MBA大师跟学团专属

平均值、绝对值

董璞

跟学团 平均值、绝对值

- 要么最难，要么最简单

  平均值不等式

  绝对值不等式

- 结合应用题、几何、数据分析等

跟学团 平均值

算术平均值

定义　计算

几何平均值

定义　计算

关系：均值定理 ⇨ 应用：求最值

跟学团 平均值·定义

3　　1

$$\frac{3+1}{2}=2$$

3和1的算术平均值

面积不变　1

3

面积不变

$\sqrt{3}$

$$\sqrt{3\times 1}=\sqrt{3}$$

3和1的几何平均值

跟学团 平均值·定义

算术平均值 设x_1，x_2，……，x_n为n个实数，这n个数的算术平均值为：

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$ 累加后除以个数

几何平均值 设x_1，x_2，……，x_n为n个**正**实数，这n个**正**实数的几何平均值为：

$$x_{\mathrm{g}}=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}$$ 累乘后开个数次方

【举例】求3，8，9这三个数的算术平均值和几何平均值

跟学团 平均值

算术平均值

定义$\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

几何平均值

定义$x_{\mathrm{g}}=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}$

注意几何平均值要求每一项均为正

- 直接计算
- 改变元素个数计算
- 改变元素大小计算

⇨ 关系：均值定理

应用：求最值

跟学团 平均值·计算

仅元素大小改变 个体改变量与算术平均值改变量

算术平均值$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$　　$\bar{x}$的改变量$=\frac{\text{个体改变量之和}}{\text{元素数量}n}$

【举例】若x_1,x_2,x_3,x_4,x_5的算术平均值为$\bar{x}$，求$x_1,x_2-2,x_3+3,x_4-4,x_5+5$的算术平均值.

跟学团 平均值·计算

【模拟题】x_1，x_2+1，x_3+2，x_4+3，x_5+4的算术平均值是$\bar{x}+2$（　　）.

（1）x_1，x_2，x_3，x_4，x_5的算术平均值是$\bar{x}$.

（2）x_1+1，x_2+2，x_3+3，x_4+4，x_5+5的算术平均值是$\bar{x}+3$.

跟学团 平均值·计算

【真题2019.23】某校理学院五个系每年录取人数如下表：

院系	数学系	物理系	化学系	生物系	地理系
录取人数	60	120	90	60	30

今年与去年相比，物理系平均分没有变，则理学院录取平均分升高了.（ ）

（1）数学系录取平均分升高了3分，生物系录取平均分降低了2分 .

（2）化学系录取平均分升高了1分，地理系录取平均分降低了4分 .

跟学团 平均值·计算

仅元素大小改变　$\bar{x}$的改变量 $=\dfrac{\text{个体改变量之和}}{\text{元素数量}n}$

元素个数改变　<u>总和 $=$ 平均值$\bar{x}\times$ 元素数量 n</u>

【真题2006.01.04】如果x_1,x_2,x_3三个数的算术平均值为5，则x_1+2,x_2-3,x_3+6与8这四个数的算术平均值为（ ）.

A. $3\frac{1}{4}$　　B. 6　　C. 7　　D. $9\frac{1}{5}$　　E. $7\frac{1}{2}$

跟学团 平均值·计算

【模拟题】已知$x_1,x_2,\cdots,x_n$的几何平均值为3，前$n-1$个数的几何平均值为2，则x_n的值为（ ）.

A. $\frac{9}{2}$　B. $(\frac{3}{2})^n$　C. $2(\frac{3}{2})^{n-1}$　D. $3(\frac{3}{2})^{n-1}$　E. $(\frac{3}{2})^{n-1}$

跟学团

$$\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_1x_2\ldots x_{n-1}}=x_n=\boxed{\frac{3^n}{2^{n-1}}=3\times\frac{3^{n-1}}{2^{n-1}}=3(\frac{3}{2})^{n-1}}$$

幂的处理方法

化为同指数

$a^nb^n=(ab)^n$

$2^{n+1}\times3^n=2\times2^n\times3^n=2\times(2\times3)^n=2\times6^n$

$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$

化为同底数

$a^m\times a^n=a^{m+n}$

$2^5\times4^7=2^5\times(2^2)^7=2^5\times2^{2\times7}=2^{5+14}=2^{19}$

$a^m\div a^n=a^{m-n}$

$9^5\div3^3=(3^2)^5\div3^3=3^{2\times5}\div3^3=3^{10-3}=3^7$

跟学团 平均值

算术平均值

定义$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

几何平均值

定义$x_g=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}$

注意几何平均值要求每一项均为正

- 直接计算
- 改变元素个数计算
- 改变元素大小计算

⇨ 关系：均值定理

应用：求最值

跟学团 均值定理

算术平均值$\frac{a+b}{2}$ ≥ 几何平均值$\sqrt{ab}$

作差法比较大小 $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$

$$=\frac{(\sqrt{a})^2+\left(\sqrt{b}\right)^2-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}\geq 0$$

跟学团 均值定理

均值定理 对于任意n个正实数x_1，x_2，……，x_n，有：

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$时，等号成立.（$x_i>0$，$i=1,\ldots,n$）

几个正数的算术平均值总大于等于它们的几何平均值

两种形式：

$x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n\cdot\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ 积定和最小

$x_1x_2\cdots x_n \leq \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n$ 和定积最大

跟学团 均值定理·求和的最小值

$a+b\geq 2\sqrt{ab}\ (a,b>0)$ $x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n\cdot\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$

① a，b可以代表任何正代数式.

② 使用范围：a，$b>0$

③ 当且仅当$a=b$时，等号成立. $a+a=2a\geq 2\sqrt{a\cdot a}=2a\ (a,b>0)$

均值不等式$(a,b>0)$

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$	恒成立
$a+b>2\sqrt{ab}$	$a\neq b$
$a+b=2\sqrt{ab}$	$a=b$

跟学团 均值定理·求和的最小值

$a+b\geq 2\sqrt{ab}\ (a,b>0)$

$$\underbrace{\boxed{x^2+1}}_{a}+\underbrace{\boxed{\frac{4}{x^2+1}}}_{b}\geq 2\sqrt{\cancel{(x^2+1)}\cdot\frac{4}{\cancel{x^2+1}}}=4$$

① a，b可以代表任何正代数式.

② 使用范围：a，$b>0$　　$x^2+1>0$　$\frac{4}{x^2+1}>0$

③ 当且仅当$a=b$时，等号成立.　$x^2+1=\frac{4}{x^2+1}$　$(x^2+1)^2=4$　$x^2+1=2$　$x=\pm 1$

$x^2+1+\frac{4}{x^2+1}\geq 4$	恒成立
$x^2+1+\frac{4}{x^2+1}>4$	$x\neq\pm 1$
$x^2+1+\frac{4}{x^2+1}=4$	$x=\pm 1$

跟学团 均值定理·求和的最小值

$a+b\geq 2\sqrt{ab}\ (a,b>0)$

$$\underbrace{\boxed{x^2+1}}_{a}+\underbrace{\boxed{\frac{4}{x^2+1}}}_{b}\geq 2\sqrt{\cancel{(x^2+1)}\cdot\frac{4}{\cancel{x^2+1}}}=4$$

① a，b可以代表任何正代数式.

② 使用范围：a，$b>0$　　$x^2+1>0$　$\frac{4}{x^2+1}>0$

③ 当且仅当$a=b$时，等号成立.　$x^2+1=\frac{4}{x^2+1}$　$(x^2+1)^2=4$　$x^2+1=2$　$x=\pm 1$

$x^2+1+\frac{4}{x^2+1}\geq 4$，即它的最小值为4，当$x=\pm 1$时取得最小值.

两个正代数式乘积为定值，则它们的和有最小值　积定和最小

当两代数式相等时可取得此最小值.

跟学团 均值定理·求和的最小值

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$ （a,b可以代表任何正代数式）

一正 ① a,b均为正. 能用套用均值不等式

二定 ② ab为定值 能求最值

三相等 ③ 当且仅当$a=b$时，和可取到最小值. 能取到最值

$a+b+c\geq 3\cdot\sqrt[3]{abc}$ （a,b可以代表任何正代数式）

一正 ① a,b,c均为正能用公式

二定 ② abc为定值 能求最值

三相等 ③ 当且仅当$a=b=c$时，和可取到最小值.

跟学团 均值定理·求和的最小值·一正

$a+b\geq 2\sqrt{ab}\ (a,b>0)$

$\underbrace{\boxed{x}}_{a}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{x}}}_{b}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$ 不一定成立

① a，b可以代表任何正代数式.

$\boxed{\text{② 使用范围：}a，b>0}$

注意天然为正的讨论范围

如：非零完全平方、恒为正的二次函数、指数函数、平面几何、概率

③ 当且仅当$a=b$时，等号成立. $x=\frac{1}{x}$ $x^2=1$ $x=1$

偶数次方、偶次方根

奇数次方、奇次方根

跟学团 均值定理 · 求和的最小值 · 一正

【模拟题】面积为9的直角三角形两直角边之和最小值为（　　）

A. 12　　B. $6\sqrt{2}$　　C. 8　　D. $2\sqrt{6}$　　E. 以上都不是

跟学团 均值定理 · 求和的最小值

【真题2020.24条件（1）】设a，b是正实数，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$存在最小值.

（1）已知ab的值

跟学团 均值定理 · 求和的最小值 · 三相等

$a+b\geq 2\sqrt{ab}\ (a,b>0)$

$$\underbrace{\boxed{x^2+5}}_{a}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{x^2+5}}}_{b}\geq 2\sqrt{\cancel{(x^2+5)}\cdot\frac{1}{\cancel{x^2+5}}}=2$$

① a，b可以代表任何正代数式.

② 使用范围：a，$b>0$　　$x^2+5>0$　　$\frac{1}{x^2+5}>0$

③ 当且仅当$a=b$时，等号成立.　　$x^2+5=\frac{1}{x^2+5}$

$$(x^2+5)^2=1$$

$x^2+5=1$　不可能成立

跟学团 均值定理 · 求和的最小值

【模拟题】已知$x,y\in R$，且$x+y=4$，则3^x+3^y的最小值是（　）.

A. $\sqrt{2}$　　B. 18　　C. 9　　D. $2\sqrt{2}$　　E. $\sqrt{6}$

跟学团 联考求最值方法对比

方法	二次函数	均值定理
描述	$f(x)=ax^2+bx+c\ \ (a\neq 0)$ $x=-\frac{b}{2a}$时，可取得最值$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$a+b\geq 2\sqrt{ab}\ (a,b>0)$ ab为定值，$a=b$时可取得$a+b$的最小值
比较	不限制变量的取值范围	参与运算的每项必须为正
	只能处理完全符合二次函数形式的算式	算式形式多变

- （可化为）二次函数ax^2+bx+c形式的均优先使用二次函数求最值
- 不可化为二次函数形式的使用均值定理求最值 分式如$x+\frac{1}{x}$ 高次如$x^2(1-x)$

跟学团 均值定理·求和的最小值·凑配定值

【标志词汇】 限制为正+求最值 ⟹ 均值定理

若它们的乘积为常数，则直接使用均值定理求和的最小值 $a+b\geq 2\sqrt{ab}$

- 互为倒数，乘积天然为常数
- 题目给定乘积为常数

$$\boxed{x^2+1}+\boxed{\frac{4}{x^2+1}}\geq 2\cdot\sqrt{\cancel{(x^2+1)}\cdot\frac{4}{\cancel{x^2+1}}}=4$$ 当$x=\pm 1$时取得最小值4.

$$\boxed{\frac{y}{x}+\frac{x}{y}}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=2\quad(x,y>0)$$ 当$\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$，$x=y$时取得最小值2.

跟学团 均值定理 • 求和的最小值• 凑配定值

【标志词汇】 限制为正+求最值 ⇒ 均值定理 **求和最小，凑积定**

若它们的乘积不是常数，则**凑配**使参与运算的项乘积为常数.

【举例】求$x+\frac{1}{2x^2}$的最小值（$x>0$）

跟学团 均值定理 • 求和的最小值• 凑配定值

【标志词汇】 限制为正+求最值 ⇒ 均值定理

若它们的乘积不是常数，则**凑配**使参与运算的项乘积为常数.

次数不同时，将较低次项平均拆分，拆得项数等于较高次数
（拆分后注意参与运算的项数发生变化）

【举例】求$x+\frac{1}{3x^3}$的最小值（$x>0$）

跟学团 均值定理·求和的最小值·凑配定值

【标志词汇】限制为正+求最值 ⇒ 均值定理

若它们的乘积不是常数，则**凑配**使参与运算的项乘积为常数.

次数不同时，将较低次项平均拆分，拆得项数等于较高次数
（拆分后注意参与运算的项数发生变化）

【举例】求$4x^2+\frac{1}{x}$的最小值（$x>0$）

跟学团 均值定理·求和的最小值·凑配定值

【标志词汇】限制为正+求最值 ⇒ 均值定理

若它们的乘积不是常数，则**凑配**使参与运算的项乘积为常数.

形式不同时，将整式部分与分式部分分母凑成相同形式.

【举例】求$x+\frac{1}{x-2}$的最小值（$x>2$）

跟学团 均值定理・求和的最小值・凑配定值

次数不同时，如$x+\frac{1}{2x^2}$

将较低次项平均拆分，拆得项数等于较高次数

注意拆分后注意参与运算的项数发生变化

形式不同时，如$x+\frac{1}{x-2}$

将整式部分与分式部分分母凑成相同形式

注意只对凑配后的带未知量部分使用均值定理求最值.

形式与次数均不同时，如$x+\frac{1}{3(x-2)^3}$

先凑形式，再凑次数

跟学团 均值定理・求和的最小值・凑配定值

【举例】求$x+\frac{1}{3(x-2)^3}$的最小值（$x>2$）

跟学团 均值定理·求和的最小值

【真题2019.02】设函数$f(x)=2x+\frac{a}{x^2}$（$a>0$）在$(0,+\infty)$内的最小值为$f(x_0)=12$，则$x_0=$（　　）.

A.5　　B.4　　C.3　　D.2　　E.1

跟学团 均值定理·求和的最小值

$x_1+x_2+\cdots+x_n\geq n\cdot\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$　积定和最小

一正　所有参与运算的项均为正. 能用套用均值不等式

注意天然为正的讨论范围

如：非零完全平方、恒为正的二次函数、指数函数、平面几何、概率

二定　所有参与运算的项乘积为一确定的值　能求最值

形式不同如$x+\dfrac{1}{x-2}$　次数不同如$x+\dfrac{1}{2x^2}$　形式与次数均不同如$x+\dfrac{1}{3(x-2)^3}$

三相等　当且仅当所有参与运算的项均相等时，它们的和可取到最小值.

能取到最值

跟学团 均值定理・求积的最大值

均值不等式 $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$

$x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n\cdot\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$　　$a+b\geq 2\sqrt{ab}$　积定和最小

求和的最小值　凑积定

$x_1x_2\cdots x_n \leq \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n$　　$ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$　和定积最大

求积的最大值　凑合定

注：a,b表示任意正代数式

跟学团 均值定理・求积的最大值

$ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

① a，b可以代表任何正代数式.　　$x(1-x)\leq\left[\frac{x+(1-x)}{2}\right]^2=\frac{1}{4}$

$\Downarrow$ a　$\Downarrow$ b

② 使用范围：a，$b>0$　　$x>0$　$1-x>0$　$0<x<1$

③ 当且仅当$a=b$时，等号成立.　　当且仅当$x=1-x$，$x=\frac{1}{2}$时“ = ”成立，取得最大值.

两个正代数式之和为定值，则它们的乘积有最大值　和定积最大

当两代数式相等时可取得此最大值.

跟学团 均值定理

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$ 【标志词汇】限制为正+求和的最小值 ⇒ 凑“积定”后用均值定理

一正 ① a,b均为正代数式. 能用套用均值不等式

二定 ② ab为定值 能求最值

三相等 ③ 当且仅当$a=b$时，和可取到最小值. 能取到最值

$ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ 【标志词汇】限制为正+求积的最大值 ⇒ 凑“和定”后用均值定理

一正 ① a,b均为正代数式. 能用套用均值不等式

二定 ② $a+b$为定值 能求最值

三相等 ③ 当且仅当$a=b$时，可取到最值. 能取到最值

跟学团 平均值、绝对值

【标志词汇】限制为正+求积的最大值 ⇒ 凑“和定”后用均值定理

$ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ $abc\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ （a,b,c可以代表任何正代数式）

【举例】求$x(1-x)$的最大值（$0<x<1$）

跟学团 均值定理·求积的最大值·凑配定值

【标志词汇】 限制为正+求积的最大值 ⇒ 凑“和定”后用均值定理

若它们的和不是常数，则**凑配**使参与运算的项之和为常数.

【举例】求$x^2(1-2x)$的最大值（$0<x<\frac{1}{2}$）

跟学团 均值定理·求积的最大值·凑配定值

【标志词汇】 限制为正+求积的最大值 ⇒ 凑“和定”后用均值定理

若它们的和不是常数，则**凑配**使参与运算的项之和为常数.

【举例】 求$x^2(1-x)$的最大值（$0<x<1$）

跟学团 均值定理·求积的最大值·凑配定值

【标志词汇】 限制为正+求积的最大值 ⇒ 凑“和定”后用均值定理

先平均拆至同次数，再按需乘系数

注意：只对凑配后的带未知量部分使用均值定理求最值.

【举例】求$x^2(1-x)$的最大值（$0<x<1$）

跟学团 均值定理·求积的最大值

【真题2004.01.04】 矩形周长为2，将它绕其一边旋转一周，所得圆柱体体积最大时的矩形面积是（　）.

A. $\frac{4\pi}{27}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{2}{9}$　　D. $\frac{27}{4}$　　E. 以上都不对

跟学团 均值定理·求积的最大值

【例题】已知正实数x，y满足$2x+y=2$，则xy的最大值等于（　）.

A. $\frac{5}{8}$　B. $\frac{1}{2}$　C. $\frac{3}{8}$　D. $\frac{1}{4}$　E. $\frac{1}{8}$

跟学团 均值定理·求积的最大值

【真题2015.12】设点$A(0,2)$和$B(1,0)$，在线段AB上取一点$M(x,y)$（$0<x<1$），则以x、y为两边长的矩形面积的最大值为（　）

A. $\frac{5}{8}$　B. $\frac{1}{2}$　C. $\frac{3}{8}$　D. $\frac{1}{4}$　E. $\frac{1}{8}$

跟学团 均值定理逆应用

【模拟题】实数a,b的算术平均值为3，几何平均值也为3，则$a-1$和b^2+9（$a>1$，$b>0$）的算术平均值和几何平均值分别为（　　）.

A. 10和6　　B. 9和6　　C . 8和8　　D. 3和6　　E. 6和8

跟学团 均值定理

一正：能用套用均值不等式
二定：可求最值
三相等：能取到最值

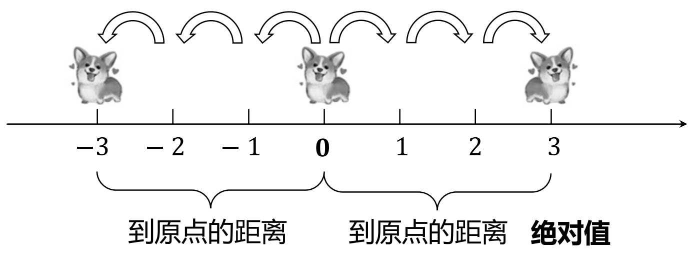
应用	和的最小值	积的最大值
两项时	$a+b\geq 2\sqrt{ab}$	$ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
	【常用不等式链】$2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2\geq 4ab$	
三项时	$a+b+c\geq 3\cdot\sqrt[3]{abc}$	$abc\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$
互为倒数	$a+\frac{1}{a}\geq 2$	—
逆应用	如果几个正数的算术平均值和它们的几何平均值相等，那么这几个正数相等.	

$$2(a^2+b^2)=a^2+b^2+(a^2+b^2)\geq a^2+b^2+2ab=(a+b)^2\geq\left(2\sqrt{ab}\right)^2=4ab$$

基础知识 绝对值

- 绝对值的定义（代数、几何）
- 绝对值的性质
- 去掉绝对值
- 绝对值的几何意义
- 绝对值三角不等式

基础知识 绝对值的定义



$|3|=3$　$|1.2|=1.2$　$|\sqrt{2}|=\sqrt{2}$　正数的绝对值是它本身

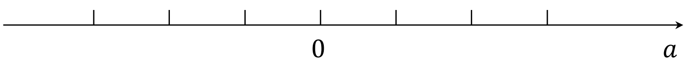
$|-3|=3$　$|-1.2|=1.2$　$|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$　负数的绝对值是它的相反数

$|0|=0$　零的绝对值是零

基础知识 绝对值的性质

任意实数a的绝对值，$|a| = \begin{cases} a > 0 & |a| = a \\ a = 0 & |a| = 0 \\ a < 0 & |a| = -a \quad \text{负号表示“相反”} \end{cases}$

分情况讨论：先判断符号，再求绝对值.



（1）$|a| \geq a$，即一个数的绝对值大于等于它本身.

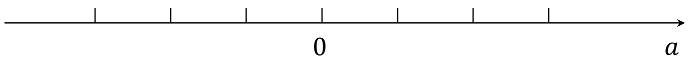
考点一 绝对值的性质

【例题1】（条件充分性判断）实数a, b满足$|a|(a+b) > a|a+b|$（　）.

（1）$a < 0$.　　　　（2）$b > -a$.

基础知识 绝对值的性质

任意实数a的绝对值，$|a| = \begin{cases} a & (\text{当}a > 0\text{时}) \\ 0 & (\text{当}a = 0\text{时}) \\ -a & (\text{当}a < 0\text{时}) \end{cases}$

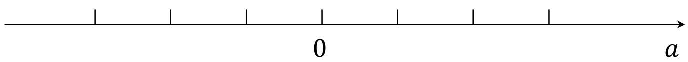


（2）$\sqrt{a^2} = |a|$　　$\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2 = |2|$　　$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = |-2|$

（3）$|a|^2 = |a^2| = a^2$　$|2|^2 = |2^2| = 2^2 = 4$　　$|-2|^2 = |(-2)^2| = (-2)^2 = 4$

基础知识 绝对值的性质

任意实数a的绝对值，$|a| = \begin{cases} a & (\text{当}a > 0\text{时}) \\ 0 & (\text{当}a = 0\text{时}) \\ -a & (\text{当}a < 0\text{时}) \end{cases}$



（4）$|a| = |-a|$：对称性，即互为相反数的两个数的绝对值相等.

（5）若$|a| = 3$，则a的可能取值有两个，为$a = 3$或$a = -3$，即$a = \pm 3$

$\Uparrow$

可换为任意正实数

（6）逆应用：若已知$|a| = a$，则一定有$a \geq 0$

若已知$|a| = -a$，则一定有$a \leq 0$

考点一 绝对值的性质

【例题2】已知$\sqrt{x^3+2x^2}=-x\sqrt{2+x}$，则$x$的取值范围是（　）.

A. $x<0$　B. $x\geq -2$　C. $-2\leq x\leq 0$　D. $-2<x<0$　E. 以上均不正确

基础知识 绝对值的性质

任意实数a的绝对值，$|a|=\begin{cases} a & (\text{当}a>0\text{时}) \\ 0 & (\text{当}a=0\text{时}) \\ -a & (\text{当}a<0\text{时}) \end{cases}$

（7）自比性：$\frac{|a|}{a}=\frac{a}{|a|}=\begin{cases} 1 & (a>0) \\ -1 & (a<0) \end{cases}$任一非零代数式与其绝对值的比值为$+1$或$-1$

$a>0$	$\|a\|=a$	$\frac{\|a\|}{a}=\frac{a}{\|a\|}=1$
$a<0$	$\|a\|=-a$	$\frac{\|a\|}{a}=\frac{a}{\|a\|}=-1$

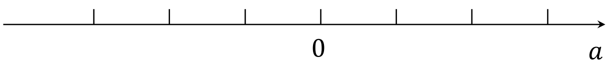
考点一 绝对值的性质

【例题3】已知$\frac{|a|}{a}+\frac{b}{|b|}+\frac{|c|}{c}=1$，则$\frac{|ab|}{ab}+\frac{bc}{|bc|}+\frac{|ac|}{ac}+\frac{abc}{|abc|}=$（　　）.

A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. -1　　E. -2

基础知识 绝对值的性质

任意实数a的绝对值，$|a|=\begin{cases} a & (\text{当}a>0\text{时}) \\ 0 & (\text{当}a=0\text{时}) \\ -a & (\text{当}a<0\text{时}) \end{cases}$



条件等式数量少，形式复杂，未知量多，无法向待求式转化.

【标志词汇】$|(\quad)|+\sqrt{(\quad)}+(\quad)^2=0$

每一个算式分别为零，进而得到关于未知字母的方程组，解方程.

（8）非负性：$|a|\geq 0$.　$|a|\geq 0$，$\sqrt{a}\geq 0$（$a\geq 0$），$a^2\geq 0$.　$\sqrt{a^2}=|a|$

$|a-3|=0$　　　　$|x-2|+|y-3|=0$

$|x-1|+\sqrt{y+2}+(z-3)^2=0$　　　　$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{y+2}+(z-3)^2=0$

$\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$

考点一 绝对值的性质

【例题4】已知$|x-y+1|+(2x-y)^2=0$，则$2^x+y^3=$（　）.

A.4　B.6　C.8　D.10　E.12

考点一 绝对值的性质

【例题5】设x,y,z满足$|3x+y-z-2|+(2x+y-z)^2=\sqrt{x+y-2002}+\sqrt{2002-x-y}$，则$(y-z)^x$的值为（　）.

A. 0　B. 1　C. 16　D. 20　E. 24

考点一 绝对值的性质

【例题6】已知实数a,b,x,y满足$y+\left|\sqrt{x}-\sqrt{2}\right|=1-a^2$和$|x-2|=y-1-b^2$，则$3^{x+y}+3^{a+b}=$（ ）.

A. 25　B. 26　C. 27　D.28　E.29

考点一 绝对值的性质

【例题7】设x,y,z满足条件$|x^2+4xy+5y^2|+\sqrt{z+\frac{1}{2}}=-2y-1$，则$(4x-10y)^z$等于（ ）

A.1　B. $\sqrt{2}$　C. $\frac{\sqrt{2}}{6}$　D. 2　E. $\frac{1}{2}$

基础知识 拓展•常见方程整理方法

普通方程：将所有项全部移至等号左边，等号右边为零.

无理方程：将无理部分移至等号一边，有理部分移至另一边.

多变量方程：将变量分离，如将包含x的移项至方程一边，包含y的移项至另一边.

含参方程：将带参数的部分移至等号一边，其余部分移至另一边，如

$kx-y+8-6k=0$移项为$k(x-6)=y-8$，此即参变分离.

通用整理：向能提取出待求式方向整理.

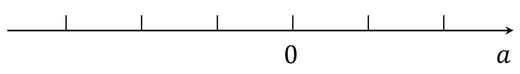
$x^2-4xy+4y^2+\sqrt{3}x+\sqrt{3}y-6=0$，求$x+y$最值.

$(x-2y)^2+\sqrt{3}(x+y)-6=0$ $\quad x+y=\dfrac{6-(x-2y)^2}{\sqrt{3}}\le\dfrac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

多个方程：全部相加.

基础知识 绝对值性质总结

任意实数a的绝对值，$|a|=\begin{cases}a & (当a>0时)\\ 0 & (当a=0时)\\ -a & (当a<0时)\end{cases}$ 代数



距离

几何

（1）$|a|\ge a$

（2）$\sqrt{a^2}=|a|$.

（3）$|a|^2=|a^2|=a^2$.

（4）$|a|=|-a|$

（5）若$|a|=3$，则$a=\pm3$.

（6）若已知$|a|=a$，则一定有$a\ge0$

若已知$|a|=-a$，则一定有$a\le0$

（7）自比性：$\dfrac{|a|}{a}=\dfrac{a}{|a|}=\begin{cases}1 & (a>0)\\ -1 & (a<0)\end{cases}$

（8）非负性：$|a|\ge0$