MBA大师跟学团专属

数列

董璞

跟学团 **数列**

- 三项数列
- 等差数列
- 等比数列
- 通项公式a_n与前n项和公式S_n
- 近几年每年2-3题

跟学团 数列

数列基础【2016.24】 ★

三项数列【2021.02】【2019.16】【2018.19】【2017.03】★

等差数列
- 定义和性质【2019.24】【2016.13】【2015.20】
- 各项与下标间关系【2018.17】★
- S_n最值（数列过零点的项)【2020.05】【2015.23】
- 等差数列片段和

等比数列
- 定义和性质【2021.24】
- 各项与下标间关系
- 等比数列求和【2018.07】

常数列特值法

利用数列求代数式值

数列的推演
- 已知S_n求a_n
- a_n与a_{n+1}或a_{n-1}的递推 ★【2020.11】【2019.15】

跟学团 数列・基础知识

数列的定义和分类　依一定次序排成的一列数称为一个数列.

数列的一般表达形式为：a_1，a_2，a_3，…，a_n，…简记为$\{a_n\}$.

【有穷数列】 1，2，3，4，5，6，7

【无穷数列】 1，2，3，4，5，6，7，…

【递增数列】 第二项起，每一项都比前一项大.

单调性

【递减数列】 第二项起，每一项都比前一项小. 7，6，5，4，3，2，1，…

【摆动数列】 1，−1，1，−1，1，−1，1，−1，… 公比为−1的等比数列

【常数列】 各项均为同一个常数 2，2，2，2，2，2，2，… 常数列特值法

跟学团 数列·基础知识

数列 依一定次序排成的一列数 $\{a_n\}$

0， 1， 1， 2， 3， 5， 8， ……

a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7，……

数列两大要素 $\begin{cases}\text{数列某项的值：} a_n \\ \text{某项的序号：下标} n\end{cases}$

数列的通项 数列的第n项a_n与其序号n之间的关系

如果数列中的第n项a_n与其序号n的关系可以用一个公式来表示，则称这个公式为通项公式

数列的通项公式⇒数列中的任意一项.

跟学团 数列·基础知识

【模拟题】若数列$\{a_n\}$的每一项都是它序号的平方减去序号的5倍，则66是该数列的第（ ）项.

A.30　　B.20　　C.18　　D.15　　E.11

跟学团 数列·基础知识

【真题2016.24】已知数列$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10}$，则$a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_9 - a_{10} \geq 0$．（　　）

（1）$a_n \geq a_{n+1}, n = 1,2,\ldots\ldots,9$.　　（2）$a_n{}^2 \geq a_{n+1}{}^2$，$n = 1,2,\ldots\ldots,9$.

跟学团 数列·基础知识

数列 依一定次序排成的一列数 $\{a_n\}$

数列的通项 数列的第n项a_n与其序号n之间的关系

数列两大要素：
- 数列某项的值：a_n
- 某项的序号：a_n的下标n

数列前n项和S_n 从数列第一项a_1开始依次相加，至第n项a_n，这n项的和称为数列的前n项和.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

跟学团 数列·三项数列

数列基础 ★

三项数列 ★

等差数列
- 定义和性质
- 各项与下标间关系 ★
- S_n最值（数列过零点的项）
- 等差数列片段和

等比数列
- 定义和性质
- 各项与下标间关系
- 等比数列求和

常数列特值法

利用数列求代数式值

数列的推演
- 已知S_n求a_n
- a_n与a_{n+1}或a_{n-1}的递推 ★

跟学团 数列·三项数列

等差数列 如果一个数列从第二项起，每一项减去它的前一项所得的差都等于同一常数，即：

$$a_{n+1}-a_n=d$$

那么这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做等差数列的公差d.

如：1，2，3，4，5，……

等比数列 如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的比都等于同一常数，即

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$$

那么这个数列就叫做等比数列，这个常数就叫做等比数列的公比q（$q\neq 0$）

如：2，4，8，16，32，……

跟学团 数列・三项数列

1，2，3

【标志词汇】三项成等差数列⇔ $\begin{cases} \text{设为}a,b,c\text{，则有}2b=a+c \\ \text{设为}a-d,a,a+d\text{，自动满足} \end{cases}$

可以被用在任何知识点，等同于给出一个关于a，b，c的算式条件

三元乘法公式、二次方程的三个系数、三角形三边、立方体三条棱、应用题等

连续自然数：$n-1$，n，$n+1$

连续偶数/奇数：$n-2$，n，$n+2$（n为偶数/奇数）

跟学团 数列・三项数列

1，2，3　　　　2，6，18

【标志词汇】三项成等差数列⇔ $\begin{cases} \text{设为}a,b,c\text{，则有}2b=a+c \\ \text{设为}a-d,a,a+d\text{，自动满足} \end{cases}$

【标志词汇】三项成等比数列⇔ 设为a,b,c，则有$b^2=ac\ (b\neq 0)$

四项成等差/等比数列⇒其中连续三项成等差/等比

1，2，3，4

2，4，8，16

跟学团 数列 · 三项数列

【真题2000.01.06】若$\alpha^2, 1, \beta^2$成等比数列，而$\frac{1}{\alpha}, 1, \frac{1}{\beta}$成等差数列，则$\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2}=$（　　）.

A.$-\frac{1}{2}$或1　　B. $-\frac{1}{3}$或1　　C. $\frac{1}{2}$或1　　D. $\frac{1}{3}$或1　　E. $-\frac{1}{2}$

跟学团 数列 · 三项数列

【真题2017.03】甲、乙、丙三种货车载重量成等差数列，两辆甲种车和一辆乙种车的载重量为95吨，一辆甲种车和三辆丙种车载重量为150吨，则甲、乙、丙分别各一辆车一次最多运送货物为（　）

A.125　　B.120　　C.115　　D.110　　E.105

跟学团 数列·三项数列

【**真题2014.01.18**】（条件充分性判断）甲、乙、丙三人的年龄相同.（ ）

（1）甲、乙、丙的年龄成等差数列.（2）甲、乙、丙的年龄成等比数列.

跟学团 数列·三项数列

【**真题2021.02**】三位年轻人的年龄成等差数列，且最大与最小的两人年龄差的10倍是另一人的年龄，则三人中年龄最大的是（ ）.

A.19 B.20 C.21 D.22 E.23

跟学团 数列 · 三项数列

【真题2018.19】甲、乙、丙三人的年收入成等比数列.则能确定乙的年收入的最大值.（　　）

（1）已知甲、丙两人的年收入之和.

（2）已知甲、丙两人的年收入之积.

跟学团 数列 · 三项数列

数列基础 ★

三项数列 ★

等差数列
- 定义和性质
- 各项与下标间关系 ★
- S_n最值（数列过零点的项）
- 等差数列片段和

等比数列
- 定义和性质
- 各项与下标间关系
- 等比数列求和

常数列特值法

利用数列求代数式值

数列的推演
- 已知S_n求a_n
- a_n与a_{n+1}或a_{n-1}的递推 ★

跟学团 等差数列

数列基础 ★

三项数列 ★

等差数列
- 定义、判定与性质
- 各项与下标间关系 ★
- S_n最值（数列过零点的项）
- 等差数列片段和

等比数列
- 定义和性质
- 各项与下标间关系
- 等比数列求和

常数列特值法

利用数列求代数式值

数列的推演
- 已知S_n求a_n
- a_n与a_{n+1}或a_{n-1}的递推 ★

跟学团 等差数列·基础知识·定义

次序	第1项	第2项	第3项	第4项	⋯	第n项	⋯
数值	1	2	3	4	⋯	n	⋯
数值	5	10	15	20	⋯	$5n$	⋯
一般表达	a_1	a_1+d	a_1+2d	a_1+3d		$a_1+(n-1)d$	

等差数列 如果一个数列从第二项起，每一项减去它的前一项所得的差都等于同一常数，即：$a_{n+1}-a_n=d$，那么这个数列就叫做<u>等差数列</u>，这个常数叫做等差数列的<u>公差</u>d.

数列的通项 <u>数列的第n项a_n与其序号n之间的关系</u>

等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$

a_1和$d\Longrightarrow$等差数列的通项公式$\Longrightarrow$等差数列中的任何一项.

跟学团 等差数列 • 基础知识 • 通项

【举例】 已知等差数列$\{a_n\}$，其中$2a_2+a_5=24$， $a_6=17$，那么299是数列$\{a_n\}$的第_______项?

跟学团 等差数列 • 基础知识

等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$

公差$d>0\Leftrightarrow$递增数列

公差$d<0\Leftrightarrow$递减数列

公差$d=0\Leftrightarrow$常数列

数列前n项和S_n 从数列第一项a_1开始依次相加，至第n项a_n，这n项的和称为数列的前n项和.

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

等差数列前n项和公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+\dfrac{2a_1-d}{2}n$

跟学团 等差数列 • 基础知识

等差数列的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$

等差数列前n项和公式 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$

【举例】等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_6 = a_6$，则$\frac{a_5}{a_4}$的值为______.

跟学团 等差数列 • 基础知识 • 判定

定义角度 任意相邻两项之差$a_{n+1} - a_n$是否为常数，若为常数，则$\{a_n\}$为等差数列

从表达式代数特征角度

通项公式：$a_n = a_1 + (n-1)d = dn + (a_1 - d) = dn + m$（其中$m = a_1 - d$）

形似关于n的一次函数

判断下列通项对应的数列是否为等差数列

（1）$a_n = 3n + 2$　（2）$a_n = -n$　（3）$a_n = 5$　（4）$a_n = n^2 + 1$

跟学团 等差数列 • 基础知识 • 判定

从表达式代数特征角度

前n项和：$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\frac{2a_1-d}{2}n=An^2+Bn$

形似关于n的二次函数，其中A与B均可能为0，且一定不含常数项

当$A=B=0$时　即$a_1=d=0$，$S_n=0$　数列为$a_n=0$的常数列

当$A=0$，$B\neq 0$时　即$d=0$，$a_1\neq 0$，$S_n=na_1$　为非零常数列，如1，1，1，1，1，1⋯

当$A\neq 0$，$B=0$时　即$2a_1=d\neq 0$，$S_n=\frac{d}{2}n^2$　如1，3，5，7，9，11⋯ $S_n=n^2$

跟学团 等差数列 • 基础知识 • 判定

从表达式代数特征角度

前n项和：$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\frac{2a_1-d}{2}n=An^2+Bn$　$\begin{cases}A=\frac{d}{2}\\B=\frac{2a_1-d}{2}\end{cases}$

形似关于n的二次函数，其中A与B均可能为0，且一定不含常数项

判断下列前n项和对应的数列是否为等差数列

（1）$S_n=4n^2+n$　　（2）$S_n=-2n^2$

跟学团 等差数列·基础知识·判定

从表达式代数特征角度

前n项和：$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+\dfrac{2a_1-d}{2}n=An^2+Bn$　$\begin{cases}A=\dfrac{d}{2}\\B=\dfrac{2a_1-d}{2}\end{cases}$

形似关于n的二次函数，其中A与B均可能为0，且一定不含常数项

判断下列前n项和对应的数列是否为等差数列

（3）$S_n=5n$　　（4）$S_n=n^2+1$

跟学团 等差数列·基础知识·判定

【真题2019.25】（条件充分性判断）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则$\{a_n\}$为等差数列.（　）

（1）$S_n=n^2+2n$，$n=1,2,3.$　　（2）$S_n=n^2+2n+1$，$n=1,2,3.$

跟学团 等差数列

数列基础 ★

三项数列 ★

等差数列
- 定义、判定与性质
- 各项与下标间关系 ★
- S_n最值（数列过零点的项）
- 等差数列片段和

等比数列
- 定义和性质
- 各项与下标间关系
- 等比数列求和

常数列特值法

利用数列求代数式值

数列的推演
- 已知S_n求a_n
- a_n与a_{n+1}或a_{n-1}的递推 ★

跟学团 等差数列·下标

等差数列 $a_{n+1}-a_n=d$　　**等差数列的通项公式** $a_n=a_1+(n-1)d$

$$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} a_4 \xrightarrow{+d} a_5 \xrightarrow{+d} a_6 \cdots \xrightarrow{+d} a_m \cdots \xrightarrow{+d} a_n \cdots$$

$a_n=a_1+(n-1)d$

$a_m=a_1+(m-1)d$

$a_n-a_m=(n-m)d$

求公差 $d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$　　求某一项/通项 $a_n=a_m+(n-m)d$

跟学团 等差数列·下标

【举例】已知数列$\{a_n\}$为等差数列，其中$a_{2015}=57$，$a_{2021}=75$，则公差$d=$________

【举例】已知数列$\{a_n\}$为等差数列，其中$a_{2015}=57$，$a_{2021}=75$，则通项$a_n=$____________

跟学团 等差数列·下标

【标志词汇】<u>三项成等差数列</u>$\Leftrightarrow\begin{cases}\text{设为}a,b,c\text{，则有}2b=a+c\\\text{设为}a-d,a,a+d\text{，自动满足}\end{cases}$ b称为等差中项

a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7，a_8，$a_9\cdots$

$a_4+a_6=2a_5$　　$a_3+a_7=2a_5$　　$a_2+a_8=2a_5$　　$a_1+a_9=2a_5$

等差数列中项的性质

跟学团 等差数列·下标

等差数列下标和相等的两项之和相等 等号左右下标和相等，项数也要相等

a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7，a_8，$a_9\cdots$

$a_5+a_5=a_4+a_6=a_3+a_7=a_2+a_8=a_1+a_9$

a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7，a_8，a_9，$a_{10}\cdots$

$a_5+a_6=a_4+a_7=a_3+a_8=a_2+a_9=a_1+a_{10}$

a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，$a_{5.5}$，a_6，a_7，a_8，a_9，$a_{10}\cdots$

跟学团 等差数列·下标

【举例】已知数列$\{a_n\}$为等差数列，其中$a_1+a_7=8$，则$a_4=$________

【举例】已知数列$\{a_n\}$为等差数列，其中$a_1+a_7=8$，$a_6=5$，则$a_8=$________

跟学团 等差数列·下标

【真题2013.01.13】已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，若a_2与a_{10}是方程$x^2-10x-9=0$的两个根，则 $a_5+a_7=$（　）

A. -10　　B. -9　　C. 9　　D. 10　　E. 12

跟学团 等差数列·下标

等差数列下标和相等的同数量项之和相等 两组项下标和相等，项数相同，则这两组项的和相等

a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7，a_8，$a_9\cdots$ 等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$

$a_2=a_1+d$

$a_3=a_1+2d$

$a_4=a_1+3d$

$a_5=a_1+4d$

$a_6=a_1+5d$

$a_7=a_1+6d$

$a_8=a_1+7d$

$a_9=a_1+8d$

$a_3+a_7=2a_5$

$a_3+a_5+a_7=a_2+a_4+a_9$

$3+5+7=2+4+9$

跟学团 等差数列·下标关系在S_n中应用

等差数列的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$

等差数列前n项和公式 $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + \frac{2a_1-d}{2}n$

$$= \frac{n(a_2+a_{n-1})}{2} = \frac{n(a_3+a_{n-2})}{2} = \cdots$$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

倒序相加

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} \cdots + a_3 + a_2 + a_1$

$2S_n = (a_1+a_n) + (a_2+a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1}+a_2) + (a_n+a_1)$

$= n(a_1+a_n)$ **【标志词汇】**<u>等差数列某几项和 $\Rightarrow$ 下标和相等的两项之和相等</u>

跟学团 等差数列·下标关系在S_n中应用

【模拟题】已知数列$\{a_n\}$为等差数列，且$a_3+a_{12}=8$，则数列$\{a_n\}$的前14项和$S_{14}=($　　$)$.

A. 36　　B. 48　　C. 56　　D. 64　　E. 72

跟学团 等差数列·下标关系在S_n中应用

【模拟题】等差数列$\{a_n\}$中前$a_1+a_2+\cdots+a_6=43$，$a_{23}+a_{24}+\cdots+a_{28}=53$，则$S_{28}=$（　）

A.224　　B.223　　C.225　　D.227　　E.228

跟学团 等差数列·下标关系在S_n中应用

【模拟题】等差数列$\{a_n\}$中前6项和为43，后6项和为53，所有项和为224，则这个数列的项数是（　）

A.22　　B.23　　C.25　　D.27　　E.28

跟学团 等差数列·下标关系在S_n中应用

等差数列前n项和公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(a_2+a_{n-1})}{2}=\dfrac{n(a_3+a_{n-2})}{2}=\cdots$

$S_9=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9$

$2a_5$

$S_9=\dfrac{9(a_1+a_9)}{2}=\dfrac{9(a_2+a_8)}{2}=\cdots=\dfrac{9\times 2a_5}{2}=9a_5$ $\quad a_5=\dfrac{1}{9}S_9$

$S_n=n\cdot a_{中间项}$ <u>前n项和等于中间项乘以项数</u> $\quad a_{中间项}=\dfrac{1}{n}S_n$

跟学团 等差数列·下标关系在S_n中应用

【真题2018.17】设$\{a_n\}$为等差数列，则能确定$a_1+a_2+\cdots+a_9$的值.（ ）

（1）已知a_1的值 （2）已知a_5的值

【拓展1】设$\{a_n\}$为等差数列，则能确定$a_1+a_2+\cdots+a_9$的值.（ ）

（1）已知a_1的值 （2）已知a_4+a_6的值

【拓展2】设$\{a_n\}$为等差数列，则能确定$a_1+a_2+\cdots+a_9$的值.（ ）

（1）已知a_1的值 （2）已知a_6的值

跟学团 等差数列·下标关系在S_n中应用

等差数列前n项和公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(a_2+a_{n-1})}{2}=\dfrac{n(a_3+a_{n-2})}{2}=\cdots$

$$S_8=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8$$

$2a_{4.5}$

$$S_8=\frac{9(a_1+a_8)}{2}=\frac{9(a_2+a_7)}{2}=\frac{n(a_3+a_6)}{2}=\frac{9\times(a_4+a_5)}{2}$$

对于奇数个项：前n项和等于中间项乘以项数

对于偶数数个项：$S_n=\dfrac{n}{2}\cdot$(中间两项之和)

跟学团 等差数列·下标关系在S_n中应用

【模拟题】已知$a_8=11$和$a_{13}=21$，求S_{15}和S_{20}分别是（　　）.

A. 165，320　　B. 165，340　　C. 185，300　　D. 185，320　　E. 205，320

跟学团 等差数列·下标关系在S_n中应用

【真题2009.01.25】$\{a_n\}$的前n项和S_n与$\{b_n\}$的前n项和T_n满足$S_{19}:T_{19}=3:2$（　）

（1）$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是等差数列　　（2）$a_{10}:b_{10}=3:2$

跟学团 等差数列·下标关系在S_n中应用

【模拟题】等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n，T_n，若$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1}$，则$\frac{a_7}{b_7}$的值为（　）.

$A.-\frac{13}{20}$　　$B.\frac{13}{20}$　　$C.\frac{13}{10}$　　$D.\frac{1}{3}$　　$E.\frac{15}{23}$

跟学团 等差数列·下标关系在S_n中应用

【模拟题】等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n，T_n，若$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1}$，则$\frac{a_8}{b_8}$的值为（　）.

$A.-\frac{13}{20}$　　$B.\frac{13}{20}$　　$C.\frac{13}{10}$　　$D.\frac{1}{3}$　　$E.\frac{15}{23}$

跟学团 等差数列

等差数列
- 定义、判定与性质
- 各项与下标间关系
  - $d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$　　$a_n=a_m+(n-m)d$
  - 等差数列下标和相等的<u>同数量项</u>之和相等
  - 两组项下标和相等，项数相同，则这两组项的和相等
  - $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(a_2+a_{n-1})}{2}=\frac{n(a_3+a_{n-2})}{2}=\cdots$ 首尾配对求和
  - 对于等差数列前奇数个项，有$S_n=n\cdot a_{中间项}$
  - 对于等差数列前偶数个项，有$S_n=\frac{n}{2}$(中间两项之和)
  - 前n项和之比=中间项之比