(algebra practice). Անկյունագծայնացում և SVD

1. Մատրիցների անկյունագծայնացում

1.1. Սահմանում

A քառակուսի մատրիցը կոչվում է **անկյունագծայնացվող**, եթե այն նման է որևէ անկյունագծային D մատրիցի:

$$A = PDP^{-1}$$

որտեղ D-ն անկյունագծային մատրից է, իսկ P-ն՝ հակադարձելի մատրից:

1.2. Մատրիցի աստիճանի հաշվում

Անկյունագծայնացումը թույլ է տալիս հեշտությամբ հաշվել մատրիցի բարձր աստիճանները:

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

Ընդհանուր դեպքում՝ $A^n = PD^nP^{-1}$:

1.3. Սիմետրիկ մատրիցներ

Եթե A-ն սիմետրիկ է ($A = A^T$), ապա այն անկյունագծայնացվում է **օրթոգոնալ** P մատրիցի միջոցով:

Քանի որ օրթոգոնալ մատրիցի համար $P^{-1} = P^T$, ապա՝

$A = PDP^T$

1.4. Հակադարձ մատրիցի սեփական արժեքները

Եթե $Ax = \lambda x$ և $\lambda \neq 0$, ապա A^{-1} մատրիցի սեփական արժեքը $1/\lambda$ է:

Ապացույց.

$$Ax = \lambda x \implies A^{-1}(Ax) = A^{-1}(\lambda x) \implies Ix = \lambda A^{-1}x \implies A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$$

---

2. Մատրիցի ռանգ (Rank)

2.1. Սահմանում

$A \in M_{m\times n}$ մատրիցի **տողային ռանգ** է կոչվում այդ մատրիցի առավելագույն քանակով գծորեն անկախ տողերի քանակը:

2.2. Հիմնական թեորեմ

Կամայական մատրիցի ռանգն ըստ տողերի հավասար է այդ մատրիցի ռանգին ըստ սյուների:

$$\text{rank}_{row}(A) = \text{rank}_{col}(A) = \text{rank}(A)$$

Նաև՝ $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$:

---

3. Եզակի արժեքների վերլուծություն (SVD)

3.1. Թեորեմ

Կամայական $A \in M_{m\times n}$ մատրիցի համար գոյություն ունեն $U \in M_{m\times m}$ և $V \in M_{n\times n}$ օրթոգոնալ մատրիցներ և $\Sigma \in M_{m\times n}$ անկյունագծային տեսքի մատրից այնպես, որ՝

$$A = U\Sigma V^T$$

- U-ի սյուները AA^T մատրիցի սեփական վեկտորներն են:
- V-ի սյուները A^TA մատրիցի սեփական վեկտորներն են:
- Σ-ի անկյունագծային տարրերը (σ_i) կոչվում են **եզակի արժեքներ** և $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, որտեղ λ_i-ն A^TA-ի սեփական արժեքներն են:

3.2. Երկրաչափական մեկնաբանություն

SVD-ն ներկայացնում է գծային ձևափոխությունը որպես երեք քայլ՝ պտույտ (V^T), ձգում (Σ) և նորից պտույտ (U): Միավոր շրջանագիծը վերածվում է էլիպսի, որի առանցքները $\sigma_i u_i$ վեկտորներն են:

---

4. Գործնական օրինակների լուծում

Խնդիր 256. A^{10}-ի հաշվում

Տրված է $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$:

1. **Սեփական արժեքներ.** $\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \implies \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$:
2. **Անկյունագծայնացում.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$:
3. **Աստիճան.** $A^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1023 & 1024 \end{pmatrix}$:

Խնդիր. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ մատրիցի SVD վերլուծությունը

1. **Հաշվում ենք A^TA.**

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. **Սեփական արժեքներ.** $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$:
3. **Եզակի արժեքներ.** $\sigma_1 = \sqrt{3}, \sigma_2 = 1$:
4. **V մատրից (սեփական վեկտորներ).** $v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$:
5. **U մատրից.** Հաշվվում է AA^T-ի սեփական վեկտորների միջոցով:

$$U = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

6. **Վերջնական տեսք.** $A = U\Sigma V^T$:

---

5. Կիրառություն. Կեղծ հակադարձ մատրից (Pseudo-inverse)

Եթե $Ax = b$ համակարգը լուծում չունի, փնտրում ենք այնպիսի x_0, որ $\|Ax_0 - b\|$ լինի մինիմալ:

Լուծումն է՝ $x_0 = A^+b$, որտեղ A^+ կոչվում է Մուր-Պենրոուզի կեղծ հակադարձ մատրից:

Մուր-Պենրոուզի կեղծ հակադարձ մատրից (A^+)

Երբ մատրիցը քառակուսի չէ կամ հակադարձելի չէ, մենք օգտագործում ենք **կեղծ հակադարձ մատրիցը**:

Եթե $A \in M_{m\times n}$, ապա $A^+ \in M_{n\times m}$:

Հաշվարկման բանաձևը SVD-ի միջոցով

Եթե հայտնի է մատրիցի SVD վերլուծությունը՝ $A = U\Sigma V^T$, ապա կեղծ հակադարձը հաշվվում է հետևյալ կերպ.

$A^+ = V\Sigma^+U^T$

որտեղ Σ^+-ը ստացվում է Σ-ից՝ անկյունագծային տարրերը փոխարինելով իրենց հակադարձներով ($1/\sigma_i$), իսկ մատրիցը տրանսպոզացվում է:

Կեղծ հակադարձի հատկությունները (Պենրոուզի պայմաններ)

A^+ մատրիցը միակն է, որը բավարարում է հետևյալ 4 պայմաններին.

1. $AA^+A = A$
2. $A^+AA^+ = A^+$
3. $(AA^+)^T = AA^+$ (սիմետրիկություն)
4. $(A^+A)^T = A^+A$ (սիմետրիկություն)

Կիրառություն. Լավագույն մոտարկման խնդիրը

Եթե $Ax = b$ համակարգը չունի ճշգրիտ լուծում (օրինակ՝ երբ հավասարումների քանակը շատ է անհայտներից), մենք փնտրում ենք այնպիսի x_0 վեկտոր, որը **նվազագույնի է հասցնում սխալը**:

$$\|Ax_0 - b\| \to \min$$

Այս լավագույն մոտարկումը տրվում է հետևյալ բանաձևով.

$x_0 = A^+b$

Գործնական օրինակի լրիվ լուծում

Տրված է. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ և $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$:

Քայլ 1. Գտնել SVD բաղադրիչները

- **Սեփական արժեքներ (A^TA).** $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$:
- **Եզակի արժեքներ.** $\sigma_1 = \sqrt{3}, \sigma_2 = 1$:

- Σ^+ **մատրից.** $\Sigma^+ = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

Քայլ 2. Հաշվել A^+

Բազմապատկելով $V\Sigma^+U^T$ մատրիցները, ստանում ենք A^+ կեղծ հակադարձը:

$$A^+ = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Քայլ 3. Գտնել լավագույն մոտարկումը (x_0)

$x_0 = A^+b = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$:

- $x_{0_1} = 1/3 - 2/3 + 6/3 = 5/3$
- $x_{0_2} = 1/3 + 4/3 - 3/3 = 2/3$ $x_0 = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$:

Քայլ 4. Ստուգում և սխալի հաշվում

Հաշվում ենք Ax_0 արտադրյալը և համեմատում b-ի հետ.

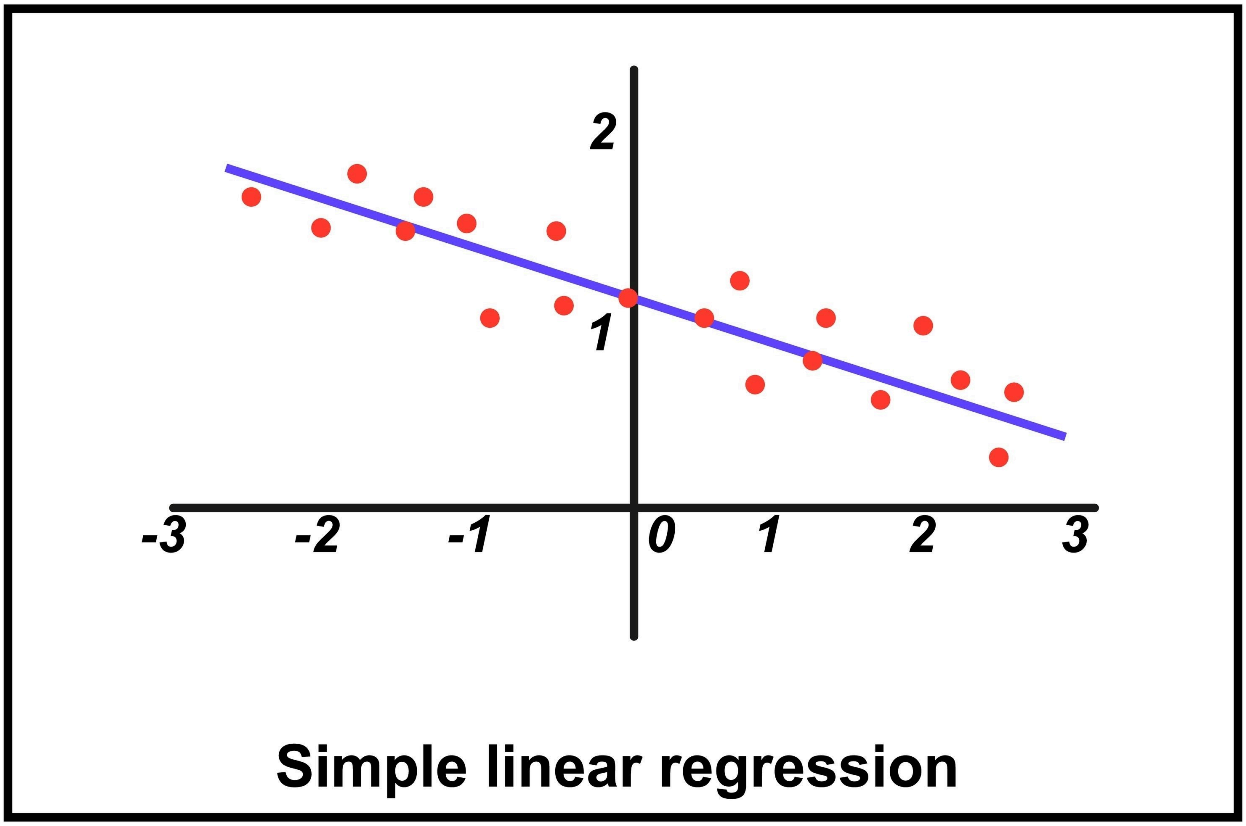
$$Ax_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 2/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

Սխալը՝ $\|Ax_0 - b\|^2 = (7/3-1)^2 + (2/3-2)^2 + (5/3-3)^2 = \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{16}{9} = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$: Սա այն նվազագույն հնարավոր սխալն է, որը կարող ենք ստանալ:

> **Ինչպես է A^+ մատրիցը օգնում լուծել Գծային Ռեգրեսիայի խնդիրները տվյալների գիտության մեջ:**
>
> Գծային ռեգրեսիան տվյալների գիտության (Data Science) ամենահիմնարար գործիքներից է, և **կեղծ հակադարձ մատրիցը (A^+)** հանդիսանում է դրա մաթեմատիկական «սիրտը»: Ահա թե ինչպես է այն աշխատում գործնականում.
>
> ---
>
> #### 1. Խնդրի էությունը. Տվյալների գերբեռնվածություն
>
> Պատկերացրեք՝ դուք ունեք տան գների վերաբերյալ տվյալներ (քառակուսի մետր, սենյակների քանակ) և ուզում եք կանխատեսել գինը:

- Դուք ունեք հազարավոր տվյալներ (տողեր), բայց ընդամենը մի քանի բնութագիր (սյուներ):
- Սա ստեղծում է **գերորոշված համակարգ** ($m > n$), որտեղ հավասարումների քանակը շատ ավելին է, քան անհայտների քանակը:

Նման դեպքում հնարավոր չէ գտնել մի գիծ, որը կանցնի **բոլոր** կետերով: Մեզ պետք է գտնել այնպիսի գիծ, որը կանցնի կետերի «միջով»՝ նվազագույնի հասցնելով ընդհանուր սխալը:



---

2. Ինչպե՞ս է A^+-ը լուծում սա

Գծային ռեգրեսիայի խնդիրը ձևակերպվում է որպես $Ax = b$, որտեղ.

- A-ն ձեր տվյալների մատրիցն է (բնութագրերը):
- x-ը այն գործակիցներն են (weights), որոնք մենք ուզում ենք գտնել:
- b-ն թիրախային արժեքներն են (իրական գները):

Քանի որ ճշգրիտ լուծում չկա, մենք օգտագործում ենք նախորդ քայլում քննարկված **լավագույն մոտարկման բանաձևը**.

$$x = A^+b$$

Օգտագործելով SVD վերլուծությունը ($A^+ = V\Sigma^+U^T$)՝ համակարգիչը վայրկյանական հաշվում է այն գործակիցները, որոնք **նվազագույնի են հասցնում սխալի քառակուսիների գումարը** ($\|Ax - b\| \to \min$):

3. A^+-ի առավելությունները ռեգրեսիայում

Տվյալների գիտության մեջ A^+-ի օգտագործումը SVD-ի միջոցով ունի երկու իսկայական առավելություն.

- **Կայունություն (Numerical Stability).** Եթե ձեր տվյալների մեջ կան սյուներ, որոնք իրարից շատ ուժեղ կախված են (multicollinearity), սովորական մեթոդները ձախողվում են: Սակայն SVD-ն «տեսնում է» դա և շատ փոքր եզակի արժեքները (σ) զրոյացնելով՝ կանխում է սխալները:
- **Ունիվերսալություն.** Այն աշխատում է նույնիսկ եթե մատրիցը հակադարձելի չէ կամ ռանգը լիարժեք չէ:

Ամփոփում. Ինչու՞ է սա կարևոր ձեզ համար

Այն ամենը, ինչ մենք անցանք՝ **սեփական արժեքներ** $\rightarrow$ **SVD** $\rightarrow$ **Կեղծ հակադարձ**, տանում է դեպի սա.

> Երբ դուք համակարգչին ասում եք «կառուցիր ռեգրեսիայի մոդել», նա հետնաբեմում կատարում է հենց այս մաթեմատիկական գործողությունները՝ տվյալները պտտում է (V^T), ձգում է (Σ), նորից պտտում է (U) և վերջում տալիս է ձեզ օպտիմալ x գործակիցները: