Մատրիցի անկյունագծայնացում և SVD

- Մատրիցի անկյունագծայնացում և SVD
  - Մաս 1. Անկյունագծայնացման տեսություն և հատկություններ
  - Մաս 2. Գործնական վարժություններ (Խնդիր 253)
  - Մաս 3. Մատրիցի աստիճանի բարձրացում (Խնդիր 256)
  - Մաս 4. Սիմետրիկ մատրիցներ և SVD
    - **Թեորեմ (SVD).**
  - Մաս 5. SVD-ի բաղադրիչների հաշվարկը
  - Մաս 6. Մատրիցի Ռանգը և նրա հատկությունները
    - Թեորեմ (Մատրիցի ռանգի մասին հիմնական թեորեմը)
  - Մաս 7. SVD-ի հաշվարկման երկու եղանակները
    - Եղանակ 1. «Առանձին» հաշվարկ (Դասական մոտեցում)
    - Եղանակ 2. «Կապակցված» հաշվարկ (Ավելի արդյունավետ)
  - Մաս 8. Երկրաչափական մեկնաբանություն
  - Մաս 9. Հավելյալ նշումներ

Մաս 1. Անկյունագծայնացման տեսություն և հատկություններ

1.1. Սահմանում

Մատրիցը կոչվում է **անկյունագծայնացվող**, եթե այն **նման է** որևէ անկյունագծային մատրիցի:

Դա նշանակում է, որ գոյություն ունի այնպիսի հակադարձելի P մատրից, որ՝

$$A = PDP^{-1}$$

որտեղ D-ն անկյունագծային մատրից է, որի գլխավոր անկյունագծի վրա գրված են A-ի սեփական արժեքները, իսկ P-ի սյուները A-ի սեփական վեկտորներն են:

1.2. Նման մատրիցների հատկությունը

Եթե երկու մատրից նման են ($A \sim B$), ապա նրանց **սեփական արժեքները նույնն են**:

Սա բխում է նրանից, որ նման մատրիցներն ունեն նույն բնութագրիչ բազմանդամը՝ $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$:

1.3. Հակադարձ մատրիցի սեփական արժեքները

Պնդում. Մատրիցի հակադարձի սեփական արժեքները սկզբնական մատրիցի սեփական արժեքների հակադարձներն են:

Ապացույց.

Դիցուք A մատրիցն ունի λ սեփական արժեք ($\lambda \neq 0$) և x սեփական վեկտոր.

$$Ax = \lambda x$$

Հավասարման երկու կողմը ձախից բազմապատկենք A^{-1}-ով (քանի որ A-ն հակադարձելի է, $\det A \neq 0$, ուրեմն $\lambda \neq 0$).

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}(\lambda x)$$

$$(A^{-1}A)x = \lambda(A^{-1}x)$$

$$Ix = \lambda A^{-1}x$$

$$x = \lambda A^{-1}x$$

Բաժանենք λ-ի վրա.

$$A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$$

Սա նշանակում է, որ A^{-1}-ի համար x-ը նույն սեփական վեկտորն է, իսկ սեփական արժեքը՝ $\frac{1}{\lambda}$:

Մաս 2. Գործնական վարժություններ (Խնդիր 253)

Պահանջ. Գտնել P մատրիցը, որը A-ն բերում է անկյունագծային տեսքի և հաշվել $P^{-1}AP$ արտադրյալը:

Օրինակ ա)
$A = \begin{pmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{pmatrix}$

1. **Սեփական արժեքներ.**

$$\det(A - \lambda I) = (-14 - \lambda)(17 - \lambda) - (-240) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

   Արմատներն են՝ $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$:

2. **Սեփական վեկտորներ.**
   - $\lambda = 1$-ի դեպքում համակարգը տալիս է $x_2 = \frac{5}{4}x_1 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$:
   - $\lambda = 2$-ի դեպքում համակարգը տալիս է $x_2 = \frac{4}{3}x_1 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$:
3. **Մատրիցների կազմում.**

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

   Ստուգում՝ $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$:

> Մատրիցի հակադարձը (A^{-1}) գտնելու համար սովորաբար օգտագործվում է երկու հիմնական եղանակ՝ կախված մատրիցի չափից և բարդությունից:
>
> 1. 2×2 **մատրիցի համար (Բանաձևային եղանակ)**
>
> 2×2 չափի մատրիցների դեպքում օգտագործվում է պարզ պատրաստի բանաձև, ինչը տեսնում ենք ծեր լեկցիայի վարժությունների լուծման մեջ:
>
> Եթե $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ապա հակադարձը հաշվվում է հետևյալ կերպ.
>
> $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
>
> **Քայլերը.**
>
> - **Հաշվել որոշիչը ($\det A$):** Այն պետք է զրոյից տարբեր լինի:
> - **Փոխել տեղերը.** Գլխավոր անկյունագծի տարրերը (a և d) փոխում են իրենց տեղերը:
> - **Փոխել նշանները.** Երկրորդական անկյունագծի տարրերը (b և c) փոխում են իրենց նշանները:
> - **Բաժանել որոշիչի վրա.** Ստացված մատրիցի բոլոր տարրերը բազմապատկել $1/\det(A)$-ով:
>
> **2.** $n \times n$ **մատրիցի համար (Գաուս-Ժորդանի մեթոդ)**
>
> Ավելի մեծ մատրիցների համար (օրինակ՝ 3×3) լեկցիայի ժամանակ կիրառվել է **Գաուս-Ժորդանի օժանդակ մատրիցի մեթոդը**:

> **Քայլերը.**
>
> 3. **Կազմել կցագրված մատրիցը.** Տրված P մատրիցի կողքին գրում ենք նույն չափի I միավոր մատրիցը՝ $[P|I]$:
> 4. **Կատարել տողային ձևափոխություններ.** Օգտագործելով տողերի գումարում, հանում կամ բազմապատկում թվով, ձախ կողմում գտնվող P մատրիցը դարձնել միավոր մատրից (I):
> 5. **Ստանալ պատասխանը.** Երբ ձախ կողմում ստացվում է I, ապա աջ կողմում ավտոմատ կերպով ձևավորվում է P^{-1} հակադարձ մատրիցը:

Օրինակ բ)
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

1. **Սեփական արժեքներ.** Եռանկյուն մատրից է, արժեքներն անկյունագծի վրա են՝ $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$:
2. **Սեփական վեկտորներ.**
   - $\lambda = 1 \Rightarrow 6x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 3x_1 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$:
   - $\lambda = -1 \Rightarrow 2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:
3. **Արդյունք.**

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Օրինակ գ)
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. **Բնութագրիչ հավասարում.**
   $(1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-2) = 0$
   Սեփական արժեքներ՝ $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$:
2. **Սեփական վեկտորներ.**
   - $\lambda = 0 \Rightarrow v_1 = (0, 1, -1)^T$:
   - $\lambda = 1 \Rightarrow v_2 = (1, 0, 0)^T$:
   - $\lambda = 2 \Rightarrow v_3 = (0, 1, 1)^T$:
3. **P^{-1}-ի հաշվարկը Գաուս-Ժորդանի մեթոդով.**
   Կցագրված մատրիցը՝ $[P|I] \xrightarrow{R_i \to \dots} [I|P^{-1}]$:

Ստացվում է $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$:

Օրինակ դ) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Քանի որ մատրիցը **եռանկյուն** է (ներքևում զրոներ են), սեփական արժեքները միանգամից վերցնում ենք անկյունագծից.

- $\lambda_1 = 2$
- $\lambda_2 = 3$
- $\lambda_3 = 3$

Ունենք $\lambda = 2$ և $\lambda = 3$ **(կրկնապատիկ)**:

Քայլ 2. Սեփական վեկտորները ($\lambda = 2$-ի համար)

Լուծում ենք $(A - 2I)X = 0$ համակարգը (անկյունագծից հանում ենք 2):

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 0 & -2 \\ 0 & 3-2 & 0 \\ 0 & 0 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Գրենք հավասարումները.

1. $-2x_3 = 0 \Rightarrow \mathbf{x_3 = 0}$
2. $1x_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{x_2 = 0}$
3. $1x_3 = 0$ (նույնն է, ինչ առաջինը)

Վերլուծություն.

- x_3-ը պարտադիր 0 է:
- x_2-ը պարտադիր 0 է:
- x_1-ի մասին ոչ մի հավասարում չկա (առաջին սյան մեջ 0-ներ են): Ուրեմն **x_1-ը ազատ է** (կարող է լինել ցանկացած թիվ):

Ընտրում ենք $x_1 = 1$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Քայլ 3. Սեփական վեկտորները ($\lambda = 3$-ի համար) — Ուշադրությու՛ն

Լուծում ենք $(A - 3I)X = 0$ համակարգը (անկյունագծից հանում ենք 3):

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 0 & -2 \\ 0 & 3-3 & 0 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Բազմապատկենք վեկտորով՝ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

Ստանում ենք հավասարումների համակարգը.

1. $-1x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -x_1 - 2x_3 = 0$
2. $0 = 0$
3. $0 = 0$

Վերլուծություն (Ամենակարևոր մասը).

Մենք ունենք ընդամենը **մեկ** իրական պայման՝

$$x_1 = -2x_3$$

Իսկ ի՞նչ է կատարվում x_2-ի հետ:

Նայեք 2-րդ տողին՝ $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$: Այս հավասարումը ճիշտ է ցանկացած x_2-ի համար:

Սա նշանակում է, որ x_2**-ը լիակատար ազատ փոփոխական է** (այն կապված չէ ոչ x_1-ի, ոչ էլ x_3-ի հետ):

Այսպիսով, մենք ունենք **2 ազատություն** (2 ազատ փոփոխական).

1. x_3-ը ազատ է (նրանով որոշում ենք x_1-ը):
2. x_2-ը ազատ է (նա ոչ մեկից կախված չէ):

Ինչպես ստանալ 2 վեկտոր.

Ընդհանուր լուծումը գրվում է այսպես.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Տրոհենք սա երկու մասի՝ առանձնացնելով x_2-ն ու x_3-ը.

$$X = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ահա այստեղից էլ դուրս են գալիս մեր երկու անկախ վեկտորները.

- **Վեկտոր 1 (v_2):** Վերցնենք $x_2 = 1, x_3 = 0$:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Վեկտոր 2 (v_3):** Վերցնենք $x_2 = 0, x_3 = 1$:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

> **Ամփոփում.**
>
> Երկրորդ վեկտորը հայտնվեց, որովհետև մատրիցի ամբողջ 2-րդ տողը զրոյացավ, ինչը թույլ տվեց x_2-ին լինել ցանկացած թիվ՝ անկախ մյուսներից:

Մաս 3. Մատրիցի աստիճանի բարձրացում (Խնդիր 256)

Տրված է՝ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$: Պահանջվում է հաշվել A^{10}:

Քայլ 1. Գտնում ենք սեփական արժեքները (λ)

Քանի որ մատրիցը **եռանկյուն** է (զրոն վերևում է), սեփական արժեքները անկյունագծի թվերն են.

- $\lambda_1 = 1$
- $\lambda_2 = 2$

Քայլ 2. Գտնում ենք սեփական վեկտորները (P մատրիցի համար)
ա) $\lambda = 1$-ի համար.

Լուծում ենք $(A - 1 \cdot I)X = 0$ հավասարումը:

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ -1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$-x + y = 0 \Rightarrow x = y$:

Վերցնենք $x = 1$, ուրեմն $y = 1$:

Ստացանք վեկտոր $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

բ) $\lambda = 2$-ի համար.

Լուծում ենք $(A - 2 \cdot I)X = 0$ հավասարումը:

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 0 \\ -1 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$-x = 0 \Rightarrow x = 0$: y-ը կարող է լինել ցանկացած թիվ (ազատ է):

Վերցնենք $y = 1$:

Ստացանք վեկտոր $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

Քայլ 3. Կազմում ենք P և D մատրիցները

- P-ն կազմում ենք՝ վեկտորները սյուն առ սյուն գրելով (v_1, հետո v_2).

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- D-ն կազմում ենք՝ անկյունագծի վրա գրելով սեփական արժեքները (նույն հերթականությամբ՝ 1, հետո 2).

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Քայլ 4. Գտնում ենք P^{-1} հակադարձ մատրիցը

2×2 մատրիցի հակադարձի բանաձևով.

$$\det(P) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 1$$

Փոխում ենք անկյունագծի տեղերը (1 և 1), փոխում ենք մյուսների նշանները (0 և -1).

$$P^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Քայլ 5. Հաշվում ենք A^{10}-ը (Հիմնական մասը)

Բանաձևն է՝ $A^{10} = P \cdot D^{10} \cdot P^{-1}$

Նախ հաշվենք D^{10}-ը (ուղղակի թվերը բարձրացնում ենք աստիճան).

$$D^{10} = \begin{pmatrix} 1^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1024 \end{pmatrix}$$

Հիմա կատարենք բազմապատկումը՝ **ձախից աջ**:

Մաս 1. Հաշվենք $P \cdot D^{10}$ արտադրյալը.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1024 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1024 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1024 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1024 \end{pmatrix}$$

Մաս 2. Ստացվածը բազմապատկենք P^{-1}-ով.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1024 \end{pmatrix}}_{\text{Արդյունք}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

Կատարենք «տողը սյան վրա» բազմապատկումը.

- **Տող 1, Սյուն 1:** $1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = \mathbf{1}$
- **Տող 1, Սյուն 2:** $1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = \mathbf{0}$
- **Տող 2, Սյուն 1:** $1 \cdot 1 + 1024 \cdot (-1) = 1 - 1024 = -\mathbf{1023}$
- **Տող 2, Սյուն 2:** $1 \cdot 0 + 1024 \cdot 1 = \mathbf{1024}$

Վերջնական Պատասխան

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1023 & 1024 \end{pmatrix}$$

Մաս 4. Սիմետրիկ մատրիցներ և SVD

4.1. Սիմետրիկ մատրիցներ ($A = A^T$)
Եթե մատրիցը սիմետրիկ է, ապա այն կարելի է անկյունագծայնացնել **օրթոգոնալ** մատրիցի միջոցով:

Այսինքն՝ P մատրիցը օրթոգոնալ է, ինչը նշանակում է $P^{-1} = P^T$:

Հետևաբար բանաձևը դառնում է՝

$$A = PDP^T$$

4.2. Մատրիցի Եզակի Արժեքների Վերլուծություն (SVD - Singular Value Decomposition)
Անկյունագծային վերլուծությունը աշխատում է միայն քառակուսի մատրիցների համար ($n \times n$), որոնք ունեն բավարար քանակությամբ անկախ սեփական վեկտորներ:

SVD-ն ավելի ընդհանուր մոտեցում է, որը կիրառելի է **կամայական** $m \times n$ մատրիցի համար:

Թեորեմ (SVD).

Կամայական $A \in M_{m\times n}$ մատրիցի համար գոյություն ունեն $U \in M_{m\times m}$, $\Sigma \in M_{m\times n}$ և $V \in M_{n\times n}$ մատրիցներ այնպես, որ՝

$$A = U\Sigma V^T$$

որտեղ՝

- U-ն և V-ն օրթոգոնալ մատրիցներ են ($U^{-1} = U^T, V^{-1} = V^T$):
- Σ-ն (սիգմա) անկյունագծային տեսք ունի (ուղղանկյուն անկյունագծային), որի անկյունագծի վրա A-ի **եզակի արժեքներն են** (σ_i):

4.3. Ինչպե՞ս գտնել U, Σ, V-ն

Մենք օգտագործում ենք AA^T և A^TA սիմետրիկ մատրիցները:

1. V **մատրիցը** ստացվում է A^TA-ի սեփական վեկտորներից:
2. U **մատրիցը** ստացվում է AA^T-ի սեփական վեկտորներից:
3. **Եզակի արժեքները (σ_i)** հավասար են A^TA-ի սեփական արժեքների քառակուսի արմատներին ($\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$):

Մաս 5. SVD-ի բաղադրիչների հաշվարկը

(U, Σ, V)
Մենք գիտենք, որ ցանկացած A մատրից կարելի է ներկայացնել $A = U\Sigma V^T$ տեսքով: Հարց է առաջանում՝ ինչպե՞ս գտնել այդ անհայտ մատրիցները: Դրա համար օգտագործում ենք A-ի և իր տրանսպոզի արտադրյալները:

5.1. V մատրիցի և եզակի արժեքների (Σ) ստացումը՝ $A^T A$-ի միջոցով

Դիտարկենք $A^T A$ սիմետրիկ մատրիցը և տեղադրենք A-ի SVD վերլուծությունը:

1. **Տեղադրում.**

$$A^T A = (U\Sigma V^T)^T (U\Sigma V^T)$$

2. **Տրանսպոզի բացում.**
Օգտվելով $(AB)^T = B^T A^T$ հատկությունից՝ առաջին փակագիծը դառնում է $(V^T)^T \Sigma^T U^T = V\Sigma^T U^T$:

$$A^T A = V\Sigma^T \underbrace{U^T U}_{I} \Sigma V^T$$

3. **Օրթոգոնալության կիրառում.**
Քանի որ U-ն օրթոգոնալ մատրից է, ապա $U^T U = I$ (միավոր մատրից):
4. **Արդյունք.**

$$A^T A = V(\Sigma^T \Sigma)V^T$$

Եզրակացություն.

Ստացված հավասարումը՝ $A^T A = V(\Sigma^T \Sigma)V^T$, իրենից ներկայացնում է $A^T A$ մատրիցի **անկյունագծայնացումը** (սպեկտրալ վերլուծությունը):

- V-ի սյուները $A^T A$ **մատրիցի սեփական վեկտորներն են** (աջ եզակի վեկտորներ):
- $\Sigma^T \Sigma$ մատրիցը անկյունագծային է, որի տարրերը **$A^T A$-ի սեփական արժեքներն են**:

5.2. U մատրիցի ստացումը՝ AA^T-ի միջոցով

Նույն տրամաբանությամբ դիտարկում ենք AA^T արտադրյալը:

1. **Տեղադրում.**

$$AA^T = (U\Sigma V^T)(U\Sigma V^T)^T$$

2. **Տրանսպոզի բացում.**

$$AA^T = U\Sigma \underbrace{V^T V}_{I} \Sigma^T U^T$$

3. **Օրթոգոնալության կիրառում.**
   Քանի որ V-ն օրթոգոնալ է, $V^T V = I$:
4. **Արդյունք.**

$$AA^T = U(\Sigma\Sigma^T)U^T$$

Եզրակացություն.

- U-ի սյուները AA^T **մատրիցի սեփական վեկտորներն են** (ձախ եզակի վեկտորներ):
- $\Sigma\Sigma^T$-ը պարունակում է AA^T-ի սեփական արժեքները:

5.3. Եզակի արժեքների (σ) կապը սեփական արժեքների (λ) հետ

Ի՞նչ տեսք ունի $\Sigma^T\Sigma$ մատրիցը:

Գրատախտակին բերված է օրինակ 3×2 չափի Σ մատրիցի համար:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Բազմապատկելով իր տրանսպոզի հետ՝ ստանում ենք.

$$\Sigma^T\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Կարևոր պնդում.

$A^T A$ մատրիցի սեփական արժեքները (λ_i) հավասար են A մատրիցի եզակի արժեքների քառակուսիներին (σ_i^2):

Այսինքն՝

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^T A)}$$

> Այստեղ $\lambda_i(A^T A)$ գրառումը չի նշանակում «λ_i թիվը բազմապատկած $A^T A$ մատրիցով»:
>
> $\lambda_i(M)$ նշանակում է՝ «M մատրիցի i-րդ սեփական արժեքը»: Սա ֆունկցիայի նման նշանակում է (ինչպես $f(x)$-ը):
>
> Հետևաբար, արմատի տակ ոչ թե մատրից է, այլ մի սովորական թիվ (սեփական արժեքը):
>
> Բանաձևը կարդացվում է այսպես. «A մատրիցի i-րդ եզակի արժեքը (σ_i) հավասար է $A^T A$ մատրիցի i-րդ սեփական արժեքի (λ_i) քառակուսի արմատին»:

Սա բացատրում է, թե ինչու են SVD-ի մեջ եզակի արժեքները միշտ ոչ բացասական (քառակուսի արմատ են):

Մաս 6. Մատրիցի Ռանգը և նրա հատկությունները

Նախքան SVD-ի հաշվարկման նրբություններին անցնելը, պետք է հասկանալ **ռանգի (rank)** գաղափարը, քանի որ հենց դա է որոշում, թե քանի հատ զրոյից տարբեր եզակի արժեք (σ) ենք ունենալու:

6.1. Սահմանում և Տարրական Ձևափոխություններ

Սահմանում. Մատրիցի **տողային ռանգ** կոչվում է այդ մատրիցի գծորեն անկախ տողերի առավելագույն քանակը:

Նույնը ճիշտ է սյուների համար (սյունային ռանգ):

Կարևոր Պնդում. Մատրիցի տարրական ձևափոխությունները (տողերի տեղափոխություն, բազմապատկում թվով, գումարում) **չեն փոխում մատրիցի ռանգը**:

Սա նշանակում է, որ Գաուսի մեթոդով մատրիցը պարզեցնելիս նրա անկախ տողերի քանակը մնում է նույնը:

6.2. Ռանգի վերաբերյալ թեորեմներ

1. **Տրանսպոզի ռանգը.** Մատրիցի և նրա տրանսպոզի ռանգերը հավասար են՝ $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$:
2. **Արտադրյալի ռանգը.** Երկու մատրիցների արտադրյալի ռանգը չի գերազանցում արտադրիչներից յուրաքանչյուրի ռանգը.

$$\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$$

Թեորեմ (Մատրիցի ռանգի մասին հիմնական թեորեմը)

Կամայական $A \in M_{m\times n}$ մատրիցի համար նրա սյունային ռանգը հավասար է նրա տողային ռանգին:

$$\mathrm{rank}_{col}(A) = \mathrm{rank}_{row}(A)$$

Ապացույց (Մատրիցների վերլուծության մեթոդով)

1. Ենթադրություն.

Դիցուք A մատրիցի սյունային ռանգը հավասար է r-ի ($\mathrm{rank}_{col}(A) = r$): Սա նշանակում է, որ A-ի սյունային տարածության բազիսը բաղկացած է r հատ վեկտորներից:

2. Մատրիցների կառուցում.

Լինեն $b_1, b_2, \ldots, b_r$ վեկտորները A-ի սյունային տարածության բազիսի տարրերը: Կազմենք $B \in M_{m\times r}$ մատրիցը, որի սյուները հենց այս բազիսային վեկտորներն են:

Քանի որ A մատրիցի յուրաքանչյուր a_j սյուն պատկանում է սյունային տարածությանը, այն կարող է ներկայացվել որպես B-ի սյուների գծային կոմբինացիա.

$$a_j = c_{1j}b_1 + c_{2j}b_2 + \cdots + c_{rj}b_r$$

Սա նշանակում է, որ գոյություն ունի մի $C \in M_{r\times n}$ մատրից այնպիսին, որ.

$$A = B \cdot C$$

3. Տողային ռանգի գնահատում.

Նայենք այս արտադրյալին տողերի տեսանկյունից: Մատրիցների բազմապատկման սահմանման համաձայն՝ A մատրիցի յուրաքանչյուր տող հանդիսանում է C **մատրիցի տողերի գծային կոմբինացիա**:

$$(B \cdot C)_i = \sum_{k=1}^{r} b_{ik} C_k$$

Քանի որ C մատրիցն ունի ընդամենը r **հատ տող**, ապա A-ի տողային տարածությունը կարող է սպառվել (ծնվել) առավելագույնը r հատ վեկտորներով: Հետևաբար, A-ի տողային ռանգը չի կարող գերազանցել r-ը.

$$\mathrm{rank}_{row}(A) \le r = \mathrm{rank}_{col}(A)$$

4. Հակադարձ անհավասարություն.

Այս նույն տրամաբանությունը կիրառենք A^T (տրանսպոզացված) մատրիցի համար:

Քանի որ $\text{rank}_{row}(A) = \text{rank}_{col}(A^T)$ և $\text{rank}_{col}(A) = \text{rank}_{row}(A^T)$, ապա վերևի ապացուցված անհավասարությունից հետևում է.

$$\text{rank}_{col}(A^T) \le \text{rank}_{row}(A^T) \implies \text{rank}_{row}(A) \le \text{rank}_{col}(A)$$

և միաժամանակ՝

$$\text{rank}_{col}(A) \le \text{rank}_{row}(A)$$

5. Եզրակացություն.

Քանի որ երկու կողմից ունենք ոչ խիստ անհավասարություններ, միակ հնարավոր տարբերակը դրանց հավասարությունն է.

$$\text{rank}_{row}(A) = \text{rank}_{col}(A)$$

■

Մաս 7. SVD-ի հաշվարկման երկու եղանակները

Մենք գիտենք, որ $A = U\Sigma V^T$: Գործնականում այս վերլուծությունը ստանալու համար կա երկու մոտեցում:

Եղանակ 1. «Առանձին» հաշվարկ (Դասական մոտեցում)

Սա այն մեթոդն է, որը քննարկեցինք նախորդ մասում:

1. Հաշվում ենք A^TA սիմետրիկ մատրիցը և գտնում նրա սեփական վեկտորները $\to$ ստանում ենք V **մատրիցը**:
2. Հաշվում ենք AA^T սիմետրիկ մատրիցը և գտնում նրա սեփական վեկտորները $\to$ ստանում ենք U **մատրիցը**:
3. Սեփական արժեքներից ստանում ենք $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ և լցնում Σ **մատրիցը**:

Թերությունը. Եթե մատրիցը շատ մեծ է, երկու անգամ սեփական վեկտորներ հաշվելը երկար գործընթաց է:

Եղանակ 2. «Կապակցված» հաշվարկ (Ավելի արդյունավետ)

Այս մեթոդը հիմնված է այն բանի վրա, որ U-ն և V-ն իրար հետ կապված են: Մենք կարող ենք գտնել մեկը և դրա միջոցով ստանալ մյուսը:

Քայլ 1. Գտնում ենք V մատրիցը (աջ եզակի վեկտորները)՝ լուծելով $A^T A$-ի խնդիրը:

Քայլ 2. Օգտագործում ենք հետևյալ կապը.

Մենք գիտենք, որ $AV = U\Sigma$:

Բացենք սա ըստ սյուների (v_i և u_i վեկտորների համար).

$$Av_i = \sigma_i u_i$$

Այստեղից կարող ենք արտահայտել u_i-ն.

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$$

Ինչու՞ է սա կարևոր (Ռանգի դերը):

Այս բանաձևը աշխատում է միայն այն դեպքում, երբ $\sigma_i \neq 0$:

- Եթե մատրիցի ռանգը r է, ապա մենք ունենք r հատ զրոյից տարբեր σ_i:
- Այս բանաձևով մենք կարող ենք գտնել U մատրիցի **առաջին r հատ սյուները**:

Ի՞նչ անել մնացած սյուների հետ (Զրոյական տողերի/սյուների խնդիրը).

Եթե U մատրիցը պետք է լինի $m \times m$ չափի, բայց մենք գտել ենք ընդամենը r հատ սյուն (որտեղ $r < m$), մնացած $m - r$ սյուները պետք է լրացնել այնպես, որ U-ն մնա **օրթոգոնալ**:

- Այս լրացուցիչ սյուները ընտրվում են A^T-ի զրոյական ենթատարածությունից (kernel):
- Դրանք պետք է լինեն ուղղահայաց արդեն գտնված $u_1, \ldots, u_r$ վեկտորներին: Սա հենց այն մասն է, որ նշեցիք՝ «պետք է առանձին աշխատենք»:

Մաս 8. Երկրաչափական մեկնաբանություն

Նկարում պատկերված է SVD-ի գեղեցիկ երկրաչափական իմաստը:

Այն ցույց է տալիս, թե ինչպես է կամայական A մատրիցը ձևափոխում տարածությունը՝ այն բաժանելով երեք պարզ քայլերի:

Ըստ բանաձևի՝ $A = U\Sigma V^T$: Պատկերը ցույց է տալիս այս գործողությունների հաջորդականությունը ձախից աջ.

1. **Պտույտ (V^T մատրից).**
   - Սկզբնական փուլում ունենք միավոր շրջանագիծ՝ ստանդարտ բազիսային վեկտորներով (v_1, v_2):
   - V^T գործողությունը պտտում է այս վեկտորները այնպես, որ նրանք համընկնեն մատրիցի «բնական» առանցքների հետ: V-ի սյուները $A^T A$ մատրիցի սեփական վեկտորներն են:
2. **Ձգում (Σ մատրից).**
   - Սա վերլուծության միակ քայլն է, որը փոխում է վեկտորների երկարությունը:
   - Շրջանագիծը վերածվում է **էլիպսի**: Առանցքները ձգվում են σ_1 և σ_2 գործակիցներով, որոնք կոչվում են **եզակի արժեքներ**:
   - Հիշենք, որ $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^T A)}$:
3. **Վերջնական պտույտ (U մատրից).**
   - Ստացված էլիպսը պտտվում է նոր կոորդինատային համակարգում:
   - U-ի սյուները (u_1, u_2) հանդիսանում են AA^T մատրիցի սեփական վեկտորները:

> **Ինչու է սա կարևոր**
>
> - **Տվյալների սեղմում.** Մեծ σ արժեքները ցույց են տալիս տվյալների ամենակարևոր ուղղությունները: Փոքր σ-ները զրոյացնելով՝ կարելի է սեղմել պատկերները կամ տվյալները՝ առանց էական կորուստների:
> - **Մատրիցի ռանգ.** Զրոյից տարբեր σ արժեքների քանակը ճշգրիտ ցույց է տալիս մատրիցի ռանգը:
> - **Կայունություն.** Ի տարբերություն սովորական անկյունագծայնացման ($A = PDP^{-1}$), որը պահանջում է քառակուսի մատրից և անկախ սեփական վեկտորներ, SVD-ն հնարավոր է իրականացնել **ցանկացած** մատրիցի համար:

> **Հիմա երեք պատճառ, թե ինչու է հենց $A^T A$-ն պատասխանատու V մատրիցի (մուտքային ուղղությունների) համար.**
>
> Պատկերացրեք, դուք ունեք մի վեկտոր x և ուզում եք իմանալ, թե A մատրիցն այն ինչքանով է **երկարացնում**: Մեզ հետաքրքիր է արդյունքի (Ax) երկարության քառակուսին.

$$\|Ax\|^2 = (Ax)^T(Ax) = x^T(A^TA)x$$

Տեսնու՞մ եք, A^TA-ն հայտնվեց հենց այնտեղ, որտեղ մենք չափում ենք, թե ինչ է անում A-ն վեկտորի **երկարության** հետ:

- A^TA-ի սեփական վեկտորները (V) այն ուղղություններն են, որոնցով A-ն **առավելագույն** կամ **նվազագույն** ձգումն է կատարում:
- Այդ պատճառով V-ն կոչվում է «մուտքային բազիս»՝ այն ցույց է տալիս, թե A-ի համար ո՛ր ուղղություններն են կարևոր:

2. «Այնտեղ և հետ» սկզբունքը

A մատրիցը վեկտորը տանում է մի աշխարհից մյուսը ($x \to Ax$): Բայց մենք չենք կարող խոսել սեփական վեկտորների մասին, եթե վեկտորը չի վերադառնում նույն աշխարհ:

- A-ն տանում է վեկտորը «թիրախային» տարածություն:
- A^T-ն այն հետ է բերում «մեկնարկային» տարածություն:

Երբ մենք հաշվում ենք A^TA, մենք հարցնում ենք. «Ո՞ր ուղղություններն են, որոնք այնտեղ գնալուց և հետ գալուց հետո **չեն փոխում իրենց ուղղությունը** (միայն երկարությունն է փոխվում)»: Դրանք հենց A^TA-ի սեփական վեկտորներն են:

3. Մաթեմատիկական «զտումը» (Cancellation)

Եթե նայենք հանրահաշվորեն, $A = U\Sigma V^T$ վերլուծության մեջ U-ն պատասխանատու է «ելքային» պտույտի համար, իսկ V-ն՝ «մուտքային»: Երբ մենք հաշվում ենք A^TA, մենք «չեզոքացնում» ենք U-ն.

1. $A^TA = (V\Sigma^TU^T)(U\Sigma V^T)$:
2. Քանի որ U-ն օրթոգոնալ է, $U^TU = I$ (այն անհետանում է):
3. Մնում է միայն $V\Sigma^T\Sigma V^T$:

Սա նշանակում է, որ **A^TA-ն չի տեսնում U-ին**: Այն կենտրոնանում է միայն V-ի և ձգումների (Σ) վրա: Դա նման է նրան, որ դուք պտտեք մի գունդ, ձգեք այն, ու հետո էլի պտտեք: Եթե ուզում եք իմանալ միայն ձգման ուղղությունները, վերջին պտույտը (U) ձեզ պետք չէ:

Ամփոփում

- V **(աջ եզակի վեկտորները)** գալիս են A^TA-ից, որովհետև դրանք բնութագրում են **մուտքային** տարածության այն ուղղությունները, որոնք A-ն ամենաշատն է ձգում:
- U **(ձախ եզակի վեկտորները)** գալիս են AA^T-ից, որովհետև դրանք բնութագրում են, թե այդ ձգված ուղղությունները **ուր են հասել** ելքային տարածության մեջ:

Ե> կեք դիտարկենք այս օրինակը և տեսնենք, թե ինչպես է $\|Ax\|^2$ «էներգիան» կամ ձգման չափը փոփոխվում տարբեր ուղղությունների վրա:

> Հիշեցնենք մեր A մատրիցը և նրա A^TA արտադրյալը.
>
> $$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^TA = \begin{pmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 25 \end{pmatrix}$$
>
> A^TA-ի սեփական արժեքները և վեկտորները.
>
> - $\lambda_1 = 45$ համապատասխանող $v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ վեկտորին:
> - $\lambda_2 = 5$ համապատասխանող $v_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ վեկտորին:
>
> #### 1. Ստուգում v_1 ուղղության վրա (Առավելագույն ձգում)
>
> Եկեք տեսնենք, թե ինչ է անում A մատրիցը առաջին սեփական վեկտորի հետ.
>
> $$Av_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} \\ 9/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
>
> Հաշվենք արդյունքի երկարության քառակուսին.
>
> $$\|Av_1\|^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{9}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{2} + \frac{81}{2} = \frac{90}{2} = \mathbf{45}$$
>
> **Ինտուիտիվ նկատառում.** Ստացված թիվը ճշգրիտ հավասար է λ_1-ին: Սա նշանակում է, որ v_1 ուղղությամբ վեկտորը ձգվում է $\sqrt{45} \approx 6.7$ անգամ:
>
> #### 2. Ստուգում v_2 ուղղության վրա (Նվազագույն ձգում)
>
> Այժմ փորձենք երկրորդ սեփական վեկտորը.
>
> $$Av_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
>
> Հաշվենք երկարության քառակուսին.

$$\|Av_2\|^2 = \left(\frac{-3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = \frac{10}{2} = \mathbf{5}$$

Ինտուիտիվ նկատառում. Արդյունքը հավասար է λ_2-ին: Այս ուղղությամբ մատրիցը շատ ավելի թույլ է ձգում վեկտորը՝ ընդամենը $\sqrt{5} \approx 2.2$ անգամ:

Եզրակացություն. Ինչու՞ A^TA

Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ A^TA մատրիցը հանդես է գալիս որպես **«ուղղությունների զտիչ»**.

- Եթե մենք վերցնեինք ցանկացած այլ միավոր վեկտոր x (որը v_1 կամ v_2 չէ), ապա $\|Ax\|^2$ արժեքը կլիներ 5-ի և 45-ի միջև:
- A^TA-ի սեփական վեկտորները (V մատրիցի սյուները) այն **կրիտիկական ուղղություններն են**, որոնք բացահայտում են մատրիցի ամբողջական ուժը կամ թուլությունը:
- Հենց այդ պատճառով SVD-ն կառուցելիս մենք սկսում ենք A^TA-ից՝ մենք ուզում ենք գտնել այն առանցքները, որոնց երկայնքով մատրիցը կատարում է իր հիմնական «աշխատանքը»:

Այսինքն, V մատրիցը մեզ տալիս է **էլիպսի առանցքների ուղղությունները** նախքան պտտվելը, իսկ U մատրիցը ցույց է տալիս, թե այդ առանցքները որտեղ են հայտնվում ձևափոխությունից հետո:

1. Որտեղի՞ց ենք ստանում $u_i = \frac{1}{\sigma_i} Av_i$ բանաձևը

Այս բանաձևը օդից չի ընկել, այն ուղղակիորեն բխում է SVD-ի հիմնական հավասարումից: Եկեք դուրս բերենք այն քայլ առ քայլ.

1. Գրենք SVD-ի հիմնական բանաձևը.

$$A = U\Sigma V^T$$

2. Երկու կողմը աջից բազմապատկենք V-ով (հիշելով, որ $V^TV = I$, քանի որ V-ն օրթոգոնալ է).

$$AV = U\Sigma \underbrace{V^TV}_{I}$$

$$AV = U\Sigma$$

3. Հիմա նայենք այս հավասարմանը **սյուն առ սյուն**:
   - Ձախ կողմում՝ A անգամ V-ի i-րդ սյուն (v_i):
   - Աջ կողմում՝ U-ի i-րդ սյուն (u_i) բազմապատկած Σ-ի անկյունագծի i-րդ թվով (σ_i):

$$Av_i = \sigma_i u_i$$

4. Այստեղից էլ գտնում ենք u_i-ն (բաժանելով σ_i-ի).

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} Av_i$$

Ինտուիտիվ իմաստը. Այս բանաձևն ասում է՝ «Եթե v_i վեկտորը մտցնենք A մեքենայի մեջ (Av_i), մենք կստանանք u_i ուղղությունը, բայց σ_i անգամ ձգված: Որպեսզի ստանանք մաքուր u_i (որի երկարությունը 1 է), պետք է արդյունքը բաժանենք ձգման գործակցի (σ_i) վրա»:

2. Ինչու՞ պետք է U և V մատրիցները լինեն օրթոգոնալ

Սա SVD-ի գեղեցկությունն է:

ա) Ի՞նչ է նշանակում օրթոգոնալ մատրից:

Օրթոգոնալ մատրիցը ($Q^T = Q^{-1}$) երկրաչափորեն նշանակում է **Պտույտ (Rotation)** կամ **Հայելային արտացոլում**:

Այն ունի երկու կարևոր հատկություն.

1. **Չի փոխում երկարությունը.** Նա ոչինչ չի ձգում և չի սեղմում: Նա միայն պտտում է օբյեկտը:
2. **Չի աղավաղում անկյունները.** Նրա սյուները (առանցքները) միշտ մնում են իրար ուղղահայաց (90°):

բ) Ինչու՞ դրանք պետք է լինեն օրթոգոնալ SVD-ում:

Մենք ուզում ենք A մատրիցի բարդ գործողությունը բաժանել պարզ, հասկանալի մասերի:

$$A = \underbrace{U}_{\text{Պտույտ}} \cdot \underbrace{\Sigma}_{\text{Ձգում}} \cdot \underbrace{V^T}_{\text{Պտույտ}}$$

- Եթե U-ն և V-ն օրթոգոնալ չլինեին, նրանք նույնպես կձգեին կամ կսեղմեին տարածությունը:

- Այդ դեպքում Σ-ն չէր լինի միակ պատասխանատուն «ձգման» համար, և մենք չէինք իմանա՝ իրականում որքան է մատրիցի ուժը (σ):
- **Օրթոգոնալությունը երաշխավորում է, որ մենք ընտրում ենք կոշտ, չաղավաղված կոորդինատային համակարգ (grid):** Մենք պտտում ենք ցանցը (V), ձգում ենք այն (Σ), և նորից պտտում (U), բայց ցանցի առանցքները երբեք չեն ծռմռվում:

3. SVD-ն և Պատկերների Սեղմումը (Image Compression)

Սա SVD-ի ամենատպավորիչ կիրառությունն է: Եկեք տեսնենք, թե ինչպես է դա աշխատում:

Գաղափարը.

Համակարգչի համար նկարը պարզապես թվերի մատրից է (օրինակ՝ սև-սպիտակ նկարում յուրաքանչյուր թիվ ցույց է տալիս պիքսելի պայծառությունը):

Երբ մենք անում ենք SVD ($A = U\Sigma V^T$), մենք կարող ենք մատրիցը գրել որպես գումար.

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \sigma_3 u_3 v_3^T + \cdots + \sigma_n u_n v_n^T$$

- σ_1 **(Ամենամեծը):** Պարունակում է նկարի հիմնական ինֆորմացիան (ուրվագծերը, մեծ լույսերը):
- σ_{50} **(Փոքրը):** Պարունակում է մանր դետալները:
- σ_n **(Շատ փոքր):** Պարունակում է աղմուկ (noise) կամ անկարևոր ինֆորմացիա:

Սեղմում (Compression):

Մեզ պե՞տք են բոլորը: **Ոչ:**

Մենք կարող ենք վերցնել միայն առաջին մի քանի հատը (ասենք՝ առաջին 20-ը կամ 50-ը) և դեն նետել մնացածը:

$$A_{compressed} \approx \sigma_1 u_1 v_1^T + \cdots + \sigma_{50} u_{50} v_{50}^T$$

Ինչու՞ է սա խնայում տեղ:

Պատկերացրեք ունեք 1000×1000 չափի նկար ($1,000,000$ թիվ):

Եթե պահենք միայն առաջին 50 եզակի արժեքները ($k = 50$).

- U: 1000×50 թիվ
- V: 50×1000 թիվ
- Σ: 50 թիվ

> - Ընդամենը՝ $\approx 100,000$ թիվ:
>   **Արդյունք:** Մենք սեղմեցինք նկարը **10 անգամ**, բայց աչքը գրեթե չի նկատի տարբերությունը, քանի որ մենք պահպանեցինք ամենամեծ σ-ները (կարևոր ինֆորմացիան):
>
> **Ամփոփում.** SVD-ն թույլ է տալիս առանձնացնել նկարի «կարևոր» շերտերը «աննշան» շերտերից և պահել միայն կարևորը:

> Այսինքն՝ ցանկացած գծային ձևափոխություն կարելի է պատկերացնել որպես՝ **Պտույտ** $\rightarrow$ **Ձգում** $\rightarrow$ **Պտույտ**:

Մաս 9. Հավելյալ նշումներ

- **Սիմետրիկ մատրիցներ.** Եթե A-ն սիմետրիկ է, նրա սեփական վեկտորները արդեն իսկ **օրթոգոնալ** են: Սա հեշտացնում է գործը, քանի որ SVD-ի դեպքում U և V մատրիցները դառնում են իրար շատ նման (կամ նույնը, նշանի ճշտությամբ):
- **Սիգմա մատրիցի դասավորությունը.** Σ մատրիցի անկյունագծի վրա եզակի արժեքները (σ_i) միշտ դասավորվում են **նվազման** կարգով (մեծից փոքր), ինչը թույլ է տալիս առանձնացնել մատրիցի «կարևոր» մասը (մեծ σ-ները) «աղմուկից» (փոքր կամ զրոյական σ-ները):