跟学团 特值法在整式、分式中的应用

特值法 $\begin{cases} \text{恒等式问题} \\ \text{化简求值} \end{cases}$

【标志词汇】给出恒等式 ⇔ x取任意值，两多项式均相等 ⇔ 取x特值得到关于系数的等式

【标志词汇】求代数式具体值 ⇔ 特值代入法

特值选取方向：消去未知量，提取待求式

常用特值：$x=0$，± 1

10以内整数的平方

5以内整数的立方

2^n（$n=0,1,2\ldots$）

以及它们的常见和、差

跟学团 特值法在整式、分式中的应用

【模拟题】对任意实数x，等式$ax-5x+6+b=0$恒成立，则$(a+b)^{2019}$为（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. 2^{2019}　　E. -2^{2019}

跟学团 特值法在整式、分式中的应用

【模拟题】多项式x^3+ax^2+bx-6的两个因式是$x-1$和$x-2$，则其第三个一次因式为（　　）.

A. $x-6$　　B. $x-3$　　C. $x+1$　　D. $x+2$　　E. $x+3$

跟学团 特值法在整式、分式中的应用

特值法$\begin{cases}\text{恒等式问题}\\\text{化简求值}\end{cases}$

【标志词汇】给出恒等式 ⟺ x取任意值，两多项式均相等 ⟺ 取x特值得到关于系数的等式

【标志词汇】求代数式具体值 ⟺ 特值代入法

特值选取方向：消去未知量，提取待求式

常用特值：0，±1，±2

10以内整数的平方

5以内整数的立方

2^n（$n=0,1,2\ldots$）

以及它们的常见和、差

跟学团 特值法在整式、分式中的应用

【模拟题】已知$x-y=5$，$z-y=10$，则$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$的值为（　　）.

A. 50　　B. 75　　C. 100　　D. 105　　E. 110

跟学团 特值法在整式、分式中的应用

【模拟题】已知$\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x+y+z}=1$，则$(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2=$（　）.

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1　　E. 2

跟学团 特值法在整式、分式中的应用

【模拟题】对于非零整数a,b,c，满足$a^2+b^2=c^2$，$2b=a+c$，则$\frac{a+b+c}{a+b-c}=$（ ）.

A. -3 B.3 C. 6 D. .$\sqrt{13}$ E.-6

跟学团 特值法在整式、分式中的应用

【模拟题】若$a+b=4$，$a^3+b^3=28$，则$a^2+b^2=$（ ）

A.16 B.14 C.12 D.10 E.8

跟学团 特值法在整式、分式中的应用

【**标志词汇**】给出恒等式 $\Leftrightarrow$ x取任意值，两多项式均相等 $\Leftrightarrow$ 取x特值得到关于系数的等式

【**标志词汇**】求代数式具体值 $\Leftrightarrow$ 特值代入法

跟学团 特值法在整式、分式中的应用

【**真题2018.05**】设实数a,b满足$|a-b|=2$，$|a^3-b^3|=26$，则$a^2+b^2=$（　　）.

A. 30　　B. 22　　C. 15　　D. 13　　E. 10

跟学团 特值法在整式、分式中的应用

【真题2019.04】设实数a，b满足$ab=6$，$|a+b|+|a-b|=6$，则$a^2+b^2=$（　　）

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13　　E. 14

跟学团 根式

	$x^2=a$	$\boldsymbol{x^n=a}$
	已知a求x的运算：开平方运算 x是a的平方根	其中n称为根指数 若n是偶数，x是a的**偶次方根**
$a>0$时	$x=\pm\sqrt{a}$，两个平方根	$x=\pm\sqrt[n]{a}$，两个偶次方根
$a=16$	$x=\pm\sqrt{16}=\pm4$	$n=4$，$x=\pm\sqrt[4]{16}=\pm2$
$a=0$时	$x=\sqrt{0}=0$，一个平方根	$x=\sqrt[n]{o}=0$，一个偶次方根
$a<0$时	无意义	无意义

跟学团 根式

$x^3 = a$	$\boldsymbol{x^n = a}$
已知a求x的运算：开立方运算 x是a的立方根	其中n称为根指数 若n是奇数，x是a的**奇次方根**
$x = \sqrt[3]{a}$ 立方根有且仅有一个	$x = \sqrt[n]{a}$ 奇次方根有且仅有一个
$\sqrt[3]{-8} = -2$ $(-2)\times(-2)\times(-2) = -8$	

跟学团 根式

$\boldsymbol{a^{\frac{n}{m}}}$ → 分子代表乘方；分母代表开方

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$　　$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$　　$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

（m为偶数时，$a\neq$负数）

$$a^{\frac{5}{2}} = a^{\frac{1}{2}\times 5} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^5 = (\sqrt{a})^5 = a^{5\times\frac{1}{2}} = (a^5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^5}$$

$$8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = \sqrt[3]{8^2} = 4$$

负指数幂 = 取倒数：$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ （$a \neq 0$）

$$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{4}$$

跟学团 根式

注意：0的非正指数幂无意义

常见应用	公式	举例
指数为正整数	$a^m = a \times a \times \cdots \times a$	$2^3 = 2 \times 2 \times 2$
指数为零	$a^0 = a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1} = 1$	$2^0 = 1$
指数为负	$a^{-m} = a^{0-m} = \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}$	$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$　$5^{-3} = \frac{1}{5^3}$
指数为分数	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$　$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$　$125^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{125^2} = 25$
	$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$　$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$	$5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$　$2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

m,n为正整数，$n > 1$，$a > 0$

跟学团 根式

二次根式 形如$\sqrt{a}$（$a \geq 0$）的式子.

a叫做被开方数，可以是一个数字，也可以是一个代数式.

双重非负性$\begin{cases} a \geq 0 \\ \sqrt{a} \geq 0 \end{cases}$，当$a < 0$时，二次根式无意义.

$\sqrt{0} = 0$

以形式界定：$\sqrt{9}$也是二次根式

跟学团 根式

二次根式乘法法则 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ $(a\geq 0,b\geq 0)$

有条件逆运算 $\sqrt{ab}\overset{?}{=}\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ $\sqrt{(-2)\cdot(-3)}\neq\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}$

$\sqrt{(-2)\cdot(-3)}=\sqrt{6}$

二次根式除法法则 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ $(a\geq 0,b>0)$

有条件逆运算 $\sqrt{\dfrac{a}{b}}\overset{?}{=}\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $\sqrt{\dfrac{-9}{-16}}\neq\dfrac{\sqrt{-9}}{\sqrt{-16}}$

$\sqrt{\dfrac{-9}{-16}}=\sqrt{\dfrac{9}{16}}=\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\dfrac{3}{4}$

跟学团 根式

二次根式的乘法法则：$\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\times\beta}$ $(\alpha\geq 0,\beta\geq 0)$

二次根式的除法法则：$\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ $(\alpha\geq 0,\beta>0)$

根式乘除法法则 同次根式相乘除，把被开方数相乘除，根指数不变.

$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{4\times 8}=\sqrt[3]{32}$ $\boxed{(ab)^n=a^nb^n}$

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$ $1=1^n=\sqrt[n]{1}$ $\sqrt[n]{\dfrac{1}{m}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{m}}$ $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}}$

跟学团 **根式**

【模拟题】$a+b=1$.（　　）

（1）$b=\frac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{1-a^2}}{a+1}$　　（2）$b=\frac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{1-a^2}}{a-1}$

MBA大师-数学系统精讲

方程、不等式与函数

董璞

跟学团 方程、不等式与函数

- 联考核心技能

  一元二次方程

  一元二次不等式

  一元二次函数

- 既是重要考点，又是重要工具

跟学团 方程、不等式与函数·基础

含有未知量的等式叫做**方程**　$2x+6=0$

方程中有几个未知量，就叫做**几元方程**　$5x+6y+4=0$

未知量前面的数字或者字母叫做未知量的**系数**（字母系数一般以a,b,c,m,n,p,q等表示）.

$ax+6=0$（$a\neq 0$）

未知量的最高次幂，叫做**方程的次数**，最高次幂是几，就叫做**几次方程.**

$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）

把若干个方程合在一起研究，未知量同时满足每一个方程的一组方程称为**方程组（联立方程）**

$$\begin{cases}5x+6y+4=0\\3x-2y+2=0\end{cases}$$

跟学团 方程、不等式与函数·基础

【举例】已知$a \neq 0$

(1) $ax+6=0$ ___元___次方程

(2) $ax^2+bx+c=0$ ___元___次方程

(3) $3x^2+mx+5=0$ ___元___次方程

(4) $x^2+px+q=0$ ___元___次方程

(5) $ax^3+bx^2+2x+c=0$ ___元___次方程

(6) $x^2+axy+2y^2+px+q=0$ ___元___次方程

跟学团 方程、不等式与函数·基础

整式方程 等号两边都是关于未知量的整式的方程

仅包含数字与字母的和或乘积

未知量不能在分母上，不能在绝对值内、不能在指数上、不能在对数中

$|x-1|+x=2$ $x^2-x-5=|2x-1|$ $\sqrt{1-x^2}=x+1$

$\frac{3x^2-2}{x^2-1}=1$ $\frac{a}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=0$ $\frac{2y+3x}{3}=2$

$4^x+2^x=1$ $\log_a x=1$

跟学团 方程、不等式与函数·基础

使方程左右两边相等的未知量（一般为x或y）的值（或未知数的一组值），称为**方程的解**

一元方程解也叫作**方程的根**.

关于x的一元二次方程$x^2+2x-3=0$　　$(x-1)(x+3)=0$

当$x=1$和$x=-3$时，均有方程等号左右两边相等，故1和-3均为该一元二次方程的根.

能令等号成立的未知量的值

m是关于x的一元二次方程$x^2+2x-3=0$的根

5是关于x的一元二次方程$x^2+mx-3=0$的根

跟学团 方程、不等式与函数·基础

【模拟题】（条件充分性判断）$\frac{3a^2-4a-3}{a^2-1}=1$.（　）

（1）a是$x^2-2x-1=0$的根.　　（2）a是$x^2-2x-2=0$的根.

跟学团 一元二次方程·根与系数关系

使一元二次方程左右两边相等的x的值，称为一元二次方程的**解**（或**根**）.

$x^2+2x-3=0$　　$x_1=1$，$x_2=-3$

$2x^2=0$　　$x_1=x_2=0$

$x^2+4=0$　　没有实数根

一元二次方程根的3种可能情况
- 没有实数根
- 两个相等的实数根
- 两个不等的实数根

跟学团 一元二次方程·求根公式

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，当$b^2-4ac\geq 0$时，它的根是

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

⟶ **一元二次方程根的判别式$\boldsymbol{\Delta}$**

（1）$\Delta=b^2-4ac>0$时，方程有两个不相等的实数根，即

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

跟学团 一元二次方程·根的判别式

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，当$b^2-4ac\geq 0$时，它的根是

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \longrightarrow \textbf{一元二次方程根的判别式}\Delta$$

（2）$\Delta=b^2-4ac=0$时，方程有两个相等的实数根，即$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$

注意：此时方程仍然有两实根，它们取值相等，而非仅有一个根.

（3）$\Delta=b^2-4ac<0$时，方程无实数根.

跟学团 一元二次方程·根的判别式

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，当$b^2-4ac\geq 0$时，它的根是

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \longrightarrow \textbf{一元二次方程根的判别式}\Delta$$

$x^2+2x-3=0$　　$\Delta=2^2-4\times 1\times(-3)=4+12=16$

$$x_1=\frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1}=\frac{-2+4}{2\times 1}=1,\ x_2=\frac{-2-4}{2\times 1}=-3$$

$2x^2=0$　　$2x^2+0\cdot x+0=0$　　$\Delta=0^2-4\times 2\times 0=0$　　$x_1=x_2=\dfrac{0}{2\times 2}=0$

$x^2+4=0$　　$x^2+0\cdot x+4=0$　　$\Delta=0^2-4\times 1\times 4=-16<0$　　没有实数根

跟学团 一元二次方程·根的判别式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\longrightarrow$$ **一元二次方程根的判别式Δ**

【标志词汇】 一元二次方程有实根$\Leftrightarrow \Delta\geq 0$.

【标志词汇】 一元二次方程有两个**相等**的实根$\Leftrightarrow \Delta=0$.

【标志词汇】 一元二次方程有两个**不相等**的实根$\Leftrightarrow \Delta>0$.

【标志词汇】 一元二次方程无实根$\Leftrightarrow \Delta<0$.

跟学团 一元二次方程·根的判别式

【真题2019.20】（条件充分性判断）关于x的方程$x^2+ax+b-1=0$有实根.（　）

（1）$a+b=0$.　　（2）$a-b=0$.

跟学团 一元二次方程·根的判别式

【真题2014.10.24】关于x的方程$mx^2+2x-1=0$有两个不相等的实根.（　）

（1）$m>-1$.　　（2）$m\neq 0$.

跟学团 一元二次方程·根的判别式

【模拟题】已知a,b,c为$\triangle ABC$的三边，且关于x的方程$a(x^2-1)-2cx+b(x^2+1)=0$有两相等实数根，则$\triangle ABC$为（　）.

A. 等腰三角形　B. 等边三角形　C. 直角三角形　D. 等腰直角三角形　E. 锐角三角形

跟学团 一元二次方程·根的判别式

【模拟题】实数a,b之间满足$a=2b$.（　）

（1）关于x的方程$x^2-ax+b^2=0$有两相等实数根

（2）实数a,b为二元二次方程的一组解$x^2-xy-2y^2=0$

跟学团 一元二次方程·根与系数关系

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两根有:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

两根相加 $$\boldsymbol{x_1+x_2}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=-\boldsymbol{\frac{b}{a}}$$

跟学团 一元二次方程・根与系数关系

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两根有：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

两根相乘 $$\boldsymbol{x_1\cdot x_2}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\cdot\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\boldsymbol{\frac{c}{a}}$$

跟学团 一元二次方程・根与系数关系

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两根有：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

【标志词汇】一元二次方程有实根/有两个相等的实根/有两个不相等的实根/无实根

$\Delta\geq0$ $\Delta=0$ $\Delta>0$ $\Delta<0$

根的判别式是判定方程是否有实根的充要条件

根与系数关系（韦达定理） $\boldsymbol{x_1+x_2=-\frac{b}{a}}$ $\boldsymbol{x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}}$

韦达定理说明了根与系数的关系.

跟学团 一元二次方程·根与系数关系

根与系数关系

$$\boxed{x_1+x_2}=\boxed{-\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{x_1\cdot x_2}=\boxed{\frac{c}{a}}$$

根　　系数

【举例】 已知方程$2x^2-3x-4=0$有两个实数根x_1和x_2，则$x_1+x_2=$______，$x_1\cdot x_2=$______.

跟学团 一元二次方程·根与系数关系

【真题2015.09】 已知x_1,x_2是方程$x^2+ax-1=0$的两个实根，则${x_1}^2+{x_2}^2=$（　）

（A）a^2+2　（B）a^2+1　（C）a^2-1　（D）a^2-2　（E）$a+2$

跟学团 一元二次方程·根与系数关系

根与系数关系 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

常用凑配手段：通分、完全平方公式、平方差公式

$x_1{}^2+x_2{}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{b}{c}$ $\frac{1}{x_1{}^2}+\frac{1}{x_2{}^2}=\frac{x_1{}^2+x_2{}^2}{x_1{}^2x_2{}^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$

$x_1-x_2=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ （设$x_1>x_2$）

$x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$

跟学团 一元二次方程·根与系数关系

【真题2002.01.07】已知方程$3x^2+5x+1=0$的两个根为α、β，则$\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=$（ ）.

A. $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{5}$

跟学团 一元二次方程 · 根与系数关系

根与系数关系 $\boxed{x_1+x_2}=\boxed{-\frac{b}{a}}$，$\boxed{x_1\cdot x_2}=\boxed{\frac{c}{a}}$

根　　系数

【举例】 已知方程$x^2+mx+n=0$的两根分别是-3和-4，则$m=$______，$n=$______.

跟学团 一元二次方程 · 根与系数关系

【真题1997.01.02】 若$x^2+bx+1=0$的两个根为x_1和x_2，且$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=5$，则$b$的值是（　）.

A. -10　B. -5　C. 3　D. 5　E. 10

跟学团 一元二次方程

$\Delta = b^2 - 4ac$

【标志词汇】一元二次方程有实根/有两个相等的实根/有两个不相等的实根/无实根

$\Delta \geq 0$　　$\Delta = 0$　　$\Delta > 0$　　$\Delta < 0$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$　　$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

【标志词汇】 给出方程求两根 ⇒ 凑配为由$x_1 + x_2$和x_1x_2表示的形式，代入韦达定理求值.

【标志词汇】 给出两根求系数 ⇒ 凑配为由$x_1 + x_2$和x_1x_2表示的形式，代入韦达定理求值.

由x_1与x_2的组成的代数式值

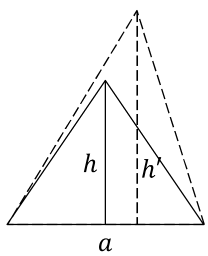
跟学团 函数·定义与求值

买1斤面粉　2元

买2斤面粉　4元

买3斤面粉　6元

买x斤面粉　$2x$元



函数	$y = 2x$	$S = \frac{1}{2}ah$
常量	2	$\frac{1}{2}a$
自变量	x	h
因变量	y	S

跟学团 函数・定义与求值

买1斤面粉　2元

买2斤面粉　4元　　$y=2x$　函数表达式/解析式

买3斤面粉　6元　　y被x唯一确定⇔ y是x的函数　$y^2=2x$？

$y=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$　　　$y=x^2$

定义域：x的取值范围　　$(-\infty,+\infty)$

对应法则：x与y的对应关系　　平方　　函数的三要素

值域：y的取值范围　　$[0,+\infty)$

跟学团 函数・定义与求值

【举例】 已知函数$f(x)=x^2+1$，求$f(1)$的值. 求$f\big(f(1)\big)$的值.

【举例】 已知函数$f(x+1)=x^2+1$，求$f(4)$的值.

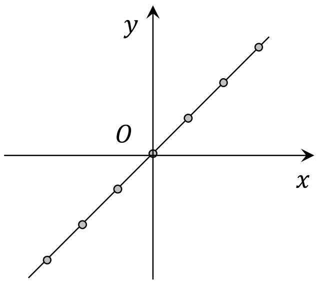
跟学团 函数·表示方式·一次函数

解析式：$y = x$，$x \in \mathbf{R}$

列表法

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

图像法



一次函数$y = kx + b$（$k \neq 0$）图像为一条直线

$x = m$：竖直直线，与y轴平行

$x = 0$：y轴

$y = n$：水平直线，与x轴平行

$y = 0$：x轴

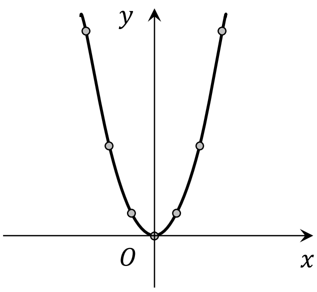
跟学团 函数·表示方式·二次函数

解析式：$y = x^2$，$x \in \mathbf{R}$

列表法

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

图像法



二次函数图像为一条抛物线

开口方向

对称性：对称轴

增减性

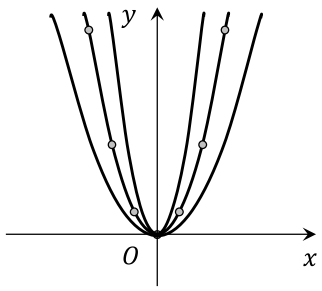
顶点（最值）

跟学团 函数・二次函数图像・开口方向与大小

二次函数$y = ax^2 + bx + c$（$a \neq 0$）图像为一条抛物线

图像与系数关系　　$y = x^2$　　$y = 2x^2$　　$y = \frac{1}{2}x^2$

开口大小不同，a越接近于零，开口越大，抛物线越胖　极限分析法



抛物线

开口方向　向上

对称性：对称轴　y轴

增减性　y轴左侧递减，右侧递增

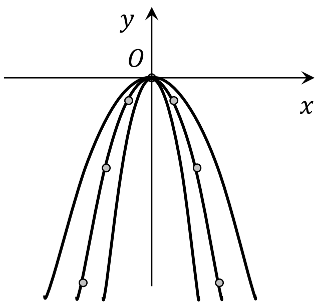
顶点（最值）顶点为原点，取得最小值

跟学团 函数・二次函数图像・开口方向与大小

二次函数$y = ax^2 + bx + c$（$a \neq 0$）图像为一条抛物线

图像与系数关系　　$y = -x^2$　　$y = -2x^2$　　$y = -\frac{1}{2}x^2$

$a < 0$时　　开口大小不同，a越接近于零，开口越大，抛物线越胖



抛物线

开口方向　向下

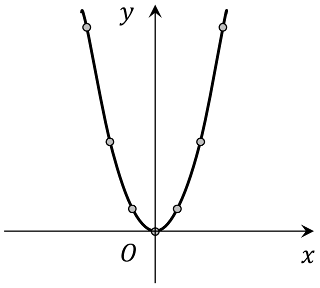
对称性：对称轴　y轴

增减性　y轴左侧递增，右侧递减

顶点（最值）顶点为原点，取得最大值

跟学团 函数·二次函数图像·开口方向与大小

二次函数$y = ax^2 + bx + c$（$a \neq 0$）图像为一条抛物线



二次项系数a决定抛物线形状

开口方向：当$a > 0$时抛物线开口向上

当$a < 0$时抛物线开口向下

开口大小：$|a|$越大，开口越小

$|a|$越小，开口越大

跟学团 函数·二次函数图像·平移

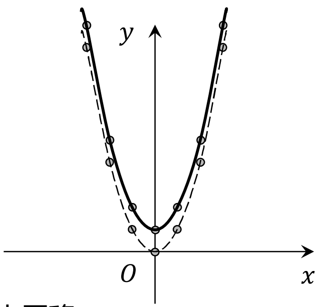
二次函数$y = ax^2 + bx + c$（$a \neq 0$）图像为一条抛物线

$y = x^2$　对称轴：y轴　顶点：$(0,0)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

$y = x^2 + 1$　对称轴：y轴　顶点：$(0,1)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	10	5	2	0	2	5	10



向上平移

跟学团 函数·二次函数图像·平移

二次函数$y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）图像为一条抛物线

$y=x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

对称轴：y轴

顶点：$(0,0)$

$y=(x+1)^2$

x	-3	-2	-1	0	1
y	4	1	0	1	4

对称轴：$x=-1$

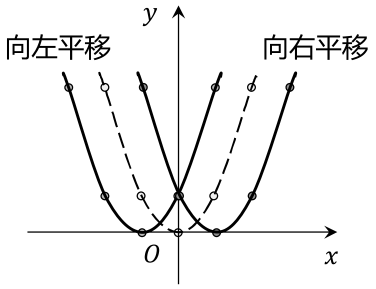
顶点：$(-1,0)$

$y=(x-1)^2$

x	-1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4

对称轴：$x=1$

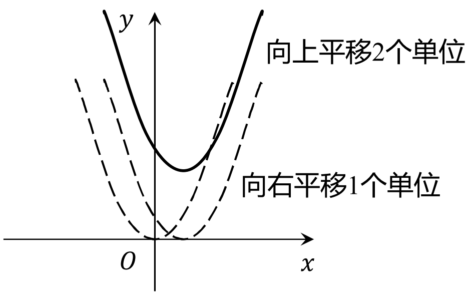
顶点：$(1,0)$



跟学团 函数·二次函数图像·顶点式

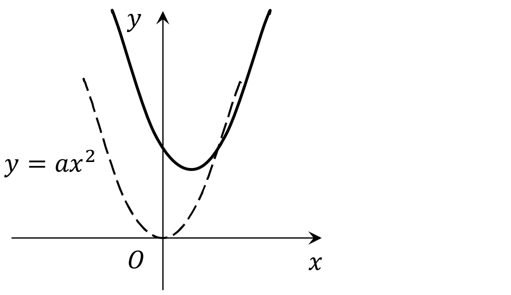
二次函数$y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）图像为一条抛物线

$y=(x-1)^2+2$



对称轴：$x=1$　顶点：$(1,2)$

$y=a(x-h)^2+k$　二次函数的顶点式

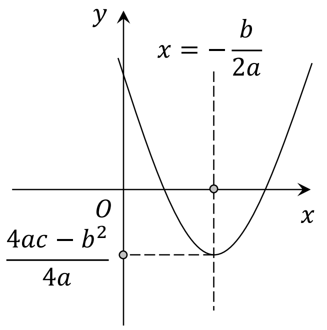


对称轴：$x=h$　顶点：(h,k)

跟学团 函数·二次函数图像·对称轴

二次函数$y = ax^2 + bx + c$（$a \neq 0$）图像为一条抛物线

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - \frac{-b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$



对称轴为$x = -\frac{b}{2a}$

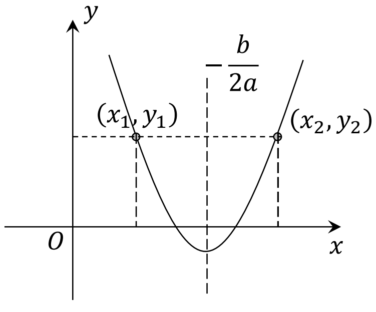
当x =对称轴时，二次函数可取到最值$\frac{4ac - b^2}{4a}$

对称轴左右两侧单调性不同

抛物线顶点坐标：$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

跟学团 函数·二次函数图像·图像上点的性质

二次函数$y = ax^2 + bx + c$（$a \neq 0$）图像为一条抛物线



抛物线上一对对称点的横纵坐标性质

$y_1 = y_2$ 纵坐标相等

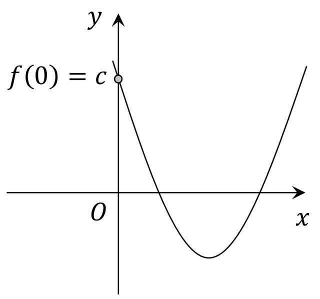
$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$ 到对称轴距离相等

【举例】已知$(1, m)$和$(-5, m)$在抛物线$y = x^2 + bx + 2$上，求b.

纵坐标相等，$(1, m)$和$(-5, m)$关于对称轴对称 $\frac{-5 + 1}{2} = -\frac{b}{2}$，$b = 4$

跟学团 函数·二次函数图像·与坐标轴交点

二次函数$y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）图像为一条抛物线



y轴上的点的横坐标为0，表示形式为$(0,y)$

代入$x=0$求图像与y轴交点

$f(0)=0+0+c=c$

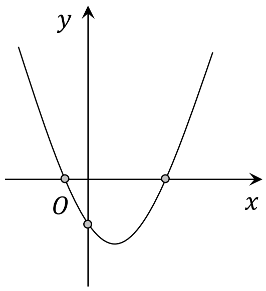
抛物线与y轴交点的纵坐标=抛物线在y轴截距

常数项$c=0$时，抛物线必过原点.

$y=x^2-3x+2$

跟学团 函数·二次函数图像·与坐标轴交点

二次函数$y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）图像为一条抛物线



x轴上的点的纵坐标为0，表示形式为$(x,0)$

代入$y=0$求图像与x轴交点

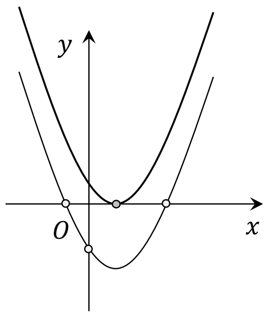
$y=x^2-4x-5=0$

$(x-5)(x+1)=0$

$x=5$或$x=-1$

跟学团 函数·二次函数图像·与坐标轴交点

二次函数$y = ax^2 + bx + c$（$a \neq 0$）图像为一条抛物线



x轴上的点的纵坐标为0，表示形式为$(x, 0)$

代入$y = 0$求图像与x轴交点

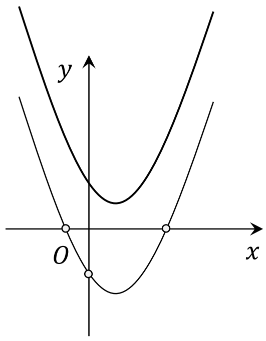
$y = x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x-2)^2 = 0$

$x_1 = x_2 = 2$

跟学团 函数·二次函数图像·与坐标轴交点

二次函数$y = ax^2 + bx + c$（$a \neq 0$）图像为一条抛物线



x轴上的点的纵坐标为0，表示形式为$(x, 0)$

代入$y = 0$求图像与x轴交点

$y = x^2 - 4x + 5 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 < 0$

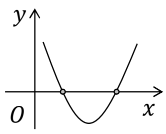
跟学团 函数·二次函数与方程

二次方程的根⇔抛物线与x轴的交点

二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的根

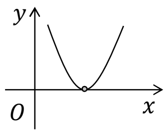
二次函数$y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）与x轴交点

$\Delta>0$，方程有两不同实根x_1，x_2



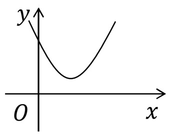
抛物线与x轴有两不同交点

$\Delta=0$，方程有两相同实根$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$



抛物线与x轴有一个交点

$\Delta<0$，方程无实根



抛物线与x轴无交点