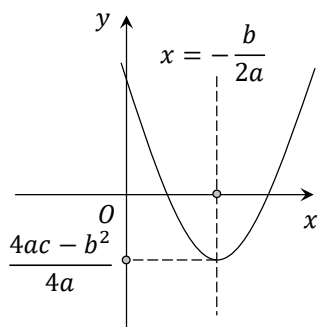


跟学团 函数 · 求二次函数解析式

.....

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 图像为一条抛物线

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$



对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$

当 $x =$ 对称轴时, 二次函数可取到最值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$

抛物线顶点坐标: $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

跟学团 函数 · 求二次函数解析式

.....

【举例】已知抛物线 $y = x^2 + ax + a + 1$ 过点 (1, 4), 则二次函数的解析式为_____.

跟学团 函数 · 求二次函数解析式

.....

【举例】已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $(-1, 0)$, $(2, -3)$, $(4, 5)$, 求二次函数的解析式.

跟学团 函数 · 求二次函数解析式

.....

【举例】已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $(1, 2)$ 和 $(2, 7)$, 对称轴为 $x = -1$, 求二次函数的解析式.

跟学团 函数 · 求二次函数解析式

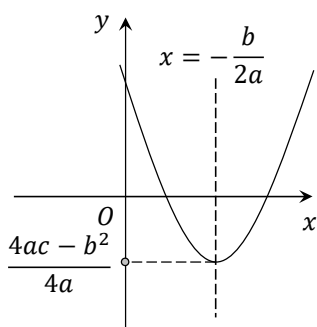
.....

【举例】已知抛物线顶点为(1,3)，且过点 (2,1)，求二次函数的解析式.

跟学团 函数 · 求二次函数解析式

.....

一般式 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 图像为一条抛物线



顶点式 $y = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$

$$= a(x - h)^2 + k$$

对称轴: $x = h$ 顶点: (h, k)

跟学团 函数 · 求二次函数解析式

.....

【举例】已知抛物线过点 $(-1,0)$ ， $(5,0)$ ，和 $(1,-16)$ ，求二次函数的解析式.

跟学团 函数 · 求二次函数解析式

.....

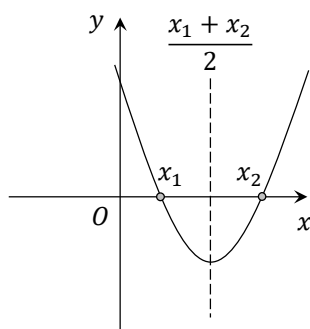
交点式/两根式 抛物线与 x 轴交点为 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$ ，则可设 $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ ($a \neq 0$)

$$y = (x - 1)(x - 2)$$

与 x 轴交点为 $(1,0)$ 和 $(2,0)$

$$y = a(x - 1)(x - 2) \quad (a \neq 0)$$

与 x 轴交点为 $(1,0)$ 和 $(2,0)$



跟学团 函数 · 求二次函数解析式

.....

【真题2021.05】设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 且 $f(2) = f(0)$, 则 $\frac{f(3)-f(2)}{f(2)-f(1)} = (\quad)$

A.2

B.3

C.4

D.5

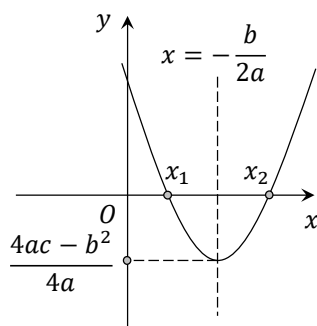
E.6

跟学团 函数 · 求二次函数解析式

.....

一般式 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

顶点式 抛物线顶点为 (h, k) , 则可设 $y = a(x - h)^2 + k$ ($a \neq 0$)



交点式/两根式

抛物线与 x 轴交点为 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$

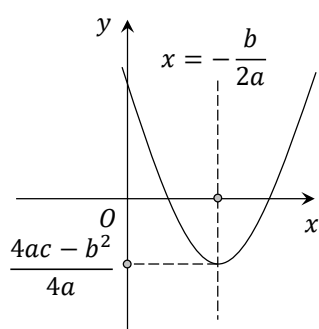
则可设 $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ ($a \neq 0$)

跟学团 函数 · 二次函数最值

.....

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 图像为一条抛物线

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$



对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$

当 $x =$ 对称轴时, 二次函数可取到最值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$

对称轴左右两侧单调性不同

抛物线顶点坐标: $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

跟学团 函数 · 二次函数最值

.....

【真题2012.10.02】设实数 x, y 满足 $x + 2y = 3$, 则 $x^2 + y^2 + 2y$ 的最小值为 () .

A. 4

B. 5

C. 6

D. $\sqrt{5} - 1$

E. $\sqrt{5} + 1$

跟学团 函数·二次函数最值

.....

【真题2016.23】（条件充分性判断）设 x, y 是实数，则可以确定 $x^3 + y^3$ 的最小值。（ ）

(1) $xy = 1$.

(2) $x + y = 2$.

跟学团 函数·二次函数最值

.....

【真题2016.05】某商场将每台进价为2000元的冰箱以2400元销售时，每天售出8台.调研表明，这种冰箱的售价每降低50元，每天就能多销售4台，若要每天的销售利润最大，则该冰箱的定价应为（ ）.

A.2200元

B.2250元

C.2300元

D.2350元

E.2400元

跟学团 一元二次方程 · 根的分布 · 零分布

.....

【模拟题】已知方程 $(m-3)x^2 + 2(m+1)x - 2 = 0$ 有两个不相等的正根，求 m 的取值范围.

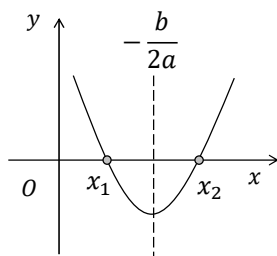
跟学团 一元二次方程 · 根的分布 · 零分布

.....

整式 $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

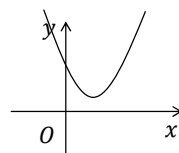
二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交点



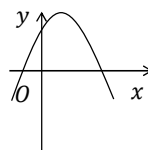
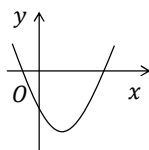
$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} > 0$$



若开口向上($a > 0$), 则 y 轴截距 $f(0) = c > 0$

若开口向下($a < 0$), 则 y 轴截距 $f(0) = c < 0$



跟学团 一元二次方程·根的分布·零分布

.....

对于二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

【标志词汇】两正根 $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$, a 与 c 同号, a 与 b 异号

两不相等的正根 $\Leftrightarrow \Delta > 0$, a 与 c 同号, a 与 b 异号

前提条件: $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ (或 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$)	
抛物线图像	对称轴位于两正根之间, 大于零, 即 $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a} > 0$, a 与 b 异号
	若开口向上($a > 0$), 则 y 轴截距 $f(0) = c > 0$
	若开口向下($a < 0$), 则 y 轴截距 $f(0) = c < 0$
	综上所述, a 与 c 同号
韦达定理	两正根之和大于零, 即 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$, a 与 b 异号
	两正根之积大于零, 即 $x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0$, a 与 c 同号

跟学团 一元二次方程·根的分布·零分布

.....

对于二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

【标志词汇】两负根 $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$, 且 a, b, c 同号

两不相等的负根 $\Leftrightarrow \Delta > 0$, 且 a, b, c 同号

前提条件: $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ (或 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$)	
抛物线图像	对称轴位于两负根之间, 小于零, 即 $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a} < 0$, a 与 b 同号
	若开口向上($a > 0$), 则 y 轴截距 $f(0) = c > 0$
	若开口向下($a < 0$), 则 y 轴截距 $f(0) = c < 0$
	综上所述, a 与 c 同号
韦达定理	两正根之和小于零, 即 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$, a 与 b 同号
	两正根之积大于零, 即 $x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0$, a 与 c 同号

跟学团 一元二次方程 · 根的分布 · 零分布

.....

【真题2005.01.04】方程 $4x^2 + (a-2)x + a-5 = 0$ 有两个不等的负实根. ()

(1) $a < 6$.

(2) $a > 5$

跟学团 一元二次方程 · 根的分布 · 零分布

.....

对于二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

【标志词汇】有一正一负两个根 $\Leftrightarrow a$ 与 c 异号

韦达定理

一正一负两根之积小于零, 即 $x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0$, a 与 c 异号.

异号根 $\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 < 0 \quad \frac{c}{a} < 0$

$ac < 0$, $-ac > 0$, 此时一定有 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, 无需额外限制根的判别式.

跟学团 一元二次方程·根的分布·零分布

.....

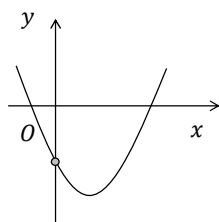
对于二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

【标志词汇】 有一正一负两个根 $\Leftrightarrow a$ 与 c 异号

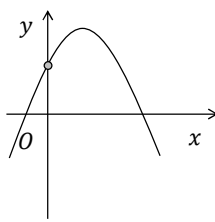
抛物线图像

若开口向上($a > 0$), 则一定有y轴截距 $f(0) = c < 0$.

反之若开口向下($a < 0$), 则一定有y轴截距 $f(0) = c > 0$, 即 a 与 c 异号.



当开口向上($a > 0$)时
抛物线上有点在x轴下方



开口向下($a < 0$)时
抛物线上有点在x轴上方

抛物线一定穿过x轴, 一定有 $\Delta > 0$.

跟学团 一元二次方程·根的分布·零分布

.....

【真题2005.01.04拓展】 方程 $4x^2 + (a - 2)x + a - 5 = 0$ 有一正一负两个根, 求 a 的取值范围.

【真题2005.10.05】 方程 $x^2 + ax + b = 0$ 有一正一负两个实根. ()

(1) $b = -C_4^3$.

(2) $b = -C_7^5$.

跟学团 一元二次方程 · 根的分布 · 零分布

.....

对于二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

【标志词汇】两正根 $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$, a 与 c 同号, a 与 b 异号

两不相等的正根 $\Leftrightarrow \Delta > 0$, a 与 c 同号, a 与 b 异号

【标志词汇】两负根 $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$, 且 a, b, c 同号

两不相等的负根 $\Leftrightarrow \Delta > 0$, 且 a, b, c 同号

【标志词汇】有一正一负两个根 $\Leftrightarrow a$ 与 c 异号

跟学团 不等式

.....

大于或等于 小于或等于

不等关系 $x > 0$ $x < 1$ $x \neq 5$ $x \geq \sqrt{2}$ $x \leq \sqrt{2}$

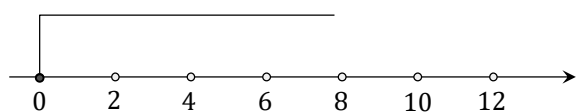
不等号 $>$ $<$ \neq \geq \leq

$x > 0$

$x = 1, \sqrt{2}, 2, 3, 5.8, 10000 \dots$

不等式的解 能令不等式成立的未知量的取值

不等式的解集 不等式所有解所组成的集合



实心：取等号

空心：取不到等号

跟学团 不等式·性质及运算

.....

一个不等式 不等式两边同增同减，不等号方向不变

若 $a > b$ ，则 $a \pm c > b \pm c$

不等式 $a > b$ 两边同时乘以同一个数 c 时：

$c \neq 0$ 不可以乘

$$c > 0 \quad ac > bc \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

不等号方向不变

$$c < 0 \quad ac < bc \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

不等号方向改变

跟学团 不等式·性质及运算

.....

两不等式间 可加不可减，相加要同向

$$a > b, c > d, \text{ 那么 } a + c > b + d$$

【举例】 已知 $3 > 2, 5 > 1$

可以相加，得 $3 + 5 = 8 > 2 + 1 = 3$.

不能相减： $3 - 5 = -2 > 2 - 1 = 1$

【举例】 已知 $x > 3, y < 5$

$-y > -5$ ，此时不等号方向相同可以相加，得 $x - y > -2$

无论不等号方向相同或不同，均不能相减

即不能用 $x > 3$ 与 $-y > -5$ 相减以求 $x + y$ 的范围.

跟学团 一元二次不等式

.....

 $\Delta > 0$ $\Delta = 0$ $\Delta < 0$

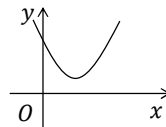
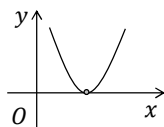
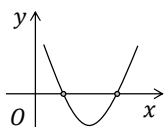
二次方程

两相异实根

两相同实根

无实根

二次函数图像



不等式

解集

解集

解集

$ax^2 + bx + c > 0$

$x < x_1 \text{ 或 } x > x_2$

$x \neq -\frac{b}{2a}$

$(-\infty, +\infty)$

$ax^2 + bx + c < 0$

$x_1 < x < x_2$

无解

无解

二次方程的根 \Leftrightarrow 抛物线与 x 轴的交点 \Leftrightarrow 不等式解集范围的临界点

跟学团 一元二次不等式

.....

对于一元二次不等式

【标志词汇】已知不等式，求解集.

1. 二次项系数化为正，求对应二次方程的根.
2. 不等号为“ $>$ ”，解集取两根之外（大于大的，小于小的）；
不等号为“ $<$ ”，解集取两根之间.
“大于取两边，小于取中间”

$$x^2 - 4x + 3 > 0 \quad x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

$$-x^2 + 4x - 3 > 0 \quad x^2 - 4x + 3 < 0$$

【标志词汇】已知解集，求系数.

跟学团 一元二次不等式

.....

【真题2007.10.10】 $x^2 + x - 6 > 0$ 的解集是 () .

- A. $(-\infty, -3)$ B. $(-3, 2)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$ E. 以上结论均不正确
-

跟学团 一元二次不等式

.....

对于一元二次不等式

【标志词汇】 已知不等式，求解集.

“大于取两边，小于取中间”

【标志词汇】 已知解集，求系数.**二次方程的根 \Leftrightarrow 抛物线与 x 轴的交点 \Leftrightarrow 不等式解集范围的临界点**

1. 解集区间端点为对应二次方程的两根.
2. 韦达定理求系数（根与系数关系）.

跟学团 一元二次不等式

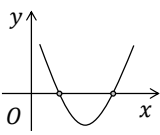
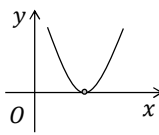
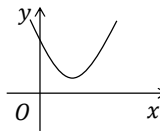
.....

【真题2006.10.05】已知不等式 $ax^2 + 2x + 2 > 0$ 的解集是 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, 则 $a = ()$.

- (A) -12 (B) 6 (C) 0 (D) 12 (E) 以上结论均不正确

跟学团 一元二次不等式·无解与恒成立

.....

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次方程	两相异实根	两相同实根	无实根
二次函数图像			
不等式	解集	解集	解集
$ax^2 + bx + c > 0$	$x < x_1$ 或 $x > x_2$	$x \neq -\frac{b}{2a}$	$(-\infty, +\infty)$
$ax^2 + bx + c < 0$	$x_1 < x < x_2$	无解	无解



二次方程的根 \Leftrightarrow 抛物线与 x 轴的交点

\Leftrightarrow 不等式解集范围的临界点

跟学团 一元二次不等式

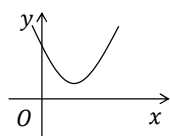
.....

【真题2005.01.03】满足不等式 $(x+4)(x+6)+3>0$ 的所有实数 x 的集合是 () .

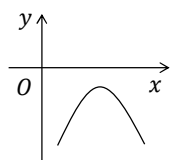
- A. $[4, +\infty)$ B. $(4, +\infty)$ C. $(-\infty, -2]$ D. $(-\infty, -1)$ E. $(-\infty, +\infty)$

跟学团 一元二次不等式 · 无解与恒成立

.....



$$\begin{aligned} & ax^2 + bx + c > 0 \text{ 对任意 } x \text{ 恒成立} \\ & ax^2 + bx + c \leq 0 \text{ 的解集为空集} \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{抛物线开口必向上, } a > 0 \\ \text{抛物线与 } x \text{ 轴无交点 (对应方程 } \Delta < 0 \text{)} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} & ax^2 + bx + c < 0 \text{ 对任意 } x \text{ 恒成立} \\ & ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ 的解集为空集} \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{抛物线开口必向下, } a < 0 \\ \text{抛物线与 } x \text{ 轴无交点 (对应方程 } \Delta < 0 \text{)} \end{cases}$$

跟学团 一元二次不等式·无解与恒成立

.....

标志词汇	翻译	解读
不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 解集为全体实数	必然	$ax^2 + bx + c$ 必然大于等于0
不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 对任意 x 恒成立		
不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 解集为空集	不可能	$ax^2 + bx + c$ 不可能小于0
不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 无解		

把所有的无解转化为恒成立

把所有不可能转化为必然

跟学团 一元二次不等式·无解与恒成立

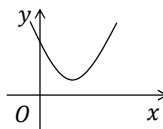
.....

对于一元二次不等式

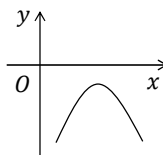
【标志词汇】“对任意/所有 x 恒成立”、“解集为全体实数”、“解集为空集”

1. 无解化为恒成立.

2. “ > 0 恒成立”意味着: $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ 与 x 轴无交点 开口向上



“ < 0 恒成立”意味着: $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$ 与 x 轴无交点 开口向下



跟学团 一元二次不等式·无解与恒成立

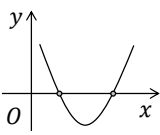
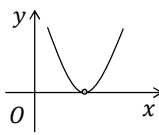
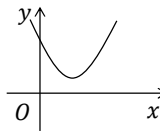
.....

【真题2011.10.21】不等式 $ax^2 + (a-6)x + 2 > 0$ 对所有实数 x 都成立 () .

- (1) $0 < a < 3$ (2) $1 < a < 5$

跟学团 一元二次不等式·总结

.....

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次方程	两相异实根	两相同实根	无实根
二次函数图像			
不等式	解集	解集	解集
$ax^2 + bx + c > 0$	$x < x_1$ 或 $x > x_2$	$x \neq -\frac{b}{2a}$	$(-\infty, +\infty)$
$ax^2 + bx + c < 0$	$x_1 < x < x_2$	无解	无解

二次方程的根 \Leftrightarrow 抛物线与 x 轴的交点 \Leftrightarrow 不等式解集范围的临界点

跟学团 高次不等式 方程的根将数轴分为不同区域

.....

整式 $x - 1$

函数 $y = x - 1$

方程 $x - 1 = 0$

不等式 $x - 1 > 0$



$x > 1$ 时, $x - 1 > 0$

$x = 1$ 时, $x - 1 = 0$

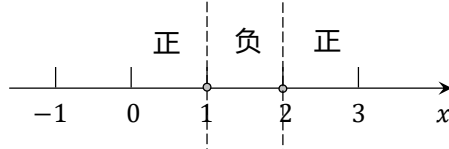
$x < 1$ 时, $x - 1 < 0$

整式 $(x - 1)(x - 2)$

函数 $y = (x - 1)(x - 2)$

方程 $(x - 1)(x - 2) = 0$

不等式 $(x - 1)(x - 2) > 0$



$x > 2$ 时, $(x - 1)(x - 2) > 0$

$1 < x < 2$ 时, $(x - 1)(x - 2) < 0$

$x < 1$ 时, $(x - 1)(x - 2) > 0$

跟学团 高次不等式

.....

化 把不等式移项化为 $(\quad)(\quad)(\quad)(\quad) > 0$ 的形式
注意每个因式中 x 最高次项系数需要化为正.

求 将不等号写为等号, 解出对应方程的所有根

标 在数轴上依次标出各根

穿 从数轴的右上方开始, 由上至下, 由右至左画线穿根,

挑 线在数轴上方的所有区域, 代表 $f(x) > 0$ 的不等式的解集.

线在数轴下方的区域, 代表 $f(x) < 0$ 的不等式的解集.

跟学团 高次不等式

【举例】求不等式 $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ 的解集.

跟学团 高次不等式

【真题2009.01.23】 $(x^2 - 2x - 8)(2 - x)(2x - 2x^2 - 6) > 0$. ()

- (1) $x \in (-3, -2)$. (2) $x \in [2, 3]$.
-

跟学团 高次不等式

【举例】求不等式 $(1-x)(x-2)^2(x-3) < 0$ 的解集.

跟学团 高次不等式

.....

化 $(\quad)(\quad)(\quad)(\quad) > 0$ 注意每个因式中 x 最高次项系数需要化为正.

求 将不等号写为等号，解出对应方程的所有根 恒为正的算式对解集无影响
标 在数轴上依次标出各根

穿 从数轴的右上方开始，由上至下，由右至左画线穿根 奇过偶不过

挑 线在数轴上方的所有区域，代表 $f(x) > 0$ 的不等式的解集.
 线在数轴下方的区域，代表 $f(x) < 0$ 的不等式的解集.

跟学团 分式不等式

.....

【举例】求不等式 $\frac{x(x+2)}{x-3} < 0$ 的解集_____

跟学团 分式不等式

.....

【标志词汇】几个式子相乘/除的不等式，求解集 \Rightarrow 等价变形后数轴穿根

【分式不等式等价变形】不等式两边同乘 $[g(x)]^2$ 可将分式不等式的等价变形如下

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \leq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) < 0$$

跟学团 分式不等式

.....

【真题2014.10.19】（条件充分性判断） x 是实数，则 x 的取值范围是 $(0,1)$. （ ）

(1) $x < \frac{1}{x}$.

(2) $2x > x^2$.

跟学团 分式不等式

.....

【2001.01.08】设 $0 < x < 1$ ，则不等式 $\frac{3x^2 - 2}{x^2 - 1} > 1$ 的解是（ ）.

A. $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

B. $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1$

C. $0 < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$

D. $\sqrt{\frac{2}{3}} < x < 1$

跟学团 分式不等式

.....

【模拟题】若 $\frac{2x^2 + 2kx + k}{4x^2 + 6x + 3} < 1$ 对一切实数 x 均成立，则 k 的取值范围为 () .

A. $1 < k < 3$ B. $1 < k < 2$ C. $2 < k < 3$ D. $0 < k < 3$ E. $-3 < k < 3$ **跟学团 分式不等式**

.....

【真题2012.10.14】若不等式 $\frac{(x-a)^2 + (x+a)^2}{x} > 4$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，则常数 a 的取值范围是 () .

A. $(-\infty, -1)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-1, 1)$ D. $(-1, +\infty)$ E. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$