
 $C_1 = 30$, $C_2 = 36$;

$$\bar{x} = u \cdot h_1 + C_1 = 0,34 \cdot 5 + 30 = 31,70;$$

$$\bar{y} = v \cdot h_2 + C_2 = (-0,04) \cdot 10 + 36 = 35,60;$$

Գտնենք σ_x -ը և σ_y -ը:

$$\sigma_x = h_1 \sigma_u = 5 \cdot 1,07 = 5,35;$$

$$\sigma_y = h_2 \sigma_v = 10 \cdot 1,02 = 10,2;$$

Ստացված արժեքները տեղադրելով (*)-ում, ստանում
 ենք Y -ի X -ի վրա ոեզրեսիալի գծի որոնելի հավասարումը՝

$$\bar{y}_x - 35,60 = 0,76 \cdot \frac{10,2}{5,35} (x - 31,70)$$

Դամ վերջնականապես

$$\bar{y}_x = 1,45x - 10,36;$$

499. Հետևյալ կոռելացիոն աղյուսակներում բերված
 ավալներով գտնել Y -ը X -ի վրա և X -ը Y -ի վրա ոեզրեսիաների ողիղների հավասարումները:

ա)		5	10	15	20	25	30	35	40	n_y
X	Y	2	1		—	—	—	—	—	3
100	120	3	4	3	—	—	—	—	—	10
120	140	—	—	5	10	8	—	—	—	23
140	160	—	—	—	1	—	6	1	1	9
160	180	—	—	—	—	—	4	1	1	5
n_x		5	5	8	11	8	6	5	2	0,5

p)

X Y	18	23	28	33	38	43	48	n_y
125	—	1	—	—	—	—	—	1
150	1	2	5	—	—	—	—	8
175	—	3	2	12	—	—	—	17
200	—	—	1	8	7	—	—	16
225	—	—	—	—	3	3	—	6
250	—	—	—	—	—	1	1	2
n_x	1	6	8	20	10	4	1	$n=50$

q)

X Y	5	10	15	20	25	30	35	n_y
100	—	—	—	—	—	6	1	7
120	—	—	—	—	—	4	2	6
140	—	—	8	10	5	—	—	23
160	3	4	3	—	—	—	—	10
180	2	1	—	1	—	—	—	4
n_x	5	5	11	11	5	10	3	$n=50$

Qmn. m) $\bar{y}_x = 1,92x + 101,6,$

$\bar{x}_y = 0,12y + 3,7,$

p) $\bar{y}_x = 4x + 57,8,$

$\bar{x}_y = 0,19y - 3,1,$

q) $\bar{y}_x = -2,15x + 181,8,$

$\bar{x}_y = -0,33y + 65,7,$

2. Կորագիծ կոռելյացիա

Եթե սեղբեսիայի գրաֆիկը կոր դիմ է, ապա կոռելյացիան կոչվում է կորագիծ: Մասնավորապես, եթերորդ կարգի պարաբոլան կոռելյացիայի գեղքում Տ-ը Խ-ի վրա սեղբեսիայի ընտրանքային հավասարումն ունի հետեւալ աեսքը՝

$$\bar{y}_x = Ax^2 + Bx + C,$$

A , B , C անհայտ պարամետրերը որոշում են (օրինակ, $\frac{\partial}{\partial} \text{առուսկ} \cdot \text{մեթոդով}$) հավասարումների հետեւալ համակարգից՝

$$\begin{cases} \left(\sum n_x x^4 \right) A + \left(\sum n_x x^3 \right) B + \left(\sum n_x x^2 \right) C = \sum n_x \bar{y}_x^2; \\ \left(\sum n_x x^3 \right) A + \left(\sum n_x x^2 \right) B + \left(\sum n_x x \right) C = \sum n_x \bar{y}_x; \\ \left(\sum n_x x^2 \right) A + \left(\sum n_x x \right) B + \left(\sum n_x \right) C = \sum n_x \bar{y}_x; \end{cases} \quad (*)$$

Եման ձեռվ զանում են Խ-ը և Տ-ի վրա սեղբեսիայի ընտրանքային հավասարումը

$$\bar{x}_y = A_1 y^2 + B_1 y + C_1;$$

Տ-ը Խ-ի վրա կոռելյացիայի ուժեղությունը զնահատվում է ընտրանքային կոռելյացիոն հարաբերության օգնությամբ (T -ի միջինքային միջինքային քառակուսային շեղման հարաբերությունը նրա միջինքային քառակուսային շեղմանը),

$$\gamma_{lyx} = \frac{\sigma_{dftb}}{\sigma_{lyx}} t$$

Կամ (m_{JL} նշանակումներով)

$$\gamma_{lyx} = \frac{\sigma_{lyx}}{\sigma_y} t$$

Այսամեղ

$$\sigma_{lyx} = \sqrt{D_{dftb}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum n_x (\bar{y}_x - \bar{y})^2},$$

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{D_{e^y}}_q} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum n_y (y - \bar{y})^2},$$

տրաեղ ուղ ընտրանքի ծավալն է (բոլոր հաճախությունների գումարը), π_x -ը՝ X հայտանիշի և արժեքի հաճախությունը, π_y -ը՝ Y հայտանիշի յ արժեքի հաճախությունը, \bar{y}_x -ը՝ Y հայտանիշի պայմանական միջինը, \bar{y} -ը, հայտանիշի ընդհանուր միջինը:

Նման ձևով որոշվում է X -ը Y -ի վրա ընտրանքային կռուելյացիոն հարաբերությունը.

500. Կռուելյացիոն աղյուսակ 8-ում բերված տվյալներով գտնել ռեգրեսիայի ընտրանքային $\bar{y}_x = Ax^2 + Bx + C$ հավասարումը:

Գնահատել կռուելյացիոն կապի ուժը, ելնելով ընտրանքային կռուելյացիոն հարաբերության արժեքից:

Աղյուսակ 8

X Y	2	3	5	n_y
25	20	—	—	20
45	—	30	1	31
110	—	1	48	49
n_x	20	31	49	$n=100$

Լուծումն կազմենք հաշվարկային աղյուսակը (աղյուսակ 9)

U. S. J. n + u m k 9.

\bar{x}	n_x	\bar{y}_x	$n_x x$	$n_x x^2$	$n_x x^3$	$n_x x^4$	$n_x \bar{y}_x$	$n_x \bar{y}_x x$	$n_x \bar{y}_x x^2$
2	20	25	40	80	160	320	500	1000	2000
3	31	47,1	93	279	837	2511	4380	4380	13141
5	49	108,67	245	1225	6125	30625	5325	26624	133121
\sum	100		378	1584	7122	33456	7285	32004	148262

Աղլուսակ 9-ի վերջին տողի թվերը տեղադրելով (*)-ի մէջ, կստանանք A, B, C անհայտ գործակիցների նկատմամբ հավասարումների համակարգ,

$$33456 \text{ A} + 7122 \text{ B} + 1584 \text{ C} = 148262,$$

$$7122 A + 1584 B + 378 C = 32004,$$

$$1584 \text{ A} + 378 \text{ B} + 100 \text{ C} = 7285.$$

Լուծելով այս համակարգը (օրինակ, Գառափ մեթոդ),
ստանում ենք՝

$$A=2.94, \quad B=7.27, \quad C=-1.25,$$

Գործակիցների ստացած արժեքները ահպակելով՝ սկզբանական մասնակիությունը առաջանակագործ է առաջանակագործ աշխատավայրերում:

$$\bar{y}_x = Ax^2 + Bx + C$$

հավասարման մեջ, վերջնականապես կունենանք՝

$$\bar{y}_x = 2,94x^2 + 7,27x - 1,25:$$

γ_{yx} ընտրանքային կոռելյացիոն հարաբերությունը հաշվելու համար, նախապես գտնենք \bar{y} ընդհանուր միջինը, σ_y ընդհանուր միջին քառակուսային շեղումը և $\sigma_{\bar{y}_x}$ միջխմբային միջին քառակուսային շեղումը.

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum n_y y = \frac{20 \cdot 25 + 31 \cdot 45 + 49 \cdot 110}{100} = 72,85;$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum n_y (y - \bar{y})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{20(25 - 72,85)^2 + 31 \cdot (45 - 72,85)^2 + 49(110 - 72,85)^2}{100}} =$$

$$= 37,07; \quad \sigma_{\bar{y}_x} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum n_x (\bar{y}_x - \bar{y})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{20(25 - 72,85)^2 + 31(47,1 - 72,85)^2 + 49(108,67 - 72,85)^2}{100}} =$$

$$= 33,06:$$

Դանենք որոնելի ընտրանքային կոռելյացիոն հարաբերությունը՝

$$\gamma_{yx} = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y} = \frac{33,06}{37,07} = 0,89;$$

501. Կոռելյացիոն աղյուսակում բերված տվյալներով գտնել ռեգրեսիայի ընտրանքային $\bar{y}_x = Ax^2 + Bx + C$ հավասարումը և γ_{yx} ընտրանքային կոռելյացիոն հարաբերությունը:

ω)

X Y	0	1	2	3	4	n _y
0	18	1	1	—	—	20
3	1	20	—	—	—	21
5	3	5	10	2	—	20
10	—	—	7	12	—	19
17	—	—	—	—	20	20
n _x	22	26	18	14	20	n=100

μ)

X Y	0	4	6	7	10	n _y
7	19	1	1	—	—	21
13	2	14	—	—	—	16
40	—	3	22	2	—	27
80	—	—	—	15	—	15
200	—	—	—	—	21	21
n _x	21	18	23	17	21	n=100

q)

X Y	0	4	5	n_y	
1	50	5	1	56	
35		44		44	
50		5	45	50	
n_x	50	54	46	$n=150$	

q)

X Y	0	1	2	3	4	n_y	
10	20	5				25	
11	7	15	3	1		26	
20		3	17	4		24	
35			8	13	7	28	
50				5	42	47	
n_x	27	23	28	23	49	$n=150$	

b)

X Y	7	8	9	n_y	
200	41	7		48	
300	1	52	1	54	
400		8	40	48	
n_x	42	67	41		$n=150$

Պատմ. ա) $\bar{y}_x = 0,66x^2 + 1,23x + 1,07; \quad r_{yx} = 0,96,$

բ) $\bar{y}_x = 3,20x^2 - 13,01x + 9,09; \quad r_{yx} = 0,99,$

գ) $\bar{y}_x = 1,53x^2 + 1,95x + 1; \quad r_{yx} = 0,86,$

դ) $\bar{y}_x = 1,59x^2 + 3,33x + 9,4; \quad r_{yx} = 0,83$

ե) $\bar{y}_x = -1,52x^2 + 121,94x - 576,61; \quad r_{yx} = 0,83,$

502. Կոռելյացիոն աղյուսակամբ բերված ավագաներով գտնել սեպրեսիալի, ընտրանքային $\bar{X}_y = Ay^2 + By + C$ հավասարությունը և r_{xy} բնարանքային կոռելյացիոն հարաբերությունը:

ա)

X Y	6	30	50	n_y	
1	15			15	
3	1	14		15	
4		2	17	20	
n_x	16	16	18		$n=50$

X	1	9	19	n_y
Y				
0	13			13
2	2	10		12
3	1	1	23	25
n_x	16	11	23	$n=50$

$$\text{Պատ. ա) } \bar{x}_y = 2,8y^2 + 0,02y + 3,18, \quad \eta_{xy} = 0,96,$$

$$\text{բ) } \bar{x}_y = 2,29y^2 - 1,25y + 1, \quad \eta_{xy} = 0,92.$$

ՏԱՄՆԵՐԵՔԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՎԻՃԱԿԱԳՐԱԿԱՆ ՀԻՓՈԹԵԶՈՆԵՐԻ ՎԻՃԱԿԱԳՐԱԿԱՆ
ՄՏՈՒԳՈՒՄԸ

§ 1. Հիմնական տեղեկություններ

Անհայտ բաշխման տեսքի կամ հայտնի բաշխման պարամետրերի մասին հիպոթեզները, կոչվում են վիճակագրական:

Առաջարկած հիպոթեզը կոչվում է զրոյական (հիմնական):

Մրցակցող (ալտերնատիվ) կոչվում է այն H_1 հիպոթեզը, որը հակասում է զրոյականին:

Հիպոթեզի ստուգման արդյունքում հնարավոր են երկու տիպի սխալներ:

Առաջին սեռի սխալը այն է, որ մերժվում է ճիշտ հիպոթեզը: Առաջին սեռի սխալի հավանականությունը կոչվում է նշանակալիության մակարդակ:

Երկրորդ սեռի սխալը այն է, որ ընդունվում է ոչ ճիշտ հիպոթեզը: Երկրորդ սեռի սխալի հավանականությունը նշանակում են թիվային չիպոթեզի ստուգմանը ծառայող K պատահական մեծությունը:

կոչվում է վիճակագրական չափանիշ (k ամ պարզապես չափանիշ):

Դիտվող (էմպիրիկ) K դիտ. արժեքը կոչվում է չափանիշի այն արժեքը, որը հաշված է ընտրանքի տվյալներով:

Չափանիշի արժեքների համախմբությունը, որոնց գեպքում զըստ յական հիպոթեզը մերժվում է, կոչվում է կրիտիկական տիրույթ:

Հիպոթեզի ընդունման տիրույթ (բույատրելի արձեքների տիրույթ) կոչվում է չափանիշի այն արժեքների համախմբությունը, որոնց գեպքում զըստ յական հիպոթեզը ընդունվում է:

Վիճակագրական հիպոթեզների ստուգման հիմնական սկզբունքն է՝ եթե չափանիշի դիտվող արժեքը պատկանում է կրիտիկական տիրույթին, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է, եթե չափանիշի դիտվող արժեքը պատկանում է հիպոթեզի ընդունման աիրույթին, ապա հիպոթեզը ընդունվում է:

Կրիտիկական տիրույթը հիպոթեզի ընդունման աիրույթից բաժանող K_{4r} կետերը կոչվում են կրիտիկական կետեր (սահմաններ):

Աջակողմյան է կոչվում այն կրիտիկական աիրույթը, որը որոշվում է $K > k_{4r}$ անհավասարությամբ, որտեղ k_{4r} զրական թիվ է:

Աջակողմյան է կոչվում այն կրիտիկական աիրույթը, որը որոշվում է $K < k_{4r}$ անհավասարությամբ, որտեղ k_{4r} բացասական թիվ է:

Աջակողմյան կամ ձախակողմյան կրիտիկական տիրույթները կոչվում են միակողմանի:

Երկկողմանի է կոչվում այն կրիտիկական աիրույթը, որը որոշվում է $K < k_1$, $K > k_2$ ($k_2 > k_1$) անհավասարություններով: Մասնավորապես, եթե կրիտիկական կետերը սիմետրիկ են զրոյի նկատմամբ, ապա երկկողմանի կրիտիկական տիրույթը որոշվում է (k_1 և k_2 պարզվում են, որ $k_{4r} > 0$) $K < -k_{4r}$, $K > k_{4r}$ անհավասարություններով կամ համարժեքը

$$|K| > k_{4r} \text{ անհավասարությամբ.}$$

Կրիտիկական աիրույթը դանելու համար ընարում են նշանակալիության և մակարդակը և վնարում են կրիտիկական կետերը, ելնելով հետեւյալ տանչություններից՝

ա) աջակողմյան կրիտիկական տիրույթի դեպքում՝

$$P(K > k_{4r}) = \alpha \quad (k_{4r} > 0);$$

բ) ճախակողմյան կրիտիկական տիրույթի դեպքում՝

$$P(K < k_{\alpha}) = \alpha \quad (K_{\alpha} < 0);$$

դ) երկողմանի սիմետրիկ տիրույթի դեպքում՝

$$P(K > k_{\alpha}) = \frac{\alpha}{2}$$

$$P(K < -k_{\alpha}) = \frac{\alpha}{2} \quad (K_{\alpha} > 0);$$

§ 2. Նորմալ գլխավոր համախմբությունների երկու դիսպերսիաների համեմատումը

Երկու նորմալ գլխավոր համախմբություններից վերցված են համապատասխանաբար n_1 և n_2 ժագալի անկախ ընտրանքներ և գտնված են ուղղված ընտրանքային S_x^2 և S_y^2 դիսպերսիաները. Պահանջվում է համեմատել այդ դիսպերսիաները:

Կանոն 1: Որպեսզի տրված α նշանակալիության մակարդակով ստուգել $H_0 \sim DX = DY$ հիպոթեզը նորմալ գլխավոր համախմբությունների դիսպերսիաների հավասարության մասին, $H_1 \sim DX > DY$ մրցակցող հիպոթեզի դեպքում անհրաժեշտ է հաշվել

$$F_{q_{\alpha}} = \frac{S_x^2}{\frac{S_y^2}{\alpha}}$$

հայտանիշի դիտվող արձեքը (մեծ ուղղված դիսպերսիայի հարաբերությունը փոքրից) և կրիտիկական կետերի Փիշեր — ՍՅեղեկորի բաշխման աղյուսակից գտնել տրված α նշանակալիության մակարդակի և $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$ (k_1 -ը մեծ ուղղված դիսպերսիայի ազատության աստիճանն է) ազատության աստիճանների համապատասխան $F_{q_{\alpha}}$ (α , k_1 , k_2) կրիտիկական կետը:

Եթե $F_{q_{\alpha}} < F_{q_{\alpha}}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա:

Եթե $F_{q_{\alpha}} > F_{q_{\alpha}}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժում են:

Կանոն 2: $H_1 \sim DX \neq DY$ մրցակցող հիպոթեզի դեպքում $F_{q_{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{2}, k_1, k_2 \right)$ կրիտիկական կետը որոնում են $\frac{\alpha}{2}$ (տվածից երկու անգամ փոքր) նշանակալիության մակարդակով և k_1 ու k_2 ազատության աստիճաններով (k_1 -ը մեծ դիսպերսիայի ազատության աստիճանների թիվն է):

Եթե $F_{\eta_{k^m}} < F_{k_p}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա: Եթե $F_{\eta_{k^m}} > F_{k_p}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժում են:

503. X և Y նորմալ գլխավոր համախմբություններից վերցված երկու անկախ ուղղություններու մագնիտուդինները են $n_1 = 11$ և $n_2 = 14$ ծավալի ընտրանքների տվյալներով հաշվված են $S_x^2 = 0,76$ և $S_y^2 = 0,38$ ուղղված ընտրանքային դիսպերսիաները: $\alpha = 0,05$ նշանակալիության մակարդակով ստուգել $H_0 \sim DX = DY$ գլխավոր դիսպերսիաների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը $DX > DY$ մրցակցող հիպոթեզի դեպքում:

Լուծում: Գտնենք մեծ ուղղված դիսպերսիայի հարաբերությունը փոքրին՝

$$F_{\eta_{k^m}} = \frac{0,76}{0,38} = 2,$$

Համապայմանի մրցակցող հիպոթեզն ունի $DX > DY$ անհավավայր, ուստի կրիտիկական աիրություն աջակողմյան է: $\alpha = 0,05$ նշանակալիության մակարդակով և $k_1 = n_1 - 1 = 11 - 1 = 10$, $k_2 = n_2 - 1 = 14 - 1 = 13$ աղատության աստիճաններով աղյուսակից (հավելված 7) գտնում ենք կրիտիկական կեաը՝

$$F_{k_p}(0,05, 10, 13) = 2,67:$$

Քանի որ $F_{\eta_{k^m}} < F_{k_p}$, ապա գլխավոր դիսպերսիաների հավասարության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա: Այլ կերպ ասած, ուղղված ընտրանքային դիսպերսիաների տարբերությունը նշանակալի չէ:

504. X և Y նորմալ գլխավոր համախմբություններից վերցված երկու անկախ ուղղություններու մագնիտուդինները են $n_1 = 9$ և $n_2 = 16$ ծավալի ընտրանքների տվյալներով հաշվված են $S_x^2 = 34,02$ և $S_y^2 = 12,15$ ուղղված ընտրանքային դիսպերսիաները, $\alpha = 0,01$ նշանակալիության մակարդակով ստուգել $H_0 \sim DX = DY$ զրոյական հիպոթեզը մասին $DX > DY$ մրցակցող հիպոթեզի դեպքում:

Պառ.՝ $F_{q_{\text{t}, \alpha}} = 2,8$, $F_{q_r}(0,01; 8; 15) = 2,64$: Հիպոթեզը մերժվում է:

505. X և Y նորմալ գլխավոր համախմբություններից վերցված երկու անկախ $n_1 = 14$ և $n_2 = 10$ ծավալի ընտրանքների տվյալներով հաշվված են $S_x^2 = 0,84$ և $S_y^2 = 2,52$ տղղված ընտրանքային դիսպերսիաները: $\alpha = 0,1$ նշանակալիության մակարդակով ստուգել $H_0 \sim DX = DY$ գրոյական հիպոթեզը գլխավոր դիսպերսիաների հավասարության մասին $H_1 \sim DX \neq DY$ մրցակցող հիպոթեզի գեպքում:

Լուծում: Հաշվենք մեծ ուղղված դիսպերսիայի հարաբերաթյունը փոքրին՝

$$F_{q_{\text{t}, \alpha}} = \frac{2,52}{0,84} = 3,$$

Պայմանի համաձայն մրցակցող հիպոթեզն ունի $DX \neq DY$ տեսքը, ուստի կրիտիկական տիրությը երկկողմանի է: Կանոն 2-ի համաձայն, կրիտիկական կետը փնարելիս նշանակալիության մակարդակը պետք է տվածից 2 անգամ փոքր վերցնել:

$\frac{\alpha}{2} = \frac{0,1}{2} = 0,05$ նշանակալիության մակարդակով և $k_1 = 10 - 1 = 9$, $k_2 = 14 - 1 = 13$ ազատության աստիճաններով աղյուսակից (հավելված 7) գտնում ենք $F_{q_r}(0,05, 9, 13) = 2,71$ կրիտիկական կետը:

Քանի որ $F_{q_{\text{t}, \alpha}} > F_{q_r}$, ապա գլխավոր դիսպերսիաների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը մերժում ենք:

506. X և Y նորմալ գլխավոր համախմբությաններից վերցված երկու անկախ $n_1 = 9$ և $n_2 = 6$ ծավալի ընտրանքների տվյալներով հաշվված են $D_x X = 14,4$ և $D_x Y = 20,5$ ընտրանքային դիսպերսիաները: $\alpha = 0,1$ նշանակալիության մակարդակով ստուգել գլխավոր դիսպերսիաների հավասարության մասին $H_0 \sim DX = DY$ գրոյական հիպոթեզը $H_1 \sim DX \neq DY$ մրցակցող հիպոթեզի գեպքում:

Ց ուցում: Նախ հաշվել ուղղված դիսպերսիաները՝

$$S_x^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} D_x X, \quad S_y^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1} D_y Y$$

բանաձևով՝

Պատճ.՝ $F_{q_{\text{թ}}}=1,52$, $F_{q_p}(0,05; 5; 8)=3,69$. Այսպիսով, զւլթավոր դիսպերսիաների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա:

507. Երկու մեթոդներով կատարվել են միենալիք ֆիզիկական մեծության չափումներ: Ստացվել են հետեւյալ արդյունքները՝

ա) առաջին գեպքում $x_1=9,6$; $x_2=10,0$; $x_3=9,8$;
 $x_4=10,2$; $x_5=10,6$;

բ) երկրորդ գեպքում $y_1=10,4$; $y_2=9,7$; $y_3=10,0$;
 $y_4=10,3$:

Կարելի՞ է արդյոք համարել, որ երկու մեթոդները ապահովում են միենալիք ճշտությունը, եթե նշանակալիության մակարդակը $\alpha=0,1$: Ենթադրված է, որ չափումների արդյունքները բաշխված են նորմալ, իսկ ընտրանքները անկախ են:

Լուծում: Մեթոդների ճշտության մասին կդատենք, ելնելով նրանց գիտակրսիաներից: Այսպիսով, զրոյական հիպոթեզն անի: $H_0 \sim DX = DY$ տեսքը: Որպես մրցակցող դիտարկենք $H_1 \sim DX \neq DY$ հիպոթեզը:

Հաշվենք ընտրանքային գիտակրսիաները: Հաշվումները պարզեցնելու նպատակով անցնենք

$$u_i = 10x_i - 100, \quad v_i = 10y_i - 100,$$

պարմանական տարբերակներին: Արդյունքում կստանանք

$$u_i \quad -4 \quad 0 \quad -2 \quad 26$$

$$v_i \quad 4 \quad -3 \quad 0 \quad 3$$

պարմանական տարբերակները

Դանենք ուղղված ընտրանքային դիսպերսիաները՝

$$S_u^2 = \frac{1}{n_1-1} \left\{ \sum u_i^2 - \frac{1}{n_1} \left[\sum u_i \right]^2 \right\} = \frac{(16+4+4+36)-4/5}{5-1} =$$

$$= 14,8;$$

$$S_v^2 = \frac{1}{n_2-1} \left\{ \sum v_i^2 - \frac{1}{n^2} \left[\sum v_i \right]^2 \right\} = \frac{(16+9+9)-\frac{16}{4}}{4-1} = \\ = 10,$$

Համեմատենք դիսպերսիաները։ Դանենք մեծ ուղղված դիսպերսիայի հարաբերությունը փոքրին (դիսպերսիաներից յուրաքանչյուրը մեծացել է 10^2 անգամ, բայց նրանց հարաբերությունը մնացել է անփոփոխ)։

$$F_{q_{\text{հա}}} = \frac{S_x^2}{S_y^2} = \frac{S_u^2}{S_v^2} = \frac{14,8}{10} = 1,48,$$

Պայմանի համաձայն, մրցակցող հիպոթեզն ունի $DX \neq DY$ տեսքը, ուստի կրիտիկական տիրույթն երկկողմանի է և կանոն շի համաձայն, կրիտիկական կետը փնտրելիս պետք է նշանակալիության մակարդակը վերցնել տվածից 2 անգամ փոքր։

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0,1}{2} = 0,05 \text{ նշանակալիության մակարդակով և}$$

$$k_1 = n_1 - 1 = 5 - 1 = 4, \quad k_2 = n_2 - 1 = 4 - 1 = 3 \text{ ազատության աստիճաններով աղյուսակից (հավելված 7) գտնում։}$$

$$\text{Ենք } F_{q_p}(0,05; 4; 3) = 9,12 \text{ կրիտիկական կետը։}$$

Քանի որ $F_{q_{\text{հա}}} < F_{q_p}$, ապա գլխավոր դիսպերսիաների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա։ Այլ կերպ ասած, ուղղված դիսպերսիաների տարրերությունը նշանակալի չէ, հետևաբար, երկու մեթոդները ապահովում են չափումների միատեսակ ճշտություն։

508. Երկու ավտոմատ հաստոցները համեմատելու նըսպատակով վերցված են 2 փորձանմուշներ (*ընտրանքներ*)։

տրոնց ծավալները հավասար են $n_1 = 10$ և $n_2 = 8$: Ըստ տըրված գետալների հսկվող չափերի չափման արդյունքում տուացվել են հետեւյալ տվյալները՝

x_i 1,08 1,10 1,12 1,14 1,15 1,25 1,36 1,38 1,40 1,42

y_i 1,11 1,12 1,18 1,22 1,33 1,35 1,36 1,38

Կարելի՞ է արդյոք համարել, որ հաստոցներն ունեն միենալին ճշտությունը $[H_0 \sim DX = DY]$ եթե որպես նշանակալիության մակարդակը ընդունվում է $\alpha = 0,1$ թիվը և մրցակցող $H_1 \sim DX \neq DY$ հիպոթեզը:

Յուրաքանչյուր չափումները պարզեցնելու համար անցնել $v_i = 100x_i - 124$, $v_i = 100y_i - 126$ պայմանական տարրերակներին:
 $s_u^2 = 188,67$, $s_v^2 = 124,84$, $F_{\frac{v}{u}, \infty} = 1,51$, $F_{\frac{u}{v}}(0.05, 9, 7) = 3,63$: Այսպիսով, հաստոցների ճշտությունը միմյանցից տարրեր համարելու հիմք չկա:

§ 3. Նորմալ համախմբության գլխավոր հիպոթետիկ և ուղղված ընտրանքալին դիսպերսիաների համեմատումը

Նշանակենք $n-n$ այն ընտրանքի ծավալը, որով հաշված է ուղղված s^2 դիսպերսիան.

Կանոն 1: Տրված α նշանակալիության մակարդակով $H_0 \sim \sim \sigma^2 = \sigma_0^2$ անհայտ գլխավոր դիսպերսիայի և նիպոթետիկ σ_0^2 արձերի հավասարության մասին զրոյական նիպոթեզը ստուգելու համար մրցակցող $H_1 \sim \sigma^2 > \sigma_0^2$ հիպոթեզի դեպքում անհրաժեշտ է հաշվել

$$\chi^2_{\frac{v}{u}, \infty} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

Չափանիշի դիտվող արձերը և χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից գտնել $\chi^2_{\frac{v}{u}, \infty}(\alpha, k)$ կրիտիկական կետը տրված α նշանակալիության մակարդակով և $k=n-1$ ազատության աստիճանով:

Եթե $\chi^2_{\frac{v}{u}, \infty} < \chi^2_{\frac{v}{u}, \infty}$, ապա զրոյական նիպոթեզը մերժելու հիմք չկա:

Եթե $\chi^2_{\text{գիմ}} > \chi^2_{\alpha}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

Կանոն 2. Մրցակցող $H_1 \sim \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ հիպոթեզի դեպքում գտնում

ենք $\chi^2_{\text{գախ}} \text{ կ. } \left(1 - \frac{\alpha}{2}, k\right)$ ձախ և $\chi^2_{\text{աջ}} \text{ կ. } \left(\frac{\alpha}{2}, k\right)$ աջ կրիտիկական կետերը:

Եթե $\chi^2_{\text{գախ}} \text{ կ. } \chi^2_{\text{աջ}} < \chi^2_{\alpha}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա:

Եթե $\chi^2_{\text{գիմ}} < \chi^2_{\text{գախ}} \text{ կ. } \chi^2_{\text{աջ}} \text{ կ. } \chi^2_{\text{գիմ}} > \chi^2_{\alpha}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

Կանոն 3: Մրցակցող $H_1 \sim \sigma^2 < \sigma_0^2$ հիպոթեզի դեպքում գտնում ենք χ^2_{α} . $(1-\alpha, k)$ կրիտիկական կետը:

Եթե $\chi^2_{\text{գիմ}} > \chi^2_{\alpha} (1-\alpha, k)$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա:

Եթե $\chi^2_{\text{գիմ}} < \chi^2_{\alpha} (1-\alpha, k)$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

Դիտողություն: Եթե ազատության աստիճանը $k > 30$, ապա $\chi^2_{\alpha} (\alpha, k)$ կրիտիկական կետը կարելի է գտնել Գիլֆերտի-Ռիլսնի հավասարությունից՝

$$\chi^2_{\alpha} (\alpha, k) = k \left[1 - \frac{2}{9k} + z_{\alpha} \sqrt{\frac{2}{9k}} \right]^3,$$

որտեղ z_{α} -ն որոշում են Լապլասի ֆունկցիայի օգնությամբ (հավելված 2), հետեւյալ հավասարությունից՝

$$\Phi(z_{\alpha}) = \frac{1-2\alpha}{2} \cdot t$$

509. Նորմալ գլխավոր համախմբությունից վերցված $n = 21$ ծավալի ընտրանքի տվյալներով հաշված է ուղղված ընտրանքային $S^2 = 16,2$ գիսպերսիան: Պահանջվում $\alpha = 0,01$ նշանակալիության մակարդակով ստուգել $H_0 \sim \sim \sigma^2 = \sigma_0^2 = 15$ զրոյական հիպոթեզը, ընդունելով որպես մրցակցող $H_1 \sim \sigma^2 > 15$ հիպոթեզը:

Լուծում: Գտնենք չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$\chi^2_{\text{գիմ}} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(21-1) \cdot 16,2}{15} = 21,6:$$

Պայմանի համաձայն մրցակցող հիպոթեզն ունի $\sigma^2 > 15$ տեսքը, հետեւաբար կրիտիկական տիրույթը աջակողմյան է (կանոն 1): $\alpha = 0,01$ նշանակալիության մակարդակով և $k = n - 1 = 21 - 1 = 20$ ազատության աստիճանով աղյուսակից (հավելված 5) որոշում ենք $\chi^2_{\text{кр}}(0,01, 20) = 37,6$ կրիտիկական կետը:

Քանի որ $\chi^2_{\text{тв}} < \chi^2_{\text{кр}}$, ապա գլխավոր դիսպերսիալի $\sigma^2 = 15$ հիպոթետիկ արժեքի համասարության մասին գրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա: Այլ կերպ ասած, ողղված դիսպերսիալի (16,2) և հիպոթետիկ գլխավոր դիսպերսիալի (15,0) տարրերությանը նշանակալի չէ:

510. Նորմալ գլխավոր համախմբությունից վերցված $n = 17$ ծավալի ընտրանքի տվյալներով հաշվված է ուղղված ընտրանքային $S^2 = 0,24$ դիսպերսիան: Պահանջվում է $\alpha = 0,05$ նշանակալիության մակարդակով ստոգել $H_0 \sim \sim \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0,18$ զրոյական հիպոթեզը, ընդունելով որպես մրցակցող $H_1 \sim \sigma^2 > 0,18$ հիպոթեզը:

Պատճենական $\chi^2_{\text{тв}} = 21,33$, $\chi^2_{\text{кр}}(0,05, 16) = 26,3$: Զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմքը չկան:

511. Նորմալ գլխավոր համախմբությունից վերցված է $n = 31$ ծավալի ընտրանք.

տարրերակները	x_i	10,1	10,3	10,6	11,2	11,5	11,8	12,0
հաճախությունները	n_i	1	3	7	10	6	3	1

Պահանջվում, է $\alpha = 0,05$ նշանակալիության մակարդակով ստոգել $H_0 \sim \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0,18$ զրոյական հիպոթեզը, որպես մրցակցող ընդունելով $H_1 \sim \sigma^2 > 0,18$ հիպոթեզը:

Ցուցույթ: Դիտարկել $v_i = 10x_i - 11$ պայմանական տարրերակները, սկզբից նշանակալիության մակարդակով ստոգելու համար:

$$s_u^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum n_i u_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum n_i u_i \right)^2 \right], \quad \text{իսկ}$$

$$\frac{s^2}{x} = \frac{\frac{s^2}{n}}{10^2};$$

Պատ.՝ $\frac{s^2}{x} = 0,27$, $\chi^2_{\text{թիս}} = 45,0$; $\chi^2_{\text{հր}} (0,05, 30) = 43,8$. Զրոյաւ կան հիպոթեզը մերժվում է: Աւղղված ընտրանքային դիսպերսիայի տարբերությունը հիպոթետիկից նշանակալի է:

512. Ավտոմատ հաստոցի աշխատանքի ճշտությունը ստուգվում է դետալի հսկող չափի դիսպերսիայի օգնությամբ, որը չպետք է գերազանցի $\sigma_0^2 = 0,1$ արժեքը: Պատահականորեն վերցրած նմուշների չափման արդյունքում ստացվել են հետևյալ տվյալները.

Նմուշի հսկող չափը x_i	3,0	3,5	3,8	4,4	4,5
Հաճախությունը n_i	2	6	9	7	1

Պահանջվում է, $\alpha = 0,05$ նշանակալիության մակարդակով, ստուգել, ապահովում է արդյոք հաստոցը պահանջվող ճշտությունը:

Լուծում: Դիտարկվում է $H_0 \sim \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0,1$ գրոյական հիպոթեզը: Որպես մրցակցող ընդունենք $H_1 \sim \sigma^2 \neq 0,1$ հիպոթեզը:

Հաշվենք ուղղված ընտրանքային դիսպերսիան: Հաշվումները պարզեցնելու նպատակով անցնենք պայմանական տարբերակներին, հաշվի առնելով, որ ընտրանքային միջինը մոտավորապես հավասար է 3,9, նշանակենք $u_i = 10x_i - 39$: Հաճախությունների բաշխումը կընդունի հետևյալ տեսքը:

u_i	-9	-4	-1	5	6
n_i	2	6	9	7	1

Գտնենք պայմանական տարբերակների դիսպերսիան

$$s_u^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum n_i u_i^2 - \frac{1}{n} \left[\sum n_i u_i \right]^2 \right\},$$

տեղադրելով տված արժեքները, ստանում ենք $s_u^2 = 19,91$:

Գտնենք որոնելի ուղղված դիսպերսիան

$$s_x^2 = \frac{s_u^2}{10^2} = \frac{19,91}{100} = 0,2,$$

Հաշվենք չափանիշի դիսպերսիան

$$\chi_{q_{\text{բա}}}^2 = \frac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2} = \frac{(25-1)0,2}{0,1} = 48,$$

Մրցակցող հիպոթեզն ունի $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ տեսքը, հետեաբար կրիտիկական տիրույթը երկկողմանի է (կանոն 2):

Աղյուսակից (հավելված 5) գտնենք կրիտիկական կետերը՝ ձախը,

$$\chi_{q_{\text{բ}}^r}^2 \left(1 - \frac{\alpha}{2}; \ k \right) = \chi_{q_{\text{բ}}^r}^2 \left(1 - \frac{0,05}{2}; \ 24 \right) =$$

$$= \chi_{q_{\text{բ}}^r}^2(0,975; 24) = 12,4$$

և աջը,

$$\chi_{q_{\text{բ}}^r}^2 \left(\frac{\alpha}{2}; \ k \right) = \chi_{q_{\text{բ}}^r}^2(0,025; 24) = 39,4:$$

Ունենք $\chi_{q_{\text{բ}}^r}^2 > \chi_{q_{\text{բ}}^r}^2$, հետեաբար զրոյական հիպոթեզը մերժում ենք, հաստօցը չի ապահովում անհրաժեշտ ճշտությունը և պահանջվում է վերակարգավորում:

513. Տարբեր հավաքողների կողմից հանգույցի հավաք ման ժամանակի երկարատև չափումների օգնությամբ, պարզվել է, որ այդ ժամանակի դիսպերսիան կազմում է $\sigma_0^2 = 2$ բոպ.²: Նորեկի աշխատանքի 20 դիտումների արդյունքները հետեւյալն են՝

մեկ հանգույցի հավաքման

ժամանակը բոպեներով x_i 56 58 60 62 64

հաճախությունը n_i 1 4 10 3 2

Կարելի՞ է արդյոք, $\alpha = 0,05$ նշանակալիության մակարդակի դեպքում համարել, որ նորեկը աշխատում է ոիթմիկ (այն իմաստով՝ որ նրա ծախսած ժամանակի դիսպերսիան էապես չի տարբերվում մնացած հավաքողների դիսպերսիաներից):

Ցուցում: Զբոյական հիպոթեզն ունի $H_0 \sim \sigma^2 = \sigma_0^2 = 2$ տեսքը, իսկ մրցակցողը՝ $H_1 \sim \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, $\text{Բնդունել } u_i = x_i - 60 \text{ և } \text{հաշվել } s_u^2$:

Պատ.՝ $s_u^2 = s_x^2 = 4$, $\chi_{\text{ափառ}}^2 = \chi^2(0,975; 19) = 8,91$, $\chi^2_{\text{ափառ}} = 32,9$, $\chi_{\text{գլու}}^2 = 38$: Զբոյական հիպոթեզը մերժվում է:

Նորեկը աշխատում է ոչ ոիթմիկ:

514. Արտադրանքի խմբաքանակը ընդունվում է, եթե հակող չափի դիսպերսիան $0,2$ -ից նշանակալի չի տարբերվում: $n=121$ ծավալի ընտրանքի տվյալներով հաշված ուղղղութած ընտրանքային դիսպերսիան՝ $s_x^2 = 0,3$: Կարելի՞ է արդյոք ընդունել խմբաքանակը նշանակալիության մակարդակի $0,01$ արժեքի դեպքում:

Լուծում: Որպես զրոյական դիտարկում ենք $H_0 \sim \sim \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0,2$ հիպոթեզը, իսկ որպես մրցակցող՝ $H_1 \sim \sim \sigma^2 > 0,2$ հիպոթեզը:

Գտնենք չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$\chi_{\text{գլու}}^2 = \frac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2} = \frac{120 \cdot 0,3}{0,2} = 180,$$

Մրցակցող հիպոթեզն ունի $\sigma^2 > 0,2$ տեսքը, հետեւաբար կրիտիկական տիրույթը աջակողմյան է: Քանի որ աղյուսակում ($հավելված 15$) չկա ազատության աստիճանի $k = 120$ արժեքը, ապա կրիտիկական կետը գտնում ենք մոտավորապես Գիլֆերտի—Ռելսոնի հավասարությունից՝

$$\chi_{\text{գլ}}^2(\alpha, k) = k \left[1 - \frac{2}{9k} + z_\alpha \sqrt{\frac{2}{9k}} \right]^3,$$

Նախապես (α_2 պի առնելով, որ $\alpha = 0,01$) գտնենք
 $z_{\alpha} = z_{0,01}$ հետևյալ հավասարությունից՝

$$\Phi(z_{0,01}) = \frac{1 - 2z}{2} = \frac{1 - 2 \cdot 0,01}{2} = 0,49;$$

Լավլասի ֆունկցիայի աղյուսակից (α_2 պի առնած 2), օգտագործելով գծային ինտերպոլացիայից, գտնում ենք, $z_{0,01} = 2,326$: Գիլֆերտի—Ռիլսոնի բանաձեի մեջ տեղադրելով $k = 120$, $z_{\alpha} = 2,326$, ստանում ենք $\chi^2_{q_{\beta}} (0,01; 120) = 158,85$ (այս մոտավորությանը բավականին լավն է, ավելի լրիվ աղյուսակներում բերվում է 158,95 արժեքը): Քանի որ $\chi^2_{q_{\beta}} > \chi^2_{q_{\alpha}}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժում ենք: Խմբաքանակը ընդունել չի կարելի:

515. Լուծել 514 խնդիրը, վերցնելով նշանակալիության մակարդակը՝ $\alpha = 0,05$:

Պատ.՝ $z_{0,05} = 1,645$, $\chi^2_{q_{\alpha}} (0,05; 120) = 146,16$: Խմբաքանակը լուսանկում է:

§ 4. Հայտնի դիսպերսիաներով երկու գլխավոր համախմբությունների միջինների համեմատումը (մեծ ծավալի անկախ ընտրանքներ)

Մեծ ծավալի անկախ ընտրանքների ծավալները նշանակենք n և m ($n > 30$, $m > 30$): Ենթադրենք այդ ընտրանքների տվյալներով հաշված են \bar{x} և \bar{y} ընտրանքային միջինները, իսկ ընտրանքային DX և DY գիսպերսիաները հայտնի են:

Կանոն 1: Տրված α նշանակալիության մակարդակով $H_0 \sim MX = MY$ հայտնի դիսպերսիաներով երկու նորմալ գլխավոր համախմբությունների մարեմատիկական սպասումների (գլխավոր միջինների) հավասարության մասին, գրոյական հիպոթեզը ստուգելու համար (մեծ ծավալի ընտրանքների դեպքում), եթե որպես մրցակցող դիտարկվում է $H_1 \sim MX \neq MY$ հիպոթեզը, պեսոք է հաշվել

$$z_{q_{\beta}} = \sqrt{\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\frac{DX}{n} + \frac{DY}{m}}}$$

չափանիշի դիտվող արժեքը և Լապլասի Փունկցիայի աղյուսակով գտնել z_{α} կրիտիկական կետը հետեւյալ հավասարությունից՝

$$\Phi(z_{\alpha}) = \frac{1-\alpha}{2},$$

Եթե $|Z_{\text{գլա}}| < z_{\alpha}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա:

Եթե $|Z_{\text{գլա}}| > z_{\alpha}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

Կանոն 2: $H_1 \sim MX > MY$ մրցակցող հիպոթեզի դեպքում Լապլասի Փունկցիայի աղյուսակից որոշում են z_{α} կրիտիկական կետը, օգտագործելով

$$\Phi(z_{\alpha}) = \frac{1-2\alpha}{2}$$

հավասարությունից:

Եթե $Z_{\text{գլա}} < z_{\alpha}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա:

Եթե $Z_{\text{գլա}} > z_{\alpha}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժում էն:

Կանոն 3: Մրցակցող $H_1 \sim MX < MY$ հիպոթեզի դեպքում «օճանդակ կետը» գտնում են կանոն 2-ի համաձայն:

Եթե $Z_{\text{գլա}} > -z_{\alpha}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

516. Նորմալ գլխավոր համախմբություններից գերցրած 2 անկախ ո $= 40$ և ո $= 50$ ժամանակակից տվյալներով հաշված են ընտրանքային միջինները՝ $x = 130$ և $y = 140$. Հայտնի են գլխավոր դիսպերսիաները՝ $DX = 80$, $DY = 100$. Պահանջվում է, $\alpha = 0,01$ նշանակալիության մակարդակով, ստուգել $H_0 \sim MX = MY$ զրոյական հիպոթեզը, դիտարկելով որպես մրցակցող $H_1 \sim MX \neq MY$ հիպոթեզը:

Լուծում: Հաշվենք չափանիշը գիտված արժեքը.

$$Z_{\text{գլա}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{DX}{n} + \frac{DY}{m}}} = \frac{130 - 140}{\sqrt{\frac{80}{40} + \frac{100}{50}}} = -5;$$

Հստ պայմանի մրցակցող հիպոթեզն ունի $MX \neq MY$ տեսքը, հետեւաբար կրիտիկական տիրուլթը երկողմանի է:

Գտնենք ազ կրիտիկական կետը հետեւալ հավասարությունից՝

$$\Phi(z_{4p}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0,01}{2} = 0,495;$$

Լապլասի ֆունկցիայի աղյուսակից (*հավելված 2*) գըտնում ենք $z_{4p} = 2,58$:

Բանի որ $|Z_{4p}| > z_{4p}$, ապա կանոն 1-ի համաձայն զրոյական հիպոթեզը մերժում ենք: Այլ կերպ ասած, ընտրանքային միջինների տարբերությունը նշանակալի է:

517. Առաջին հաստոցի վրա պատրաստված դետալների $n=30$ ծավալի ընտրանքի տվյալներով հաշվված է դետալի $\bar{x}=130$ գ միջին կշիռը: Երկրորդ հաստոցի վրա պատրաստված դետալների $m=40$ ծավալի ընտրանքի տվյալներով հաշվված է դետալի $\bar{y}=125$ գ միջին կշիռը: Գըլխափոր դիսպերսիաները հայտնի են՝ $DX=60$ գ², $DY=80^2$, $\eta_{\text{ահանջվում}} \approx 0,05$ նշանակալիության մակարդակի դեպքում, սատողել $H_0 \sim MX=MY$ զրոյական հիպոթեզը. $MX \neq MY$ մրցակցող հիպոթեզի դեպքում: Ենթադրվում է, որ X և Y մեծությունները բաշխված են նորմալ, և ընտրանքներն անկախ են:

Պատ.՝ $Z_{4p} = 2,5$; $z_{4p} = 1,97$: Զրոյական հիպոթեզը մերժվում է: Դետալների միջին կշիռների տարբերությունը նշանակալի է:

518. $n = 50$ ծավալի ընտրանքի տվյալներով որոշված է № 1 ավտոմատի վրա պատրաստված գլանների $\bar{x}=20,1$ մմ միջին չափը:

$m = 50$ ծավալի ընտրանքի տվյալներով որոշված է № 2 պատոմատի վրա պատրաստված գլանների $\bar{y} = 19,8$ մմ միջին չափը: Գլխավոր դիսպերսիաները հայտնի են՝ $DX = 1,750$ մմ², $DY = 1,375$ մմ²: Պահանջվում է, $0,05$ նշանակալիության մակարդակով, ստուգել $H_0 \sim MX = MY$ զրոյական հիպոթեզը մրցակցաղ $MX \neq MY$ հիպոթեզի գեպքում: Ենթադրվում է, որ X և Y մեծությունները բաշխված են նորմալ օրենքով, իսկ ընտրանքները անկախ են:

Պատ.¹ $Z_{\eta_{\text{թա}}}=1,2$; $Z_{\eta_{\text{բ}}}=1,96$: Դիտման արդյունքները չեն հակասում զրոյական հիպոթեզին: Ընտրանքային միջինների տարբերությունը նշանակալի չէ:

§ 5. Անհայտ, բայց հավասար դիսպերսիաներով երկու նորմալ գիշավոր համախմբությունների միջինների համեմատումը (փոքր անկախ ընտրանքներ)

Փոքր ծավալի անկախ ընտրանքների ծավալները նշանակենք m և n ($m < 30$, $n < 30$): Այդ ընտրանքներով հաշվված են \bar{x} և \bar{y} ընտրանքային միջինները և S_x^2 ու S_y^2 ուղղված ընտրանքային դիսպերսիաները: Գլխավոր դիսպերսիաները չնայած անհայտ են, բայց ենթադրվում է, որ m միմյանց հավասար են:

Կանոն 1: Արպեսզի տրված նշանակալիության մակարդակով ստուգենք անհայտ, բայց հավասար դիսպերսիաներով երկու նորմալ գիշավոր համախմբությունների մաքնմատիկական սպասումների (գլխավոր միջինների) հավասարության մասին $MX = MY$ զրոյական հիպոթեզը մրցակցող $MX \neq MY$ հիպոթեզի դեպքում (անկախ փոքր ծավալի ընտրանքներով) հարկավոր է հաշվել շափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$T_{\eta_{\text{թա}}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n \cdot m (n+m-2)}{n+m}}$$

և Սոյուդենովի բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հավելված 6) տրված ռ նշանակալիության մակարդակով (որը բերված է աղյուսակի առաջին տողում) և $K = m+n-2$ ազատության աստիճանով, գոտել տերկ կր.(α, k) կրիտիկական կետը:

Եթե $|T_{\eta_{\text{թա}}}| < t_{\eta_{\text{թա}}} \text{ կր } (\alpha, k)$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա:

Եթե $|T_{\eta_{\text{թա}}}| > t_{\eta_{\text{թա}}} \text{ կր } (\alpha, k)$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

Կանոն 2: $MX > MY$ մրցակցող հիպոթեզի դեպքում աղյուսակից (հավելված 6), արփած ու նշանակալիուրյան մակարդակով (որը բերփած է աղյուսակի վերջին տողում) և $k = \pi - 2$ ազատուրյան աստիճանով գոտնել է $\alpha_{\text{զ}} \cdot k$ (α, k կրիտիկական կետը):

Եթե $T_{\eta_{k^*}} > t_{\alpha_{\text{զ}} \cdot k}$, ապա հիմք չկա գրոյական հիպոթեզը մերժելու համար:

Եթե $T_{\eta_{k^*}} > t_{\alpha_{\text{զ}} \cdot k}$, ապա գրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

Կանոն 3: Մրցակցող $MX < MY$ հիպոթեզի դեպքում սկզբից որոշում են $t_{\alpha_{\text{զ}} \cdot k}$. կրիտիկական կետը կանոն 2-ի համաձայն և ընդունում էնթեր $k_r = -t_{\alpha_{\text{զ}} \cdot k}$.

Եթե $T_{\eta_{k^*}} > -t_{\alpha_{\text{զ}} \cdot k}$, գրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա:

Եթե $T_{\eta_{k^*}} < -t_{\alpha_{\text{զ}} \cdot k}$, ապա գրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

519. X և Y նորմալ բաշխված գլխավոր համախմբություններից վերցրած երկու $n = 12$ և $m = 18$ փոքր ժայկացի անկախ ընտրանքների տվյալներով հաշվված են $\bar{x} = 31,2$, $y = 29,2$ ընտրանքային միջինները և $S_x^2 = 0,84$, $S_y^2 = 0,40$ ուղղված գիսպերսիաները: Պահանջվում է, $0,05$ նշանակալիության մակարդակի գեպքում, ստագել $H_0 \sim MX = MY$ գրոյական հիպոթեզը, մրցակցող $H_1 \sim MX \neq MY$ հիպոթեզի գեպքում:

I. առ ծ ու մ : Ուղղված գիսպերսիաները տարբեր են, այդ պատճառով նախապես ստագենք գիսպերսիաների հավասարության մասին հիպոթեզը, օգտագործելով Ֆիշեր-Մեդեկս կորի չափանիշը (տես § 2):

Հաշվենք մեծ գիսպերսիայի հարաբերությունը փոքրին՝

$$F_{\eta_{k^*}} = \frac{0,84}{0,40} = 2,1:$$

S_x^2 գիսպերսիան բավականին մեծ է S_y^2 գիսպերսիայից, ասածի որպես մրցակցող գիտարկենք $H_1 \sim DX > DY$ հիպոթեզը: Այդ գեպքում կրիտիկական տիրայիթը աշակերման է: Աղյուսակից (համբելված 7), $\alpha = 0,05$ նշանակալիության մակարդակով ե $k_1 = n - 1 = 12 - 1 = 11$, $k_2 = m - 1 = 18 - 1 = 17$ աղյուսական ստատիստիկաներով որոշամ ենք $F_{tr}(0,05; 11; 17) = 2,41$ ՝ կրիտիկական կետը:

Քանի որ $F_{\eta_{k^*}} < F_{tr}$, ապա հիմք չկա գլխավոր գիսպերսիաների հավասարության մասին գրոյական հիպոթեզը

համեմտել դիսպերսիաները: Կատարենք այս, ընդունելով որպես մրցակցող $H_1 \sim DX \neq DY$ հիպոթեզը (տես § 2, կանոն 2):

Դանենք չափանիշի դիտվող արժեքը

$$F_{t_{\text{tss}}} = \frac{0,0267}{0,0254} = 1,05:$$

Աղյուսակից (*հավելված 7*) գտնում ենք՝ $F_{4r}(0,01; 9; 11) = 4,63$: Քանի որ $F_{t_{\text{tss}}} < F_{4r}$, ապա դիսպերսիաների տարբերությունը նշանակալի չէ, հետեաբար կարելի է համարել, որ գլխավոր դիսպերսիաների հավասարության մասին ենթադրությունը ճիշտ է:

Համեմատենք միջինները, որի համար հաշվենք Սայուդենտի չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$T_{t_{\text{tss}}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}{n+m}}}, \quad \sqrt{\frac{n \cdot m(n+m-2)}{n+m}},$$

Տեղադրելով բանաձևում եղած մեծությունների արժեքները, ստանում ենք $T_{t_{\text{tss}}} = 0,72$:

Ըստ պայմանի մրցակցող հիպոթեզն ունի $MX \neq MY$ տեսքը, հետեաբար կրիտիկական տիրությը երկկողմանի է:

Տրված $\alpha = 0,02$ նշանակալիության մակարդակով և $k = n + m - 2 = 10 + 12 - 2 = 20$ ազատության աստիճանով պայուսակից (*հավելված 6*) գտնում ենք $t_{t_{\text{tss}}} \text{ կ. գ. } (0,02; 20) = 2,53$ կրիտիկական կետը:

Քանի որ $T_{t_{\text{tss}}} < t_{t_{\text{tss}}} \text{ կ. գ. } (0,02; 20)$, ապա միջինների հավասարության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա: Այսպիսով, գետալների միջին չափերը էապես չեն տարբերվում:

522. 0,05 նշանակալիության մակարդակով պահանջվում է ստոգել $H_0 \sim MX = MY$ հիպոթեզը, X և Y նորմալ համախմբությունների գլխավոր միջինների հավասարության մասին, մրցակցող $H_1 \sim MX > MY$ հիպոթեզի դեպքում: Օգտագործել $n = 10$ և $m = 16$ փոքր ժամանակի հետեւալ անկախ ընտրանքները.

x_i	12,3	12,5	12,8	13,0	13,5	y_i	12,2	12,3	13,0
n_i	1	2	4	2	1,	m_i	6	8	2

Ցուցում: Նախապես ստուգել $H_0 \sim DX = DY$ զրոյական հիպոթեզը գլխավոր զիսպերսիաների հավասարության մասին, մրցակցող $H_1 \sim DX > DY$ հիպոթեզի գեղքում (ահս § 2):

Պատ: $\bar{x} = 12,8$; $\bar{y} = 12,35$; $s_x^2 = 0,11$; $s_y^2 = 0,07$; $F_{4,8} = 1,57$; $F_{4,2} = (0,05; 9; 15) = 2,59$; $T_{4,8} = 1,71$; $t_{\alpha/2,4,8} (0,05; 24) = 1,71$: $Մրցինների հավասարման մասին հիպոթեզը մերժելու կամ ընդունելու հիմք չկա:$
Փորձը պետք է կրկնել, մեծացնելով ընտրանքների ծավալը:

§ 6. Նորմալ համախմբության գլխավոր հիպոթետիկ միջինի համեմատումը ընտրանքային միջինի հետ

Ա. Գլխավոր համախմբության դիսպերսիան հայտնի է:

Կանոն 1: Որպեսզի, տրված α նշանակալիուրյան մակարդակով, ստուգենք $H_0 \sim a = a_0$ հայտնի σ^2 դիսպերսիայով գլխավոր նորմալ համախմբության a , զլիավոր միջինի և հիպոթետիկ (ենթադրվող) a_0 մեծուրյան հավասարության մասին, զրոյական հիպոթեզը՝ մրցակցող $H_1 \sim a \neq a_0$ հիպոթեզի դեպքում պետք է հաշվել նետելյալ չափանիշի դիտվող արժեքը

$$U_{\text{գր}} = \frac{(\bar{x} - a_0) / \sqrt{\frac{n}{\sigma}}}{}$$

և կապյասի ֆունկցիայի աղյուսակով գտնել երկկողմանի կրիտիկական տիրույթի $U_{\text{գր}}$. կրիտիկական կետը նետելյալ հավասարությունից՝

$$\Phi(U_{\text{գր}}) = \frac{1-\alpha}{2},$$

եթե $|U_{\text{գր}}| < u_{\text{գր}}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա եթե $|U_{\text{գր}}| > u_{\text{գր}}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

Կանոն 2: Մրցակցող $H_1 \sim a > a_0$ հիպոթեզի դեպքում աջակողմյան կրիտիկական կետը գտնում ենք

$$\Phi(U_{\text{գր}}) = \frac{1-2\alpha}{2}$$

հավասարությունից:

Եթե $U_{\eta \mu} < u_{\eta \nu}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա: Եթե $U_{\eta \mu} > u_{\eta \nu}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժում ենք:

Կանոն 3: Մրցակցող $H_1 \sim a < a_0$ հիպոթեզի դեպքում, սկզբան կանոն 2-ի համաձայն, գտնում ենք α_{4r} . օժանդակ կրիտիկական կետը, այնուհետև որպես ձախակողմյան կրիտիկական տիրույթի՝ α_{4r} , կրիտիկական կետ բնունում — α_{4r} , մեծությունը՝

$$u_{4\ell} = -u_{4\ell},$$

Եթե $U_{\text{փա}} > -u_F$, ապա զրոյական հիպոբեզզը մերժելու հիմք չկա:

523. Հայտնի $a=5,2$ միջին քառակուսային շեղումով նորմալ գլխավոր համախմբությունից վերցրած է $n=100$ ծավալի ընտրանք և որոշված է $\bar{x}=27,56$ ընտրանքային միջինը: Պահանջվում է $0,05$ նշանակալիության մակարդակով, ստուգել $H_0 \sim a = a_0 = 26$ զրոյական հիպոթեզը մըրցակցող $H_1 \sim a \neq 26$ հիպոթեզի դեպքում:

Հուծում: Գտնենք չափանիշի դիտվող արժեքը,

$$U_{\text{tun}} = \frac{(\bar{x} - a_0) \sqrt{n}}{s} = \frac{(27.56 - 26) \sqrt{100}}{5.2} = 3:$$

Պայմանի համաձայն մրցակցող հիպոթեզն ունի $a \neq a_0$, աեւքը, ուստի կրիտիկական տիրուվթը երկողմանի է:

Հետեւայ, հավասարությունից որոշենք կրիտիկական կետը

$$\Phi(u_{4P}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0,05}{2} = 0,475:$$

Հապլասի ֆունկցիայի աղյուսակից (*հավելված 2*) որոշում
ենք $u_4 = 1,96$:

Քանի որ Ազգ. >Ազ., ապա զրոյական հիպոթեզը մերժում ենք: Այլ կերպ ասած, ընտրանքային և հիպոթետիկ գիշավոր միջինների տարբերությունը նշանակալի է:

524. Հայտնի $\sigma = 40$ միջին քառակուսային շեղումով նորմալ գլխավոր համախմբությունից փերցրած է $n=64$ ծավալի ընտրանք և որոշված է $\bar{x} = 136,5$ ընտրանքային միջինը: Պահանջվում է, $0,01$ նշանակալիության մակարդա-
334

գով, սառագել $H_0 \sim a = a_0 = 130$ զրոյական հիպոթեզը, մըրցակցող $H_1 \sim a \neq 130$ հիպոթեզի դեպքում:

Պատ.³ $U_{\text{գր.}} = 1,625$; $u_{\text{հր.}} = 2,57$; Զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա:

525. Լուծել 524 խնդիրը, մրցակցող $H_1 \sim a > 130$ հիպոթեզի դեպքում:

Պատ.³ $u_{\text{հր.}} = 2,33$; Զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա:

526. Հայտնի է, որ աժեղ տոկսիկ ազդեցության գեղահաբի միջին կշիռը պետք է լինի $a_0 = 0,50$ մգ: Դեղի ստացված խմբաքանակի 121 գեղահաբերի ընտրանքալին ստուգամը ցուց տվեց, որ խմբաքանակի գեղահաբի միջին կշիռը կազմում է $\bar{x} = 0,53$ մգ: Պահանջված է, 0,01 նշանակալիության մակարդակով, սառագել $H_0 \sim a = a_0 = 0,50$ զրոյական հիպոթեզը, մրցակցող $H_1 \sim a \neq 0,50$ հիպոթեզի դեպքում: Դեղագործական գործարանի թողարկած հաբերի նախնական բազմակի կշռումների միջոցով որոշված է, որ հաբերի կշիռը բաշխված է նորմալ $\sigma = 0,11$ մգ միջին քառակտուսային շեղումով:

Պատ.³ $U_{\text{գր.}} = 3$, $u_{\text{հր.}} = 2,57$: Հարի միջին կշիռը նշանակալի տարբերվում է թույլատրելից, հիվանդներին այդ դեղը տալ չի կարելի:

Բ. Գլխավոր նամախմբության դիսպերսիան անհայտ է

Եթե զլսավոր համախմբության դիսպերսիան անհայտ է (օրինակ, փոքր ծավալի ընտրանքի դեպքում), ապա զրոյական հիպոթեզի ստուգման համար որպես չափանիշ ընդունում են

$$\tau = \frac{(\bar{x} - a_0) / \sqrt{s}}{s}$$

ալատահական մեծությունը, որտեղ

$$s = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum n_i x_i^2 - \frac{1}{n} \left[\sum n_i x_i \right]^2 \right\}$$

իրենից ներկայացնում է ուղղված միջին քառակտուսային շեղումը, T մեծությունն ունի Ստյուգենտի բաշխումը, $k = n - 1$ աղատության աստիճանով:

Կանոն 1: Տրված α նշանակալիության մակարդակով $H_0 \sim a = a_0$

անհայտ ա գլխավոր միջինի (անհայտ դիսայերսիայով նորմալ համախմբություն) և հիպոքեանիկ ձև արժեքի հավասարության մասին, զրոյական հիպոքեզի ստուգման համար, մրցակցող $H_1 \sim a \neq a_0$ հիպոքեզի դեպքում, պետք է հաշվել չափանիշի հետեւյալ դիտվող արժեքը

$$T_{\eta_{\text{f},m}} = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{S}$$

և Սոյուդենտի բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից, տրված նշանակալիության մակարդակով (որը տեղավորված է աղյուսակի վերին տողում) և $k = n - 1$ ազատության աստիճանով գտնել $t_{\alpha/2}$. Կ. (ա, k) կրիտիկական կետը:

Եթե $|T_{\eta_{\text{f},m}}| < t_{\alpha/2}$. Կ. ապա զրոյական հիպոքեզը մերժելու հիմք չկա: Եթե $|T_{\eta_{\text{f},m}}| > t_{\alpha/2}$. Կ. ապա զրոյական հիպոքեզը մերժվում է:

Կանոն 2: Մրցակցող $H_1 \sim a < a_0$ հիպոքեզի դեպքում և նշանակալիության մակարդակով (տեղավորված է աղյուսակի տողորին տողում) (Δ ավելված 6) և $k = n - 1$ ազատության աստիճանով որոշում են աջակողմյան կրիտիկական տիրույթի $t_{\alpha/2}$. Կ. կրիտիկական կետը:

Եթե $T_{\eta_{\text{f},m}} < t_{\alpha/2}$. Կ., ապա զրոյական հիպոքեզը մերժելու հիմք չկա: Եթե $T_{\eta_{\text{f},m}} > t_{\alpha/2}$. Կ., ապա զրոյական հիպոքեզը մերժվում է:

Կանոն 3: Մրցակցող $H_1 \sim a < a_0$ հիպոքեզի դեպքում, նախապես որոշում են «օճանդակ» կրիտիկական $t_{\alpha/2}$. Կ. (α, k) կետը (բառ կանոն 2-ի), այնուհետև որոշում են ծախակողմյան կրիտիկական տիրույթի սահմանը հետևյալ հավասարությունից

$$t_{\alpha/2} \cdot \eta_{\text{f},m} = -t_{\alpha/2} \cdot \eta_{\text{f},m}$$

Եթե $|T_{\eta_{\text{f},m}}| > -t_{\alpha/2}$. Կ., ապա զրոյական հիպոքեզը մերժելու հիմք չկա: Եթե $|T_{\eta_{\text{f},m}}| < -t_{\alpha/2}$. Կ., ապա զրոյական հիպոքեզը մերժվում է:

527. Նորմալ գլխավոր համախմբությունից վերցրած $n=16$ ծավալի ընտրանքի տվյալներով որոշված են $\bar{x}=118,2$ ընտրանքային միջինը և $s=3,6$ ուղղված միջին քառակուսացին շեղումը: Պահանջվում է $0,05$ նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել $H_0 \sim a = a_0 = 120$ զրոյական հիպոթեզը մրցակցող $H_1 \sim a \neq 120$ հիպոթեզի դեպքում:

Լուծում: Գտնենք չափանիշի գիտվող արժեքը

$$T_{\eta_{\text{f},m}} = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{s} = \frac{(118,2 - 120)\sqrt{16}}{3,6} = -2;$$

Պայմանի համաձայն մրցակցող հիպոթեզն ունի $a \neq a_0$ տեսքը՝ ուստի կրիտիկական տիրույթը երկիողմանի է:

Ստյուդենտի բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հավելված 6), $\alpha=0,05$ նշանակալիության մակարդակով (աղյուսակի վերջին տող) և $k=n-1=16-1=15$ ազատության ասախճանով որոշում ենք $t_{\text{գր. 4ր.}}(0,05, 15)=2,13$ կրիտիկական կետը:

Քանի որ $|T_{\text{գր.}}| < t_{\text{գր. 4ր.}}$, ապա հիմք չկա զրոյական հիպոթեզը մերժելու: Այլ կերպ ասած, $\bar{x}=118,2$ ընտրանքային միջինի և հիպոթետիկ $a_0=120$ գլխավոր միջինի տարբերությունը նշանակալի չէ:

528. Լուծել 527 խնդիրը, մրցակցող $H_1 \sim a < a_0 = 120$ հիպոթեզի դեպքում:

Պատ.՝ $T_{\text{գր.}}=-2, -t_{\text{գր. 4ր.}}=-1,75$: Զրոյական հիպոթեզը մերժում ենք:

529. Ավտոմատ հաստոցի պատրաստած դետալների նախագծային հսկողությունը (դետալների քանակը) $a=a_0=35$ մմ:

Պատրահական ընտրված 20 դետալների չափումները ավել են հետևյալ արդյունքները՝

հսկող չափը x_i	34,8	34,9	35,0	35,1	35,3
հաճախությունը (դետալների քանակը) n_i	2	3	4	6	5

Պահանջվում է, $0,05$ նշանակալիության մակարդակով, ստոգել $H_0 \sim a = a_0 = 35$ զրոյական հիպոթեզը մրցակցող $H_1 \sim a \neq 35$ հիպոթեզի դեպքում:

Լուծում: Հաշվենք ընտրանքի դետալների միջին չափը՝

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum n_i x_i = \frac{2 \cdot 34,8 + 3 \cdot 34,9 + 4 \cdot 35,0 + 6 \cdot 35,1 + 5 \cdot 35,3}{20} =$$

$$= 35,07:$$

Հաշվենք աղղված դիսպերսիան: Հաշվումները պարզեցնելու նպաստակով անցնենք՝ $a_i = 10x_i - 351$ պարմանական

տարբերակներին: Արդյունքում կստանանք հետևյալ բաշ-

ս _i	-3	-2	-1	0	2
ն _i	2	3	4	6	5

Գտնենք պայմանական տարբերակների ուղղված դիսպեր-
սիան՝

$$s_4^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum n_i u_i^2 - \frac{1}{n} \left[\sum n_i u_i \right]^2 \right\} = \frac{\frac{44}{20}(-6)^2}{19} = 2,221:$$

Հետևաբար, նախնական տարբերակների ուղղված դիսպեր-
սիան

$$s_x^2 = \frac{2,221}{100} = 0,022:$$

Այսաեղից, ուղղված միջին քառակուսային շեղումը՝

$$s_x = \sqrt{0,022} = 0,15:$$

Գտնենք չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$T_{q_{thw}} = \frac{(\bar{x} - a_0) \sqrt{n}}{s} = \frac{(35,07 - 35,0) \sqrt{20}}{0,15} = 2,15:$$

Ըստ պայմանի մրցակցող հիպոթեզն ունի $a \neq a_0$ տես-
քը, ուստի կրիտիկական տիրույթը երկկողմանի է: Սայու-
դենտի բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հա-
վելված 6), $\alpha = 0,05$ նշանակալիության մակարդակով (աղ-
յուսակի վերին առաջային աղյուսակի վերաբերյալ) և ազատությունների $k = n - 1 = 20 -$
 $- 1 = 19$ աստիճանով գտնում ենք $t_{b_{pq}, 4\%} = (0,05, 19) =$
 $= 2,09$ կրիտիկական կետը:

Քանի որ $T_{q_{thw}} > t_{b_{pq}, 4\%}$, ապա զրոյական հիպոթեզը
մերժում ենք: Այլ կերպ ասած, հաստոցը չի ապահովում
դետալների նախագծային չափը և պահանջում է վերակար-
գավորում:

§ 7. Անհայտ դիսպերսիաներով նորմալ գլխավոր համախմբությունների երկու միջինների համեմատումը (ոչ անկախ ընտրանքներ)

Ենթադրենք X և Y գլխավոր համախմբությունները բաշխված են նորմալ, ընդունություններից գիտակաները անհայտ են: Այդ համախմբություններից վերցրած են միենույն ու ծավալի ոչ անկախ ընտրանքներ, որոնց տարրերակները համապատասխանաբար հավասար, են x_i և y_i :

Մտցնենք հետեւյալ նշանակումները՝

$d_i = x_i - y_i$ միենույն համարի տարրերակների տարրերությունը,
 $\bar{d} = \frac{1}{n} \sum d_i$ միենույն համարի տարրերակների միջին տարրերությունը,

$$s_d = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left\{ \sum d_i^2 - \frac{1}{n} \left[\sum d_i \right]^2 \right\}} \text{ուղղված միջին քառակուսային շեղումը:}$$

Կանոն: S_d անշանակալիության մակարդակով, անհայտ գլխավերսիաներով նորմալ X և Y համախմբությունների երկու միջինների հավասարության մասին (ոչ անկախ ընտրանքների գեպօւմ) $H_0 \sim M X = M Y$ զրոյական հիպոթեզը ստուգելու համար, մրցակցող $H_1 \sim M X \neq M Y$ հիպոթեզի դեպքում, պետք է հաշվել չափանիշի դիագոնալ արժեքը՝

$$T_{\eta_{\theta}} = \frac{\bar{d}}{s_d} \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

և Ստյուգենտի բաշիման կրիտիկական կետերի աղյուսակից, արված անշանակալիության մակարդակով (աղյուսակի վերին տող) և $k = n - 1$ աղատության աստիճանով գտնել երկու կր. (a, k) կրիտիկական կետը:

$b \beta b |T_{\eta_{\theta}}| < t_{\alpha/2}$. կր. (a, k), ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա:

$b \beta b |T_{\eta_{\theta}}| > t_{\alpha/2}$. կր. (a, k), ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

530. Երկու գործիքներով միենույն հաշորդականությամբ չափած են 6 գետալներ և ստացվել են հմտելու արդյունքները (մմ-ի հարյուրորդ մասերով):

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = 6, \quad x_5 = 8, \quad x_6 = 10;$$

$$y_1 = 10, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = 6, \quad y_4 = 1, \quad y_5 = 7, \quad y_6 = 4:$$

$\alpha=0,05$ նշանակալիության մակարդակով պարզել, արդյոք
նշանակալի՝ է չափման արդյունքների տարբերությունը,
թե՞ ոչ: Ենթադրվում է, որ չափման արդյունքները բաշխված են նորմալ:

Լուծում: Հաշվենք $d_i = x_i - y_i$ թվերը, հանելով առաջին տողի թվերից երկրորդ տողի համապատասխան թվերը,
կստանանք՝

$$d_1 = -8, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = -1, \quad d_4 = 5, \quad d_5 = 1, \quad d_6 = 6:$$

Հաշվի առնելով, որ $\sum d_i = 3$, գտնենք ընտրանքային միջինը՝

$$\bar{d} = \frac{3}{6} = 0,5:$$

Հաշվի առնելով, որ $\sum d_i^2 = 126$ և $\sum d_i = 3$:

Գտնենք ընտրանքային «ուղղված» միջին քառակուսային շեղումը:

$$s_d = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left\{ \sum d_i^2 - \frac{1}{n} \left[\sum d_i \right]^2 \right\}} = \sqrt{\frac{126 - \frac{9}{6}}{6-1}} = \sqrt{24,9},$$

Գտնենք չափանիշի գիտվող արժեքը՝

$$T_{q_{f_m}} = \frac{\bar{d} \cdot \sqrt{n}}{s_d} = \frac{0,5 \sqrt{6}}{\sqrt{24,9}} = 0,25,$$

Ստուգենտի բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հավելված 6), $0,05$ նշանակալիության մակարդակով (աղյուսակի վերևի տող) և $k = n-1 = 6-1 = 5$ ազատության աստիճանով գտնում ենք $t_{v=4} (0,05; 5) = 2,57$ կրիտիկական կետը:

Քանի որ $|T_{q_{f_m}}| < t_{v=4} (0,05)$, ուստի զրոյական հիպոթեզը մերժվում հիմքեր չկան: Այլ կերպ ասած, չափումների միջին արդյունքների տարբերությունը նշանակալի չէ:

531. Երկու անալիտիկ կշեռքներով, միենույն հաջորդակառնությամբ, կշռված են քիմիական նյութի 10 փորձանմուշներ, ստացվել են կշռման հետեւյալ արդյունքները (մգ-ներով)

x _i	25	30	28	50	20	40	32	36	42	38
----------------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

y _i	28	31	26	52	24	36	33	35	45	40
----------------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

$\alpha = 0,01$ նշանակալիության մակարդակով պարզել, արդյուք կշռման արդյունքները նշանակալի՝ են տարբերվում, թե՞ոչ: Ենթադրել, որ կշռման արդյունքները բաշխված են նորմալ օրենքով:

Պատ.^{*} $\bar{d} = -0,9$; $\sum d_i^2 = 65$; $s_d = 2,69$; $T_{q_{\mu_m}} = -1,06$;
 $t_{\nu_{\mu}, q_{\mu}}(0,01; 9) = 3,25$, եղուման արդյունքների տարբերությունը նշանակալի չէ:

532. 9 մարզիկների ֆիզիկական պատրաստականությանը ստուգվել է սպորտացին դպրոց ընդունվելիս և այնուհետեւ մեկ շաբաթ մարզամներից հետո: Ստուգումների արդյունքները բարերով հետեւյալն է (առաջին տողում բերված են մարզիկների ստացած բարերի քանակը դպրոց ընդունվելիս, երկրորդում՝ տառցումից հետո):

x _i	76	71	57	49	70	69	26	65	59
----------------	----	----	----	----	----	----	----	----	----

y _i	81	85	52	52	70	63	33	83	62
----------------	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Պահանջված է, $0,05$ նշանակալիության մակարդակով, պարզել նշանակալի՝ է արդյուք մարզիկների ֆիզիկական պատրաստականության աճը, ենթադրելով, որ բարերի թիվը բաշխված է նորմալ օրենքով:

Պատ.^{*} $\bar{d} = -\frac{39}{9}$; $\sum d_i^2 = 673$; $s_d = 7,94$; $T_{q_{\mu_m}} = -1,64$;

$t_{\nu_{\mu}, q_{\mu}}(0,05; 8) = 2,31$, չիմբեր շկան ֆիզիկական պատրաստականության աճը նշանակալի համարելու համար:

533. Քիմիական լաբորատորիան երկու մեթոդներով և միևնույն հերթականությամբ կատարեց 8 փորձանմուշների անալիզ: Ստացվեցին հետևյալ արդյունքները (առաջին տուղում բերված են մի որոշ նյութի պարունակությունը յուրաքանչյուր փորձանմուշում տոկոսներով, որոշված առաջին մեթոդով, երկրորդ տողում՝ երկրորդ մեթոդով):

x _i	15	20	16	22	24	14	18	20
----------------	----	----	----	----	----	----	----	----

y _i	15	22	14	25	29	16	20	24
----------------	----	----	----	----	----	----	----	----

Պահանջվում է, 0,05 նշանակալիության մակարդակով, պարզել նշանակալի՝ է արդյոք անալիզների միջին արդյունքների տարբերությունը, ենթադրելով, որ անալիզի արդյունքները բաշխված են նորմալ օրենքով:

$$\text{Պատ.} \quad \bar{d} = -2; \quad \sum d_i^2 = 66; \quad s_d = \sqrt{\frac{34}{7}}; \quad T_{t_{0.05}} = -2,57;$$

$t_{t_{0.05}, 7} = 2,36$: Անալիզների արդյունքների տարբերությունը նշանակալի է:

534. Երկու լաբորատորիաներ, միևնույն մեթոդով և միևնույն հաջորդականությամբ, որոշել են ածխածնի պարունակությունը պողպատի 13 փորձանմուշներում: Ստացվել են անալիզների հետևյալ արդյունքները (առաջին տողում բերված է առաջին լաբորատորիայում ստացված յուրաքանչյուր փորձանմուշում ածխածնի պարունակությունը տոկոսներով, երկրորդ տողում՝ նույնը երկրորդ լաբորատորիայի համար):

x _i	0,18	0,12	0,12	0,08	0,08	0,12	0,19	0,32	0,27
y _i	0,16	0,09	0,08	0,05	0,13	0,10	0,14	0,30	0,31

x _i	0,22	0,34	0,14	0,46;
----------------	------	------	------	-------

y _i	0,24	0,28	0,11	0,42;
----------------	------	------	------	-------

Նալիմով Վ. Վ. Մաթեմատիկական վիճակադրության կիրառությունը նյութի անալիզում Փիզմաթգիտ, 1960:

Պահանջվում է, $0,05$ նշանակալիության մակարդակով, պարզել նշանակալի⁸ է արդյոք անալիզների միջին արդյունքների տարբերությունը, եթե անալիզների արդյունքները բաշխված են նորմալ օրենքով:

Պատ.⁹ $\bar{d} = 0,018$; $\sum d_i^2 = 0,0177$; $s_d = 0,034$; $T_{q_{\mu_m}} = 1,89$; $t_{q_{\mu_k}, q_r} (0,05; 12) = 2,18$. Անալիզների արդյունքների տարբերությունը նշանակալի չէ:

§ 8. Պատահույթի հիպոթետիկ հավանականության և դիտվող հարաբերական հաճախության համեմատումը

Ենթադրենք, բավականաշափ մեծ թվով (n) անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում ոլատահույթի տեղի ունենալու թիվը հավանականությունը անհայտ է, բայց հաստատուն է: Փորձերի այդ սերիայում դիտարկվող պատահույթի հաճախությունը նշանակենք $\frac{m}{n}$:

Պահանջվում է, տված ռ նշանակալիության մակարդակով, ստուգել անհայտ թիվը հիպոթետիկ p_0 հավանականությունների հավասարության մասին $H_0 \sim p = p_0$ գրոյական հիպոթեզը:

Կանոն 1: Տրված ռ նշանակալիության մակարդակով, անհայտ թիվը հիպոթետիկ p_0 հավանականությունների հավասարության մասին $H_0 \sim p = p_0$ գրոյական հիպոթեզը ստուգելու համար անհրաժեշտ է հաշվել շափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$U_{q_{\mu_m}} = \frac{\left(\frac{m}{n} - p_0 \right) \sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}$$

և կայլացնել ֆունկցիայի աղյուսակով՝ գտնել u_{q_r} . Կրիտիկական կերպ հետևյալ հավասարությունից՝

$$\Phi(u_{q_r}) = \frac{1-\alpha}{2},$$

եթե $|U_{q_{\mu_m}}| < u_{q_r}$, այս գրոյական հիպոթեզը մերժելու համար հիմք չկա:

Եթե $(U_{\text{գրա}}) > u_{q_p}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժում են:

Կանոն 2: $H_1 \sim p > p_0$ մրցակցող հիպոթեզի դեպքում, աջակողման կրիտիկական տիրույթի կրիտիկական կետը որոշում են

$$\Phi(u_{q_p}) = \frac{1 - 2\alpha}{2}$$

հավասարությունից:

Եթե $U_{\text{գրա}} < u_{q_p}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա:

Եթե $U_{\text{գրա}} > u_{q_p}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժում են:

Կանոն 3: $H_1 \sim p < p_0$ մրցակցող հիպոթեզի դեպքում սկզբից գտնում են «օժանդակ» կրիտիկական կետը, կանոն 2-ի համաձայն, այնուհետև որպես ձախակողմ կրիտիկական տիրույթի սահման ընդունում են ս_{q_p} = - u_{q_p} մեծությունը:

Եթե $U_{\text{գրա}} > - u_{q_p}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու համար հիմք չկա:

Եթե $U_{\text{գրա}} < - u_{q_p}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժում են:

Դիտողությունը՝ $p_0 q_0 > 9$ անհավասարությունը տեղի ունենալու դեպքում, արդյունքները կլինեն բավարար:

535. 100 անկախ փորձերի տվյալներով գտնված ξ $\frac{m}{n} = 0,14$ հարաբերական հաճախությունը: 0,05 նշանակալիության մակարդակով պահանջվում է ստոգել $p = p_0 = 0,20$ զրոյական հիպոթեզը մրցակցող $H_1 \sim p \neq 0,20$ հիպոթեզի դեպքում:

Լուծում: Հաշվի առնելով, $p = p_0 = 1 - 0,20 = 0,80$; գտնենք չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$U_{\text{գրա}} = \frac{\left(\frac{m}{n} - p_0\right) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}} = \frac{(0,14 - 0,20) \cdot \sqrt{100}}{\sqrt{0,20 \cdot 0,80}} = -1,5:$$

Պայմանի համաձայն, մրցակցող հիպոթեզն ունի $p \neq p_0$ տեսքը, ուստի, կրիտիկական տիրույթը երկողմանի է:

Գառնենք սկզ. կրիտիկական կետը՝

$$\Phi(u_{kp.}) = \frac{1-x}{2} = \frac{1-0,05}{2} = 0,475,$$

Լապլասի ֆունկցիայի աղյուսակից (*հավելված 2*) գտնում ենք սկզ. $= 1,96$:

Քանի որ $|U_{kp.}| < u_{kp.}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա: Այլ կերպ ասած, զիտված $0,14$ հարաբերական հաճախությունը անշան տարբերվում է $0,20$ հիպոթետիկ հավանականությունից:

536. Լուծել 535 խնդիրը մրցակցող $H_1 \sim p < p_0$ հիպոթեզի գեպքում:

Լուծում: Պայմանի համաձայն մրցակցող հիպոթեզը $p < p_0$ տեսքի է, հետևաբար կրիտիկական տիրությը ձախակողմ է: Սկզբից գտնենք «օժանդակ» կետը՝ աջակողմյան կրիտիկական տիրութիւնամասը, օգտվելով (*կանոն 2*)

$$\Phi(u_{kp.}) = \frac{1-2x}{2} = \frac{1-2 \cdot 0,05}{2} = 0,45$$

հավասարությունից: Լապլասի ֆունկցիայի աղյուսակից գրանում ենք սկզ. $= 1,65$: Հետևաբար, ձախակողմյան կրիտիկական տիրութիւնամասը՝ $u'_{kp.} = -1,65$:

Քանի որ $U_{kp.} > u'_{kp.}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա (*կանոն 3*):

537. Դետալների խմբաքանակը ընդունված է, եթե գետավի խոտան լինելու հավանականությունը չի գերազանցում $0,02$ -ը: Պատահականորեն ընտրված 480 գետալիներից 12 -ը խոտան էին: Կարելի՞ է արդյոք ընդունել այդ խմբաքանակը:

Լուծում: Զրոյական հիպոթեզն անի $p = p_0 = 0,02$ տեսքը: Դիտարկենք որպես մրցակցող $H_1 \sim p > 0,02$ հիպոթեզը և որպես նշանակալիության մակարդակ ընդունենք $\alpha = 0,05$ արժեքը:

Հաշվենք խոտանի հարաբերական հաճախությունը՝

$$\frac{m}{n} = \frac{12}{480} = 0,025,$$

Դանենք չափանիշի գիտվող արժեքը՝

$$U_{q_{\text{f},m}} = \frac{\left(\frac{m}{n} - p_0\right) \cdot \sqrt{\frac{n}{m}}}{\sqrt{p_0 q_0}} = \frac{(0,025 - 0,02) \sqrt{480}}{\sqrt{0,02 \cdot 0,98}} = 0,71.$$

Պայմանի համաձայն, մրցակցող հիպոթեզն ունի $p > p_0$ սեսքը, հետեւաբար կրիտիկական աիրույթը աջակողմյան է:

Դանենք աջակողմ կրիտիկական աիրույթի սեր կրիտիկական կետը, օգտագելով (կանոն 2)

$$\Phi(u_{q_{\text{f},m}}) = \frac{1-2 \cdot 0,05}{2} = 0,45$$

Հավասարությունից:

Լապլասի ֆունկցիայի աղյուսակից (*հավելված 2*) ստանում ենք՝ $u_{q_{\text{f},m}} = 1,645$:

Քանի որ $U_{q_{\text{f},m}} < u_{q_{\text{f},m}}$, ապա հիմքեր չկան մերժելու այն հիպոթեզը, որ խմբաքանակում խոտանի հավանականությունը չի գերազանցում $0,02$ -ը: Այսպիսով, խմբաքանակը կարելի է ընդունել:

538. Դետալների խմբաքանակը ընդունվում է, եթե դետալի խոտան լինելու հավանականությունը չի գերազանցում $0,03$ -ը: Պատահականորեն ընտրած 400 դետալներից 18 -ը խոտան էին: Կարելի՞ է արդյոք ընդունել խմբաքանակը:

Ցուցում: Դիտարկել $H_0 \sim p = p_0 = 0,03$ զրոյական և մրցակցող $H_1 \sim p > 0,03$ հիպոթեզները: Որպես նշանակալիության մակարդակ վերցնել $\alpha = 0,05$ արժեքը:

Պատ. $U_{q_{\text{f},m}} = 1,76$, $u_{q_{\text{f},m}} = 1,645$: Խմբաքանակը ընդունել չի կարելի:

539. Գործարանը հնարավոր պատփիրատուներին է ուղարկում ռեկլամային կատալոգներ: Ինչպես ցուց է տվել փորձը, հավանականությունը, որ կատալոգ ստացող կազմակերպությունը կապատվիրի ռեկլամվող արտադրանք, հավասար 0,08: Գործարանը ուղարկեց 1000 նոր բարելավված ձեր կատալոգներ և ստացավ 100 պատվեր: Կարելի է արդյոք համարել, որ ռեկլամի նոր ձեր նշանակալի չափով արդյունավետ է, քան հինը:

Ցուցում: Դիտարկել $H_0 \sim p = p_0 = 0,08$ դրոյական և մրցակցող $H_1 \sim p > 0,08$ հիպոթեզները: Որպես նշանակալիության մակարդակ զերցնել $\alpha = 0,05$ արժեքը:

Պատ.՝ $U_{q_{\beta}} = 2,32$, $u_{\alpha} = 1,645$: Զրոյական հիպոթեզը մերժվում է: Ռեկլամի նոր ձեր նշանակալի չափով արդյունավետ է, քան նախկինը:

540. Երկարատեղ գիտումների միջոցով պարզվել է, որ Աղեղամիջոցը ընդունելու գեղքում հիվանդի լրիվ առողջանաւու հավանականությունը հավասար է 0,8-ի: Նոր Բ գեղամիջոցը նշանակվել է 800 հիվանդներին, ընդ որում նրանցից 660-ը լրիվ առողջացել են: Կարելի՞ է արդյոք Բ գեղամիջոցը համարել նշանակալի չափով արդյունավետ, քան հինը, եթե նշանակալիության մակարդակը հավասար է 0,05-ի:

Ցուցում: Ընդունել $H_0 \sim p = 0,8$, $H_1 \sim p \neq 0,8$:

Պատ.՝ $U_{q_{\beta}} = 1,77$, $u_{\alpha} = 1,96$: Նոր գեղամիջոցը հնի նկատմամբ արդյունավետ համարելու հիմք չկա:

§ 9. Մի քանի նորմալ գլխավոր համախմբությունների դիսպերսիաների համեմատումը տարբեր ծավալի ընտրանքների դեպքում: Բարտլետի չափանիշը

Դիցուք X_1, X_2, \dots, X_t զլիավոր համախմբությունները նորմալ են բաշխված: Այդ համախմբություններից վերցված են բնոհանրապես ասած ոչ տարբեր անկախ ընտրանքների ծավալներ (որոշ ծավալներ կարող են լինել միատեսակ, բայց եթե բոլոր ընտրանքները միևնույն ծավալն ունեն, առա գերադասելի է օդավել կոչենի չափա-

Նիշեց, որը բերված է հաջորդ պարագրաֆում): Ընտրանքների ավալ-ներով հաշվված են $s_1^2, s_2^2, \dots, s_l^2$ ուղղված ընտրանքային դիսպերսիաները:

Պահանջվում է ու չշահնակալիության մակարդակով ստուգել դիսպերսիաների համառության մասին զրոյական հիպոթեզը, այսինքն՝ բոլոր գիտակոր գիտերսիաների հավասարության մասին:

$$H_0 \sim D X_1 = D X_2 = \dots = D X_l$$

Հիպոթեզը:

Նշանակենք՝

գիտերսիաների աղատության աստիճանները՝ $k_i = n_i - 1$:

$$\text{աղատության աստիճանների գումարը՝ } k = \sum_{i=1}^l k_i;$$

ուղղված զիտերսիաների կշռային (ըստ աղատության աստիճանների) միջին թվաքանակը՝

$$\bar{s^2} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^l k_i s_i^2;$$

$$v = 2,303 \left[k \lg \bar{s^2} - \sum_{i=1}^l k_i \lg s_i^2 \right];$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(l-1)} \left[\sum_{i=1}^l \frac{1}{k_i} - \frac{1}{k} \right],$$

$B = \frac{V}{C} = \text{պատահական մեծությունը զիտերսիաների համառեռության մասին}$ (β արակետի չափանիշ) հիպոթեզի իրավացիության դեպքում մոտավորապես բաշխված է ըստ $l-1$ աղատության աստիճանով՝ χ^2 օրենքով, եթե միայն յուրաքանչյուր ընտրանքի ծավալը $n_i \geq 4$:

Կանոն: Տրված ռ նշանակալիուրյան մակարդակով, նորմալ համախմբությանը դիսպերսիանը համասեռության մասին հիպոթեզը ստուգելու համար, պետք է հաշվել Բարոլեանի չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$B_{\text{դիտ}} = \frac{V}{C}$$

և χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից, տրված ռ նշանակալիուրյան մակարդակով և $l - 1$ ազատության աստիճանով (l -ը ընթաների թիվն է), զոնել աջակողմ կրիտիկական տիլտուրի $\chi^2_{\text{կր}} (x; l - 1)$

կրիտիկական կետը:

Եթե $B_{\text{դիտ}} < \chi^2_{\text{կր}}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան:

Եթե $B_{\text{դիտ}} > \chi^2_{\text{կր}}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժում են:

Դիտություն 1: C հաստատունը նախապես կարիք չկա հաշվելու Սկզբից պետք է դանել V-ն և համեմատել $\chi^2_{\text{կր}}$ հետ, եթե

$V < \chi^2_{\text{կր}}$, ապա առավել ես (ρ անի ոք $C > 1$) $B = \frac{V}{C} < \chi^2_{\text{կր}}$, հետևաբար,

C-ն հաշվելու կարիք չկա:

Եթե $V > \chi^2_{\text{կր}}$, ապա պետք է հաշվել C-ն և այնուհետեւ համեմատել B -ն $\chi^2_{\text{կր}}$ -ու հետ:

Դիտություն 2: Բարալեաի չափանիշը շատ զդայուն է բաշխումների՝ նորմալից տարբեր լինելու նկատմամբ, ուստի այդ չափանիշով ստացված նղանակացությունների նկատմամբ պետք է զգույշ լինել:

Դիտություն 3: Գիսպերսիաների համասեռության դեպքում, որպես զլսավոր զիսպերսիայի զնահատական ընդունում են ուղղված զիսպերսիաների կշռային (ըստ աղատության աստիճանների) միջին թվաքանականը՝

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^l k_i s_i^2,$$

541. Նորմալ զլսավոր համախմբություններից վերցրած $n_1 = 9$, $n_2 = 13$ և $n_3 = 15$ ծավալներով ընտրանքների ամլաներով դանված են ուղղված ընտրանքային գիսպերսիաները, որոնք համապատասխանաբար հավասար են $3,2\text{-ի}$; $3,8\text{-ի}$; $6,3\text{-ի}$. Պահանջվում է $0,05$ նշանակալիության

մակարդակի գեպքում, ստուգել դիսպերսիաների՝ համասեռության մասին զրոյական հիպոթեզը:

Լուծում: Կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 10^{-2} (8-րդ սրունակը առայժմ չենք լրացնում, քանի որ գեռ անհայտ է՝ հարկ կլինի՝ արդյոք հաշվել C-ն)

Օգտվելով հաշվարկային աղյուսակից, գտնում ենք,

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{k} \sum k_i s_i^2 = \frac{159,4}{34} = 4,688, \quad \lg \bar{s}^2 = 0,6709;$$

$$V = 2,303 [k \lg \bar{s}^2 - \sum k_i \lg s_i^2] =$$

$$= 2,303 [34 \cdot 0,6709 - 22,1886] = 1,43,$$

Աղյուսակ 10

1	2	3	4	5	6	7	8
Հնարան-քի համարը	Հնարան-քի ծավալը	Ազատու-թյան աս-տիճանը	Ուղղված դիսպերսիան				
i	n _i	k _i	s _i ²	k _i s _i ²	lg s _i ²	k _i lg s _i ²	$\frac{1}{k_i}$
1	9	8	3,2	25,6	0,5051	4,0408	
2	13	12	3,8	45,6	0,5798	6,9576	
3	15	14	6,3	88,2	0,7993	11,1902	
Σ		k=34		159,4		22,1886	

Աղյուսակից (հավելված 5), $0,05$ նշանակալիության մակարդակով $l-1=3-1=2$ ազատության աստիճանով, գտնում ենք $\chi_{\text{լր.}}^2(0,05, 2) = 6,0$ կրիտիկական կետը:

Քանի որ $V < \chi_{\text{լր.}}^2$, ապա առավել ես (քանի որ $C > 1$)

$$B_{\text{լր.}} = \frac{V}{C} < \chi_{\text{լր.}}^2, \quad \text{հետեւաբար դիսպերսիաների համասեռու-$$

թիան համար հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան: Այլ կերպ ասած, ընտրանքային դիսպերսիաների տարբերությունը նշանակալի չէ:

542. 541 խնդրի տվյալներով պահանջվում է գնահատել դիսպերիվող գլխավոր համախմբությունների գլխավոր դիսպերսիան:

Լուծում: Քանի որ նախորդ խնդիրը լուծելիս պարզվեց դիսպերսիաների համասեռությունը, ապա որպես գլխավոր դիսպերսիայի գնահատական ընդունում ենք ուղղված դիսպերսիաների կշռային (ըստ ազատության առաջնանական միջին թվաբանականը՝

$$D_q^* = \bar{s}^2 = \frac{1}{k} \sum k_i s_i^2 = \frac{159,4}{34} \approx 4,7:$$

543. $n_1=3$, $n_2=2$, $n_3=20$ ծավալներով ընտրանքների գեղքում կարելի՞ է արդյոք դիսպերսիաների համասեռության մասին հիպոթեզը ստուգելիս օգտվել Բարտլետի չափանիշից:

Պատ.՝ Զի կարելի (յուրաքանչյուր ընտրանքի ծավալը չպետք է լինի 4-ից փոքր):

544. Նորմալ գլխավոր համախմբություններից վերցրած $n_1=17$, $n_2=20$, $n_3=15$, $n_4=16$ ծավալներով չորս անկախ ընտրանքային դիսպերսիաները, որոնք համապատասխանաբար հավասար են $2,5\text{-ի}$, $3,6\text{-ի}$, $4,1\text{-ի}$, $5,8\text{-ի}$: Պահանջվում է ա) $0,05$ նշանակալիության մակարդակով, ստուգել դիսպերսիաների համասեռության մասին հիպոթեզը, բ) գնահատել գլխավոր դիսպերսիան:

Պատ.՝ ա) $k=68$, $\sum k_i s_i^2 = 252,8$; $\sum k_i lgs_i^2 = 36,9663$; $V=2,8$; $B_{q_{\text{թու}}} < 2,8$; $\chi^2_{4p}(0,05; 3) = 7,8$: Դիսպերսիաների համասեռության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան, բ) $D_q^* = 3,7$:

545. Զորս հետազոտողներ գուգահեռ որոշում են ածխածնի առկոսային պարունակությունը համաձայլվածքի մեջ, ընդ որում առաջին հետազոտողը կատարեց 25 նմուշների անալիզ, երկրորդը՝ 33, երրորդը՝ 29, չորրորդը՝ 33: «Ուղղված» ընտրանքային միջին քառակուսային շեղումները համապատասխանաբար հավասար են $0,05\text{-ի}$; $0,07\text{-ի}$; $0,10\text{-ի}$; $0,08\text{-ի}$:

Պահանջվում է, $0,01$ նշանակալիության մակարդակով, ստուգել գիսպերսիաների համասեռության մասին հիպոթեզը, ենթագրելով, որ ածխածնի առկոսային պարունակությունը համաձայլվածքի մեջ բաշխված է նորմալ օրենքով:

Ցուցում: Հաշվումների պարզեցման համար ընդունել $r_i = 100s_i$:

Պատ.՝ $k = 116$, $\Sigma k_i r_i^2 = 7016$; $\bar{r}^2 = 60,48$, $\Sigma k_i \lg r_i^2 = 201,4344$, $V = 12,0475$, $C = 1,0146$, $B_{q_{\text{փա}}}=11,87$, $\chi_{q_p}^2(0,01;3) = 11,3$: Գիսպերսիաների համասեռության մասին հիպոթեզը մերժվում է:

546. Համեմատվում են դետալների մշակման 4 եղանակներ: Այն եղանակը, որի դեպքում հսկվող չափի գիսպերսիան փոքր է, համարվում է լավ: Առաջին եղանակով մշակված են 15, երկրորդ եղանակով՝ 20, երրորդ եղանակով՝ 20, չորրորդ եղանակով՝ 14 դետալներ: Ուղղված ընտրանքային s_i^2 գիսպերսիաները համապատասխանաբար հավասար են՝ $0,00053\text{-ի}$; $0,00078\text{-ի}$; $0,00096\text{-ի}$; $0,00062\text{-ի}$: Կարելի՞ է արդյոք առավելությունը տալ մեթոդներից մեկին $0,05$ նշանակալիության մակարդակի դեպքում: Ենթագրվում է, որ հսկվող պարամետրը բաշխված է նորմալ օրենքով:

Ցուցում: Հաշվումների պարզեցման եղանակով ընդունել $r_i^2 = 100000 s_i^2$:

Պատ.՝ $k = 65$; $\bar{r}^2 = 74,68$; $\Sigma k_i \lg r_i^2 = 121,0550$; $V = 1,62$; $B_{q_{\text{փա}}} < 1 \cdot 62$; $\chi_{q_p}^2(0,05;3) = 7,8$: Եղանակներից մեկը մյուսների նկատմամբ դերադասելու հիմքեր չկան:

547. Պահանջվում է համեմատել երեք հաստոցներով դետալների մշակման ճշտոթյունը: Այդ նպատակով առաջին հաստոցի վրա մշակված են 20, երկրորդի վրա՝ 25, երրորդի վրա՝ 26 դետալներ: Ստացվեցին հսկվող չափի հետևյալ X, Y, Z շեղումները պահանջվող չափից՝ (մմ-ի տասներորդ մասերով)

առաջին հաստոցի

դետալների շեղումները	x_i	2	4	6	8	9
հաճախությունները	n_i	5	6	3	2	4

երկրորդ հաստոցի դետալ-

ների շեղումները	y_i	1	2	3	5	7	8	12
հաճախությունները	m_i	2	4	4	6	3	5	1

Երրորդ հաստոցի դետալ-

ների շեղումները	z_i	2	3	4	7	8	10	14
հաճախությունները	p_i	3	5	4	6	3	2	3

ա) Կարելի՞ է արդյոք համարել, որ հաստոցները ապահովում են միատեսակ ճշտոթյուն, 0,05 նշանակալիության մակարդակի գեպքում, ենթադրելով, որ շեղումները բաշխված են նորմալ:

բ) Դիտարկումից հանելով երրորդ հաստոցը (այդ հաստոցի շեղումների դիսպերսիան ամենամեծն է), և օգտվելով Ֆիշեր—Մնեդեկորի չափանիշից, համոզվել, որ առաջին և երկրորդ հաստոցները ապահովում են դետալների մշակման միատեսակ ճշտոթյուն:

Պատ.՝ $s_x^2 = 3,96$, $s_y^2 = 7,92$, $s_z^2 = 13,93$, $\bar{s}^2 = 9,02$, $\sum k_i s_i^2 = 613,32$, $\sum k_i \lg s_i^2 = 61,5151$, $V = 7,92$, $C = 1,02$, $B_{\frac{q}{4}, m} = 7,76$, $F_{\frac{q}{4}, p} (0,05; 2) = 6,0$, Դիսպերսիաների համասեռության մասին հիպոթեզը մերժվում է: Հաստոցները չեն ապահովում միատեսակ ճշտոթյուն:

բ) $F_{\frac{q}{4}, m} = 2$; $F_{\frac{q}{4}, p} (0,05; 19) = 2,11$.

§ 10. Մի քանի նորմալ համախմբությունների դիսպերսիաների համեմատումը միատեսակ ծավալի ընտրանքների դեպքում: Կոչընի չափանիշը

Դիցուք X_1, X_2, \dots, X_l գլուավոր համախմբությունները բաշխված են նորմալ օրենքով: Այդ համախմբություններից զերցված են միատեսակ ո ծավալի և անկախ ընտրանքներ և նրանցով որոշված են ուղղված ընտրանքային $s_1^2, s_2^2, \dots, s_l^2$ զիսպերսիաները, բոլորն էլ միատեսակ $k = n - 1$ ազատության աստիճանով:

Պահանջվում է, ո նշանակալիության մակարդակով ստուգել զիսպերսիաների համասեռության մասին զրոյական հիպոթեզը, այսինքն՝ զիսպեր զիսպերսիաների միջյանց հավասար լինելու մասին $H_0 \sim DX_1 = DX_2 = \dots = DX_l$ հիպոթեզը:

Որպես զրոյական հիպոթեզի ստուգման չափանիշ ընդունենք Կոչ-բենի չափանիշը՝ առավելագույն ուղղված զիսպերսիայի հարաբերությունը բոլոր զիսպերսիաների գումարին՝

$$G = \frac{s_{\text{առ}}^2}{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_l^2}:$$

Այս պատմական մեծության բաշխումը կախված է միայն ազատության $k = n - 1$ աստիճանից և ընտրանքների 1 թվից: Զրոյական հիպոթեզի ստուգման համար զիտարկվում է աջակողմյան կրիտիկական տիրույթը:

Կանոն: Տրված ա նշանակալիության մակարդակով նորմալ բաշխված համախմբությունների դիսպերսիաների համասեռության մասին զրոյական հիպոթեզը ստուգելու համար պետք է հաշվել չափանիշի դիտավոլ արժեքը՝

$$G_{\text{դիտ.}} = \frac{s_{\text{առ}}^2}{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_l^2}$$

և կոչընի բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հավելված 8) որոշել $G_{\text{դր.}} (\alpha, k, l)$ կրիտիկական կետը:

Եթե $G_{q_{\mu_m}} < G_{q_r}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան:

Եթե $G_{q_{\mu_m}} > G_{q_r}$, զրոյական հիպոթեզը մերժում են:

Դիտողություն: Գիսպերսիաների համասեռության զեպքում որպես գլխավոր գիսպերսիայի գնահատական ընդունում են ուղղված գիսպերսիաների միջին թվաբանականը:

548. Նորմալ գլխավոր համասմբություններից վերցված $n=17$ ծավալի 4 անկախ ընտրանքներով որոշված են ուղղված ընտրանքային $0,21, 0,25, 0,34, 0,40$ գիսպերսիաները:

Պահանջվում է՝ ա) $0,05$ նշանակալիության մակարդակով, ստուգել գիսպերսիաների հավասարության մասին զրույական հիպոթեզը (կրիտիկական տիրությը աջակողմ է), բ) գնահատել գլխավոր գիսպերսիան:

Լուծում: ա) Հաշվենք Կոչրենի չափանիշի (α ռավելագույն գիսպերսիայի հարաբերությունը բոլոր գիսպերսիաների գումարին) գիտվող արժեքը՝

$$G_{q_{\mu_m}} = \frac{0,40}{0,21+0,25+0,34+0,40} = \frac{1}{3},$$

Կոչրենի բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հաշվելված 8) $0,05$ նշանակալիության մակարդակով, $k=n-1=17-1=16$ ազատության աստիճանով և $|t|=4$ ընտրանքների քանակով գտնենք $G_{q_r}(0,05; 16; 4) = 0,4366$ կրիտիկական կետը:

Բանի որ $G_{q_{\mu_m}} < G_{q_r}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա:

բ) Բանի որ գիսպերսիաների համասեռությունը հաստատվեց, ապա որպես գլխավոր գիսպերսիայի գնահատական վերցնենք ուղղված գիսպերսիաների միջին թվաբանականը՝

$$D^* = \frac{0,21+0,25+0,34+0,40}{4} = 0,3,$$

549. Նորմալ գլխավոր համախմբություններից վերցրած $n = 37$ ծավալի 6 անկախ ընտրանքներով որոշված են ուղղղված ընտրանքային $2,34; 2,66; 2,95; 3,65; 3,86; 4,54$ դիսպերսիաները:

Պահանջվում է ստուգել դիսպերսիաների համասեռության մասին զրոյական հիպոթեզը ա) $0,01$ նշանակալիության մակարդակի գեպքում, բ) $0,05$ նշանակալիության մակարդակի գեպքում:

Պատ.՝ $k = 36$, $l = 6$, $G_{q_{\text{b},n}} = 0,2270$, ա) $G_{q_{\text{p}}} (0,01; 36; 6) = 0,2858$,
բ) $G_{q_{\text{p}}} (0,05; 36; 6) = 0,2612$: Եթե դեպում էլ դիսպերսիաների համասեռության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա:

550. Ապացուցել, որ Կոչընի չափանիշի դիտվող արժեքը չի փոխվի, եթե բոլոր դիսպերսիաները բազմապատկենք միևնույն համատառուն թվով:

551. Նորմալ գլխավոր համախմբություններից վերցրած $n = 37$ ծավալի 5 անկախ ընտրանքներով որոշված են «ուղղված» միջին քառակուսային $0,00021; 0,00035; 0,00038$, $0,00062; 0,00084$ շեղումները:

Պահանջվում է, $0,05$ նշանակալիության մակարդակով, ստուգել դիսպերսիաների համասեռության մասին զրոյական հիպոթեզը:

Ցուցում: Նախապես բոլոր միջին քառակուսային շեղումները բազմապատկել 10^5 -ով:

Պատ.՝ $k = 36$; $l = 5$, $G_{q_{\text{b},n}} = 0,4271$; $G_{q_{\text{p}}} (0,05; 36; 5) = 0,3066$: Դիսպերսիաների համասեռության մասին հիպոթեզը մերժվում է:

552. Չորս փաթեթավորող ավտոմատներ նախապատրաստված են միևնույն քաշը կշռելու համար: Նրանցից յուրաքանչյուրի վրա կշռեցին 10 փորձանմուշ, այնուհետև նույն նմուշները կշռեցին 42 գրիտ կշռեքով և դիտված շեղումներով որոշեցին ուղղված՝ $0,012; 0,021; 0,025; 0,032$ դիսպերսիաները: Կարելի՞ է արդյոք $0,05$ նշանակալիության մակարդակի

գեպքում, համարել, որ ավտոմատները ապահովում են կշռուման միատեսակ ճշտություն: Ենթադրվում է, որ գրանցված կշռի շեղումը պահանջվողից բաշխված է նորմալ օրենքով:

Պատ.՝ $k = 9$, $l = 4$, $G_{qk^m} = 0,3556$; $G_{q\ell} (0,05; 9; 4) = 0,5017$. Ավտոմատները ապահովում են կշռման միատեսակ ճշտություն:

553. Համաձուլվածքում ածխածնի պարունակությունը որոշելու համար Յ լաբորատորիաներից լուրաքանչյուրում կատարեցին 10 փորձանմուշների անալիզ, ընդ որում ստացվեցին սեղզված ընարանքային գիսպերսիաների հետեւյալ արժեքները՝ 0,45; 0,062; 0,093:

Պահանջվում է, $0,01$ նշանակալիության մակարդակով, ստուգել գիսպերսիաների համասեռության մասին հիպոթեզը: Ենթադրվում է, որ համաձուլվածքում ածխածնի տոկոսային պարանակաթյունը նորմալ է բաշխված:

Պատ.՝ $k = 9$; $l = 3$; $G_{qk^m} = 0,465$; $G_{q\ell} (0,01; 9; 3) = 0,6912$. Գիսպերսիաների համասեռության մասին գրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկատ:

554. Արտադրանքի հոկվող չափի արժեքով ստուգվում է հասացի կայունությունը (ապակարգավորման բացակարգությունը): Այդ նպատակով լուրաքանչյուրը 30 րոպ. վերցնում էին 20 առարկաներից փորձանմուշը: Բնդամենը վերցրեցին 15 նմուշը: Ընտրված արտադրանքի չափումների միջոցով հաշվեցին սեղզված գիսպերսիաները (նրանց արժեքները բերված են աղյուսակ 11-ում):

Կարելի՞ է արգուք, $0,05$ նշանակալիության մակարդակի գեպքում, համարել, որ հասացը կայուն է աշխատում (ապակարգավորման տեղի չի տնկցել):

Ցուցում: Աղյուսակից (հավելված 8) օգտվելիս, կատարել գծային ինտերպոլյացիա:

$\frac{\partial \eta}{\partial t}$	η	$\frac{\partial \eta}{\partial t}$	η	$\frac{\partial \eta}{\partial t}$	η
1	0,082	6	0,109	11	0,112
2	0,094	7	0,121	12	0,109
3	0,162	8	0,094	13	0,110
4	0,143	9	0,156	14	0,156
5	0,121	10	0,110	15	0,164

Պատ.՝ $k = 19$; $l = 15$; $G_{q_{htm}} = G_{q_e} (0,05; 19; 15) = 0,1386$; չառացը կայուն է աշխատում:

§ 11. Կոռելյացիայի գործակցի նշանակալիության մասին հիպոթեզի ստուգումը

Դիցուք (X, Y) երկչափ գլխավոր համախմբությունը նորմալ է բաշխված: Այդ համախմբությունից վերցված է ո ժավալի ընտրանք և նրանով հաշված է ընտրանքային $r_e \neq 0$ կոռելյացիայի գործակիցը: Պահանջվում է ստուգել գլխավոր կոռելյացիայի գործակցի զրո լինելու մասին $H_0: r_e = 0$ զրոյական հիպոթեզը:

Եթե զրոյական հիպոթեզը ընդունվում է, ապա դա նշանակում է, որ X և Y մեծությունները չկոռելյացված են, հակառակ դեպքում՝ կոռելյացված են:

Վանոն: ռ նշանակալիության մակարդակով, նորմալ երկչափ պատահական մեծության գլխավոր կոռելյացիայի գործակցի զրո լինելու մասին $H_0: r_e \sim r_q = 0$ զրոյական հիպոթեզը ստուգելու համար մրցակցող $H_1: r_e \neq 0$ հիպոթեզի դեպքում անհրայիշու է հաշվել չափանիշի դիտվող արձեքը՝

$$T_{q_{htm}} = \frac{r_e \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_e^2}},$$

և Սոյողենոփի բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից, ոված ռ նշանակալիության մակարդակով և $k = n - 2$ ազատության աստիճա-

նով, գտնել երկկողմանի կրիտիկական տիրույթի t_{4r} (ε, k) կրիտիկական կետը:

Եթե ($T_{q_{fr}}$) $> t_{4r}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

Եթե ($T_{q_{fr}}$) $< t_{4r}$, ապա զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան:

555. (X, Y) երկչափ նորմալ գլխավոր համախմբությունից վերցրած $n = 100$ ծավալի ընտրանքով որոշված է ընտրանքային $\tau_c = 0,2$ կոռելյացիայի գործակիցը: Պահանջվում է, $0,05$ նշանակալիության մակարդակով, ստուգել զլիսավոր կոռելյացիայի գործակիցի զրո լինելու մասին զրոյական հիպոթեզը մրցակցող $H_1 \sim \tau_q \neq 0$ հիպոթեզի գեպարման:

Լուծում: Հաշվենք չափանիշի գիտակող (էմպիրիկ) արժեքը՝

$$T_{q_{fr}} = \frac{\tau_c V \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\tau_c^2}} = \frac{0,2 \sqrt{100-2}}{\sqrt{1-0,2^2}} = 2,02,$$

Պահանջանի համաձայն, մրցակցող հիպոթեզն անի $\tau_q \neq 0$ անքը, ստուգի կրիտիկական տիրությը երկողմ է:

Սարադենաի բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հայելված 6), $\alpha=0,05$ նշանակալիության մակարդակով (աղյուսակի վերին տող) և ազատաթյան $k=n-2=100-2=98$ աստիճանով դանում ենք երկիրողմ կրիտիկական տիրութիւնը ($0,05; 98) = 1,665$ կրիտիկական կետը:

Բանի որ $T_{q_{fr}} > t_{4r}$, ապա զլիսավոր կոռելյացիայի գործակիցի զրո լինելու մասին հիպոթեզը մերժվում է: Այլ կերպ ասած, կոռելյացիայի գործակիցը նշանակալի չափով տարբերվում է զրոյից: Հետեւաբար, X և Y մեծաթանակը կոռելյացիած են:

556. (X, Y) երկչափ նորմալ գլխավոր համախմբությանից վերցրած $n=62$ ծավալի ընտրանքով որոշված է ընտրանքային $\tau_c = 0,3$ կոռելյացիայի գործակիցը: Պահանջվում է, $0,01$ նշանակալիության մակարդակով, ստուգել զլիսավոր

Կոռելյացիայի գործակցի զրո լինելու մասին զրոյական հիպոթեզը, մրցակցող $H_1 \sim r_q \neq 0$ հիպոթեզի դեպքում:

Պատ. $K = 60$; $T_{q_{60}} = 2,43$; $t_{q_p}(0,01 \cdot 60) = 2,66$; Զրոյական հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա; X և Y մեծությունները չկոռելյացված են:

557. (X, Y) երկչափ նորմալ գլխավոր համախմբությունից վերցրած $n = 120$ ծավալի ընտրանքով որոշված է ընտրանքային $r_c = 0,4$ կոռելյացիայի գործակցը; Պահանջվում է, $0,05$ նշանակալիության մակարդակով, ստուգել գլխավոր կոռելյացիայի գործակցի զրո լինելու մասին զրոյական հիպոթեզը, մրցակցող $H_1 \sim r_q \neq 0$ հիպոթեզի դեպքում:

Պատ. $K = 118$; $T_{q_{118}} = 4,74$; $t_{q_p}(0,05; 118) = 1,66$; Զրոյական հիպոթեզը մերժվում է; X և Y պատահական մեծությունները կոռելյացված են:

558. (X, Y) երկչափ նորմալ գլխավոր համախմբությունից վերցրած $n = 100$ ծավալի ընտրանքով կազմված է կոռելյացիոն աղյուսակ 12-ը:

Աղյուսակ 12

Y	10	15	20	25	30	35	n_y
X							
35	5	1	—	—	—	—	6
45	—	6	2	—	—	—	8
55	—	—	5	40	5	—	50
65	—	—	2	8	7	—	17
75	—	—	—	4	7	8	19
n_x	5	7	9	52	19	8	$n = 100$

Պահանջվում է՝ ա) գտնել ընտրանքային կոռելլացիայի գործակիցը, բ) $0,05$ նշանակելիության մակարդակով ստուգել զլսավոր կոռելլացիայի գործակի զրո լինելու մասին հիպոթեզը, մրցակցող $H_1 \sim r_q \neq 0$ հիպոթեզի գեպքում:

Լուծում: ա) Հաշվումների պարզեցման համար անցնենք

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1}, \quad v_i = \frac{y_i - C_2}{h_2},$$

պայմանական տարբերակներին, որտեղ $C_1 = 0$ և $C_2 = 0$ կեղծ զրոներ են (որպես կեղծ զրո ձեռնուում է վերցնել այն տարբերակը, որն ընկած է մոտավորապես վարիացիոն շարքի կենտրոնում, տվյալ գեպքում ընդունենք $C_1 = 25$, $C_2 = 55$), այսինքն տարբերությունը $h_1 = x_{i+1} - x_i$ գտնվում է երկու հարկան տարբերակների միջև (քայլ), $h_2 = y_{j+1} - y_j$:

Դորձնականում, պայմանական տարբերակներով կոռելլացիոն աղյուսակը կազմվում է հետեւյալ կերպ՝ առաջին տողում $C_1 = 25$ կեղծ զրոյի փոխարեն զրում ենք 0 , զրոյից ձախ՝ հաջորդաբար $-1, -2, -3$, իսկ զրոյից աջ՝ $1, 2, 3$ թվերը: Եման ձևով, առաջին սյունակում $C_2 = 55$ կեղծ զրոյի փոխարեն զրում ենք 0 , զրոյից վերև՝ հաջորդաբար $-1, -2, -3$, իսկ զրոյից ներքեւ՝ $1, 2, 3$ թվերը: Հաճախությունները արտադրում ենք սկզբնական տարբերակների կոռելլացիոն աղյուսակից: Արդյանքում ստացվում է կոռելլացիոն աղյուսակ 13 -ը:

Օգտվենք պայմանական տարբերակներով ընտրանքային կոռելլացիայի գործակի հաշվման

$$r_e = \frac{\Sigma n_{uv} - \bar{u}\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v}$$

բանաձեկից:

Բանաձեռնում մասնակցող $\bar{u}, \bar{v}, \sigma_u, \sigma_v$, միծաթյանները հաշվելով արտադրակաների մեթոդով, կամ՝ անմիջական հաշվումներով, ստանում ենք՝

$$\bar{u} = -0,03, \bar{v} = 0,35, \sigma_u = 1,153, \sigma_v = 1,062;$$

u	-3	-2	-1	0	1	2	n_v
v							
-2	5	1	-	-	-	-	6
-1	-	6	2	-	-	-	8
0	-	-	5	40	5	-	50
1	-	-	2	8	7	-	17
2	-	-	-	4	7	8	19
n_u	5	7	9	52	19	8	$n=100$

Օգտագելով հաշվարկային աղյուսակից (ահս խնդիր 498, աղյուսակ 7), ստանում ենք՝ $\Sigma n_{uv} = 99$:

Հետևաբար, ընտրանքային կոռելյացիայի գործակիցը՝

$$r_e = \frac{\Sigma n_{uv} uv - \bar{u} \bar{v}}{n \sigma_u \sigma_v} = \frac{99 - 100 \cdot (-0,03) \cdot (0,35)}{100 \cdot 1,153 \cdot 1,062} = 0,817:$$

բ) Ստուգենք գլխավոր կոռելյացիայի գործակիցի զրով ինելու մասին զրոյական հիպոթեզը:

Հաշվենք չափանիշի գիտակող արժեքը՝

$$T_{\text{շեմ.}} = \frac{r_e \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_e^2}} = \frac{0,817 \sqrt{100-2}}{\sqrt{1-0,817^2}} = 14,03:$$

Պայմանի համաձայն, մրցակցող հիպոթեզն ունի $r_e \neq 0$ տեսքը, ուստի կրիտիկական տիրուցիքը երկվողմ է: Սայուգենամի բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հավելված 6), $\alpha = 0,05$ նշանակալիության մակարդակով (աղյուսակի վերևի տող) և $k = n - 2 = 100 - 2 = 98$ աղատության աստիճանով գտնում ենք երկկողմանի կրիտիկական տիրուցիքը՝ t_{k_p} , $(0,05; 98) = 1,665$ կրիտիկական կետը:

Քանի որ $T_{q,p} > t_{q,p}$, ապա գլխավոր կոռելյացիայի գործակցի զրո լինելու մասին զրոյական հիպոթեզը մերժում ենք: Այլ կերպ ասած, կոռելյացիայի գործակիցը նշանակալի չափով տարբերվում է զրոյից, հետևաբար X և Y մեծությունները կոռելյացված են:

559. (X, Y) գլխավոր նորմալ համախմբությունից վերցրած $n=100$ ծավալի ընտրանքով կազմված է կոռելյացիոն աղյուսակ 14 -ը:

Պահանջվում է՝ ա) գտնել ընտրանքային կոռելյացիայի գործակիցը, բ) $0,01$ նշանակալիության մակարդակով, ստուգել գլխավոր կոռելյացիայի r_q գործակիցի զրո լինելու մասին հիպոթեզը, մրցակցող $H_1 \sim r_q \neq 0$ հիպոթեզի դեպքում:

$$\text{Ցուցում: } \text{Անցնել } u_i = \frac{x_i - 17}{5}, v_i = \frac{y_i - 130}{10} \quad \text{սայմանական տարբերակներին:}$$

Պատճեն) $\bar{u} = -0,11$; $\sigma_u = 0,948$; $\bar{v} = 0,25$; $\sigma_v = 0,004$, $uv = 73$, $r_p = 0,8$; $p(T_{q,p}) = 13,2$; $t_{q,p}(0,01,98) = 2,64$: Զրոյական հիպոթեզը մերժում է: X և Y մեծությունները կոռելյացված են:

Աղյուսակ 14

X Y	2	7	12	17	22	27	n_y
110	2	4	—	—	—	—	6
120	—	6	2	—	—	—	8
130	—	—	3	50	2	—	55
140	—	—	1	10	6	—	17
150	—	—	—	4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	$n=100$

560. (X, Y) երկչափ նորմալ գլխավոր համախմբությունից վերցրած $n = 100$ ժագալի ընտրանքով կազմված է կոռելյացիոն աղյուսակ 15-ը:

Աղյուսակ 15

$X \backslash Y$	12	22	32	42	52	62	72	n_y
65	—	—	—	—	10	6	2	18
70	—	—	—	—	—	4	1	5
75	—	—	2	7	4	2	—	15
80	—	—	1	25	—	—		26
85	—	4	6	—	1	—	—	11
90	1	5	8	2	—	—	—	16
95	1	2	6	—	—	—	—	9
n_x	2	11	23	34	15	12	3	$n=100$

Պահանջվում է՝ ա) գտնել ընտրանքային կոռելյացիայի գործակիցը, բ) $0,001$ նշանակալիության մակարդակով ստուգել զլիսավոր կոռելյացիայի r_q գործակիցի զրո լինելու մասին հիպոթեզը, մրցակցող $H_1 \sim r_q \neq 0$ հիպոթեզի դեպքում:

$$\text{Ցուցում: } \text{Անցնել } u_i = \frac{x_i - 42}{10}, \quad v_i = \frac{y_i - 80}{5} \quad \text{պայմանա-}$$

կան տարբերակներին:

Պատճառական ա) $\bar{u} = -0,03$; $\sigma_u = 1,321$; $\bar{v} = -0,09$; $\sigma_v = 1,877$;
 $\Sigma u_{uv} uv = -206$; $r_e = -0,83$; $R = T_{q_p} = -14,73$; $t_{q_p}(0,001; 98) = -3,43$. Զբոյական հիպոթեզը մերժվում է: X և Y ժեծությունները կոռելացված են:

561. (X, Y) երկչափ նորմալ գլխավոր համախմբությունից վերցրած $n = 100$ ժավալի ընտրանքով կազմված է կոռելացիոն աղյուսակ՝ 16-ը:

Աղյուսակ 16

X \ Y	100	105	110	115	120	125	n_y
35	4	—	6	7	8	3	28
45	5	5	2	10	—	—	22
55	6	7	—	—	2	3	18
65	—	6	5	4	—	2	17
75	5	1	2	4	3	—	15
n_x	20	19	15	25	13	8	$n=100$

Պահանջվում է՝ ա) գանել ընտրանքային կոռելացիայի գործակիցը, բ) $0,05$ նշանակալիության մակարդակով ստուդել կոռելացիայի բարությունը մասին զբոյական հիպոթեզը, մրցակցող $H_1 \sim r_q \neq 0$ հիպոթեզի դեպքում:

8 ու ցումը Անցնել պայմանական

$$u_i = \frac{x_i - 115}{5}, \quad v_i = \frac{y_i - 45}{10}$$

ուղարկերակներին:

Պատճ. ա) $\bar{u} = -0,84$; $\sigma_u = 1,758$; $\bar{v} = 0,69$; $\sigma_v = 1,563$;
 $\Sigma_{uv} = -94$; $r_e = -0,13$; բ) $T_{\text{շլ}} = -1,3$; $t_{4F}(0,05; 98) = 1,665$;
Զբոյական հիպոթեզը մերժելու հիմքը չկան: X և Y մեծությունները
չկոռելացված են:

§ 12. Գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզի ստուգումը՝ Պիրսոնի չափանիշով

Ա. Էմպիրիկ բաշխումը տրված է հավասարահեռ տարբերակների և համապատասխան հաճախությունների հաջորդականության տեսքով:

Դիցուք, էմպիրիկ բաշխումը տրված է հավասարահեռ տարբերակների և համապատասխան հաճախությունների հաջորդականության տեսքով:

$$\begin{array}{ll} x_i & x_1, x_2, \dots, x_N \\ \pi_i & \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N \end{array}$$

Պահանջվում է, Պիրսոնի չափանիշի օգնությամբ, ստուգել X գլխամարդու համախմբությունը նորմալ բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը:

Կանոն 1: Տրված ա նշանակալիության մակարդակով գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը ստուգելու համար անհրաժեշտ է՝

1. Հաշվել անմիջականորեն (փոքրարիվ դիտումների դեպքում) կամ պարզեցված մերողով (մեծ թվով դիտումների դեպքում), օրինակ, արտադրյալների կամ գումարների մերողով: x_e ՝ ընտրանքային միջինը և σ_e ՝ ընտրանքային միջին քառակուսային շեղումը:

2. Հաշվել տեսական հաճախությունները՝

$$\pi_i' = \frac{n_i}{n} \varphi(u_i),$$

որտեղ n -ը ընտրանքի ծավալն է (ըուլոր հաճախությունների գումարը), h -ը քայլն է (երկու հարկեան տարբերակների միջև եղած տարբերությունը),

$$u_i = \frac{x_i - \bar{x}_c}{\sigma_c}, \quad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}},$$

3. Պիրսոնի չափանիշի օգնությամբ համեմատել էմպիրիկ և տեսական հաճախուրյունները: Արդի համար՝

ա) կազմաւմ են հաշվարկային աղյուսակ (անս աղյուսակ 18), որտեղից գտնում են չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$\chi_{q_{\mu}}^2 = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n_i};$$

բ) χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից, տրված չեղանակալիության մակարդակով, և $k = s - 3$ ազատուրյան աստիճանով (s -ը բնարանքային խմբերի քանակն է) որոշում են աջակողմյան կրիտիկական տիրույթի $\chi_{q_{\mu}}^2$ (s, k) կրիտիկական կետը:

Եթե $\chi_{q_{\mu}}^2 < \chi_{q_{\mu}}^2$, ապա զիշավոր համախմբուրյան նորմալ բաշխված լինելու մասին նիստորեզը մերժելու հիմքեր չկան: Այլ կերպ ասած, էմպիրիկ և տեսական հաճախուրյունները աննշան չափով են տարբերվում (տարբերությունը պատահական է):

Եթե $\chi_{q_{\mu}}^2 > \chi_{q_{\mu}}^2$, ապա նիստորեզը մերժվում է: Այլ կերպ ասած, էմպիրիկ և տեսական հաճախուրյունները տարբերվում են նշանակալի չափով:

Դիտություն 1: *Փոքրաթիվ հաճախությունները* ($n_i < 5$) անհրաժեշտ է միավորել, այդ գեղքում նրանց համապատասխան տեսական հաճախությունները նույնպես պետք է միավորելու եթե իրականացվել է հաճախությունների միավորումը, առաջ կ = s - 3 բանաձևով ազատության աստիճանի որոշման ժամանակ անհրաժեշտ է որպես Տ զերցնել միավորումից հետո մնացած խմբերի թիվը:

562. Պիրսոնի չափանիշով զլիասկոր համախմբության նորմալ բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը ստուգելիս ինչ չու ազատության աստիճանը որոշամ ևն $k = s - 3$ բանաձևով:

Լուծում: Պիրսոնի չափանիշը օգտագործելիս ազատության աստիճանը հավասար է $s - 1 - r$, որտեղ r -ը ընարանքով գնահատված պարամետրերի թիվն է: Նորմալ բաշխումը որոշվում է երկու պարամետրերով՝ ամենամատիկական

սպասումով և օ միջին քառակուսային շեղումով: Քանի որ այդ երկու պարամետրերն էլ գնահատվել են ընտրանքով (որպես ա-ի գնահատական վերցնում են ընտրանքային միջինը, որպես օ-ի գնահատական ընտրանքային միջին քառակուսային շեղումը), ապա $t = 2$, $n_{\text{տեաբար}} = s - 1 - 2 = s - 3$:

563. Օգտագործելով Պիբոնի չափանիշը, $0,05$ նշանակալիության մակարդակով, ստուգել) չի^o հակասում արդյոք X զլսավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը, $n = 200$ ծավալի ընտրանքի էմպիրիկ բաշխմանը՝

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	27	21	24	20	13

Լուծում. 1. Օգտագործելով արտադրյալների մեթոդը, գտնում ենք $\bar{x} = 12,63$ ընտրանքային միջինը և $\sigma_e = 4,695$ ընտրանքային միջին քառակուսային շեղումը:

2. Հաշվի առնելով, $n = 200$, $h = 2$, $\sigma_e = 4,695$,

$$n'_i = \frac{n h}{\sigma_e} \varphi(u_i) = \frac{200 \cdot 2}{4,695} \cdot \varphi(u_i) = 85,2 \varphi(u_i)$$

բանաձեռք հաշվենք տեսական հաճախությունները:

Կազմենք հաշվարկային աղյուսակ $I7\text{-ը}$ ($\varphi(u)$ Փունկցիայի արժեքները բերված են հավելված 1-ում):

Աղյուսակ 17

i	x_i	$u_i = \frac{x_i - \bar{x}_e}{\sigma_e}$	$\varphi(u_i)$	$n'_i = 85,2 \cdot \varphi(u_i)$
1	5	-1,62	0,1074	9,1
2	7	-1,20	0,1942	16,5
3	9	-0,77	0,2966	25,3
4	11	-0,35	0,3752	32,0
5	13	0,08	0,3977	33,9
6	15	0,51	0,3503	29,8
7	17	0,93	0,2589	22,0
8	19	1,36	0,1582	13,5
9	21	1,78	0,0818	7,0

3. Համեմատենք էմպիրիկ և տեսական հաճախությունները՝ ա) Կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 18-ը, որտեղից կորոշենք չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$X^2_{\text{գիտ}} = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i},$$

Աղյուսակ 18

i	n _i	n' _i	n _i - n' _i	(n _i - n' _i) ²	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	15	9,1	-5,9	34,81	3,8
2	26	16,5	9,5	90,25	3,6
3	25	25,3	-0,3	0,09	0,0
4	30	32,0	-2,0	4,00	0,1
5	26	33,9	-7,9	62,41	1,9
6	21	29,8	-8,8	77,44	2,3
7	24	22,0	2,0	4,00	0,2
8	20	13,5	6,5	42,25	3,0
9	13	7,0	6,0	36,00	5,1
$\Sigma = 200$					$X^2_{\text{գիտ}} = 20,0$

Աղյուսակ 18-ից գտնում ենք $\chi^2_{\text{գիտ}} = 20,0$:

բ) χ^2 բաշխման կրիտիկական կեանքի աղյուսակից (*հավելված 5*), $\alpha = 0,05$ նշանակալիության մակարդակով, և $k = s - 3 = 9 - 3 = 6$ աղյուսական առաջնանոր գանում ենք աշակողմյան կրիտիկական աիրայթի $\chi^2_{\text{գր}} = (0,05; 6) = 12,6$ կրիտիկական կեալ:

Քանի որ $\chi^2_{\text{գիտ}} > \chi^2_{\text{գր}}$, ապա դիտավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժան ենք: Այլ կերպ ասած, տեսական և էմպիրիկ հաճախությունները տարբերվում են նշանակալի չափով:

564. Օգտագործելով Պիբունի չափանիշը, 0,05 նշանակալիության մակարդակով, ստուգել, հակասում է արդյոք X դիմավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին:

Հիպոթեզը $n = 200$ ծավալի ընտրանքի հետեւալ էմպիրիկ բաշխմանը.

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,2	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

Պատճ $K = 8$; $\chi^2_{\text{теор}} = 7,71$, $\chi^2_{\text{кн}}(0,05; 8) = 15,5$. Գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմք չկա:

565. Օգտագործելով Պիբոնի չափանիշը, 0,01 նշանակալիության մակարդակով, պարզել, նշանակալի՝ է արդյոք, թե՞ պատահական էմպիրիկ n_i հաճախատթյունների և X զլիսավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության հիպոթեզի հիման վրա հաշված տեսական n'_i հաճախությունների տարբերությունը:

$$n_i \quad 8 \quad 16 \quad 40 \quad 72 \quad 36 \quad 18 \quad 10$$

$$n'_i \quad 6 \quad 18 \quad 36 \quad 76 \quad 39 \quad 18 \quad 7$$

Լուծում: Հաշվենք Պիբոնի չափանիշի գիտվող արժեքը՝ $\chi^2_{\text{теор}} = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$: Կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 19-ը:

Աղյուսակ 19-ից գտնում ենք չափանիշի գիտվող արժեքը՝

$$\chi^2_{\text{теор}} = 3,068:$$

χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից ($հավելված 5$), 0,01 նշանակալիության մակարդակով, և $k = 8 - 3 = 7 - 3 = 4$ պատության աստիճանով, գտնում ենք աջակողմյան կրիտիկական տիրութիւն $\chi^2_{\text{кн}}(0,01; 7) = 13,3$ կրիտիկական կետը:

Քանի որ $\chi^2_{\text{теор}} < \chi^2_{\text{кн}}$, ապա գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը մերժելու հիմք 370

Հկա: Այլ կերպ ասած, էմպիրիկ և տեսական հաճախությունների տարրերությունը նշանակալի չէ (պատահական է):

Աղյուսակ 19

i	n _i	n _{i'}	n _i —n _{i'}	(n _i —n _{i'}) ²	$\frac{(n_i - n_{i'})^2}{n_{i'}}$
1	8	6	2	4	0,667
2	16	18	-2	4	0,224
3	40	36	4	16	0,448
4	72	76	-4	16	0,208
5	36	39	-3	9	0,234
6	18	18	—	—	—
7	10	7	3	9	1,287
Σ	n=200			,	$\chi^2_{q_{\beta \alpha}} = 3,068$

566. Օգագործելով Պիլսոնի չափանիշը. 0,05 նշանակալիության մակարդակով, պարզել, նշանակալի՞ է արդյոք, թե՞ պատահական էմպիրիկ ու հաճախությունների և X զլիսավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության հիպոթեզի հիման վրա հաշված տեսական ու հաճախությանների տարրերությունը.

$$\text{ա) } \begin{matrix} n_i & 5 & 10 & 20 & 8 & 7 \\ n_i' & 6 & 14 & 18 & 7 & 5 \end{matrix};$$

$$\text{բ) } \begin{matrix} n_i & 6 & 8 & 13 & 15 & 20 & 16 & 10 & 7 & 5 \\ n_i' & 5 & 9 & 14 & 16 & 18 & 16 & 9 & 6 & 7 \end{matrix};$$

$$\text{գ) } \begin{matrix} n_i & 14 & 18 & 32 & 70 & 20 & 36 & 10 \\ n_i' & 10 & 24 & 34 & 80 & 18 & 22 & 12 \end{matrix};$$

$$\text{դ) } \begin{matrix} n_i & 5 & 7 & 15 & 14 & 21 & 16 & 9 & 7 & 6 \\ n_i' & 6 & 6 & 14 & 15 & 22 & 15 & 8 & 8 & 6 \end{matrix};$$

- Պատճառական է; $k=2$, $\chi^2_{\eta_{\text{թա}}}=2,47$, $\chi^2_{\eta_{\rho}}(0,05; 2)=6,0$;
- բ) Պատճառական է; $k=6$, $\chi^2_{\eta_{\text{թա}}}=1,52$, $\chi^2_{\eta_{\rho}}(0,05; 6)=12,6$;
- գ) Նշանակալի է; $k=4$, $\chi^2_{\eta_{\text{թա}}}=13,93$, $\chi^2_{\eta_{\rho}}(0,05; 4)=9,5$;
- դ) Պատճառական է; $k=6$, $\chi^2_{\eta_{\text{թա}}}=0,83$, $\chi^2_{\eta_{\rho}}(0,05; 6)=12,6$.

Բ. Էմպիրիկ բաշխումը տրված է միատեսակ երկարության միջակայքերի և նրանց համապատասխան հաճախությունների հաջորդականության տեսքով:

Դիցուք էլեմենտների բաշխումը արված է (x_i, x_{i+1}) միջակայքերի հաջորդականության և համապատասխան n_1 հաճախությունների հաջորդականության տեսքով (n_1 -ն այն տարբերակների հաճախությունների գումարն է, որոնք ենկամ են լրդ միջակայքում):

$$(x_i; x_2) \quad (x_2; x_3) \quad \cdots (x_s; x_{s+1})$$

$$n_1 \quad n_2 \quad n_s$$

Պահանջվում է, օգտվելով Պիրսոնի չափանիշից, ստուդել X դիմավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը:

Կանոն 2: Յ նշանակալիության մակարդակով, գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը ստուգելու համար պետք է՝

1. Հաշվել, օրինակ, արտադրյալների մերողով, \bar{x}^* ընտրանքային միջինը և σ^* ընտրանքային միջին քառակուսային շեղումը, ընդ որում որպես x_i^* աարբերակ ընդունվում է միջակայքի ծայրակետերի միջին բարքանականը՝

$$x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2};$$

2. Նորմավորել X -ը, այսինքն՝ անցնել $Z = \frac{X - \bar{x}^*}{\sigma^*}$ պատճառական մեծությանը և հաշվել միջակայքի

$$z_i = \frac{x_i - x_i^*}{\sigma^*}, \quad z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}^*}{\sigma^*}$$

ծայրակետերը, ընդ որում որպէս Z -ի ամենափոքր արժեք, այսինքն՝ z_1 ընդունում են $-\infty$ -ը, իսկ ամենամեծը, այսինքն՝ z_s ընդունում են $+\infty$ -ը:

3. Հաշվել տեսական հաճախուրյունները՝

$$n_i' = n P_i,$$

որտեղ n -ը ընտրանքի ժագալն է (n ուր հաճախությունների գումարը),

$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ այն բանի հավանականությունն է, որ X -ը կընկնի (x_i, x_{i+1}) միջակայքը, $\Phi(z)$ -ը Լապլասի ֆունկցիան է:

4. Համեմատել կմաքրիկ և տեսական հաճախուրյունները Պիրսոնի չափանիշի օգնությամբ: Արի համար՝

ա) կազմել հաշվարկային աղյուսակ (ուս աղյուսակ 18), որունից որոշել Պիրսոնի չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$\chi^2_{\text{պահ}} = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i};$$

բ) χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից, որիած անշանակալիության մակարդակով և $k = s - 3$ (s -ը բնուրանքի միջակայքերի թիվն է) ազատուրյան աստիճանով գտնել աջակադյան կրիտիկական ափառյալի $\chi^2_{\text{պահ}}$ (x, k) կրիտիկական կետը:

Եթե $\chi^2_{\text{պահ}} < \chi^2_{\text{պահ}}$, ապա զիստվոր համախմբության նորմայի բաշխածության մասին նիստրեզր մերժելու նիմքեր չկան:

Եթե $\chi^2_{\text{պահ}} > \chi^2_{\text{պահ}}$, ապա նիստրեզր մերժիում է:

Դիտողություն 2: Փոքրաթիվ հաճախություններով ($n_i < 5$) միջակայքերը պետք է միավորել, իսկ հաճապատճեան հաճախությունները՝ գումարելու եթե կատարվել է միջակայքերի միավորում, ապա աղյուսության աստիճանը $k = s - 3$ բանաձևով սրացելիս, որպես պետք է զերցնել միավորումից հետո մնացած միջակայքերի թիվը:

567. Օգովելով Պիրսոնի չափանիշից, 0,05 նշանակառ լիության մակարդակի գեպքամ, ստագել, հակասում է որպես X գլխավոր համախմբաթյան նորմալ բաշխածության մասին նիստրեզրը $n = 100$ ժագալի ընտրանքի լմպիրիկ բաշխմանը, որը բերված է աղյուսակ 20-ում:

<i>Միջակայքի համարը</i>	<i>Միջակայքի սահմանները</i>	<i>Հաճախութեանը</i>	<i>Միջակայքի համարը</i>	<i>Միջակայքի սահմանները</i>	<i>Հաճախութեանը</i>		
<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>x_{i+1}</i>	<i>n_i</i>	<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>x_{i+1}</i>	<i>n_i</i>
1	3	8	6	5	23	28	16
2	8	13	8	6	28	33	8
3	13	18	15	7	33	38	7
4	18	23	40				n=100

Լուծում: 1. Արտադրյալների մեթոդով հաշվենք ընտրանքային միջինը և ընտրանքային միջին քառակուսային շեղումը: Դրա համար տրված միջակայքային բաշխումից անցնենք հավասարանեռ ատարբերակների բաշխմանը որպես x_i^* ատարբերակներ, ընդունելով միջակայքի ծայրակետերի միջին թվաբանականը՝

$$x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2},$$

Արդյունքում կստանանք հետեւյալ բաշխումը՝

$$X_i^* \quad 5,5 \quad 10,5 \quad 15,5 \quad 20,5 \quad 25,5 \quad 30,5 \quad 35,5$$

$$n_i \quad 6 \quad 8 \quad 15 \quad 40 \quad 16 \quad 8 \quad 7$$

Հաշվարկը կատարելով արտադրյալների մեթոդով, որուցենք ընտրանքային միջինը և ընտրանքային միջին քառակուսային շեղումը՝

$$\bar{x}^* = 20,7; \quad \sigma^* = 7,28:$$

2. Գտնենք ($z_i; z_{i+1}$) միջակայքերը, հաշվի առնելով, որ $\bar{x}^* = 20,7$, $\sigma^* = 7,28$, $\frac{1}{\sigma^*} = 0,137$: Դրա համար կազմենք հաշվարկային աղյուսակ՝ 21-ը (առաջին միջակայքի ձախ ծայրակետը ընդունենք հավասար $-\infty$, իսկ վերջին միջակայքի աջ ծայրակետը՝ $+\infty$):

i	$\frac{U\beta\varrho\omega\eta\omega_j\cdot}{\rho\beta\sigma\omega\zeta\cdot\delta\omega\eta\omega\eta\rho\mu}$		$x_i - \bar{x}^*$	$x_{i+1} - \bar{x}^*$	$\frac{U\beta\varrho\omega\eta\omega_j\rho\beta\sigma\omega\zeta\delta\omega\eta\omega\eta\omega\eta\rho\mu}{x_i - \bar{x}^*}$	
	x_i	x_{i+1}			$z_i = \frac{x_i - \bar{x}^*}{\sigma^*}$	$z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}^*}{\sigma^*}$
1	3	8	—	-12,7	-∞	-1,74
2	8	13	-12,7	-7,7	-1,74	-1,06
3	13	18	-7,7	-2,7	-1,06	-0,37
4	18	23	-2,7	2,3	-0,37	0,32
5	23	28	2,3	7,3	0,32	1,00
6	28	33	7,3	12,3	1,00	1,69
7	33	38	12,3	—	1,69	∞

i	$\frac{U\beta\varrho\omega\eta\omega_j\rho\beta\sigma\omega\zeta\delta\omega\eta\omega\eta\omega\eta\rho\mu}{\rho\beta\sigma\omega\zeta\delta\omega\eta\omega\eta\omega\eta\rho\mu}$		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$P_i = \Phi(z_{i+1}) -$	$n_i' = 100P_i$
	z_i	z_{i+1}			$-\Phi(z_i)$	
1	-∞	-1,74	-0,5000	-0,4591	0,0409	4,09
2	-1,74	-1,06	-0,4591	-0,3554	0,1037	10,37
3	-1,06	-0,37	-0,3554	-0,1443	0,2111	21,11
4	-0,37	0,32	-0,1443	0,1255	0,2698	26,98
5	0,32	1,00	0,1255	0,3413	0,2158	21,58
6	1,00	1,69	0,3413	0,4545	0,1132	11,32
7	1,69		0,4545	0,5000	0,0455	4,55
Σ					1	100

3. Գանհենք P_i տևական հարվանականությունները և $n'_i = nP_i = 100P_i$ տևական հաճախությունները: Դրա համար կազմենք հաշվարկագիր սպառակալ 22-ը:

4. Օգտագործելով Պիրսոնի չափանիշը, համեմատենք աեսական և էմպիրիկ հաճախությունները՝

ա) հաշվենք Պիրսոնի չափանիշի գիտվող արժեքը։ Դրա համար կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 23-ը։ 7-րդ և 8-րդ սյուները ծառայում են հաշվումները ստուգելու համար ըստ

$$\chi^2_{\text{q}_{\text{f},m}} = \sum \frac{n_i^2}{n_i'} - n$$

բանաձևի։

$$U \text{ առ ու գումար: } \sum \frac{n_i^2}{n_i'} - n = 113,22 - 100 = 13,22 = \chi^2_{\text{q}_{\text{f},m}}$$

Հաշվումները ճիշտ են կատարված։

բ) χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հաշվածած 5), $\alpha = 0,05$ նշանակալիության մակարդակով, $k = s - 3 = 7 - 3 = 4$ (Տ-ը միջակայքերի թիվն է) աղյուսակային աստիճանով որոշում ենք աշակողմյան կրիտիկական տիրույթի $\chi^2_{\text{q},r}$ ($0,05; 4$) = 9,5 կրիտիկական կետը։

Աղյուսակական 23

1	2	3	4	5	6	7	8
i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n_i'}$
1	6	4,09	1,91	3,6481	0,8920	36	8,8019
2	8	10,37	2,37	5,6169	0,5416	64	6,1761
3	15	21,11	-6,11	37,3321	1,7684	225	10,6584
4	40	26,98	13,02	169,5204	6,2833	1600	59,3052
5	16	21,58	-5,58	31,1364	1,4428	256	11,8628
6	8	11,32	-3,32	11,0224	0,9737	64	5,6537
7	7	4,55	2,45	6,0025	1,3192	49	10,7692
\sum	100	100			$\chi^2_{\text{q}_{\text{f},m}} = 13,22$		113,22

Քանի որ $\sqrt{\frac{2}{n}} > \sqrt{\frac{2}{k}}$, ապա X գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժում ենք, այլ կերպ ասած էմպիրիկ և տեսական հաճախությունները նշանակալի չափով տարբերվում են: Դա նշանակում է, որ գիտան տվյալները հակասում են գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզին:

568. Օգտվելով Պիրառնի չափանիշից, $0,05$ նշանական լիության մակարդակի դեպքում, ստուգել, հակասու՞մ է արդյոք X գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը տրված էմպիրիկ բաշխմանը:

ա)

$\frac{U_{\text{իջակայք}}}{\text{համարը}}$	$U_{\text{իջակայք}} \text{ սահմանները}$		$\frac{\zeta_{\text{աճախուր}}}{P_{J, n, \alpha}}$	$\frac{U_{\text{իջակայք}}}{\text{համարը}}$	$U_{\text{իջակայք}} \text{ սահմանները}$		$\frac{\zeta_{\text{աճախուր}}}{P_{J, n, \alpha}}$
i	x_i	x_{i+1}	n _i	i	x_i	x_{i+1}	n _i
1	-20	-10	20	5	20	30	40
2	-10	0	47	6	30	40	16
3	0	10	80	7	40	50	8
4	10	20	89				
							n=300

բ)

$\frac{U_{\text{իջակայք}}}{\text{համարը}}$	$U_{\text{իջակայք}} \text{ սահմանները}$		$\frac{\zeta_{\text{աճախուր}}}{P_{J, n, \alpha}}$	$\frac{U_{\text{իջակայք}}}{\text{համարը}}$	$U_{\text{իջակայք}} \text{ սահմանները}$		$\frac{\zeta_{\text{աճախուր}}}{P_{J, n, \alpha}}$
i	x_i	x_{i+1}	n _i	i	x_i	x_{i+1}	n _i
1	1	3	2	7	13	15	16
2	3	5	4	8	15	17	11
3	5	7	6	9	17	19	7
4	7	9	10	10	19	21	5
5	9	11	18	11	21	23	1
6	11	13	20				n=100

4)

$\sum_{i=1}^n x_i$	\bar{x}_i	x_{i+1}	n_i	$\sum_{i=1}^n x_i$	\bar{x}_i	x_{i+1}	n_i
1	6	16	8	6	56	66	8
2	16	26	7	7	66	77	6
3	26	36	16	8	76	86	7
4	36	46	35				
5	46	56	15				
$n = 100$							

5)

$\sum_{i=1}^n x_i$	\bar{x}_i	x_{i+1}	n_i	$\sum_{i=1}^n x_i$	\bar{x}_i	x_{i+1}	n_i
1	5	10	7	6	30	35	19
2	10	15	8	7	35	40	14
3	15	20	15	8	40	45	10
4	20	25	18	9	45	50	6
5	25	30	23				
$n = 120$							

Պատճ. ա) Զի հակառում; $\bar{x}^* = 10,4$; $s^* = 13,67$; $k = 4$; $x^2_{q_{\mu_m}} = 5,4$; $x^2_{q_p}(0,05; 4) = 9,5$:

բ) Ցուցում: Առաջին երկու և վերջին երկու փոքրաթիվ հաճախությունները, լնչպես նաև համապատասխան միջակայքերը միավորել:

Պատճ. զի հակառում; $\bar{x}^* = 12,04$; $s^* = 4,261$; $k = 9 - 3 = 6$; $x^2_{q_{\mu_m}} = 1,3$; $x^2_{q_p}(0,05; 6) = 12,6$;

η) Հակասում ξ , $\bar{x}^* = 42,5$; $\sigma^* = 17,17$; $k = 5$; $x_{\eta, \mu}^2 = 14$;
 $x_{\eta, \mu}^2(0,05; 5) = 11,1$;

η) Զի հակասում, $\bar{x}^* = 27,54$; $\sigma^* = 10,44$; $k = 6$; $x_{\eta, \mu}^2 = 5,4$;
 $x_{\eta, \mu}^2(0,05; 6) = 12,6$;

§ 13. Գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզի գրաֆիկական ստուգումը: Ուղղված դիագրամների մեթոդը

Ա. Խմբավորված տվյալներ

Դիցուք X զի ավագուր համախմբության ընտրանքի էմպիրիկ բաշխումը տրված է $(x_0; x_1), (x_1; x_2), \dots, (x_{k-1}; x_k)$ միջակայքերի և նրանց համապատասխան ուժությունների ($u_1 \sim u_k$ չ-բղ միջակայքի ըոլոր տարբերակների բանակն է) հաջորդականության տեսքով։ Պահանջվում է զրաֆիկորեն ստուգել X զի ավագոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը։

Սահմանենք, նախապես, X պատահական մեծության ք-կվանտիլի հասկացությունը։ Եթե տված է թ հավանականությունը, ապա X -ի թ-կվանտիլ կոչվում է $F(x)$ ինտեղրալ ֆունկցիայի արգումենտի այնպիսի սր արժեքը, որի համար $x < u_p$ պատահույթի հավանականությունը հավասար է տրված թ վիճակին։

Օրինակ, եթե X -ը բաշխված է նորմալ և $\mu = 0,975$, ապա $u_p = 0,975 = 1,96$; Դա նշանակում է, որ $P(X < 1,96) = 0,975$ ։

Նկատենք, որ ընդհանուր և նորմալորված նորմալ բաշխում մուերի ինտեղրալ ֆունկցիաները կապված են հետեւյալ առնչությամբ*.

$$F(x) = F_0 \left(\frac{x - a}{\sigma} \right),$$

ուստի

$$F(x_p) = F_0 \left(\frac{x_p - a}{\sigma} \right),$$

և հետեւյալ,

$$u_p = \frac{x_p - a}{\sigma},$$

* Տես Գմурման Վ. Ե. Թեория вероятностей и математическая статистика. М., "Высшая школа", 1972, гл. XII, § 2, Замечание 2:

Կանոն 1: Միջակայքերի և նրանց հաճախությունների հաջորդականության տեսքով տփած էմպիրիկ բաշխումով X գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը գրաֆիկարեն ստուգելու համար անհրաժեշտ է՝

1. Կազմել հաշվարկային աղյուսակ 24-ը:

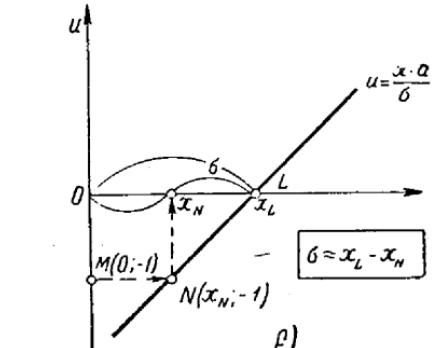
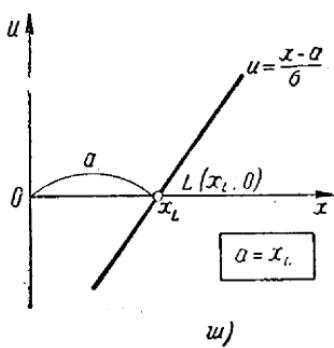
Կլանտիլները հարմար է գոնել հատուկ աղյուսակներից*

Աղյուսակ 24

1	2	3	4	5	6	7
$\sum_{i=1}^n f_i x_i$	$\sum_{i=1}^n f_i$	$\sum_{i=1}^n f_i x_i^2$	$\sum_{i=1}^n f_i x_i \bar{x}$	$\sum_{i=1}^n f_i x_i^2 - (\sum_{i=1}^n f_i x_i)^2 / n$	$\sum_{i=1}^n f_i x_i - n \bar{x}$	$\sum_{i=1}^n f_i x_i^2 - (\sum_{i=1}^n f_i x_i)^2 / n$
i	x_i	n_i	$\sum_{r=1}^i n_r$	$P_i = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^i n_r$	$P_i \cdot 100\%$	u_{pi}

Հաշվարկային աղյուսակի 6-րդ սյունակում հարաբերական կուտակված հաճախությունները բաղմապատկած են 100-ով, քանի որ Յանկոյի աղյուսակներում այդ հաճախությունները բերված են տոկոսներով:

2. Կոորդինատների ուղղանկյուն (x, u) համակարգում կառուցել (x_1, u_1) (x_2, u_2) ... կետերը (պարզության համար կվանտիլների մոտ ինձերս բաց է բացնված): Եթե այդ կետերը ընկած են որևէ ուղղի մոտերքում, ապա x -ի նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան, հակառակ դեպքում հիպոթեզը մերժվում է:



Նկ. 16

* *Տե՛ս* Ярослав Янко; Математико - статистические таблицы, Госстатиздат, 1961, таблица 2.

Դիտողը կ նկատի ունենալ, որ ռակղբնական և չվերջնականը (x_1, u_1) կետերը կարող են նկատելիորեն շեղել և $\frac{x-a}{\sigma}$ -ուղղից:

Դիտողը յություն 2: Եթե կառուցված կետերը դասավորված են ուղղի մոտերքում, ապա հեշտ է զբաֆիկորեն գնահատել նորմալ բաշխման ձևը և սպառամետրերը:

Որպես մաթեմատիկական սպասման գնահատական կարելի է ընդունել կառուցված ուղղի և Ox առանցքի հատման $L(x_L, 0)$ կետի արացիւթյունը:

Որպես միջին քառակուսային շեղման գնահատական կարելի է ընդունել $L(x_L, 0)$ և կառուցված ուղղի ու $= -1$ ուղղի հատման $N(x_N; -1)$ կետի արացիսների տարրերությունը՝ $x = x_L - x_N$ (նկ. 16):

Դիտողը չափանականային թղթի առկայության դեպքում կվանատիւները որոշելու կարիք չկատ չամապատասխան առանցքի վրա անմիջապես տեղադրվում են կուտակված հարաբերական հաճախաւմը յունները:

569. Ենթադրենք ուղղված դիագրամների մեջովը հաստատում է X գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխմածության մասին հիպոթեզը, այսինքն՝ (x_1, u_1) կետերը գտանական առաջնային ուղղի մոտերքում:

ա) Ինչու՞ որպես նորմալ բաշխման ձևաթեմատիկական սպասման գնահատական կարելի է ընդունել այդ աղղի և Ox առանցքի L հատման կետի x_L արացիսը (նկ. 16, ա):

բ) Ինչու՞ որպես նորմալ բաշխման միջին քառակուսային շեղման գնահատական կարելի է վերցնել $x_L - x_N$ արացիսների տարրերությանը (նկ. 16, բ):

Լուծում: ա) $\frac{x-a}{\sigma}$ աղղի և Ox առանցքի հատման L կետում $a=0$, իսկ արացիսը՝ $x=x_L$ (նկ. 16, ա):

Տեղադրելով այդ աղղի հավասարման մեջ $a=0$, $x=x_L$, կոտանանք՝

$$0 = \frac{x_L - a}{\sigma},$$

Ա. Խառեղից՝

$$a = x_L,$$

բ) Նշանակենք $N_{\text{ով}} = \frac{x - a}{\sigma}$ ուղղի այն կետը*, որի օրդինատը՝ $u = -1$, այդ կետի աբսցիսը նշանակենք x_N : Տեղադրենք N կետի կոորդինատները (^(*)) հավասարման մեջ՝

$$-1 = \frac{x_N - a}{\sigma},$$

Այսակադից $\sigma = a - x_N$: Հաշվի առնելով, որ $a = x_L$, վերջնականապես ստանում ենք $\sigma = x_L - x_N$:

570. X գլխավոր համախմբությունից վերցրած $n = 100$ ծավալի ընտրանքը տված է միևնույն երկարության միջակայքերի և համապատասխան ուժությունների (ՈՒՇ 1-րդ միջակայքի տարբերակների թիվն է) հաջորդականության տեսքով: Եմպիրիկ բաշխումը բերված է աղյուսակ 25-ում:

Պահանջվում է՝ ա) ուղղված դիագրամների մեթոդով ստագել զինավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը, բ) դրաֆիկորեն գնահատել X -ի մաթեմատիկական սպասումը և միջին քառակուսային շեղումը:

Լուծում: ա) 1. Կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 26-ը՝ 7-րդ սյունակի կվանտիլները բերված են թա. Յանկոլի գըրքում աղյուսակ 2-ում:

2. Աւղանկյուն կոորդինատային համակարգում՝ կառուցենք (x_i ; u_{pi}) կետերը (նկ. 17): Կառուցված կետերը ընկած են ուղղի մոտերքում, ուստի X -ի նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան: Այլ կերպ ասած, ընտրանքի տվյալները չեն հակասում այդ հիպոթեզին:

$\frac{U_{\text{ի}} \text{ըմկայիք}}{\text{համարը}}$	$\frac{U_{\text{ի}} \text{ըմկայիք}}{\text{սահմանները}}$	$\frac{\zeta_{\text{անդամություն}}}{\beta_{\text{յունը}}}$	$\frac{U_{\text{ի}} \text{ըմկայիք}}{\text{համարը}}$	$\frac{U_{\text{ի}} \text{ըմկայիք}}{\text{սահմանները}}$	$\frac{\zeta_{\text{անդամություն}}}{\beta_{\text{յունը}}}$		
i	x_{i-1}	x_{i+1}	n_i	i	x_{i-1}	x_{i+1}	n_i
1	1	3	2	7	13	15	16
2	3	5	4	8	15	17	11
3	5	7	6	9	17	19	7
4	7	9	10	10	19	21	5
5	9	11	18	11	21	23	1
6	11	13	20				$n=100$

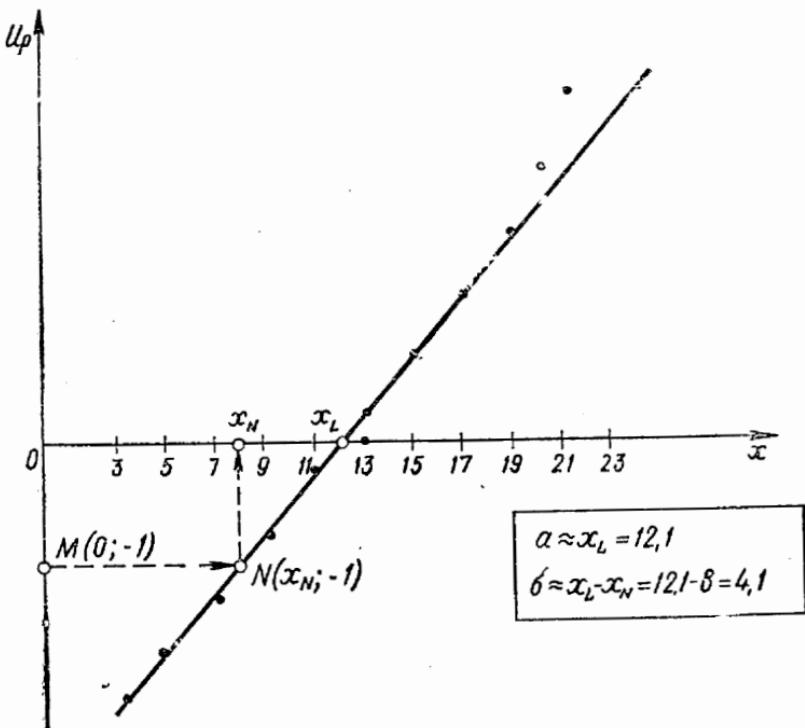
$\frac{U_{\text{ի}} \text{ըմկայիք}}{\text{համարը}}$	$\frac{U_{\text{ի}} \text{ըմկայիք}}{\text{աջածյալը}}$	$\frac{\zeta_{\text{անդամություն}}}{\beta_{\text{յունը}}}$	$\frac{U_{\text{ի}} \text{ըմկայիք}}{\text{կուտակված}}$	$\frac{\zeta_{\text{անդամություն}}}{\beta_{\text{յունը}}}$	$\frac{U_{\text{ի}} \text{ըմկայիք}}{\text{կանայիսությունը}}$	$\frac{\zeta_{\text{աբարելացան կուտակված}}{\beta_{\text{յունը}}}$	$\frac{\zeta_{\text{աբարելացան կուտակված}}{\beta_{\text{յունը}}}$	$\frac{n_i}{n}$
i	x_i	n_i	$\sum_{r=1}^i n_r$	$P_i = \frac{1}{n} \sum n_r$	$P_i \cdot 100\%$	Up_i		
1	3	2	2	0,02		2		-2,054
2	5	4	6	0,06		6		-1,555
3	7	6	12	0,12		12		-1,175
4	9	10	22	0,22		22		-0,772
5	11	18	40	0,40		40		-0,253
6	13	20	60	0,60		60		-0,253
7	15	16	76	0,76		76		-0,706
8	17	11	87	0,87		87		1,126
9	19	7	94	0,94		94		1,555
10	21	5	99	0,99		99		2,326
11	23	1	100	1,00		100		3,09

բ) Գտնել ենթագրվող նորմալ բաշխման մաթեմատիկական սպասման և միջին քառակուսային շեղման գրաֆիկական գնահատականները:

Որպես ա մաթեմատիկական սպասման գնահատական ընդունենք կառուցված ուղղի և Ox առանցքի հատման L կետի $x_L = 12,1$ աբսցիսը:

Գնահատել օ՞ն, որի համար ուղղաձիգ առանցքի $M(0; -1)$ կետից տանենք $u = -1$ ուղիղը, մինչեւ կառուցված ուղղի հետ N կետում հատվելը, N կետից ուղղահայաց իջեցնենք Ox առանցքին, այդ ուղղահայացի հիմքի աբսցիսը՝ $x_N = 8$: Որպես միջին քառակուսային շեղման գնահատական ընդունենք L և N կետերի աբսցիսների տարրերությունը՝

$$\sigma = x_L - x_N = 12,1 - 8 = 4,1:$$



նկ. 17

Հասկանալի է, որ ստացված գնահատականները կոպիտ են: Իրականում $a = 12,04$, $\sigma = 4,261$:

571. X գլխավոր համախմբությունից վերցված է $n=120$ ծավալի ընտրանք, որը տված է միենույն երկարության միջակայքերի և համապատասխան հաճախությունների հաշվորդականության տեսքով (աղ. 27):

Աղյուսակ 27

$\sum n_i$	$\sum x_i$	$\sum n_i x_i$	$\sum n_i^2$	$\sum n_i$	$\sum n_i$	$\sum n_i x_i$	$\sum n_i^2$
i	x_{i-1}	x_i	n_i	i	x_{i-1}	x_i	n_i
1	5	10	7	6	30	35	19
2	10	15	8	7	35	40	14
3	15	20	15	8	40	45	10
4	20	25	18	9	45	50	6
5	25	30	23				$\sum n_i = 120$

Պահանջվում է ա) տղղված դիագրամների մեթոդով ստոգել X-ի նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը, բ) գրաֆիկորեն գնահատել X-ի մաթեմատիկական սպասարկ և միջին քառակուսային շեղումը:

Ցուցում: Օգտվել կվանակելների հետեւալ աղյուսակից՝
հաբարերական
կուտակված
հաճախությունը, % 5,8 12,5 25,0 40,0 59,1 75,0 86,6 95 100
կվանակելները — 1,57 — 1,15 — 0,67 — 0,25 0,23 0,67 1,11 1,6 3,09

Պատ. ա) X-ի նորմալ բաշխվածության հիպոթեզը չի հակառակ ընտրանքին; բ) $a = 27,5$; $\sigma = 10,4$.

572. X գլխավոր համախմբությունից վերցված է $n=100$ ծավալի ընտրանք, որը տրված է աղյուսակ 28-ում:

Աղյուսակ 28

$\sum_{i=1}^n x_i$	$\sum_{i=1}^n x_i^2$	$\sum_{i=1}^n n_i$	$\sum_{i=1}^n x_i n_i$	$\sum_{i=1}^n x_i^2 n_i$	$\sum_{i=1}^n n_i$	$\sum_{i=1}^n x_i^2 n_i$	
i	x_{i-1}	x_i	n_i	i	x_{i-1}	x_i	n_i
1	6	16	8	5	46	56	35
2	16	26	16	6	56	66	6
3	26	36	7	7	66	76	5
4	36	46	15	8	76	86	8
							$n=100$

Պահանջվում է ուղղված գիտադրամների մեթոդով ստուգել X նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը:

Ցուցում: Օգտվել կվանտիլների հետևյալ աղյուսակից.
հարաբերական
կուտակված
հաճախությունը, % 8 24 31 46 81 87 92 100
Կվանտիլները—1,405—0,706—0,496—0,100—0,878—1,126—1,405; 3,09

Պատ.՝ X նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը հակասում է ընտրանքին:

Բ. ըստ միջակայքերի չխմբավորված տվյալներ

Դիցուք ընտրանքի էմպիրիկ բաշխումը տրված է աճման կարգով զամայորված տարբերակների և համապատասխան ու հաճախությունների հաջորդականության տեսքով, այսինքն վարիացիոն շարքի տեսքով: Պահանջվում է ստուգել X-ի նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը:

Կանոն 2. X գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը ստուգելու համար, եթե նրանից վերցրած ո ծափակի ընտրանքը բար միջակայքերի խմբավորված չէ, անհրաժեշտ է՝

1. Կազմել նաշխարհային աղյուսակ 29.ը: Նշենք անմիջապես, որ 4-րդ սյունակը լրացնելիս լինունված է հաճախուրյունների գումարից հաճել 1/2: 7-րդ սյունակը լրացնելիս կվանտիլների արժեքները որոշում են աղյուսակից*:

Աղյուսակ 29

1	2	3	4	5	6	7
Տարբերակի համարը	Տարբերակի համարը	Հուսակված հաճախուր թյունը	Կուտակված հաճախուր թյունը	Հարաբերա- կան կու- տակված հաճախուր թյունը	Հարաբերա- կան կու- տակված հաճախուր թյունը %	Երկանությունը
i	x _i	n _i	N _i = $\sum_{r=1}^i n_r - \frac{1}{2} F^*(x_i) = \frac{N_i}{n}$	P _i =F^*(x _i)·100	up _i	

2. Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում կառուցել ($x_1; u_1$, $(x_2; u_2)$, ..., $(x_k; u_k)$ կետերը (4.ի մոտ թիվերսը բաց է բողնված գրուրյան սրաբուրյան համար): Եթե այդ կետերը դասավորված են մի որեւէ ուղղի մուտքում (X -ի եռմալ բաշխվածուրյան մասին նիպորեկի իրավացիուրյան դեպքում այդ ուղղի հավասարումը $\frac{x-x_c}{s_x} = \frac{u-u_c}{s_u}$), ապա X զիսավոր համախմբուրյան եռմալ բաշխվա։ ծուրյան մասին հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան, հակառակ դեպքում հիպոթեզը մերժվում է։

Դիտու դությունն 4: Բայս ինտերվալների խմբավորված ընտրանքի վերը զիտարկված դեպքի 1-3 զիտարկությունները մնում են ուժի մեջ։

573. X գլխավոր համախմբությունից վերցված է $n=50$ ծավալի, բայս միջակացքերի չխմբավորված ընտրանք (առաջին առգում տարբերակներն են, իսկ երկրորդում՝ համապատասխան հաճախությունները):

* Տես. Ярослав Янко. Математико-статистические таблицы Госстатиздат, 1961, таб. 2.

x_i	1,40	1,52	1,63	1,69	1,73	1,78	1,89	1,92	1,95
n_i	1	1	1	1	2	1	1	1	1
x_i	1,98	1,99	2,03	2,07	2,12	2,16	2,20	2,23	2,26
n_i	1	1	2	1	3	2	1	1	3
x_i	2,36	2,40	2,44	2,47	2,50	2,52	2,55	2,60	2,64
n_i	3	3	1	1	1	1	1	1	3
x_i	2,71	2,74	2,78	2,86	2,93	3,02	3,30		
n_i	1	1	2	1	2	1	1		

Պահանջվում է՝ ա) ուղղված դիագրամների մեթոդով ստուգել X մեծության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը, գրաֆիկորեն գնահատել X -ի մաթեմատիկական սպասումը և միջին քառակուսային շեղումը:

Լուծում: 1. Կազմենք հաշվարկային աղյուսակ՝ 30-ը:

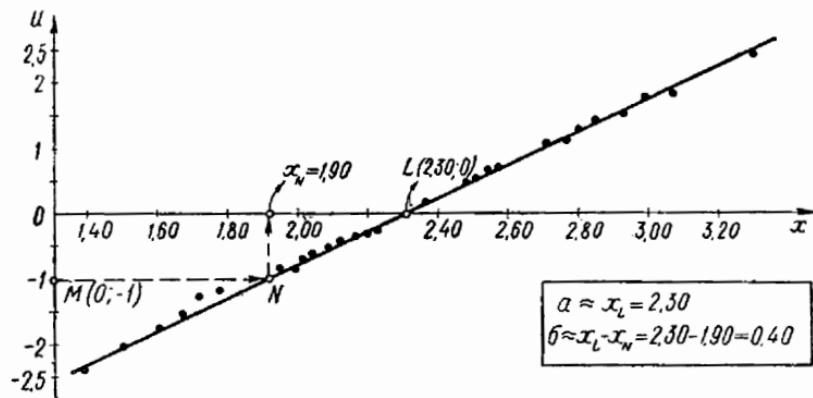
Աղյուսակ 30

1	2	3	4	5	6	7
Տարրեր համարը	Տարրեր համարը	Հուտակաց թյունը %	Կուտակված հաճախու- թյունը հա- նած $1/2$	Հարաբերա- կան կուտակ- ված հաճա- խությունը	Հարաբերա- կան կուտ- ակված հաճախու- թյունը %	Հարաբերա- կան կուտ- ակված հաճախու- թյունը %
i	x_i	n_i	$N_i = \sum_{r=1}^i n_r - \frac{1}{2}$	$F^*(x_i) = \frac{N_i}{n}$	$P_i = F^*(x_i) 100$	u_{pi}
1	1,40	1	0,5	0,01	1	-2,326
2	1,52	1	1,5	0,03	3	-1,881
3	1,63	1	2,5	0,05	5	-1,645
4	1,69	1	3,5	0,07	7	-1,476
5-6	1,73	2	5,5	0,11	11	-1,227
7	1,78	1	6,5	0,13	13	-1,126
8	1,89	1	7,5	0,15	15	-1,036

1	2	3	4	5	6	7
9	1,92	1	8,5	0,17	17	-0,954
10	1,95	1	9,5	0,19	19	-0,878
11	1,98	1	10,5	0,21	21	-0,806
12	1,99	1	11,5	0,23	23	-0,739
13—14	2,03	2	13,5	0,27	27	-0,613
15	2,07	1	14,5	0,29	29	-0,553
16—18	2,12	3	17,5	0,35	35	-0,385
19—20	2,16	2	19,5	0,39	39	-0,279
21	2,20	1	20,5	0,41	41	-0,228
22	2,23	1	21,5	0,43	43	-0,176
23	2,26	1	22,5	0,45	45	-0,126
24—26	2,31	3	25,5	0,51	51	0,025
27—29	2,36	3	28,5	0,57	57	0,176
30—32	2,40	3	31,5	0,63	63	0,332
33	2,44	1	32,5	0,65	65	0,385
34	2,47	1	33,5	0,67	67	0,440
35	2,50	1	34,5	0,69	69	0,496
36	2,52	1	35,5	0,71	71	0,553
37	2,55	1	36,5	0,73	73	0,613
38	2,60	1	37,5	0,75	75	0,674
39—41	2,64	3	40,5	0,81	81	0,878
42	2,71	1	41,5	0,83	83	0,954
43	2,74	1	42,5	0,85	85	1,036
44—55	2,78	2	44,5	0,89	89	1,227
46	2,86	1	45,5	0,91	91	1,341
47—48	2,93	2	47,5	0,95	95	1,645
49	3,02	1	48,5	0,97	97	1,881
50	3,30	1	49,5	0,99	99	2,326

2. Աւզանկյուն կոորդինատային համակարգում կառուցենք (x_i, u_i) կետերը (նկ. 18): Կառացված կետերը պատճենաբաժնի մունիքում, ուստի X -ի նորմալ բաշխված

ծության մասին հիպոթեզի մերժման հիմքեր չկան, ընտրանքի տվյալները չեն հակառակ այդ հիպոթեզին:



նկ. 18

բ) Գրաֆիկորեն, օգտվելով նկ. 18-ից, գտնենք ենթադրվող նորմալ բաշխման մաթեմատիկական սպասման և միջին քառակուսալին շեղման գնահատականները:

Որպես ա մաթեմատիկական սպասման գնահատական ընդունենք կառուցված ուղղի և Ox առանցքի հատման L կետի $x_L = 2.30$ աբսցիսը:

Դնահատենք օճակ: Դրա համար ուղղաձիգ առանցքի $M(0; -1)$ կետից տանենք $u = -1$ ուղիղը մինչև կառուցված ուղիղ գծի հետ N կետում հատվելը, N կետից իշեցնենք ուղղահայաց Ox առանցքին: Այդ ուղղահայացի հիմքի x_N աբսցիսը հավասար է 1.90 -ի: Որպես ս միջին քառակուսալին շեղման գնահատական ընդունենք $x_L - x_N$ աբսցիսների տարբերությունը՝

$$\sigma = x_L - x_N = 2.30 - 1.90 = 0.40,$$

574. X գլխավոր համախմբությունից վերցված ξ $n = 50$ ծավալի ընտրանք: Կազմված են հետեւյալ աղյուսակները ($առաջին$ տողում բերված են տարբերակները, իսկ երկրորդում՝ համապատասխան հաճախականությունները):

$$x_i = 20,0 \quad -17,0 \quad -14,1 \quad -11,5 \quad -10,5$$

$$n_i \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

$$\frac{x_i}{n_i} = \frac{-9,0}{1} \quad \frac{-8,0}{1} \quad \frac{-6,5}{1} \quad \frac{-5,5}{1};$$

$$x_i = \frac{-4,0}{1} \quad \frac{-3,0}{1} \quad \frac{-1,5}{1} \quad \frac{-1,0}{1} \quad \frac{0,0}{1} \quad \frac{0,5}{2};$$

$$\frac{x_i}{n_i} = \frac{1,0}{1} \quad \frac{1,5}{1} \quad \frac{2,0}{2} \quad \frac{2,5}{1} \quad \frac{3,5}{1} \quad \frac{4,0}{2} \quad \frac{4,5}{1};$$

$$x_i = \frac{5,0}{2} \quad \frac{6,0}{1} \quad \frac{6,5}{1} \quad \frac{7,0}{2} \quad \frac{7,5}{2} \quad \frac{8,5}{2} \quad \frac{9,5}{1} \quad \frac{10,0}{1} \quad \frac{10,5}{1} \quad \frac{11,0}{1} \quad \frac{12,0}{1} \quad \frac{12,5}{1};$$

$$x_i = \frac{13,0}{1} \quad \frac{14,0}{1} \quad \frac{14,5}{1} \quad \frac{17,0}{1} \quad \frac{18,0}{1} \quad \frac{19,0}{1} \quad \frac{19,5}{1} \quad \frac{21,0}{1} \quad \frac{23,5}{1};$$

Պահանջվում է՝ ա) ուղղված գիտքրամների մեթոդով ստուգել գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզը, բ) զրաֆիկորեն գնահատել X-ի մաթեմատիկական սպասումը և զիսպերսիման:

Յու ցում: Օգտվել կվանտիլների հետեւ աղյուսակից (առաջին տաղաւոր բերված են հարաբերական հաճախությունները հանած 1,2%-ներով, իսկ երկրորդում համապատասխան կվանտիլները):

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 13 \quad 15 \\ -2,326 \quad -1,881 \quad -1,645 \quad -1,476 \quad -1,341 \quad -1,227 \quad -1,126 \quad -1,036$$

$$17 \quad 19 \quad 21 \quad 23 \quad 25 \quad 27 \quad 31 \quad 33 \\ -0,954 \quad -0,878 \quad -0,806 \quad -0,739 \quad -0,674 \quad -0,613 \quad -0,496 \quad -0,440$$

$$35 \quad 39 \quad 41 \quad 43 \quad 47 \quad 49 \quad 53 \quad 55 \\ -0,385 \quad -0,279 \quad -0,228 \quad -0,176 \quad -0,075 \quad -0,025 \quad 0,075 \quad 0,126$$

$$57 \quad 61 \quad 65 \quad 69 \quad 71 \quad 73 \quad 75 \quad 77 \quad 79 \\ 0,176 \quad 0,279 \quad 0,385 \quad 0,496 \quad 0,553 \quad 0,613 \quad 0,674 \quad 0,739 \quad 0,806$$

$$81 \quad 83 \quad 85 \quad 87 \quad 89 \quad 91 \quad 93 \quad 95 \quad 97 \quad 99 \\ 0,878 \quad 0,954 \quad 1,036 \quad 1,126 \quad 1,227 \quad 1,341 \quad 1,476 \quad 1,645 \quad 1,881 \quad 2,326$$

Պատ., ա) X զիմավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մոոին հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան, բ) $\alpha = 4,16$, $\beta = 9,8$:

§ 14. Գլխավոր համախմբության ցուցչային բաշխ- վածության մասին հիպոթեզի ստուգումը

Տրված է X անընդհատ պատահական մեծության էմպիրիկ բաշխումը (x_i, x_{i+1}) միջակայքերի և համապատասխան π_i հաճախությունների հաջորդականության տեսքով, ընդողում $\Sigma \pi_i = n$ (ընտրանքի ժամանակավայրը)։

Պահանջվում է, օգտագործելով Պիրսոնի չափանիշը, ստուգել հիպոթեզը այն մասին, որ X պատահական մեծությունն ունի ցուցչային բաշխում։

Կանոն: ա Եշանակալիուրյան մակարդակով, անընդհատ պատահական մեծության ցուցչային օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը ստուգելու համար, անհրաժեշտ է՝

1. Տրված էմպիրիկ բաշխումով գտնել \bar{x}_c ընտրանքային միջինը։ Դրա համար, որպես i -րդ միջակայքի «Ենրկայացուցիչ» ընդունելով նրա միջնակետը՝ $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, որոնք կազմում են հավասարանեռ տարբերակների և համապատասխան հանախուրյունների հաջորդականուրյուն։

2. Որպես ցուցչային բաշխման λ պարամետրի գնահատական, ընդունել ընտրանքային միջինի հակադարձ մեծուրյունը՝

$$\lambda^* = \frac{1}{\bar{x}_c} :$$

3. Հաշվել պատահական մեծուրյան (x_i, x_{i+1}) միջակայքն ընկնելու հավանականուրյունը հետևյալ բանաձևով՝

$$P_i = P_i(x_i < X < x_{i+1}) = e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}} ,$$

4. Հաշվել տեսական հանախուրյունները՝

$$\pi_i' = n P_i ,$$

որտեղ $n = \Sigma \pi_i$ ընտրանքի ծավալն է։

5. Պիրսոնի չափանիշի օգնուրյամբ համեմատել տեսական և էմպիրիկ հանախուրյունները, ընդունելով որպես ազատուրյան աստիճան $k = s - 2$ մեծուրյունը, որտեղ s -ը ընտրանքի միջակայքերի սկզբնակ անքիցն է: Խսկ եթե իրականացված է փորբարիկ հանախուրյունների, հետևիքար, և համապատասխան միջակայքերի միավորում, ապա s -ը միավորումից հետո մնացած միջակայքերի թիվն է:

575. Ինչու՞ Պիրսոնի չափանիշով գլխավոր համախմբության ցացչային օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը ստուգելիս ազատության աստիճանը որոշվում է $k = s - 2$ բանաձևով, որտեղ s -ը ընտրանքի միջակաքերի թիվն է:

Լուծում: Պիրսոնի չափանիշը օգտագործելիս ազատության աստիճանը՝ $k = s - 1 - r$, որտեղ r -ը ընտրանքի տրվածներով գնահատված պարամետրերի թիվն է: Ցացչային բաշխումը որոշվում է m_k (i) պարամետրով: Քանի որ այդ պարամետրը գնահատվում է ընտրանքով, ապա $r = 1$ և, հետեւաբար, ազատության աստիճանը՝

$$k = s - 1 - 1 = s - 2:$$

576. Աղյուսակ 31-ում բերված է մաթիրիկ բաշխումը ստացվել է 200 արբերի անխափան աշխատանքի ժամանակամիջոցի փորձնական որոշման արդյունքում (առաջին սյունակում բերված են ժամանակի միջակայքերը ժամերով, երկրորդամ՝ հաճախությունները, այսինքն նշված միջակայքի սահմաններում անխափան աշխատանքած տարրերի թիվը):

Աղյուսակ 31

$x_i \rightarrow x_{i+1}$	n_i	$x_i \rightarrow x_{i+1}$	n_i
0—5	133	15—20	4
5—10	45	20—25	2
10—15	15	25—30	1

Պահանջվում է, $0,05$ նշանակալիության մտկարգակայի, ստուգել անխափան աշխատանքի ժամանակամիջոցի ցացչային օրենքով բաշխվածության մտայն հիպոթեզը:

Լուծում: 1. Գանենք բալոր տարրերի անխափան աշխատանքի միջին ժամանակը (որպես տարրի աշխատանքի միջին ժամանակ ընդունենք այն միջակայքի միջնակետը, որին պատկանում է այդ տարրը)

$$\bar{x}_c = \frac{133 \cdot 2,5 + 45 \cdot 7,5 + 15 \cdot 12,5 + 4 \cdot 17,5 + 2 \cdot 22,5 + 1 \cdot 27,5}{200} = \\ = \frac{1000}{200} = 5,$$

2. Գտնենք ենթադրվող ցուցչային բաշխման պարամետրը՝

$$\lambda = \frac{1}{\bar{x}_c} = \frac{1}{5} = 0,2,$$

Այսպիսով, ենթադրվող ցուցչային բաշխման գիֆերենցիալ ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(x) = 0,2e^{-0,2x}, \quad (x > 0);$$

3. Գտնենք միջակայքերից լուրաքանչյուրում X-ի ընկնելու հավանականությունը հետևյալ բանաձևով՝

$$P_i = P(X_i < X < X_{i+1}) = e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}},$$

Օրինակ, առաջին միջակայքի համար

$$P_1 = P(0 < X < 5) = e^{-0,2 \cdot 0} - e^{-0,2 \cdot 5} = 1 - e^{-1} = \\ = 1 - 0,3679 = 0,6321;$$

Նման ձևով հաշվում ենք X-ի մյուս միջակայքերը ընկելու հավանականությունները՝

$$P_2 = 0,2326; \quad P_3 = 0,0855; \quad P_4 = 0,0315; \quad P_5 = 0,0116;$$

$$P_0 = 0,0043;$$

Գտնենք տեսական հաճախությունները՝

$$n'_i = n P_i = 200 P_i,$$

որտեղ P_i -ն X-ի i-րդ միջակայքը ընկնելու հավանականությունն է։

Օրինակ, առաջին միջակայքի համար

$$n'_i = 200 \cdot P_i = 200 \cdot 0,631 = 126,42;$$

Նման ձեռվ հաշվում ենք մնացած տեսական հաճախությունները՝

$$\begin{aligned} n'_2 &= 46,52; \quad n'_3 = 17,10; \quad n'_4 = 6,30; \quad n'_5 = 2,32; \\ n'_6 &= 0,86. \end{aligned}$$

5. Պիրսոնի չափանիշի օգնությամբ համեմատենք աեւսական և էմպիրիկ հաճախությունները: Դրա համար կազմենք հաշվարկացին աղյուսակ 32-ը, ընդ որում միավորում ենք փոքրաթիվ հաճախությունները ($4+2+1=7$) և նրանց համապատասխան տեսական հաճախությունները ($6,30 + 2,32 + 0,86 = 9,48$):

Աղյուսակ 32

i	n	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	133	126,42	6,58	43,2964	0,3425
2	45	46,52	-1,52	2,3104	0,0497
3	15	17,10	-2,10	4,4100	0,2579
4	7	9,48	-2,48	6,1504	0,6488
Σ	$n=200$				$\chi^2_{\text{փակ}} = 1,30$

Գիտություն Փյունի Փոքրաթիվ հաճախությունների միավորման զերքում, հաշվումների պարզեցման համար, նպատակահարմար է միավորել նաև համապատասխան միջակայքերը: Այսպես, զիտարկվող խնդրում միավորելով զիրջին երեք միջակայքերը, ստանում ենք մեկ միջակայք՝ (15, 30): Այս զերքում տեսական հաճախությունը՝

$$n' = nP(15 < X < 30) = 200 \cdot 0,0473 = 9,46:$$

Աղյուսակում, սակայն, բերված է զիրջին երեք միջակայքերի գումարային 9,48 հաճախությունը: Արդյունքների անհաման տարբերությունը բացառված է թվերի կորացումով:

Աղյուսակ 32-ից գտնում ենք՝ $\chi^2_{\text{q}, \text{f}, \text{m}} = 1,30$; χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հավելված 5), $\alpha = 0,05$ նշանակալիության մակարդակով, և $k = s - 2 = 4 - 2 = 2$ ազատության ասախճանով գտնում ենք աջակողմյան կրիտիկական տիրույթի $\chi^2_{\text{q}, \text{r}}(0.05, 2) = 6,0$ կրիակական կետը:

Քանի որ $\chi^2_{\text{q}, \text{f}, \text{m}} < \chi^2_{\text{q}, \text{r}}$, ապա X -ի ցուցային բաշխմածության մասին հիպոթեզի մերժման համար հիմքեր չկան: Այլ կերպ ասած, դիտման ավյալները չեն հակասում այդ հիպոթեզին:

577. 450 լամպերի փորձարկման արդյունքում ստացվել է նրանց այրման ժամանակամիջոցի էմպիրիկ բաշխմը՝ որը բերված է աղյուսակ 33-ում (առաջին սյունակում նշված են միջակայքերը ժամերով, երկրորդում՝ հաճախությունները, այսինքն այն լամպերի թիվը, որոնց այրման ժամանակամիջոցը ընկած է ավյալ միջակայքում):

Աղյուսակ 33

$x_i - x_{i+1}$	n_i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
0—400	121	1600—2000	45
400—800	95	2000—2400	36
800—1200	76	2400—2800	21
1200—1600	56		$\overline{n} = 450$

Պահանջվում է, $0,01$ նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել լամպի այրման ժամանակի ցուցային օրենքով բաշխմածության մասին հիպոթեզը:

Պատ. $k = 5$; $\overline{x}_r = 1000$; $\lambda = 0,001$; տեսական հաճախությունները՝ 148, 36; 99, 45; 66, 64; 44, 68; 29, 97; 20, 07; 13, 46; $\chi^2_{\text{q}, \text{f}, \text{m}} = 36,43$; $\chi^2_{\text{q}, \text{r}}(0,01; 5) = 15,1$: Ցուցային բաշխմածության մասին հիպոթեզը մերժվում է:

578. 1000 աարբերի փորձարկման արդյունքում ստացվել է նրանց անխափան աշխատանքի էմպիրիկ բաշխումը, որը բերված է աղյուսակ 34-ում (առաջին սյունակում նշված են ժամանակի միջակայքերը ժամերով,՝ երկրորդում՝ ու հաճախությունները, այսինքն ի-րդ միջակայքում իւափանիված տարբերի թիվը):

Աղյուսակ 34

$x_i - x_{i+1}$	n_i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
0—10	365	40—50	70
10—20	245	50—60	45
20—30	150	60—70	25
30—40	100		<u>$n=1000$</u>

Պահանջվում է, 0,01 նշանակալիության մակարդակով, ստագել աարբերի անխափան աշխատանքի ժամանակի ցուցային օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը:

Պատ.³ $k = 5$; $\bar{x}_e = 20$; $\lambda = 0,05$; աեսական հաճախությունները՝ 393,47; 238,65; 144,75; 87,79; 53,26; 39,29; 19,59; $\frac{\gamma^2}{\eta^2_{\text{փառ}}} = 11,10$; $\frac{\gamma^2}{\eta^2_{\text{հեռ}}} (0,01; 5) = 15,1$. Տարբերի աշխատանքի ժամանակի ցուցային բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան:

579. 800 այցելուների ցուցահանդես գալու ժամանակի դրանցման (որպես ժամանակի հաշվման ոկիոզը ընդունված է ցուցահանդեսի աշխատանքի սկզբնական մոմենտը) արդյունքում ստացվել է աղյուսակ 35-ում բերված էմպիրիկ բաշխումը (առաջին սյունակում բիբլիական ժամանակի միջակայքերը, երկրորդում՝ հաճախությունները, այսինքն համապատասխան ժամանակի միջակայքում հղած այցելուների թիվը):

$x_i - x_{i+1}$	n_i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
0—1	259	4—5	60
1—2	167	5—6	47
2—3	109	6—7	40
3—4	74	7—8	34
			$\sum n = 800$

Պահանջվում է, $0,01$ նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել այցելուների ցուցահանդես գալու ժամանակի ցուցչային օբենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը:

Պատ.՝ $k = 6$, $\bar{x}_p = 2,5$, $\lambda = 0,4$; տեսական հաճախությունները $191, 76; 176, 80, 118, 48; 79, 44; 53, 28; 35, 68; 23, 92; 16, 00$; $\chi^2_{\text{թթ}} = 65,1$; $\chi^2_{\text{զր}} (0,01, 6) = 16,8$; Ցուցչային օբենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժվում է:

§ 15. Գլխավոր համախմբության բինոմական օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզի ստուգումը

Կատարված է ու փորձ: Յուրաքանչյուր փորձ կաղմված է N անկախ փորձարկումներից, որոնցից յուրաքանչյուրում A պատահույթի տեղի ունենալու հավանականությունը միևնույնն է: Գրանցվում է A պատահույթի երեալու թիվը փորձերից յուրաքանչյուրում: Արդյունքում ստացվել է A պատահույթի երեալու X (q իսկը պատահական մեծության) թիվի հետեւյալ բաշխումը (առաջին տողում բերված է պատահույթի երեսումների x_i թիվը մեկ փորձում, երկրորդում՝ ու հաճախությունը, այսինքն այն փորձերի թիվը, որոնցում գրանցվել է A պատահույթի x_i անդամ հանդես գալը

$$\begin{array}{cccccc} x_i & 0 & 1 & 2 & \dots & N \\ n_i & n_0 & n_1 & n_2 & \dots & n_N \end{array}$$

Պահանջվում է օգտվելով՝ Պիբոսնի չափանիշեց, ստուգել Խ զիս-դրեա պատահական մեծության բինոմական օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը:

Կ առողջ է նշանակալիության մակարդակով, Խ դիսկրետ պատահական մեծության (Ա պատահույթի հանդես գալու բիվը) բինոմական օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը սուզելու համար անհրաժեշտ է՝

1. Բեռնուլիի բանաձևով հաշվել N փորձարկումներում A պատահույթի և անգամ հանդես գալու P_i հավանականությունը ($i=0, 1, 2, \dots, s$, որտեղ s -ը մեկ փորձում A պատահույթի երեսմների դիտված ամենամեծ բիվն է, նետեաբար $s \leq N$):

2. Գանել տեսական հաճախությունները՝

$$n'_i = n \cdot P_i$$

որտեղ n -ը փորձերի բիվն է:

3. Պիբոսնի չափանիշով համեմատել տեսական և էմպիրիկ հանայությունները, ընդունելով, որ ազատության աստիճանը՝ $k=s$ (Եվրադրվում է, որ A պատահույթի հանդես գալու ը հավանականությունը տված է, այսինքն բնորանքով չի զնանալի, և չի կատարվել փոքրարիկ հանախությունների միավորում):

Խոկ երե ը հավանականությունը զնանալի է: բնորանքով, տայ կ $=s-1$: Երե, բացի այդ, իրականացվել է փոքրարիկ հանախությունների միավորում, տայ ս-ը բնորանքի այն խմբերի բիվն է, որոնք մնացել են միավորումից հետո:

580. Կառարված է $n=100$ փորձ, յորաքանչյուր փորձիազմիած է $N=10$ փորձարկումներից, որոնցից յորաքանչյուրում Λ պատահույթի հավանականությանը համապատասխան է $0,3-ի$: Արդյանքում ստացվել է հետևյալ էմպիրիկ բաշխությունը (տառաջին անգամ բերված են Λ պատահույթի երեալու x_i թիվը մեկ փորձում, երկրորդում՝ n_i հաճախությանը, այսինքն՝ n_i այն փորձերի թիվը, որոնցում Λ պատահույթը իրականացվել է x_i անգամ):

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	2	10	27	32	23	6

Պահանջված է, $0,05$ նշանակալիաթյան մակարդակով, ստուգել X պատահական մեծության (Λ պատահույթի երեա-

լու $\left(\theta_{\text{իլը}}\right)$ բինոմական օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը.

Լուծում: 1. Բեռնուլիի

$$P_i = P_N^{(i)} = C_N^{(i)} p^i q^{N-i}$$

բանաձեխց որոշենք A պատահայթի $N=10$ փորձարկումներում ճիշտ և անգամ աեղի ունենալու P_i ($i=0,1,2,3,4,5$) հավանականությունը:

$\zeta_{\text{աշվի}} \text{առնելով, որ } p=0,3, q=1-0,3=0,7, \text{կստանանք՝}$

$$P_0 = P_{10}(0) = 0,7^{10} = 0,0282;$$

$$P_1 = P_{10}(1) = 10 \cdot 0,3 \cdot 0,7^9 = 0,1211;$$

$$\text{Նման ձեռք ստանում ենք՝ } P_2 = 0,2335; P_3 = 0,2668;$$

$$P_4 = 0,2001; P_5 = 0,1029;$$

2. Գտնենք տեսական հաճախությունները՝

$$n'_i = n \cdot P_i;$$

$\zeta_{\text{աշվի}} \text{առնելով, որ } n=100 \text{ կստանանք՝}$

$$n'_0 = 2,82, n'_1 = 12,11; n'_2 = 23,35; n'_3 = 26,68; n'_4 = 20,01;$$

$$n'_5 = 10,29;$$

3. $\zeta_{\text{ամեմատենք}} \xi_{\text{մպիրիկ}} \text{ և տեսական հաճախությունները դիրքոնի չափանիշի օգնությամբ: Դրա համար կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 36-ը:}$

Քանի որ $n_0 = 2$ հաճախությունը փոքրաթիվէ (փոքրէ ծից), միավորենք այն $n_1 = 10$ հաճախության հետ և աղյուսակում գրենք $2 + 10 = 12$, որպես համապատասխան տեսական հաճախություն գրենք տեսական $n_0 + n_1 = 2,82 + 12,11 = 14,93$ հաճախությունների գումարը:

Աղյուսակ 36-ից ստանում ենք $\chi^2_{\text{դիս}} = 4,44$,

i	n _i	n' _i	n _i - n' _i	(n _i - n' _i) ²	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	12	14,93	-2,93	8,5849	0,5750
2	27	23,35	3,65	13,3225	0,5706
3	32	26,68	5,32	28,3024	1,0608
4	23	20,01	2,99	8,9401	0,4468
5	6	10,29	-4,29	18,4041	1,7886
Σ	n=100				$\frac{\chi^2}{q_{\text{кр}}^2} = 4,44$

χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից, $\alpha = 0,05$ նշանակալիության մակարդակով, և $k = 5 - 1 = 4$ ազատության աստիճանով գտնում ենք աջակողմյան կրիտիկական ակրութիւն $\chi^2_{\text{кр}}(0,05; 4) = 9,5$ կրիտիկական կետը:

Քանի որ $\frac{\chi^2}{q_{\text{кр}}^2} < \chi^2_{\text{кр}}$, ապա X -ի բինոմական բաշխություն մասին հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան:

581. Փորձը կայանում է նրանում, որ միաժամանակ նետում ենք 4 մեազագրամներ, այն կրկնված է 100 անգամ: Եթեցող «գերբերի» թվի (X զիսկը ապառանական մեծության) էմպիրիկ բաշխումն անի հետեւալ ահսքը (սուսչին տողամ նշված է մեկ նետաման ժամանակ երեցող «գերբերի» X թիվը, երկրարգամ՝ Ո₁ հաճախությունը, այսինքն այն նետամների թիվը, որոնց ժամանակ երեցել են X «գերբեր»):

x _i	0	1	2	3	4
n _i	8	20	42	22	8

Պահանջված է, $0,05$ նշանակալիության մակարդակի գեպքում, սատգել հիպոթեզը այն մասին, որ X -ը բաշխում է ըստ բինոմական օրինքի:

Յու ցում: «Գերբը» երեալու ք հավանականությունն ընդունել հավասար 0,5:

Պատ.՝ $k = 4$; տեսական հաճախությունները՝ 6,25; 25,00; 37,50; 25,00; 6,25; $\chi^2_{\text{q}, \text{b}} = 2,88$; $\chi^2_{\text{q}, \text{r}} (0,05; 4) = 9,5$: Բինոմական օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան:

582. Տեխնիկական վերահսկողության բաժինը ստուգեց արտադրանքի $n = 100$ խմբաքանակներ, յարաքանչյուրում $N = 10$ միավոր արտադրանք և ստացավ ոչ միօրինակ արտադրանքի X դիմումներ պատահական մեծության հետևյալ էմպիրիկ բաշխումը (առաջին տողում բերված է ոչ միօրինակ միավորների X_i թիվը մեկ խմբաքանակում, երկրորդում՝ n_i հաճախությունը, այսինքն այն խմբաքանակների թիվը, որոնք պարունակում են X_i ոչ միօրինակ միավորներ):

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	2	3	10	22	26	20	12	5

Պահանջվում է, նշանակալիության $0,01$ մակարդակով, ստուգել պատահական մեծության բինոմական օրենքով բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը:

Յու ցումներ: 1. Սկզբից գտնել միավոր արտադրանքի ոչ միօրինակ լինելու հարաբերական հաճախությունը և ընդունել այն որպես այն բանի p^* հավանականության գնահատական, որ պատահականորեն վերցրած միավոր արտադրանքը կլինի ոչ միօրինակ:

2. Պիրսոնի հայտանիշով էմպիրիկ և տեսական հաճախությունները համեմատելու համար հաշվարկային աղյուսակ կազմելիս անհրաժեշտ է միավորել էմպիրիկ հաճախությունները ($2+3=5$) և նրանց համապատասխան տեսական հաճախությունները ($0,60+4,03=4,63$): Հաշվի առնել, որ միավորումից հետո ընտրանքի խմբերի թիվը՝ $s=7$:

3. Մեկ պարամետրը (p հավանականությունը) գնահատվել է ընտրանքի տվյալներով, ուստի աղյուսակ ասակճանը որոշելիս s -ից պետք է հանել ոչ β եւ 1, այլ 2 ՝ $s=7-2=5$:

Պատ.՝ $p^*=0,4$, $k=5$, տեսական հաճախությունները՝ 0,60; 4,03; 12,09; 21,50; 25,08; 20,07; 11,15; 4,25; $\chi^2_{\text{q}, \text{b}} = 0,63$; $\chi^2_{\text{q}, \text{r}} (0,01; 5) = 4,02$

=15,1: X-ի բինոմական օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը
մերժելու հիմքեր չկան:

583. Գրադարանում պատահականորեն վերցված է 200 ընտրանք, յուրաքանչյուրում 5 գիրք: Գրանցվել է վնասաված գրքերի թիվը (ընդգծումներ, կեղառուվածություն և այլն): Արդյունքում ստացվել է հետեւյալ էմպիրիկ բաշխումը (առաջին առղում նշված է մեկ ընտրանքում վնասաված գրքերի Տիվը, երկրորդում՝ ու հաճախությունը, այսինքն Տիվը վնասաված գիրք պարանակող ընտրանքների քանակը):

X _i	0	1	2	3	4	5
n _i	72	77	34	14	2	1

Պահանջվում է, օգտագործելով Պիրոսնի չափանիշը՝ 0,05 նշանակալիության մակարդակով, ստագել X (վնասաված գրքերի թիվը) գիտլրեալ պատահական մեծության բինոմական օրենքով բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը:

Ցուցում: Հաշվի առնել 582 խնդրի վերաբերյալ ցուցումները:

Պատ-¹ $p^* = 0,2$; $k = 2$; $m_{\text{համակարգ}} = 54$; $m_{\text{համակարգ}}^2 = 65,54$
 $81,92, 40,96, 10,24, 1,28, 0,06, \frac{\gamma^2}{q_{\text{բա}}} = 4,65, \frac{\gamma^2}{q_{\text{բ}}} = (0,05; 2) = 6,0$:
X-ի բինոմական օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը՝ մերժելու հիմքեր չկան:

§ 16. Գլխավոր համախմբության հավասարաշափ օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզի ստուգումը

X անընդհատ պատահական մեծություն է, մոլիրիկ բաշխումը արված է Տ համար $x_i - x_{i+1}$ միջակայքերի և համապատասխան ու հաճախությունների հաջորդականության տեսքով, բնու սրամ $\sum n_i = n$ (ընտրանքի ծավալը): Պահանջված է, օգտագործելով Պիրոսնի չափանիշը, ստուգել հիպոթեզը այն մասին, որ X պատահական մեծությունը հավասարաշափ է բաշխված:

Ե ա ն ո հ ւ ։ X-ի հավասարաչափ բաշխվածության (այսինքն

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & (a,b) \text{ միջակայքում} \\ 0, & (a,b) \text{ միջակայքից դուրս} \end{cases}$$

օրենքով) մասին հիպոթեզը ստուգելու համար անհրաժեշտ է՝

1. Գնահատել ա և բ պարամետրեր՝ այն միջակայքի ծայրակետերը, որոնցում դիտվել են X-ի հնարավոր արձեքները հետևյալ բանաձևերով (պարամետրերի գնահատականները նշանակված են a^* -ով և $b^*-ով)$ ՝

$$a^* = \bar{x}_p - \sqrt{3}\sigma_p, \quad b^* = \bar{x}_p + \sqrt{3}\sigma_p$$

2. Գոտնել ենրադրվող բաշխման դիֆերենցիալ ֆունկցիան՝

$$f(x) = \frac{1}{b^* - a^*},$$

3. Հաշվել տեսական հանախությունները՝

$$\frac{n'}{1} = nP_1 = n f(x)(x_1 - a^*) = \frac{n(\bar{x}_1 - a^*)}{b^* - a^*},$$

$$\frac{n'}{2} = \frac{n'}{3} = \cdots = \frac{n'}{s-1} = \frac{n(x_i - x_{i-1})}{b^* - a^*}, \quad (i = 2, 3, \dots, s-1)$$

$$\frac{n'}{2} = \frac{n(b^* - x_{s-1})}{b^* - a^*},$$

4. Պիրսոնի չափանիշի օգնությամբ համեմատել էմպիրիկ և տեսական հանախությունները, ընդունելով ազատության աստիճանը՝ $k = s - 3$, որտեղ s -ը այն միջակայքերի քանակն է, որոնց վրա տրամփած է ընարանը:

584. Ինչու՞ հավասարաչափ բաշխված X պատահական մեծության ա և բ պարամետրերը գնահատվում են

$$a^* = \bar{x}_p - \sqrt{3}\sigma_p, \quad b^* = \bar{x}_p + \sqrt{3}\sigma_p$$

Բանաձևերով:

Լուծում: Հայտնի է, որ որպես X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասման և միջին քառակուսային չեղման գնահատական, կարելի է ընդունել, համապատասխանաբար, \bar{X}_p ընտրանքային միջինը և ու ընտրանքային միջին քառակուսային շեղումը:

Հայտնի է նաև (տես զլ. VI ինդիքներ 313, 315), որ հավասարաչափ բաշխման համար մաթեմատիկական սպասումը և միջին քառակուսային շեղումը, համապատասխանաբար, հավասար են՝

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \sigma(X) = \sqrt{DX} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}},$$

Այդ պատճառով հավասարաչափ բաշխման պարամետրերի գնահատման համար ստանում ենք 2 գծային հավասարամների հետեւալ համակարգը՝

$$\left. \begin{array}{l} \frac{b^* + a^*}{2} = \bar{X}_p, \\ \frac{b^* - a^*}{2\sqrt{3}} = \sigma_p \end{array} \right\}$$

Կամ

$$\left. \begin{array}{l} b^* + a^* = 2\bar{X}_p, \\ b^* - a^* = 2\sqrt{3}\sigma_p \end{array} \right\}$$

Լուծելով այս համակարգը, ստանում ենք՝

$$a^* = \bar{X}_p - \sqrt{3}\sigma_p, \quad b^* = \bar{X}_p + \sqrt{3}\sigma_p.$$

585. Ինչո՞ւ Պիրոսնի չոպտանիշի օգնոթյամբ X գլխավոր համախմբության հավասարաչափ բաշխմածաթյան մասին հիպոթեզը ստուգելու, աղատաթյան առարկաներ որոշվում է $k = s - 3$ բանաձեխց, որտեղ s -ը ընտրանքի միջակայքի թիվն է:

Լուծում: Պիրսոնի չափանիշը օգտագործելիս ազատության աստիճանը՝ $k = s - 1 - r$, որտեղ r -ը ընտրանքով գնահատված պարամետրերի թիվն է: Հավասարաչափ բաշխումը որոշվում է երկու՝ և ե պարամետրերով: Քանի որ այդ երկու պարամետրերը գնահատվում են ընտրանքով, ապա $r = 2$ և, հետեւաբար, ազատության աստիճանը՝

$$k = s - 1 - 2 = s - 3$$

586. Իրականացված են $n = 200$ փորձեր, որոնցից յուրաքանչյուրում Ա պատահույթը հանդես է եկել ժամանակի տարրեր պահերին: Արգյունքում ստացվել է աղյուսակ 37-ում բերված էմպիրիկ բաշխումը (առաջին սյունակում բերված են ժամանակի միջակայքերը բողեներով, երկրորդում՝ համապատասխան հաճախությունները, այսինքն Ա պատահույթի հանդես գալու թիվը այդ միջակայքում):

Պահանջվում է, $0,05$ նշանակալիության մակարդակի դեպքում, սատել պատահույթի տեղի ունենալու ժամանակի հավասարաչափ բաշխվածության մասին հիպոթեզը:

Աղյուսակ 37

$\sigma_{\text{իջակայքը}}$ $x_{i-1} - x_i$	$\zeta_{\text{աճախությունը}}$ π_i	$\sigma_{\text{իջակայքը}}$ $x_{i-1} - x_i$	$\zeta_{\text{աճախությունը}}$ π_i
2—4	21	12—14	14
4—6	16	14—16	21
6—8	15	16—18	22
8—10	26	18—20	18
10—12	22	20—22	25

Լուծում: 1. Գտնենք հավասարաչափ բաշխման և ե պարամետրերի գնահատականները.

$$a^* = \bar{x}_e - \sqrt{3}\sigma_e, \quad b^* = \bar{x}_e + \sqrt{3}\sigma_e,$$

բանաձեւով:

\bar{x}_e ընտրանքային միջինի և σ_e ընտրանքային միջինքառակուսային շեղման հաշվման համար որպես x_i^* տարբերակներ (X_i -ի գիտվող արժեքների) ընդունենք միջակայքերի միջնակետերը: Արդյունքում կստանանք հավասարահեռ տարբերակների հետեւալ էմպիրիկ բաշխումը՝

x_i^*	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	21	16	15	26	22	14	21	22	18	25

Օգտվելով, օրինակ, արտազրյաների մեթոդից, գտնում ենք $\bar{x}_e = 12,21$, $\sigma_e = 5,81$: Հետեւաբար,

$$a^* = 12,21 - 1,73 \cdot 5,81 = 2,16,$$

$$b^* = 12,21 + 1,73 \cdot 5,81 = 22,26;$$

2. Գտնենք ենթագրվող բաշխումն զիֆերենցիալ ֆունկցիան՝

$$f(x) = \frac{1}{b^* - a^*} = \frac{1}{22,26 - 2,16} = 0,05:$$

3. Գտնենք աեսական հաճախաթիւնները՝

$$n_1' = n f(x) (x_1 - a^*) = 200 \cdot 0,05 \cdot (4 - 2 + 16) = 18,4..$$

$$n_2' = 200 \cdot 0,05 (x_2 - x_1) = 10(6 - 4) = 20:$$

Երբորդիններորդ միջակայքերի երկարությունները հավասար են երկրորդ միջակայքի երկարությունը, տասի այդ միջակայքերի համապատասխան աեսական հաճախաթիւնները հավասար են երկրորդ միջակայքի աեսական հաճախաթիւնը, այսինքն՝

$$n_3' = n_4' = n_5' = n_6' = n_7' = n_8' = n_9' = 20;$$

$$n_{10}' = 200 \cdot 0,05 (b^* - x_9) = 10 \cdot (22,6 - 20) = 22,6:$$

4. Օգտագործելով Պիրսոնի չափանիշը, համեմատենք աեսական և էմպիրիկ հաճախաթիւնները, ընդունելով ազա-

առթյան աստիճանը՝ $k = s - 3 = 10 - 3 = 7$: Դրա համար
կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 38-ը:

Աղյուսակ 38

i	n _i	n' _i	n _i — n' _i	(n _i — n' _i) ²	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	21	18,4	2,6	6,76	0,37
2	16	20	-4	16,00	0,80
3	15	20	-5	25	1,25
4	26	20	6	36	1,80
5	22	20	2	4	0,20
6	14	20	-6	36	1,80
7	21	20	1	1	0,05
8	22	20	2	4	0,20
9	18	20	-2	4	0,20
10	25	22,6	2,4	5,76	0,25
					$\chi^2_{\text{պահ}} = 6,92$

Հաշվարկային աղյուսակից ստանում ենք՝ $\chi^2_{\text{պահ}} = 6,92$:

χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից (հայել-ված 5), $\alpha = 0,05$ նշանակալիության մակարդակով, $k = s - 3 = 10 - 3 = 7$ ազատության աստիճանով որոշենք աջակողմիան կրիտիկական տիրութիւն՝ $\chi^2_{\text{կր}} = (0,05; 7) = 14,1$ կրիտիկական կետը:

Վանի որ $\chi^2_{\text{պահ}} < \chi^2_{\text{կր}}$, ապա X -ի հավասարաչափ բաշխվածության մասին հիպոթեզի մերժման հիմքեր չկան: Այլ կերպ առած գիտումների ավյաները չեն հակասում այդ հիպոթեզին:

587. 800 պողպատյա գնդիկների կշռման արդյունքում ստացվել է աղյուսակ 39-ում բերված էմպիրիկ բաշխումը (առաջին սյունակում բերված է կշռի միջակայքը գրամներով, 108

հրկրորդամաս հաճախությունը, այսինքն այն գնդիկների թիվը, որոնց կշիռը պատկանում է այդ միջակալքին):

Պահանջվում է, $0,01$ նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել հիպոթեզը այն մասին, որ գնդիկի X կշիռը բաշխված է հայտասարաչափի:

Աղյուսակ 39

$x_{i-1} - x_i$	n_i	$x_{i-1} - x_i$	n_i
$20,0 - 20,5$	91	$23,0 - 23,5$	79
$20,5 - 21,0$	76	$23,5 - 24,0$	73
$21,0 - 21,5$	75	$24,0 - 24,5$	80
$21,5 - 22,0$	74	$24,5 - 25,0$	77
$22,0 - 22,5$	92		
$22,5 - 23,0$	83		
			$n=800$

Պահանջվում է $\bar{x}_g = 22,47$, $\sigma_g = 1,44$; $a^* = 19,98$; $b^* = 24,96$; $f(x) := -0,2$; $k = 7$; $\chi^2_{\text{q}, \alpha} = 4,38$, $\chi^2_{\text{q}, 0,01} = 18,5$. X-ի հավասարաչափ բաշխվածության մասին հիպոթեզը ժերդելու հիմքեր չկան:

588. Մի ինչոր վայրում 300 օր զրանցվել է օդի օրվա միջին շերմասարիճանը: Դիտածմնիրի արդյունքում սատցվել է էմպիրիկ բաշխումը, որը բերված է աղյուսակ 40-ում (ասածին սյունակամ բերված են շերմասարիճանի միջակալքից՝ ըլլը առարձաններով, երկրորդամաս հաճախությանը, այսինքն օրերի թիվը, որոնց օրենքան միջին շերմասարիճանը բնակած է ավյալ միջակալքում):

Աղյուսակ 40

$x_{i-1}^0 - x_i^0$	n_i	$x_{i-1}^0 - x_i^0$	n_i
$-40 - (-30)$	25	$0 - 10$	40
$-30 - (-20)$	40	$10 - 20$	46
$-20 - (-10)$	30	$20 - 30$	48
$-10 - 0$	45	$30 - 40$	26

Պահանջվում է, $0,05$ նշանակալիության մակարդակով,
ստուգել հիպոթեզը այն մասին, որ օրիվա միջին չերժաստի-
ճանը բաշխված է հավասարաչափ:

Պատ.՝ $\bar{x}_p = 1,5$; $s_p = 21,31$; $a^* = -35,37$; $b^* = 38,37$, $f(x) =$
 $= 0,014$; $k = 5$; $\chi_{\eta, p}^2 = 7,75$; $\chi_{4p}^2(0,05; 5) = 11,1$:
Չերժաստիճանի հավասարաչափ բաշխվածության մասին հիպոթեզի
մերժման հիմքը չկան:

589. 10 Ժամկա ընթացքում գրանցվել է ավտոմեքենա-
ների բենզոլցման կայան գալու ժամանակը և ստացվել է
աղյուսակ՝ 41-ում բերված էմպիրիկ բաշխումը (առաջին
սյունակում բերված են ժամանակի միջակայքերը ժամերով,
երկրորդում՝ հաճախությունները, այսինքն տվյալ միջակայքում
եկած մեքենաների թիվը)

Աղյուսակ 41

$x_{i-1} - x_i$	n_i	$x_{i-1} - x_i$	n_i
8—9	12	13—14	6
9—10	40	14—15	11
10—11	22	15—16	33
11—12	16	16—17	18
12—13	28	17—18	14

Պահանջվում է, $0,01$ նշանակալիության մակարդակով,
ստուգել հիպոթեզը այն մասին, որ մեքենաների գալու ժա-
մանակը բաշխված է հավասարաչափ:

Պատ.՝ $\bar{x}_p = 12,71$; $s_p = 2,86$; $a^* = 7,76$; $b^* = 17,66$; $f(x) = 0,101$
 $k = 7$; $\chi_{\eta, p}^2 = 53,43$; $\chi_{4p}^2(0,01; 7) = 18,5$:

Ժամանակի հավասարաչափ բաշխվածության մասին հիպոթեզը մեր-
ժըլում է: Գիտումների ավալները հակասում են այդ հիպոթեզին:
410

§17. Գլխավոր համախմբության Պուասոնի օրենքով բաշխված լինելու մասին հիպոթեզի ստուգումը

Տրված է X դիսկրետ պատահական մեծության էմպիրիկ բաշխումը: Պահանջվում է, ողտվելով Պիրսոնի չափանիշից, ստուգել գլխավոր համախմբության Պուասոնի օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը:

Կ ա ն ո ն : ռ հանակալիուրյան մակարդակով, X պատահական մեծության Պուասոնի օրենքով բաշխվածուրյան մասին նիպոթեզը ստուգելու համար, անհրաժեշտ է՝

1. Տված էմպիրիկ բաշխումով գտնել \bar{x}_p բնորանքային միջինը:

2. Որպես Պուասոնի բաշխման λ պարամետրի գնահատական ընդունել բնորանքային միջինը՝

$$I_p := \bar{x}_p^{\frac{1}{p}}$$

3. Պուասոնի բանաձևով (λ ամ պատրաստի աղյուսակով) գտնել այնի բանի P_i հավանականուրյունը, որ i փորձերում տեղի կունենան նիշտ i պատահույթներ ($i = 0, 1, 2, \dots, r$, որտեղ r -ը դիտված պատահույթների առավելագույն թիվն է, ուրիշ բնորանքի ծավալը)

4. Հետեւյալ բանաձևով հաշվել տեսական համախուրյունները՝

$$\Pi'_i := \Pi P_i;$$

5. Պիրսոնի չափանիշի օգնուրյամբ համեմատել տեսական և էմպիրիկ համախուրյունները, բնդունելով ազատուրյան աստիճանը՝ $k = s - 2$, որտեղ s -ը բնորանքի առանձին խմբերի թիվն է (Եթե իրականացված է փոքրարիվ համախուրյունների միավորում, ապա s -ը միավորումից հետո մնացած խմբերի թիվն է):

590. Տեխնիկական վերահսկողության բաժինը ստուգեց միատեսակ արտադրանքի $n = 200$ խմբաքանակներ և ստացավ հետեւյալ էմպիրիկ բաշխումը (տատշին տողամբ բերված է մեկ խմբաքանակամբ ոչ միօրինում արտադրանքի միավորների x_i թիվը, երկրորդամբ՝ n_i հաճախականությունը, այսինքն x_i ոչ միօրինակ միավորներ պարանակող խմբաքանակների թիվը):

x_i	0	1	2	3	4
n_i	116	56	22	4	2

Պահանջվում է, 0,05 նշանակալիության մակարդակով, ստագել ոչ միօրինակ միավորների X թվի Պուասսոնի օրենքով՝ բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը:

Լուծում: 1. Հաշվենք ընտրանքային միջինը՝

$$\bar{x}_e = \frac{1}{n} \sum_{X_i \in I} = \frac{116 \cdot 0 + 56 \cdot 1 + 22 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{200} = 0,6;$$

2. Որպես Պուասսոնի բաշխման և պարամետրի գնահատական ընդունենք ընտրանքային միջինը՝ $\lambda = 0,6$: Հետեաբար, ենթադրվող Պուասսոնի

$$P_n(i) = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$$

բաշխման օրենքն առնի հետեւյալ տեսքը՝

$$P_{200}(i) = \frac{(0,6)^i e^{-0,6}}{i!},$$

3. Տեղադրելով $i = 0, 1, 2, 3, 4$, գտնենք P_i հավանականությունները, որ 200 խմբաքանակներում կլինեն և ոչ միօրինակ միավորներ՝

$$P_0 = P_{200}(0) = 0,5488; \quad P_1 = P_{200}(1) = 0,3923, \quad P_2 = P_{200}(2) = 0,0988; \quad P_3 = P_{200}(3) = 0,0198; \quad P_4 = P_{200}(4) = 0,0030;$$

4. $n'_i = n P_i = 200 P_i$ բանաձեռվ հաշվենք տեսական հաճախությունները: Այդ բանաձեռմ տեղադրելով կետ Յում հաշված P_i հավանակությունների արժեքները, կստանանք՝

$$n'_0 = 200 \cdot 0,5488 = 109,76:$$

Նման եղանակով գտնում ենք

$$n'_1 = 65,86, \quad n'_2 = 19,76, \quad n'_3 = 3,96, \quad n'_4 = 0,60:$$

5. Համեմատենք էմպիրիկ և տեսական հաճախությունները Պիրսոնի չափանիշի օգնությամբ: Դրա համար կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 42-ը: Հաշվի առնելով դիտողաթյուն 1-ը (տես § 12), փոքրաթիվ հաճախությունները միավորում ենք ($4+2=6$) միաժամանակ միավորելով հա-

մագատասխան տեսական հաճախությունները ($3,96 + 0,60 = 4,56$): Հաճախությունների միավորման արգլունքները պրանցում ենք աղյուսակ 42-ում:

$\chi^2_{\text{պահ}} = 4,2$

1	2	3	4	5	6
i	n_i	n'_i	$(n_i - n'_i)$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
0	116	109,76	6,24	38,9376	0,3548
1	56	65,86	-9,86	97,2196	1,4762
2	22	19,76	2,24	5,0176	0,2539
3	6	4,56	1,44	2,0736	0,4547
Σ	200				$\chi^2_{\text{պահ}} = 2,54$

Հաշվարկային աղյուսակից գտնում ենք Պիրոսնի չափանիշի գիտակող արժեկը՝

$$\chi^2_{\text{պահ}} = 2,54:$$

χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերի աղյուսակից ($\alpha=0,05$ նշանակալիության մակարդակով) և $k=4-2=2$ աղյուսակից առաջնային գանում ենք աջակողմյան կրիտիկական տիրայիթի $\chi^2_{\text{կր}}(0,05; 2) = 6,0$ կրիտիկական կետը:

Քանի որ $\chi^2_{\text{պահ}} < \chi^2_{\text{կր}}$, ապա X պատահական մեծության Պատասխանի օրենքով բաշխվածաթյան մասին հիսութեղի մերժման հիմքերը չկան:

591. 200 արկղ պահածոների ոչ միօրինակ ստուգման արգլունքում ստացվել է հետեւյալ էմպիրիկ բաշխումը (տուշին տողում թերած են մեկ արկղում ոչ միօրինակ պահածոների տարիերի X_i քանակությունը, երկրորդում՝ n_i հաճախությունը, այսինքն այն արկղերի թիվը, որոնցում ոչ

միօրինակ պահածոների տուփերի թիվը, հավասար է չի:

x_i	0	1	2	3	4
n_i	132	43	20	3	2

Պահանջվում է $0,05$ նշանակալիության մակարդակով, ստուգել անորակ տուփերի թիվի (X պատահական մեծության) Պուասոնի օրենքով բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը:

Ցուցում: Միավորել վերջին երկու խմբերի փոքրաթիվ հաճախությունները:

Պատ.^{*} $k = 2$, $\lambda = \bar{x}_p = 0,5$, տեսական հաճախությունները՝ $121,31, 60,65, 15,16, 2,52, 0,32$, $\chi^2_{\text{պահ}} = 927$, $\chi^2_{\text{հր}} = (0,05, 2) = 6,0$, X -ի Պուասոնի օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզի մերժման հիմքեր չկան:

592. Երեքնուկի սերմերի խմբաքանակի աղտոտվածությունը մոլախոտերի սերմերով որոշելու համար ստուգված է պատահականորեն վերցված 1000 փորձանմուշ և սաացվել է հետեւյալ էմպիրիկ բաշխումը (առաջին առդում բերված է մոլախոտի սերմերի x_i թիվը մի նմուշում, երկրորդում՝ n_i հաճախությունը, այսինքն x_i մոլախոտի սերմ պարունակող նմուշների թիվը՝

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	405	366	175	40	8	4	2

Պահանջվում է $0,01$ նշանակալիության մակարդակով, ստուգել X պատահական մեծության (մոլախոտի սերմերի թիվը) Պուասոնի օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզը:

Ցուցում: Միավորել վերջին երկու խմբերի փոքրաթիվ հաճախությունները:

Պատ.^{*} $k = 4$; $\lambda = \bar{x}_p = 0,9$; տեսական հաճախությունները՝ $406,6; 365,9; 164,7; 49,4; 11,1; 2,3$; $\chi^2_{\text{պահ}} = 9,27$; $\chi^2_{\text{հր}} = (0,01; 4) = 13,3$; X -ի Պուասոնի օրենքով բաշխված լինելու մասին հիպոթեզի մերժման հիմքեր չկան:

593. Φορδαρικούμενού κωδικώσθατος είναι 1000 φορδαρικήσ, προνοητήσ ίση σε ιπταμένη αναγνωριστικό μέσον της αναγνωριστικής αποστολής της Ελληνικής Δημοκρατίας. Το ίδιο μέσον θεωρείται ως αποδεικτικό για την αναγνωριστική αποστολή της Ελληνικής Δημοκρατίας.

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	505	336	125	24	8	2

Պահանջվում է, 0,05 նշանակալիության մակարդակով, ստոգել պատճենը թի հանդես գալու X թվի Պուասոնի օրենքով՝ բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը:

Յուլիոս Միավորել վերջին 2 խմբերի հաճախությունները:

Պարմ.՝ $k = 3$; $\lambda = \overline{x_p} = 0,07$; տեսական հաճախությունները՝
 $496,6; 347,6; 121,7; 28,4; 5,0; 0,7$; $\frac{\chi^2}{\text{դիտ}} = 10,29$; $\frac{\chi^2}{\text{կր}} (0,05; 4) = 9,5$: X -ի Պուասոնի օրենքով բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը
 մերժում էնք:

594. Ապակյա իրեր պարտնակող 500 արկղերի ստոգումից պարզվել է, որ վնասված իրերի X թիվն անի հետեւալ է մակիրիկ բաշխումը (առաջին առղամ բերված է 1 արկղամ վնասված իրերի թիվը, երկրորդամ, ու հաճախաթիւանը, այսինքն չու վնասված իրեր պարտնակող արկղների թիվը):

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	199	169	87	31	9	3	1	1

Պահանջված է, 0,01 նշանակալիության մակարդակով ստուգել լինասված իրերի X թվի Պատաստնի օրենքով բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը:

Յու ցու մէ Միավորել վերջին երեք խմբերի հաճախությունները:

Պատ.՝ $k = 4$, $\lambda = \overline{x_p} = 1$, տեսական հաճախությունները՝
 183,95, 183,95, 91,95, 30,65, 7,65, 1,55, 0,25, 0,04; $\chi^2_{\text{զիմ}} = 8,38$
 $\chi^2_{\text{զր}}(0,01;4) = 13,3$: X-ի Պուասոնի օրենքով բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը մերժելու հիմքեր չկան:

595. Բորտկեսիչի խնդիրը: Քսան տարվա ընթացքում, ձիու սպանվելու հետևանքով պրուսական բանակի զոհված հեծելազորայինների թվի մասին 200 զեկուցագրերի հիման վրա կազմված է հետևյալ էմպիրիկ բաշխումը (առաջին տողում բերված է մեկ զեկուցագրում ցույց արված զոհված հեծելազորայինների x_i թիվը, երկրորդում՝ n_i հաճախությունը, այսինքն այն զեկուցագրերի թիվը, որոնցում հաղորդվում է x_i հեծելազորայինների զոհվելու մասին):

x_i	0	1	2	3	4
n_i	109	65	22	3	1

Պահանջվում է, $0,05$ նշանակալիության մակարդակով, ստուգել X պատահական մեծության (զոհված հեծելազորայինների թիվը) Պուասոնի օրենքով բաշխված լինելու մասին հիպոթեզը:

Ցուցում: Միավորել 3 և 1 փոքրաթիվ հաճախությունները մեկի մեջ:

Պատ.՝ $k = 2$; $\lambda = \overline{x_p} = 0,61$; տեսական հաճախությունները՝
 108,7; 66,3; 20,2; 4,1; 0,7; $\chi^2_{\text{զիմ}} = 0,34$; $\chi^2_{\text{զր}}(0,05; 2) = 6,0$; X-ի Պուասոնի օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզի մերժման հիմքեր չկան:

ՏԱՄՆ ԶՈՐՍԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ
ՄԻԱԳՈՐԾՈՆ ԴԻՍՊԵՐԾԻՈՆ ԱՆԱԼԻԶ

§ 1. Նույն թվով փորձարկումներ բոլոր մակարդակներում

Ենթադրենք X քանակական նորմալ բաշխված հայտանիշի վրա ազդում է F գործոնը (ֆակտօր), որն ունի թ հաստատուն F_1 , F_2 , ... F_p մակարդակները. Յուրաքանչյուր մակարդակի վրա կատարված են q-ական փորձեր. Դիտման արդյունքները աղյուսակ 43-ում բերված են x_{ij} թվերն են, որտեղ i-ն փորձի համարն է ($i=1, 2, \dots, q$), j-ն՝ գործոնի մակարդակի համարը ($j=1, 2, \dots, p$):

Աղյուսակ 43

Փորձի համարը		Գործոնի մակարդակները			
i	F _j	F ₂	...	F _p	
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1p}	
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2p}	
...	
q	x_{q1}	x_{q2}	...	x_{qp}	

Խմբային միջինը	\bar{x}_{μ_j}	\bar{x}_{μ_1}	\bar{x}_{μ_2}	...	\bar{x}_{μ_p}

Բննարկվում է հետևյալ խնդիրը. ո նշանակալիության մակարդապ ստուգել խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական իպոթեզը, ենթադրելով, որ խմբային զլիսավոր դիսպերսիաները չնաած անհայտ են, բայց միմյանց հավասար են. Խնդրի լուծման համար մտցվում են. հայտանիշի դիտող արժեքների ընդհանուր միջինը շեղումների քառակուսիների ընդհանուր գումարը

$$S_{\text{ընդ}} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q (x_{ij} - \bar{x})^2;$$

Խմբային միջինների, ընդհանուր միջիններից ունեցած շեղումների քառակուսիների գործուային զումարը (բնորոշում է ցըումը «խմբերի միջև»)

$$S_{q,p,\delta} = q \sum_{j=1}^p (\bar{x}_{kj} - \bar{x})^2;$$

Խմբի զիտվող արժեքների, համապատասխան խմբային միջինից ունեցած շեղումների քառակուսիների մեացորդային գումարը (բնորոշում է ցըումը «խմբի ներսում»)

$$S_{d_2} = \sum_{i=1}^q (x_{i1} - \bar{x}_{k1})^2 + \sum_{i=1}^q (x_{i2} - \bar{x}_{k2})^2 + \dots + \sum_{i=1}^q (x_{ip} - \bar{x}_{kp})^2,$$

Գործնականում մնացորդային գումարը որոշում են

$$S_{d_2} = S_{\text{ընդ.}} - S_{q,p,\delta}$$

բանաձևով:

Ընդհանուր և գործոնային գումարների հաշվման համար ավելի հարմար են հետեւյալ բանաձևերը՝

$$S_{e_{kq}} = \sum_{j=1}^p P_j - \frac{1}{pq} \left[\sum_{j=1}^p R_j \right]^2,$$

$$S_{q,p,\delta} = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^p R_j^2 - \frac{1}{pq} \left[\sum_{j=1}^p R_j \right]^2,$$

որտեղ $P_j = \sum_{i=1}^q x_{ij}^2$ հանդիսանում է F_j մակարդակի վրա զիտված արեների քառակուսիների գումարը, $R_j = \sum_{i=1}^q x_{ij}$ հանդիսանում է F_j

մակարդակի վրա զիտված արժեքների գումարը:

Եթե հայտանիշի զիտված արժեքները համեմատաբար մեծ թվեր են, ապա հաշվումների պարզեցման համար յուրաքանչյուր զիտված արժեքից հանում են միենույն C թիվը, որը մոտավորապես հավասար է ընդհանուր միջինին:

Եթե փոքրացված արժեքները $y_{ij} = x_{ij} - C$, ապա

$$S_{\text{քոր}} = \sum_{j=1}^p Q_j - \frac{1}{pq} \left[\sum_{j=1}^p T_j \right]^2,$$

$$S_{\text{զոր}} = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^p T_j^2 - \frac{1}{pq} \left[\sum_{j=1}^p T_j \right]^2,$$

որտեղ $Q_j = \sum_{i=1}^q y_{ij}^2$ F_j մակարդակի վրա հայտանիշի փոքրացված ար-

ժեքների քառակսւսիների գումարն է, իսկ $T_j = \sum_{i=1}^q y_{ij}$ հանդիմանում է

F_j մակարդակի վրա հայտանիշի փոքրացված արժեքների գումարը:

Բաժանելով արդեն հաշված գործոնային և մնացորդային գումարները համապատասխան աղատության աստիճանի վրա, գտնում ենք գործոնային և մնացորդային դիսպերսիաները

$$s_{\text{զոր}}^2 = \frac{S_{\text{զոր}}}{p-1}, \quad s_{\text{զո}}^2 = \frac{S_{\text{զո}}}{p(q-1)},$$

Վերջապես, համեմատում են գործոնային և մնացորդային դիսպերսիաները ֆիշեր-Սնեդեկորի չափանիշով (տես գլ. XIII, § 2):

Եթե $F_{q,p} < F_{q,p}$, ապա խմբային միջինների տարրերությունը նշանակալի չէ:

Եթե $F_{q,p} > F_{q,p}$, ապա խմբային միջինների տարրերությունը նշանակալի չէ:

Դիտողություն 1. Եթե սլաքվի, որ գործոնային դիսպերսիան փոքր է մնացորդայինից, ապա այստեղից անմիջապես հետևում է խմբային միջինների հավասարության մասին դրոյական հիպոթեզի իրավացիությունը և հետադա հաշվումները (դիսպերսիաների համեմատումը F չափանիշով) ավելորդ են:

Դիտողություն 2. Եթե x_{ij} դիտվող արժեքները ստորակետից հետո կ նիշերով տասնորդական կոտորակներ են, ապա նպատակահարմար է անցնել ամրող թվերին $y_{ij} = 10^k x_{ij} - C$ բանաձեռք, որտեղ C -ն մոտավորապես $10^k x_{ij}$ թվերի միջին արժեքն է: Իսկ որում գործոնային և մնացորդային դիսպերսիաները կմեծանան 10 անգամ, սակայն նրանց հարաբերությունը չի փոխվի:

596. Բ գործոնի երեք մակարդակներից յուրաքանչյուրում կատարված է 4-ական փորձ: Դիսպերսիոն անալիզի մեթոդով, $0,05$ նշանակալիության մակարդակի գեպքում, սատուգել խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը: Ենթադրվում է, որ ընտրանքները վերցված են միատեսակ դիսպերսիաներով նորմալ համախմբություններից: Փորձարկման արդյունքները բերված են աղյուսակ 44-ում:

Աղյուսակ 44

F _{прд} ի համարը	F _{прд} ոնի մակարդակները		
	F ₁	F ₂	F ₃
1	38	20	21
2	36	24	22
3	35	26	31
4	31	30	34
\bar{x}_{μ_j}	35	25	27

Լուծում: Հաշվումը պարզեցնելու համար x_{ij} յուրաքանչյուր դիտված արժեքներից հանենք $\bar{x} = 29$ ընդհանուր միջինը, այսինքն անցնենք $y_{ij} = x_{ij} - \bar{x} = 29$ փոքրացված մեծություններին: Օրինակ, $y_{11} = x_{11} - 29 = 38 - 29 = 9$; $y_{21} = x_{21} - 29 = 36 - 29 = 7$ և այլն:

Կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 45-ը: Օգտագործելով աղյուսակ 45-ի արդյունաբար սյունակը, գանենք շեղումների քառակուսիների ընդհանուր և գործոնային գումարները, հաշվի առնելով, որ գործոնի մակարդակների թիվը՝ $p = 3$, իսկ յուրաքանչյուր մակարդակում փորձարկումների թիվը՝ $q = 4$:

$$S_{e_{\nu_q}} = \sum_{j=1}^p S_j - \frac{1}{pq} \left[\sum_{j=1}^p T_j \right]^2 = 428 - 0 = 428:$$

Փորձի համարը	Գործոնի մակարդակները						Արդյունա- բար սյուն
	F ₁	F ₂		F ₃			
i	y ₁₁	y ₁₁ ²	y ₁₂	y ₁₂ ²	y ₁₃	y ₁₃ ²	
1	9	81	-9	81	-8	64	
2	7	49	-5	25	-7	49	
3	6	36	-3	9	2	4	
4	2	4	1	1	5	25	
S _j = $\sum y_{ij}^2$	—	170		116	—	142	$\Sigma S_j = 428$
T _j = $\sum y_{ij}$	24	—	-16	—	-8	—	$\Sigma T_j = 0$
T _j ²	576	—	256	—	64	—	$\Sigma T_j^2 = 896$

$$S_{q,p,\delta} = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^p T_j^2 - \frac{1}{pq} \left[\sum_{j=1}^p T_j \right]^2 = \frac{896}{4} - 0 = 224:$$

Գանհնք շեղումների քառակուսիների մնացորդալին գումարը՝

$$S_{x_0} = S_{p,q} - S_{q,p,\delta} = 428 - 224 = 204:$$

Գանհնք գործոնային գիտպերսիան, որի համար $S_{q,p,\delta}$ մեծաթիվունը բաժանենք աղատաթիւնութիւնութիւնը՝ $p-1=3-1=2$ անահնանի վրա՝

$$S_{q,p,\delta}^2 = \frac{S_{q,p,\delta}}{p-1} = \frac{222}{2} = 111,$$

Գանհնք մնացորդալին գիտպերսիան, որի համար բաժանենք S_{x_0} մեծաթիւնունը աղատաթիւնութիւնութիւնութիւնը՝ $p(q-1)=3(4-1)=9$ անահնանի վրա՝

$$S_{x_0}^2 = \frac{S_{x_0}}{p(q-1)} = \frac{204}{9} = 22,67,$$

Ֆիշեր-Սնեդեկորի չափանիշի օգնությամբ (տես գլ. XIII, § 2) համեմատենք գործոնալին և մնացորդալին դիսպերսիաները: Դրա համար սկզբից հաշվենք չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$F_{\text{գեա}} = \frac{S_{\text{արժ}}^2}{S_{\text{մա}}^2} = \frac{112}{22,67} = 4,94,$$

Նկատի ունենալով, որ համարիչի ազատության աստիճանը՝ $k_1=2$, հայտարարինը՝ $k_2=9$, և նշանակալիության մակարդակը՝ $\alpha=0,05$, աղյուսակից (հավելված 7) գտնում ենք $F_{\text{գր}}(0,05; 2; 9) = 4,26$:

Քանի որ $F_{\text{գեա}} > F_{\text{գր}}$, ապա խմբալին միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը մերժում ենք: Այլ կերպ ասած, խմբալին միջինները «ամբողջությամբ» նշանակալի տարրերվում են:

597. F գործոնի 5 մակարդակներից լուրաքանչյուրում կատարված է 4-ական փորձ: Դիսպերսիոն անալիզի մեթոդով, $0,05$ նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել խմբալին \bar{x}_{kj} միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը: Ենթադրվում է, որ ընտրանքները վերցված են միատեսակ դիսպերսիաներով նորմալ համախըմբություններից: Փորձարկման արդյունքները բերված են աղյուսակ 46-ում:

Աղյուսակ 46

Փորձի համարը	Գործոնի մակարդակները			
i	F_1	F_2	F_3	F_4
1	36	56	52	39
2	47	61	57	57
3	50	64	59	63
4	58	66	58	61
5	67	66	79	65
\bar{x}_{kj}	51,6	62,6	61,0	57,0

Ճռւցում: $\beta_{\text{նդունել}} x_{ij} = y_{ij} - 58$:

Պատ.՝ $S_{\mu_{ij}} = 1850,55$; $S_{q_{npd}} = 360,15$; $S_{x_{ij}} = 1490,40$; $S_{q_{npd}}^2 = 120$; $S_{x_{ij}}^2 = 93$; $F_{q_{bp}} = 1,29$; $F_{q_p}(0,05; 3; 16) = 3,24$: Խմբային միջնների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզի մերժման հիմքեր չկան:

598. Գործոնի 6 մակարդակներից յուրաքանչյուրում կատարված է 8-ական փորձ: Դիսպերսիոն անալիզի մեթոդով, 0,01 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստագել խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը: Ենթադրվում է, որ ընտրանքները վերցված են միատեսակ դիսպերսիաներով նորմալ համախմբություններից: Փորձարկման արդյունքները բերված են աղյուսակ 47-ում:

Աղյուսակ 47

Փորձի համարը		Գործոնի մակարդակները					
i		F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅	F ₆
1		100	92	74	68	64	69
2		101	102	87	80	83	71
3		126	104	88	83	83	80
4		128	115	93	87	84	80
5		133	119	94	96	90	81
6		141	122	101	97	96	82
7		147	128	102	106	101	86
8		148	146	105	127	111	99
\bar{x}_{μ_j}		128	116	93	93	89	81

Ճռւցում: $\beta_{\text{նդունել}} y_{ij} = x_{ij} - 100$:

Պատ.՝ $S_{\mu_{ij}} = 21567,48$; $S_{q_{npd}} = 11945,60$; $S_{x_{ij}} = 9622$; $S_{q_{npd}}^2 = 2389$; $S_{x_{ij}}^2 = 229$; $F_{q_{bp}} = 10,43$; $F_{q_p}(0,01; 5; 42) = 2,44$: Խմբային միջնների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը մերժվում է:

599. Երեք մակարդակներից յուրաքանչյուրում կատարված է 4-ական փորձ: Դիսպերսիոն անալիզի մեթոդով, 0,05 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, սատողելիսմբային միջինների հավասարության մասին հիպոթեզը: Ենթադրվում է, որ ընտրանքները վերցված են միատեսակ դիսպերսիաներով նորմալ համախմբություններից: Փորձարկման արդյունքները բերված են աղյուսակ 48-ում:

Աղյուսակ 48

Փորձի համարը		Գործոնի մակարդակները		
i	F ₁	F ₂	F ₃	
1	35	30	21	
2	32	24	22	
3	31	26	34	
4	30	20	31	
\bar{x}_{kj}	32	25	27	

Ցուցում: $\sum_{ij} = 28$:

Պատ.՝ $S_{\text{ըն}} = 296$; $S_{\text{զու}}$ ՝ 104 ; $S_{\text{այ}} = 192$; $s_{\text{զու}}^2 = 52$; $s_{\text{այ}}^2 = 21,3$; $F_{\text{զու}} = 2,44$; $F_{\text{այ}} (0,05; 2; 9) = 4,26$: Խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզի մերժման հիմքեր չկան:

600. Գործոնի չորս մակարդակներից յուրաքանչյուրում կատարված է 7 փորձ: Դիսպերսիոն անալիզի մեթոդով, 0,05 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, սատողելիսմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը: Ենթադրվում է, որ ընտրանքները վերցված են միատեսակ դիսպերսիաներով նորմալ համախմբություններից: Փորձարկման արդյունքները բերված են աղյուսակ 49-ում:

$\phi_{\text{որձի}}^{\text{մակարդ}}$	$\Phi_{\text{ործունի}} \quad \text{մակարդակները}$			
i	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄
1	51	52	56	54
2	59	58	56	58
3	53	66	58	62
4	59	69	58	64
5	63	70	70	66
6	69	72	74	67
7	72	74	78	69
\bar{x}_{ij}	60,9	65,9	64,3	62,9

Ցուցում: Բնդունել $y_{ij} = x_{ij} - 63$: Օգտվել զիտողություն 1-ից:

Պատ.՝ $S_{\rho_{ij}} = 1539$; $S_{q_{\rho_{ij}}} = 95$; $S_{x_{ij}} = 1444$; $s_{q_{\rho_{ij}}}^2 = 31,67$; $s_{x_{ij}}^2 = 60,17$: Խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզի մերժման հիմքերը չկան:

601. Փորձունի 3 մակարդակներից յուրաքանչյուրում կատարված է 4-ական փորձ: Օգտվելով զիտողերուն անալիզի մեթոդից, 0,05 նշանակալիության մակարդակի զեպքում, ստուգել խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը: Ենթադրվում է, որ ընտրանքները վերցված են միատեսակ զիտողերուն նորմալ համախմբություններից: Փորձարկման արգաւնքները բերված են աղյուսակ 50-ում:

Ցուցում: Բնդունել $y_{ij} = x_{ij} - 27$: Օգտվել զիտողություն 1-ից:

Պատ.՝ $S_{\rho_{ij}} = 334$; $S_{q_{\rho_{ij}}} = 32$; $S_{x_{ij}} = 302$; $s_{q_{\rho_{ij}}}^2 = 16$; $s_{x_{ij}}^2 = 33,56$: Խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզի մերժման հիմքերը չկան:

$\Phi_{\text{որձի}} \text{համարը}$	$\Phi_{\text{ործոնի}} \text{մակարդակները}$		
i	F ₁	F ₂	F ₃
1	27	24	22
2	23	20	21
3	29	26	36
4	29	30	37
\bar{x}_{ij}	28	25	29

§ 2. Տարբեր մակարդակներում փորձերի թիվը միատեսակ չէ

Եթե փորձերի թիվը F₁ մակարդակում հավասար է q₁, F₂ մակարդակում՝ q₂ ..., F_p մակարդակում՝ q_p, ապա շեղումների քառակուսիների ընդհանուր գումարը հաշվում են նույն ձևով, ինչպես բոլոր մակարդակներում միենույն քանակի փորձերի դեպքում (տես § 1): Շեղումնորի քառակուսիների գործոնային գումարը հաշվում են

$$S_{qnp\delta} = \frac{T_1^2}{q_1} + \frac{T_2^2}{q_2} + \dots + \frac{T_p^2}{q_p} - \frac{1}{n} \left[\sum_{j=1}^p T_j \right]^2$$

քանակներ, որտեղ n = q₁ + q₂ + ... + q_p — փորձերի ընդհանուր թիվն է:

Մնացած հաշվումները կատարում են այնպես, ինչպես միենույն քանակի փորձերի դեպքում՝

$$S_{d'u} = S_{pnp\delta} - S_{qnp\delta},$$

$$S_{qnp\delta}^2 = \frac{S_{qnp\delta}}{p-1}, \quad S_{d'u}^2 = \frac{S_{d'u}}{n-p};$$

602. Կատարված է 13 փորձ, որոնցից 4-ը՝ գործոնի առաջին մակարդակում, 4-ը՝ երկրորդում, 3-ը՝ երրորդում և 2-ը՝ չորրորդում: Դիսպերսիոն անալիզի մեթոդով, 0,05

Նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը: Ենթադրվում է, որ ընտրանքները վերցված են միատեսակ դիսպերսիաներով՝ նորմալ համախմբություններից: Փորձարկման արդյունքները բերված են աղյուսակ 51-ում:

Աղյուսակ 51

Փորձի համարը		Գործոնի մակարդակները		
i	F _i	F ₂	F ₃	F ₄
1	1,38	1,41	1,32	1,31
2	1,38	1,42	1,33	1,33
3	1,42	1,44	1,34	—
4	1,42	1,45	—	—
\bar{x}_{ij}	1,40	1,43	1,33	1,32

Լուծում: Օգտվելով դիտողություն 2-ից ($\S\ 1$), անցնենք ամբողջ թվերին՝ $y_{ij} = x_{ij} \cdot 100 - 138$:

Կազմենք հաշվարկային աղյուսակ 52-ը: Օգտվելով աղյուսակի արդյունարար սլունակից և վերջին տողից հաշվենք շեղումների քառակուսիների ընդհանուր և գործոնային գումարները՝

$$S_{e^{\prime\prime}} = \sum S_j - \frac{1}{n} \left[\sum T_j \right]^2 = 293 - \frac{9^2}{13} = 293 - 6,23 = 286,77;$$

$$S_{q^{\prime\prime}p^{\delta}} = \frac{T_1^2}{q_1} + \frac{T_2^2}{q_2} + \frac{T_3^2}{q_3} + \frac{T_4^2}{q_4} - \frac{1}{n} \left[\sum T_j \right]^2 =$$

$$= \frac{64}{4} + \frac{400}{4} + \frac{225}{3} + \frac{144}{2} - 6,23 = 256,77,$$

Փորձի համարը		Գործոնի մակարդակները								Արդյունաբար սյուն	
i		F ₁		F ₂		F ₃		F ₄			
		y _{i1}	y _{ij} ²	y _{i2}	y _{i2} ²	y _{i3}	y _{i3} ²	y _{i4}	y _{i4} ²		
1	0	0	3	9	-6	36	-7	49			
2	0	0	4	16	-5	25	-5	25			
3	4	16	6	36	-4	16	-	-			
4	4	16	76	49	-	-	-	-			
S _j = $\sum y_{ij}^2$		32		100		77		74		$\Sigma S_j = 293$	
T _j = $\sum y_{ij}$	8		20		-15		-12			$\Sigma T_j = -9$	
T _j ²	64		400		225		144				

Որոշենք շեղումների քառակուսիների մնացորդային դումարը՝

$$S_{xu} = S_{qnpd} - S_{qnpd} = 286,77 - 256,77 = 30:$$

Գտնենք գործոնային և մնացորդային դիսպերսիաները՝

$$S_{qnpd}^2 = \frac{S_{qnpd}}{p-1} = \frac{256,77}{4-1} = \frac{256,77}{3} = 85,59:$$

$$S_{xu}^2 = \frac{S_{xu}}{n-p} = \frac{30}{13-4} = \frac{30}{9} = 3,33:$$

Համեմատենք գործոնային և մնացորդային դիսպերսիաները F չափանիշի օգնությամբ (տես զԼ. XIII, § 2). Դրա համար նախօրոք հաշվենք չափանիշի դիտվող արժեքը՝

$$F_{qnpd} = \frac{S_{qnpd}^2}{S_{xu}^2} = \frac{85,59}{3,33} = 25,7:$$

Հաշվի առնելով, որ համարիչի ազատության աստիճանը՝ $k_1=p-1=4-1=3$, հայտարարինը՝ $k_2=n-p=13-4=9$ և նշանակալիության մակարդակը՝ $\alpha=0,05$, աղյուսակից (հավելված 7) դանում ենք $F_{4,9}(0,05; 3; 9)=3,86$ կրիտիկական կետը:

Քանի որ $F_{q,p} > F_{4,9}$, ապա խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը մերժում ենք: Այլ կերպ ասած, խմբային միջինները նշանակալի են տարբերվում:

603. Կատարված է 14 փորձ, նրանցից 5-ը գործոնի առաջին մակարդակում, 3-ը՝ երկրորդում, 2-ը՝ երրորդում, 3-ը՝ չորրորդում, և մեկը՝ հինգերորդում: Դիսպերսիոն անալիզի մեթոդով, $0,05$ նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստացել խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը:

Ենթադրվում է, որ ընտրանքները վերցված են միատեսակ գիսպերսիաներով նորմալ համախմբություններից: Դիտման արդյունքները բերված են աղյուսակ 53-ը:

Աղյուսակ 53

$\Phi_{\text{որձի}}^{\text{համարը}}$	Գործոնի մակարդակները				
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
1	7,3	5,4	6,4	7,9	7,1
2	7,6	7,1	8,1	9,5	—
3	8,3	7,4,	—	9,6	—
4	8,3	—	—	—	—
5	8,4	—	—	—	—
\bar{x}_{ij}	7,98	6,63	7,25	9,0	7,1

$$\text{Ցուցում: } \rho_{\text{նղունել}} y_{ij} = 10x_{ij} - 78,$$

$$\text{Պատ. } S_{\mu u} = 1570,43, \quad S_{qnpd} = 932,66, \quad S_{st} = 637,77; \quad s_{qnpd}^2 =$$

$= 233,16$; $s_{x_i}^2 = 70,86$; $F_{q_{\text{tow}}} = 3,29$; $F_{q_p}(0,05; 4; 9) = 3,63$; Խմբային միջինների հավասարության մասին զբոյական հիպոթեզի մերժման հիմքեր չկան:

604. Կատարված է 13 փորձ. նրանցից 4-ը՝ գործոնի առաջին մակարդակում, 6-ը՝ երկրորդում և 3-ը՝ երրորդում: Դիսպերսիոն անալիզի մեթոդով, $0,01$ նշանակալիության մակարդակի դեպքում ստուգել խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը: Ենթադրվում է, որ ընտրանքները վերցված են միատեսակ դիսպերսիաներով նորմալ համախմբություններից: Փորձարկման արդյունքները բերված են աղյուսակ 54-ում:

Աղյուսակ 54

Գործի համարը	Գործոնի մակարդակները		
	F_1	F_2	F_3
1	37	60	69
2	47	86	100
3	40	67	98
4	60	92	
5		95	
6		98	
\bar{x}_{μ_j}	46	83	89

Ցուցում: $\sum y_{ij} = \sum x_{ij} - 73$:

Պատ.՝ $S_{\mu_q} = 6444$; $S_{q_{\text{tow}}} = 4284$; $S_{x_i} = 2160$; $s_{q_{\text{tow}}}^2 = .2142$; $s_{x_i}^2 = 216$; $F_{q_{\text{tow}}} = 9,92$; $F_{q_p}(0,01; 2; 10) = 7,56$: Զբոյական հիպոթեզը մերժվում է: Խմբային միջինները նշանակալի են տարրերվում:

605. Կատարված է 14 փորձ. նրանցից 7-ը՝ գործոնի առաջին մակարդակում, 3-ը՝ երկրորդում, 4-ը՝ երրորդում:

Դիսպերսիոն անալիզի մեթոդով, 0,01 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը: Ենթադրվում է, որ ընտրանքները վերցված են միատեսակ դիսպերսիաներով նորմալ համախմբություններից: Փորձարկման արդյունքները բերված են աղյուսակ 55-ում:

Աղյուսակ 55

Փորձի համարը		Գործոնի մակարդակները		
i	F ₁	F ₂	F ₃	
1	30,56	43,44	31,36	
2	32,66	47,51	36,20	
3	34,78	53,80	36,38	
4	35,50		42,20	
5	36,63			
6	40,20			
7	42,28			
\bar{x}_{μ_j}	36,09	48,25	36,54	

Ցուցում: Բնդունել $y_{ij} = 100x_{ij} - 3900$:

Պատ. $S_{\mu_1} = 5463442$; $S_{\mu_2} = 3399389$; $S_{\mu_3} = 2064053$; $s^2_{\mu_1} = 1699694$; $s^2_{\mu_2} = 187641$; $F_{\mu_1} = 9,06$, $F_{\mu_2} (0,01; 2; 11) = 7,21$, Զրոյական հիպոթեզը մերժվում է: Խմբային միջինները նշանակալի են տարբերվում:

606. Կատարված է 26 փորձ. Նրանցից 7-ը՝ գործոնի առաջին մակարդակում, 5-ը՝ երկրորդում, 8-ը՝ երրորդամ և 6-ը՝ չորրորդում: Դիսպերսիոն անալիզի մեթոդով, 0,05 նշանակալիության մակարդակի դեպքում, ստուգել խմբային միջինների հավասարության մասին զրոյական հիպոթեզը: Ենթադրված է, որ ընտրանքները վերցված են միատեսակ դիսպերսիաներով նորմալ համախմբություններից: Դիտման արդյունքները բերված են աղյուսակ 56-ում:

$\Phi_{\text{որմ}} \delta_{\text{ի}}$ համարը	$\Phi_{\text{որմ}} \delta_{\text{ոնի}}$ մակարդակները			
i	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄
1	1600	1580	1460	1510
2	1610	1640	1550	1520
3	1650	1640	1600	1530
4	1680	1700	1620	1570
5	1700	1750	1640	1600
6	1700		1660	1680
7	1800		1740	
8			1820	
\bar{x}_{μ_j}	1677	1662	1638	1568

Ցուցանիշ: $\sum_{ij} y_{ij} = x_{ij} - 1630:$

Պատճ. $S_{\text{լադ}} = 192788; S_{\text{զորմ}} = 45507; S_{\text{ժա}} = 147281; S_{\text{զորմ}}^2 = 15169; S_{\text{ժա}}^2 = 6695; F_{\text{զորմ}} = 2,27; F_{\text{զորմ}} = (0,05; 3; 22) = 3,05:$
 Խմբային միջինների հավասարության մասին զբոյական հիպոթեզը մերժելու հիմքը չկան:

ՀԱՎԵԼՎԱԾՆԵՐ

ՀԱՎԵԼՎԱԾՆԵՐ

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Քունկցիայի արժեքների աղյուսակ

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

Հայելված 2-ի շարունակությունը

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,97	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Փունկցիայի արժեքների աղյուսակ

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

Հավելված 1-ի շարունակությունը

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$t_v = t(v, n) \cdot U_{PDT} \cdot e^{k_F h} \cdot m_{JPC} \cdot u \cdot w$

v	0,95	0,99	0,999	v	0,95	0,99	0,999
n				n			
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,47	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

$q = q(v, n) \cdot U_{PDT} \cdot e^{k_F h} \cdot m_{JPC} \cdot u \cdot w$

v	0,95	0,99	0,999	v	0,95	0,99	0,999
n				n			
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

χ^2 բաշխման կրիտիկական կետերը

Ազատության աստիճանը՝ k	α -հաշվանակալիքության մակարդակը					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Սույուղենաի բաշխման կրիտիկական կետերը

<i>Ազատության աստիճանը՝ k</i>	<i>α-նշանակալիության մակարդակը (երկկողմ կրիտիկական տիրույթ)</i>					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005

α-նշանակալիության մակարդակը (միակողմ կրիտիկական տիրույթ)

Ցիշեր-Մանեկորի F բաշխման կրիտիկական կետերը
 k₁—մեծ զիսպերսիայի ազատության աստիճանը
 k₂—փոքր զիսպերսիայի ազատության աստիճանը
 նշանակալիության մակարդակը՝ $\alpha=0,01$

$k_1 \backslash k_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Նշանակալիության մակարդակը՝ $\alpha=0,05$

$k_1 \backslash k_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Կոչքենի բաշխման կրիտիկական կետերը

(Կ—ազատության աստիճան, t —ընտրանքների թիվը)

Նշանակալիության մակարդակը՝ $\alpha=0,01$

$k \backslash l$	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9999	0,9950	0,9794	0,9586	0,9373	0,9172	0,8988
3	9933	9423	8831	8335	7933	7606	7335
4	9676	8643	7814	7212	6761	6410	6129
5	0,9279	0,7885	0,6957	0,6329	0,5875	0,5531	0,5259
6	8828	7218	6258	5635	5195	4866	4608
7	8376	6644	5685	5080	4659	4347	4105
8	0,7945	0,6152	0,5209	0,4627	0,4226	0,3932	0,3704
9	7544	5727	4810	4251	3870	3592	3378
10	7175	5358	4469	3934	3572	3308	3106
12	0,6528	0,4751	0,3919	0,3428	0,3099	0,2861	0,2680
15	5747	4069	3317	2882	2593	2386	2228
20	4799	3297	2654	2288	2048	1877	1748
24	0,4247	0,2871	0,2295	0,1970	0,1759	0,1608	0,1495
30	3632	2412	1913	1635	1454	1327	1232
40	2940	1915	1508	1281	1135	1033	0957
60	0,2151	0,1371	0,1069	0,0902	0,0796	0,0722	0,0668
120	1225	0759	0585	0489	0429	0387	0357
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Նշանակալիության մակարդակը՝ $\alpha=0,01$

$k \backslash l$	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8823	0,8674	0,8539	0,7949	0,7067	0,6062	0,5000
3	7107	6912	6743	6059	5153	4230	3333
4	5897	5702	5536	4884	4057	3251	2500
5	0,5037	0,4854	0,4697	0,4094	0,3351	0,2644	0,2000
6	4401	4229	4084	3529	2858	2229	1667
7	3911	3751	3616	3105	2494	1929	1429
8	0,3522	0,3373	0,3248	0,2779	0,2214	0,1700	0,1250
9	3207	3067	2950	2514	1992	1521	1111
10	2945	2813	2704	2297	1811	1376	1000
12	0,2535	0,2419	0,2320	0,1961	0,1535	0,1157	0,0833
15	2104	2002	1918	1612	1251	0934	0667
20	1646	1567	1501	1248	0960	0709	0500
24	0,1406	0,1338	0,1283	0,1060	0,0810	0,0595	0,0417
30	1157	1100	1054	0867	0658	0480	0333
40	0898	0853	0816	0668	0503	0363	0250
60	0,0625	0,0594	0,0567	0,0461	0,0344	0,0245	0,0167
120	0334	0316	0302	0242	0178	0125	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Հավելված 8-ի շարունակությունը

նշանակալիության մակարդակը՝ $\alpha=0,05$

$\frac{t}{\sqrt{n}}$	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332
3	9669	8709	7977	7457	7071	6771	6530
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5365
5	0,8412	0,6338	0,5981	0,5440	0,5063	0,4783	0,4564
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3980
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3535
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2901
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2666
12	0,5410	0,3924	0,3624	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1911
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1501
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1061
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	0827
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0312
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

նշանակալիության մակարդակը՝ $\alpha=0,05$

$\frac{t}{\sqrt{n}}$	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	6333	6167	6025	5466	4748	4031	3333
4	5175	5017	4884	4366	3720	3093	2500
5	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2013	0,2000
6	3817	3682	3568	3135	2612	2119	1667
7	3384	3259	3154	2756	2278	1833	1429
8	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	2768	2659	2568	2226	1820	1446	1111
10	2541	2439	2353	2032	1655	1308	1000
12	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	1815	1736	1671	1429	1144	0889	0667
20	1422	1357	1303	1108	0879	0675	0500
24	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	1002	0958	0921	0771	0604	0457	0333
40	0780	0745	0713	0595	0462	0347	0250
60	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0292	0279	0266	0218	0165	0120	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Նախարան	3
Առաջին մաս	5
Պատահույթներ	
Առաջին գլուխ—Հավանականության սահմանումը	5
§ 1. Հավանականության դասական և վիճակագրական սահմանումը	5
§ 2. Երկրաչափական հավանականություններ	13
Երկրորդ գլուխ—Հիմնական թեորեմներ	24
§ 1. Հավանականությունների գումարման և բազմապատկման թեորեմները	24
§ 2. Գոնե մեկ պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը	42
§ 3. Լրիվ հավանականության բանաձեռք	45
§ 4. Բայցեսի բանաձեռք	48
Երրորդ գլուխ—Փորձերի կրկնությունը	56
§ 1. Բեռնուլիի բանաձեռք	56
§ 2. Լապլասի լոկալ և ինտեղրալ թեորեմները	60
§ 3. Հարաբերական հաճախության շեղումը հաստատուն հավանականությունից՝ անկախ փորձերում	66
§ 4. Անկախ փորձերում պատահույթի հանդես գալու ամենահավանական թիվը	72
§ 5. Արտադրող ֆունկցիա	78
Երկրորդ մաս	
Պատահական մեծություններ	
Չորրորդ գլուխ — Դիսկրետ պատահական մեծություններ	82
§ 1. Դիսկրետ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման օրենքը: Բինոմական և Պուասոնի օրենքները	82

§ 2. Պատահույթների պարզագույն հսկք	93
§ 3. Դիսկրետ պատահական մեծությունների թվային բնութագրիչները	97
§ 4. Տեսական մոմենտները	124
Հինգերորդ գլուխ—Մեծ բվերի օրենքը	130
§ 1. Զերիշիկ անհավասարությունը	130
§ 2. Զերիշիկ թեորեմը	134
Վեցերորդ գլուխ—Պատահական մեծությունների հավանականությունների բաշխման գումարական մեծությունները	140
§ 1. Պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման ինտեղրալ ֆունկցիան	140
§ 2. Անընդհատ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման զիֆերենցիալ ֆունկցիան	146
§ 3. Անընդհատ պատահական մեծությունների թվային բնութագրիչները	153
§ 4. Հավասարաչափ բաշխում	172
§ 5. Նորմալ բաշխում	178
§ 6. Ցուցչային բաշխում և նրա թվային բնութագրիչները (78)	
§ 7. Հուսալիության ֆունկցիան	194
Յարերորդ գլուխ—Մեկ և երկու պատահական արգումենտների գումարի բաշխումը	199
§ 1. Մեկ պատահական արգումենտի ֆունկցիա	199
§ 2. Երկու պատահական արգումենտների ֆունկցիա	218
Ուրերորդ գլուխ—Երկու պատահական մեծությունների համակարգեր	227
Հ § 1. Երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենք	227
§ 2. Դիսկրետ երկչափ պատահական մեծության բաղադրիչների հավանականությունների պայմանական բաշխման օրենքները	235
§ 3. Անընդհատ երկչափ պատահական մեծության բազագրիչների զիֆերենցիալ ֆունկցիաների որոշումը	238
§ 4. Երկու անընդհատ պատահական մեծությունների համակարգի թվային բնութագրիչները	242

ԵՐՐԱՐԴ մաս	250
Մաթեմատիկական վիճակագրության տարրերը	250
Ի 6 ն ե ր ո ր դ գ լ ու խ—Ընտրանքային եղանակ	250
§ 1. Ընտրանքի վիճակագրական բաշխումը	250
§ 2. Ընտրանքային բաշխման ֆունկցիա	251
§ 3. Պոլիգոն և հիմունքրամ	253
Տասներորդ գլուխ խ—Բաշխման պարամետրերի վիճակագրական գնահատականները	260
§ 1. Կետային գնահատականներ	260
§ 2. Միջակայքային գնահատականներ	270
Տասնմեկերորդ գլուխ խ	278
Ընտրանքի տեղեկատու բնուրագրիչների հաշվառման մերողները	278
§ 1. Ընտրանքային միջինի և դիսպերսիայի հաշվառման արտագրյանների մեթոդը	278
§ 2. Ընտրանքային միջինի և դիսպերսիայի հաշվառման զումարների մեթոդը	284
§ 3. Էմպիրիկ բաշխման ասիմետրիան և էքսցեսը	288
Տասներկուերորդ գլուխ խ—Կոռելյացիայի տեսուրյան տարրերը	296
§ 1. Գծային կոռելյացիա	296
§ 2. Կորագիծ կոռելյացիա	305
Տասներերեսրորդ գլուխ խ—Վիճակագրական հիմորեզների վիճակագրական ստուգումը	312
§ 1. Հիմնական տեղեկություններ	312
§ 2. Նորմալ գլխավոր համախմբությունների երկու դիսպերսիանների համեմատումը	314
§ 3. Նորմալ համախմբության գլխավոր հիպոթետիկ և ուղղված ընտրանքային գիսպերսիանների համեմատումը	319
§ 4. Հայտնի գիսպերսիաններով երկու գլխավոր համախմբությունների միջինների համեմատումը (մեծ ժագալի անկախ ընտրանքներ)	325
§ 5. Անհայտ, բայց հավասար գիսպերսիաններով երկու նորմալ գլխավոր համախմբությունների միջինների համեմատումը (փոքր անկախ ընտրանքներ)	328

§ 6. Նորմալ համախմբության գլխավոր հիպոթետիկ միջինի համեմատումը ընտրանքային միջինի հետ	333
§ 7. Անհայտ դիսպերսիաներով նորմալ գլխավոր համախմբությունների երկու միջինների համեմատումը (ոչ անկափ ընտրանքներ)	339
§ 8. Պատահույթի հիպոթետիկ հավանականության և դիտվող հարաբերական հաճախության համեմատումը	343
§ 9. Մի քանի նորմալ համախմբությունների դիսպերսիաների համեմատումը տարբեր ծավալի ընտրանքների գեպքում: Բարտլետի չափանիշը	347
§ 10. Մի քանի նորմալ համախմբությունների դիսպերսիաների համեմատումը միատեսակ ծավալի ընտրանքների գեպքում: Կոչընի չափանիշը	354
§ 11. Կոռելյացիայի գործակցի նշանակալիթյան մասին հիպոթեզի ստուգումը	358
§ 12. Գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզի ստուգումը Պիբոնի չափանիշով	366
§ 13. Գլխավոր համախմբության նորմալ բաշխվածության մասին հիպոթեզի գրաֆիկական ստուգումը: Ուղղված դիագրամների մեթոդը:	379
§ 14. Գլխավոր համախմբության ցուցչային բաշխվածության մասին հիպոթեզի ստուգումը	392
§ 15. Գլխավոր համախմբության բինոմական օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզի ստուգումը	398
§ 16. Գլխավոր համախմբության հավասարաշափ օրենքով բաշխվածության մասին հիպոթեզի ստուգումը	403
17. Գլխավոր համախմբության Պուասոնի օրենքով բաշխած լինելու մասին հիպոթեզի ստուգումը	411

Տասնչորսերորդ գլուխայի—Միագործոն դիսպերսիոն անալիզ

§ 1. Նույն թվով փորձարկումներ բոլոր մակարդակներում	417
§ 2. Տարբեր մակարդակներում փորձերի թիվը միատեսակ չէ	426
Հավելվածներ	433
Բովանդակություն	443

Վ. Ե. Գնուրման

ՀԱՎԱՆԱԿԱՆ ՈՒԹՑՈՒՆ ԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԵՎ
ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՑՈՒՆ
ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒՇՄԱՆ ԶԵԲՆԱՐԿ

Թարգմանիչներ՝ Ֆ. Ն. Գալսոյան
Ս. Մ. Մկրտչյան
Մասն. խմբագիր՝ Տ. Վ. Ղազարյան
Խմբագիր՝ Մ. Ա. Մարգարյան, Ս. Ա. Հակոբյան
Գեղ. խմբագիր՝ Բ. Վ. Մազմանյան
Տեխ. խմբագիր՝ Մ. Ն. Դավթյան
Վերստու գող սըրագրիչ՝ Վ. Ն. Վարդանյան

Պատվեր 1589

Տպաքանակ 5000

Հանձնված է շարվածքի 22, 2. 79 թ.

Ստորագրված է տպագրության 20. 12. 79 թ.

Թուղթ № 3,84× $108^{1/32}$, բարձր տպագրություն, տառատեսակը՝ գրքի
սովորական, հրատ. 20,54 մամ., տպագր. 14,0 մամ. պայմ. 23,5 մամ.:

Գինը 1 ռ.

ИБ—№ 476

«Լույս» հրատարակություն, Երևան—9, Կիրովի 19ա
Издательство «Луис», Ереван-9, ул. Кирова, 19а.

Полиграфкомбинат им. Акопа Мегапарта Госкомитета по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли Арм. ССР, Ереван-9,
ул. Теряна, 91.