跟学团 恒等变形·乘法公式

代入求值

↑

整式

单项式：数字与字母的乘积
多项式：几个单项式的和

$\xrightarrow{\text{四则运算}}$

- 加减法：合并同类项
- 乘法：分别相乘再相加
  - 注意展开式中各项的构成
  - **乘法公式**
- 除法 竖式除法
  - 整除
  - 带余除法
  - 分式

↓ 开方运算

根式

跟学团 恒等变形·乘法公式

$$(a+b)\cdot(a-b) \quad = a\cdot a - ab + ab + (-b)\cdot b = a^2 - b^2$$

$$\begin{aligned}(x+1)^3 &= (x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+1)\\ &= (x^2+2x+1)\cdot(x+1)\\ &= (x^2+2x+1)\cdot x + (x^2+2x+1)\cdot 1\\ &= x^3+3x^2+3x+1\end{aligned}$$

跟学团 恒等变形·乘法公式

二元乘法公式

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ $\begin{cases}(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\end{cases}$

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$ $\begin{cases}a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\\a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\end{cases}$

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$ $\begin{cases}(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{cases}$

跟学团 恒等变形·乘法公式

三元乘法公式

$\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

跟学团 恒等变形·乘法公式 请熟读并背诵全文

二元乘法公式

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ ★ 平方差公式

$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$ ★ 完全平方公式
- 整体思维
- 倒数形态
- 二次多项式配平方

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

$a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$

跟学团 恒等变形·乘法公式

$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$ ★ 完全平方公式

$a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$

a^2+b^2，ab和$a+b$这三个多项式 $\Rightarrow$ **二推一**

①给出a^2+b^2与ab，求$a+b$ $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

②给出$a+b$与ab，求a^2+b^2 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

③给出$a+b$与a^2+b^2，求ab $2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)$

跟学团 恒等变形·乘法公式

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ ★ 完全平方公式

$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$

$a^2 + b^2$，ab和$a - b$这三个多项式 $\Rightarrow$ **二推一**

①给出$a^2 + b^2$与ab，求$a - b$ $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

②给出$a - b$与ab，求$a^2 + b^2$ $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$

③给出$a - b$与$a^2 + b^2$，求ab $2ab = a^2 + b^2 - (a - b)^2$

跟学团 恒等变形·乘法公式

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ ★ 完全平方公式

$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$

$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$

两式相加得：$(a - b)^2 + (a + b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

两式相减得：$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

$a^2 + b^2$，ab，$a + b$和$a - b$这四个多项式 $\Rightarrow$ **任意两个可推出其余**

平方和、乘积、和、差

跟学团 恒等变形·乘法公式

【真题2010.01.24】（条件充分性判断）设a，b为非负实数，则$a+b\le\frac{5}{4}$.（　　）

（1）$ab\le\frac{1}{16}$.　　（2）$a^2+b^2\le 1$.

跟学团 恒等变形·乘法公式

【模拟题】已知$(2020-a)(2019-a)=2000$，那么$(2020-a)^2+(2019-a)^2=($　　$)$

A 3998　B 4000　C 4001　D 4002　E 5000

跟学团 恒等变形·乘法公式

【模拟题】已知$(99-a)(101+a)=2$，那么$(99-a)^2+(101+a)^2=$（　　）

A. 39990　　B. 39996　　C. 40000　　D. 40002　　E. 40004.

跟学团 恒等变形·乘法公式

$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$ ★ 完全平方公式

- 整体思维：任意二推所有
- 倒数形态
- 二次多项式配平方

a,b互为倒数时：$a^2\pm 2+\left(\frac{1}{a}\right)^2=a^2\pm 2a\cdot\frac{1}{a}+\left(\frac{1}{a}\right)^2=\left(a\pm\frac{1}{a}\right)^2$

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+2+\left(\frac{1}{a}\right)^2$$

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=a^2-2+\left(\frac{1}{a}\right)^2$$

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4=a^2+2+\left(\frac{1}{a}\right)^2-4=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$$

建立$a+\frac{1}{a}$与$a-\frac{1}{a}$之间的关系

跟学团 恒等变形 • 乘法公式

倒数形态的完全平方公式：$a^2 \pm 2+\left(\frac{1}{a}\right)^2=a^2 \pm 2a\cdot\frac{1}{a}+\left(\frac{1}{a}\right)^2=\left(a\pm\frac{1}{a}\right)^2$

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+2+\left(\frac{1}{a}\right)^2$$

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=a^2-2+\left(\frac{1}{a}\right)^2$$

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$$

$$\left|a+\frac{1}{a}\right| \underset{\text{平方后加4，再开方}}{\overset{\text{平方后减4，再开方}}{\rightleftharpoons}} \left|a-\frac{1}{a}\right|$$

跟学团 恒等变形 • 乘法公式

【模拟题】已知$x^2-5x+1=0$，则$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=$（　　）

A. 29　　B. 19　　C. 21　　D. $\sqrt{21}$　　E. $\sqrt{19}$

跟学团 恒等变形·乘法公式

【模拟题】已知$x^2-5x+1=0$，则$\left|x-\frac{1}{x}\right|=$（　　）

A. 2　　B. 4　　C. $2\sqrt{7}$　　D. $\sqrt{21}$　　E. $\sqrt{19}$

跟学团 恒等变形·乘法公式

$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$ ★ 完全平方公式 $\begin{cases}\text{整体思维：任意二推所有}\\\text{倒数形态}\\\text{二次多项式配平方}\end{cases}$

【真题1998.01.06】设实数x,y适合等式$x^2-4xy+4y^2+\sqrt{3}x+\sqrt{3}y-6=0$，则$x+y$的最大值为（　　）.

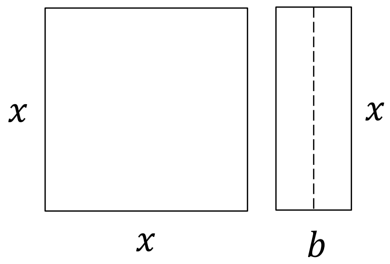
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{2}$　　E. $3\sqrt{3}$

跟学团 恒等变形 • 乘法公式

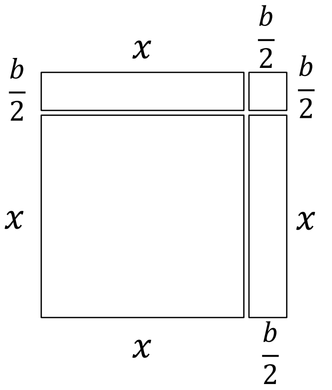
$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ ★ 完全平方公式

- 整体思维：任意二推所有
- 倒数形态
- 二次多项式配平方

二次多项式配平方 将一个二次多项式化为一个一次多项式的平方与一个常数的和.



面积：$x^2 + bx$



面积：$(x + \frac{b}{2})^2$

跟学团 恒等变形 • 乘法公式

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ ★ 完全平方公式

- 整体思维：任意二推所有
- 倒数形态
- 二次多项式配平方

二次多项式配平方 将一个二次多项式化为一个一次多项式的平方与一个常数的和.

$$x^2 + bx = x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2}x \boxed{+ \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = (x + \frac{b}{2})^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

加上一次项系数一半的平方，后再减去一次项系数一半的平方

跟学团 恒等变形·乘法公式

【举例】把二次多项式$x^2+6x-16$配平方

跟学团 恒等变形·乘法公式

【模拟题】已知x^2-3x+a是一个完全平方式，则$a=$（　　）.

A. $\frac{8}{3}$　　B. 2　　C. 3　　D. $\frac{9}{4}$　　E. 4

跟学团 恒等变形·乘法公式

三元乘法公式

$$\frac{1}{2}[\boxed{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}]=\boxed{a^2+b^2+c^2}-\boxed{ab-bc-ac}$$

$$ab+bc+ac=a^2+b^2+c^2-\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]$$

$$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]+(ab+bc+ac)$$

$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2$，$a^2+b^2+c^2$和$ab+bc+ac$这三个多项式 $\Rightarrow$ 二推一

跟学团 恒等变形·乘法公式

【真题2008.01.03】若$\triangle ABC$的三边a,b,c满足$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$，则$\triangle ABC$为（　）.

A. 等腰三角形　B. 直角三角形　C. 等边三角形　D. 等腰直角三角形　E. 以上都不是

跟学团 整式、分式与根式

三元乘法公式

$\boxed{a^2+b^2+c^2}+\boxed{2ab+2bc+2ac}=\boxed{(a+b+c)^2}$

$2ab+2bc+2ac=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$

$\boxed{a^2+b^2+c^2}=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)$

$(a+b+c)^2$，$ab+bc+ac$和$a^2+b^2+c^2$三个多项式 $\Rightarrow$ 二推一

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(\boxed{a^2+b^2+c^2}-ab-bc-ac)$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)[(a+b+c)^2-3ab-3bc-3ac]$

跟学团 恒等变形·乘法公式

三元乘法公式

$\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]=\boxed{a^2+b^2+c^2}\boxed{-ab-bc-ac}$

$(a+b+c)^2=\boxed{a^2+b^2+c^2}\boxed{+2ab+2bc+2ac}$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(\boxed{a^2+b^2+c^2}\boxed{-ab-bc-ac})$

跟学团 恒等变形·乘法公式

【真题2010.10.02】若实数a,b,c满足$a^2+b^2+c^2=9$，则$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$的最大值是（　）.

A. 21　　B. 27　　C. 29　　D. 32　　E. 39

跟学团 恒等变形·乘法公式

整体思维
倒数形态
二次多项式配平方

二元乘法公式

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$　　$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$　　$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

三元乘法公式

$$\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

跟学团 恒等变形·因式分解

- 恒等变形
  - 求因式（因式分解）
    - 乘法公式应用
    - 因式定理法
    - 十字相乘法
    - 待定系数法
  - 求系数

跟学团 恒等变形·因式分解

因数分解 $42=2\times3\times7$

因式分解 <u>把一个多项式恒等变形分解成几个整式的积的形式，且分解到不能再分解为止.</u>

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(a+b)(a+b)$$

$$x^4-1=(x^2)^2-1^2=(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x+1)(x-1)$$

乘法展开式中各项的构成 <u>两个多项式中的m次方项和n次方项的乘积将得到$m+n$次方项</u>

跟学团 恒等变形·因式分解

(1) 提： 提公因式.

$ka+kb+kc=k(a+b+c)$.

(2) 看： 看多项式是否符合乘法公式

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

(3) 代入： 对于已知关于x的多项式，分别依次代入$x=\pm1$，$x=\pm2$，$x=\pm3$

若代入$x=1$，多项式为0，则多项式有因式$x-1$

(4) 算： 十字相乘、待定系数等方法运算求解.

跟学团 恒等变形·因式分解

【模拟题】 n为大于1的任意正整数，则n^3-n必有因数（ ）.

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7 E. 8

跟学团 恒等变形·因式分解

【标志词汇】代数式必有因数⇒因式分解后，根据因式个数/奇偶性判断

任意两个连续正整数，一定有一个是2的倍数.

任意三个连续正整数，一定有一个是3的倍数. 至少有一个是2的倍数

任意四个连续正整数，一定有一个是4的倍数. 至少有一个是2的倍数 至少有一个是3的倍数

【结论1】任意连续的n个正整数中，有且仅有一个数能被n整除.

【结论2】任意n个连续正整数之积一定能被$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$整除.

跟学团 恒等变形·因式分解

【模拟题】n为大于1的任意正整数，则$n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$必有因数（ ）.

A. 10　　B. 15　　C. 20　　D. 24　　E. 48

跟学团 恒等变形·因式分解

(1) 提： 提公因式.

$ka+kb+kc=k(a+b+c)$.

(2) 看： 看多项式是否符合乘法公式

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$　　　$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

(3) 代入： 对于已知关于x的多项式，分别依次代入$x=\pm1$，$x=\pm2$，$x=\pm3$

若代入$x=1$，多项式为0，则多项式有因式$x-1$

(4) 算： 十字相乘、待定系数等方法运算求解.

跟学团 恒等变形·因式定理

- 恒等变形
  - 求因式（因式分解）
    - 乘法公式应用
    - **因式定理法**
    - 十字相乘法
    - 待定系数法
  - 求系数

跟学团 恒等变形·因式定理

	整数整除	**整式整除**
举例	$42=6\times 7$	$x^2-9=(x+3)(x-3)$
表达式	$a=bk$ 被除数=除数×商	$f(x)=g(x)q(x)$ 被除式=除式×商式
要点	a能被b和k整除	$f(x)$能被$g(x)$和$q(x)$整除
	b与k都叫做a的因数	$g(x)$与$q(x)$都叫做$f(x)$的因式

跟学团 恒等变形·因式定理

$42=2\times 3\times 7$

$x^4-1=(x^2+1)(x+1)(x-1)$

因式定理 如果关于x的多项式含有因式$x-a$ ⟺多项式能被$(x-a)$整除 ⟺ $f(a)=0$

$f(x)=(x-a)q(x)$

【标志词汇】<u>对关于x的多项式因式分解⟹ 尝试代入$x=\pm 1$，$x=\pm 2$，$x=\pm 3$……</u>

【标志词汇】<u>验证$x-a$为多项式的因式 ⟹ 代入$x=a$看此时多项式是否值为零</u>

跟学团 恒等变形 • 因式定理

【模拟题】多项式x^2+7x+6，x^2-2x-3，$2x^2+6x+4$，x^2-6x+5，$2x^2+x-1$中含有因式$x+1$的多项式共有（　　）个.

A. 1　　B. 2　　C.3　　D. 4　　E. 5

跟学团 恒等变形 • 因式定理

【标志词汇】

一多项式含有因式A
A是一多项式的因式
一多项式能被A整除
A能整除一多项式

$\Leftrightarrow$ 代入使$A=0$的x值，得此时多项式值为零

因式A为一次式$x-a \Rightarrow$ 给出一个可使$f(x)$为零的x值a，即$f(a)=0$

因式A为二次式$(x-a)(x-b) \Rightarrow$ 给出两个可使$f(x)$为零的x值a和b

即$f(a)=0$且$f(b)=0$

跟学团 恒等变形·因式定理

【模拟题】已知$2x^3-x^2+m$有一个因式$2x+1$，则$m=$（　）

A. 1　　B. 2　　C. -2　　D. -1　　E. $\frac{1}{2}$

跟学团 恒等变形·因式定理

【模拟题】若多项式$f(x)=x^3+px^2+qx+6$含有一次因式$x+1$和$\frac{x-3}{2}$，则$\frac{p}{q}=$（　）.

A. -4　　B. -8　　C. -9　　D. 9　　E. 10

跟学团 恒等变形·因式定理

【模拟题】若$x^4-ax^3+bx^2+2x-4$能被x^2-3x+2整除，则$ab=$（　　）.

A. 4　　B. 10　　C. 15　　D. 24　　E. 30

跟学团 恒等变形·十字相乘

- 恒等变形
  - 求因式（因式分解）
    - 乘法公式应用
    - 因式定理法
    - **十字相乘法**
    - 待定系数法
  - 求系数

跟学团 恒等变形·十字相乘

【举例】把二次多项式$x^2+6x-16$配平方

跟学团 恒等变形·十字相乘

【举例】用十字相乘法将多项式因式分解：$x^2+6x-16=(x+8)(x-2)$

跟学团 恒等变形·十字相乘

整式乘法展开$(x+8)(x-2)=x\cdot x-2x+8x+(-2)\times 8$

$$=x\cdot x+(-2+8)x+(-2)\times 8$$

$$=x^2+6x-16$$

$x^2+6x-16$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 8 \\ 1 & & -2 \end{array}$$

十字相乘再相加$1\times(-2)+1\times 8=6$

$(1\cdot x+8)(1\cdot x-2)$

跟学团 恒等变形·十字相乘

【举例】用十字相乘法将多项式因式分解：$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

跟学团 恒等变形·十字相乘

【举例】用十字相乘法将多项式因式分解：$x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$

跟学团 恒等变形·十字相乘

【举例】用十字相乘法将多项式因式分解：$6x^2+19x+15=(2x+3)(3x+5)$

跟学团 恒等变形·十字相乘

。。。。。

【举例】用十字相乘法将多项式因式分解：$2x^2-7xy+3y^2=(2x-y)(x-3y)$

跟学团 恒等变形·十字相乘

。。。。。

【模拟题】已知$x^2+xy+y=24$，$y^2+xy+x=32$，则$x+y=$（　　）.

A. 7　　B. 8　　C. 7或8　　D. 7或-8　　E. 8或-7

跟学团 恒等变形·待定系数

- 恒等变形
  - 求因式（因式分解）
    - 乘法公式应用
    - 因式定理法
    - 十字相乘法
    - **待定系数法**
  - 求系数

跟学团 恒等变形·待定系数

标准一次算式设为：$ax+b$
标准二次算式设为：ax^2+bx+c

【举例】用因式定理法和待定系数法将多项式$2x^2+3x-5$因式分解.

跟学团 恒等变形·待定系数

【模拟题】多项式x^2+x+m能被$x+5$整除，则此多项式也能被多项式（　　）整除.

A. $x-6$　　B. $x+4$　　C. $x+6$　　D. $x-4$　　E. $x+2$

跟学团 恒等式对应项系数相等

- 恒等变形
  - 求因式（因式分解）
    - 乘法公式应用
    - 因式定理法
    - 十字相乘法
    - 待定系数法
  - 求系数 恒等式的对应项系数相等

跟学团 恒等式对应项系数相等

【模拟题】若$x^2-3x+2xy+y^2-3y-40=(x+y+m)(x+y+n)$，则$m^2+n^2=$（ ）.

A. 69　　B. 79　　C. 89　　D. 106　　E. 120

跟学团 恒等变形

特值法
- 求因式（因式分解）
  - 乘法公式应用
  - 因式定理法
  - 十字相乘法
  - 待定系数法
- 求系数

跟学团 分式基础与运算

分式 一般地，若A,B（B中含有字母且$B\neq 0$）表示两个整式，那么$\frac{A}{B}$就叫做分式.

其中A称为分式的分子，B称为分式的分母.

$\frac{1}{x-2}$ $\frac{x}{y}$

分式有意义：分母$\neq 0$

分式无意义：分母$=0$

分式值为零：分母$\neq 0$且分子$=0$

分式的基本性质 分式的分子分母同乘以不为零的数字或多项式，分式的值不变.

$$\frac{A}{B}=\frac{m\cdot A}{m\cdot B}=\frac{A\cdot f(x)}{B\cdot f(x)}$$

（$B\neq 0$，m为非零实数，多项式$f(x)\neq 0$）

跟学团 分式基础与运算 ·化简求值

【模拟题】（条件充分性判断）$\frac{1}{m^2+1}+\frac{1}{n^2+1}=1$.（ ）

（1）$mn=1$ （2）$mn=-1$

跟学团 分式基础与运算 ·化简求值

【真题2015.18】已知p、q为非零实数，则能确定$\frac{p}{q(p-1)}$的值.（　　）

（1）$p+q=1$.　　　　（2）$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

跟学团 分式基础与运算 ·化简求值

【模拟题】（条件充分性判断）$\frac{x+y}{x^3+y^3+x+y}=\frac{1}{6}$（　　）

（1）$x^2+y^2=9$.　　　　（2）$xy=4$.

跟学团 分式基础与运算 ·通分与裂项

$$\frac{4}{3\times7}=\frac{7-3}{3\times7}=\frac{7}{3\times7}-\frac{3}{3\times7}=\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\qquad \frac{1}{2\times5}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2\times5}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{大-小}{小\times大}=\frac{\mathbf{1}}{小}-\frac{\mathbf{1}}{大}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{x+2}{(x+1)(x+2)}-\frac{x+1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$$

跟学团 分式基础与运算 ·通分与裂项

【模拟题】化简 $\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x^2+7x+12}+\cdots+\frac{1}{x^2+201x+10100}$

跟学团 分式基础与运算 ·倒数和

【标志词汇】给定方程$x^2-ax\pm1=0$，求x与$\frac{1}{x}$组成的算式 $\Rightarrow$ 两边同除x化为$x\pm\frac{1}{x}=a$

【标志词汇】互为倒数的算式之和/差$\Rightarrow$ 完全平方公式/立方和立方差公式

$$a\pm\frac{1}{a},\ x^2\pm\frac{1}{x^2},\ \frac{a}{b}\pm\frac{b}{a},\ \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\pm\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2+2$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2-2$$

$$\left|x+\frac{1}{x}\right|\xrightarrow{\text{平方后减2}}x^2+\frac{1}{x^2}\xrightarrow{\text{减2后开方}}\left|a-\frac{1}{a}\right|$$

跟学团 分式基础与运算 ·倒数和

【举例】已知$x^2-mx+1=0$，求下列算式的值.

两边同除x化为$x+\frac{1}{x}=m$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=m^2-2$$

$$x+\frac{1}{x}\underset{\text{不可逆向}}{\xrightarrow{\text{平方后减2}}}x^2+\frac{1}{x^2}$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=(m^2-2)^2-2$$

$$x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}=(x^n)^2+\left(\frac{1}{x^n}\right)^2=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2-2$$ 偶数次方

跟学团 分式基础与运算 ·倒数和

【模拟题】若$x+\frac{1}{x}=3$，则$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=$（ ）.

A. $-\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{4}$ E. $\frac{1}{8}$

跟学团 分式基础与运算 ·倒数和

【标志词汇】 互为倒数的算式之和/差⇒完全平方公式/立方和立方差公式

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right) \qquad x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}+1\right)$$

【举例】已知$x+\frac{1}{x}=m$，求$x^3+\frac{1}{x^3}$的值.

跟学团 分式基础与运算 ·倒数和

【真题2020.07】已知实数x满足$x^2+\frac{1}{x^2}-3x-\frac{3}{x}+2=0$，则$x^3+\frac{1}{x^3}=$（ C ）.

A.12 B.15 C.18 D.24 E.27

跟学团 齐次分式

分式
- 化简求值
- 裂项相消
- 倒数和
- **齐次分式**

齐次结构 所含各项的次数都相同的分式结构或者方程

$\frac{b^2}{ac}$ $a^2=bc+c^2$ $x^2+2x+3=0$

齐次分式 分式形式的齐次结构

$$\frac{b^2+bc-c^2}{a^2-ac}$$

跟学团 齐次分式

【举例】已知$a:b:c=\frac{1}{3}:\frac{1}{2}:1$，求$\frac{a^2+b^2}{a(b+c)}$的值.

跟学团 齐次分式

【真题2013.01.22】设x,y,z为非零实数，则$\frac{2x+3y-4z}{-x+y-2z}=1$.（　　）

（1）$3x-2y=0$.　　（2）$2y-z=0$.

跟学团 齐次分式

【模拟题】若实数a，b满足$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2$，则$\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+4ab+b^2}=$（　）

A.$\frac{1}{2}$　　B.4　　C.$\frac{1}{3}$　　D.2　　E.$\frac{2}{3}$

跟学团 齐次分式

【模拟题】（条件充分性判断）$\frac{4a+x}{3y}=\frac{2}{3}$（　　）

（1）$\frac{1}{a}=\frac{3}{y+a}$　　（2）$\frac{1}{a}=\frac{2}{x+y}$