跟学团 质数与合数

自然数**N**：0，1，2，3，…等，叫作自然数.

↓

整数**Z**

- 正整数$\mathbf{Z}^{+}$
- 0
- 负整数$\mathbf{Z}^{-}$

→ 除法

- $a=bk$ 整除
  - 一个数本身：因数与倍数
  - **质数与合数**
  - 两个数之间：最大公因数与最小公倍数
- $a=bk+r$ 带余除法

跟学团 质数与合数

正整数a
- 若$a=1$，只有一个正因数1
- 若$a\geq 2$，a至少有两个正因数（1和它本身a）
  - 质数：两个正因数
  - 合数：三个及以上正因数

<u>常用的30以质数：**2，3，5，7，11，13，17，19**，23，29</u>

质数 对于大于等于2的正整数，若它有且只有两个正因数（即1和它本身），则称之为质数（素数）.

合数 对于大于等于2的正整数，若它除了1和它本身之外至少还有一个其他因数，则称之为合数.

跟学团 质数与合数

$$
\begin{aligned}
2700 &= 27 \times 100 \\
&= 3 \times 9 \times 10 \times 10 \\
&= 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \\
&= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \\
&= 2^2 \times 3^3 \times 5^2
\end{aligned}
$$

算术基本定理 任一大于等于 2 的整数均能表示成质数的乘积，即对于任意整数 $a \geq 2$，有：

$$a = p_1 p_2 \cdots \cdots p_n$$

其中p_k（$k = 1,2,\cdots,n$）为质数且$p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n$，且这样的分解式是**唯一**的.

这样的分解过程称为**因数分解**.

跟学团 质数与合数

【模拟题】整数48共有多少个因数？ 10个

$48 = 1 \times 48 = 2 \times 24 = 3 \times 16 = 4 \times 12 = 6 \times 8$

$48 = 4 \times 12 = 4 \times 3 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3^1$

选取零个2和零个3： $2^0 \times 3^0 = 1$

选取一个2和零个3：$2^1 \times 3^0 = 2 \times 1 = 2$

选取两个2和零个3：$2^2 \times 3^0 = 4 \times 1 = 4$

选取三个2和零个3：$2^3 \times 3^0 = 8 \times 1 = 8$

选取四个2和零个3：$2^4 \times 3^0 = 16 \times 1 = 16$

选取零个2和一个3： $2^0 \times 3^1 = 3$

选取一个2和一个3：$2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

选取两个2和一个3：$2^2 \times 3^1 = 4 \times 3 = 12$

选取三个2和一个3：$2^3 \times 3^1 = 8 \times 3 = 24$

选取四个2和一个3：$2^4 \times 3^1 = 16 \times 3 = 48$

跟学团 质数与合数

【模拟题】正整数X分解质因数可写成$X=2^m\times 3^n$，若X的二分之一是完全平方数，X的三分之一是完全立方数，那么$m+n$的最小值为（ C ）.

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8　　E.9

$$\frac{1}{2}X=\frac{1}{2}\times 2^m\times 3^n=2^{-1}\times 2^m\times 3^n=2^{m-1}\times 3^n$$

负指数幂 = 取倒数

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m}$$

$$\frac{1}{3}X=\frac{1}{3}\times 2^m\times 3^n=3^{-1}\times 2^m\times 3^n=2^m\times 3^{n-1}$$

$m-1$，n均为2的倍数　　m，$n-1$均为3的倍数

【穷举验证】m的最小值为3，n的最小值为4　　$m+n$的最小值为7

跟学团 质数与合数

【真题2014.01.10】若几个质数的乘积为770，则它们的和为（ E ）.

A. 85　　B. 84　　C. 28　　D. 26　　E. 25

【标志词汇】<u>给定一个较大的数，并且它是某些数的乘积 $\Rightarrow$ 因数分解为多个质数的乘积.</u>

“瞪眼法” $770=77\times 10=7\times 11\times 2\times 5$　　$2+5+7+11=25$

竖式除法因数分解

$$\begin{array}{r|l} 2 & 770 \\ 5 & 385 \\ 7 & 77 \\ & 11 \end{array}$$

因数分解$770=2\times 5\times 7\times 11$，故$2+5+7+11=25$.

跟学团 质数与合数

【模拟题】1373除以某质数，余数为8，则这个质数为（ C ）.

A. 7　　B. 11　　C.13　　D. 17　　E. 19

【标志词汇】整数a除以整数b，余数为$r \Rightarrow$ 有等式$a = bk + r$（其中k为整数，$0 \le r < b$）.

1373除以某质数p余数为8 $\Rightarrow$ 有等式$1373 = kp + 8$（p为质数且$p > 8$）

$1365 = kp$，即p为1365的大于8的质因数.

【标志词汇】给定一个较大的数，并且它是某些数的乘积 $\Rightarrow$ 因数分解为多个质数的乘积.

"瞪眼法"　末位为5⇒可被5整除

各位数字之和$1 + 3 + 6 + 5 = 15 \Rightarrow$可被3整除

$\frac{1365}{3 \times 5} = 91 = 7 \times 13$　　$1365 = 3 \times 5 \times 7 \times \mathbf{13}$

跟学团 质数与合数

【模拟题】1373除以某质数，余数为8，则这个质数为（ C ）.

A. 7　　B. 11　　C.13　　D. 17　　E. 19

【标志词汇】整数a除以整数b，余数为$r \Rightarrow$ 有等式$a = bk + r$（其中k为整数，$0 \le r < b$）.

【标志词汇】给定一个较大的数，并且它是某些数的乘积 $\Rightarrow$ 因数分解为多个质数的乘积.

$1365 = kp$，即p为1365的大于8的质因数.

竖式除法因数分解

$$\begin{array}{r|l} 3 & 1365 \\ 5 & 455 \\ 7 & 91 \\ & 13 \end{array}$$

$1365 = 3 \times 5 \times 7 \times \mathbf{13}$

跟学团 质数与合数

【模拟题】已知三个质数的倒数和为$\frac{1661}{1986}$，则这三个质数的和为（ C ）.

A. 334　　B. 335　　C. 336　　D. 338　　E. 不存在满足条件的三个质数

设这三个数分别为a，b，c

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc}{a\cdot bc}+\frac{ac}{b\cdot ac}+\frac{ab}{c\cdot ab}=\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{1661}{1986}$$

$$bc+ac+ab=1661$$

$$abc=1986$$

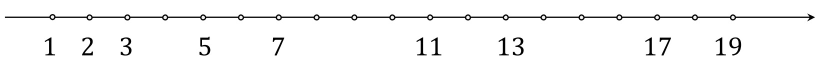
【标志词汇】<u>给定一个较大的数，并且它是某些数的乘积 $\Rightarrow$ 因数分解为多个质数的乘积.</u>

将1986因数分解可知$1986=2\times3\times331$　　　$a+b+c=336$

跟学团 质数与合数

正整数$a\in\mathbf{Z}^+$
- 合数
- 质数 **【标志词汇】**<u>明确讨论范围限制的质数 $\Rightarrow$ 穷举法</u>
- 1

- 质数、合数均为正整数，且有无穷多个；1既不是质数也不是合数；
- 最小的质数是2，也是所有质数中唯一的<u>偶数</u>；除了2以外的所有质数都是<u>奇数</u>.
- 最小的合数是4.
- 常用的30以内的十个质数：**2**，**3**，**5**，**7**，**11**，**13**，**17**，**19**，23，29.

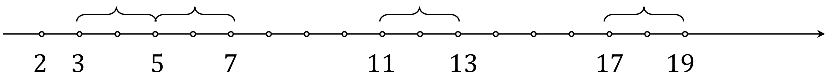


跟学团 质数与合数

【真题2015.03】 设m, n是小于20的质数，满足条件$|m-n|=2$的$\{m, n\}$共有（ C ）.

A. 2组　　B. 3组　　C. 4组　　D. 5组　　E. 6组

【标志词汇】 明确讨论范围限制的质数 ⇒ 穷举法



$|5-3|=2$，$|7-5|=2$，$|13-11|=2$，$|19-17|=2$，共四组.

【说明】$\{m, n\}$表示这两个质数所构成的集合，集合具有无序性，即$\{5,3\}$和$\{3,5\}$表示同一个集合，因此符合要求的集合共有4组，而非8组.

跟学团 质数与合数

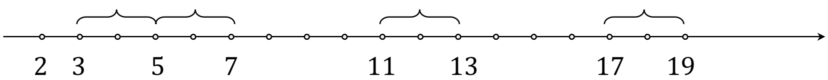
【模拟题】 在20以内的质数中，两个质数之和还是质数的共有（ B ）种.

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6　　E. 7

【标志词汇】 明确讨论范围限制的质数 ⇒ 穷举法

质数① + 质数② = 质数③

质数① + 2 = 质数③　　质数③ − 质数① = 2　　20以内相差为2的质数



$2+3=5$　　$2+5=7$　　$2+11=13$　　$2+17=19$

跟学团 最大公因数与最小公倍数

自然数$\mathbf{N}$：0，1，2，3，...等，叫作自然数.

↓

整数$\mathbf{Z}$

正整数$\mathbf{Z}^+$

0

负整数$\mathbf{Z}^-$

→ 除法

$a = bk$ 整除

$a = bk + r$ 带余除法

一个数本身：因数与倍数

质数与合数

两个数之间：最大公因数与最小公倍数

跟学团 最大公因数与最小公倍数

6的因数有1，2，**3**，6	6的倍数有6，12，18，24，**30**，36，42，48，54，**60** ...
15的因数有1，**3**，5，15	15的倍数有15，**30**，45，**60**，75，90，105 ...
	120，135，150，165，180，195，**210** ...
14的因数有1，2，7，14	14的倍数有14，28，42，56，70，84，98，112
	126，140，154，168，182，196，**210** ...

最大公因数(a,b)与最小公倍数$[a,b]$的关系　$a,b,c \in \mathbf{Z}^+$

➢ $\boldsymbol{ab} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \times [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$　　$6 \times 15 = 3 \times 30$

若两数互质，即$(a,b) = 1$，则有$ab = [a,b]$.　　$14 \times 15 = 1 \times 210 = 210$

跟学团 最大公因数与最小公倍数

【模拟题】两个正整数x和y的最大公因数是4，最小公倍数是20，则$x^2y^2+3xy+1=$（C）.

A.1000　　B.6640　　C.6641　　D.6642　　E.7801

$\boldsymbol{ab=(a,b)\cdot[a,b]}$

$xy=4\times 20=80$

$x^2y^2+3xy+1=(xy)^2+3xy+1\ =80^2+3\times 80+\mathbf{1}=664\mathbf{1}$

跟学团 最大公因数与最小公倍数 ·求取

先验互质，大数倍乘

14与15　　互质，最大公因数为1，最小公倍数为两数乘积14×15

4、5与9　　**两两互质**，两两间最大公因数为1，最小公倍数为$4\times 5\times 9=180$.

30与18　　最大公因数为6，最小公倍数为90.

跟学团 最大公因数与最小公倍数 · 质数与互质

两质数一定互质，互质的数不一定是质数

常用的30以内的十个质数：2，3，5，7，11，13，17，19，23，29.

质数 VS 质数　　3的因数有1，3；5的因数有1，5　→ 3和5互质

质数 VS 合数
$3=3$　　3的因数有1，3
$8=2\times2\times2=2^3$　　8的因数有1，2，4，8
$15=3\times5=3^1\times5^1$　　15的因数有1，3，5，15

合数 VS 合数
$14=2\times7=2^1\times7^1$　　14的因数有1，2，7，14
$16=4\times4=2^4$　　16的因数有1，2，4，8，16

跟学团 最大公因数与最小公倍数 · 求取

短除法　求12与30的最大公因数与最小公倍数

$$\begin{array}{r|ll} 2 & 12 & 30 \\ \hline 3 & 6 & 15 \\ \hline & 2 & 5 \end{array}\ \text{互质} \qquad \begin{array}{r|ll} 6 & 12 & 30 \\ \hline & 2 & 5 \end{array}$$

短除式左侧所有数字（乘积）6为最大公因数.　最大公因数是所有公共因数的乘积

短除式左侧及下方所有数字乘积$6\times2\times5=60$为最小公倍数.

跟学团 最大公因数与最小公倍数 · 求取

短除法 求12与30的最大公因数与最小公倍数

$$\begin{array}{r|ll} 2 & 12 & 30 \\ \hline 3 & 6 & 15 \\ \hline & 2 & 5 \end{array} \text{ 互质} \qquad \begin{array}{r|ll} 6 & 12 & 30 \\ \hline & 2 & 5 \end{array}$$

3是12的因数，3也是30的因数 $\Leftrightarrow$ 3是12和30最大公因数6的因数.

- 两数共同的因数一定是最大公因数的因数

120是12的倍数，120也是30的倍数 $\Leftrightarrow$ 120是12和30最小公倍数60的倍数.

- 两数共同的倍数一定是最小公倍数的倍数

跟学团 最大公因数与最小公倍数 · 求取

短除法 求24、18与36的最大公因数与最小公倍数

$$\begin{array}{r|lll} 2 & 24 & 18 & 36 \\ \hline 3 & 12 & 9 & 18 \\ \hline 2 & 4 & 3 & 6 \\ \hline 3 & 2 & 3 & 3 \\ \hline & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

商中出现两个数互质　最大公因数$2 \times 3 = 6$.

商两两之间互质

最小公倍数$2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 72$.

跟学团 最大公因数与最小公倍数 · 求取

分解质因数法 求12与30的最大公因数与最小公倍数

第①步：分别因数分解 $12=2\times2\times3=2^2\times3^1$

$30=2\times3\times5=2^1\times3^1\times5^1$

第②步：按最少个数选取公共质因数，求最大公因数

两数公共的质因数为2和3，按较少个数选取，相乘即为最大公因数$2\times3=6$

第③步：按较多个数选取所有质因数，求最小公倍数.

能分解出的全部质因数为2,3,5，相同质因数按较多个数选取.

相乘即为两数的最小公倍数$2\times2\times3\times5=60$.

跟学团 最大公因数与最小公倍数

【模拟题】已知两个正整数的最大公因数为6，最小公倍数为90，则满足这个条件的正整数有（ B ）组.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

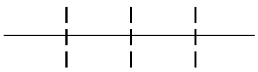
$(a,b)=6$，$[a,b]=90$ $ab=(a,b)\cdot[a,b]=6\times90=2\times2\times3\times3\times3\times5$.

$\begin{cases}a=2\times3\times3=18\\b=2\times3\times5=30\end{cases}$ $\begin{cases}a=2\times3\times5=30\\b=2\times3\times3=18\end{cases}$

$\begin{cases}a=2\times3=6\\b=2\times3\times3\times5=90\end{cases}$ $\begin{cases}a=2\times3\times3\times5=90\\b=2\times3=6\end{cases}$

跟学团 最大公因数与最小公倍数 · 结合应用题

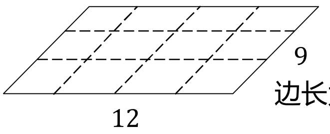
【模拟题】将长和宽分别为12和9的长方形裁剪成多个面积相等的边长为整数的正方形，且切割后无剩余，则能这些裁剪出的正方形的最少个数为___12___个.



长为12的线段平均切割

$12=1\times12=2\times6=3\times4$

每段长度为12的因数



边长为9的因数

边长为12的因数

正方形边长为12和9的<u>公因数</u>

要求正方形个数最少

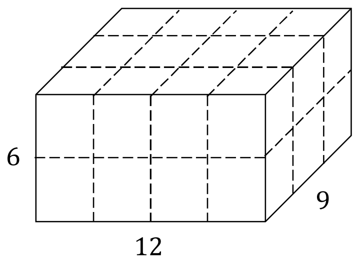
则边长为12和9的<u>最大公因数3</u>

$\frac{12}{3}\times\frac{9}{3}=4\times3=12$（个）

跟学团 最大公因数与最小公倍数 · 结合应用题

【真题2017.13】将长、宽、高分别为12、9、6的长方体切割成正方体，且切割后无剩余，则能切割成相同正方体的最少个数为（ C ）

A.3　B.6　C.24　D.96　E.64



长，宽，高分别为12，9，6

最大公约数为3

正方体最少为$\frac{12}{3}\times\frac{9}{3}\times\frac{6}{3}=24$（个）

跟学团 奇数与偶数

自然数$\mathbf{N}$：0，1，2，3，...等，叫作自然数.

↓

整数$\mathbf{Z}$

正整数$\mathbf{Z}^+$

0

负整数$\mathbf{Z}^-$

→ 除法

$a = bk$ 整除

- 一个数本身：因数与倍数
- 质数与合数
- 两个数之间：最大公因数与最小公倍数

$a = bk + r$ 带余除法　**奇数与偶数**

跟学团 奇数与偶数

0　1　2　3　4　5　6　7　8　9　10　11　12　13　14　15　16　17

$1 = 2 \times 0 + 1$　　$2 = 2 \times 1 + 0$　　$3 = 2 \times 1 + 1$　　$4 = 2 \times 2 + 0$

$5 = 2 \times 2 + 1$　　$6 = 2 \times 3 + 0$　　$7 = 2 \times 3 + 1$　　$8 = 2 \times 4 + 0$

$\boxed{a \div 2}$

⇨ **偶数** 能被2整除的数得到余数0

$2k$（$k = 0,1,2,\cdots$）

⇨ **奇数** 不能被2整除的数得到余数1

$2k + 1$（$k = 0,1,2,\cdots$）

跟学团 奇数与偶数·奇偶性判定

奇偶四则运算判断奇偶性

两个相邻整数必为一奇一偶.（$n-1$），n，（$n+1$）

奇数±奇数=偶数 1 ± 1　偶数±偶数=偶数 2 ± 2　**偶数±奇数=奇数** 2 ± 1　两数和为奇数，必为一奇一偶

偶数个奇数之和为偶数

偶数×任意整数=偶数 $2\times n$　奇数×奇数=奇数 $1\times1=1$　奇数个奇数之和为奇数

$a+b$与$a-b$同奇同偶（$a,b\in\mathbf{Z}$）

奇偶四则运算代数表达　偶数 ± 奇数 = 奇数　$2k_1\pm(2k_2+1)=2(k_1\pm k_2)\pm1$

跟学团 奇数与偶数·奇偶性判定

【模拟题】已知n是偶数，m是奇数，x,y为整数且满足方程$\begin{cases}x-1998y=n\\9x+13y=m\end{cases}$，的解，那么（ C ）.

A. x,y都是偶数　B. x,y都是奇数　C. x是偶数，y是奇数

D. x是奇数，y是偶数　E. 以上选项均不正确

$$\begin{cases}x-1998y=n\\9x+13y=m\end{cases}$$

$x=1998y+n$，因为$1998y$和n都是偶数，故x是偶数

$13y=m-9x$，m是奇数，$9x$是偶数，故$m-9x$ 是奇数，故y是奇数

跟学团 奇数与偶数 · 结合质数

【模拟题】（条件充分性判断）$|m-n|=15$.（　）

（1）质数m,n满足$5m+7n=129$;

（2）设m和n为正整数，m和n的最大公因数为15，且$3m+2n=180$.

【类型判断】不可以联合

条件（1）质数m,n满足$5m+7n=129$

和为奇数129，则$5m$，$7n$必为一奇一偶

当m为偶数时，有$m=2$，$n=17$，$|m-n|=15$

当n为偶数时，有$n=2$，$m=23$，$|m-n|=15$

条件（1）不充分

跟学团 奇数与偶数 · 结合质数

【模拟题】（条件充分性判断）$|m-n|=15$.（ B ）

（1）质数m,n满足$5m+7n=129$;

（2）设m和n为正整数，m和n的最大公因数为15，且$3m+2n=180$.

条件（2）设$m=15a$，$n=15b$，且a与b互质

$3\times 15a+2\times 15b=180$

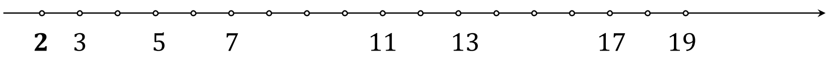
$3a+2b=12$

偶　偶　偶　$\Rightarrow a$为偶数

【穷举验证】$a=2$时，$3a=6$，$b=3$，$|m-n|=|15a-15b|=|30-45|=15$

$a=4$时，$3a=12$，$b=0$，不满足正整数要求，故仅有一组整数解

跟学团 奇数与偶数·结合质数



- 最小的质数是2，也是所有质数中唯一的偶数.
- 除了2以外的所有质数都是奇数.

若两个质数之积为偶数

若两个质数之差为奇数 ⟹ 其中一个质数<u>一定是**2**</u>

若两个质数之和为奇数

跟学团 奇数与偶数·结合质数

【真题2013.01.17】（条件充分性判断）$p = mq + 1$为质数（ E ）.

（1）m为正整数，q为质数.　　（2）m, q均为质数. $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$

$m = 2, q = 3, p = mq + 1 = 7$　　$p = mq + 1 \implies p$与mq奇偶性不同

偶　奇

条件（1）：若m, q均为奇数，则mq一定为奇数，$mq + 1$为大于2的偶数，非质数.

$3 \times 5 + 1 = 16$

条件（2）：若m, q均为奇质数，则mq一定为奇数，$mq + 1$为大于2的偶数，非质数.

$3 \times 5 + 1 = 16$

条件（2）为条件（1）的特殊情况，若条件（2）不充分，则条件（1）一定不充分，选E.

跟学团 奇数与偶数 ·结合应用题

【真题2016.18】利用长度为a和b的两种管材能连接成长度为37的管道.（ ）

（1）$a=3$，$b=5$. （2）$a=4$，$b=6$.

能连接 将长度分别为1和2的管材连接成长度为6的管道

$1\times0+2\times3=6$

$1\times2+2\times2=6$

$1\times4+2\times1=6$

有自然数x、y可使等式$x+2y=6$成立.

不能连接 将长度分别为4和6的管材连接成长度为13的管道

找不到自然数x、y使等式$4x+6y=13$成立.

跟学团 奇数与偶数 ·结合应用题

【真题2016.18】利用长度为a和b的两种管材能连接成长度为37的管道.（ A ）

（1）$a=3$，$b=5$. （2）$a=4$，$b=6$.

设两种管材分别使用x、y根（$x,y\in\mathbf{N}$）

能连接成长度为37的管道 $\Leftrightarrow$ 有自然数x、y可使等式$ax+by=37$成立.

条件（1）：$3x+5y=37$ $\begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}$ $\begin{cases}x=9\\y=2\end{cases}$

条件（2）：$4x+6y=37$ 偶数×任意整数=偶数 偶数±偶数=偶数

偶数 偶数

跟学团 分数与小数

自然数N：0，1，2，3，...等，叫作自然数.

↓

整数Z

- 正整数Z^{+}
- 0
- 负整数Z^{-}

→ 除法

- $a=bk$ 可整除
  - 一个数本身：因数与倍数
  - 质数与合数
  - 两个数之间：最大公因数与最小公倍数
- 不可整除
  - $a=bk+r$带余除法：奇数与偶数
  - **分数与小数**

跟学团 分数与小数 ·互化

$\frac{2}{5}=$　　　　$0.75=$　　　　$\frac{1}{3}=$

无限循环小数化分数

- 整数部分：照抄
- 小数部分：有几位循环节，分母就写几个9，循环节作为分子
- 整理：可以约分的进行约分

$0.777\ldots=0.\dot{7}=$

设$x=0.\dot{7}$

$10x=0.\dot{7}\times 10=7.\dot{7}$

$9x=7.\dot{7}-0.\dot{7}=7$　　$x=\frac{7}{9}$

跟学团 分数与小数 ·互化

【模拟题】把$0.\dot{5}\dot{6}$转化为分数形式为$\underline{\frac{56}{99}}$

设$x=0.\dot{5}\dot{6}$

$100x=56.\dot{5}\dot{6}$

$99x=56.\dot{5}\dot{6}-0.\dot{5}\dot{6}=56$　　$x=\frac{56}{99}$

$0.474747\cdots=0.\dot{4}\dot{7}=$　　　　$1.375375\cdots=1.\dot{3}7\dot{5}=$

跟学团 分数与小数 ·分数的通分与裂项

分数的加减法 分母相同，分母不变，分子直接加减.

$$\frac{3}{13}+\frac{5}{13}=\frac{3+5}{13}=\frac{8}{13}\qquad\frac{9}{13}-\frac{2}{13}=\frac{9-2}{13}=\frac{7}{13}$$

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{b+c}{a}\qquad\frac{b}{ac}-\frac{3}{ac}=\frac{b-3}{ac}\ (a\neq0,\ c\neq0)$$

分母不同，先通分（化为同分母分数），再加减.

分数的基本性质 分数的分子与分母同乘一个不为零的数或算式，分数值不变.

$$\frac{2}{5}=\frac{2\times7}{5\times7}=\frac{14}{35}\qquad\frac{b}{a}=\frac{bc}{ac}=\frac{ab}{a^2}\ (a\neq0,\ c\neq0)$$

跟学团 分数与小数 ·分数的通分与裂项

分数的通分 异分母分数 ⇒ 等值同分母分数

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{2\times7}{5\times7}+\frac{3\times5}{7\times5}=\frac{14}{35}+\frac{15}{35}=\frac{29}{35}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1\times5}{4\times5}-\frac{1\times4}{5\times4}=\frac{5}{20}-\frac{4}{20}=\frac{1}{4\times5}$$

$$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}+\frac{ad}{ac}=\frac{bc+ad}{ac}$$

$$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}-\frac{ad}{ac}=\frac{bc-ad}{ac}$$

跟学团 分数与小数 ·分数的通分与裂项

分数的通分相减

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1\times5}{4\times5}-\frac{1\times4}{5\times4}=\frac{5}{20}-\frac{4}{20}=\frac{1}{4\times5}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{7}=\frac{7}{3\times7}-\frac{3}{3\times7}=\frac{7}{21}-\frac{3}{21}=\frac{7-3}{21}=\frac{4}{21}$$

分数的裂项 $\frac{大-小}{小\times大}=\frac{\mathbf{1}}{小}-\frac{\mathbf{1}}{大}$

$$\frac{1}{4\times5}=\frac{5-4}{4\times5}=\frac{5}{4\times5}-\frac{4}{4\times5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$$

$$\frac{4}{3\times7}=\frac{7-3}{3\times7}=\frac{7}{3\times7}-\frac{3}{3\times7}=\frac{1}{3}-\frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{5\times6}=\frac{6-5}{5\times6}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6}=\frac{3-2}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{40}=\frac{8-5}{5\times8}=\frac{1}{5}-\frac{1}{8}$$

跟学团 分数与小数 ·裂项相消

【模拟题】$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{99\times100}=$ （ A ）

A. $\frac{99}{100}$ B. $\frac{97}{100}$ C. $\frac{98}{99}$ D. $\frac{97}{99}$ E. $\frac{93}{100}$

【标志词汇】分母为乘积形式的多分数和化简求值 ⟹ 裂项相消.

分数的裂项 $\frac{大-小}{小\times大}=\frac{1}{小}-\frac{1}{大}$

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{99\times100}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$$

$$=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$$

跟学团 分数与小数 ·裂项相消

【模拟题】$\frac{2}{x(x+2)}+\frac{2}{(x+2)(x+4)}+\cdots+\frac{2}{(x+998)(x+1000)}=$ （ C ）

A. $\frac{1}{x}$ B. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+10}$ C. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+100}$ D. $\frac{2}{x}-\frac{2}{x+100}$ E. $\frac{1}{x+100}$

【标志词汇】分母为乘积形式的多分数和化简求值 ⟹ 裂项相消.

$\frac{大-小}{小\times大}=\frac{1}{小}-\frac{1}{大}$

$$\frac{2}{x(x+2)}+\frac{2}{(x+2)(x+4)}+\cdots+\frac{2}{(x+998)(x+1000)}$$

$$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x+998}-\frac{1}{x+1000}\right)$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1000}$$

跟学团 分数与小数 ·分数的通分与裂项

分数的裂项 $\frac{大-小}{小\times大}=\frac{1}{小}-\frac{1}{大}$

$$\frac{3}{40}=\frac{8-5}{5\times8}=\frac{1}{5}-\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{3\times7}=\frac{1}{7-3}\times\frac{7-3}{3\times7}=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)$$

$$\frac{1}{a(a+2)}=\frac{1}{(a+2)-a}\times\frac{(a+2)-a}{a(a+2)}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+2}\right)$$

跟学团 分数与小数 ·裂项相消

【模拟题】$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\cdots+\frac{1}{(x+998)(x+1000)}=$ （ D ）

A. $\frac{1}{x}$　B. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+10}$　C. $\frac{1}{x+10}$　D. $\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x+2000}$　E. $\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x+2000}$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{x(x+2)}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{(x+2)(x+4)}+\cdots+\frac{1}{2}\times\frac{2}{(x+998)(x+1000)}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{x(x+2)}+\frac{2}{(x+2)(x+4)}+\cdots+\frac{2}{(x+998)(x+1000)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left[\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x+998}-\frac{1}{x+1000}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1000}\right)=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x+2000}$$

跟学团 有理数与无理数

自然数**N**：0，1，2，3，...等，叫作自然数.

↓

整数**Z**

正整数$\mathbf{Z}^+$
0
负整数$\mathbf{Z}^-$

→ 除法

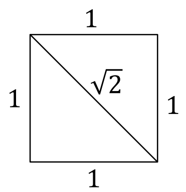
$a=bk$ 可整除：
- 一个数本身：因数与倍数
  质数与合数
- 两个数之间：最大公因数与最小公倍数

不可整除：
- $a=bk+r$带余除法：奇数与偶数
- 分数与小数

跟学团 有理数与无理数

有理数 可以表示为形如$\frac{a}{b}$（其中a,b为整数）的两个整数之比的形式的数.

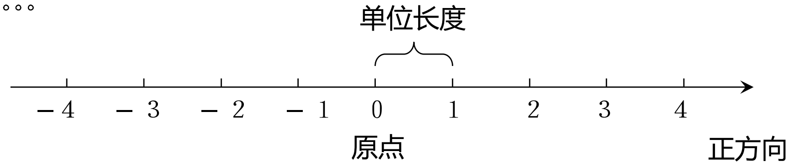
$\begin{cases}\text{整数}\\\text{分数}\quad\text{有限小数或无限循环小数}\end{cases}$



无理数 不能写作两个整数之比形式的数.若将它写成小数形式，小数点之后的数字有无限多个，并且不会循环（即无限不循环小数）.

$\sqrt{2}\approx1.414$ $\sqrt{3}\approx1.732$ $\sqrt{5}\approx2.236$ $\mathrm{e}\approx2.718$ $\pi\approx3.142$

跟学团 有理数与无理数



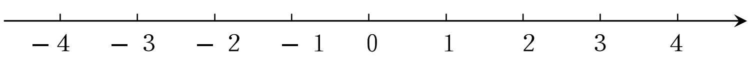
实数$\mathbf{R}$
- 有理数$\mathbf{Q}$ 有限小数或无限循环小数
  - 正有理数
    - 正整数$\mathbf{Z}^{+}$
    - 正分数
  - 0
  - 负有理数
    - 负整数$\mathbf{Z}^{-}$
    - 负分数
- 无理数$\overline{\mathbf{Q}}$ 无限不循环小数
  - 正无理数
  - 负无理数

跟学团 有理数与无理数

对任意实数，称不超过实数x的最大整数为x的**整数部分**，记为$[x]$．<u>整数部分总是小于等于原实数的</u>

求取实数的整数部分称为**取整**.

令$\{x\}=x-[x]$，称$\{x\}$为实数x的**小数部分**．<u>小数部分总是非负的</u>



$[3]=3$	$[0]=0$	$[0.3]=0$	$[2.17]=2$
$\{3\}=0$	$\{0\}=0$	$\{0.3\}=0.3$	$\{2.17\}=0.17$
$[-3]=-3$	$[-1]=-1$	$[-0.3]=-1$	$[-2.17]=-3$
$\{-3\}=0$	$\{-1\}=0$	$\{-0.3\}=0.7$	$\{-2.17\}=0.83$

跟学团 有理数与无理数

实数R
- 有理数**Q**：可以写成两整数之比的数
- 无理数$\bar{\mathbf{Q}}$：不能写成两整数之比的数

实数 = 有理部分 + 无理部分

若两个实数相等，那么它们的有理部分与无理部分分别相等.

【举例】若实数$2+a\sqrt{5}$与实数$b+3\sqrt{5}$相等，则有理数a和b的值分别为多少？

$a\sqrt{5}=3\sqrt{5}, a=3, b=2.$

跟学团 有理数与无理数

【模拟题】如果$(2+\sqrt{2})^2=a+b\sqrt{2}$（$a,b$为有理数），那么$a+b$等于（ D ）.

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 10　　E. 8

实数 = 有理部分 + 无理部分　**对应项相等**

展开完全平方式：$(2+\sqrt{2})^2=2^2+2\times2\sqrt{2}+\sqrt{2}^2=\boxed{6}+\boxed{4\sqrt{2}}$

$=\boxed{a}+\boxed{b\sqrt{2}}$

$a=6$，$b=4$，$a+b=10$

跟学团 有理数与无理数·有理化

若两个含有根号的非零数字或算式相乘，乘积中不含根号，则它们**互为有理化因式.**

$\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$

$(3-\sqrt{5})\times(3+\sqrt{5})=3^2-(\sqrt{5})^2=4$

$(3+2\sqrt{5})\times(3-2\sqrt{5})=3^2-(2\sqrt{5})^2=-11$

$(\sqrt{3}+\sqrt{5})\times(\sqrt{3}-\sqrt{5})=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2=-2$

跟学团 有理数与无理数

【标志词汇】分数的分母中带有根号，要求化简/求值⟹ 分母有理化.

分数分子分母上下同乘<u>分母的</u>有理化因式

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{1\times(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})\times(1-\sqrt{2})}=\frac{1-\sqrt{2}}{1-2}=\sqrt{2}-1$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{2\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\frac{2\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$$

跟学团 有理数与无理数

【真题2021.03】$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=$ （A）

A.9　B.10　C.11　D.$3\sqrt{11}-1$　E.$3\sqrt{11}$

【标志词汇】分数的分母中带有根号，要求化简/求值 $\Rightarrow$ 分母有理化.

$$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=(\sqrt{2})^2-1^2=2-1=1$$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+\cdots+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{(\sqrt{100}+\sqrt{99})(\sqrt{100}-\sqrt{99})}$$

$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots(\sqrt{98}-\sqrt{97})+(\sqrt{99}-\sqrt{98})+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$$

$$=-1+\sqrt{100}=10-1=9$$

跟学团 有理数与无理数

【模拟题】设$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$的整数部分为$a$，小数部分为$b$，则$ab-\sqrt{5}=$（C）.

A. 3　B. 2　C. -1　D. -2　E. 0

【标志词汇】分数的分母中带有根号，要求化简/求值 $\Rightarrow$ 分母有理化.

$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{\sqrt{5}+3}{2}\qquad 2=\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}=3$$

$$2.5=\frac{2+3}{2}<\frac{\sqrt{5}+3}{2}<\frac{3+3}{2}=3$$

整数部分$a=2$　小数部分$b=\frac{\sqrt{5}+3}{2}-2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$ab-\sqrt{5}=2\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}-\sqrt{5}=-1$$

跟学团 有理数与无理数

【标志词汇】分数的分子中带有根号，要求比较大小 ⇒ 分子有理化.

【举例】比较$\sqrt{7}-\sqrt{6}$与$\sqrt{6}-\sqrt{5}$大小

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{1}=\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{6})\times(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{1\times(\sqrt{7}+\sqrt{6})}=\frac{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{6})^2}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$$

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{1}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{7}+\sqrt{6}>\sqrt{6}+\sqrt{5}$$

$$\sqrt{7}-\sqrt{6}<\sqrt{6}-\sqrt{5}$$

跟学团 有理数与无理数

【模拟题】如下几个论述不一定正确的是（ D ）

(1) 两个无理数的和是无理数；无理部分互为相反数，则和为有理数

(2) 两个无理数的积是无理数； 互为有理化因式，则积为有理数

(3) 一个有理数与一个无理数的和是无理数；

(4) 一个有理数与一个无理数的积是无理数；0与任何实数的乘积均为0

(5) 任何一个无理数都能用数轴上的点表示；

(6) 实数与数轴上的点一一对应；

A. ①② B. ②③ C. ①③④ D. ①②④ E. ①②③④⑤⑥

MBA大师跟学团专属

第三章 整式、分式与根式

董璞

跟学团 分式基础与运算

- 由数字运算进阶为符号运算
- 本章特点：公式多，表达式多变
- 逆向思维、整体思维
- 对典型数字和固定表达式要有一定敏感度

跟学团 整式、分式与根式

数字和表示数字的字母 —有限次加、减、乘、除、乘方和开方→ **代数式**

$40\quad a+b\quad a-b\quad vt\quad \frac{x}{y}\quad 7x^2y^3zabc$　$\boxed{\sqrt[3]{3a^2}\ \text{无理式}}$

- **代数式**
  - **有理式**
    - **整式**
      - **单项式**　数字与字母的乘积　$2x^2y^3$　$\frac{1}{2}x^3$
      - **多项式**　几个单项式的和　$2x^2+xy-y^2+5$
    - **分式**　$\frac{A}{B}$（B中含有字母且$B\neq 0$）　$\frac{1}{x-2}\,(x\neq 2)$　$\frac{x}{y}(y\neq 0)$
  - **无理式**　$\sqrt[n]{A}$　$\sqrt[3]{x+y}$

跟学团 整式基础与运算

整数
正整数，0，负整数 —四则运算→
- 加减法
- 乘法
- 除法
  - 整除　因数，倍数，质数，合数
  - 带余除法　奇数，偶数，分数，小数

代入求值

↑

整式
单项式：数字与字母的乘积
多项式：几个单项式的和 —四则运算→
- 加减法　合并同类项
- 乘法　分别相乘再相加
- 除法
  - 整除
  - 带余除法
  - 分式

↓ 开方运算

根式

跟学团 整式基础与运算 ·代入求值

【真题2014.10.18】代数式$2a(a-1)-(a-2)^2$的值为-1.（ B ）

（1）$a=-1$　　　　（2）$a=-3$

【标志词汇】给定未知字母取值或关系式，整式求值 ⟹ 直接代入

条件（1）将$a=-1$代入原式

$$2a(a-1)-(a-2)^2=2\times(-1)\times(-1-1)-(-1-2)^2=-5$$

条件（2）将$a=-3$代入原式

$$2a(a-1)-(a-2)^2=2\times(-3)\times(-3-1)-(-3-2)^2=-1$$

跟学团 整式基础与运算 ·代入求值

【真题2013.10.19】已知$f(x,y)=x^2-y^2-x+y+1$，则$f(x,y)=1$.（ D ）

（1）$x=y$.　　　　（2）$x+y=1$.

【标志词汇】给定未知字母取值或关系式，整式求值 ⟹ 直接代入

条件（1）：代入$x=y$得：$f(x,y)=y^2-y^2-y+y+1=1$

条件（2）：$x+y=1$，即$x=1-y$

代入得：$f(x,y)=(1-y)^2-y^2-(1-y)+y+1=y^2-2y+1-y^2-1+y+y+1=1$

跟学团 整式基础与运算 ·加减法

元 一个多项式，含有多少个变量，就叫做几元多项式

单项式的次数 系数不为零的单项式所有字母的指数和.

$-\frac{1}{3}x^2$ $2^3x^2y^3$

纯数字单项式 $\begin{cases}\text{非零数字：零次}\\ \text{数字“0”：无次数}\end{cases}$

多项式的次数 以标准形式给出的多项式里，各个单项式中次数最高的项的次数.

$x^2y-x+y^2-x^2y-2$

跟学团 整式基础与运算 ·加减法

【举例】分析元与次数.

（1）$x+y$ 二元一次多项式

（2）$x^2y+3xy+y^2$ 二元三次多项式

（3）$3^4xy^3+y^2+x^2y$ 二元四次多项式

跟学团 整式基础与运算 ·加减法

同类项 所含的字母相同，并且相同字母的指数也分别相同的单项式称为同类项.

$4xy^2z$和$-\frac{2}{3}xy^2z$ 30和-25 所有常数项都是同类项

整式的加减法 即合并同类项，把同类项的系数相加减，字母和字母的指数不变.

$$x^3y+2x^2y^2+3xy^2-5xy^2+6\ +x^2y^2+2xy+3xy^2-2y^3-13$$

$$=x^3y+(2x^2y^2+x^2y^2)+(3xy^2-5xy^2+3xy^2)+2xy-2y^3+(6-13)$$

$$=x^3y+3x^2y^2+xy^2+2xy-2y^3-7$$

跟学团 整式基础与运算 ·乘法

同底数幂法则 同底数幂相乘，底数不变，指数相加，即$a^m\times a^n=a^{m+n}$

同底数幂相除，底数不变，指数相减，即$a^m\div a^n=a^{m-n}$

$2^5\times 2^2=2^{5+2}=2^7$

$(x+1)^2\times(x+1)^3=(x+1)^{2+3}=(x+1)^5$

积的乘方 把积中每个因式分别乘方，再把所得的幂相乘，即$(ab)^n=a^nb^n$

$(xyz)^2=x^2\times y^2\times z^2=x^2y^2z^2$

幂的乘方 底数不变，幂的指数与乘方的指数相乘，即$(a^m)^n=a^{mn}$

$(2^3)^4=2^{3\times 4}=2^{12}$

跟学团 整式基础与运算 ·乘法

乘法分配律：分别相乘再相加

$25\times 41=25\times(40+1)=25\times 40+25\times 1=1000+25=1025$

$25\times 37+25\times 3=25\times(37+3)=25\times 40=1000$

$$\begin{aligned}(2a+3)\times(4a-5)&=(2a)\times(4a-5)+3\times(4a-5)\\&=(2a)\times(4a)-5\times 2a+3\times 4a-3\times 5\\&=8a^2-10a+12a-15\\&\boxed{=8a^2+2a-15}\end{aligned}$$

乘法展开式

跟学团 整式基础与运算 ·乘法

乘法分配律：分别相乘再相加

$$\begin{aligned}(2a+3)\times(4a-5)&=(2a+3)\times 4a-5\times(2a+3)\\&=(2a)\times(4a)+3\times 4a-5\times 2a-3\times 5\\&=8a^2+12a-10a-15\\&=8a^2+2a-15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2a+3)\times(4a-5)&=2a\times 4a-5\times 2a+3\times 4a-3\times 5\\&=8a^2-10a+12a-15\\&=8a^2+2a-15\end{aligned}$$

跟学团 整式基础与运算

【模拟题】$f(x)=3x^2-x+1$；$g(x)=5x-7$，试写出下列算式的具体表达式：

（1）$f(x)+g(x)$　　（2）$f(x)-g(x)$　　（3）$f(x)\cdot g(x)$

（1）$f(x)+g(x)=3x^2-x+1+5x-7$

$=3x^2+(-1+5)x+(1-7)$

$=3x^2+4x-6$

（2）$f(x)-g(x)=3x^2-x+1-5x+7=3x^2+(-1-5)x+(1+7)=3x^2-6x+8$

跟学团 整式基础与运算

【模拟题】$f(x)=3x^2-x+1$；$g(x)=5x-7$，试写出下列算式的具体表达式：

（1）$f(x)+g(x)$　　（2）$f(x)-g(x)$　　（3）$f(x)\cdot g(x)$

（3）$f(x)\cdot g(x)=3x^2\times(5x-7)+(-x)\times(5x-7)+1\times(5x-7)$

$=3x^2\cdot 5x-7\cdot 3x^2-x\cdot 5x+7x+1\cdot 5x-7$

$=15x^3-21x^2-5x^2+7x+5x-7$

$=15x^3-26x^2+12x-7$

乘法展开式中各项的构成

两个多项式中的m次方项和n次方项的乘积将得到$m+n$次方项

跟学团 整式基础与运算 ·乘法

【**真题2008.10.17**】ax^2+bx+1与$3x^2-4x+5$的积不含x的一次方项和三次方项.（ B ）

（1）$a:b=3:4$　　（2）$a=\frac{3}{5}$，$b=\frac{4}{5}$　要求x的一次方项和三次方项系数为零

$$(ax^2+bx+1)(3x^2-4x+5)=3ax^4-4ax^3+5ax^2+3bx^3-4bx^2+5bx+3x^2-4x+5$$

$$=3ax^4+(3b-4a)x^3+(3+5a-4b)x^2+(5b-4)x+5$$

$$\begin{cases}5b-4=0\\3b-4a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=\frac{4}{5}\\a=\frac{3}{5}\end{cases}$$

乘法展开式中各项的构成　两个多项式中的m次方项和n次方项的乘积将得到$m+n$次方项

跟学团 整式基础与运算 ·乘法

【**真题2008.10.17**】ax^2+bx+1与$3x^2-4x+5$的积不含x的一次方项和三次方项.（ B ）

（1）$a:b=3:4$　　（2）$a=\frac{3}{5}$，$b=\frac{4}{5}$　要求x的一次方项和三次方项系数为零

乘法展开式中各项的构成　两个多项式中的m次方项和n次方项的乘积将得到$m+n$次方项

$(ax^2+bx+1)(3x^2-4x+5)$　　(2　1　0) (2　1　0)

$\boxed{x\text{的三次方项}}$　$\boxed{x\text{的一次方项}}$

$$\begin{cases}5b-4=0\\3b-4a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=\frac{4}{5}\\a=\frac{3}{5}\end{cases}$$

跟学团 整式基础与运算 ·乘法

【模拟题】已知$(x^2+px+8)(x^2-3x+q)$的展开式中$\boxed{\text{不含}x^2\text{，}x^3\text{项}}$，则常数$p$，$q$的值为（ E ）.

A. $p=2\quad q=1$　　B. $p=3\quad q=2$　　C. $p=3\quad q=-1$

D. $p=1\quad q=3$　　E. $p=3\quad q=1$　展开式中x^2，x^3项的系数为零

展开式中各项的构成 <u>两个多项式中的m次方项和n次方项的乘积将得到$m+n$次方项</u>

$(x^2+px+8)\times(x^2-3x+q)$

乘积为二次的项：qx^2，$px\cdot(-3x)$ 和 $8x^2$.

x^2项的系数为$q+8+(-3p)=0$

乘积为三次的项：$(-3x)\cdot x^2$ 和 $px\cdot x^2$.

x^3项的系数为$-3+p=0$

联立解得$p=3$，则$q=1$.

跟学团 整式基础与运算

代入求值

↑

整式

单项式：数字与字母的乘积
多项式：几个单项式的和

$\xrightarrow{\text{四则运算}}$

- 加减法：合并同类项
- 乘法：分别相乘再相加
  - <u>注意展开式中各项的构成</u>
- 除法 <u>竖式除法</u>
  - 整除
  - 带余除法
  - 分式

↓ 开方运算

根式

跟学团 整式基础与运算 ·竖式除法

【举例】用竖式除法进行除法运算

（1）$129 \div 4$

$129 = 4 \times 32 + 1$

被除数 = 除数 × 商 + 余数

$$\begin{array}{r} 32 \\ 4\overline{)129} \\ \underline{12} \\ 9 \\ \underline{8} \\ 1 \end{array}$$

（2）$2x^3 - 5x^2 + 3x - 7$除以$x^2 - x + 2$

$2x^3 - 5x^2 + 3x - 7 = (x^2 - x + 2)(2x - 3) - 4x - 1$

被除式 = 除式 × 商式 + 余式

$$\begin{array}{rl} & 2x \quad -3 \\ x^2 - x + 2 & \overline{)\,2x^3 - 5x^2 + 3x - 7} \\ & \underline{2x^3 - 2x^2 + 4x} \\ & -3x^2 - x - 7 \\ & \underline{-3x^2 + 3x - 6} \\ & -4x - 1 \end{array}$$

跟学团 整式基础与运算 ·竖式除法

【举例】用竖式除法进行除法运算：$2x^3 + 5x^2 + 1$除以$x^2 - 1$

缺项 ⟺ 此项系数为零，做竖式除法时补上即可.

$$\begin{array}{rll} & 2x \quad +5 & \cdots\cdots q(x) \\ g(x)\cdots\cdots \quad x^2 + 0x - 1 & \overline{)\,2x^3 + 5x^2 + 0x + 1} & \cdots\cdots f(x) \\ & \underline{2x^3 + 0x^2 - 2x} & \\ & 5x^2 + 2x + 1 & \\ & \underline{5x^2 + 0x - 5} & \\ & 2x + 6 & \cdots\cdots r(x) \end{array}$$

故有：$2x^3 + 5x^2 + 1 = (x^2 - 1)(2x + 5) + 2x + 6.$

跟学团 整式基础与运算 ·恒等变形

恒等变形 代数式的一种变换，即把一个代数式变成另一个与它恒等的代数式.

合并同类项，乘法展开多项式，多项式除法，乘法公式，因式分解

两代数式恒等 $\Leftrightarrow$ 不论代数式中的字母代入任何数值，计算结果均相等.

$(2a+3)\times(4a-5)=8a^2+2a-15$

$a=0$时：等号左边 $(0+3)\times(0-5)=-15$

等号右边 $0+0-15=-15$

$a=1$时：等号左边 $(2+3)\times(4-5)=-5$

等号右边 $8+2-15=-5$

跟学团 整式基础与运算 ·恒等变形

恒等变形 代数式的一种变换，即把一个代数式变成另一个与它恒等的代数式.

合并同类项，乘法展开多项式，多项式除法，乘法公式，因式分解

两代数式恒等 $\Leftrightarrow$ 不论代数式中的字母代入任何数值，计算结果均相等.

$2x^3+5x^2+1=(x^2-1)(2x+5)+2x+6$

$x=0$时：等号左边 $0+0+1=1$

等号右边 $(0-1)\times(0+5)+0+6=1$

$x=1$时：等号左边 $2+5+1=8$

等号右边 $(1-1)\times(2+5)+2+6=8$