跟学团 恒等变形·乘法公式

代入求值

↑

整式

单项式：数字与字母的乘积
多项式：几个单项式的和

四则运算 →

- 加减法：合并同类项
- 乘法：分别相乘再相加
  - 注意展开式中各项的构成
  - **乘法公式**
- 除法
  竖式除法
  - 整除
  - 带余除法
  - 分式

↓ 开方运算

根式

跟学团 恒等变形·乘法公式

$$(a+b)\cdot(a-b)\ =a\cdot a-ab+ab+(-b)\cdot b=a^2-b^2$$

$$\begin{aligned}(x+1)^3 &= (x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+1)\\ &= (x^2+2x+1)\cdot(x+1)\\ &= (x^2+2x+1)\cdot x+(x^2+2x+1)\cdot 1\\ &= x^3+3x^2+3x+1\end{aligned}$$

跟学团 恒等变形·乘法公式

二元乘法公式

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ $\begin{cases}(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\end{cases}$

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$ $\begin{cases}a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\\a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\end{cases}$

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$ $\begin{cases}(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{cases}$

跟学团 恒等变形·乘法公式

三元乘法公式

$\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

跟学团 恒等变形·乘法公式 请熟读并背诵全文

二元乘法公式

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ ★ 平方差公式

$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$ ★ 完全平方公式
- 整体思维
- 倒数形态
- 二次多项式配平方

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

$a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$

跟学团 恒等变形·乘法公式

$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$ ★ 完全平方公式

$a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$

a^2+b^2，ab和$a+b$这三个多项式 $\Rightarrow$ **二推一**

①给出a^2+b^2与ab，求$a+b$　　$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

②给出$a+b$与ab，求a^2+b^2　　$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

③给出$a+b$与a^2+b^2，求ab　　$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)$

跟学团 恒等变形·乘法公式

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ ★ 完全平方公式

$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$

$a^2 + b^2$，ab和$a - b$这三个多项式 $\Rightarrow$ **二推一**

①给出$a^2 + b^2$与ab，求$a - b$　　$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

②给出$a - b$与ab，求$a^2 + b^2$　　$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$

③给出$a - b$与$a^2 + b^2$，求ab　　$2ab = a^2 + b^2 - (a - b)^2$

跟学团 恒等变形·乘法公式

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ ★ 完全平方公式

$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$

$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$

两式相加得：$(a - b)^2 + (a + b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

两式相减得：$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

$a^2 + b^2$，ab，$a + b$和$a - b$这四个多项式 $\Rightarrow$ **任意两个可推出其余**

平方和、乘积、和、差

跟学团 恒等变形·乘法公式

【真题2010.01.24】（条件充分性判断）设a，b为非负实数，则$a+b\leq\frac{5}{4}$.（ C ）

（1）$ab\leq\frac{1}{16}$. 乘积形式　　　　（2）$a^2+b^2\leq1$. 平方和形式

条件（1）：取特值$a=0$，$b=2$　满足$ab=0\leq\frac{1}{16}$，但$a+b=2>\frac{5}{4}$

条件（2）：取特值$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$b=\frac{\sqrt{2}}{2}$　满足$a^2+b^2\leq1$，但$a+b=\sqrt{2}>\frac{5}{4}$

联合条件（1）与条件（2）：$ab\leq\frac{1}{16}$，$a^2+b^2\leq1$

【标志词汇】给定a^2+b^2，ab，$a+b$和$a-b$中任意两个⟹ 利用完全平方公式推出其余

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\leq1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}=\frac{18}{16}<\frac{25}{16}=\left(\frac{5}{4}\right)^2$$

跟学团 恒等变形·乘法公式

【模拟题】已知$(2020-a)(2019-a)=2000$，那么$(2020-a)^2+(2019-a)^2=$（ C ）

A 3998　　B 4000　　C 4001　　D 4002　　E 5000

【标志词汇】不同代数式间有较大重复部分 ⟹ 将重复的部分看做一个整体

设$2020-a=m$，$2019-a=n$　则有$mn=2000$，$m-n=1$

题目转化为：已知$mn=2000$，$m-n=1$，求m^2+n^2取值.

【标志词汇】给定m^2+n^2，mn，$m+n$和$m-n$中任意两个⟹ 利用完全平方公式推出其余

$$m^2+n^2-2mn=(m-n)^2$$

$$m^2+n^2=(m-n)^2+2mn=1+2mn=4001$$

跟学团 恒等变形·乘法公式

【模拟题】已知$(99-a)(101+a)=2$，那么$(99-a)^2+(101+a)^2=$（ B ）

A. 39990　　B. 39996　　C. 40000　　D. 40002　　E. 40004.

【标志词汇】<u>不同代数式间有较大重复部分 ⟹ 将重复的部分看做一个整体</u>

设$99-a=m$，$101+a=n$　则有$mn=2$，$m+n=(99-a)+(101+a)=200$

题目转化为：已知$m+n=200$，$mn=2$，求m^2+n^2的值.

【标志词汇】<u>给定m^2+n^2，mn，$m+n$和$m-n$中任意两个⟹ 利用完全平方公式推出其余</u>

$m^2+n^2+2mn=(m+n)^2$

$m^2+n^2=(m+n)^2-2mn\ =40000-4=39996$

跟学团 恒等变形·乘法公式

$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$ ★ 完全平方公式
- 整体思维：任意二推所有
- <u>倒数形态</u>
- 二次多项式配平方

a,b互为倒数时：$a^2\pm 2+\left(\frac{1}{a}\right)^2=a^2\pm 2a\cdot\frac{1}{a}+\left(\frac{1}{a}\right)^2=\left(a\pm\frac{1}{a}\right)^2$

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+2+\left(\frac{1}{a}\right)^2$

$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=a^2-2+\left(\frac{1}{a}\right)^2$

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4=a^2+2+\left(\frac{1}{a}\right)^2-4=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$

建立$a+\frac{1}{a}$与$a-\frac{1}{a}$之间的关系

跟学团 恒等变形 • 乘法公式

倒数形态的完全平方公式：$a^2 \pm 2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2 = a^2 \pm 2a \cdot \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \left(a \pm \frac{1}{a}\right)^2$

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + 2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2$$

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2 = a^2 - 2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2$$

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 - 4 = \left(a-\frac{1}{a}\right)^2$$

$$\left|a+\frac{1}{a}\right| \underset{\text{平方后加4，再开方}}{\overset{\text{平方后减4，再开方}}{\rightleftharpoons}} \left|a-\frac{1}{a}\right|$$

跟学团 恒等变形 • 乘法公式

【模拟题】已知$x^2 - 5x + 1 = 0$，则$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 =$（ C ）

A. 29　　B. 19　　C. 21　　D. $\sqrt{21}$　　E. $\sqrt{19}$

【标志词汇】给定方程$x^2 - ax \pm 1 = 0$，求x与$\frac{1}{x}$组成的算式 $\Longrightarrow$ 两边同除x化为$x \pm \frac{1}{x} = a$

原方程两边同除以x得：$x - 5 + \frac{1}{x} = 0$，$x + \frac{1}{x} = 5$

题目转化为：已知$x + \frac{1}{x} = 5$，求$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$

平方：$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 25$　　减4：$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 4 = \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 25 - 4 = 21$

跟学团 恒等变形·乘法公式

【模拟题】已知$x^2-5x+1=0$，则$\left|x-\frac{1}{x}\right|=$（ D ）

A. 2　　B. 4　　C. $2\sqrt{7}$　　D. $\sqrt{21}$　　E. $\sqrt{19}$

【标志词汇】给定方程$x^2-ax\pm1=0$，求x与$\frac{1}{x}$组成的算式 $\Rightarrow$ 两边同除x化为$x\pm\frac{1}{x}=a$

题目转化为：已知$x+\frac{1}{x}=5$，求$\left|x-\frac{1}{x}\right|$　**平方后减4，再开方：$\sqrt{5^2-4}=\sqrt{21}$**

平方：$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=25$

减4：$x^2+\frac{1}{x^2}+2-4=21$　开方：$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}=\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}=\left|x-\frac{1}{x}\right|=\sqrt{21}$

跟学团 恒等变形·乘法公式

$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$ ★ 完全平方公式 $\begin{cases}\text{整体思维：任意二推所有}\\ \text{倒数形态}\\ \underline{\text{二次多项式配平方}}\end{cases}$

【真题1998.01.06】设实数x,y适合等式$x^2-4xy+4y^2+\sqrt{3}x+\sqrt{3}y-6=0$，则$x+y$的最大值为（ C ）. **凑配完全平方式求最值**

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{2}$　　E. $3\sqrt{3}$

$\underline{x^2-4xy+4y^2}+\sqrt{3}x+\sqrt{3}y-6=(x-2y)^2+\sqrt{3}(x+y)-6=0$

$x+y=\frac{6-(x-2y)^2}{\sqrt{3}}\le\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

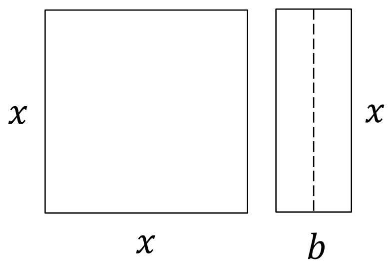
跟学团 恒等变形·乘法公式

。。。。。

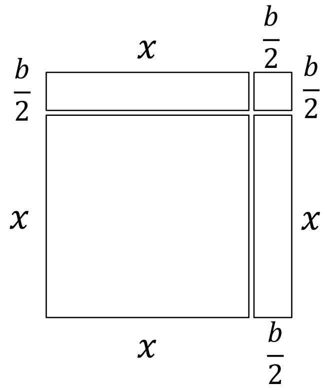
$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ ★ 完全平方公式

- 整体思维：任意二推所有
- 倒数形态
- <u>二次多项式配平方</u>

二次多项式配平方 <u>将一个二次多项式化为一个一次多项式的平方与一个常数的和.</u>



面积：$x^2 + bx$



面积：$(x + \frac{b}{2})^2$

跟学团 恒等变形·乘法公式

。。。。。

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ ★ 完全平方公式

- 整体思维：任意二推所有
- 倒数形态
- <u>二次多项式配平方</u>

二次多项式配平方 <u>将一个二次多项式化为一个一次多项式的平方与一个常数的和.</u>

$$x^2 + bx = x^2 + 2\cdot\frac{b}{2}x \boxed{+\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = (x + \frac{b}{2})^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

加上一次项系数一半的平方，后再减去一次项系数一半的平方

跟学团 恒等变形·乘法公式

【举例】把二次多项式$x^2+6x-16$配平方

$x^2+6x-16$ 加上x系数一半的平方，后再减去x系数一半的平方

$$=x^2+6x+\left(\frac{6}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2-16$$

$$=\left(x+\frac{6}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2-16$$

$$=(x+3)^2-25$$

$$=(x+3)^2-5^2$$

$$=(x+3+5)(x+3-5)$$

$$=(x+8)(x-2)$$

跟学团 恒等变形·乘法公式

【模拟题】已知x^2-3x+a是一个完全平方式，则$a=$（ D ）.

A. $\frac{8}{3}$ B. 2 C. 3 D. $\frac{9}{4}$ E. 4

【标志词汇】完全平方 $\begin{cases}\text{完全平方数} \Rightarrow \text{穷举法} \\ \text{完全平方式} \Rightarrow \text{配平方}\end{cases}$ 配平方：$x^2+bx=(x+\frac{b}{2})^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$

$$x^2-3x+a=x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+a=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+a-\frac{9}{4}$$

这是一个完全平方式 $\Leftrightarrow a-\frac{9}{4}=0$ $a=\frac{9}{4}$

跟学团 恒等变形·乘法公式

三元乘法公式

$\frac{1}{2}[\boxed{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}]=\boxed{a^2+b^2+c^2}-\boxed{ab-bc-ac}$

$ab+bc+ac=a^2+b^2+c^2-\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]$

$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]+(ab+bc+ac)$

$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2$，$a^2+b^2+c^2$和$ab+bc+ac$这三个多项式 $\Rightarrow$ 二推一

跟学团 恒等变形·乘法公式

【真题2008.01.03】若$\triangle ABC$的三边a,b,c满足$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$，则$\triangle ABC$为（ C ）.

A. 等腰三角形　B. 直角三角形　C. 等边三角形　D. 等腰直角三角形　E. 以上都不是

$\underline{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}$，$\underline{a^2+b^2+c^2}$和$\underline{ab+bc+ac}$这三个多项式 $\Rightarrow$ 二推一

$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]+(ab+bc+ac)$

$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0$

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$

$=0 \quad =0 \quad =0$

$a=b=c$　$\triangle ABC$为等边三角形.

【真题2009.10.23】

跟学团 整式、分式与根式

三元乘法公式

$\boxed{a^2+b^2+c^2}+\boxed{2ab+2bc+2ac}=\boxed{(a+b+c)^2}$

$2ab+2bc+2ac=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$

$\boxed{a^2+b^2+c^2}=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)$

$(a+b+c)^2$，$ab+bc+ac$和$a^2+b^2+c^2$三个多项式 $\Rightarrow$ 二推一

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(\boxed{a^2+b^2+c^2}-ab-bc-ac)$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)[(a+b+c)^2-3ab-3bc-3ac]$

跟学团 恒等变形·乘法公式

三元乘法公式

$\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]=\boxed{a^2+b^2+c^2}\boxed{-ab-bc-ac}$

$(a+b+c)^2=\boxed{a^2+b^2+c^2}\boxed{+2ab+2bc+2ac}$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(\boxed{a^2+b^2+c^2}\boxed{-ab-bc-ac})$

跟学团 恒等变形·乘法公式

【真题2010.10.02】若实数a,b,c满足$a^2+b^2+c^2=9$，则$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$的最大值是（ B ）. **凑配完全平方式求最值**

A. 21　　B. 27　　C. 29　　D. 32　　E. 39

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$=2a^2+2b^2+2c^2\boxed{-2ab-2bc-2ca}$ $2ab+2bc+2ac=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$

$=2(a^2+b^2+c^2)-[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)]$

$=3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2$

$=27-(a+b+c)^2$

当$a+b+c=0$时，$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$可取得最大值27.

跟学团 恒等变形·乘法公式

整体思维
倒数形态
二次多项式配平方

二元乘法公式

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$　　$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$　　$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

三元乘法公式

$$\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

跟学团 恒等变形·因式分解

- 恒等变形
  - 求因式（因式分解）
    - 乘法公式应用
    - 因式定理法
    - 十字相乘法
    - 待定系数法
  - 求系数

跟学团 恒等变形·因式分解

因数分解 $42=2\times3\times7$

因式分解 把一个多项式恒等变形分解成几个整式的积的形式，且分解到不能再分解为止.

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(a+b)(a+b)$$

$$x^4-1=(x^2)^2-1^2=(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x+1)(x-1)$$

乘法展开式中各项的构成 两个多项式中的m次方项和n次方项的乘积将得到$m+n$次方项

跟学团 恒等变形·因式分解

(1) 提： 提公因式.

$ka+kb+kc=k(a+b+c)$.

(2) 看： 看多项式是否符合乘法公式

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ $\qquad$ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

(3) 代入： 对于已知关于x的多项式，分别依次代入$x=\pm1$，$x=\pm2$，$x=\pm3$

若代入$x=1$，多项式为0，则多项式有因式$x-1$

(4) 算： 十字相乘、待定系数等方法运算求解.

跟学团 恒等变形·因式分解

【模拟题】n为大于1的任意正整数，则n^3-n必有因数（ C ）.

A. 4 $\qquad$ B. 5 $\qquad$ C. 6 $\qquad$ D. 7 $\qquad$ E. 8

含错必错 不含对必错

抽象问题具体化：特值法

$n=2$时$n^3-n=8-2=6$，故必有因数6

跟学团 恒等变形·因式分解

【模拟题】n为大于1的任意正整数，则n^3-n必有因数（ C ）.

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7　　E. 8

【标志词汇】代数式必有因数⇒因式分解后，根据因式个数/奇偶性判断

任意两个连续正整数，一定有一个是2的倍数.

任意三个连续正整数，一定有一个是3的倍数，至少有一个是2的倍数

$n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$ 三个连续正整数乘积 必然含有因数$2\times3=6$.

$n=2$时，$n^3-n=(n-1)n(n+1)=1\times2\times3$.

$n=3$时，$n^3-n=(n-1)n(n+1)=2\times3\times4$.

$n=4$时，$n^3-n=(n-1)n(n+1)=3\times4\times5$.

跟学团 恒等变形·因式分解

【标志词汇】代数式必有因数⇒因式分解后，根据因式个数/奇偶性判断

任意两个连续正整数，一定有一个是2的倍数.

任意三个连续正整数，一定有一个是3的倍数. 至少有一个是2的倍数

任意四个连续正整数，一定有一个是4的倍数. 至少有一个是2的倍数　至少有一个是3的倍数

【结论1】任意连续的n个正整数中，有且仅有一个数能被n整除.

【结论2】任意n个连续正整数之积一定能被$n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$整除.

跟学团 恒等变形·因式分解

【模拟题】n为大于1的任意正整数，则$n^4+2n^3-n^2-2n$必有因数（ D ）.

A. 10 B. 15 C. 20 D. 24 E. 48

含错必错 不含对必错

抽象问题具体化：特值法

$n=2$时，$n^4+2n^3-n^2-2n=16+16-4-4=24$

跟学团 恒等变形·因式分解

【模拟题】n为大于1的任意正整数，则$n^4+2n^3-n^2-2n$必有因数（ D ）.

A. 10 B. 15 C. 20 D. 24 E. 48

【标志词汇】代数式必有因数⇒因式分解后，根据因式个数/奇偶性判断

$$\begin{aligned}n^4+2n^3-n^2-2n&=n\cdot(n^3+2n^2-n-2)\\&=n\cdot[n^2(n+2)-1(n+2)]\\&=n\cdot(n+2)\cdot(n^2-1)\\&=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\quad\text{四个连续正整数乘积}\end{aligned}$$

【结论1】任意连续的n个正整数中，有且仅有一个数能被n整除.

【结论2】任意n个连续正整数之积一定能被$n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$整除.

跟学团 恒等变形·因式分解

（1）提： 提公因式.

$ka+kb+kc=k(a+b+c)$.

（2）看： 看多项式是否符合乘法公式

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

（3）代入： 对于已知关于x的多项式，分别依次代入$x=\pm1$，$x=\pm2$，$x=\pm3$

若代入$x=1$，多项式为0，则多项式有因式$x-1$

（4）算： 十字相乘、待定系数等方法运算求解.

跟学团 恒等变形·因式定理

- 恒等变形
  - 求因式（因式分解）
    - 乘法公式应用
    - **因式定理法**
    - 十字相乘法
    - 待定系数法
  - 求系数

跟学团 恒等变形·因式定理

	整数整除	**整式整除**
举例	$42=6\times7$	$x^2-9=(x+3)(x-3)$
表达式	$a=bk$ 被除数=除数×商	$f(x)=g(x)q(x)$ 被除式=除式×商式
要点	a能被b和k整除	$f(x)$能被$g(x)$和$q(x)$整除
	b与k都叫做a的因数	$g(x)$与$q(x)$都叫做$f(x)$的因式

跟学团 恒等变形·因式定理

$42=2\times3\times7$

$x^4-1=(x^2+1)(x+1)(x-1)$

因式定理 如果关于x的多项式含有因式$x-a$ ⟺多项式能被$(x-a)$整除 ⟺ $f(a)=0$

$f(x)=(x-a)q(x)$

【标志词汇】对关于x的多项式因式分解⟹ 尝试代入$x=\pm1$，$x=\pm2$，$x=\pm3$……

【标志词汇】验证$x-a$为多项式的因式 ⟹ 代入$x=a$看此时多项式是否值为零

跟学团 恒等变形·因式定理

【模拟题】多项式x^2+7x+6，x^2-2x-3，$2x^2+6x+4$，x^2-6x+5，$2x^2+x-1$中含有因式$x+1$的多项式共有（ D ）个.

A. 1　　B. 2　　C.3　　D. 4　　E. 5

【标志词汇】<u>验证$x-a$为多项式的因式 $\Rightarrow$ 代入$x=a$看此时多项式是否值为零</u>

分别代入$x=-1$得 $x^2+7x+6=(-1)^2+7(-1)+6=0$

$$x^2-2x-3=(-1)^2-2(-1)-3=0$$

$$2x^2+6x+4=2(-1)^2+6(-1)+4=0$$

$$x^2-6x+5=(-1)^2-6(-1)+5=12\neq 0$$

$$2x^2+x-1=2(-1)^2+(-1)-1=0$$

跟学团 恒等变形·因式定理

【标志词汇】

一多项式含有因式A
A是一多项式的因式
一多项式能被A整除
A能整除一多项式

$\Leftrightarrow$ 代入使$A=0$的x值，得此时多项式值为零

因式A为一次式$x-a\Rightarrow$给出一个可使$f(x)$为零的x值a，即$f(a)=0$

因式A为二次式$(x-a)(x-b)$ $\Rightarrow$给出两个可使$f(x)$为零的x值a和b

即$f(a)=0$且$f(b)=0$

跟学团 恒等变形·因式定理

【模拟题】已知$2x^3-x^2+m$有一个因式$2x+1$，则$m=$（ E ）

A. 1　　B. 2　　C. -2　　D. -1　　E. $\frac{1}{2}$

$2x^3-x^2+m=q(x)(2x+1)$

【标志词汇】多项式含有因式A $\Rightarrow$ 代入使$A=0$的x值，得此时多项式值为零

代入$x=-\frac{1}{2}$　　$2\times(-\frac{1}{2})^3-(-\frac{1}{2})^2+m=0$　　$m=\frac{1}{2}$

【结论】 <u>每代入一个使因式为零的x值，就可以得到一个关于多项式$f(x)$系数的等式</u>

跟学团 恒等变形·因式定理

【模拟题】若多项式$f(x)=x^3+px^2+qx+6$含有一次因式$x+1$和$\frac{x-3}{2}$，则$\frac{p}{q}=$（ A ）.

A. -4　　B. -8　　C. -9　　D. 9　　E. 10

【结论】 <u>每代入一个使因式为零的x值，就可以得到一个关于多项式$f(x)$系数的等式</u>

【标志词汇】多项式含有因式A $\Rightarrow$ 代入使$A=0$的x值，得此时多项式值为零

当$x=-1$时$x+1=0$　　当$x=3$时$\frac{x-3}{2}=0$

$$\begin{cases}-1+p-q+6=0\\27+9p+3q+6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=-4\\q=1\end{cases}\Rightarrow\frac{p}{q}=-4$$

跟学团 恒等变形·因式定理

【模拟题】若$x^4-ax^3+bx^2+2x-4$能被x^2-3x+2整除，则$ab=$（ E ）.

A. 4　　B. 10　　C. 15　　D. 24　　E. 30

【结论】每代入一个使因式为零的x值，就可以得到一个关于多项式$f(x)$系数的等式

【标志词汇】多项式含有因式A $\Rightarrow$ 代入使$A=0$的x值，得此时多项式值为零

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

$$\begin{cases}1-a+b+2-4=0\\16-8a+4b+4-4=0\end{cases}\qquad\begin{cases}a=5\\b=6\end{cases}$$

$$ab=5\times6=30$$

跟学团 恒等变形·十字相乘

恒等变形
- 求因式（因式分解）
  - 乘法公式应用
  - 因式定理法
  - **十字相乘法**
  - 待定系数法
- 求系数

跟学团 恒等变形·十字相乘

【举例】把二次多项式$x^2+6x-16$配平方

$x^2+6x-16$　加上x系数一半的平方，后再减去x系数一半的平方

$$=x^2+6x+\left(\frac{6}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2-16$$

$$=\left(x+\frac{6}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2-16$$

$$=(x+3)^2-25$$

- -

$$=(x+3)^2-5^5$$

$$=(x+3+5)(x+3-5)$$

$$=(x+8)(x-2)$$

跟学团 恒等变形·十字相乘

【举例】用十字相乘法将多项式因式分解：$x^2+6x-16\ =(x+8)(x-2)$

$x^2+6x-16$

拆为两项乘积　拆为两项乘积

1	8
1	-2

十字相乘再相加$1\times(-2)+1\times 8=6\neq 6$

$(1\cdot x+8)(1\cdot x-2)$

跟学团 恒等变形·十字相乘

整式乘法展开$(x+8)(x-2)=x\cdot x-2x+8x+(-2)\times 8$

$=x\cdot x+(-2+8)x+(-2)\times 8$

$=x^2+6x-16$

$x^2+6x-16$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & 8 \\ 1 & & -2 \end{array}$$

十字相乘再相加$1\times(-2)+1\times 8=6$

$(1\cdot x+8)(1\cdot x-2)$

跟学团 恒等变形·十字相乘

【举例】用十字相乘法将多项式因式分解：$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

$x^2+(a+b)x+ab$

拆为两项乘积　　拆为两项乘积

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & a \\ 1 & & b \end{array}$$

十字相乘再相加$1\cdot a+1\cdot b=a+b$

$(1\cdot x+a)(1\cdot x+b)$

跟学团 恒等变形·十字相乘

【举例】用十字相乘法将多项式因式分解：$x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$

$x^2-(a+b)x+ab$

拆为两项乘积　　拆为两项乘积

$$\begin{array}{cc} \boxed{1 \quad\quad -a} \\ \boxed{1 \quad\quad -b} \end{array}$$

二次项 + 一次项 + 常数项

x^2项 + x项 + 常数项

十字相乘再相加$1\cdot(-a)+1\cdot(-b)=-a-b=-(a+b)$

$(1\cdot x-a)(1\cdot x-b)$

跟学团 恒等变形·十字相乘

【举例】用十字相乘法将多项式因式分解：$6x^2+19x+15=(2x+3)(3x+5)$

$6x^2+19x+15$

拆为两项乘积　　拆为两项乘积

$$\begin{array}{c} \boxed{2 \quad\quad 3} \\ \boxed{3 \quad\quad 5} \end{array}$$

十字相乘再相加$2\times5+3\times3=19$

$(2\cdot x+3)(3\cdot x+5)$

跟学团 恒等变形·十字相乘

【举例】用十字相乘法将多项式因式分解：$2x^2-7xy+3y^2=(2x-y)(x-3y)$

$2x^2-7xy+3y^2$

拆为两项乘积　　拆为两项乘积

2	-1
1	-3

十字相乘再相加$2\times(-3)+1\times(-1)=-7$

$(2\cdot x-1\cdot y)(1\cdot x-3\cdot y)$

跟学团 恒等变形·十字相乘

【模拟题】已知$x^2+xy+y=24$，$y^2+xy+x=32$，则$x+y=$（　D　）.

A. 7　　B. 8　　C. 7或8　　D. 7或-8　　E. 8或-7

【标志词汇】<u>几个轮换关系代数式 ⇒ 全加</u>

<u>两式相加得</u>：$x^2+xy+y+y^2+xy+x=56$

整理得：$(x^2+2xy+y^2)+(x+y)-56=(x+y)^2+(x+y)-56=0$

将$x+y$当作整体十字相乘因式分解 **整体思维**

$(x+y+8)(x+y-7)=0$

故$x+y=-8$或$x+y=7$

跟学团 恒等变形·待定系数

恒等变形
- 求因式（因式分解）
  - 乘法公式应用
  - 因式定理法
  - 十字相乘法
  - **待定系数法**
- 求系数

跟学团 恒等变形·待定系数

标准一次算式设为： $ax+b$
标准二次算式设为：ax^2+bx+c

【举例】用因式定理法和待定系数法将多项式$2x^2+3x-5$因式分解.

【标志词汇】<u>对关于x的多项式因式分解⟹ 尝试代入$x=\pm1$，$x=\pm2$，$x=\pm3$……</u>

代入$x=1$，多项式$2x^2+3x-5=2\times1^2+3\times1-5=0$

$2x^2+3x-5$必有一个因式是$x-1$　设另一个因式为$ax+b$

$2x^2+3x-5=(x-1)(ax+b)=ax^2+(b-a)x-b$

恒等变形，当变形为相同形式时，对应项系数相等

$a=2$，$b=5$　故另一个因式为$2x+5$

因式分解结果为：$2x^2+3x-5=(x-1)(2x+5)$.

跟学团 恒等变形·待定系数

【模拟题】多项式x^2+x+m能被$x+5$整除，则此多项式也能被多项式（ D ）整除.

A. $x-6$　　B. $x+4$　　C. $x+6$　　D. $x-4$　　E. $x+2$

【标志词汇】多项式能被A整除 ⟺ 代入使因式A为零的x值，得此时多项式值为零

【结论】<u>每代入一个使因式为零的x值，就可以得到一个关于$f(x)$系数的等式</u>

代入$x=-5$得$(-5)^2+(-5)+m=0$　解得$m=-20$

多项式为x^2+x-20，设其另一个因式为$ax+b$

$x^2+x-20=(x+5)(ax+b)=ax^2+(5a+b)x+5b$

根据恒等变形对应项系数相等可知$a=1$，$b=-4$，$ax+b=x-4$

跟学团 恒等式对应项系数相等

- 恒等变形
  - 求因式（因式分解）
    - 乘法公式应用
    - 因式定理法
    - 十字相乘法
    - 待定系数法
  - 求系数　恒等式的对应项系数相等

跟学团 恒等式对应项系数相等

【模拟题】若$x^2-3x+2xy+y^2-3y-40=(x+y+m)(x+y+n)$，则$m^2+n^2=$（ C ）.

A. 69　　B. 79　　C. 89　　D. 106　　E. 120

★**【标志词汇】**两多项式相等 ⇔ 它对于任意的未知量x,y取值组合均成立，故可使用特值法.

令$x=0,y=0$，得$mn=-40$

令$x=0,y=1$，得$-42=(m+1)(n+1)=mn+m+n+1$

$m+n=-3$

$m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=9+80=89$

【标志词汇】两多项式相等 ⇔ 恒等变形为相同形式后，对应项系数相等.

跟学团 恒等变形

- **特值法**
  - 求因式（因式分解）
    - 乘法公式应用
    - 因式定理法
    - 十字相乘法
    - 待定系数法
  - 求系数

跟学团 分式基础与运算

分式　一般地，若A,B（B中含有字母且$B\neq 0$）表示两个整式，那么$\frac{A}{B}$就叫做分式.

其中A称为分式的分子，B称为分式的分母.

$\frac{1}{x-2}$　　　　$\frac{x}{y}$

分式有意义：分母$\neq 0$

分式无意义：分母$=0$

分式值为零：分母$\neq 0$且分子$=0$

分式的基本性质　分式的分子分母同乘以不为零的数字或多项式，分式的值不变.

$$\frac{A}{B}=\frac{m\cdot A}{m\cdot B}=\frac{A\cdot f(x)}{B\cdot f(x)}$$

（$B\neq 0$，m为非零实数，多项式$f(x)\neq 0$）

跟学团 分式基础与运算 ・化简求值

【模拟题】（条件充分性判断）$\frac{1}{m^2+1}+\frac{1}{n^2+1}=1$.（ D ）

（1）$mn=1$　　　　（2）$mn=-1$

【标志词汇】给定未知字母取值或关系式，求代数式值$\Rightarrow$直接代入

条件（1）$m=\frac{1}{n}$　　代入得原式$=\frac{1}{\frac{1}{n^2}+1}+\frac{1}{n^2+1}=\frac{n^2}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+1}=\frac{n^2+1}{n^2+1}=1$

条件（2）$m=-\frac{1}{n}$　　代入得原式$=\frac{1}{\frac{1}{n^2}+1}+\frac{1}{n^2+1}=\frac{n^2+1}{n^2+1}=1$

跟学团 分式基础与运算 ·化简求值

【真题2015.18】已知p、q为非零实数，则能确定$\frac{p}{q(p-1)}$的值.（ B ）

（1）$p+q=1$.　　（2）$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

【可确定型题目】 唯一性、可确定性

条件（1）：$q=1-p$　代入得$\frac{p}{q(p-1)}=\frac{p}{(1-p)(p-1)}=\frac{p}{-(p-1)^2}$

条件（2）：$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$\frac{p+q}{pq}=1$，$p+q=pq$

代入得$\frac{p}{q(p-1)}=\frac{p}{pq-q}=\frac{p}{p+q-q}=1$

跟学团 分式基础与运算 ·化简求值

【模拟题】（条件充分性判断）$\frac{x+y}{x^3+y^3+x+y}=\frac{1}{6}$（ C ）

（1）$x^2+y^2=9$.　　（2）$xy=4$.

乘法公式$x^3\pm y^3=(x\pm y)(x^2\mp xy+y^2)$

$\frac{x+y}{x^3+y^3+x+y}=\frac{x+y}{(x+y)(x^2-xy+y^2)+(x+y)}=\frac{1}{x^2-xy+y^2+1}$　可约分

条件（1）$x^2+y^2=9$，条件（2）$xy=4$单独均不充分，联合代入

$\frac{x+y}{x^3+y^3+x+y}=\frac{1}{x^2-xy+y^2+1}=\frac{1}{9-4+1}=\frac{1}{6}$

跟学团 分式基础与运算 ·通分与裂项

$$\frac{4}{3\times7}=\frac{7-3}{3\times7}=\frac{7}{3\times7}-\frac{3}{3\times7}=\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\qquad \frac{1}{2\times5}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2\times5}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{大-小}{小\times大}=\frac{\mathbf{1}}{小}-\frac{\mathbf{1}}{大}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{x+2}{(x+1)(x+2)}-\frac{x+1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$$

跟学团 分式基础与运算 ·通分与裂项

【模拟题】化简 $\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x^2+7x+12}+\cdots+\frac{1}{x^2+201x+10100}$

$$\frac{大-小}{小\times大}=\frac{\mathbf{1}}{小}-\frac{\mathbf{1}}{大}\quad \frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$原式=\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\cdots+\frac{1}{(x+100)(x+101)}$$

$$=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x+100}-\frac{1}{x+101}\right)$$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+101}$$

跟学团 分式基础与运算 ·倒数和

【标志词汇】给定方程$x^2-ax\pm1=0$，求x与$\frac{1}{x}$组成的算式 $\Rightarrow$ 两边同除x化为$x\pm\frac{1}{x}=a$

【标志词汇】互为倒数的算式之和/差⇒ 完全平方公式/立方和立方差公式

$$a\pm\frac{1}{a}，x^2\pm\frac{1}{x^2}，\frac{a}{b}\pm\frac{b}{a}，\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\pm\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2+2$$

$$\left|x+\frac{1}{x}\right| \xRightarrow{\text{平方后减2}} x^2+\frac{1}{x^2} \xRightarrow{\text{减2后开方}} \left|a-\frac{1}{a}\right|$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2-2$$

跟学团 分式基础与运算 ·倒数和

【举例】已知$x^2-mx+1=0$，求下列算式的值.

两边同除x化为$x+\frac{1}{x}=m$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=m^2-2$$

$$x+\frac{1}{x} \underset{\text{不可逆向}}{\overset{\text{平方后减2}}{\rightleftharpoons}} x^2+\frac{1}{x^2}$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=(m^2-2)^2-2$$

$$x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}=(x^n)^2+\left(\frac{1}{x^n}\right)^2=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2-2$$ 偶数次方

跟学团 分式基础与运算 ·倒数和

【模拟题】若$x+\frac{1}{x}=3$，则$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=$ （ E ）.

A. $-\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $-\frac{1}{4}$　　E. $\frac{1}{8}$

【标志词汇】给定方程$x^2-ax\pm1=0$，求x与$\frac{1}{x}$组成的算式 $\Rightarrow$ 两边同除x化为$x\pm\frac{1}{x}=a$

$$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}\text{分子分母同除}x^2\text{得}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{7+1}=\frac{1}{8}$$

【标志词汇】 互为倒数的算式之和/差⇒完全平方公式/立方和立方差公式

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$$

跟学团 分式基础与运算 ·倒数和

【标志词汇】 互为倒数的算式之和/差⇒完全平方公式/立方和立方差公式

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)\qquad x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}+1\right)$$

【举例】已知$x+\frac{1}{x}=m$，求$x^3+\frac{1}{x^3}$的值.

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)=m(m^2-2-1)=m(m^2-3)$$

$$x^{3n}+\frac{1}{x^{3n}}=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\left(x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}-1\right)$$ 指数为3的倍数

跟学团 分式基础与运算 ·倒数和

【真题2020.07】已知实数x满足$x^2+\frac{1}{x^2}-3x-\frac{3}{x}+2=0$，则$x^3+\frac{1}{x^3}=$（ C ）.

A.12　　B.15　　C.18　　D.24　　E.27　$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)$

【标志词汇】 互为倒数的算式之和/差⇒完全平方公式/立方和立方差公式

原式 $=\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)=0$

将$x+\frac{1}{x}$看作一个整体可得，$x+\frac{1}{x}=3$或$x+\frac{1}{x}=0$（舍）

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)=3\times(3^2-2-1)=18$

跟学团 齐次分式

分式
- 化简求值
- 裂项相消
- 倒数和
- **齐次分式**

齐次结构 所含各项的次数都相同的分式结构或者方程

$\frac{b^2}{ac}$　　$a^2=bc+c^2$　　$x^2+2x+3=0$

齐次分式 分式形式的齐次结构

$$\frac{b^2+bc-c^2}{a^2-ac}$$

跟学团 齐次分式

【举例】已知$a:b:c=\frac{1}{3}:\frac{1}{2}:1$，求$\frac{a^2+b^2}{a(b+c)}$的值.

【标志词汇】 未知量个数>方程数，求由未知字母组成的齐次分式的取值 ⟹ 特值代入

比例关系特值选取：化为整数连比，比值即特值.

$$a:b:c=\frac{1}{3}:\frac{1}{2}:1=\left(\frac{1}{3}\times 6\right):\left(\frac{1}{2}\times 6\right):(1\times 6)=2:3:6$$

设$a=2$，$b=3$，$c=6$

$$\frac{a^2+b^2}{a(b+c)}=\frac{4+9}{2\times(3+6)}=\frac{13}{18}$$

设$a=2k$，$b=3k$，$c=6k$

$$\frac{a^2+b^2}{a(b+c)}=\frac{4k^2+9k^2}{2k(3k+6k)}=\frac{4k^2+9k^2}{6k^2+12k^2}=\frac{13}{18}$$

跟学团 齐次分式

【真题2013.01.22】设x,y,z为非零实数，则$\frac{2x+3y-4z}{-x+y-2z}=1$.（ C ）

（1）$3x-2y=0$.　　（2）$2y-z=0$.

【标志词汇】 未知量个数>方程数，求由未知字母组成的齐次分式的取值 ⟹ 特值代入

$$\begin{cases}3x-2y=0\\2y-z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x:y=2:3\\y:z=1:2=3:6\end{cases}\Rightarrow x:y:z=2:3:6$$

比例关系特值选取：化为整数连比，比值即特值.

$x=2$，$y=3$，$z=6$

$$\frac{2x+3y-4z}{-x+y-2z}=\frac{4+9-24}{-2+3-12}=1$$

跟学团 齐次分式

【模拟题】若实数a，b满足$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2$，则$\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+4ab+b^2}=$（A）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 4　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 2　　E. $\frac{2}{3}$

【标志词汇】 未知量个数>方程数，求由未知字母组成的齐次分式的取值 ⇒ 特值代入

取特值$a=b=1$

$$\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+4ab+b^2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

跟学团 齐次分式

【模拟题】（条件充分性判断）$\frac{4a+x}{3y}=\frac{2}{3}$（C）

（1）$\frac{1}{a}=\frac{3}{y+a}$　　（2）$\frac{1}{a}=\frac{2}{x+y}$

【标志词汇】 未知量个数>方程数，求由未知字母组成的齐次分式的取值 ⇒ 特值代入

【类型判断】两条件单独信息不完全，C或E

交叉相乘，联合条件（1）和条件（2）得

$$\begin{cases}3a=y+a\\2a=x+y\end{cases}\quad 解得\begin{cases}y=2a\\x=0\end{cases}\quad \frac{4a+x}{3y}=\frac{4a}{6a}=\frac{2}{3}$$