MBA大师跟学团专属

数列

董璞

跟学团 **数列**

- 三项数列
- 等差数列
- 等比数列
- 通项公式a_n与前n项和公式S_n
- 近几年每年2-3题

跟学团 数列

数列基础【2016.24】 ★

三项数列【2021.02】【2019.16】【2018.19】【2017.03】★

等差数列
- 定义和性质【2019.24】【2016.13】【2015.20】
- 各项与下标间关系【2018.17】★
- S_n最值（数列过零点的项)【2020.05】【2015.23】
- 等差数列片段和

等比数列
- 定义和性质【2021.24】
- 各项与下标间关系
- 等比数列求和【2018.07】

常数列特值法

利用数列求代数式值

数列的推演
- 已知S_n求a_n
- a_n与a_{n+1}或a_{n-1}的递推 ★【2020.11】【2019.15】

跟学团 数列·基础知识

数列的定义和分类 依一定次序排成的一列数称为一个数列.

数列的一般表达形式为：a_1，a_2，a_3，…，a_n，…简记为$\{a_n\}$.

【有穷数列】 1，2，3，4，5，6，7

【无穷数列】 1，2，3，4，5，6，7，…

【递增数列】第二项起，每一项都比前一项大.

单调性

【递减数列】第二项起，每一项都比前一项小. 7，6，5，4，3，2，1，…

【摆动数列】1，−1，1，−1，1，−1，1，−1，… 公比为−1的等比数列

【常数列】各项均为同一个常数 2，2，2，2，2，2，2，… 常数列特值法

跟学团 数列·基础知识

数列　依一定次序排成的一列数 $\{a_n\}$

0，　1，　1，　2，　3，　5，　8，　......

a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7，......

数列两大要素 $\begin{cases} \text{数列某项的值：} a_n \\ \text{某项的序号：下标} n \end{cases}$

数列的通项　数列的第n项a_n与其序号n之间的关系

如果数列中的第n项a_n与其序号n的关系可以用一个公式来表示，则称这个公式为通项公式

数列的通项公式⟹数列中的任意一项.

跟学团 数列·基础知识

【模拟题】若数列$\{a_n\}$的每一项都是它序号的平方减去序号的5倍，则66是该数列的第（ E ）项.

A.30　　B.20　　C.18　　D.15　　E.11

$a_n = n^2 - 5n$　　数列的通项公式⟹数列中的任意一项.

$66 = n^2 - 5n$

$n^2 - 5n - 66 = 0$

$(n-11)(n+6) = 0$

$n = 11$

跟学团 数列·基础知识

【递增数列】第二项起，每一项都比前一项大.
【递减数列】第二项起，每一项都比前一项小.

【真题2016.24】已知数列$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10}$，则$a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_9 - a_{10} \geq 0$.（ A ）

（1）$a_n \geq a_{n+1}, n = 1,2,\ldots\ldots,9$.　　　（2）${a_n}^2 \geq {a_{n+1}}^2$，$n = 1,2,\ldots\ldots,9$.

条件（1）$a_n \geq a_{n+1}$，前项大于等于后项，数列单调递减

$a_1 \geq a_2$，$a_3 \geq a_4$，$a_5 \geq a_6$，$a_7 \geq a_8$，$a_9 \geq a_{10}$

$(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_9 - a_{10}) \geq 0$，条件（1）充分

条件（2）${a_n}^2 \geq {a_{n+1}}^2$，即$(a_n - a_{n+1})(a_n + a_{n+1}) \geq 0$

$$\begin{cases} a_n - a_{n+1} \geq 0 \\ a_n + a_{n+1} \geq 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a_n - a_{n+1} \leq 0 \\ a_n + a_{n+1} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_9 - a_{10} \leq 0$，条件（2）不充分

跟学团 数列·基础知识

数列 依一定次序排成的一列数 $\{a_n\}$

数列的通项　数列的第n项a_n与其序号n之间的关系

$$\text{数列两大要素}\begin{cases} \text{数列某项的值：} a_n \\ \text{某项的序号：} a_n \text{的下标} n \end{cases}$$

数列前n项和S_n　从数列第一项a_1开始依次相加，至第n项a_n，这n项的和称为数列的前n项和.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

跟学团 数列·三项数列

数列基础 ★

三项数列 ★

等差数列
- 定义和性质
- 各项与下标间关系 ★
- S_n最值（数列过零点的项）
- 等差数列片段和

等比数列
- 定义和性质
- 各项与下标间关系
- 等比数列求和

常数列特值法

利用数列求代数式值

数列的推演
- 已知S_n求a_n
- a_n与a_{n+1}或a_{n-1}的递推 ★

跟学团 数列·三项数列

等差数列 如果一个数列从第二项起，每一项减去它的前一项所得的差都等于同一常数，即：

$$a_{n+1}-a_n=d$$

那么这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做等差数列的公差d.

如：1，2，3，4，5，……

等比数列 如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的比都等于同一常数，即

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$$

那么这个数列就叫做等比数列，这个常数就叫做等比数列的公比q（$q\neq 0$）

如：2，4，8，16，32，……

跟学团 数列 · 三项数列

。。。。。

1，2，3

【标志词汇】三项成等差数列⟺ $\begin{cases} \text{设为}a,b,c\text{，则有}2b=a+c \\ \text{设为}a-d,a,a+d\text{，自动满足} \end{cases}$

可以被用在任何知识点，等同于给出一个关于a，b，c的算式条件

三元乘法公式、二次方程的三个系数、三角形三边、立方体三条棱、应用题等

连续自然数：$n-1$，n，$n+1$

连续偶数/奇数：$n-2$，n，$n+2$（n为偶数/奇数）

跟学团 数列 · 三项数列

。。。。。

1，2，3　　　　　　　　2，6，18

【标志词汇】三项成等差数列⟺ $\begin{cases} \text{设为}a,b,c\text{，则有}2b=a+c \\ \text{设为}a-d,a,a+d\text{，自动满足} \end{cases}$

【标志词汇】三项成等比数列⟺ 设为a,b,c，则有$b^2=ac\ (b\neq 0)$

四项成等差/等比数列⟹其中连续三项成等差/等比

1，2，3，4

2，4，8，16

跟学团 数列·三项数列

【真题2000.01.06】若$\alpha^2,1,\beta^2$成等比数列，而$\frac{1}{\alpha},1,\frac{1}{\beta}$成等差数列，则$\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2}=$（ B ）.

A.$-\frac{1}{2}$或1　　B. $-\frac{1}{3}$或1　　C. $\frac{1}{2}$或1　　D. $\frac{1}{3}$或1　　E. $-\frac{1}{2}$

【标志词汇】$\alpha^2,1,\beta^2$三项成等比数列$\Leftrightarrow \alpha^2\beta^2=1^2=1 \quad \alpha\beta=\pm1$

【标志词汇】$\frac{1}{\alpha},1,\frac{1}{\beta}$三项成等差数列$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=2 \quad \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=2$，$\alpha+\beta=2\alpha\beta$

【标志词汇】给定a^2+b^2，ab，$a+b$和$a-b$中任意两个$\Rightarrow$ 利用完全平方公式可推出其余

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}=\frac{2\alpha\beta}{(2\alpha\beta)^2-2\alpha\beta}=\frac{1}{2\alpha\beta-1}=\begin{cases}1, & \alpha\beta=1\\ -\dfrac{1}{3}, & \alpha\beta=-1\end{cases}$$

跟学团 数列·三项数列

【真题2017.03】甲、乙、丙三种货车载重量成等差数列，两辆甲种车和一辆乙种车的载重量为95吨，一辆甲种车和三辆丙种车载重量为150吨，则甲、乙、丙分别各一辆车一次最多运送货物为（ E ）

A.125　　B.120　　C.115　　D.110　　E.105

【标志词汇】三项成等差数列$\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\text{设为}a,b,c\text{，则有}2b=a+c\\ \text{设为}a-d,a,a+d\text{，自动满足}\end{cases}$

设甲载重量为a吨，乙为b吨，丙为c吨 $\begin{cases}2b=a+c\\ 2a+b=95\\ a+3c=150\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=30\\ b=35\\ c=40\end{cases} \quad a+b+c=105$

设甲载重量为$a-d$吨，乙为a吨，丙为$a+d$吨

$$\begin{cases}2(a-d)+a=95\\ (a-d)+3(a+d)=150\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=35\\ d=5\end{cases} \quad (a-d)+a+(a+d)=3a=105$$

跟学团 数列 • 三项数列

【真题2014.01.18】（条件充分性判断）甲、乙、丙三人的年龄相同.（ C ）

（1）甲、乙、丙的年龄成等差数列. （2）甲、乙、丙的年龄成等比数列.

两条件单独均不能确保三人年龄相同，故联合.

【标志词汇】三项成等差数列⇔ 设为a,b,c，则有$2b=a+c$

【标志词汇】三项成等比数列⇔ 若为a,b,c，则有$b^2=ac\ (b\neq 0)$

【标志词汇】关于n个项的$n-1$个简单方程⇔这n个项的简单比例关系

$4b^2=(a+c)^2=a^2+2ac+c^2=4ac$

$a^2-2ac+c^2=(a-c)^2=0$ 故一定有$a=b=c$，三人年龄相同

跟学团 数列 • 三项数列

【真题2014.01.18】（条件充分性判断）甲、乙、丙三人的年龄相同.（ C ）

（1）甲、乙、丙的年龄成等差数列. （2）甲、乙、丙的年龄成等比数列.

【标志词汇】三项成等差数列⇔ 设为$a-d,a,a+d$，自动满足

【标志词汇】三项成等比数列⇔ 若为a,b,c，则有$b^2=ac\ (b\neq 0)$

设甲、乙、丙年龄分别为$a-d$、a、$a+d$.

$a^2=(a+d)(a-d)=a^2-d^2$

故一定有 $d=0$，说明三人年龄相同

【总结】既成等差数列又成等比数列的数列为非零常数列，它们的公比为1，公差为0.

跟学团 数列·三项数列

【真题2021.02】三位年轻人的年龄成等差数列，且最大与最小的两人年龄差的10倍是另一人的年龄，则三人中年龄最大的是（ C ）.

A.19　　B.20　　C.21　　D.22　　E.23

【标志词汇】三项成等差数列⇔$\begin{cases}\text{设为}a,b,c\text{，且}2b=a+c\\\text{设为}a-d,a,a+d\text{，自动满足}\end{cases}$

由小到大设三人年龄为$a-d$，a和$a+d$（a和d均为自然数）

$10[(a+d)-(a-d)]=20d=a$

三人年龄为$19d$，$20d$，$21d$

当$d=1$时三人中年龄最大的是21岁

跟学团 数列·三项数列

【真题2021.02】三位年轻人的年龄成等差数列，且最大与最小的两人年龄差的10倍是另一人的年龄，则三人中年龄最大的是（ C ）.

A.19　　B.20　　C.21　　D.22　　E.23

【标志词汇】三项成等差数列⇔$\begin{cases}\text{设为}a,b,c\text{，且}2b=a+c\\\text{设为}a-d,a,a+d\text{，自动满足}\end{cases}$

由小到大设三人年龄为a，b和c（均为自然数）

$\begin{cases}2b=a+c\\10(c-a)=b\end{cases}$　　$a:b:c=19:20:21$

【标志词汇】关于n个项的$n-1$个简单方程⇔这n个项的简单比例关系

跟学团 数列·三项数列

【真题2018.19】甲、乙、丙三人的年收入成等比数列.则能确定乙的年收入的最大值.（　）

（1）已知甲、丙两人的年收入之和.

（2）已知甲、丙两人的年收入之积.

已知$a \Leftrightarrow a$为一确定常数

【标志词汇】<u>三项成等比数列⇔ 若为a,b,c，则有$b^2=ac$ （各项均为正）</u>

条件（1）已知$a+c$的值　　题干要求确定：$b=\sqrt{ac}$ 的最大值

【标志词汇】<u>限制为正+求积的最大值 ⇒ 凑“和定”后用均值定理</u>

$ac \le \left(\frac{a+c}{2}\right)^2$　　$b=\sqrt{ac} \le \frac{a+c}{2}$

可确定乙的年收入的最大值为$\frac{a+c}{2}$，当$a=c$时可取到此最大值，条件（1）充分

跟学团 数列·三项数列

【真题2018.19】甲、乙、丙三人的年收入成等比数列.则能确定乙的年收入的最大值.（ D ）

（1）已知甲、丙两人的年收入之和.

（2）已知甲、丙两人的年收入之积.

已知$a \Leftrightarrow a$为一确定常数

【标志词汇】<u>三项成等比数列⇔ 若为a,b,c，则有$b^2=ac$ （各项均为正）</u>

题干要求确定：$b=\sqrt{ac}$ 的最大值

条件（2）已知ac的值，则乙的年收入$b=\sqrt{ac}$为已知常数

常数的最大值最小值均为它本身，故条件（2）亦充分.

跟学团 数列·三项数列

数列基础 ★

三项数列 ★

等差数列
- 定义和性质
- 各项与下标间关系 ★
- S_n最值（数列过零点的项）
- 等差数列片段和

等比数列
- 定义和性质
- 各项与下标间关系
- 等比数列求和

常数列特值法

利用数列求代数式值

数列的推演
- 已知S_n求a_n
- a_n与a_{n+1}或a_{n-1}的递推 ★

跟学团 等差数列

数列基础 ★

三项数列 ★

等差数列
- 定义、判定与性质
- 各项与下标间关系 ★
- S_n最值（数列过零点的项）
- 等差数列片段和

等比数列
- 定义和性质
- 各项与下标间关系
- 等比数列求和

常数列特值法

利用数列求代数式值

数列的推演
- 已知S_n求a_n
- a_n与a_{n+1}或a_{n-1}的递推 ★

跟学团 等差数列·基础知识·定义

次序	第1项	第2项	第3项	第4项	⋯	第n项	⋯
数值	1	2	3	4	⋯	n	⋯
数值	5	10	15	20	⋯	$5n$	⋯
一般表达	a_1	a_1+d	a_1+2d	a_1+3d		$a_1+(n-1)d$	

等差数列 如果一个数列从第二项起，每一项减去它的前一项所得的差都等于同一常数，即：$a_{n+1}-a_n=d$，那么这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做等差数列的公差d.

数列的通项 数列的第n项a_n与其序号n之间的关系

等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$

a_1和$d\Longrightarrow$等差数列的通项公式$\Longrightarrow$等差数列中的任何一项.

跟学团 等差数列·基础知识·通项

【举例】已知等差数列$\{a_n\}$，其中$2a_2+a_5=24$， $a_6=17$，那么299是数列$\{a_n\}$的第__100__项?

a_1和$d\Longrightarrow$等差数列的通项公式$\Longrightarrow$等差数列中的任何一项.

$\boxed{a_1\text{和}d}$

↓

$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d}$

↓

代入n值可求a_n值
代入a_n值可求n值

将所有项用a_1和d表示，联立求出a_1和d

$$\begin{cases}2(a_1+d)+a_1+4d=24=3a_1+6d\\a_1+5d=17\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1=2\\d=3\end{cases}\qquad a_n=2+3(n-1)=3n-1$$

$299=3n-1$， $n=100$，

等差数列确定的下标$\boldsymbol{n}$（序号）$\Longleftrightarrow$确定的项值$\boldsymbol{a_n}$

跟学团 等差数列·基础知识

等差数列的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$

公差$d > 0 \Leftrightarrow$递增数列

公差$d < 0 \Leftrightarrow$递减数列

公差$d = 0 \Leftrightarrow$常数列

数列前n项和S_n 从数列第一项a_1开始依次相加，至第n项a_n，这n项的和称为数列的前n项和.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

等差数列前n项和公式 $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + \frac{2a_1-d}{2}n$

跟学团 等差数列·基础知识

等差数列的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$

等差数列前n项和公式 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$

【举例】等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_6 = a_6$，则$\frac{a_5}{a_4}$的值为__2__.

$$S_6 = a_6$$

$$6a_1 + 15d = a_1 + 5d$$

$$5a_1 = -10d，a_1 = -2d$$

$$\frac{a_5}{a_4} = \frac{a_1+4d}{a_1+3d} = \frac{-2d+4d}{-2d+3d} = 2$$

跟学团 等差数列·基础知识·判定

定义角度 任意相邻两项之差$a_{n+1}-a_n$是否为常数，若为常数，则$\{a_n\}$为等差数列

从表达式代数特征角度

通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)=dn+m$（其中$m=a_1-d$）

形似关于n的一次函数

判断下列通项对应的数列是否为等差数列

（1）$a_n=3n+2$	（2）$a_n=-n$	（3）$a_n=5$	（4）$a_n=n^2+1$
$d=3$	$a_n=(-1)n+0$	$a_n=0\cdot n+5$	非等差数列
$a_1-d=2$，$a_1=5$	$d=-1$，$a_1=-1$	$d=0$，$a_1=5$	
$5,8,11,14,17\cdots$	$-1,-2,-3,-4,-5\cdots$	$5,5,5,5,5\cdots$	

跟学团 等差数列·基础知识·判定

从表达式代数特征角度

前n项和：$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+\dfrac{2a_1-d}{2}n=An^2+Bn$

形似关于n的二次函数，其中A与B均可能为0，且一定不含常数项

当$A=B=0$时　即$a_1=d=0$，$S_n=0$　数列为$a_n=0$的常数列

当$A=0$，$B\neq0$时　即$d=0$，$a_1\neq0$，$S_n=na_1$　为非零常数列，如1，1，1，1，1，1⋯

当$A\neq0$，$B=0$时　即$2a_1=d\neq0$，$S_n=\dfrac{d}{2}n^2$　如1，3，5，7，9，11⋯ $S_n=n^2$

跟学团 等差数列 • 基础知识 • 判定

从表达式代数特征角度

前n项和：$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + \frac{2a_1 - d}{2}n = An^2 + Bn$ $\begin{cases} A = \frac{d}{2} \\ B = \frac{2a_1 - d}{2} \end{cases}$

形似关于n的二次函数，其中A与B均可能为0，且一定不含常数项

判断下列前n项和对应的数列是否为等差数列

（1）$S_n = 4n^2 + n$ （2）$S_n = -2n^2$

$A = \frac{d}{2} = 4$，$d = 8$

$B = \frac{2a_1 - d}{2} = \frac{2a_1 - 8}{2} = 1$，$a_1 = 5$

$5,13,21,29,38 \cdots$

$A = \frac{d}{2} = -2$，$d = -4$

$B = \frac{2a_1 - d}{2} = \frac{2a_1 + 4}{2} = 0$，$a_1 = -2$

$-2,-6,-10,-14,-18 \cdots$

跟学团 等差数列 • 基础知识 • 判定

从表达式代数特征角度

前n项和：$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + \frac{2a_1 - d}{2}n = An^2 + Bn$ $\begin{cases} A = \frac{d}{2} \\ B = \frac{2a_1 - d}{2} \end{cases}$

形似关于n的二次函数，其中A与B均可能为0，且一定不含常数项

判断下列前n项和对应的数列是否为等差数列

（3）$S_n = 5n$ （4）$S_n = n^2 + 1$

$A = \frac{d}{2} = 0$，$d = 0$

$B = \frac{2a_1 - d}{2} = \frac{2a_1}{2} = 5$，$a_1 = 5$

$5,5,5,5,5 \cdots$

非等差数列

跟学团 等差数列·基础知识·判定

【**真题2019.25**】（条件充分性判断）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则$\{a_n\}$为等差数列.（ A ）

（1）$S_n = n^2 + 2n$，$n = 1,2,3$.　　（2）$S_n = n^2 + 2n + 1$，$n = 1,2,3$.

【类型判断】不可能联合

前n项和表达式代数特征：$S_n = \frac{d}{2}n^2 + \frac{2a_1 - d}{2}n = An^2 + Bn$

形似关于n的二次函数，其中A与B均可能为0，且一定不含常数项

A与B可能单独或同时为零

（1）$S_n = 0$，$n = 1,2,3\cdots$　　0，0，0，0，0，0⋯

（2）$S_n = n^2$，$n = 1,2,3\cdots$　　1，3，5，7，9，11⋯

（3）$S_n = 2n$，$n = 1,2,3\cdots$.　　2，2，2，2，2，2⋯

跟学团 等差数列

数列基础 ★

三项数列 ★

等差数列
- 定义、判定与性质
- 各项与下标间关系 ★
- S_n最值（数列过零点的项）
- 等差数列片段和

常数列特值法

利用数列求代数式值

数列的推演
- 已知S_n求a_n
- a_n与a_{n+1}或a_{n-1}的递推 ★

等比数列
- 定义和性质
- 各项与下标间关系
- 等比数列求和

跟学团 等差数列·下标

等差数列 $a_{n+1}-a_n=d$　　**等差数列的通项公式** $a_n=a_1+(n-1)d$

$$a_1\xrightarrow{+d}a_2\xrightarrow{+d}a_3\xrightarrow{+d}a_4\xrightarrow{+d}a_5\xrightarrow{+d}a_6\cdots\xrightarrow{+d}a_m\cdots\xrightarrow{+d}a_n\cdots$$

$a_n=a_1+(n-1)d$

$a_m=a_1+(m-1)d$

$a_n-a_m=(n-m)d$

求公差 $d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$　　求某一项/通项 $a_n=a_m+(n-m)d$

跟学团 等差数列·下标

【举例】已知数列$\{a_n\}$为等差数列，其中$a_{2015}=57$， $a_{2021}=75$，则公差$d=$__3__

求公差 $d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}=\dfrac{a_{2021}-a_{2015}}{2021-2015}=\dfrac{75-57}{2021-2015}=3$

【举例】已知数列$\{a_n\}$为等差数列，其中$a_{2015}=57$， $a_{2021}=75$，则通项$a_n=$__$3n-5988$__

求某一项/通项 $a_n=a_m+(n-m)d$

$$=a_{2015}+3(n-2015)=57+3n-6045=3n-5988$$

$$=a_{2021}+3(n-2021)=75+3n-6063=3n-5988$$

跟学团 等差数列·下标

【标志词汇】三项成等差数列⇔ $\begin{cases} \text{设为}a,b,c\text{，则有}2b=a+c \\ \text{设为}a-d,a,a+d\text{，自动满足} \end{cases}$ b称为等差中项

a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7，a_8，$a_9\cdots$

$a_4+a_6=2a_5$ $a_3+a_7=2a_5$ $a_2+a_8=2a_5$ $a_1+a_9=2a_5$

等差数列中项的性质

跟学团 等差数列·下标

等差数列下标和相等的两项之和相等 等号左右下标和相等，项数也要相等

a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7，a_8，$a_9\cdots$

$\underline{a_5+a_5=a_4+a_6=a_3+a_7=a_2+a_8=a_1+a_9}$

a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7，a_8，a_9，$a_{10}\cdots$

$\underline{a_5+a_6=a_4+a_7=a_3+a_8=a_2+a_9=a_1+a_{10}}$

a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，$a_{5.5}$，a_6，a_7，a_8，a_9，$a_{10}\cdots$

跟学团 等差数列·下标

【举例】已知数列$\{a_n\}$为等差数列，其中$a_1+a_7=8$，则$a_4=$ 4

等差数列下标和相等的两项之和相等 等号左右下标和相等，项数也要相等

$a_1+a_7=2a_4=8$， $a_4=4$

【举例】已知数列$\{a_n\}$为等差数列，其中$a_1+a_7=8$，$a_6=5$，则$a_8=$ 6

$a_1+a_7=2a_4=8$， $a_4=4$

a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7，a_8，$a_9\cdots$ 等差数列<u>等距离</u>取出的项亦构成等差数列

相邻下标和之差相等

$a_4+a_8=2a_6=10$， $a_8=6$

跟学团 等差数列·下标

【真题2013.01.13】已知$\{a_n\}$为等差数列，若a_2与a_{10}是方程$x^2-10x-9=0$的两个根，则$a_5+a_7=$（D ）

A. -10 B. -9 C. 9 D. 10 E. 12

【标志词汇】<u>等差数列某几项和 ⟹ 下标和相等的两项之和相等</u>

【标志词汇】<u>给出方程求两根 ⟹ 韦达定理求值.</u>

$$a_2+a_{10}=-\frac{-10}{1}=10=a_5+a_7$$

跟学团 等差数列·下标

等差数列下标和相等的<u>同数量项</u>之和相等 两组项下标和相等，项数相同，则这两组项的和相等

a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7，a_8，$a_9\cdots$ 等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$

$a_2=a_1+d$

$a_3=a_1+2d$

$a_4=a_1+3d$

$a_5=a_1+4d$

$a_6=a_1+5d$

$a_7=a_1+6d$

$a_8=a_1+7d$

$a_9=a_1+8d$

$a_3+a_7=2a_5$

$a_3+a_5+a_7=a_2+a_4+a_9$

$3+5+7=2+4+9$

跟学团 等差数列·下标关系在S_n中应用

等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$

等差数列前n项和公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+\dfrac{2a_1-d}{2}n$

$$=\frac{n(a_2+a_{n-1})}{2}=\frac{n(a_3+a_{n-2})}{2}=\cdots$$

$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n$

倒序相加

$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}\cdots+a_3+a_2+a_1$

$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\cdots+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1)$

$=n(a_1+a_n)$ **【标志词汇】**<u>等差数列某几项和 ⇒ 下标和相等的两项之和相等</u>

跟学团 等差数列·下标关系在S_n中应用

【模拟题】已知数列$\{a_n\}$为等差数列，且$a_3+a_{12}=8$，则数列$\{a_n\}$的前14项和$S_{14}=$（ C ）.

A. 36　　B. 48　　C. 56　　D. 64　　E. 72

等差数列前n项和公式　$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(a_2+a_{n-1})}{2}=\dfrac{n(a_3+a_{n-2})}{2}=\cdots$

$$S_{14}=\frac{14(a_1+a_{14})}{2}=\frac{14(a_2+a_{13})}{2}=\frac{14(a_3+a_{12})}{2}=\cdots$$

$$=\frac{14\times 8}{2}=56$$

跟学团 等差数列·下标关系在S_n中应用

【模拟题】等差数列$\{a_n\}$中前$a_1+a_2+\cdots+a_6=43$，$a_{23}+a_{24}+\cdots+a_{28}=53$，则$S_{28}=$（ A ）

A.224　　B.223　　C.225　　D.227　　E.228

等差数列前n项和公式　$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(a_2+a_{n-1})}{2}=\dfrac{n(a_3+a_{n-2})}{2}=\cdots$

$(a_1+a_{28})+(a_2+a_{27})+\cdots+(a_6+a_{23})=43+53=96$ 首尾配对求和

【标志词汇】<u>等差数列某几项和 $\Rightarrow$ 下标和相等的两项之和相等</u>

$a_1+a_{28}=a_2+a_{27}=\cdots=a_6+a_{23}$　　$a_1+a_{28}=\dfrac{96}{6}=16$

$$S_{28}=\frac{28\times(a_1+a_{28})}{2}=\frac{28\times 16}{2}=224$$

跟学团 等差数列·下标关系在S_n中应用

【模拟题】等差数列$\{a_n\}$中前6项和为43，后6项和为53，所有项和为224，则这个数列的项数是（ E ）

A.22　　B.23　　C.25　　D.27　　E.28

等差数列前n项和公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(a_2+a_{n-1})}{2}=\dfrac{n(a_3+a_{n-2})}{2}=\cdots$

$a_1+a_2+\cdots+a_6=43$

$a_n+a_{n-1}+\cdots+a_{n-5}=53$

$$\underline{(a_1+a_n)}+\underline{(a_2+a_{n-1})}+\cdots+\underline{(a_6+a_{n-5})}=96$$

$$a_1+a_n=\frac{96}{6}=16$$

$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n\times 16}{2}=224$　　$n=28$

跟学团 等差数列·下标关系在S_n中应用

等差数列前n项和公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(a_2+a_{n-1})}{2}=\dfrac{n(a_3+a_{n-2})}{2}=\cdots$

$S_9=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9$

$2a_5$

$S_9=\dfrac{9(a_1+a_9)}{2}=\dfrac{9(a_2+a_8)}{2}=\cdots=\dfrac{9\times 2a_5}{2}=9a_5$　　$a_5=\dfrac{1}{9}S_9$

$S_n=n\cdot a_{中间项}$　<u>前n项和等于中间项乘以项数</u>　　$a_{中间项}=\dfrac{1}{n}S_n$

跟学团 等差数列·下标关系在S_n中应用

【真题2018.17】设$\{a_n\}$为等差数列，则能确定$a_1+a_2+\cdots+a_9$的值.（ B ）

（1）已知a_1的值　　　　　　（2）已知a_5的值

【标志词汇】 <u>$a_{\text{中间项}} \Leftrightarrow$ 对应的S_n</u>　　$S_9=9a_5$

【拓展1】设$\{a_n\}$为等差数列，则能确定$a_1+a_2+\cdots+a_9$的值.（ B ）

（1）已知a_1的值　　　　　　（2）已知a_4+a_6的值

【标志词汇】<u>等差数列某几项和 ⟹ 下标和相等的两项之和相等</u>

【拓展2】设$\{a_n\}$为等差数列，则能确定$a_1+a_2+\cdots+a_9$的值.（ C ）

（1）已知a_1的值　　　　　　（2）已知a_6的值

跟学团 等差数列·下标关系在S_n中应用

等差数列前n项和公式　$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(a_2+a_{n-1})}{2}=\dfrac{n(a_3+a_{n-2})}{2}=\cdots$

$S_8=a_1+a_2+a_3+a_4\qquad+a_5+a_6+a_7+a_8$

$2a_{4.5}$

$S_8=\dfrac{9(a_1+a_8)}{2}=\dfrac{9(a_2+a_7)}{2}=\dfrac{n(a_3+a_6)}{2}=\dfrac{9\times(a_4+a_5)}{2}$

对于奇数个项：前n项和等于中间项乘以项数

对于偶数数个项: $S_n=\dfrac{n}{2}\cdot$(中间两项之和)

跟学团 等差数列·下标关系在S_n中应用

【模拟题】已知$a_8=11$ 和$a_{13}=21$，求S_{15}和S_{20}分别是（ A ）.

A. 165，320　　B. 165，340　　C. 185，300　　D. 185，320　　E. 205，320

对于等差数列前奇数个项，有$S_n=n\cdot a_{中间项}$

$S_{15}=15a_8=15\times 11=165$

对于等差数列前偶数个项，有$S_n=\frac{n}{2}$(中间两项之和)

$S_{20}=\frac{20}{2}(a_{10}+a_{11})=10(a_{13}+a_8)=10(11+21)=320$

跟学团 等差数列·下标关系在S_n中应用

【真题2009.01.25】$\{a_n\}$的前n项和S_n与$\{b_n\}$的前n项和T_n满足$S_{19}:T_{19}=3:2$（ C ）

（1）$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是等差数列　　（2）$a_{10}:b_{10}=3:2$

【类型判断】必须联合.条件（1）条件（2）单独均不充分，考虑联合.

对于等差数列前奇数个项，有$S_n=n\cdot a_{中间项}$

$$T_{19}=19b_{10}$$

$$a_{10}\quad b_{10}\qquad\qquad S_{19}\quad T_{19}$$

$$S_{19}=19a_{10}$$

$$\frac{S_{19}}{T_{19}}=\frac{19a_{10}}{19b_{10}}=\frac{3}{2}$$

可记结论：前n项和之比等于中间项之比

跟学团 等差数列·下标关系在S_n中应用

【模拟题】等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n，T_n，若$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1}$，则$\frac{a_7}{b_7}$的值为（B）.

$A.-\frac{13}{20}$　　$B.\frac{13}{20}$　　$C.\frac{13}{10}$　　$D.\frac{1}{3}$　　$E.\frac{15}{23}$

【标志词汇】 $\underline{a_{\text{中间项}} \Leftrightarrow \text{对应的}S_n}$ $\begin{cases} S_n=n\cdot a_{\text{中间项}} \\ \text{前}n\text{项和之比=中间项之比} \end{cases}$

$S_{13}=13a_7$，$T_{13}=13b_7$　　$\frac{a_7}{b_7}=\frac{13a_7}{13b_7}=\frac{S_{13}}{T_{13}}$

将$n=13$代入得$\frac{S_{13}}{T_{13}}=\frac{2n}{3n+1}=\frac{2\times 13}{3\times 13+1}=\frac{13}{20}=\frac{a_7}{b_7}$.

跟学团 等差数列·下标关系在S_n中应用

【模拟题】等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n，T_n，若$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1}$，则$\frac{a_8}{b_8}$的值为（E）.

$A.-\frac{13}{20}$　　$B.\frac{13}{20}$　　$C.\frac{13}{10}$　　$D.\frac{1}{3}$　　$E.\frac{15}{23}$

【标志词汇】 $\underline{a_{\text{中间项}} \Leftrightarrow \text{对应的}S_n}$ $\begin{cases} S_n=n\cdot a_{\text{中间项}} \\ \text{前}n\text{项和之比=中间项之比} \end{cases}$

$S_{15}=15a_8$，$T_{15}=15b_8$　　$\frac{a_8}{b_8}=\frac{S_{15}}{T_{15}}$

将$n=15$代入得$\frac{S_{15}}{T_{15}}=\frac{2n}{3n+1}=\frac{2\times 15}{3\times 15+1}=\frac{30}{46}=\frac{15}{23}=\frac{a_8}{b_8}$.

跟学团 等差数列

等差数列

- 定义、判定与性质
- 各项与下标间关系
  - $d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$ $\quad a_n=a_m+(n-m)d$
  - 等差数列下标和相等的同数量项之和相等
  - 两组项下标和相等，项数相同，则这两组项的和相等
  - $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(a_2+a_{n-1})}{2}=\dfrac{n(a_3+a_{n-2})}{2}=\cdots$ 首尾配对求和
  - 对于等差数列前奇数个项，有$S_n=n\cdot a_{中间项}$
  - 对于等差数列前偶数个项，有$S_n=\dfrac{n}{2}$(中间两项之和)
  - 前n项和之比=中间项之比