Հաջորդականություն R^m-ում

Հիմնական սահմանումներ

Արդեն գիտենք, որ եթե $x, y \in \mathbb{R}^m$ տարրերի համար, որտեղ $x = (x^1, x^2, \ldots, x^m)$, $y = (y^1, y^2, \ldots, y^m)$, գումարումը սահմանենք՝

$$x + y = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \ldots, x^m + y^m)$$

իսկ սկալյարով բազմապատկումը՝

$$\lambda x = (\lambda x^1, \lambda x^2, \ldots, \lambda x^m)$$

օրենքներով, ապա $\mathbb{R}^m$-ը այս գործողությունների հետ կդառնա գծային տարածություն: Ավելին, այն նորմավորված է, քանի որ հեշտ է ստուգել, որ $\|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^m)^2}$ բանաձևը բավարարում է նորմի պայմաններին:

Սահմանում 1: $\mathbb{R}^m$-ում ***հաջորդականություն*** ասելով կհասկանանք հետևյալ բազմությունը՝ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, որտեղ $x_n \in \mathbb{R}^m$ ($n \in \mathbb{N}$):

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^m$

Հեռավորություն և Գնդեր

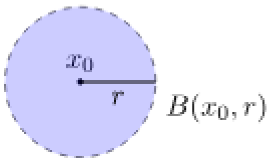
Սահմանում 2: $x, y \in \mathbb{R}^m$ տարրերի ***հեռավորություն*** ասելով կհասկանանք $x - y$-ի նորմը: Այսինքն՝

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

(x-y)-ը $\mathbb{R}^m$-ի տարր է => ունի նորմ ու հենց էդ նորմն էլ կանվանենք $x, y \in \mathbb{R}^m$ տարրերի *հեռավորություն*:

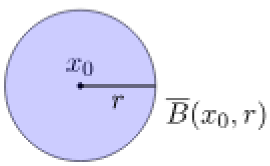
Սահմանում 3: $\mathbb{R}^m$-ում a կենտրոնով և r շառավղով ***բաց գունդ*** ասելով կհասկանանք հետևյալ բազմությունը՝

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(a,x) < r\} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x-a\| < r\}$$



Սահմանում 4: $\mathbb{R}^m$-ում a կենտրոնով և r շառավղով **փակ գունդ** ասելով կհասկանանք հետևյալ բազմությունը՝

$$\bar{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(a,x) \leq r\} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x-a\| \leq r\}$$



Մասնավորապես:

- $m = 1$ դեպքում՝ $(a-r, a+r)$ միջակայքն է:
- $m = 2$ դեպքում՝ շրջան (բաց կամ փակ):

Սահմանափակություն և Սահման

Սահմանում 5: Կասենք, որ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը **սահմանափակ է** $\mathbb{R}^m$-ում, եթե $\exists M$ s.t. $\|x_n\| \leq M$:

Սահմանում 6: Կասենք, որ $x_n \in \mathbb{R}^m$, $x_n \to \infty$, եթե $\forall E$-ի համար $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $n > n_0 \implies \|x_n\| > E$:

Սահմանում 7 (Հաջորդականության սահման): $a \in \mathbb{R}^m$ տարրը կոչվում է $x_n \in \mathbb{R}^m$ հաջորդականության սահման, եթե $\forall \varepsilon > 0$-ի համար $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ s.t. $n > n_0(\varepsilon) \implies \|x_n - a\| < \varepsilon$: (հեռավորությունը պիտի ձգտի զրոյի)

Կոորդինատային զուգամիտության սկզբունքը

Նորմի սահմանումից բխում են

$$|x^i| \leq \|x\| \leq |x^1| + |x^2| + \cdots + |x^m| \quad (1)$$

Իրոք, $|x^i| = \sqrt{(x^i)^2} \leq \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^m)^2} = ||x|| \leq \sqrt{(|x^1| + \cdots + |x^m|)^2} = \ldots$

$$\left(|x^1| + \cdots + |x^m|\right)^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} |x^i|^2}_{\|x\|^2} + \underbrace{2 \sum_{1 \leq j < k \leq m} |x^j||x^k|}_{\geq 0}$$

Քանի որ «խառը արտադրյալները» ($2|x^j||x^k|$) ոչ բացասական են, ապա՝

$$\left(\sum |x^i|\right)^2 \geq \sum |x^i|^2 = \|x\|^2$$

Արմատ հանելով՝ կստանանք պահանջվող անհավասարությունը՝

$$|x^1| + \cdots + |x^m| \geq \|x\|$$

Թեորեմ (Կոորդինատային զուգամիտության թեորեմը): Դիցուք $a = (a^1, \ldots, a^m) \in R^m$: Որպեսզի $x_n \to a$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\left.\begin{array}{c} x_n^1 \to a^1 \\ x_n^2 \to a^2 \\ \cdots \\ x_n^m \to a^m \end{array}\right\}: \qquad (1.3)$$

Ապացույց:

$(\Rightarrow)$ Դիցուք $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$: Հետևաբար $\forall \varepsilon > 0$-ի համար $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ s.t. $n > n_0(\varepsilon) \implies \|x_n - a\| < \varepsilon$:

Օգտվելով (1)-ից կարող ենք ասել, որ $|x_n^i - a^i| < \|x_n - a\| < \varepsilon$:

$\implies \forall i, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ s.t. $n > n_0(\varepsilon) \implies |x_n^i - a^i| < \varepsilon$ ($i = \overline{1, m}$): Ուստի $x_n^i \xrightarrow{n\to\infty} a^i$:

$(\Leftarrow)$ Դիցուք $x_n^i \xrightarrow{n\to\infty} a^i$ ($i = \overline{1, m}$): Ցույց տանք, որ $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$:

Օգտվելով $\|x_n - a\| \leq |x_n^1 - a^1| + |x_n^2 - a^2| + \cdots + |x_n^m - a^m|$ անհավասարությունից և $x_n^i \to a^i$ ($i = \overline{1, m}$)-ից կունենանք, որ $\forall \varepsilon > 0$-ի համար $\|x_n - a\| < m\varepsilon_1$:

Նշանակենք $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{m}$, կունենանք որ $\|x_n - a\| < \varepsilon$:

Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմման R^m-ում

Թեորեմ (Բոլցանո-Վայերշտրաս): $\mathbb{R}^m$-ի սահմանափակ հաջորդականությունից կարելի է առանձնացնել զուգամետ ենթահաջորդականություն:

Ապացույց:

Նախ ապացուցենք $m = 2$ դեպքում: Ունենք $x_n = (x_n^1, x_n^2)$ սահմանափակ հաջորդականությունը՝ $|x_n| \leq L, n \in N$: (1)-ի համաձայն ունենք՝

$$|x_n^1| \leq L, \quad |x_n^2| \leq L :$$

Թվային հաջորդականությունների վերաբերյալ Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմմայի համաձայն, x_n^1 հաջորդականությունը պարունակում է զուգամետ ենթահաջորդականություն՝

$$x_{n_k}^1 \to x_0^1 \tag{1.5}$$

Այժմ, $x_{n_k}^2$ հաջորդականության համար կիրառելով Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմման, կստանանք՝

$$x_{n_{k_l}}^2 \to x_0^2, \quad l \to \infty \tag{1.6}$$

Նախորդ թեորեմի համաձայն, (1.5)-ից և (1.6)-ից հետևում է՝

$$x_{n_{k_l}} \to (x_0^1, x_0^2), \quad l \to \infty :$$

Քանի որ $x_{n_{k_l}}$-ը x_n հաջորդականության ենթահաջորդականություն է, ապա $m = 2$ դեպքում ապացույցն ավարտված է:

Ընդհանուր դեպքում պնդումն ապացուցելու համար կկիրառենք մաթեմատիկական ինդուկցիա ըստ m-ի: ■

Կոշու զուգամիտության սկզբունքը

Սահմանում 8: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^m$ հաջորդականությունը կոչվում է **ֆունդամենտալ**, եթե $\forall \varepsilon > 0$-ի համար $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $n > n_0(\varepsilon) \implies \|x_n - x_m\| < \varepsilon$ (երբ $m > n_0$):

Թեորեմ: Որպեսզի $x_n \in \mathbb{R}^m$ հաջորդականությունը լինի զուգամետ $\iff$ այն լինի ֆունդամենտալ:

Ապացույց:

$(\Rightarrow)$ Դիցուք x_n-ը զուգամետ է, այսինքն $\exists a \in \mathbb{R}^m$ s.t. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; m, n > n_0(\varepsilon) \implies$

$$\begin{cases} \|x_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \|x_m - a\| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Դիտարկենք հետևյալը՝

$\|x_n - x_m\| = \|x_n - a + a - x_m\| \leq \|x_n - a\| + \|x_m - a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$:

$(\Leftarrow)$ Դիցուք $\forall\varepsilon > 0$-ի համար $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ s.t. $n, m > n_0 \implies \|x_n - x_m\| < \varepsilon$:

Օգտվելով (1)-ից՝ կունենանք՝

$|x_n^i - x_m^i| \leq \|x_n - x_m\| < \varepsilon \implies \forall\varepsilon > 0$-ի համար $\exists n_0(\varepsilon)$ s.t. $m, n > n_0(\varepsilon) \implies |x_n^i - x_m^i| < \varepsilon$ ($i = \overline{1, m}$):

Ինչը նշանակում է, որ x_n^i թվային հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է: Հետևաբար, ըստ Կոշու զուգամիտության սկզբունքի, թվային հաջորդականությունների համար $\exists a^i \in \mathbb{R}$ s.t. $x_n^i \xrightarrow{n\to\infty} a^i$ ($i = \overline{1, m}$):

Օգտվելով կոորդինատային զուգամիտության սկզբունքից, կարելի է պնդել, որ $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, որտեղ $a = (a^1, a^2, \ldots, a^m)$:

Կուտակման կետեր

Սահմանում 9: Դիցուք $E \subseteq \mathbb{R}^m$: $x_0 \in \mathbb{R}^m$ կետը կոչվում է E բազմության **կուտակման կետ**, եթե x_0-ի ցանկացած $B(a, \varepsilon)$ շրջակայքում E-ի անվերջ թվով կետեր կան առկա:

E բազմության կուտակման կետերի բազմությունը նշանակենք E'-ով: