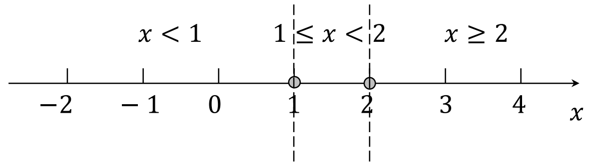
基础知识 去掉绝对值 遇到绝对值，去掉绝对值

任意实数a的绝对值，$|a|=\begin{cases} a & （当a>0时） \\ 0 & （当a=0时） \\ -a & （当a<0时） \end{cases}$

（1）根据定义去掉绝对值，如$\boxed{\text{零点}}$分段法.使绝对值为零的点

$$|x-1|+|x-2|=\begin{cases} x<1时 & 1-x+2-x=3-2x \\ 1\le x<2时 & x-1+2-x=1 \\ x\ge 2时 & x-1+x-2=2x-3 \end{cases}$$



考点二 去掉绝对值

【例题1】$|x-3|=a$（$a>0$），则x的值为（ D ）.

A. $a+3$　　B. $3-a$　　C.3　　D.$3-a$或$3+a$　　E.a

绝对值性质：若$|x|=a$（$a>0$），则$x=\pm a$.

【技巧】绝对值代表两种取值可能，选D.

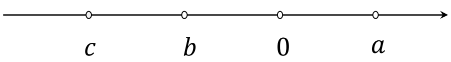
当$x\ge 3$时，$x-3=a$，$x=3+a$.

当$x<3$时，$3-x=a$，$x=3-a$.

考点二 去掉绝对值

【例题2】（条件充分性判断）$|b-a|+|c-b|-|c|=a$ （ A ）.

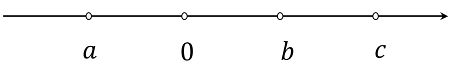
（1）实数a,b,c在数轴上的位置为



$$\begin{cases} b-a<0 \\ c-b<0 \\ c<0 \end{cases}$$

$|b-a|+|c-b|-|c|=(a-b)+(b-c)+c=a$

（2）实数a,b,c在数轴上的位置为



$$\begin{cases} b-a>0 \\ c-b>0 \\ c>0 \end{cases}$$

$|b-a|+|c-b|-|c|=(b-a)+(c-b)-c=-a$

基础知识 去掉绝对值 遇到绝对值，去掉绝对值

任意实数a的绝对值，$|a|=\begin{cases} a & (\text{当}a>0\text{时}) \\ 0 & (\text{当}a=0\text{时}) \\ -a & (\text{当}a<0\text{时}) \end{cases}$

（1）根据定义去掉绝对值

零点（使绝对值为零的点）分段法.

给出算式去掉绝对值后的形式，求绝对值内未知量取值范围

考点二 去掉绝对值

【例题3】若$|x-3|=3-x$，则x的取值范围是（ D ）.

A. $x>0$　　B. $x=3$　　C. $x<3$　　D. $x\le 3$　　E. $x>3$

【标志词汇】给出算式去掉绝对值后的形式，求绝对值内未知量取值范围.

任意实数a的绝对值，$|a|=\begin{cases} a & (当a>0时) \\ 0 & (当a=0时) \\ -a & (当a<0时) \end{cases}$　$|a|=\begin{cases} a & (当a\ge 0时) \\ -a & (当a\le 0时) \end{cases}$

零的相反数还是零

逆应用：若已知$|a|=a$，则一定有$a\ge 0$

若已知$|a|=-a$，则一定有$a\le 0$

$|x-3|=3-x=-(x-3)$　一定有$x-3\le 0$，即$x\le 3$.

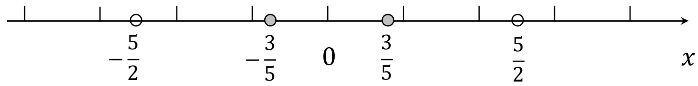
考点二 去掉绝对值

【例题4】已知$\left|\frac{5x-3}{2x+5}\right|=\frac{3-5x}{2x+5}$，则实数$x$的取值范围是（ C ）.

A. $x<-\frac{5}{2}$ 或$x\ge\frac{3}{5}$　B. $-\frac{5}{2}\le x\le\frac{3}{5}$　C. $-\frac{5}{2}<x\le\frac{3}{5}$　D. $-\frac{3}{5}\le x<\frac{5}{2}$　E.均不正确

【标志词汇】给出算式去掉绝对值后的形式，求绝对值内未知量取值范围.

$\left|\frac{5x-3}{2x+5}\right|=\frac{3-5x}{2x+5}=-\frac{5x-3}{2x+5}$　$\frac{5x-3}{2x+5}\le 0$　$2x+5\ne 0$，$x\ne-\frac{5}{2}$，排除B选项.



带入$x=0$可得：$\frac{5x-3}{2x+5}=\frac{-3}{5}\le 0$，$x$的取值范围包括0，排除A选项.

带入$x=1$可得：$\frac{5x-}{2x+5}=\frac{2}{7}>0$，$x$的取值范围不包括1，排除D选项.

考点二 去掉绝对值

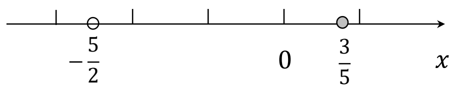
【例题4】已知$\left|\frac{5x-3}{2x+}\right| = \frac{3-5x}{2x+5}$，则实数$x$的取值范围是（ C ）.

A. $x < -\frac{5}{2}$ 或$x \geq \frac{3}{5}$　　B. $\frac{-5}{2} \leq x \leq \frac{3}{5}$　　C. $\frac{-5}{2} < x \leq \frac{3}{5}$　　D. $\frac{-3}{5} \leq x < \frac{5}{2}$　　E.均不正确

【标志词汇】给出算式去掉绝对值后的形式，求绝对值内未知量取值范围.

$\left|\frac{5x-3}{2x+5}\right| = \frac{3-5x}{2x+5} = -\frac{5x-3}{2x+5}$　　$\frac{5x-3}{2x+5} \leq 0$　分式不等式的等价变换

$\begin{cases}(5x-3)(2x+5) \leq 0 \\ 2x+5 \neq 0\end{cases}$



基础知识 去掉绝对值 遇到绝对值，去掉绝对值

任意实数a的绝对值，$|a| = \begin{cases} a & (当a > 0时) \\ 0 & (当a = 0时) \\ -a & (当a < 0时) \end{cases}$

（1）根据定义去掉绝对值，如零点分段法.

（2）平方法去掉绝对值：$|a|^2 = a^2$

考点二 去掉绝对值

【例题4】解方程$|x-1|=|x-3|$ 【答案】$x=2$

两边平方得：$x^2-2x+1=x^2-6x+9$，解得$x=2$.

验根：将$x=2$代入原方程得：

左侧$=|x-1|=|2-1|=1$

右侧$=|x-3|=|2-3|=1$

考点二 去掉绝对值

【例题5】解方程$|x-1|=2x+1$ 【答案】$x=0$

两边平方得：$x^2-2x+1=4x^2+4x+1$

$3x^2+6x=3x(x+2)=0$

解得$x=0$或$x=-2$

验根 将$x=0$代入原方程得：左侧$=|x-1|=|0-1|=1$

右侧$=2x+1=2\times 0+1=1$

将$x=-2$代入原方程得：左侧$=|x-1|=|-2-1|=3$

右侧$=2x+1=2\times(-2)+1=-3$

左侧$\neq$右侧，$x=-2$为原方程的增根，舍.

基础知识 去掉绝对值 遇到绝对值，去掉绝对值

任意实数a的绝对值，$|a|=\begin{cases} a & (当a>0时) \\ 0 & (当a=0时) \\ -a & (当a<0时) \end{cases}$

（1）根据定义去掉绝对值，如零点分段法.

（2）平方法去掉绝对值：$|a|^2=a^2$

- 等号/不等号两侧为一次算式
- 可能产生增根，注意验根

$|x-1|=|x-3|$　　$|x-1|=2x+1$

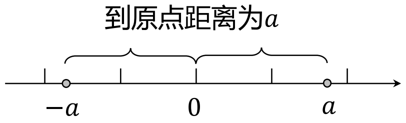
$|x-1|=-1$　　$(|x-1|)^2=x^2-2x+1=(-1)^2=1$

$x^2-2x=x(x-2)=0$

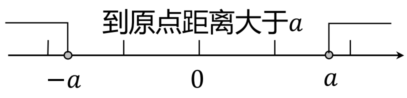
基础知识 去掉绝对值

（3）利用不等式的性质转化去掉绝对值$(a,b>0)$

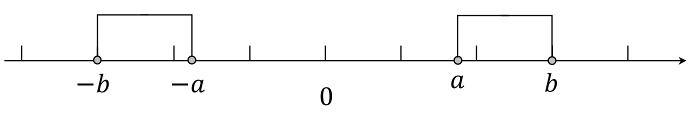
$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$



$|x|>a\Leftrightarrow x<-a$或$x>a$

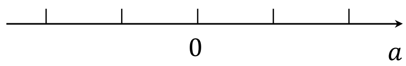


$0<a\le|x|\le b\Leftrightarrow 0<a\le x\le b$或$-b\le x\le -a<0$



基础知识 去掉绝对值·总结

任意实数x的绝对值，$|x|=\begin{cases}x & (\text{当}x>0\text{时})\\ 0 & (\text{当}x=0\text{时})\\ -x & (\text{当}x<0\text{时})\end{cases}$



若已知$|x|=x$，则一定有$x\geq 0$

若已知$|x|=-x$，则一定有$x\leq 0$

（1）根据定义去掉绝对值（正应用、逆应用）

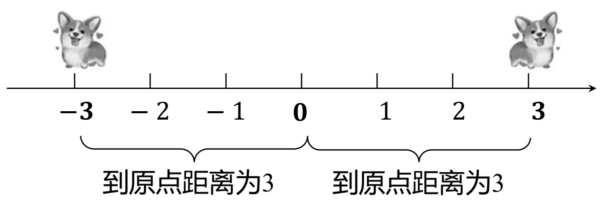
（2）平方法去掉绝对值：$|x|^2=x^2$

（3）利用不等式的性质转化去掉绝对值$(a,b>0)$

- $|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$
- $|x|>a\Leftrightarrow x<-a$或$x>a(a>0)$
- $0<a\leq|x|\leq b\Leftrightarrow 0<a\leq x\leq b$或$-b\leq x\leq -a<0$

（4）利用绝对值的几何意义去掉绝对值.

基础知识 绝对值的几何意义

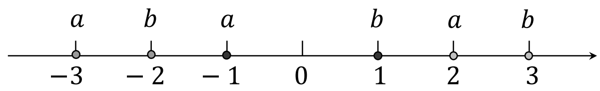


$|3|=3=|3-0|$

$|-3|=3=|-3-0|$

$|a-b|$为数轴上a,b两点之间的距离.

几何



代数

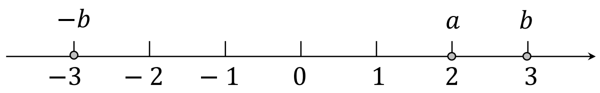
$\begin{cases}a=2\\ b=3\end{cases}$ $|a-b|=|2-3|=|-1|=1$

$\begin{cases}a=-3\\ b=-2\end{cases}$ $|a-b|=|-3+2|=|-1|=1$

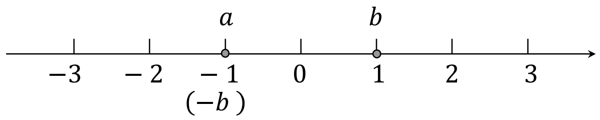
$\begin{cases}a=-1\\ b=1\end{cases}$ $|a-b|=|-1-1|=|-2|=2$

基础知识 绝对值的几何意义 距离

$|a+b|=|a-(-b)|$，为数轴上$a,-b$两点之间的距离.



$\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$ 代数：$|a+b|=|2+3|=|5|=5$
几何：$-b=-3$



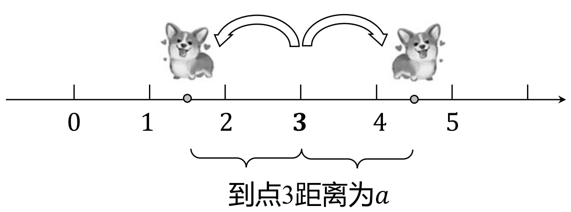
$\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$ 代数：$|a+b|=|-1+1|=|0|=0$
几何：$-b=-1$

考点三 绝对值的几何意义

【例题1】$|x-3|=a$（$a>0$），则x的值为（ D ）.

A. $a+3$　　B. $3-a$　　C.3　　D.$3-a$或$3+a$　　E.a

$|x-3|=a$（$a>0$）表示数轴上到点3距离为a的点x



x为$3-a$或$3+a$.

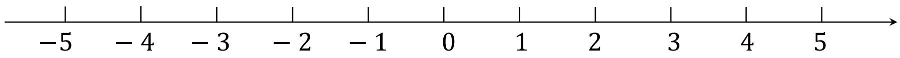
考点三 绝对值的几何意义

【例题2】（条件充分性判断）已知a,b,c为三个实数，则$min\{|a-b|,|b-c|,|a-c|\}\leq 5$（ A ）

（1）$|a|\leq 5,|b|\leq\ 5,|c|\leq\ 5$　　（2）$a+b+c=15$

$|a-b|,|b-c|,|a-c|$ 三个绝对值中的最小值≤ 5，即其中至少一个≤ 5

$|a-b|,|b-c|,|a-c|$不可能全都大于5



条件（1）：$|a|\leq 5,|b|\leq\ 5,|c|\leq\ 5$表示数轴上点$a$、$b$、$c$均在$[-5,5]$之间.

a,b,c之间距离不可能都大于5

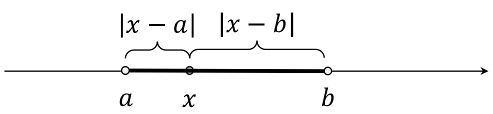
条件（2）：a,b,c可以有正有负相距很远.

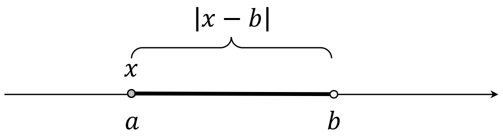
特值选取原则：极限法

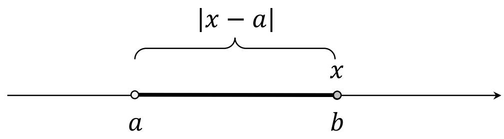
基础知识 两个绝对值之和

【标志词汇】形如$|x-a|+|x-b|$的两绝对值之和.

$(x$到a点的距离$)+(x$到b点的距离$)$







当x在$[a,b]$之内的任意位置时

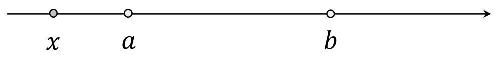
$|x-a|+|x-b|=|a-b|$恒成立

这也是两绝对值之和能取到的最小值.

基础知识 两个绝对值之和

【标志词汇】形如$|x-a|+|x-b|$的两绝对值之和.

(x到a点的距离) + (x到b点的距离)



x在$[a,b]$之外时，随着x远离a,b点，$|x-a|+|x-b|$的取值也随之增加，且没有上限.

【注意】无穷大不可以作为最大值.

基础知识 两个绝对值之和

【标志词汇】形如$|x-a|+|x-b|$的两绝对值之和.

- x在$[a,b]$内取得最小值
- 最小值为$|a-b|$
- 无最大值

$|x-a|+|x-b|\geq|a-b|$

当$x\in[a,b]$时$|x-a|+|x-b|=|a-b|$

适用几何意义求解题目特征：

（1）几个绝对值式子加或者减，不能有乘除；

（2）只有一个变量x；

（3）x系数为1（或可统一化为1），且只在绝对值内出现.

考点三 两个绝对值之和

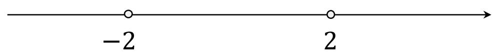
【例题3】设$y=|x-2|+|x+2|$，则下列结论正确的是（ D ）.

A. y没有最小值　　B. 只有一个x使y取到最小值

C. 有无穷多个x使y取到最大值　　D. 有无穷多个x使y取到最小值　　E. 以上结论均不正确

【标志词汇】形如$|x-a|+|x-b|$的两绝对值之和.

$(x$到2点的距离$)+(x$到-2点的距离$)$

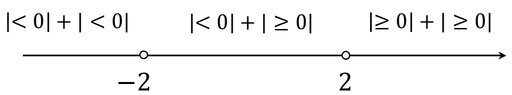


考点三 两个绝对值之和

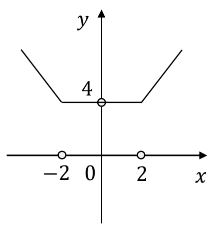
【例题3】设$y=|x-2|+|x+2|$，则下列结论正确的是（ D ）.

A. y没有最小值　　B. 只有一个x使y取到最小值

C. 有无穷多个x使y取到最大值　　D. 有无穷多个x使y取到最小值　　E. 以上结论均不正确



$$y=|x-2|+|x+2|=\begin{cases}2-x-x-2=-2x, & x<-2\\ 2-x+x+2=4, & -2\le x\le 2\\ x-2+x+2=2x, & x>2\end{cases}$$



当$-2\le x\le 2$时，y取到最小值4，y没有最大值.

考点三 两个绝对值之和

【例题4】（条件充分性判断）$f(x)$有最小值2（ B ）.

（1）$f(x)=|x-\frac{5}{12}|+|x-\frac{1}{12}|$　　（2）$f(x)=|x-2|+|4-x|$

【标志词汇】形如$|x-a|+|x-b|$的两绝对值之和.

条件（1）：$f(x)=\left|x-\frac{5}{12}\right|+\left|x-\frac{1}{12}\right|$

最小值为$\frac{5}{12}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$，条件（1）不充分.

条件（2）：$f(x)=|x-2|+|4-x|=|x-2|+|x-4|$

最小值为$4-2=2$，条件（2）充分

MBA大师跟学团专属

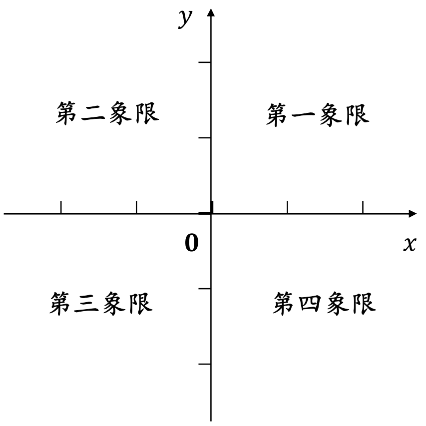
平面解析几何

董璞

跟学团 平面解析几何

- 代数与几何相结合，公式繁多
- 每年2-3题，考察力度加大
- 历史重点：直线与圆
- 近年热点：点与直线

跟学团 平面解析几何 · 基础



① 在同一平面内，画两条有公共原点且垂直的数轴；

② 水平数轴叫x轴（横轴）

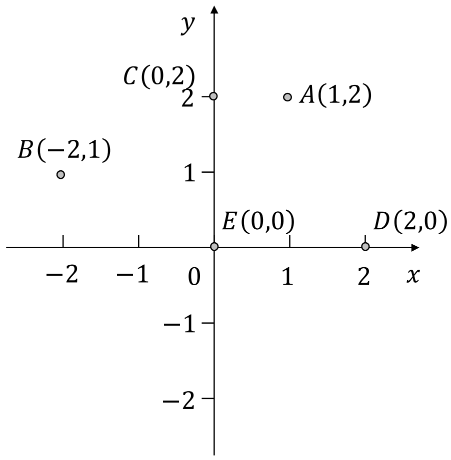
竖直数轴叫y轴（纵轴）

两轴交点叫坐标系原点.

③ 两轴将平面分为四部分，分别命名为第一~四象限

【注意 】坐标轴上的点不属于任何一个象限.

跟学团 平面解析几何·基础



实数在数轴上的点坐标⇔实数在坐标轴上的位置

坐标平面上的点坐标⇔点在坐标平面上的位置

对x轴做垂线

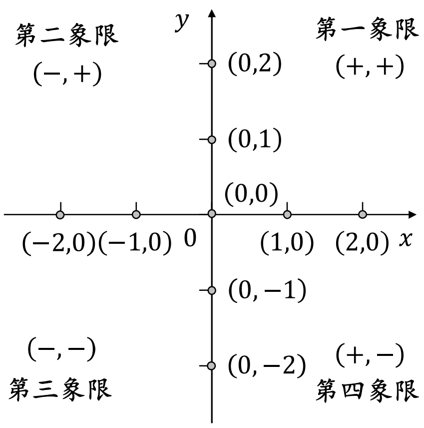
$P(x,y)=P$(横坐标，纵坐标)

对y轴做垂线

$A(1,2)$　　$B(-2,1)$　　$C(0,2)$

$D(2,0)$　　$E(0,0)$

跟学团 平面解析几何·基础



$P(x,y)=P$(横坐标，纵坐标)

横坐标正负决定点在y轴右侧还是左侧

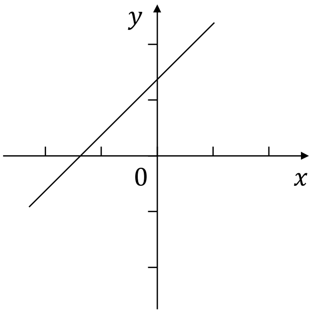
纵坐标正负决定点在x轴上方还是下方

x轴上的点的纵坐标为0，表示形式为$(x,0)$

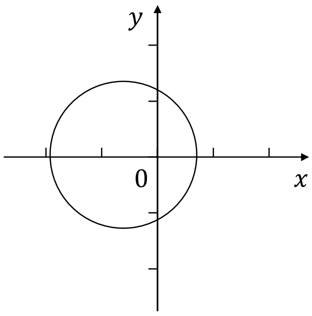
y轴上的点的横坐标为0，表示形式为$(0,y)$

原点既在x轴上又在y轴上，横纵坐标均为0，表示为$(0,0)$

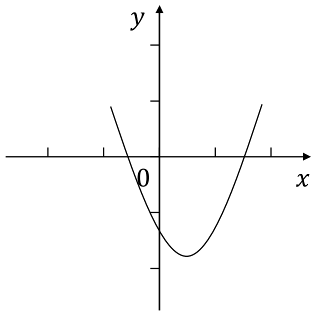
跟学团 平面解析几何



直线



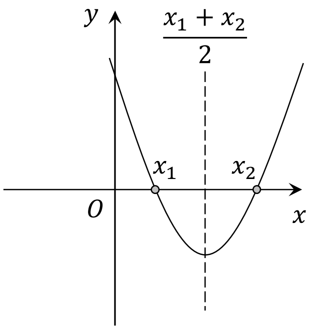
圆



抛物线

跟学团 点与直线・两点中点坐标公式

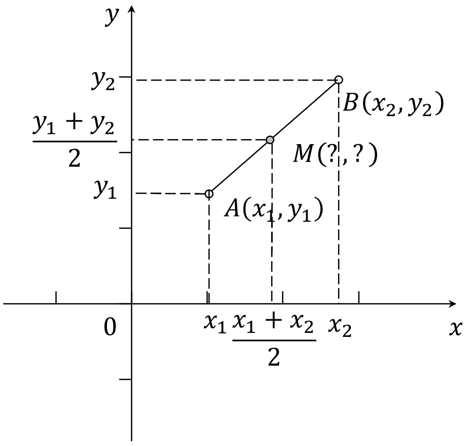
交点式/两根式 抛物线与x轴交点为$(x_1,0)$和$(x_2,0)$，则可设$y=a(x-x_1)(x-x_2)$（$a\neq 0$）



$y=a(x-1)(x-2)$ （$a\neq 0$）

与x轴交点为(1,0)和(2,0)

跟学团 点与直线 · 两点中点坐标公式



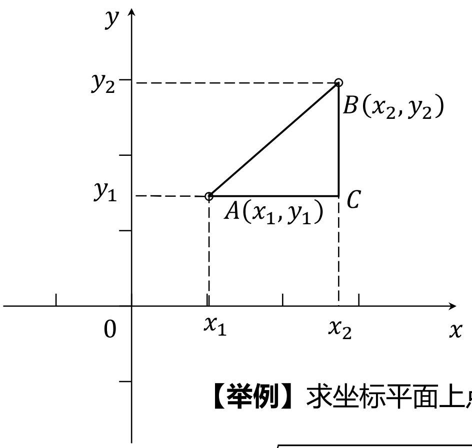
线段中点坐标

两点中点坐标 $=\left(\frac{横+横}{2}, \frac{纵+纵}{2}\right)$

【举例】求坐标平面上点(1,2)与点(3,5)之间的中点坐标

中点坐标 $=\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+5}{2}\right)=\left(2, \frac{7}{2}\right)$

跟学团 点与直线 · 两点间距离公式



对于直角三角形ABC

$BC=y_2-y_1$

$AC=x_2-x_1$

斜边$=AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

两点间距离公式

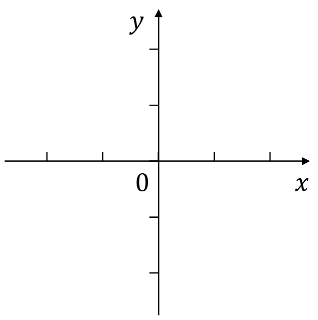
【举例】求坐标平面上点(1,2)与点(3,5)之间的距离

$d=\sqrt{(3-1)^2+(5-2)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

跟学团 点与直线

【模拟题】已知3个点坐标分别为$A(3,-4)$、$B(-3,2)$和$C(1,1)$，线段AB中点到点C的距离为d，则$d=$（E）.

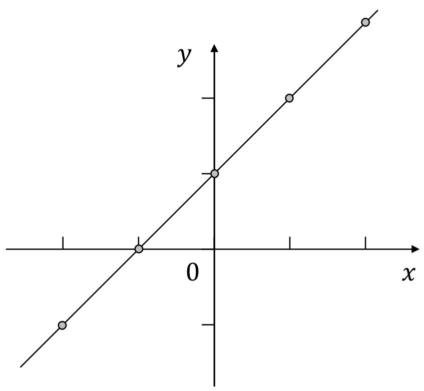
A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2　　E. $\sqrt{5}$



线段AB的中点的坐标为$\left(\dfrac{3+(-3)}{2},\dfrac{-4+2}{2}\right)=(0,-1)$.

中点到点C的距离$d=\sqrt{(1-0)^2+(1+1)^2}=\sqrt{5}$.

跟学团 点与直线 ·直线方程



二元一次方程$x-y+1=0$

$y=0$时x的值⇔直线与x轴交点坐标⇔直线在x轴截距

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	0	1	2	3

$x=0$时y的值⇔直线与y轴交点坐标⇔直线在y轴截距

任意二元一次方程$Ax+By+C=0$（A,B不同时为零）

在坐标平面内均对应为一条直线.

跟学团 点与直线 ·直线方程

一般式 $Ax+By+C=0$（A,B不同时为零）

已知直线经过的一点及直线倾斜程度，可确定这条直线

斜截式 在y轴截距为b，斜率为k的直线方程为$y=kx+b$

点斜式 经过点$P(x_0,y_0)$，斜率为k的直线方程为$y-y_0=k(x-x_0)$

已知直线经过的两点，可确定这条直线

两点式 过两点$P_1(x_1,y_1)$，P_2（x_2,y_2）（其中$x_1\neq x_2$）的直线方程为

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

跟学团 点与直线 ·直线方程

点斜式 经过点$P(x_0,y_0)$，斜率为k的直线方程为$y-y_0=k(x-x_0)$

两点式 过两点$P_1(x_1,y_1)$，P_2（x_2,y_2）（其中$x_1\neq x_2$）的直线方程为

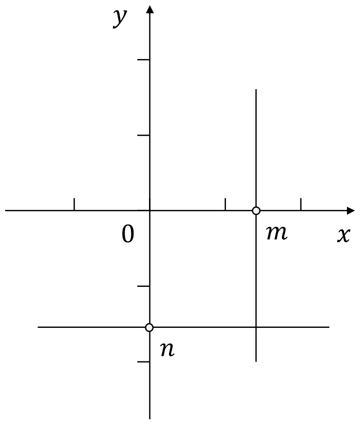
$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$y-y_1=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(y_2-y_1)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

两点斜率公式 过两点$P_1(x_1,y_1)$，$P_1(x_2,y_2)$的直线斜率为$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1},x_1\neq x_2.$

点到直线距离 点$P(x_0,y_0)$到直线$Ax+By+C=0$的距离为：$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

跟学团 点与直线 · 直线方程



任意二元一次方程$Ax+By+C=0$（A,B不同时为零）在坐标平面内均对应为一条直线.

当A,B中有一个为零时，方程表示竖直或水平的直线即与坐标轴平行或重合的直线.

$x=m$：竖直直线，与y轴平行

$x=0$：y轴

$y=n$：水平直线，与x轴平行

$y=0$：x轴

跟学团 点与直线 · 两直线关系

一般式 $Ax+By+C=0$（A,B不同时为零）　　**斜截式** $y=kx+b$

关系	交点个数	联立两直线方程组的解	斜率关系	系数关系
相交	1个	有唯一解，即交点坐标(x_0,y_0).	$k_1\neq k_2$ 垂直时$k_1\times k_2=-1$	$A_1B_2\neq A_2B_1$ 垂直时$A_1A_2+B_1B_2=0$

跟学团 点与直线 · 两直线关系

一般式 $Ax+By+C=0$（A,B不同时为零） **斜截式** $y=kx+b$

关系	交点个数	联立两直线方程组的解	斜率关系	系数关系
平行	无	无解	$k_1=k_2$	$A_1B_2=A_2B_1$ $B_1C_2\neq B_2C_1$

跟学团 点与直线 · 两直线关系

一般式 $Ax+By+C=0$（A,B不同时为零） **斜截式** $y=kx+b$

关系	交点个数	联立两直线方程组的解	斜率关系	系数关系
相交	1个	有唯一解，即交点坐标(x_0,y_0).	$k_1\neq k_2$ 垂直时$k_1\times k_2=-1$	$A_1B_2\neq A_2B_1$ 垂直时$A_1A_2+B_1B_2=0$
平行	无	无解	$k_1=k_2$	$A_1B_2=A_2B_1$ $B_1C_2\neq B_2C_1$
重合	2个以上	有无数解	$k_1=k_2$	$A_1B_2=A_2B_1$ $B_1C_2=B_2C_1$

跟学团 点与直线 · 两直线关系

位置关系⇔系数关系

【标志词汇】两条直线垂直　直线斜率关系$k_1 \times k_2 = -1$

系数关系$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

【标志词汇】两条直线平行　直线斜率关系$k_1 = k_2$

或系数关系$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$

跟学团 点与直线 · 两直线关系

【模拟题】$(m+2)x + 3my + 1 = 0$与$(m-2)x + (m+2)y - 3 = 0$相互垂直（ D ）.

（1）$m = \frac{1}{2}$.　　　　（2）$m = -2$.

【标志词汇】给定未知字母取值或关系式 ⇒ 直接代入

【标志词汇】两条直线垂直 ⇔ 系数关系$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

条件（1）：要求$5x + 3y + 2 = 0$与$-3x + 5y - 6 = 0$是否垂直

$A_1A_2 + B_1B_2 = 5 \times (-3) + 3 \times 5 = 0$，故两直线相互垂直，条件（1）充分.

条件（2）：要求$6y - 1 = 0$和$4x + 3 = 0$是否垂直

$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \times 4 + 6 \times 0 = 0$ 它们分别平行于x轴和y轴，故相互垂直，条件（2）亦充分.

跟学团 点与直线 · 两直线关系

【模拟题】已知$b>0$，直线$(b^2+1)\,x+ay+2=0$与直线$x-b^2y-1=0$互相垂直，则ab的最小值等于（ B ）.

A.1　　B.2　　C.4　　D.$2\sqrt{2}$　　E.$2\sqrt{3}$

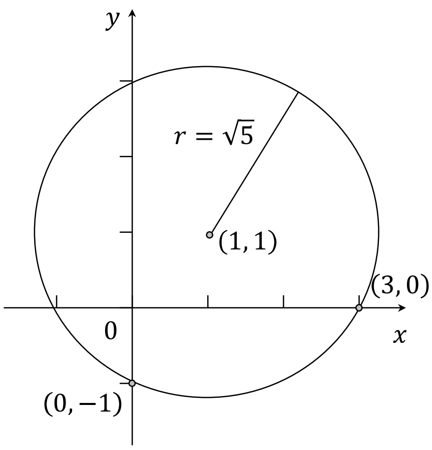
【标志词汇】两条直线垂直 ⇔ 系数关系$A_1A_2+B_1B_2=0$

【标志词汇】 限制为正+求最值 ⟹ 均值定理

$(b^2+1)\times 1+a\times(-b^2)=0$　　$b^2+1-ab^2=0$　　$ab^2=b^2+1$

$$ab=\frac{b^2+1}{b}=b+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{b\times\frac{1}{b}}=2$$

跟学团 圆 · 基础知识



两点间距离公式 $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

求坐标平面上点(3,0)与点(1,1)之间的距离

$d=\sqrt{(3-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

求坐标平面上点$(0,-1)$与点(1,1)之间的距离

$d=\sqrt{(0-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

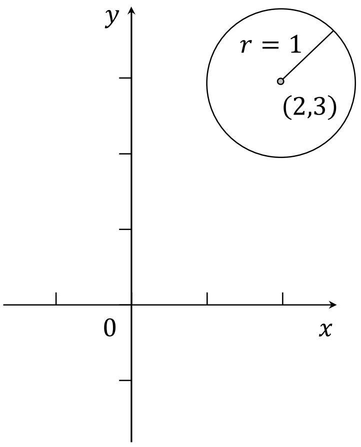
到平面内(1,1)点距离等于$\sqrt{5}$的所有点的集合

设点(x,y)与点(1,1)之间的距离等于$\sqrt{5}$，则有：

$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{5}$

两边平方得：$(x-1)^2+(y-1)^2=5$

跟学团 圆 · 基础知识



圆 到平面内一定点距离等于定值的所有点的集合

到平面内(2,3)点距离等于1的所有点的集合

⇩ 圆心　⇩ 半径

设满足要求的点的坐标为(x, y)

根据两点间距离公式有：

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=1$$

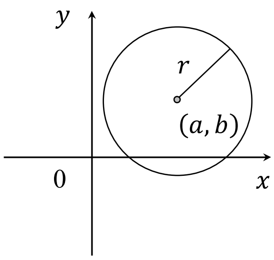
两边同时平方得：

$(x-2)^2+(y-3)^2=1^2$ **圆的标准方程**

跟学团 圆 · 基础知识

圆的标准方程 如果一个圆的圆心是点(a, b)，半径为r，这个圆的标准方程是

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$



【举例】根据圆的标准方程“瞪眼”求圆心、半径

$(x-2)^2+(y-1)^2=4$

- 圆心(2,1)
- 半径2

$(x+2)^2+(y-1)^2=4$

- 圆心(−2,1)
- 半径2

跟学团 圆・基础知识

圆的标准方程 如果一个圆的圆心是点(a,b)，半径为r，这个圆的标准方程是

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

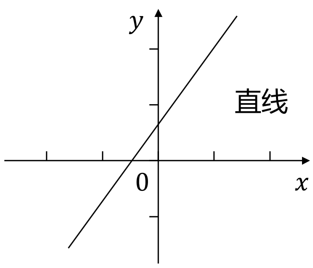
圆的一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，其中，系数满足$D^2+E^2-4F>0$.

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$

圆心为$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，半径$r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$

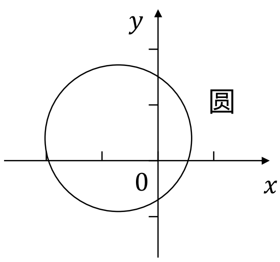
遇见圆的一般方程⇒将其配方化为圆的标准方程

跟学团 平面解析几何・三大图形一般方程



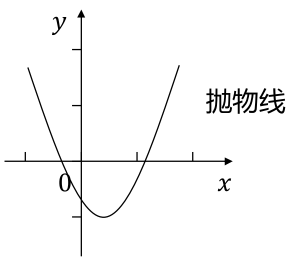
$Ax+By+C=0$

(其中A,B不同时为零)



$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

(其中$D^2+E^2-4F>0$)



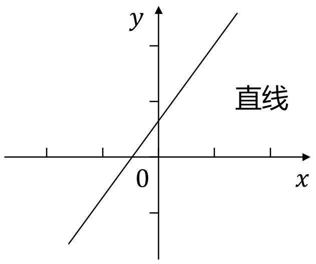
$y=ax^2+bx+c$

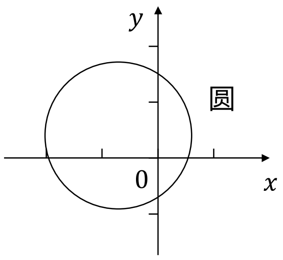
(其中$a\neq0$)

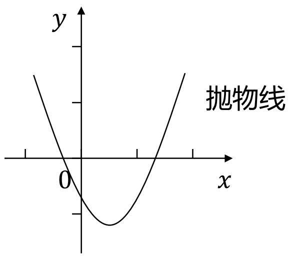
代入$x=0$可得曲线与y轴交点

代入$y=0$可得曲线与x轴交点

跟学团 平面解析几何·三大图形一般方程







$Ax+By+C=0$ (其中A,B不同时为零)

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ (其中$D^2+E^2-4F>0$)

$y=ax^2+bx+c$ (其中$a\neq 0$)

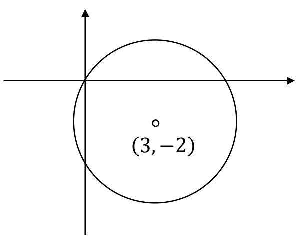
曲线一般方程中常数项为零⇔曲线过原点

跟学团 圆·基础知识

【真题2016.10】圆$x^2+y^2-6x+4y=0$上到原点距离最远的点是（ E ）

A. $(-3,2)$　　B. $(3,-2)$　　C. $(6,4)$　　D. $(-6,4)$　　E. $(6,-4)$

将圆化为标准方程$(x-3)^2+(y+2)^2=13$　　**曲线一般方程中常数项为零⇔曲线过原点**



圆心$(3,-2)$，半径为$\sqrt{13}$，且过$(0,0)$点

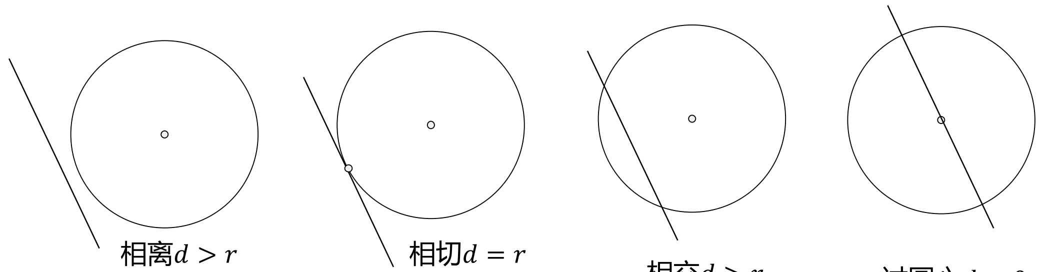
【技巧】观察选项即可得 $(6,-4)$

$\frac{x_0+0}{2}=3$，$x_0=6$

$\frac{y_0+0}{2}=-2$，$y_0=-4$

跟学团 圆·圆与直线

【标志词汇】<u>判断直线与圆位置关系⇔比较半径r与圆心到直线距离d的大小</u>



相离$d>r$　　相切$d=r$　　相交$d>r$　　过圆心$d=0$

圆心点坐标满足直线方程

所截线段为圆的直径

点到直线距离　点$P(x_0,y_0)$到直线$Ax+By+C=0$的距离为：

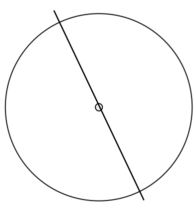
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

跟学团 圆·圆与直线·相交

【模拟题】若圆的一条直径的两个端点分别是$(-1,3)$与$(5,-5)$，则此圆的方程是（ D ）.

A.$x^2+y^2+4x+2y-20=0$　　B.$x^2+y^2-4x-2y-20=0$

C.$x^2+y^2-4x+2y+20=0$　　D.$x^2+y^2-4x+2y-20=0$　　E.$x^2+y^2+4x+2y+20=0$



过圆心$d=0$

圆心点坐标满足直线方程

所截线段为圆的直径

两端点的中点坐标为$\left(\frac{-1+5}{2},\frac{3-5}{2}\right)$

两端点距离$d=\sqrt{(-1-5)^2+(3+5)^2}=10=$直径

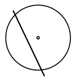
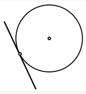
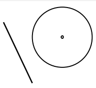
此圆的圆心为$(2,-1)$，半径为5

$(x-2)^2+(y+1)^2=25$　　$x^2+y^2-4x+2y-20=0$

【公式】$(x+1)(x-5)+(y-3)(y+5)=0$

跟学团 圆 · 圆与直线

图像的交点对应联立方程组的解

位置关系	图像	距离与半径的关系	交点个数	联立圆与直线方程组的解
相交		$d<r$	2个交点	2组不同实数解
相切		$d=r$	1个交点	2组相同实数解
相离		$d>r$	无交点	方程组无解

两大主要考察思路：1. 定直线与圆位置关系

2. 过定点动直线与圆位置关系

跟学团 圆 · 圆与直线

【**真题2009.10.11**】曲线$x^2-2x+y^2=0$上的点到直线$3x+4y-12=0$的最短距离是（　）.

$A.\frac{3}{5}$　　$B.\frac{4}{5}$　　$C.1$　　$D.\frac{4}{3}$　　$E.\sqrt{2}$

【总结】若直线与圆相离，则圆上的点到直线的最短距离等于$d-r$

若直线与圆相交或相切，则圆上的点到直线的最短距离为0.

直线$3x+4y-12=0$　　$y=-\frac{3}{4}x+3$

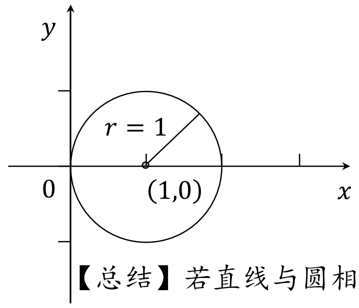
代入$x^2-2x+y^2=0$得：$x^2-2x+\left(-\frac{3}{4}x+3\right)^2=0$

跟学团 圆 · 圆与直线【点到直线距离公式】$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

【真题2009.10.11】曲线$x^2-2x+y^2=0$上的点到直线$3x+4y-12=0$的最短距离是（ B ）.

$A.\frac{3}{5}$　　$B.\frac{4}{5}$　　$C.1$　　$D.\frac{4}{3}$　　$E.\sqrt{2}$

将圆方程配方得$(x-1)^2+y^2=1$　圆心为点$(1,0)$，半径$r=1$



圆心到直线距离$d=\frac{|3\times1+4\times0-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{9}{5}>r=1$

直线与圆相离，则最短距离为$d-r=\frac{9}{5}-1=\frac{4}{5}$.

【总结】若直线与圆相离，则圆上的点到直线的最短距离等于$d-r$

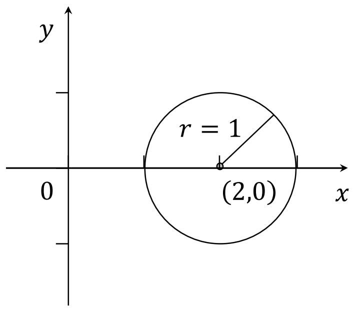
若直线与圆相交或相切，则圆上的点到直线的最短距离为0.

跟学团 圆 · 圆与直线 · 相交【点到直线距离公式】$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

【真题2019.18】直线$y=kx$与圆$x^2+y^2-4x+3=0$有两个交点.（ A ）

（1）$-\frac{\sqrt{3}}{3}<k<0$.　　（2）$0<k<\frac{\sqrt{2}}{2}$　　条件（1）充分，条件（2）不充分.

有两个交点⇔ 相交 ⇔ $d<r$　　将圆方程配方化为标准式$(x-2)^2+y^2=1$



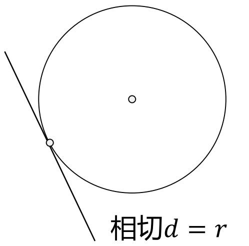
$d=\frac{|2k+(-1)\times0+0|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}<1$

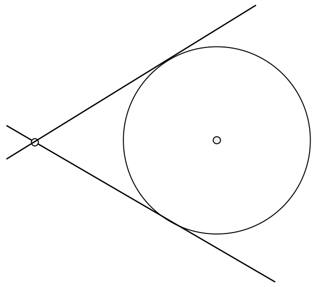
两边同乘正分母$|2k|<\sqrt{k^2+1}$

两边平方$(|2k|)^2<\left(\sqrt{k^2+1}\right)^2$

整理$4k^2<k^2+1$　　$k^2<\frac{1}{3}$　　$-\frac{\sqrt{3}}{3}\le k\le\frac{\sqrt{3}}{3}$

跟学团 圆·圆与直线·相切





过圆上一点有且仅有一条直线与圆相切

切点与圆心连线垂直与切线

过圆外一点有两条直线与圆相切

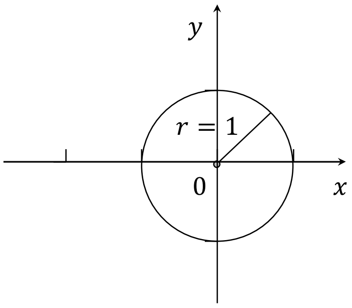
这两条切线关于圆外一点与圆心的连线对称.

跟学团 圆·圆与直线·相切

【**真题2010.10.23**】直线$y = k(x+2)$是圆$x^2 + y^2 = 1$的一条切线（D）.

（1）$k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.　　（2）$k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

直线$y - 0 = k(x+2)$为过点$(-2,0)$，斜率为k的直线



圆$x^2 + y^2 = 1$为单位圆，圆心在原点，半径为1.

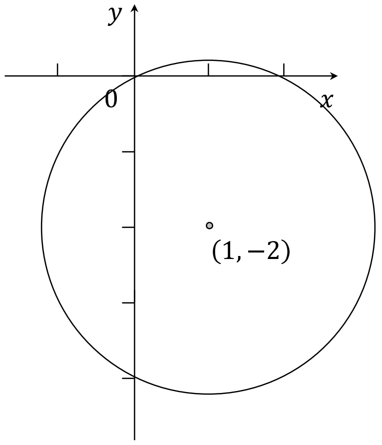
相切$\Leftrightarrow d = \frac{|0 - 0 + 2k|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = r = 1$

解得$k = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

跟学团 圆·圆与直线·相切

【**真题2011.10.20**】直线l是圆$x^2-2x+y^2+4y=0$的一条切线.（A）

（1）$l: x-2y=0$　　　　（2）$l: 2x-y=0$



配方得圆C的方程为$(x-1)^2+(y+2)^2=5$

曲线一般方程中常数项为零⇔曲线过原点

【技巧】由于切点为直线与圆的唯一交点

圆与直线均过坐标原点，若相切，则(0,0)一定为切点.

过圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$上一点(x_0,y_0)的切线方程为

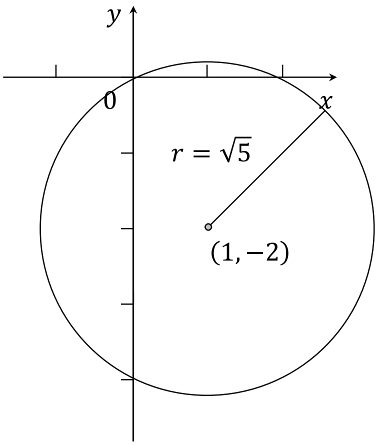
$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$

$(0-1)(x-1)+(0+2)(y+2)=5$

跟学团 圆·圆与直线·相切

【**真题2011.10.20**】直线l是圆$x^2-2x+y^2+4y=0$的一条切线.（A）

（1）$l: x-2y=0$　　　　（2）$l: 2x-y=0$



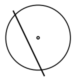
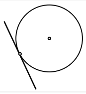
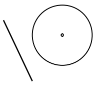
配方得圆C的方程为$(x-1)^2+(y+2)^2=5$

圆心为$(1,-2)$，半径为$\sqrt{5}$

条件（1）$d=\dfrac{|1-2\times(-2)|}{\sqrt{1+(-2)^2}}=\sqrt{5}=r$

条件（2）$d=\dfrac{|2\times1-(-2)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}\neq r$

跟学团 圆·圆与直线

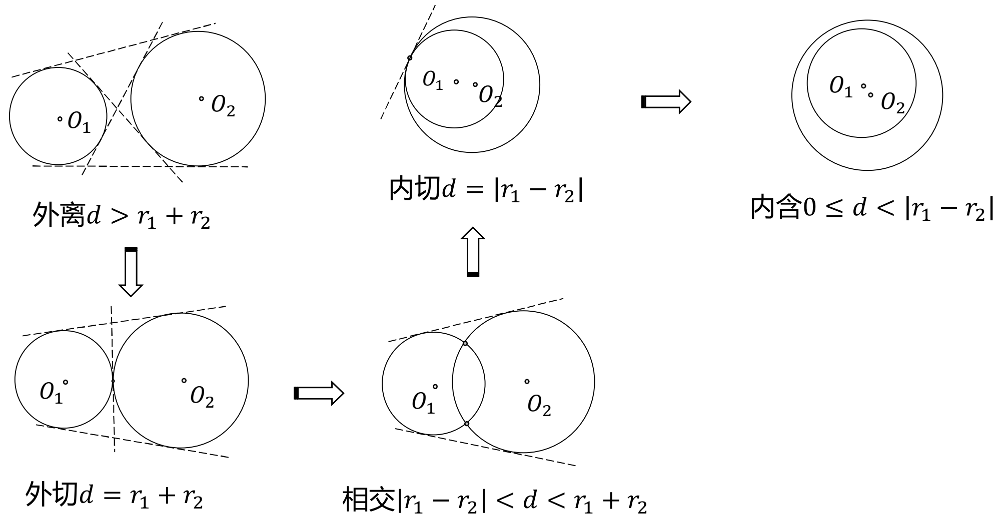
位置关系	图像	距离与半径的关系	交点个数	联立圆与直线方程组的解
相交		$d < r$	2个交点	2组不同实数解
相切		$d = r$	1个交点	2组相同实数解
相离		$d > r$	无交点	方程组无解

两大主要考察思路：<u>1. 定直线与圆位置关系</u>

<u>2. 过定点动直线与圆位置关系</u>

跟学团 圆·圆与圆

两圆的圆心距$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$



跟学团 圆 · 圆与圆

【真题2014.10.09】圆$x^2+y^2+2x-3=0$与圆$x^2+y^2-6y+6=0$（ C ）.

(A) 外离　(B) 外切　(C) 相交　(D) 内切　(E) 内含

【标志词汇】外离⇔ $d>r_1+r_2$　外切⇔ $d=r_1+r_2$　内切⇔ $d=|r_1-r_2|$

相交⇔ $|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$　内含⇔ $0\le d<|r_1-r_2|$

$x^2+y^2+2x-3=0$配方得：$(x+1)^2+y^2=4$

圆心$(-1,0)$，半径$r_1=2$

$x^2+y^2-6y+6=0$配方得：$x^2+(y-3)^2=3$

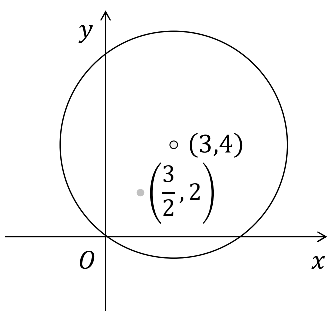
圆心$(0,3)$，$r_2=\sqrt{3}$

两圆圆心距$d=\sqrt{(-1-0)^2+(0-3)^2}=\sqrt{10}$　$r_1-r_2<d<r_1+r_2$，相交

跟学团 圆 · 圆与圆

【真题2008.01.28】圆C_1: $(x-\frac{3}{2})^2+(y-2)^2=r^2$，与圆$C_2$: $x^2-6x+y^2-8y=0$有交点.（ E ）

(1) $0<r<\frac{5}{2}$.　(2) $r>\frac{15}{2}$



圆C_2: $(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$，圆心为(3,4)，半径为5

圆C_1:圆心为$\left(\frac{3}{2},2\right)$，半径为$r$

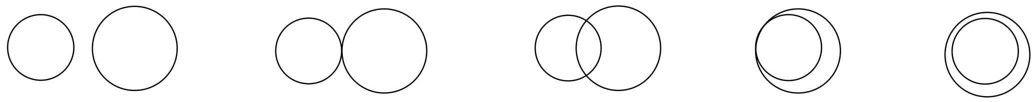
【技巧】极限分析法

条件（1）当$r\to0$时，圆C_1很小，不可能有交点

条件（2）当$r\to\infty$时，圆C_1很大，亦不可能有交点

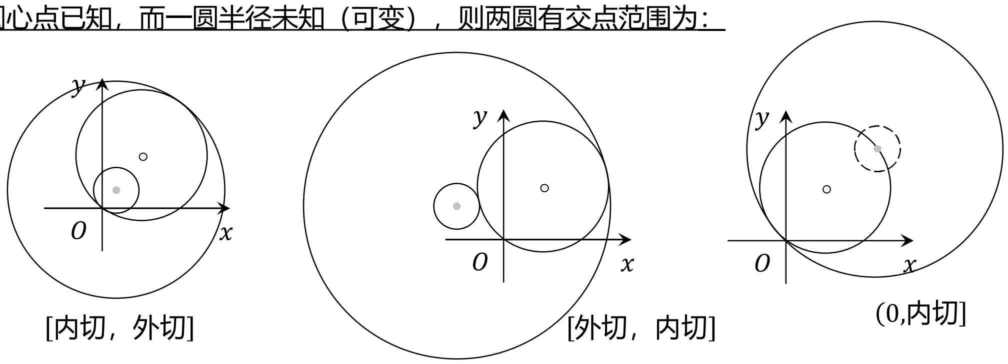
跟学团 圆·圆与圆

半径已知，而圆心点未知（可变），则两圆未知关系可能有5种：外离、外切、相交、内切、内含



$d > r_1 + r_2$　　$d = r_1 + r_2$　　$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$　　$d = |r_1 - r_2|$　　$0 \le d < |r_1 - r_2|$

圆心点已知，而一圆半径未知（可变），则两圆有交点范围为：



[内切，外切]　　[外切，内切]　　(0,内切]

跟学团 圆·圆与圆

【模拟题】 已知圆$(x+a)^2+(y-2)^2=1$与圆$(x-b)^2+(y-2)^2=4$相外切，若$a>0$，$b>0$，则ab的最大值为（ B ）.

$A.\ 2\sqrt{3}$　　$B.\ \frac{9}{4}$　　$C.\ \frac{3}{2}$　　$D.\ \frac{\sqrt{6}}{2}$　　$E.\ 2\sqrt{6}$

【标志词汇】 外切⇔ $d = r_1 + r_2$　　$a + b = r_1 + r_2 = 3$

【标志词汇】 限制为正+求积的最大值 ⇒ 凑“和定”后用均值定理　$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

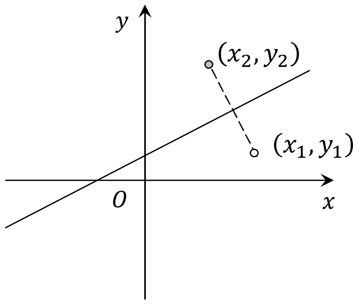
圆$(x+a)^2+(y-2)^2=1$：圆心点为$(-a,2)$，半径$r_1 = 1$

圆$(x-b)^2+(y-2)^2=4$：圆心点为$(b,2)$，半径$r_2 = 2$

两圆圆心距$d = \sqrt{(-a-b)^2+(2-2)^2} = |a+b| = a+b(a>0,b>0)$

跟学团 关于直线对称

【标志词汇】对称⇔垂直&平分 $\begin{cases}\text{两点连成的直线与对称轴垂直}\\ \text{两点的中点在对称轴直线上}\end{cases}$



两点斜率$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

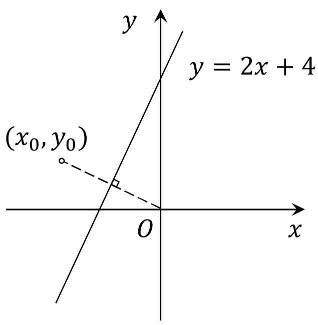
点在曲线上⇔点坐标满足曲线方程

中点$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

跟学团 关于直线对称・一般直线

【模拟题】在坐标平面上，以直线$y=2x+4$为对称轴关于原点对称的点的坐标是（A）.

A. $\left(-\frac{16}{5},\frac{8}{5}\right)$　B. $\left(-\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)$　C. $\left(\frac{16}{5},\frac{8}{5}\right)$　D. $\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)$　E. 以上均不正确



【标志词汇】对称⇔垂直&平分

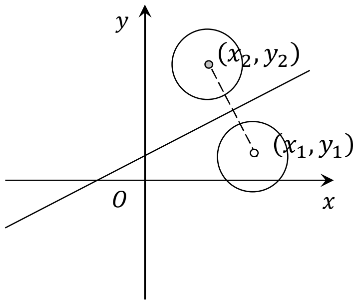
垂直（原点与对称点连线与对称轴垂直）

$$\begin{cases}k_1\cdot k_2=\dfrac{y_0-0}{x_0-0}\times 2=-1\\ \dfrac{y_0+0}{2}=2\times\dfrac{x_0+0}{2}+4\end{cases}\qquad x_0=-\frac{16}{5},y_0=\frac{8}{5}$$

平分（两点中点$\left(\dfrac{x_0+0}{2},\dfrac{y_0+0}{2}\right)$在对称轴直线方程上）

跟学团 关于直线对称

【标志词汇】对称⇔垂直&平分 $\begin{cases}\text{两圆心连成的直线与对称轴垂直}\\ \text{两圆心的中点在对称轴直线上}\end{cases}$



两圆心点斜率$k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

点在曲线上⇔点坐标满足曲线方程

圆心中点$\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

求对称圆的核心仍然是求对称点

跟学团 关于直线对称 · 一般直线

【**真题2019.05**】设圆C与圆$(x-5)^2+y^2=2$关于$y=2x$对称，则圆C的方程为（ E ）

A. $(x-3)^2+(y-4)^2=2$ $(3,4)$

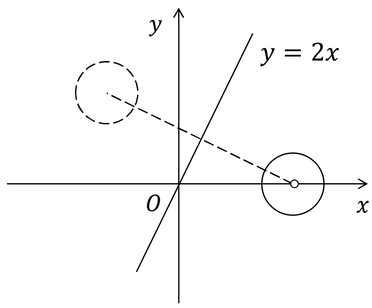
B. $(x+4)^2+(y-3)^2=2$ $(-4,3)$

C. $(x-3)^2+(y+4)^2=2$ $(3,-4)$

D. $(x+3)^2+(y+4)^2=2$ $(-3,-4)$

E. $(x+3)^2+(y-4)^2=2$ $(-3,4)$

圆心$(5,0)$关于$y=2x$的对称点(x_0, y_0)



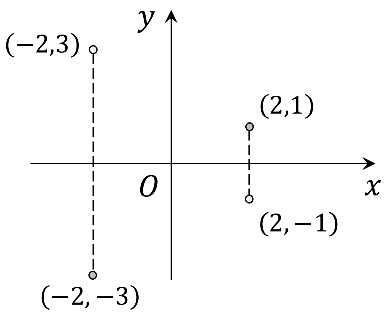
垂直：$\dfrac{y_0 - 0}{x_0 - 5} \times 2 = -1$

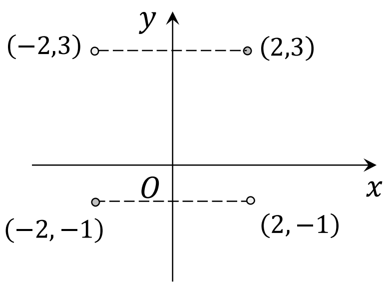
平分：$\dfrac{y_0 + 0}{2} = 2 \times \dfrac{x_0 + 5}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases}$

【**技巧**】一定在II象限，只可能为B或E

跟学团 关于直线对称 • 特殊直线





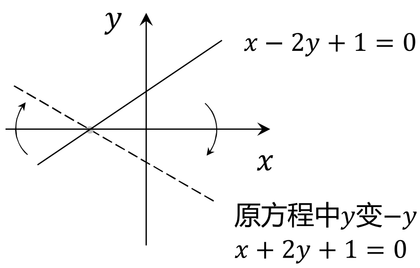
关于x轴对称：上下翻转

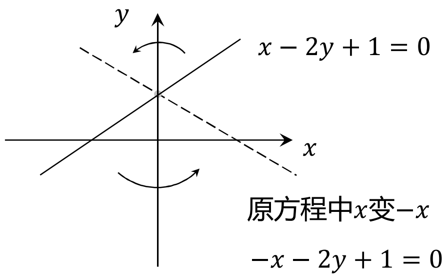
横坐标x不变，纵坐标y变$-y$

关于y轴对称：左右翻转

纵坐标y不变，横坐标x变$-x$

跟学团 关于直线对称 • 特殊直线





关于x轴对称：上下翻转

关于y轴对称：左右翻转

跟学团 关于直线对称·特殊直线

【标志词汇】

求关于y轴对称的新曲线方程，将原曲线方程中的x用$-x$替换.

求关于x轴对称的新曲线方程，将原曲线方程中的y用$-y$替换

求关于$y=x$对称的新曲线方程，将原曲线方程中的x和y互换.

求关于$y=-x$对称的新曲线方程，将原曲线方程中的x变为$-y$，y变为$-x$

求关于原点$(0,0)$对称的新曲线方程，将原曲线方程中的x变为$-x$，y变为$-y$

跟学团 关于直线对称·特殊直线

【真题2012.10.19】直线L与直线$2x+3y=1$关于x轴对称.（ A ）

（1）$L:2x-3y=1$.　　　（2）$L:3x+2y=1$.

【标志词汇】<u>求关于x轴对称的新曲线方程，将原曲线方程中的y用$-y$替换</u>

与$2x+3y=1$关于x轴对称的直线为：$2x-3y=1$

条件（1）充分

【标志词汇】<u>求关于$y=x$对称的新曲线方程，将原曲线方程中的x和y互换.</u>

条件（2）：$2y+3x=1$为$2x+3y=1$关于$y=x$轴对称的直线

跟学团 关于直线对称 · 特殊直线

【举例】分别求圆$C: x^2+y^2+2x-6y-14=0$关于x轴、y轴和直线$y=x$对称的圆.

【标志词汇】求关于x轴对称的新曲线方程，将原曲线方程中的y用$-y$替换

$$x^2+y^2+2x+6y-14=0$$

【标志词汇】求关于y轴对称的新曲线方程，将原曲线方程中的x用$-x$替换.

$$x^2+y^2-2x-6y-14=0$$

【标志词汇】求关于$y=x$对称的新曲线方程，将原曲线方程中的x和y互换.

$$x^2+y^2+2y-6x-14=0$$