MBA 大师《跟学团——MBA 数学》

第四章 平均值、绝对值

平均值

算术平均值与几何平均值的基本运算

1. 如果x_1,x_2,x_3三个数的算术平均值为 6，则x_1+1,x_2+2,x_3+3的算术平均值是（　）.

A.4　　B.5　　C.6　　D.7　　E.8

【答案】E

【解析】x_1,x_2,x_3的算术平均值为 6，根据算术平均值与总和的关系可知$x_1+x_2+x_3=3\times6=18$，故x_1+1，x_2+2，x_3+3这三个数的平均值为:

$$\frac{(x_1+1)+(x_2+2)+(x_3+3)}{3}=\frac{(x_1+x_2+x_3)+6}{3}=\frac{24}{3}=8.$$

2. 两个正数x,y 的算术平均值为 4，几何平均值也为 4，则x和y^2+9几何平均值为（　）.

A.8　　B.9　　C.10　　D.11　　E.12

【答案】C

【解析】由题干可知，$\frac{x+y}{2}=4,\sqrt{xy}=4$，将$y=8-x$代入$\sqrt{xy}=4$，解得$x=y=4.$

故$y^2+9=25$，则x和y^2+9的几何平均值为$\sqrt{4\times25}=10.$

3. a和b为不同的自然数，则a和b的算术平均值为$\frac{5}{2}$.

（1）$\frac{1}{a}$和$\frac{1}{b}$的几何平均值为$\frac{1}{\sqrt6}$.

（2）a^2和b^2的算术平均值为$\frac{13}{2}$.

【答案】B

【解析】题干要求$\frac{a+b}{2}=\frac{5}{2}$，即$a+b=5.$

条件（1），当$a=1,b=6$时，满足$\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}=\sqrt{\frac{1}{ab}}=\frac{1}{\sqrt6}$，但$a+b=7$，不充分.

条件（2），a,b为不同的自然数且$a^2+b^2=13$，则穷举可知，$a=2,b=3$或$a=3,b=2.$

则有$a+b=5$，条件（2）充分.

均值定理基础

4. 已知矩形的面积为 3，则该矩形周长的最小值为（　　）.

A.2　　B.$\sqrt{3}$　　C.3　　D.$2\sqrt{3}$　　E.$4\sqrt{3}$

【答案】E

【解析】设矩形的长为x，宽为y.

由题干可知$xy=3$，矩形周长$=2(x+y)$

$2(x+y)\geq 2\times 2\sqrt{xy}=4\sqrt{3}$ ，则矩形周长的最小值为$4\sqrt{3}$.

5. 若$x>-1$，则$f(x)=\frac{x^2+2x+2}{x+1}$的最小值是（　　）.

A.2　　B.4　　C. 6　　D.8　　E.以上答案均不正确

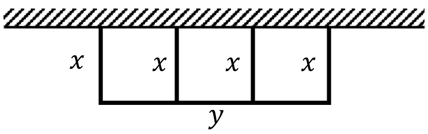
【答案】A

【解析】$f(x)=\frac{x^2+2x+2}{x+1}=\frac{(x+1)^2+1}{x+1}=x+1+\frac{1}{x+1}$.

由于$x>-1$，所以有$x+1>0$，$\frac{1}{x+1}>0$.

根据均值定理，$x+1+\frac{1}{x+1}\geq 2\sqrt{(x+1)\left(\frac{1}{x+1}\right)}=2$.

6. 如图所示，有一批材料可以建成长为200m的墙，如果用此材料在一边靠墙的地方围成一块矩形场地，中间用同样的材料隔成三个面积相等的小矩形，则围成的矩形场地最大面积为（　　）（单位：m^2）.



A.1000　　B.10000　　C.2500　　D.6250　　E.7650

【答案】C

【解析】均值定理求最值. 设大矩形长为y，宽为x，根据题意可知：$4x+y=200$.矩形面积$S=xy$，由于这里长和宽都是正数，所以根据均值不等式得$4x+y=200\geq 2\sqrt{4xy}$，解出$xy\leq 2500$.

【易错点】三个相连的矩形有 4 个宽x，而非 3 个.

均值定理 · 求和的最小值

7. 已知$x>0$，函数$y=\frac{4}{x}+2x^2$的最小值为（　　）.

A. $3\sqrt{3}$　　B. $3\sqrt[3]{3}$　　C.9　　D.8　　E.6

【答案】E

【解析】已知$x>0$符合均值定理使用的前提条件，本题符合均值定理**【标志词汇】**问几项之和的最小值→凑配使它们的乘积为常数.

所以$y=\frac{4}{x}+2x^2=\frac{2}{x}+\frac{2}{x}+2x^2\geq 3\sqrt[3]{\frac{2}{x}\cdot\frac{2}{x}\cdot 2x^2}=3\sqrt[3]{8}=6$.

8. 当$x>0$时，则$y=4x+\frac{9}{x^2}$的最小值为（　　）.

A.6　　B. $\sqrt{6}$　　C. $3\sqrt{6}$　　D. $6\sqrt{6}$　　E. $3\sqrt[3]{36}$

【答案】E

【考点】平均值、绝对值——均值定理

【解析】已知$x>0$符合均值定理使用的前提条件，本题符合均值定理**【标志词汇】**问几项之和的最小值→凑配使它们的乘积为常数.

所以$y=4x+\frac{9}{x^2}=2x+2x+\frac{9}{x^2}\geq 3\sqrt[3]{2x\cdot 2x\cdot\frac{9}{x^2}}=3\sqrt[3]{36}$.

9. 已知$f(x)=2x+1$，$g(x)=\frac{f(x^2)+f(x)}{x}$，则当$x>0$时，$g(x)$的最小值为（　　）.

A.0　　B.2　　C.4　　D.6　　E.8

【答案】D

【解析】求出复合函数$g(x)$的表达式：$g(x)=\frac{f(x^2)+f(x)}{x}=\frac{2x^2+1+2x+1}{x}=\frac{2x^2+2x+2}{x}=2x+\frac{2}{x}+2$.因为$x>0$，故题目符合均值定理**【标志词汇】**问几项之和的最小值→凑配使它们的乘积为常数，即有$2x+\frac{2}{x}\geq 2\sqrt{2x\cdot\frac{2}{x}}=4$，$g(x)$的最小值为$4+2=6$.

均值定理 · 求积的最大值

10. $f(x)=x^2(4-4x)(0<x<1)$,，则$f(x)$的最大值为（　　）.

A.$\frac{1}{3}$　　B. $\frac{16}{27}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 4　　E.6

【答案】B

【解析】由于$0 < x < 1$，所以$x^2 > 0, 4-4x > 0$，符合均值定理使用的前提条件，本题符合均值定理**【标志词汇】**问几项之积的最大值→凑配使它们的和为常数.

故$f(x) = x^2(4-4x) = \frac{1}{4} \cdot (2x) \cdot (2x) \cdot (4-4x) \le \frac{1}{4}\left(\frac{2x+2x+4-4x}{3}\right)^3 = \frac{16}{27}$.

11. 已知矩形周长为 4，则该矩形面积的最大值为（　　）.

A.1　　B.2　　C.3　　D.4　　E.6

【答案】A

【解析】设矩形的长为x，宽为y.

由题干可知矩形周长$= 2(x+y) = 4$，可得 $x + y = 2$.

题干要求矩形面积xy的最大值，根据均值定理可得$xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 1$，

所以该矩形面积的最大为1.

12. 在平面坐标系中，O为原点，点$P(x,y)$是函数$y = -\frac{3}{2}x + 6$图像在第一象限上的点，过P点分别作项x，y轴的垂线交于点A、B.则四边形$OAPB$的面积最大可为（　　）.

A.6　　B.12　　C.18　　D.24　　E.36

【答案】A

【解析】函数$y = -\frac{3}{2}x + 6$化简可得$3x + 2y = 12$，由于点$P(x,y)$ 在第一象限，所以$x>0, y>0$，四边形的面积为$s = xy$，

根据均值定理可得$3x \cdot 2y \le \left(\frac{3x+2y}{2}\right)^2 = 36$.可得$xy \le 6$，所以四边形$OAPB$的面积最大可为6.

绝对值

绝对值的定义与性质

13. 已知$abc < 0$，$a + b + c = 0$，则$\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} =$（　　）.

A. -1　　B. -2　　C.0　　D.1　　E.2

【答案】D

【解析】已知$abc < 0$且$a + b + c = 0$，故a、b、c为 1 负 2 正.

令$a<0,b>0,c>0$（可随意设a、b、c的正负，只要满足 1 负 2 正都可以），则

$$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=-1+1+1=1$$

14. 已知非零实数 a，b 满足 $|3a-6|+|b+4|+\sqrt{(a-4)b^2}+6=3a$，那么$a^2+b^2=$（　）.

A.20　　B.4　　C.16　　D.28　　E.32

【答案】E

【解析】由题意可知$(a-4)b^2\geq 0$，由于$b^2>0$从而$a\geq 4$，因此 $|3a-6|=3a-6$，于是$|3a-6|+|b+4|+\sqrt{(a-4)b^2}+6=3a\Longrightarrow|b+4|+\sqrt{(a-4)b^2}=0$，由于绝对值及二次根式具有非负性，于是$\begin{cases}b+4=0\\(a-4)b^2=0\end{cases}$，得$\begin{cases}b=-4\\a=4\end{cases}$，于是$a^2+b^2=32$.

15. $x^2+y^2=\frac{17}{4}$.

（1）$|2x-1|+2y^2+8y+8=0$.

（2）$|2x-1|+2y^2-8y+8=0$.

【答案】D

【解析】条件（1），$|2x-1|+2(y+2)^2=0$，由绝对值及平方具有非负性可得

$\begin{cases}2x-1=0\\y+2=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=-2\end{cases}$，因此，$x^2+y^2=\frac{17}{4}$，充分.

条件（2），$|2x-1|+2(y-2)^2=0$，由绝对值及平方具有非负性可得

$\begin{cases}2x-1=0\\y-2=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=2\end{cases}$，因此，$x^2+y^2=\frac{17}{4}$，充分.

去掉绝对值、绝对值的几何意义

16. 已知$|a|=5$，$|b|=3$，且$|a-b|=b-a$，那么$a+b$的值是（　）.

A.8　　B. 2　　C. -2　　D. -2 或 -8　　E. 2 或 8

【答案】D

【解析】由于$|a-b|=b-a=-(a-b)$，因此 $a-b\leq 0$，即$a\leq b$,又由于$|a|=5$，$|b|=3$，因此$a=-5$，$b=-3$，或$a=-5$，$b=3$，从而$a+b=-8$或-2.

17. $|x-2|=|x-4|$ ，则x=（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4　　E.5

【答案】C

【考点】平均值、绝对值——绝对值：平方法去掉绝对值

【解析】两边平方得$x^2-4x+4=x^2-8x+16$，解得$x=3$.经检验，$x=3$，是原方程的根.

18. $|x-3|<x+1$成立

（1）$x\in(-1,0)$

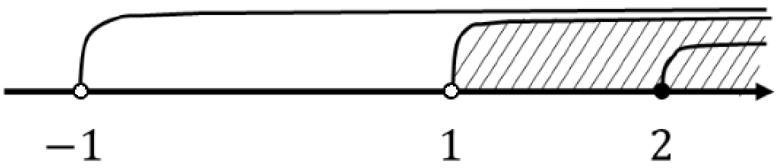
（2）$x\in[2,+\infty)$

【答案】B

要使结论成立，

则$\begin{cases}x+1>0\\(x-3)^2<(x+1)^2\end{cases}$

解得$x>1$



由图可得，条件（2）充分.

19. 设$y=|x-1|+|x+3|$，则下列结论正确的是（　　）

A. y没有最小值　　B.只有一个x使y取到最小值　　C.有无穷多个x使y取到最大值

D.有无穷多个x使y取到最小值　　E.以上结论都不对

【答案】D

【考点】平均值、绝对值——绝对值的几何意义：两绝对值之和

【解析】**思路一**：利用绝对值的几何意义求解.

题干中$y=|x-1|+|x+3|$，符合绝对值几何意义两绝对值之和，$y=|x-1|+|x+3|$表示数轴上点x到点 1 与点-3的距离之和.

当x在$[-3,1]$内的任意位置时，$|x-1|+|x+3|$为定值，恒等于$1,-3$两点之间的距离4，同时这也是两绝对值之和能取到的最小值.由于$[-3,1]$内有无穷多个点，因此有无穷多个x使y取到最小值.

在$[-3,1]$之外时，随着x向左远离点-3，或向右远离点1，$|x-1|+|x+3|$的取值也随之增加，且没有上限，即$y=|x-1|+|x+3|$没有最大值.

思路二： 利用定义零点分段法求解：

$$y=|x-1|+|x+3|=\begin{cases}-2x-2, & x<-3\\ 4, & -3\le x\le 1\\ 2x+2, & x>1\end{cases}$$

当$-3\le x\le 1$时，y取到最小值4，y没有最大值.