Հավանականությունների տեսություն (06.02.26)

- Հավանականությունների տեսություն (06.02.26)
  - **I. Լրիվ հավանականության բանաձև**
  - **II. Բայեսի ընդհանրացված բանաձև**
  - **III. Հավանականությունների աքսիոմատիկ սահմանումը**
  - **IV. Հավանականության հատկությունները**
    - **Բազմաչափ (Պոլինոմիալ) փորձերի սխեմա**
  - **V. Հավանականության երկրաչափական մեկնաբանություն**
  - **VI. Հիպերերկրաչափական բաշխում**
  - **VII. Պատահույթների երևումների ամենահավանական թիվը**

I. Լրիվ հավանականության բանաձև

Դիցուք ունենք B պատահույթը և $A_1, A_2, \ldots, A_n$ պատահույթները, որոնք կազմում են **լրիվ խումբ**, այսինքն՝

1. $A_i \cap A_j = \emptyset$ (երբ $i \neq j$)
2. B պատահույթը կարող է հանդես գալ A_i-երից միայն մեկի հետ:

Այսինքն՝ $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$

Քանի որ $(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \emptyset$ (որովհետև $A_i \cap A_j = \emptyset$), ապա ըստ գումարման թեորեմի.

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

Օգտվելով բազմապատկման թեորեմից՝ $P(A_i \cap B) = P(A_i) \cdot P(B|A_i)$, ստանում ենք **լրիվ հավանականության բանաձևը**.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

II. Բայեսի ընդհանրացված բանաձև

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ պատահույթները կոչվում են **հիպոթեզներ**:

Քանի որ $P(A_i \cap B) = P(A_i) \cdot P(B|A_i) = P(B) \cdot P(A_i|B)$, ապա.

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

Սա կոչվում է **Բայեսի ընդհանրացված բանաձև**:

III. Հավանականությունների աքսիոմատիկ սահմանումը

Դիցուք X բազմության ենթաբազմությունների S ոչ դատարկ բազմությունը կոչվում է **բազմությունների հանրահաշիվ**, եթե բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

- $A, B \in S \implies A \cap B \in S$
- $A \in S \implies \bar{A} = X \setminus A \in S$

Սահմանում: Բազմությունների հանրահաշիվը կոչվում է **σ-հանրահաշիվ**, եթե այն փակ է հաշվելի թվով միավորում գործողության նկատմամբ.

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \cdots \in S \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$$

Ըստ Դե Մորգանի օրենքի՝,

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i$$

հետևաբար հատումը նույնպես պատկանում է S-ին:

Սահմանում: S σ-հանրահաշիվը կոչվում է **միավորով օժտված**, եթե $\exists \Omega \in S$ այնպիսին, որ $\forall A \in S$ համար $A \cap \Omega = A$:

Հավանականային տարածություն: (Ω, F, P) եռյակը, որտեղ.

- Ω-ն փորձի էլեմենտար ելքերի բազմությունն է,
- F-ը Ω-միավորով σ-հանրահաշիվն է,
- P-ն հավանականային ֆունկցիան է $P : F \to [0, 1]$:

IV. Հավանականության հատկությունները

1. $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
2. $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, որտեղ $A_i \cap A_j = \emptyset$ (σ-ադիտիվություն)
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Բազմաչափ (Պոլինոմիալ) փորձերի սխեմա

Դիտարկենք n անկախ փորձեր, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի k հնարավոր ելքեր՝ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ պատահույթների տեսքով:

Հավանականություններ. Յուրաքանչյուր A_i պատահույթի հայտնվելու հավանականությունը հաստատուն է և հավասար է p_i, այսինքն՝ $P(A_i) = p_i$:

Պայման. Քանի որ սրանք կազմում են լրիվ խումբ, ապա $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$:

Փորձերի արդյունքը. Մեզ հետաքրքրում է այն դեպքը, երբ n փորձերի արդյունքում A_1 պատահույթը հանդես է գալիս m_1 անգամ, A_2-ը՝ m_2 անգամ, ..., A_k-ն՝ m_k անգամ:

Ընդհանուր քանակ. $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$:

Այն հավանականությունը, որ n անկախ փորձերում $A_1, \ldots, A_k$ պատահույթները հանդես կգան համապատասխանաբար $m_1, \ldots, m_k$ անգամ, որոշվում է հետևյալ բանաձևով:

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \ldots m_k!} \cdot p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k}$$

Պոլինոմիալ գործակից. $\frac{n!}{m_1! m_2! \ldots m_k!}$ — սա ցույց է տալիս, թե քանի ձևով կարելի է n տարրերը բաժանել k խմբերի՝ համապատասխանաբար $m_1, \ldots, m_k$ քանակներով:

Հավանականային մաս. $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k}$ — սա կոնկրետ մեկ հաջորդականության հավանականությունն է, որտեղ յուրաքանչյուր ելք հանդես է գալիս իր քանակով:

Կապը Բեռնուլիի բանաձևի հետ
Եթե $k = 2$ (այսինքն՝ ունենք միայն «հաջողություն» A և «ձախողում» $\bar{A}$), ապա բանաձևը վերածվում է Բեռնուլիի բանաձևին.

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

Բեռնուլիի բանաձև:

Եթե կատարվում է n անկախ փորձ, և յուրաքանչյուրում A պատահույթի հայտնվելու հավանականությունը $P(A) = p$, իսկ չհայտնվելունը՝ $P(\bar{A}) = q = 1 - p$, ապա m հաջողության

հավանականությունը.

$$P_m(A) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

V. Հավանականության երկրաչափական մեկնաբանություն

- Տարրական ելքերի տարածություն (Ω): Օրինակ՝ $\Omega = [0, 1]$ հատվածը:
- σ-հանրահաշիվ (F): Ω-ն միավորող σ-հանրահաշիվն է, որտեղ յուրաքանչյուր $A \in F$ պատահույթի համար $A \cap \Omega = A$:
- **Երկրաչափական հավանականություն:** A պատահույթի հավանականությունը որոշվում է նրա չափի (μ) հարաբերությամբ ամբողջ տիրույթի չափին.

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Կարևոր նկատառում: Եթե բազմությունը չափելի չէ (օրինակ՝ Վիտալիի E բազմությունը), ապա նրա չափը՝ $\mu(E)$, գոյություն չունի ($\nexists$), և հետևաբար հնարավոր չէ հաշվել դրա հավանականությունը:

VI. Հիպերերկրաչափական բաշխում

Ունենք N տարրից կազմված համախումբ, որից M-ը օժտված է X հատկությամբ: Ընտրում ենք n տարր: Հավանականությունը, որ դրանցից m-ը ($m \leq n$) կունենան X հատկությունը.

$$P(A) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

Օրինակ: 100 դետալ, 30-ը կանաչ են, 70-ը՝ ոչ: Ընտրում ենք 40-ը: Հավանականությունը, որ 40-ից 10-ը կանաչ են՝ $P(A) = \frac{C_{30}^{10} \cdot C_{70}^{30}}{C_{100}^{40}}$:

VII. Պատահույթների երևումների ամենահավանական թիվը

Եթե մետաղադրամը նետում ենք $n = 10$ անգամ, և մեզ հետաքրքրում է «զինանշան» գալու հավանականությունը m անգամ, ապա քայլերը հետևյալն են.

- Փորձերի քանակը (n): 10.

- Հաջողության հավանականությունը (p): Քանի որ մետաղադրամը սովորական է, զինանշան գալու հավանականությունը $1/2$ է.
- Ձախողման հավանականությունը (q): Նույնպես $1/2$ (քանի որ $q = 1 - p$).

Հավանականության հաշվարկը (m անգամի համար)
Ըստ Բեռնուլիի բանաձևի, հավանականությունը, որ զինանշան կգա ուղիղ m անգամ, հաշվվում է այսպես.

$$P_{10}(m) = C_{10}^{m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-m}$$

Ուղիղ 1 անգամ ($m = 1$):

$$P_{10}(1) = \frac{10!}{1!(10-1)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{9} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

Ուղիղ 2 անգամ ($m = 2$):

$$P_{10}(2) = \frac{10!}{2!(10-2)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8} = 45 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

Ամենահավանական թիվը
Հաջորդ տրամաբանական հարցն այն է, թե քանի՞ անգամ ամենայն հավանականությամբ կգա զինանշանը: Քանի որ $p = 1/2$, ամենահավանական թիվը կլինի 5 անգամը: Դու կարող ես շարունակել հաշվարկը $P_{10}(5)$-ի համար և կտեսնես, որ այն ամենամեծ արժեքն է ստանում:

Կապը բազմաչափ փորձերի հետ
Եթե մետաղադրամի փոխարեն նետեիր զառ, որն ունի 6 տարբեր ելքեր, ապա պետք է օգտագործեիր քո նախորդ նկարների բազմաչափ (պոլինոմիալ) բանաձևը: Այդ դեպքում համարիչում կլիներ $n!$, իսկ հայտարարում՝ յուրաքանչյուր թվի հայտնվելու քանակների ֆակտորիալների արտադրյալը:

Խնդիր. n անկախ փորձերում, որոնցից յուրաքանչյուրում հաջողության հավանականությունը p է, գտնել այնպիսի m_0 թիվ, որի դեպքում $P_n(m)$ հավանականությունն ընդունում է իր առավելագույն արժեքը:

Որպեսզի հասկանանք $P_n(m)$ ֆունկցիայի վարքը, դիտարկենք հաջորդական անդամների հարաբերությունը.

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{n! \cdot p^{m+1} \cdot q^{n-m-1}}{(m+1)!(n-m-1)!} \cdot \frac{m!(n-m)!}{n! \cdot p^m \cdot q^{n-m}} = \frac{p(n-m)}{q(m+1)}$$

- Հավանականությունն աճում է, եթե $\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} > 1$: Սա տեղի ունի, երբ $m < np - q$:
- Հավանականությունը նվազում է, եթե $\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} < 1$: Սա տեղի ունի, երբ $m > np - q$:

Ամենահավանական թվի (m_0) միջակայքը

Այս երկու պայմանների համադրումից բխում է, որ m_0 թիվը պետք է բավարարի հետևյալ կրկնակի անհավասարմանը.

$$np - q \leq m_0 \leq np + p$$

Հնարավոր դեպքերը

Քանի որ միջակայքի երկարությունը հավասար է 1-ի ($(np + p) - (np - q) = p + q = 1$), ապա հնարավոր է երկու իրավիճակ.

- Եթե $np - q$ թիվը ամբողջ չէ. Միջակայքում կա ճիշտ մեկ ամբողջ թիվ: Դա էլ հանդիսանում է միակ ամենահավանական թիվը:
- Եթե $np - q$ թիվը ամբողջ է. Միջակայքի ծայրակետերը ($m_0 = np - q$ և $m_0 + 1 = np + p$) երկուսն էլ ամբողջ թվեր են: Այս դեպքում գոյություն ունի երկու ամենահավանական թիվ, և դրանց հավանականությունները հավասար են՝ $P_n(m_0) = P_n(m_0 + 1)$:

Գործնական կանոն. Ամենահավանական թիվը գտնելու համար հաճախ հարմար է հաշվել $np + p$ թիվը և վերցնել դրա ամբողջ մասը (եթե այն ամբողջ չէ):