MBA大师跟学团专属

平面几何与立体几何

董璞

跟学团 平面几何

- 三角形
  - 定义与性质性质
  - 三角形分类
    - 直角三角形
    - 等腰三角形
    - 重要三角形：等腰直角△，30º直角△，等边△ ★
  - 三角形面积、高、与等高模型 ★
  - 相似三角形★

四边形：梯形、正方形、长方形、菱形

圆与扇形

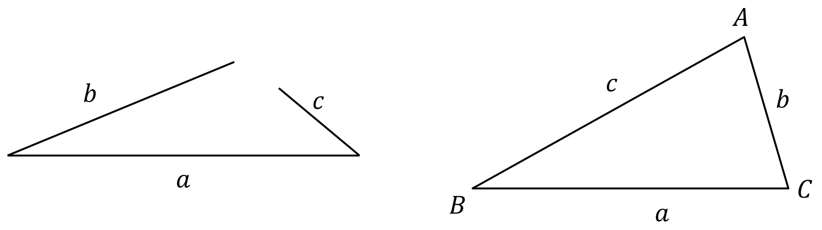
不规则图形（阴影）

跟学团 平面几何·三角形基础

三角形 由同一平面内不在同一直线上的三条线段首尾顺次连接所组成的封闭图形称为三角形

1.三角形任意两边之和大于第三边；任意两边之差小于第三边；

2.三角形内角和等于180度；



常见边与角的表示

跟学团 平面几何·三角形基础

【真题2014.10.20】 三条长度分别为a，b，c的线段能构成一个三角形．（ E ）

（1）$a+b>c$　　　（2）$b-c<a$

满足：$\begin{cases} a+b>c \\ a+c>b \\ b+c>a \end{cases}$　　或满足$\begin{cases} |a-b|<c \\ |a-c|<b \\ |b-c|<a \end{cases}$

条件（1）$a=10, b=20, c=1$

条件（2）$a=19, b=5, c=4$

两条件联合有$\begin{cases} a+b>c \\ a+c>b \end{cases}$，举反例$a=15, b=5, c=5$，不充分

跟学团 平面几何・三角形基础

三角形 由同一平面内不在同一直线上的三条线段首尾顺次连接所组成的封闭图形称为三角形

按边分

一般三角形：三边都不相等

等腰三角形：两边相等（等边三角形：三个边都相等）

按角分

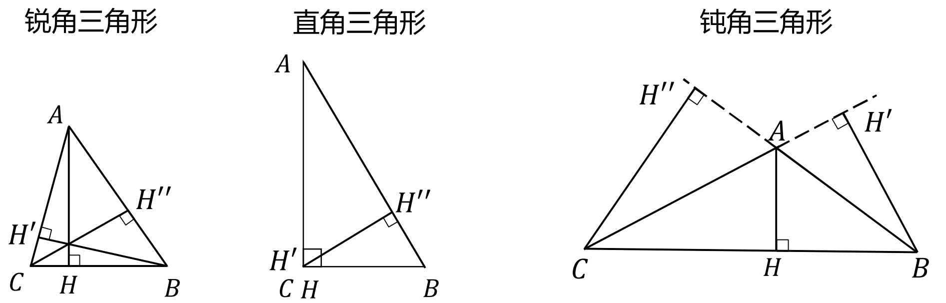
锐角三角形：三个内角都小于90^{o}

直角三角形：三个内角中有一个角等于90^{o}

钝角三角形：三个内角中有一个角大于90^{o}

跟学团 平面几何・三角形基础

三角形面积：$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\times$任意一个底边$\times$相对应的高



$$S=\frac{1}{2}AH\cdot BC=\frac{1}{2}BH'\cdot AC=\frac{1}{2}CH''\cdot AB$$

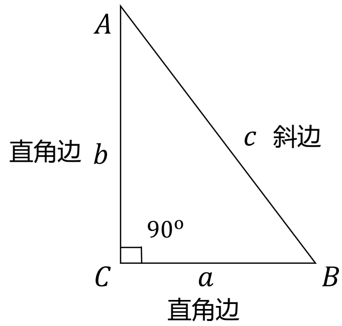
跟学团 平面几何 · 直角三角形

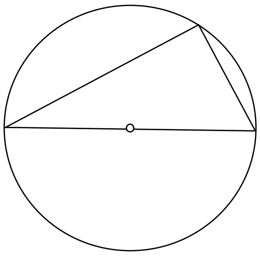
判定 1：一个角为90°的三角形

2：面积 $=\dfrac{\text{直角边}\times\text{直角边}}{2}$

3：三边关系符合勾股定理$a^2+b^2=c^2$

4：三角形底边为圆的直径，顶点在圆周上





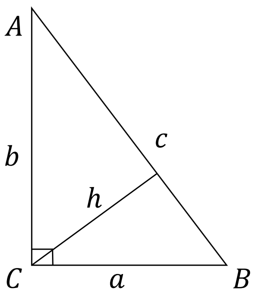
直径所对的圆周角为直角

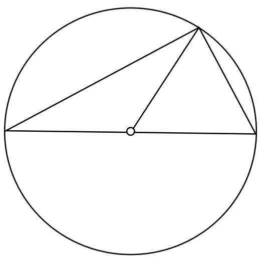
跟学团 平面几何 · 直角三角形

性质 1. 三边满足勾股定理 $a^2+b^2=c^2$

2. 直角三角形边长关系$ab=ch$　直角边 × 直角边 = 斜边 × 高

3. 直角三角形斜边中线等于斜边的一半

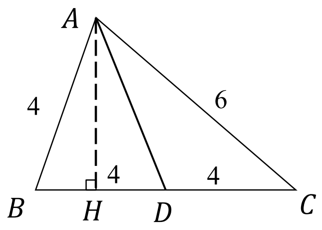




跟学团 平面几何·直角三角形

【**真题2019.10**】在三角形ABC中，$AB=4$，$AC=6$，$BC=8$，D为BC的中点，则$AD=$（ ）.

A. $\sqrt{11}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. 3　　D. $2\sqrt{2}$　　E. $\sqrt{7}$



过A作$AH\perp BC$

$AD^2=AH^2+DH^2$

$$\begin{cases}AB^2=16=AH^2+BH^2=AH^2+(4-DH)^2\\AC^2=36=AH^2+CH^2=AH^2+(4+DH)^2\end{cases}$$

跟学团 平面几何·直角三角形

【**真题2019.10**】在三角形ABC中，$AB=4$，$AC=6$，$BC=8$，D为BC的中点，则$AD=$（ ）.

A. $\sqrt{11}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. 3　　D. $2\sqrt{2}$　　E. $\sqrt{7}$

$$\begin{cases}AB^2=16=AH^2+BH^2=AH^2+(4-DH)^2\\AC^2=36=AH^2+CH^2=AH^2+(4+DH)^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}AH^2+16-8DH+DH^2=16\\AH^2+16+8DH+DH^2=36\end{cases}$$

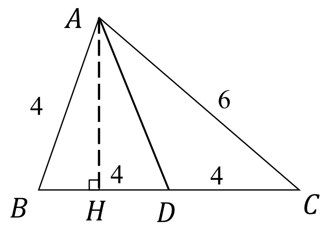
下式－上式得$16DH=36-16=20$　　$DH=\frac{20}{16}=\frac{5}{4}$

代入任一等式得$AH^2+16-10+\frac{25}{16}=16$　　$AH^2=\frac{135}{16}$

跟学团 平面几何 · 直角三角形

【真题2019.10】在三角形ABC中，$AB=4$，$AC=6$，$BC=8$，D为BC的中点，则$AD=$（ B ）.

A. $\sqrt{11}$ B. $\sqrt{10}$ C. 3 D. $2\sqrt{2}$ E. $\sqrt{7}$



过A作$AH\perp BC$

$$AD^2=AH^2+DH^2$$

$$\begin{cases}AB^2=16=AH^2+BH^2=AH^2+(4-DH)^2\\AC^2=36=AH^2+CH^2=AH^2+(4+DH)^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}AH^2=\dfrac{135}{16}\\DH=\dfrac{5}{4}\end{cases}\qquad AD=\sqrt{\frac{135}{16}+\frac{25}{16}}=\sqrt{10}$$

跟学团 平面几何 · 直角三角形

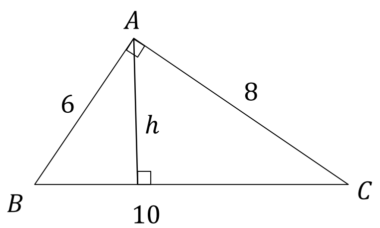
【模拟题】$\triangle ABC$的三条边长分别为6,8,10，那么最长边对应的高为（ C ）.

A. 4 B. 4.5 C. 4.8 D. 5 E. 6

由常用勾股数可知$\triangle ABC$为直角三角形

【标志词汇】<u>直角三角形斜边上的高⇒ 1. 直角边 × 直角边 = 斜边 × 高</u>

<u>2. 相似三角形</u>



$$AB\times AC=6\times 8=BC\times h=10h$$

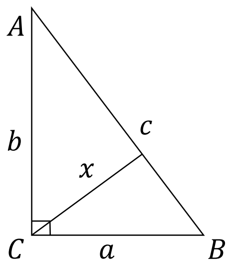
解得$h=\dfrac{48}{10}=4.8$

跟学团 平面几何・直角三角形

【模拟题】直角三角形的直角边为a,b，斜边为c，斜边上的高为x，则（D）.

A. $ab=x^2$　B. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x}$　C. $a^2+b^2=2x^2$　D. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{x^2}$　E. $\frac{b}{a}=\frac{1}{x}$

【标志词汇】直角三角形斜边上的高⟹ 直角边 × 直角边 = 斜边 × 高



$ab=cx$　　$a^2+b^2=c^2$

$a^2b^2=c^2x^2=(a^2+b^2)x^2$

$$\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{x^2}$$

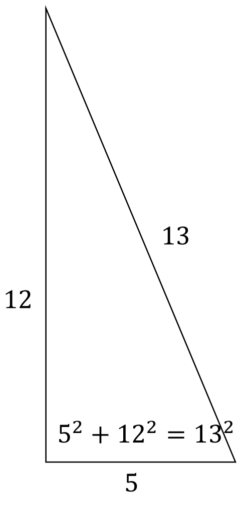
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{x^2}$$

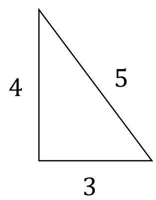
跟学团 平面几何・直角三角形

勾股定理 $a^2+b^2=c^2$　常用勾股数有：3,4,5　　6,8,10　　5, 12,13

注：每组常用勾股数各数字乘以相同倍数，结果仍为勾股数

成等差数列的勾股数，只有$\{3k,4k,5k\}$一种

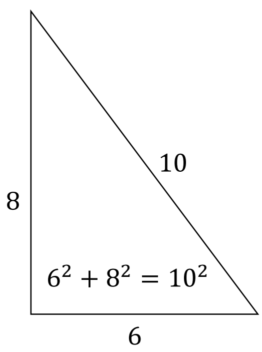




$3^2+4^2=5^2$

$(\sqrt{2}\times 3)^2+(\sqrt{2}\times 4)^2=(\sqrt{2}\times 5)^2$

$2\times 3^2+2\times 4^2=2\times 5^2$



跟学团 平面几何 · 直角三角形

【模拟题】三角形的三条边长分别为a,b,c，以下哪项可以充分推出△ABC为直角三角形<u>(1) (2)</u>

（1）△ABC的三边长之比为$1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$.

（2）△ABC的面积为$S=\frac{1}{2}ab$.

（3）$(c^2-a^2-b^2)(a^2-b^2)=0$.

（1）见比设k：设$a=k,b=\sqrt{2}k,c=\sqrt{3}k$

$$a^2+b^2=k^2+\left(\sqrt{2}k\right)^2=3k^3=c^2$$，边长关系满足勾股定理

（2）满足直角三角形判定

（3）$c^2-a^2-b^2=0$或$a^2-b^2=0$.

等腰或直角三角形

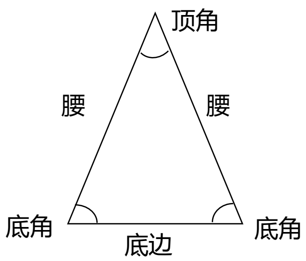
跟学团 平面几何 · 等腰三角形

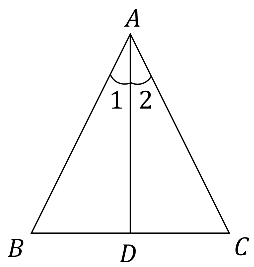
判定 1. 任意两个角相等

2. 任意两条边相等

3. 三线中有任两条重合

<u>三线：顶角的角平分线、底边中线、底边上的高</u>



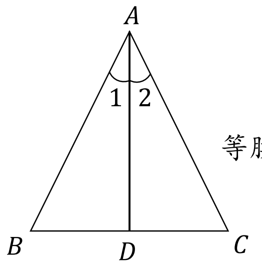


跟学团 平面几何·等腰三角形

性质 1. 等腰三角形两个底角相等

2. 等腰三角形两个腰相等

3. 三线合一：$\angle 1 = \angle 2 \Leftrightarrow AD \perp BC \Leftrightarrow BD = DC$



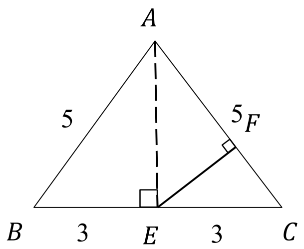
等腰三角形常用辅助线

【标志词汇】<u>等腰三角形缺少三线⇒补齐三线</u>

跟学团 平面几何·等腰三角形

【真题2013.10.07】如图$AB = AC = 5$，$BC = 6$，E是BC的中点，$EF \perp FC$.则$EF =$（ D ）.

A.1.2　　B.2　　C.2.2　　D.2.4　　E.2.5



【标志词汇】<u>等腰三角形缺少三线⇒补齐三线</u>

AE：三线合一

故$\triangle AEC$为边长为3,4,5的直角三角形，$AE = 4$

【标志词汇】<u>直角三角形斜边上的高⇒ 直角边 × 直角边 = 斜边 × 高</u>

$AE \times EC = 4 \times 3 = AC \times EF = 5EF$

解得$EF = 2.4$.

跟学团 平面几何 · 重要三角形

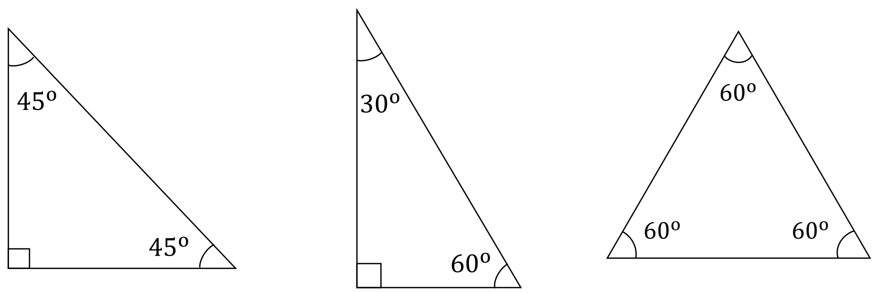
三角形
- 定义与性质性质
- 三角形分类
  - 直角三角形
  - 等腰三角形
  - 重要三角形：等腰直角△，30°直角△，等边△ ★
- 三角形面积、高、与等高模型 ★
- 相似三角形 ★

四边形：梯形、正方形、长方形、菱形

圆与扇形

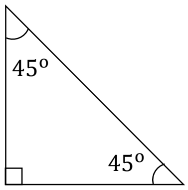
不规则图形（阴影）

跟学团 平面几何 · 重要三角形



跟学团 平面几何 · 重要三角形

重要三角形周长、边a、边b、边c、面积$S_{\triangle ABC}$ $\Rightarrow$ 任一项可推出其余



当三边长度分别为$1,1,\sqrt{2}$时，周长为<u>$2+\sqrt{2}$</u>，面积为<u>$\frac{1}{2}$</u>.

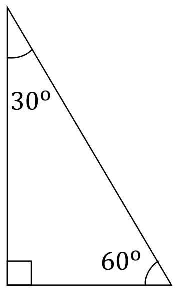
当三边长度分别为$\sqrt{2},\sqrt{2},2$时，周长为<u>$2+2\sqrt{2}$</u>，面积为<u>1</u>.

【等腰直角三角形】<u>三边长度之比为$1:1:\sqrt{2}$</u>

若直角边为a，则斜边为$\sqrt{2}a$，周长为$(2+\sqrt{2})a$，面积$S=\frac{1}{2}a^2$

跟学团 平面几何 · 重要三角形

重要三角形周长、边a、边b、边c、面积$S_{\triangle ABC}$ $\Rightarrow$ 任一项可推出其余



【30°直角三角形】<u>三边长度之比为$1:\sqrt{3}:2$</u>

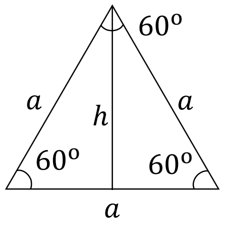
若短直角边为a

则长直角边为$\sqrt{3}a$，斜边为$2a$，周长为$(3+\sqrt{3})a$，面积$S=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

短边为2时，长直角边为<u>$2\sqrt{3}$</u>，斜边为<u>4</u>，周长为<u>$6+2\sqrt{3}$</u>，面积为<u>$2\sqrt{3}$</u>.

跟学团 平面几何 · 重要三角形

重要三角形周长、边a、边b、边c、面积$S_{\triangle ABC}$ ⇒ 任一项可推出其余



等边三角形判定

三条边相等的三角形是等边三角形；

任一个内角为60°的等腰三角形为等边三角形；

有两个内角均为60°的三角形是等边三角形

【等边三角形】<u>边长与高之比为$2:\sqrt{3}$</u>

边长为a的等边三角形高为$\frac{\sqrt{3}}{2}a$，面积$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

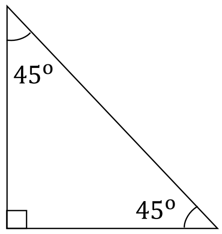
跟学团 平面几何 · 重要三角形

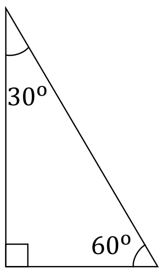
重要三角形周长、边a、边b、边c、面积$S_{\triangle ABC}$ ⇒ 任一项可推出其余

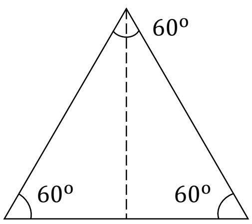
【等腰直角三角形】<u>三边长度之比为$1:1:\sqrt{2}$</u>

【30°直角三角形】<u>三边长度之比为$1:\sqrt{3}:2$</u>

【等边三角形】<u>边长与高之比为$2:\sqrt{3}$</u>　边长为a的等边三角形高为$\frac{\sqrt{3}}{2}a$，面积$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$



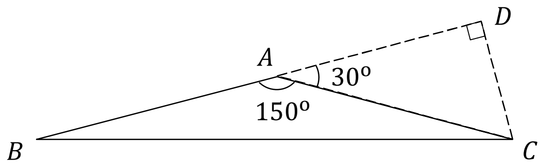




跟学团 平面几何 · 重要三角形

【模拟题】顶角是$150°$的等腰三角形，腰上高的长与腰长的比是（ B ）.

A. $1:3$　　B. $1:2$　　C. $1:(2+\sqrt{3})$　　D. $1:\sqrt{3}$　　E. $1:(2-\sqrt{3})$

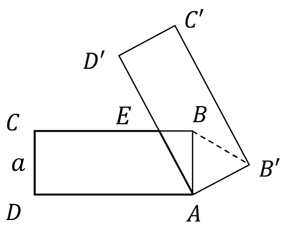


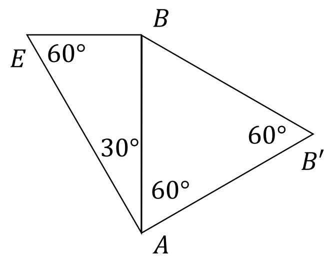
$DC:AC=1:2$

跟学团 平面几何 · 重要三角形

【真题2012.10.24】如图，长方形$ABCD$的长与宽分别为$2a$和a，将其以顶点A为中心顺时针旋转$60°$.则四边形$AECD$的面积为$24-2\sqrt{3}$.（　）

（1）$a=2\sqrt{3}$　　（2）$\triangle AB'B$的面积为$3\sqrt{3}$





边长为a的等边三角形面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$S_{\triangle ABB'}=3\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}(AB)^2$

$(AB)^2=12$，$AB=2\sqrt{3}=a$

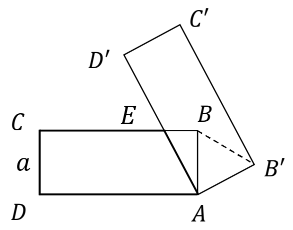
重要三角形 ⇒ 知一推所有

【技巧】两条件等价，常选D

跟学团 平面几何 · 重要三角形

【真题2012.10.24】 如图，长方形$ABCD$的长与宽分别为$2a$和a，将其以顶点A为中心顺时针旋转$60°$.则四边形$AECD$的面积为$24-2\sqrt{3}$.（ D ）

（1）$a=2\sqrt{3}$　　　　（2）$\triangle AB'B$的面积为$3\sqrt{3}$



$a=2\sqrt{3}=AB$

【30°直角三角形】 三边长度之比为$1:\sqrt{3}:2$

$$\frac{BE}{AB}=\frac{BE}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad BE=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2$$

重要三角形 ⇒ 知一推所有

$$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

$$S_{AECD}=2\sqrt{3}\times 4\sqrt{3}-2\sqrt{3}=24-2\sqrt{3}$$

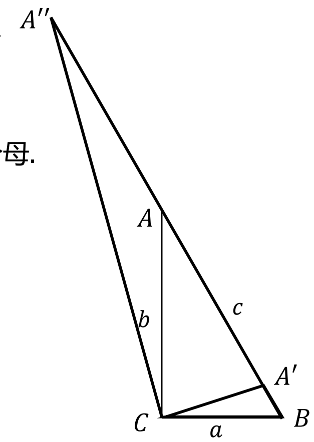
跟学团 平面几何 · 重要三角形

【真题2020.16】（条件充分性判断）在$\triangle ABC$中，$\angle B=60°$，则$\frac{c}{a}>2$.（ B ）

（1）$\angle C<90°$.　　（2）$\angle C>90°$.

【类型判断】A或B 类

$\frac{c}{a}$比值变化：锁定分母变分子/锁定分子变分母.



跟学团 平面几何 · 等高模型

三角形
- 定义与性质性质
- 三角形分类
  - 直角三角形
  - 等腰三角形
  - 重要三角形：等腰直角△，30°直角△，等边△ ★
- 三角形面积、高、与等高模型 ★
- 相似三角形 ★

四边形：梯形、正方形、长方形、菱形

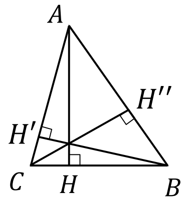
圆与扇形

不规则图形（阴影）

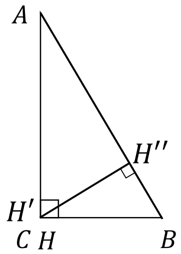
跟学团 平面几何 · 等高模型

三角形面积：$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\times$任意一个底边$\times$相对应的高

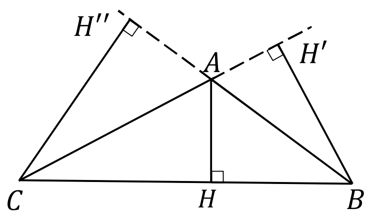
锐角三角形



直角三角形



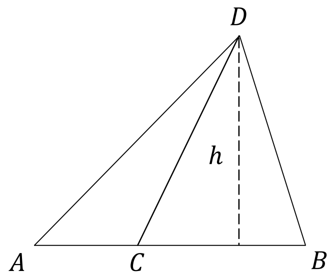
钝角三角形



$$S=\frac{1}{2}AH\cdot BC=\frac{1}{2}BH'\cdot AC=\frac{1}{2}CH''\cdot AB$$

跟学团 平面几何 · 等高模型

h同时为$\triangle ACD$，$\triangle BCD$，$\triangle ABD$的高



面积

$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot h$

$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot h$

$S_{\triangle AB}\ =\frac{1}{2}AB\cdot h$

面积比

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{\frac{1}{2}AC\cdot h}{\frac{1}{2}BC\cdot h}=\frac{AC}{BC}$$

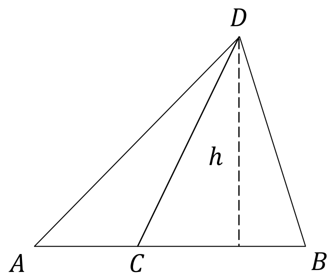
$$\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot h}{\frac{1}{2}AB\cdot h}=\frac{BC}{AB}$$

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{\frac{1}{2}AC\cdot h}{\frac{1}{2}AB\cdot h}=\frac{AC}{AB}$$

【标志词汇】底边在同一条直线上，共用顶点的三角形 ⟹ 面积比=底边比

跟学团 平面几何 · 等高模型

h同时为$\triangle ACD$，$\triangle BCD$，$\triangle ABD$的高



面积

$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot h$

$S_{\triangle BC}\ =\frac{1}{2}BC\cdot h$

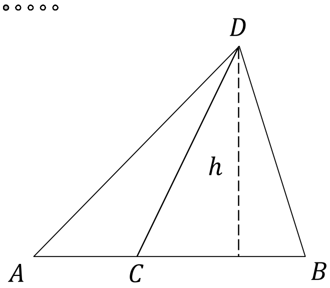
$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot h$

面积和

$S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BC}\ =\frac{1}{2}(AC+BC)h$

【标志词汇】底边在同一条直线上，共用顶点的三角形 ⟹ 面积和= $\frac{1}{2}$底边和 × 高

跟学团 平面几何 · 等高模型



【标志词汇】底边在同一条直线上，共用顶点的三角形 ⇒ 等高模型 底同线+共顶点

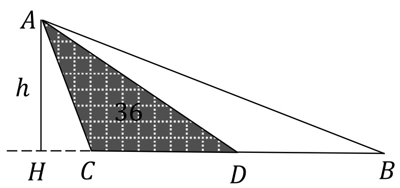
面积比 = 底边比，面积和 = $\frac{1}{2}$(底边和) × 高

跟学团 平面几何 · 等高模型

【模拟题】如图，已知△ ABC中，$DC = BD$，阴影部分的面积是36cm^2，则△ ABC的面积为（ D ）.

A. 48 cm^2　　B. 54 cm^2　　C. 60 cm^2　　D. 72 cm^2　　E. 80 cm^2

【标志词汇】底边在同一条直线上，共用顶点的三角形 ⇒ 等高模型



h是△ ABC、△ ADC、△ ABD共同的高

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}CD \cdot h = 36$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot h = 36$$

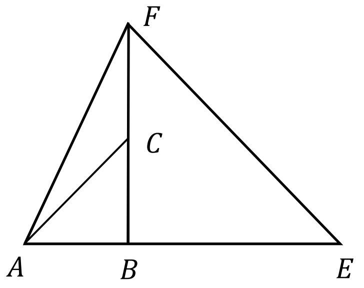
$$DC = BD$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ABD} = 36 + 36 = 72$$

跟学团 平面几何 · 等高模型

【真题2014.01.03】如图，已知$AE=3AB$，$BF=2BC$.若$\triangle ABC$的面积是2，则$\triangle AEF$的面积为（ B ）

A.14　　B.12　　C.10　　D.8　　E.6



【标志词汇】线段比与面积比⇒1.等高模型 2.相似△

【标志词汇】底同线+共顶点 ⇒ 等高模型

$\triangle ABF$，$\triangle ABC$底边在BF上，共用顶点A

$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle ABF}:=BC:BF=1:2$

$\triangle AEF$，$\triangle ABF$底边在AE上，共用顶点F

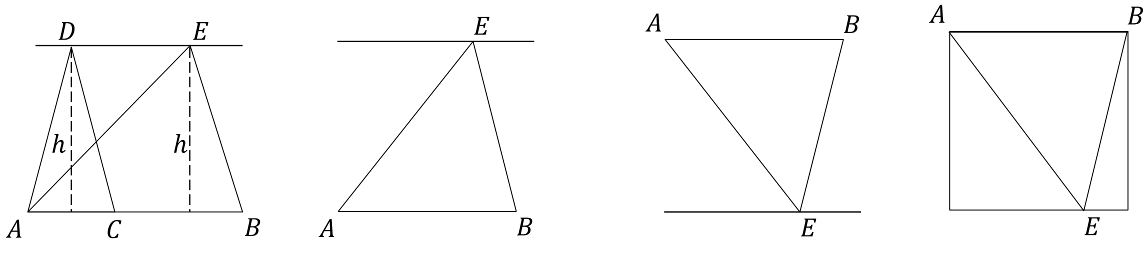
$S_{\triangle ABF}:S_{\triangle AEF}=AB:AE=1:3=2:6$

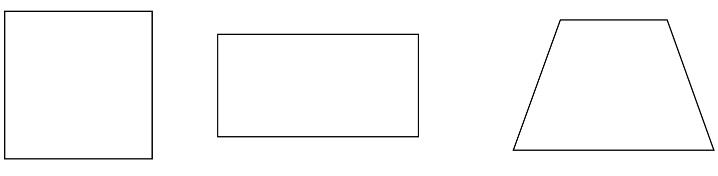
$S_{\triangle AEF}=3S_{\triangle ABF}=6S_{\triangle ABC}=12$

跟学团 平面几何 · 等高模型

【标志词汇】底同线+共顶 点⇒ 等高模型　面积比 = 底边比，面积和 = $\frac{1}{2}$(底边和) × 高

【标志词汇】底同线+顶同线 ⇒ 等高模型

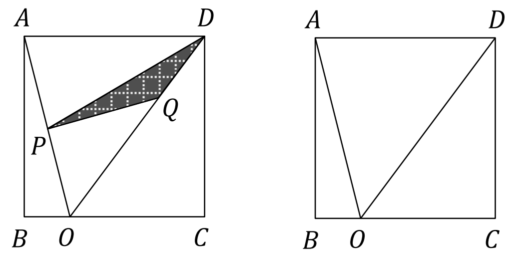




跟学团 平面几何·等高模型

【真题2019.21】如图，已知正方形$ABCD$面积，O为BC上一点，P为AO的中点，Q为DO上一点，则能确定三角形PQD的面积.（　）

（1）O为BC的三等分点.　　（2）Q为DO的三等分点.



【标志词汇】底同线+共顶点 ⟹ 等高模型

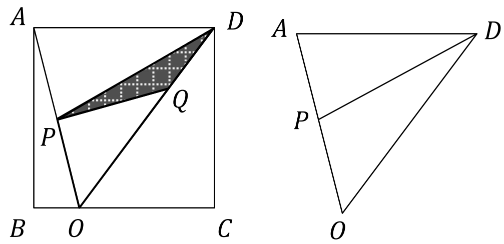
$S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$恒成立

跟学团 平面几何·等高模型

【真题2019.21】如图，已知正方形$ABCD$面积，O为BC上一点，P为AO的中点，Q为DO上一点，则能确定三角形PQD的面积.（ B ）

（1）O为BC的三等分点.　　（2）Q为DO的三等分点.

【标志词汇】底同线+共顶点 ⟹ 等高模型



$\triangle POD$，$\triangle PQD$底边在OQ上，共用顶点P

$S_{\triangle PQD}=\frac{1}{3}S_{\triangle POD}=\frac{1}{12}S_{\square ABCD}$

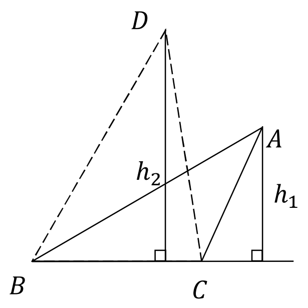
$\triangle AOD$，$\triangle POD$底边在AO上，共用顶点D

$S_{\triangle POD}=\frac{1}{2}S_{\triangle AOD}=\frac{1}{4}S_{\square ABCD}$

跟学团 平面几何·等高模型

【真题2020.10】如图，在△ ABC中，$\angle ABC=30°$，将线段AB绕点B旋转至DB，使$\angle DBC=60°$，则△ DBC与△ ABC的面积之比为（ E ）.

A.1　　B.$\sqrt{2}$　　C.2　　D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　E.$\sqrt{3}$



$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot h_1$　　$S_{\triangle DBC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot h_2$

$$\frac{S_{\triangle DBC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot h_2}{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot h_1}=\frac{h_2}{h_1}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}AB}{\frac{1}{2}AB}=\sqrt{3}$$

【30°直角三角形】三边长之比为$1:\sqrt{3}:2$

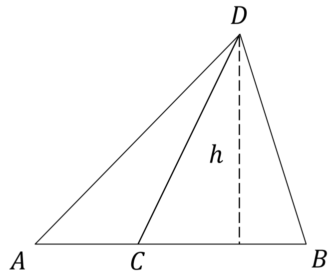
$h_1=\frac{1}{2}AB$，$h_2=\frac{\sqrt{3}}{2}BD=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$

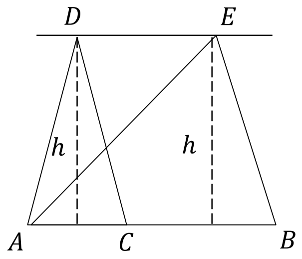
跟学团 平面几何·等高模型

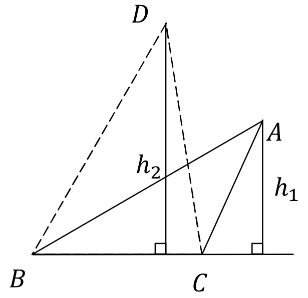
【标志词汇】底同线+共顶点/顶同线 ⇒ 等高模型

面积比 = 底边比，面积和 = $\frac{1}{2}$(底边和) × 高

【标志词汇】同底+不同顶 ⇒ 面积比=高之比







跟学团 平面几何

- 三角形
  - 定义与性质性质
  - 三角形分类
    - 直角三角形
    - 等腰三角形
    - 重要三角形：等腰直角△，30°直角△，等边△ ★
  - 三角形面积、高、与等高模型 ★
  - 相似三角形 ★

四边形：梯形、正方形、长方形、菱形

圆与扇形

不规则图形（阴影）

跟学团 平面几何・相似三角形

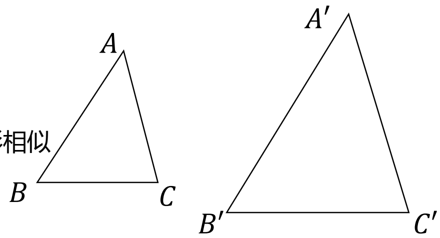
相似三角形判定 形状一样，大小不一样的三角形

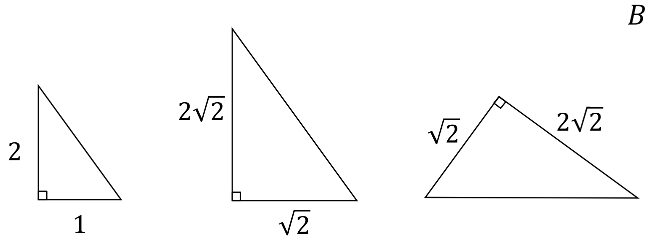
（1）有两角对应相等

（2）三条边对应成比例

（3）有一角相等，且夹这等角的两边对应成比例

（4）一条直角边与一条斜边对应成比例的两个直角三角形相似





跟学团 平面几何 · 相似三角形

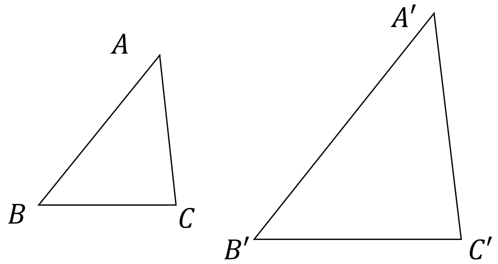
相似三角形性质

（1）对应角相等

（3）对应一切线段成比例（这个比例叫做相似比）

对应边、对应高、对应中线、对应角平分线、外接圆半径、内切圆半径、周长

（4）面积比 = 相似比^2

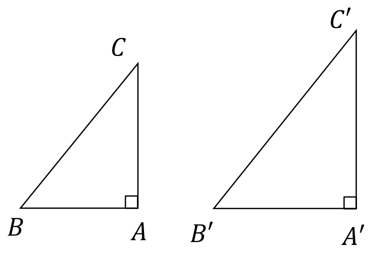


跟学团 平面几何 · 相似三角形

【真题2017.11】已知$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$满足$AB:A'B'=AC:A'C'=2:3$，$\angle A+\angle A'=\pi$，则$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的面积之比为（ E ）

A.$\sqrt{2}:\sqrt{3}$　　B.$\sqrt{3}:\sqrt{5}$　　C.$2:3$　　D.$2:5$　　E.$4:9$

【技巧】<u>几何问题中的具体化 ⟹ 锁定角度、点线面的特殊关系</u>



假设$\angle A=\angle A'=\frac{\pi}{2}=90^0$

$AB:A'B'=AC:A'C'=2:3$

$S_{\triangle ABC}$和$S_{\triangle A'B'C'}$相似，相似比为$2:3$

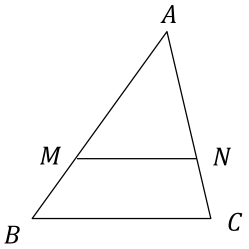
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$$

【相似三角形判定】有一角相等，且夹这等角的两边对应成比例

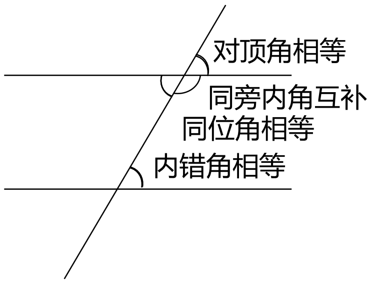
跟学团 平面几何 · 相似三角形

两大难点：1.找可能相似的三角形　2.寻找对应角、对应边

【标志词汇】三角形内出现边的平行线 ⇒ 此平行线分割出的小三角形与大三角形相似



A字型相似

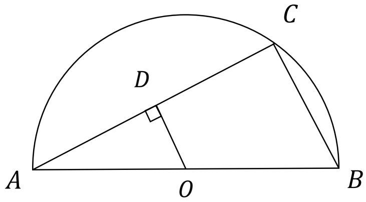


跟学团 平面几何 · 相似三角形

【真题2014.01.20】如图，O是半圆的圆心，C是半圆上的一点，$OD \perp AC$，则能确定OD的长（ A ）

（1）已知BC的长　　（2）已知AO的长.

【标志词汇】A字型相似三角形内出现边的平行线 ⇒ 此平行线分割出的小三角形与大三角形相似



直径所对的圆周角是直角，AB为圆O的直径，$AC \perp BC$

$OD \perp AC$，$OD // AC$，故$\triangle ABC$与$\triangle AOD$相似

相似比$\frac{OD}{BC} = \frac{OA}{AB} = \frac{1}{2}$，$OD = \frac{1}{2}BC$

条件（1）已知BC的长，可以确定OD的长

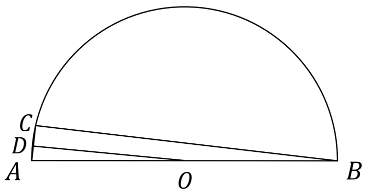
条件（2）已知AO的长，不能确定OD的长

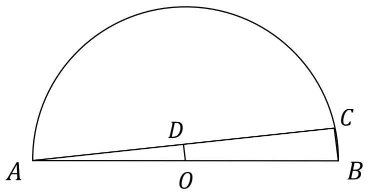
跟学团 平面几何 · 相似三角形

【**真题2014.01.20**】如图，O是半圆的圆心，C是半圆上的一点，$OD\perp AC$，则能确定OD的长（ A ）

（1）已知BC的长　　　　（2）已知AO的长.

条件（2）已知AO的长，不能确定OD的长**【极限分析法】**



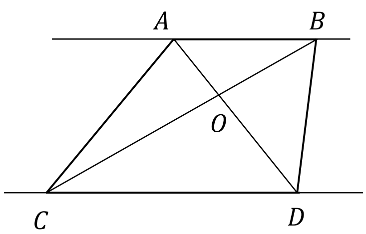


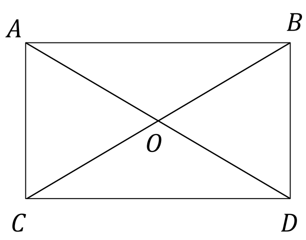
跟学团 平面几何 · 相似三角形

两大难点：1.找可能相似的三角形　2.寻找对应角、对应边

【标志词汇】<u>梯形/矩形的两条对角线 ⟹ 对角线分割出的三角形相似.</u>

此处同时符合等高模型，易联合出题.





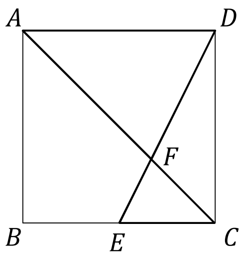
8字型相似

跟学团 平面几何 · 相似三角形

【模拟题】如图所示，正方形$ABCD$，AC为对角线，E是BC的中点，DE交AC于点F，若$DE=15$，则EF等于（ C ）

A.3　　B.4　　C.5　　D.6　　E.7

【标志词汇】 **8字型相似**梯形/矩形的两条对角线 ⟹ 对角线分割出的三角形相似.



对应角所夹的边为对应边

$\triangle EFC$与$\triangle AFD$相似 对应边 $\begin{cases} AD与CE \\ AF与CF \\ EF与DF \end{cases}$ 成比例

E是BC的中点，$BC=AD$

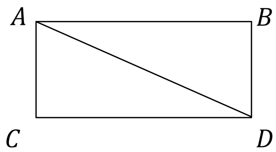
$CE:BC=1:2=CE:AD=EF:DF$

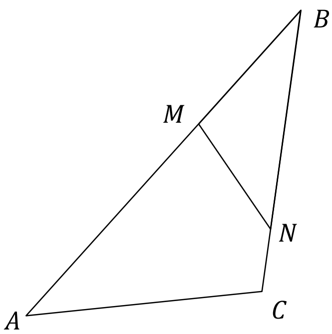
$DE=15$，$EF=\dfrac{1}{1+2}\times 15=5$

跟学团 平面几何 · 相似三角形

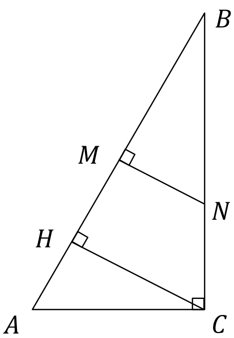
【标志词汇 】矩形+一条对角线 ⟹ 这条对角线分割出的两个三角形相似

【标志词汇 】直角三角形斜边上的垂线 ⟹ 垂线分割出的各三角形均与原三角形相似.





一般三角形



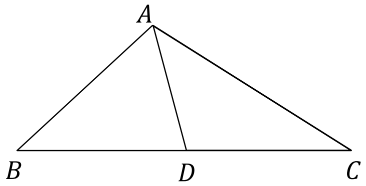
直角三角形

反A字型相似

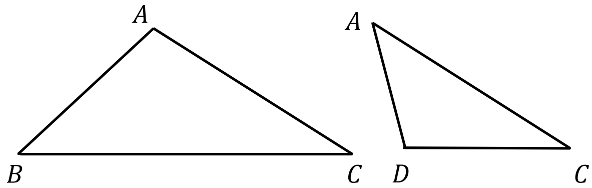
跟学团 平面几何 · 相似三角形

【模拟题】在$\triangle ABC$中，AD是中线，$BC=4$，$\angle B=\angle DAC$，则线段AC的长等于（ A ）.

A. $2\sqrt{2}$　　B. 2　　C. 3　　D. $2\sqrt{3}$　　E. $3\sqrt{2}$



【标志词汇】<u>$\triangle ABC$与$\triangle DAC$符合反A字型相似</u>



对应角的对边为对应边

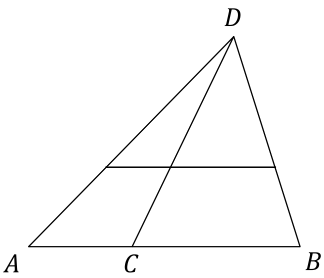
$$\frac{AC}{BC}=\frac{DC}{AC}$$

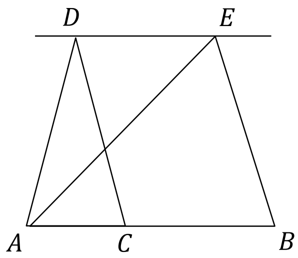
$$AC^2=DC\cdot BC=2\times4=8$$

$$AC=2\sqrt{2}$$

跟学团 平面几何 · 相似与等高

【等高模型】<u>面积比 = 底边比</u>　　**【相似三角形】**<u>面积比 = 相似比^2</u>





边长之比 ⇕ 面积之比 ⇒

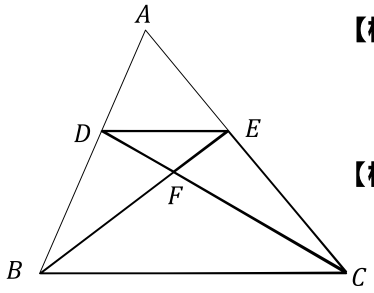
等高模型　共用一个顶点/顶点在平行线上

相似三角形　共用一个顶角/顶角相等

跟学团 平面几何・相似与等高

【模拟题】已知如图，$DE//BC$， $DF:FC=1:3$，求：

（1）$S_{\triangle DEF}:S_{\triangle EFC}$；（2）$S_{\triangle DEF}:S_{\triangle BFC}$；（3）$S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}$；（4）$S_{\triangle ADE}:S_{BCED}$



【标志词汇】$\triangle DEF$与$\triangle EFC$底同线 + 共顶点E $\Longrightarrow$ 等高模型

$$S_{\triangle DEF}:S_{\triangle EFC}=DF:FC=1:3$$

【标志词汇 】$\triangle DEF$与$\triangle BFC$ 符合8字型相似

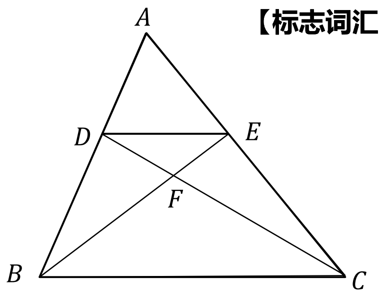
面积比 = 相似比^2

$$S_{\triangle DEF}:S_{\triangle BFC}=DF^2:FC^2=1:9$$

跟学团 平面几何・相似与等高

【模拟题】已知如图，$DE//BC$， $DF:FC=1:3$，求：

（1）$S_{\triangle DEF}:S_{\triangle EFC}$；（2）$S_{\triangle DEF}:S_{\triangle BFC}$；（3）$S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}$ ；（4）$S_{\triangle ADE}:S_{BCED}$



【标志词汇 】$\triangle ADE$与$\triangle ABC$ 符合A字型相似

面积比 = 相似比^2

$$DE:BC=DF:FC=1:3$$

$$S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}=DE^2:BC^2=1:9$$

$$S_{\triangle ADE}:S_{BCED}=1:8$$

跟学团 平面几何 · 四边形

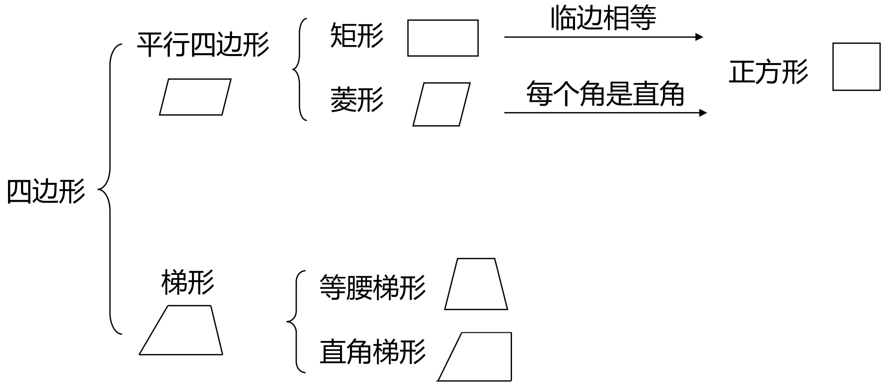
- 三角形
  - 定义与性质性质
  - 三角形分类
    - 直角三角形
    - 等腰三角形
    - 重要三角形：等腰直角△，30°直角△，等边△ ★
  - 三角形面积、高、与等高模型 ★
  - 相似三角形 ★

四边形：梯形、正方形、长方形、菱形

圆与扇形

不规则图形（阴影）

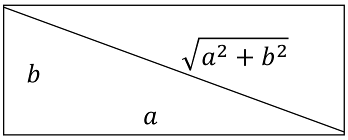
跟学团 平面几何 · 四边形

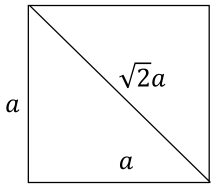


跟学团 平面几何 · 四边形

矩形 矩形是四个角均是直角的特殊平行四边形，矩形包括正方形和长方形.

正方形 正方形是临边相等的特殊矩形：即$a=b$





面积$S=ab$

周长$C=2(a+b)$

$a^2+b^2=$对角线^2

面积$S=a^2$

周长$C=4a$

$a^2+a^2=$对角线^2

跟学团 平面几何 · 四边形

【真题2012.01.24】某户要建一个长方形的羊栏，则羊栏的面积大于500m^2.（C）

（1）羊栏的周长为120m.　　（2）羊栏对角线的长不超过50m.

设羊栏的长为a，宽为b，题干要求$ab>500$.

条件（1）：周长$2a+2b=120$，即$a+b=60$，如$a=1$，$b=59$，不充分.

条件（2）：$a^2+b^2\le 2500$，如$a=1$，$b=1$，不充分

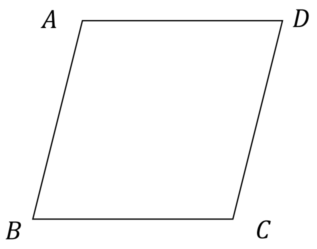
联合条件（1）与条件（2）$\begin{cases}a+b=60\\a^2+b^2\le 2500\end{cases}$

【标志词汇】给定a^2+b^2，ab，$a+b$和$a-b$中任意两个$\Rightarrow$ 利用完全平方公式推出其余

$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)\ge 3600-3600-2500=1100$　　$ab\ge 550>500$

跟学团 平面几何 · 四边形

菱形 四条边长度相等的平行四边形为菱形

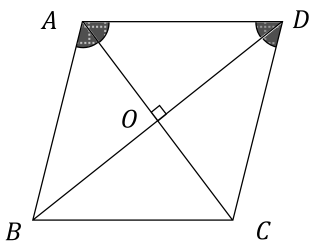


菱形的四条边长度相等，即$AB = BC = CD = DA$

菱形四个内角中，对角相等、邻角互补

跟学团 平面几何 · 四边形

菱形 四条边长度相等的平行四边形为菱形



菱形对角线互相垂直且平分，即$AC \perp BD$且$AO = CO, BO = DO$.

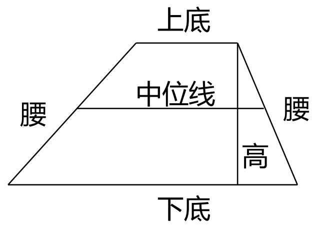
菱形的对角线平分顶角，即$\angle ADB = \angle CDB$，$\angle BAC = \angle DAC$等.

菱形的对角线把菱形分为4个全等的直角三角形，$S = \frac{\text{对角线} \times \text{对角线}}{2} = 4S_{AOD}$

【1991.01.08】

跟学团 平面几何 · 四边形

梯形 <u>只有一组对边平行，另一组对边不平行的四边形叫做梯形</u>



$$梯形面积 = \frac{(上底 + 下底) \times 高}{2}$$

等腰梯形 <u>两腰长度相等⇔两底角相等</u>

梯形中位线 <u>连接梯形两腰中点的线段叫做梯形的中位线</u>

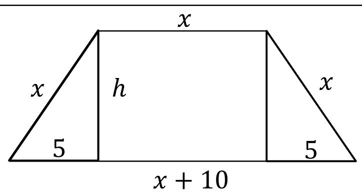
梯形中位线到上底和下底距离相等　$中位线 = \frac{上底 + 下底}{2}$

跟学团 平面几何 · 四边形

【真题2011.01.18】如图所示，等腰梯形的上底与腰均为x，下底为$x+10$，则$x=13$.（ D）

（1）该梯形的上底与下底之比为$13:23$.

（2）该梯形的面积为216.



条件（1）$\frac{x}{x+10} = \frac{13}{23}$

$23x = 13x + 130$，解得$x = 13$

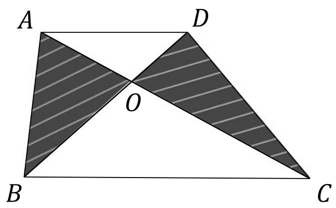
条件（2）$\left.\begin{array}{l} \frac{(x+10+x)\times h}{2} = (x+5)h = 216 \\ h^2 = x^2 - 5^2 \end{array}\right\}$ $(x+5)\sqrt{x^2-25} = 216$　验证$x = 13$

【技巧】<u>求值时优先验证常用勾股数</u>

跟学团 平面几何 · 四边形

【模拟题】如图所示，在梯形$ABCD$中，$AD \parallel BC$，$S_{\triangle AOD}=8$，梯形的上底长是下底长的$\frac{2}{3}$，则阴影部分的面积是（ A ）.

A.24　　B.25　　C.26　　D.27　　E.28



【标志词汇 】$\triangle AOD$与$\triangle BOC$符合8字型相似

$$\frac{AD}{BC}=\frac{AO}{CO}=\frac{DO}{BO}=\frac{2}{3}$$

【标志词汇】$\triangle AOD$与$\triangle COD$底同线＋共顶点D ⟹ 等高模型

$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COD}}=\frac{AO}{CO}=\frac{2}{3}=\frac{8}{12}，S_{\triangle COD}=12$$

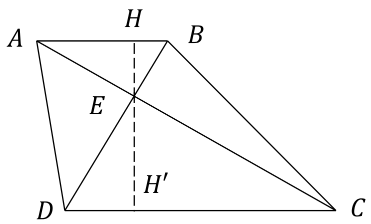
【标志词汇】$\triangle AOD$与$\triangle AOB$底同线＋共顶点A ⟹ 等高模型 $\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle AOB}}=\frac{DO}{BO}=\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$，$S_{\triangle AOB}=12$

跟学团 平面几何 · 四边形

【真题2016.08】如图，在四边形$ABCD$中，$AB//CD$，与AB与CD的边长分别为4和8.若$\triangle ABE$的面积为4，则四边形$ABCD$的面积为（ D ）

A.24　　B.30　　C.32　　D.36　　E.40

【标志词汇】$\triangle ABE$与$\triangle CDE$符合8字型相似 相似三角形对应高成比例（相似比）



$$\frac{EH}{EH'}=\frac{AB}{CD}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\qquad EH'=4$$

$$S_{\triangle ABE}=4=\frac{1}{2}AB\cdot EH=2EH\qquad EH=2$$

梯形高$HH'=2+4=6$

$$S_{ABCD}=\frac{(4+8)\times 6}{2}=36$$

跟学团 平面几何 · 圆与扇形

三角形
- 定义与性质性质
- 三角形分类
  - 直角三角形
  - 等腰三角形
  - 重要三角形：等腰直角△，30°直角△， 等边△ ★
- 三角形面积、高、与等高模型 ★
- 相似三角形 ★

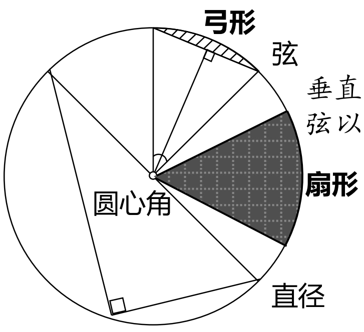
四边形：梯形、正方形、长方形、菱形

圆与扇形

不规则图形（阴影）

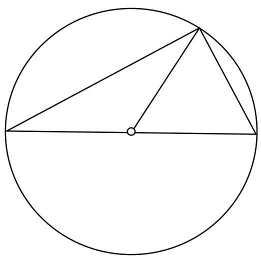
跟学团 平面几何 · 圆与扇形

圆 平面上到一定点距离相等的所有点的集合称之为一个圆.这一定点为圆心，距离为圆的半径.



垂直于弦的直径平分这条弦以及弦所对的两条弧

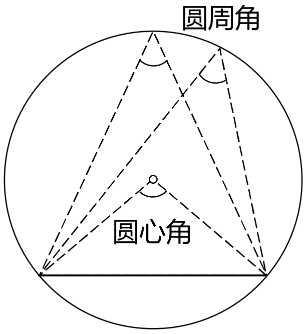
直径所对的圆周角是直角



遇见圆上点，连圆心
遇见弦，连圆心

跟学团 平面几何 · 圆与扇形

圆 平面上到一定点距离相等的所有点的集合称之为一个圆.这一定点为圆心，距离为圆的半径.



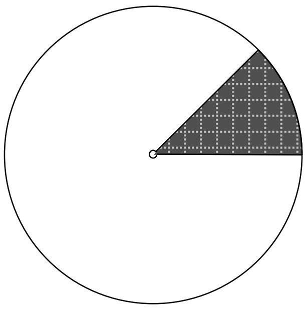
同一段弧所对的圆周角是圆心角的一半

圆面积：$S=\pi r^2$

圆周长：$l=2\pi r$

跟学团 平面几何 · 圆与扇形

圆 平面上到一定点距离相等的所有点的集合称之为一个圆.这一定点为圆心，距离为圆的半径.



圆面积：$S=\pi r^2$

扇形面积：$S=\dfrac{\text{圆心角}}{\text{周角}}\pi r^2$

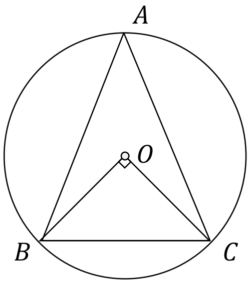
$=\dfrac{\text{圆心角弧度}}{2\pi}\pi r^2=\dfrac{\text{圆心角角度}}{360^o}\pi r^2$

						平角	周角
角度	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	180^o	360^o
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

跟学团 平面几何 · 圆与扇形

【真题 2020.12】如图圆O的内接△ ABC是等腰三角形，底边$BC=6$，顶角为$\frac{\pi}{4}$，则圆O的面积为（ C ）.

A.12π B.16π C.18π D.32π E.36π



遇见弦，连圆心

角度	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

$\angle A=\frac{\pi}{4}$

同一段弧所对圆周角是圆心角的一半 $\angle BOC=\frac{\pi}{2}$

$BO=CO=r$，△ BOC为等腰直角三角形

三边之比为$1:1:\sqrt{2}$

$BC=6$，$\frac{BO}{BC}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$BO=CO=r=\frac{6}{\sqrt{2}}$

圆O的面积$S=\pi r^2=18\pi$.

跟学团 平面几何 · 不规则图形（阴影）

- 三角形
  - 定义与性质性质
  - 三角形分类
    - 直角三角形
    - 等腰三角形
    - 重要三角形：等腰直角△，30^o直角△，等边△ ★
  - 三角形面积、高、与等高模型 ★
  - 相似三角形★

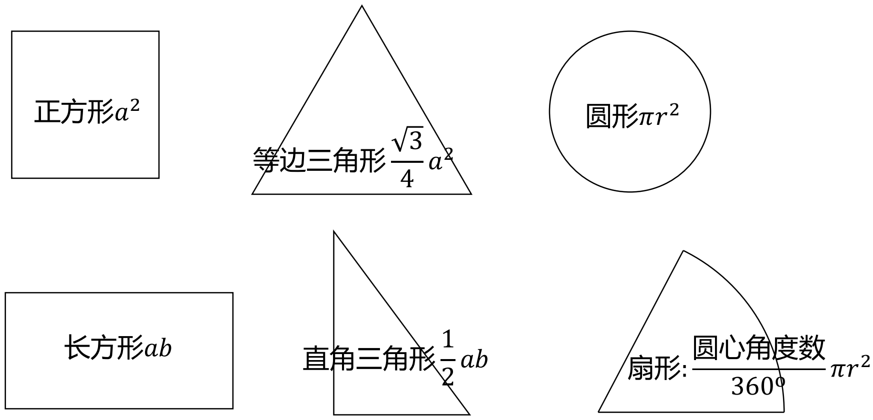
四边形：梯形、正方形、长方形、菱形

圆与扇形

不规则图形（阴影）

跟学团 平面几何 · 不规则图形（阴影）

【不规则图形处理核心】<u>通过规则图形的加和减等来计算不规则图形的面积</u>

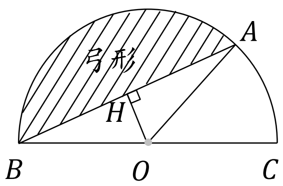


跟学团 平面几何 · 不规则图形（阴影）

【真题2015.04】如图BC是半圆的直径，且$BC=4$，$\angle ABC=30^o$，则图中阴影部分的面积为（ A ）

A.$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$ B.$\frac{4}{3}\pi-2\sqrt{3}$ C.$\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$ D.$\frac{2}{3}\pi+2\sqrt{3}$ E.$2\pi-2\sqrt{3}$

遇见弦，连圆心 设圆心为O，连接AO，过O对AB做垂线，垂足为H



$\angle ABC=30°$，$\angle BAO=30°$，$\angle AOB=120°$， $\angle AOH=60°$

$$S_{阴影}=S_{扇形AOB}-S_{\triangle AOB}=S_{扇形AOB}-2S_{\triangle AOH}$$

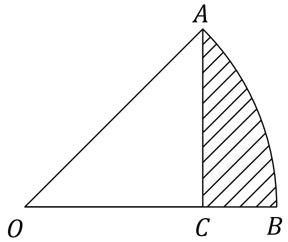
$$=\frac{120°}{360°}\pi r^2-2\times\frac{1\times\sqrt{3}}{2}=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

【30°直角三角形】<u>三边长度之比为$1:\sqrt{3}:2$</u>

跟学团 平面几何·不规则图形（阴影）

【真题2017.09】如图在扇形AOB中，$\angle AOB=\frac{\pi}{4}$，$OA=1$，$AC\perp OB$，则阴影部分的面积为(A).

$A.\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$ $B.\frac{\pi}{8}-\frac{1}{8}$ $C.\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ $D.\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}$ $E.\frac{\pi}{4}-\frac{1}{8}$



角度	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	180^o	360^o
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

$$S_{阴影}=S_{扇形AOB}-S_{RT\triangle AOC}=\frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi}\pi r^2-\frac{1}{2}AC\cdot OC$$

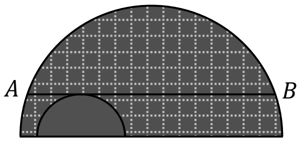
扇形AOB：O为圆心，AB为弧

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$

跟学团 平面几何·不规则图形（阴影）

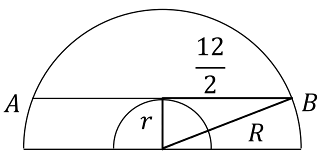
【真题2014.10.13】如下图所示，大小两个半圆的直径在同一直线上，弦AB与小半圆相切，且与直径平行，弦AB长为12.则图中阴影部分面积为（ C ）.

A.24π B.21π C.18π D.15π E.12π



$$S_{阴影}=S_{大半圆}-S_{小半圆}=\frac{1}{2}\pi(R^2-r^2)=18\pi$$

设大圆半径为R，小圆半径为r



【技巧】几何问题中的具体化 ⟹ 锁定角度、点线面的特殊关系

r、R与$\frac{AB}{2}$构成直角三角形

根据勾股定理，$R^2-r^2=36$

跟学团 平面几何

三角形
- 定义与性质性质
- 三角形分类
  - 直角三角形
  - 等腰三角形
  - 重要三角形：等腰直角△，30°直角△，等边△ ★
- 三角形面积、高、与等高模型 ★
- 相似三角形 ★

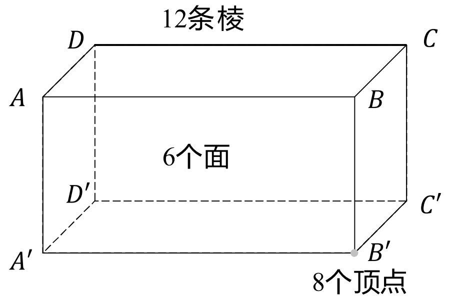
四边形：梯形、正方形、长方形、菱形

圆与扇形

不规则图形（阴影）

跟学团 立体几何

空间几何体 构成基本元素：点、线、面



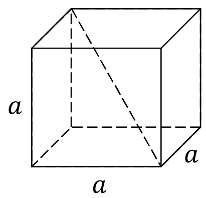
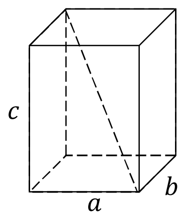
动态关系：点→线→面→体

跟学团 立体几何

基本应用：
- 正方体、长方体
- 柱体
- 球体

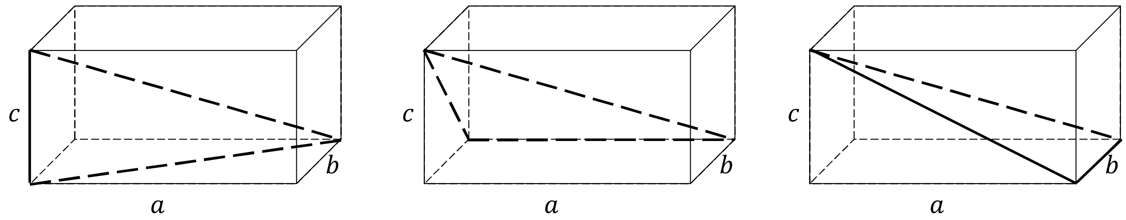
进阶应用：
- 切割、打孔与截面问题
- 平移
- 旋转
- 展开

跟学团 立体几何・正方体、长方体

	正方体	长方体
图像		
表面积	$6a^2$	$2(ab+bc+ac)$
体积	a^3	abc
体对角线	$\sqrt{3}a$	$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

跟学团 立体几何·正方体、长方体

棱→面对角线→体对角线 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 立体问题平面化



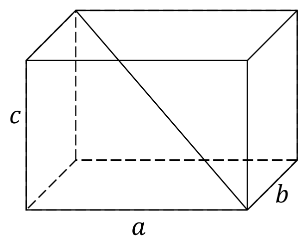
跟学团 立体几何·正方体、长方体

【真题2020.21】（条件充分性判断）能确定长方体的体对角线.（ ）

（1）已知长方体一个顶点的三个面的面积.

（2）已知长方体一个顶点的三个面的面对角线.

设长方体长宽高分别为a，b，c（$a>0$，$b>0$，$c>0$）要求确定$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$的值



条件（1）已知ab，ac，bc

三式相乘得$a^2b^2c^2$ 开平方得abc

分别除得$a=\dfrac{abc}{bc}$，$b=\dfrac{abc}{ac}$，$c=\dfrac{abc}{ab}$

可唯一解出a，b，c的具体值，故可求得$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$的值

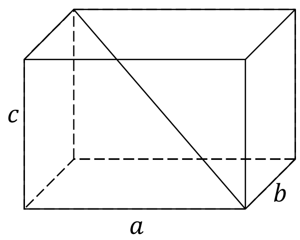
跟学团 立体几何·正方体、长方体

【真题2020.21】（条件充分性判断）能确定长方体的体对角线.（　　）

（1）已知长方体一个顶点的三个面的面积.

（2）已知长方体一个顶点的三个面的面对角线.

设长方体长宽高分别为a，b，c（$a>0$，$b>0$，$c>0$）要求确定$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$的值



条件（1）已知ab，ac，bc

以$\begin{cases} ab=1 \\ bc=2 \\ ac=3 \end{cases}$为例　　$a^2b^2c^2=1\times2\times3=6$　　$abc=\sqrt{6}$

分别除得$a=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$b=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$c=\sqrt{6}$

代入可求得$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$的值

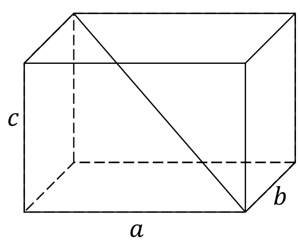
跟学团 立体几何·正方体、长方体

【真题2020.21】（条件充分性判断）能确定长方体的体对角线.（ D ）

（1）已知长方体一个顶点的三个面的面积.

（2）已知长方体一个顶点的三个面的面对角线.

设长方体长宽高分别为a，b，c（$a>0$，$b>0$，$c>0$）要求确定$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$的值



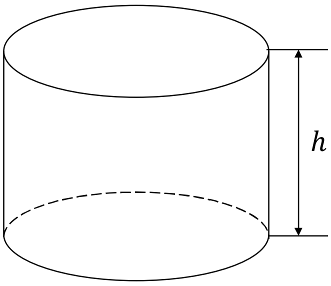
条件（2）已知$\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{b^2+c^2}$和$\sqrt{a^2+c^2}$

分别平方后得：a^2+b^2，b^2+c^2，a^2+c^2

三式相加得$2(a^2+b^2+c^2)$已知

可求得体对角线$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$的值，条件（2）单独充分.

跟学团 立体几何・柱体



设圆柱体高为h，底面半径为r，则

上下底面积：πr^2

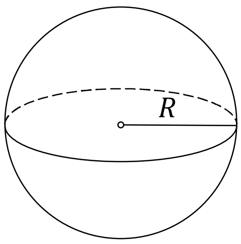
侧面积：$2\pi rh$

全表面积：$2\pi r^2+2\pi rh$

体积：$V=\pi r^2h$

柱体体积 = 底面积 × 高

跟学团 立体几何・球体



设球的半径为R，则有

体积：$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

表面积：$S=4\pi R^2$

跟学团 立体几何·球体

【模拟题】两个球形容器，若将大球中溶液的$\frac{2}{5}$倒入小球中，正好可装满小球，那么大球与小球的半径之比等于（ C ）

A. $5:3$　　B. $8:3$　　C. $\sqrt[3]{5}:\sqrt[3]{2}$　　D. $\sqrt[3]{20}:\sqrt[3]{5}$　　E. 以上结论均不正确

设大球半径为R，小球半径为r

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \frac{R}{r}=\sqrt[3]{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}}$$

跟学团 平面几何与立体几何

- 三角形
  - 定义与性质性质
  - 三角形分类
    - 直角三角形
    - 等腰三角形
    - 重要三角形
  - 三角形面积、高、与等高模型
  - 相似三角形
- 四边形：梯形、正方形、长方形、菱形
- 圆与扇形
- 不规则图形（阴影）

- 立体几何基础
  - 正方体、长方体
  - 柱体
  - 球体
- 立体几何进阶
  - 切割、打孔与截面问题
  - 平移
  - 旋转
  - 展开


一起加油