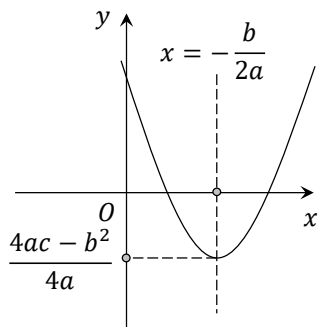


跟学团 函数 · 求二次函数解析式

.....

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 图像为一条抛物线

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$



对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$

当 $x =$ 对称轴时, 二次函数可取到最值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$

抛物线顶点坐标: $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

跟学团 函数 · 求二次函数解析式

.....

【举例】已知抛物线 $y = x^2 + ax + a + 1$ 过点 (1, 4), 则二次函数的解析式为 $y = x^2 + x + 2$.

抛物线过点 \Leftrightarrow 点坐标满足抛物线解析式 \Leftrightarrow 点坐标代入等式成立

$$\begin{array}{c}
 \text{代入 } x = 1 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 y = x^2 + ax + a + 1 \\
 \uparrow \\
 \text{代入 } y = 4
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 4 = 1^2 + a \times 1 + a + 1 \\
 \text{解得 } a = 1 \\
 y = x^2 + x + 2
 \end{array}$$

跟学团 函数 · 求二次函数解析式

.....

【举例】已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $(-1, 0)$, $(2, -3)$, $(4, 5)$, 求二次函数的解析式.

抛物线过点 \Leftrightarrow 点坐标满足抛物线解析式 \Leftrightarrow 点坐标代入等式成立

$$\begin{array}{l}
 \text{过点}(-1, 0), \text{ 代入 } x = -1, y = 0 \\
 \text{过点}(2, -3), \text{ 代入 } x = 2, y = -3 \\
 \text{过点}(4, 5), \text{ 代入 } x = 4, y = 5
 \end{array}
 \quad
 \left\{
 \begin{array}{l}
 0 = a - b + c \\
 -3 = 4a + 2b + c \\
 5 = 16a + 4b + c
 \end{array}
 \right.
 \quad
 \begin{cases}
 a = 1 \\
 b = -2 \\
 c = -3
 \end{cases}$$

故 $y = x^2 - 2x - 3$

跟学团 函数 · 求二次函数解析式

.....

【举例】已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $(1, 2)$ 和 $(2, 7)$, 对称轴为 $x = -1$, 求二次函数的解析式.

抛物线过点 \Leftrightarrow 点坐标满足抛物线解析式 \Leftrightarrow 点坐标代入等式成立

$$\begin{array}{l}
 \text{代入 } x = 1, y = 2 \\
 \text{代入 } x = 2, y = 7 \\
 \text{对称轴为 } x = -1
 \end{array}
 \quad
 \left\{
 \begin{array}{l}
 2 = a + b + c \\
 7 = 4a + 2b + c \\
 -\frac{b}{2a} = -1
 \end{array}
 \right.
 \quad
 \begin{cases}
 a = 1 \\
 b = 2 \\
 c = -1
 \end{cases}$$

故 $y = x^2 + 2x - 1$

【总结】每一给出抛物线上一个点/对称轴, 相当于给出一个关于系数的等式.

跟学团 函数 · 求二次函数解析式

.....

【举例】已知抛物线顶点为(1,3)，且过点(2,1)，求二次函数的解析式。

设二次函数为 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

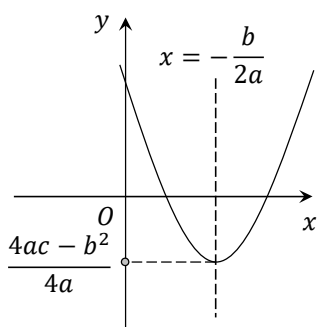
抛物线顶点坐标: $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ \frac{4ac - b^2}{4a} = 3 \\ 1 = 4a + 2b + c \end{cases}$$

跟学团 函数 · 求二次函数解析式

.....

一般式 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 图像为一条抛物线



顶点式 $y = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$

$$= a(x - h)^2 + k$$

对称轴: $x = h$ 顶点: (h, k)

跟学团 函数 · 求二次函数解析式

.....

【举例】已知抛物线顶点为(1,3)，且过点(2,1)，求二次函数的解析式。

设二次函数为 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

抛物线顶点坐标: $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ \frac{4ac - b^2}{4a} = 3 \\ 1 = 4a + 2b + c \end{cases}$$

设二次函数为 $y = a(x - h)^2 + k$ ($a \neq 0$)

顶点: $(h, k) = (1, 3)$

$$y = a(x - 1)^2 + 3$$

过点(2,1)，代入 $x = 2, y = 1$

$$1 = a(2 - 1)^2 + 3, \quad a = -2$$

$$y = -2(x - 1)^2 + 3$$

$$y = -2x^2 + 4x + 1$$

跟学团 函数 · 求二次函数解析式

.....

【举例】已知抛物线过点(-1,0)，(5,0)，和(1,-16)，求二次函数的解析式。

设二次函数为 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

过点(-1,0)，代入 $x = -1, y = 0$

过点(5,0)，代入 $x = 5, y = 0$

过点(1,-16)，代入 $x = 1, y = -16$

$$\begin{cases} 0 = a - b + c \\ 0 = 25a + 5b + c \\ -16 = a + b + c \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \\ c = -10 \end{cases}$$

$$\text{故 } y = 2x^2 - 8x - 10$$

跟学团 函数 · 求二次函数解析式

.....

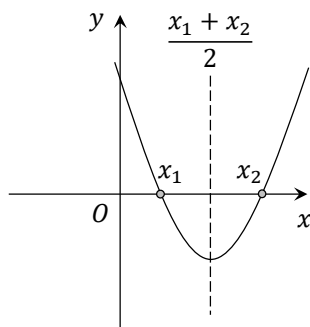
交点式/两根式 抛物线与 x 轴交点为 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$, 则可设 $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ ($a \neq 0$)

$$y = (x - 1)(x - 2)$$

与 x 轴交点为 $(1, 0)$ 和 $(2, 0)$

$$y = a(x - 1)(x - 2) \quad (a \neq 0)$$

与 x 轴交点为 $(1, 0)$ 和 $(2, 0)$



跟学团 函数 · 求二次函数解析式

.....

【举例】已知抛物线过点 $(-1, 0)$, $(5, 0)$, 和 $(1, -16)$, 求二次函数的解析式.

抛物线与 x 轴交点为 $(-1, 0)$ 和 $(5, 0)$

设二次函数为 $y = a(x + 1)(x - 5)$ ($a \neq 0$)

过点 $(1, -16)$, 代入 $x = 1$, $y = -16$

$$-16 = a(1 + 1)(1 - 5) = -8a \quad a = 2$$

$$y = 2(x + 1)(x - 5)$$

跟学团 函数 · 求二次函数解析式

.....

【真题2021.05】设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 且 $f(2) = f(0)$, 则 $\frac{f(3)-f(2)}{f(2)-f(1)} =$ (B)

A.2

B.3

C.4

D.5

E.6

抽象问题具体化：特值法

设 $f(2) = f(0) = 0$ 设二次函数为 $f(x) = (x-2)(x-0) = x(x-2)$

$f(3) = 3, f(1) = -1$

$$\frac{f(3)-f(2)}{f(2)-f(1)} = \frac{3-0}{0-(-1)} = 3$$

跟学团 函数 · 求二次函数解析式

.....

【真题2021.05】设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 且 $f(2) = f(0)$, 则 $\frac{f(3)-f(2)}{f(2)-f(1)} =$ (B)

A.2

B.3

C.4

D.5

E.6

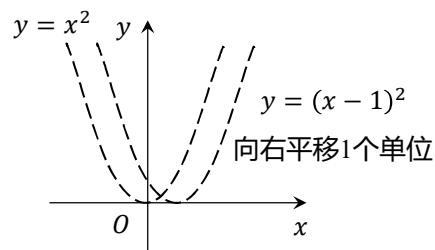
抽象问题具体化：特值法

$f(2) = f(0)$, 则抛物线关于 $x = \frac{0+2}{2} = 1$ 对称

设二次函数为 $f(x) = (x-1)^2$

$f(3) = 2^2 = 4, f(2) = 1, f(1) = 0$

$$\frac{f(3)-f(2)}{f(2)-f(1)} = \frac{4-1}{1-0} = 3$$

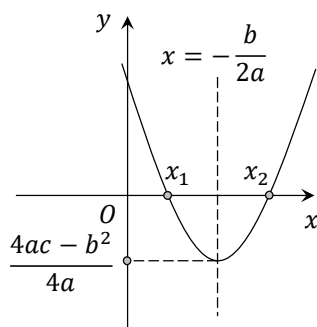


跟学团 函数 · 求二次函数解析式

.....

一般式 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

顶点式 抛物线顶点为 (h, k) , 则可设 $y = a(x - h)^2 + k$ ($a \neq 0$)



交点式/两根式

抛物线与 x 轴交点为 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$

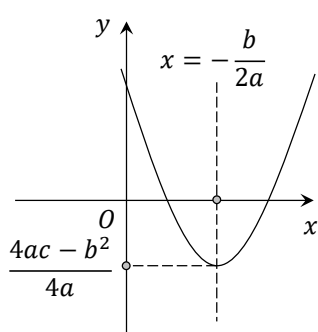
则可设 $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ ($a \neq 0$)

跟学团 函数 · 二次函数最值

.....

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 图像为一条抛物线

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$



对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$

当 $x =$ 对称轴时, 二次函数可取到最值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$

对称轴左右两侧单调性不同

抛物线顶点坐标: $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

跟学团 函数·二次函数最值

.....

【真题2012.10.02】设实数 x, y 满足 $x + 2y = 3$, 则 $x^2 + y^2 + 2y$ 的最小值为 (A) .

A. 4

B. 5

C. 6

D. $\sqrt{5} - 1$

E. $\sqrt{5} + 1$

【标志词汇】 给定未知字母取值或关系式 \Rightarrow 直接代入待求式

$$x + 2y = 3, \quad x = 3 - 2y$$

$$\text{代入得: } x^2 + y^2 + 2y = (3 - 2y)^2 + y^2 + 2y = 5y^2 - 10y + 9$$

$$\text{当 } y = -\frac{-10}{2 \times 5} = 1 \text{ 时, 取最小值 } 4$$

跟学团 函数·二次函数最值

.....

【真题2016.23】 (条件充分性判断) 设 x, y 是实数, 则可以确定 $x^3 + y^3$ 的最小值. (B)

(1) $xy = 1$.

(2) $x + y = 2, a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

【标志词汇】 给定未知字母取值或关系式 \Rightarrow 直接代入待求式

符合乘法公式的先用乘法公式变形处理

$$\text{条件 (1) } xy = 1, \quad y = \frac{1}{x} \quad \text{代入得 } x^3 + y^3 = x^3 + \frac{1}{x^3}$$

$$\text{条件 (2) } x + y = 2, \quad y = 2 - x$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)[(x + y)^2 - 3xy] = 8 - 6xy$$

$$= 8 - 6x(2 - x) = 6x^2 - 12x + 8$$

$$\text{当 } x = -\frac{(-12)}{2 \times 6} = 1 \text{ 时可取到最小值 } 2$$

跟学团 函数·二次函数最值

.....

【真题2016.05】某商场将每台进价为2000元的冰箱以2400元销售时，每天售出8台.调研表明，这种冰箱的售价每降低50元，每天就能多销售4台，若要每天的销售利润最大，则该冰箱的定价应为（ B ）.

A.2200元 B.2250元 C.2300元 D.2350元 E.2400元

设冰箱定价降低 x 个50元，即定价为 $2400 - 50x$ ，则每天可以多销售 $4x$ 台，即每天销售 $8 + 4x$ 台

每天利润 = 单台利润 × 销售量 = (单台售价 - 单台成本) × 销售量

$$= (2400 - 50x - 2000)(8 + 4x) = -200x^2 + 1200x + 3200$$

二次函数开口向下，当且仅当 $x = -\frac{1200}{2 \times (-200)} = 3$ 时取得最大值

代入得此时定价为 $2400 - 50 \times 3 = 2250$

跟学团 一元二次方程·根的分布·零分布

.....

研究方程根的分布与系数之间的关系

【模拟题】已知方程 $(m-3)x^2 + 2(m+1)x - 2 = 0$ 有两个不相等的正根，求 m 的取值范围.

$$x_1 > 0 \quad x_2 > 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{2(m+1)}{m-3} > 0 \\ \frac{-2}{m-3} > 0 \end{cases}$$

$$\frac{2(m+1)}{m-3} < 0 \quad (m+1)(m-3) < 0 \quad -1 < m < 3$$

跟学团 一元二次方程·根的分布·零分布

.....

研究方程根的分布与系数之间的关系

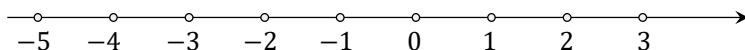
$$1 < m < 3$$

【模拟题】已知方程 $(m-3)x^2 + 2(m+1)x - 2 = 0$ 有两个不相等的正根，求 m 的取值范围.

对二次方程使用韦达定理两大前提：

(1) 二次项系数不为零 (2) $\Delta \geq 0$

$$\begin{cases} m-3 \neq 0 \\ \Delta = 4(m+1)^2 - 4(m-3)(-2) > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 4(m+5)(m-1) > 0 \\ -1 < m < 3 \\ m < 3 \end{cases} \quad m < -5 \text{ 或 } m > 1$$



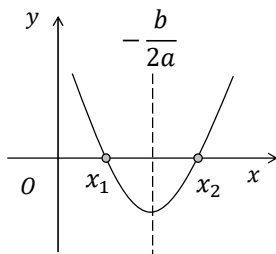
跟学团 一元二次方程·根的分布·零分布

.....

整式 $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

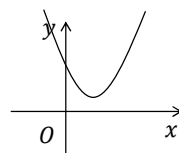
二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交点



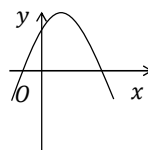
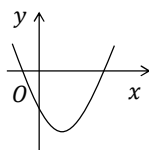
$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} > 0$$



若开口向上 ($a > 0$), 则 y 轴截距 $f(0) = c > 0$

若开口向下 ($a < 0$), 则 y 轴截距 $f(0) = c < 0$

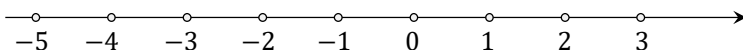


跟学团 一元二次方程·根的分布·零分布

【模拟题】已知方程 $(m-3)x^2 + 2(m+1)x - 2 = 0$ 有两个不相等的正根，求 m 的取值范围.

$$\begin{cases} m-3 \neq 0 \\ \Delta = 4(m+1)^2 - 4(m-3)(-2) > 0 \\ \frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{2(m+1)}{2(m-3)} > 0 \\ (m-3)(-2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m < -5 \text{ 或 } m > 1 \\ -1 < m < 3 \\ m < 3 \end{cases}$$

$$1 < m < 3$$



跟学团 一元二次方程·根的分布·零分布

.....

对于二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

【标志词汇】两正根 $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$, a 与 c 同号, a 与 b 异号

两不相等的正根 $\Leftrightarrow \Delta > 0$, a 与 c 同号, a 与 b 异号

前提条件: $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ (或 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$)

抛物线图像	对称轴位于两正根之间，大于零，即 $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a} > 0$, a 与 b 异号
	若开口向上($a > 0$), 则 y 轴截距 $f(0) = c > 0$
	若开口向下($a < 0$), 则 y 轴截距 $f(0) = c < 0$
	综上所述, a 与 c 同号
韦达定理	两正根之和大于零, 即 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$, a 与 b 异号
	两正根之积大于零, 即 $x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0$, a 与 c 同号

跟学团 一元二次方程·根的分布·零分布

.....

对于二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

【标志词汇】 两负根 $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$, 且 a, b, c 同号

两不相等的负根 $\Leftrightarrow \Delta > 0$, 且 a, b, c 同号

前提条件: $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ (或 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$)

抛物线图像	对称轴位于两负根之间, 小于零, 即 $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a} < 0$, a 与 b 同号
	若开口向上 ($a > 0$), 则 y 轴截距 $f(0) = c > 0$
	若开口向下 ($a < 0$), 则 y 轴截距 $f(0) = c < 0$
	综上所述, a 与 c 同号
韦达定理	两正根之和小于零, 即 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$, a 与 b 同号
	两正根之积大于零, 即 $x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0$, a 与 c 同号

跟学团 一元二次方程·根的分布·零分布

.....

【真题2005.01.04】 方程 $4x^2 + (a-2)x + a-5 = 0$ 有两个不等的负实根. ()

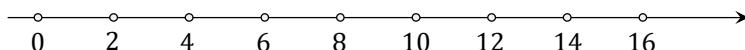
(1) $a < 6$.

(2) $a > 5$

【标志词汇】 两不相等的负根 $\Leftrightarrow \Delta > 0$, 且 a, b, c 同号

$$\Delta = a^2 - 20a + 84 = (a-6)(a-14) > 0 \quad \begin{cases} a > 14 \text{ 或 } a < 6 \\ a-2 > 0 \\ a-5 > 0 \end{cases}$$

4, $a-2$ 与 $a-5$ 同号



跟学团 一元二次方程·根的分布·零分布

.....

【真题2005.01.04】方程 $4x^2 + (a-2)x + a-5 = 0$ 有两个不等的负实根. (C)

(1) $a < 6$.

(2) $a > 5$ 结论成立所要求的 a 的范围为 $5 < a < 6$ 或 $a > 14$.

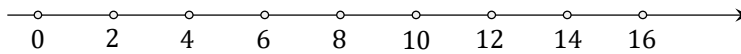
【标志词汇】两不相等的负根 $\Leftrightarrow \Delta > 0$, 且 a, b, c 同号

$$\Delta = a^2 - 20a + 84 = (a-6)(a-14) > 0$$

4, $a-2$ 与 $a-5$ 同号

$$\begin{cases} a > 14 \text{ 或 } a < 6 \\ a-2 > 0 \\ a-5 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 14 \\ a > 2 \\ a > 5 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a < 6 \\ a > 2 \\ a > 5 \end{cases}$$



跟学团 一元二次方程·根的分布·零分布

.....

对于二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

【标志词汇】有一正一负两个根 $\Leftrightarrow a$ 与 c 异号

韦达定理

一正一负两根之积小于零, 即 $x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0$, a 与 c 异号.

$$\text{异号根} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 < 0 \quad \frac{c}{a} < 0$$

$ac < 0$, $-ac > 0$, 此时一定有 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, 无需额外限制根的判别式.

跟学团 一元二次方程·根的分布·零分布

.....

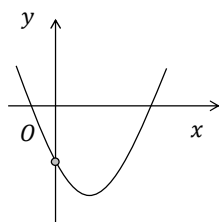
对于二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

【标志词汇】有一正一负两个根 $\Leftrightarrow a$ 与 c 异号

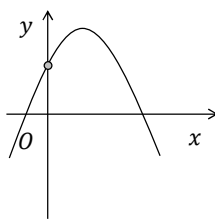
抛物线图像

若开口向上($a > 0$), 则一定有y轴截距 $f(0) = c < 0$.

反之若开口向下($a < 0$), 则一定有y轴截距 $f(0) = c > 0$, 即 a 与 c 异号.



当开口向上($a > 0$)时
抛物线上有点在x轴下方



开口向下($a < 0$)时
抛物线上有点在x轴上方

抛物线一定穿过x轴, 一定有 $\Delta > 0$.

跟学团 一元二次方程·根的分布·零分布

.....

【真题2005.01.04拓展】方程 $4x^2 + (a - 2)x + a - 5 = 0$ 有一正一负两个根, 求 a 的取值范围.

【标志词汇】有一正一负两个根 $\Leftrightarrow a$ 与 c 异号

$a - 5$ 与 4 异号 $a - 5 < 0, a < 5$

【真题2005.10.05】方程 $x^2 + ax + b = 0$ 有一正一负两个实根. (D)

(1) $b = -C_4^3$. (2) $b = -C_7^5$.

二次方程 $x^2 + ax + b = 0$ 有一正一负两个根 \Leftrightarrow 二次项系数 1 与常数项 b 异号,

即题干结论成立要求 $b < 0$

跟学团 一元二次方程 · 根的分布 · 零分布

.....

对于二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

【标志词汇】两正根 $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$, a 与 c 同号, a 与 b 异号

两不相等的正根 $\Leftrightarrow \Delta > 0$, a 与 c 同号, a 与 b 异号

【标志词汇】两负根 $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$, 且 a, b, c 同号

两不相等的负根 $\Leftrightarrow \Delta > 0$, 且 a, b, c 同号

【标志词汇】有一正一负两个根 $\Leftrightarrow a$ 与 c 异号

跟学团 不等式

.....

大于或等于 小于或等于

不等关系 $x > 0$ $x < 1$ $x \neq 5$ $x \geq \sqrt{2}$ $x \leq \sqrt{2}$

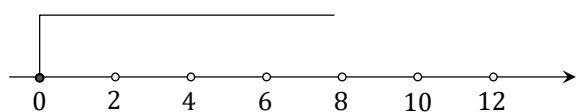
不等号 $>$ $<$ \neq \geq \leq

$x > 0$

$x = 1, \sqrt{2}, 2, 3, 5.8, 10000 \dots$

不等式的解 能令不等式成立的未知量的取值

不等式的解集 不等式所有解所组成的集合



实心：取等号

空心：取不到等号

跟学团 不等式·性质及运算

.....

一个不等式 不等式两边同增同减，不等号方向不变

若 $a > b$ ，则 $a \pm c > b \pm c$

不等式 $a > b$ 两边同时乘以同一个数 c 时：

$c \neq 0$ 不可以乘

$$c > 0 \quad ac > bc \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

不等号方向不变

$$c < 0 \quad ac < bc \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

不等号方向改变

跟学团 不等式·性质及运算

.....

两不等式间 可加不可减，相加要同向

$$a > b, c > d, \text{ 那么 } a + c > b + d$$

【举例】 已知 $3 > 2, 5 > 1$

可以相加，得 $3 + 5 = 8 > 2 + 1 = 3$.

不能相减： $3 - 5 = -2 > 2 - 1 = 1$

【举例】 已知 $x > 3, y < 5$

$-y > -5$ ，此时不等号方向相同可以相加，得 $x - y > -2$

无论不等号方向相同或不同，均不能相减

即不能用 $x > 3$ 与 $-y > -5$ 相减以求 $x + y$ 的范围.

跟学团 一元二次不等式

.....

 $\Delta > 0$ $\Delta = 0$ $\Delta < 0$

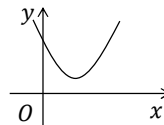
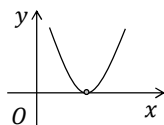
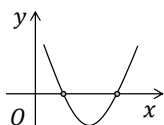
二次方程

两相异实根

两相同实根

无实根

二次函数图像



不等式

解集

解集

解集

$ax^2 + bx + c > 0$

$x < x_1 \text{ 或 } x > x_2$

$x \neq -\frac{b}{2a}$

$(-\infty, +\infty)$

$ax^2 + bx + c < 0$

$x_1 < x < x_2$

无解

无解

二次方程的根 \Leftrightarrow 抛物线与 x 轴的交点 \Leftrightarrow 不等式解集范围的临界点

跟学团 一元二次不等式

.....

对于一元二次不等式

【标志词汇】已知不等式，求解集.

1. 二次项系数化为正，求对应二次方程的根.
2. 不等号为“ $>$ ”，解集取两根之外（大于大的，小于小的）；
不等号为“ $<$ ”，解集取两根之间.
“大于取两边，小于取中间”

$$x^2 - 4x + 3 > 0 \quad x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

$$-x^2 + 4x - 3 > 0 \quad x^2 - 4x + 3 < 0$$

【标志词汇】已知解集，求系数.

跟学团 一元二次不等式

.....

【真题2007.10.10】 $x^2 + x - 6 > 0$ 的解集是 (D) .

A. $(-\infty, -3)$ B. $(-3, 2)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$ E. 以上结论均不正确

【标志词汇】已知不等式，求解集.

1. 系数化为正，求根.

对应方程 $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) = 0$ 两根为-3和2

2. 大于取两边，小于取中间

不等号为“>”，解集取两根之外. 解集为： $x > 2$ 或 $x < -3$.

【技巧】二次项系数为正，不等号为“>”，解集取两根之外，仅D选项符合.

跟学团 一元二次不等式

.....

对于一元二次不等式

【标志词汇】已知不等式，求解集.

“大于取两边，小于取中间”

【标志词汇】已知解集，求系数.

二次方程的根 \Leftrightarrow 抛物线与x轴的交点 \Leftrightarrow 不等式解集范围的临界点

1. 解集区间端点为对应二次方程的两根.

2. 韦达定理求系数（根与系数关系）.

跟学团 一元二次不等式

.....

【真题2006.10.05】已知不等式 $ax^2 + 2x + 2 > 0$ 的解集是 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ ，则 $a =$ (A) .

(A) -12 (B) 6 (C) 0 (D) 12 (E) 以上结论均不正确

【技巧】由于不等式解集形式在两根之间，则一定有抛物线开口方向向下，即 $a < 0$ ，仅选项A符合.

【标志词汇】已知解集，求系数.

1. 解集区间端点为对应二次方程的两根

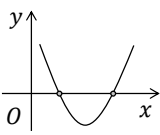
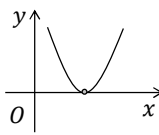
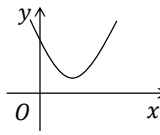
对应方程 $ax^2 + 2x + 2 = 0$ 的两根为 $-\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$

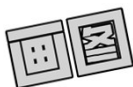
2. 韦达定理求系数（根与系数关系）.

两根之积 $-\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} = \frac{2}{a} \Rightarrow a = -12$

跟学团 一元二次不等式·无解与恒成立

.....

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次方程	两相异实根	两相同实根	无实根
二次函数图像			
不等式	解集	解集	解集
$ax^2 + bx + c > 0$	$x < x_1$ 或 $x > x_2$	$x \neq -\frac{b}{2a}$	$(-\infty, +\infty)$
$ax^2 + bx + c < 0$	$x_1 < x < x_2$	无解	无解



二次方程的根 \Leftrightarrow 抛物线与 x 轴的交点

\Leftrightarrow 不等式解集范围的临界点

跟学团 一元二次不等式

.....

【真题2005.01.03】满足不等式 $(x+4)(x+6)+3>0$ 的所有实数 x 的集合是 (E) .

A. $[4, +\infty)$ B. $(4, +\infty)$ C. $(-\infty, -2]$ D. $(-\infty, -1)$ E. $(-\infty, +\infty)$

将原不等式整理成一元二次不等式标准形式得 $x^2 + 10x + 27 > 0$,

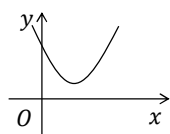
该不等式对应方程根的判别式 $\Delta = 100 - 108 = -8 < 0$,

说明该方程无实根, 即与 x 轴无交点, 且抛物线开口方向向上,

故不等式解集为全体实数, 即 $(-\infty, +\infty)$.

跟学团 一元二次不等式·无解与恒成立

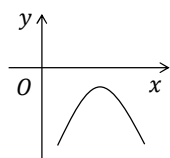
.....



$ax^2 + bx + c > 0$ 对任意 x 恒成立

$ax^2 + bx + c \leq 0$ 的解集为空集

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{抛物线开口必向上, } a > 0 \\ \text{抛物线与} x \text{轴无交点 (对应方程 } \Delta < 0 \text{)} \end{cases}$



$ax^2 + bx + c < 0$ 对任意 x 恒成立

$ax^2 + bx + c \geq 0$ 的解集为空集

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{抛物线开口必向下, } a < 0 \\ \text{抛物线与} x \text{轴无交点 (对应方程 } \Delta < 0 \text{)} \end{cases}$

跟学团 一元二次不等式·无解与恒成立

.....

标志词汇	翻译	解读
不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 解集为全体实数	必然	$ax^2 + bx + c$ 必然大于等于0
不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 对任意 x 恒成立		
不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 解集为空集	不可能	$ax^2 + bx + c$ 不可能小于0
不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 无解		

把所有的无解转化为恒成立

把所有不可能转化为必然

跟学团 一元二次不等式·无解与恒成立

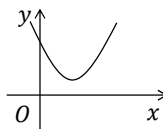
.....

对于一元二次不等式

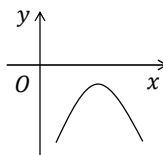
【标志词汇】“对任意/所有 x 恒成立”、“解集为全体实数”、“解集为空集”

1. 无解化为恒成立.

2. “ > 0 恒成立”意味着: $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ 与 x 轴无交点 开口向上



“ < 0 恒成立”意味着: $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$ 与 x 轴无交点 开口向下



跟学团 一元二次不等式·无解与恒成立

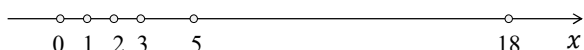
.....

【真题2011.10.21】不等式 $ax^2 + (a-6)x + 2 > 0$ 对所有实数 x 都成立 (E) .

(1) $0 < a < 3$ (2) $1 < a < 5$

$ax^2 + bx + c > 0$ 对任意 x 恒成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{抛物线开口必向上, } a > 0 \\ \text{抛物线与} x \text{轴无交点 (对应方程} \Delta < 0 \text{)} \end{cases}$

$$\begin{cases} a > 0 \\ (a-6)^2 - 8a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a^2 - 20a + 36 < 0 \end{cases} \Rightarrow 2 < a < 18$$



条件(1) $0 < a < 3$ 不充分, 条件(2) $1 < a < 5$ 不充分, 联合亦不充分

【技巧】代入 $a = 2$ 得: $2x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 - 2x + 1) = 2(x-1)^2 \geq 0$

跟学团 一元二次不等式·总结

.....

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次方程	两相异实根	两相同实根	无实根
二次函数图像			
不等式	解集	解集	解集
$ax^2 + bx + c > 0$	$x < x_1$ 或 $x > x_2$	$x \neq -\frac{b}{2a}$	$(-\infty, +\infty)$
$ax^2 + bx + c < 0$	$x_1 < x < x_2$	无解	无解

二次方程的根 \Leftrightarrow 抛物线与 x 轴的交点 \Leftrightarrow 不等式解集范围的临界点

跟学团 高次不等式 方程的根将数轴分为不同区域

.....

整式 $x - 1$

函数 $y = x - 1$

方程 $x - 1 = 0$

不等式 $x - 1 > 0$



$x > 1$ 时, $x - 1 > 0$

$x = 1$ 时, $x - 1 = 0$

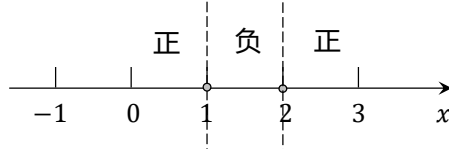
$x < 1$ 时, $x - 1 < 0$

整式 $(x - 1)(x - 2)$

函数 $y = (x - 1)(x - 2)$

方程 $(x - 1)(x - 2) = 0$

不等式 $(x - 1)(x - 2) > 0$



$x > 2$ 时, $(x - 1)(x - 2) > 0$

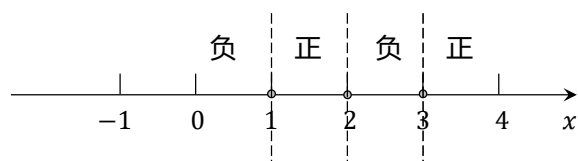
$1 < x < 2$ 时, $(x - 1)(x - 2) < 0$

$x < 1$ 时, $(x - 1)(x - 2) > 0$

跟学团 高次不等式

.....
 $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$ 方程的根将数轴分为不同区域

【举例】求不等式 $(x - 1)(x - 2)(x - 3) > 0$ 的解集.



$x \in (3, +\infty)$ 时, $(x - 1)(x - 2)(x - 3) > 0$

$x \in (2, 3)$ 时, $(x - 1)(x - 2)(x - 3) < 0$

$x \in (1, 2)$ 时, $(x - 1)(x - 2)(x - 3) > 0$

$x \in (-\infty, 1)$ 时, $(x - 1)(x - 2)(x - 3) < 0$

跟学团 高次不等式

.....

化 把不等式移项化为() () () () > 0 的形式
注意每个因式中 x 最高次项系数需要化为正.

求 将不等号写为等号, 解出对应方程的所有根

标 在数轴上依次标出各根

穿 从数轴的右上方开始, 由上至下, 由右至左画线穿根,

挑 线在数轴上方的所有区域, 代表 $f(x) > 0$ 的不等式的解集.
线在数轴下方的区域, 代表 $f(x) < 0$ 的不等式的解集.

跟学团 高次不等式

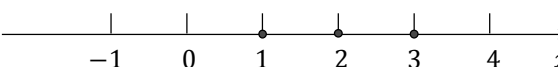
.....

【举例】 求不等式 $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ 的解集. $1 < x < 2$ 或 $x > 3$. $(1, 2) \cup (3, +\infty)$

化 不等式对应的方程为 $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$

求 三个根是1、2和3

标 将所有根在数轴上标出得:

穿  不等式中带等号 \Leftrightarrow 解集为闭区间

挑 $(x-1)(x-2)(x-3) < 0$ 的解集为 $x < 1$ 或 $2 < x < 3$.

$(x-1)(x-2)(x-3) \geq 0$ $1 \leq x \leq 2$ 或 $x \geq 3$. $[1, 2] \cup [3, +\infty)$

跟学团 高次不等式

.....

【真题2009.01.23】 $(x^2 - 2x - 8)(2 - x)(2x - 2x^2 - 6) > 0$. (E)

(1) $x \in (-3, -2)$. (2) $x \in [2, 3]$.

化 将对应方程因式分解整理得 $(x - 4)(x + 2)(x - 2)(2x^2 - 2x + 6) = 0$

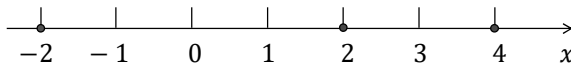
求 $2x^2 - 2x + 6$ 对应方程的判别式 $\Delta = 4 - 48 = -44 < 0$ $2x^2 - 2x + 6$ 恒为正

乘积中恒为正的式子，它所对应的图像与 x 轴无交点，不产生根，对不等式解集无影响。

原不等式解集等价于 $(x - 4)(x + 2)(x - 2) > 0$ 的解集。

标

穿



挑 解集为 $x > 4$ 或 $-2 < x < 2$.

跟学团 高次不等式

.....

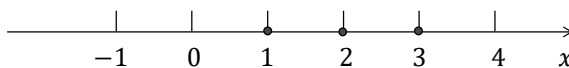
【举例】求不等式 $(1 - x)(x - 2)^2(x - 3) < 0$ 的解集. $(1, 2) \cup (2, 3)$

化 不等式对应的方程为 $(x - 1)(x - 2)^2(x - 3) = 0$

求 四个根是1、2、2和3 $(x - 1)(x - 2)(x - 2)(x - 3) = 0$

标

穿



挑 $(1 - x)(x - 2)^{100}(x - 3) < 0$ $(1 - x)(x - 2)^{101}(x - 3) < 0$

奇过偶不过

跟学团 高次不等式

.....

化 $(\quad)(\quad)(\quad)(\quad) > 0$ 注意每个因式中 x 最高次项系数需要化为正.

求 将不等号写为等号, 解出对应方程的所有根 恒为正的算式对解集无影响

标 在数轴上依次标出各根

穿 从数轴的右上方开始, 由上至下, 由右至左画线穿根 奇过偶不过

挑 线在数轴上方的所有区域, 代表 $f(x) > 0$ 的不等式的解集.

线在数轴下方的区域, 代表 $f(x) < 0$ 的不等式的解集.

跟学团 分式不等式

.....

【举例】求不等式 $\frac{x(x+2)}{x-3} < 0$ 的解集 $x < -2$ 或 $0 < x < 3$

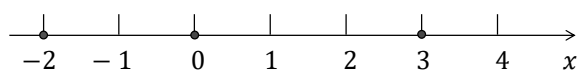
【典型错误】 $\frac{x(x+2)}{x-3} < 0$ 两边同乘 $x-3$ 得 $x(x+2) < 0$, 故解集为 $-2 < x < 0$

错误原因: 未知正负的算式不可以乘/除

【标准正解】不等式等价变形

$\frac{x(x+2)}{x-3} < 0$ 两边同乘以 $(x-3)^2$ 其中 $x-3 \neq 0$

$x(x+2)(x-3) < 0$, 与原不等式同解



跟学团 分式不等式

【标志词汇】几个式子相乘/除的不等式，求解集 \Rightarrow 等价变形后数轴穿根

【分式不等式等价变形】不等式两边同乘 $[g(x)]^2$ 可将分式不等式的等价变形如下

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \leq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) < 0$$

跟学团 分式不等式

【真题2014.10.19】（条件充分性判断） x 是实数，则 x 的取值范围是 $(0,1)$. （C）

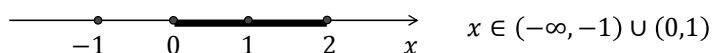
(1) $x < \frac{1}{x}$.

(2) $2x > x^2$.

条件 (1) : $x < \frac{1}{x}$ 【标志词汇】几个式子相乘/除的不等式，求解集 \Rightarrow 等价变形后数轴穿根

移项通分变为标准分式不等式 $x - \frac{1}{x} < 0$, $\frac{x^2 - 1}{x} < 0$ 化求标穿挑

两边同乘分母的平方 x^2 等价变形 $x(x^2 - 1) < 0$ $x(x+1)(x-1) < 0$



条件 (2) : $2x > x^2$ $x(x-2) < 0$ $x \in (0, 2)$

条件 (1) 与条件 (2) 联合得 $x \in (0, 1)$, 充分.

跟学团 分式不等式

.....

【2001.01.08】设 $0 < x < 1$, 则不等式 $\frac{3x^2 - 2}{x^2 - 1} > 1$ 的解是 (A) .

A. $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

B. $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1$

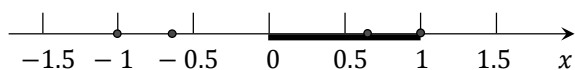
C. $0 < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$

D. $\sqrt{\frac{2}{3}} < x < 1$

【标志词汇】几个式子相乘/除的不等式, 求解集 \Rightarrow 等价变形后数轴穿根

$$\frac{3x^2 - 2}{x^2 - 1} - 1 > 0 \quad \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} > 0 \quad (2x^2 - 1)(x^2 - 1) > 0$$

$$(\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1)(x + 1)(x - 1) > 0$$



解集为 $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (1, +\infty)$

条件限制 $0 < x < 1$, 故解集为 $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

跟学团 分式不等式

.....

【2001.01.08】设 $0 < x < 1$, 则不等式 $\frac{3x^2 - 2}{x^2 - 1} > 1$ 的解是 (A) .

A. $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

B. $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1$

C. $0 < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$

D. $\sqrt{\frac{2}{3}} < x < 1$

【标志词汇】几个式子相乘/除的不等式, 求解集 \Rightarrow 等价变形后数轴穿根

讨论范围大前提: $0 < x < 1 \quad x^2 - 1 < 0$

不等式两边同乘负项 $x^2 - 1$, 不等号方向改变 $3x^2 - 2 < x^2 - 1$

$$2x^2 - 1 < 0$$

$$(\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1) < 0 \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

跟学团 分式不等式

.....

【模拟题】若 $\frac{2x^2 + 2kx + k}{4x^2 + 6x + 3} < 1$ 对一切实数 x 均成立，则 k 的取值范围为 (A) .

A. $1 < k < 3$ B. $1 < k < 2$ C. $2 < k < 3$ D. $0 < k < 3$ E. $-3 < k < 3$

【标志词汇】 几个式子相乘/除的不等式，求解集 \Rightarrow 等价变形后数轴穿根

分母根的判别式 $\Delta = 6^2 - 4 \times 12 = -12 < 0$ 分母 $4x^2 + 6x + 3$ 恒大于零.

不等式两边可以同乘以恒大于零的分母，不等号方向不变.

$$2x^2 + 2kx + k < 4x^2 + 6x + 3$$

【标志词汇】

题目变为: $2x^2 + 2(3-k)x + 3-k > 0$ 对一切实数 x 均成立，求 k 的取值范围.

$$\Delta = 4(3-k)^2 - 8(3-k) < 0 \quad \text{整理得} 4(k-3)(k-1) < 0, \text{解得} 1 < k < 3.$$

跟学团 分式不等式

.....

【真题2012.10.14】若不等式 $\frac{(x-a)^2 + (x+a)^2}{x} > 4$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，则常数 a 的取值范围是 (E) .

A. $(-\infty, -1)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-1, 1)$ D. $(-1, +\infty)$ E. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

【对称秒杀法】将题干不等式中的 a 和 $-a$ 互换之后，不等式不变

故常数 a 的取值范围一定关于 0 对称，满足 a 的取值范围关于零对称的选项只有 C 选项和 E 选项.

代入 $a = 0$ 验证，原不等式变为 $2x > 4$ ，无法满足在 $x \in (0, +\infty)$ 的范围内恒成立，

故排除 C 选项，直接选择 E 选项.

含错必错 不含对必错

跟学团 分式不等式

.....

【真题2012.10.14】若不等式 $\frac{(x-a)^2+(x+a)^2}{x} > 4$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，则常数 a 的取值范围是 (E) .

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-1, 1)$ D. $(-1, +\infty)$ E. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

【标志词汇】几个式子相乘/除的不等式，求解集 \Rightarrow 等价变形后数轴穿根

讨论范围大前提： $x \in (0, +\infty)$

$\frac{x^2 + a^2}{x} > 2$ 在 x 为正的前提下，不等式两边同乘 x 去掉分母

题目变为： $x^2 - 2x + a^2 > 0$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，求 a 的取值范围.

开口向上抛物线，对称轴为 $x = 1$

最小值 $1 - 2 + a^2 > 0$ 所解得 $a > 1$ 或 $a < -1$

