# MBA大师跟学团专属

## 平均值、绝对值

董璞

## 跟学团 平均值、绝对值

- 要么最难，要么最简单
  - 平均值不等式
  - 绝对值不等式
- 结合应用题、几何、数据分析等

## 跟学团 平均值

算术平均值

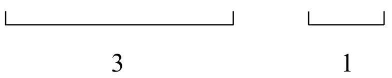
定义　计算

关系：均值定理 ⇨ 应用：求最值

几何平均值

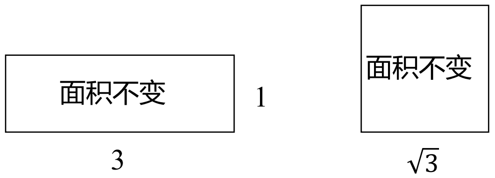
定义　计算

## 跟学团 平均值 · 定义




$$\frac{3+1}{2}=2$$

3和1的算术平均值




$$\sqrt{3\times1}=\sqrt{3}$$

3和1的几何平均值

## 跟学团 平均值·定义

**算术平均值** 设$x_1$，$x_2$，……，$x_n$为$n$个实数，这$n$个数的算术平均值为：

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$ 累加后除以个数

**几何平均值** 设$x_1$，$x_2$，……，$x_n$为$n$个**正**实数，这$n$个**正**实数的几何平均值为：

$$x_{\mathrm{g}}=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}$$ 累乘后开个数次方

---

**【举例】**求3，8，9这三个数的算术平均值和几何平均值

算术平均值 $=\frac{3+8+9}{3}=\frac{20}{3}$　几何平均值 $=\sqrt[3]{3\times8\times9}=\sqrt[3]{3^3\times2^3}=2\times3=6.$

## 跟学团 平均值

算术平均值

定义$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

几何平均值

定义$x_{\mathrm{g}}=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}$

注意几何平均值要求每一项均为正

- 直接计算
- 改变元素个数计算
- 改变元素大小计算

⇨

关系：均值定理

应用：求最值

## 跟学团 平均值·计算

仅元素大小改变 个体改变量与算术平均值改变量

算术平均值$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$　　$\bar{x}$的改变量$=\frac{\text{个体改变量之和}}{\text{元素数量}n}$

**【举例】** 若$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5$的算术平均值为$\bar{x}$，求$x_1,x_2-2,x_3+3,x_4-4,x_5+5$的算术平均值.

---

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}$$

$$\frac{x_1+x_2-2+x_3+3+x_4-4+x_5+5}{5}=\frac{(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)-2+3-4+5}{5}$$

$$=\bar{x}+\frac{-2+3-4+5}{5}=\bar{x}+\frac{2}{5}$$

## 跟学团 平均值·计算

**【模拟题】** $x_1$，$x_2+1$，$x_3+2$，$x_4+3$，$x_5+4$的算术平均值是$\bar{x}+2$（　　）.

（1）$x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，$x_5$的算术平均值是$\bar{x}$. 算术平均值是否增加2

（2）$x_1+1$，$x_2+2$，$x_3+3$，$x_4+4$，$x_5+5$的算术平均值是$\bar{x}+3$.

---

条件（1）已知$x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，$x_5$　　$\bar{x}$的改变量$=\frac{\text{个体改变量之和}}{\text{元素数量}n}$

要求$x_1$，$x_2+1$，$x_3+2$，$x_4+3$，$x_5+4$

个体改变量之和为$0+1+2+3+4=10$

算术平均值改变量为$\frac{10}{5}=2$

故所求平均值为$\bar{x}+2$，条件（1）充分.

## 跟学团 平均值·计算

**【模拟题】**$x_1$，$x_2+1$，$x_3+2$，$x_4+3$，$x_5+4$的算术平均值是$\bar{x}+2$（ D ）.

（1） $x_1$，$x_2$， $x_3$， $x_4$，$x_5$的算术平均值是$\bar{x}$.

（2）$x_1+1$，$x_2+2$，$x_3+3$，$x_4+4$，$x_5+5$的算术平均值是$\bar{x}+3$.

---

条件（2） 算术平均值是否减小1

已知$x_1+1$，$x_2+2$，$x_3+3$，$x_4+4$，$x_5+5$

要求 $x_1$， $x_2+1$，$x_3+2$，$x_4+3$，$x_5+4$

$\bar{x}$的改变量 $=\dfrac{\text{个体改变量之和}}{\text{元素数量}n}$

个体改变量之和$-1-1-1-1-1=-5$

算术平均值改变量为$\dfrac{-5}{5}=-1$

## 跟学团 平均值·计算

**【真题2019.23】**某校理学院五个系每年录取人数如下表：

| 院系 | 数学系 | 物理系 | 化学系 | 生物系 | 地理系 |
|---|---|---|---|---|---|
| 录取人数 | 60 | 120 | 90 | 60 | 30 |

今年与去年相比，物理系平均分没有变，则理学院录取平均分升高了.（C ）

（1）数学系录取平均分升高了3分，生物系录取平均分降低了2分 .

（2）化学系录取平均分升高了1分，地理系录取平均分降低了4分 .

---

$\bar{x}$的改变量 $=\dfrac{\text{个体改变量之和}}{\text{元素数量}n}$ $\bar{x}$的改变量$\times$元素数量$n=$个体改变量之和$=$总体改变量

全院总分 $=\overline{\text{数学}}\times 60+\overline{\text{物理}}\times 120+\overline{\text{化学}}\times 90+\overline{\text{生物}}\times 60+\overline{\text{地理}}\times 30$

全院总分改变量 $=3\times 60+0\times 120+1\times 90+(-2)\times 60+(-4)\times 30=30$

## 跟学团 平均值·计算

仅元素大小改变　$\bar{x}$的改变量 $=\dfrac{\text{个体改变量之和}}{\text{元素数量}n}$

元素个数改变　<u>总和 = 平均值$\bar{x}$ × 元素数量 $n$</u>

**【真题2006.01.04】**如果$x_1, x_2, x_3$三个数的算术平均值为5，则$x_1+2, x_2-3, x_3+6$与8这四个数的算术平均值为（ C ）.

A. $3\frac{1}{4}$　　B. 6　　C. 7　　D. $9\frac{1}{5}$　　E. $7\frac{1}{2}$

---

$x_1+x_2+x_3=3\times5=15$　　$(x_1+2)+(x_2-3)+(x_3+6)+8=(x_1+x_2+x_3)+13=28$

$$\frac{(x_1+x_2+x_3)+13}{4}=\frac{28}{4}=7$$

## 跟学团 平均值·计算

**【真题2006.01.04】**如果$x_1, x_2, x_3$三个数的算术平均值为5，则$x_1+2, x_2-3, x_3+6$与8这四个数的算术平均值为（ C ）.

A. $3\frac{1}{4}$　　B. 6　　C. 7　　D. $9\frac{1}{5}$　　E. $7\frac{1}{2}$

---

**<u>抽象问题具体化：特值法</u>**

设$x_1=x_2=x_3=5$

则$x_1+2=7$，$x_2-3=2$，$x_3+6=11$　　$\dfrac{7+2+11+8}{4}=\dfrac{28}{4}=7$

## 跟学团 平均值·计算

【模拟题】已知$x_1,x_2,\cdots,x_n$的几何平均值为3，前$n-1$个数的几何平均值为2，则$x_n$的值为（D）.

A.$\frac{9}{2}$　　B.$(\frac{3}{2})^n$　　C.$2(\frac{3}{2})^{n-1}$　　D.$3(\frac{3}{2})^{n-1}$　　E.$(\frac{3}{2})^{n-1}$

---

$x_1,x_2,\ldots,x_n$的几何平均值为3　$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=3$　$x_1x_2\cdots x_n=3^n$

两式相除

前$n-1$个数的几何平均值为2　$\sqrt[n-1]{x_1x_2\ldots x_{n-1}}=2$　$x_1x_2\ldots x_{n-1}=2^{n-1}$

遇到$\sqrt[n]{\ }$常转换为$(\ \ )^n$

$$\frac{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_{n-1}\cdot x_n}{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{n-1}}=x_n=\frac{3^n}{2^{n-1}}=3\times\frac{3^{n-1}}{2^{n-1}}=3(\frac{3}{2})^{n-1}$$

## 跟学团

$$\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_1x_2\ldots x_{n-1}}=x_n=\boxed{\frac{3^n}{2^{n-1}}=3\times\frac{3^{n-1}}{2^{n-1}}=3(\frac{3}{2})^{n-1}}$$

幂的处理方法

- 化为同指数
  - $a^nb^n=(ab)^n$
  - $2^{n+1}\times3^n=2\times2^n\times3^n=2\times(2\times3)^n=2\times6^n$
  - $\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$
- 化为同底数
  - $a^m\times a^n=a^{m+n}$
  - $2^5\times4^7=2^5\times(2^2)^7=2^5\times2^{2\times7}=2^{5+14}=2^{19}$
  - $a^m\div a^n=a^{m-n}$
  - $9^5\div3^3=(3^2)^5\div3^3=3^{2\times5}\div3^3=3^{10-3}=3^7$

## 跟学团 平均值

算术平均值

定义 $\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

几何平均值

定义 $x_g=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}$

注意几何平均值要求每一项均为正

- 直接计算
- 改变元素个数计算
- 改变元素大小计算

⇒ 关系：均值定理

应用：求最值

## 跟学团 均值定理

算术平均值$\frac{a+b}{2}$ ≥ 几何平均值$\sqrt{ab}$

作差法比较大小 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$

$$=\frac{(\sqrt{a})^2+\left(\sqrt{b}\right)^2-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}\geq 0$$

## 跟学团 均值定理

**均值定理**　对于任意$n$个正实数$x_1$，$x_2$，……，$x_n$，有：

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$时，等号成立.（$x_i>0$，$i=1,\dots,n$）

几个正数的算术平均值总大于等于它们的几何平均值

两种形式：

$x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n\cdot\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$　　积定和最小

$x_1x_2\cdots x_n \leq \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n$　　和定积最大

## 跟学团 均值定理·求和的最小值

$a+b\geq 2\sqrt{ab}\ (a,b>0)$　　　$x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n\cdot\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$

① $a$，$b$可以代表任何正代数式.

② 使用范围：$a$，$b>0$

③ 当且仅当$a=b$时，等号成立.　$a+a=2a\geq 2\sqrt{a\cdot a}=2a\ (a,b>0)$

均值不等式$(a,b>0)$

| | |
|---|---|
| $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ | 恒成立 |
| $a+b>2\sqrt{ab}$ | $a\neq b$ |
| $a+b=2\sqrt{ab}$ | $a=b$ |

## 跟学团 均值定理·求和的最小值

$a+b \geq 2\sqrt{ab}\ (a,b>0)$

$$\underbrace{\boxed{x^2+1}}_{a}+\underbrace{\boxed{\frac{4}{x^2+1}}}_{b} \geq 2\sqrt{\cancel{(x^2+1)}\cdot\frac{4}{\cancel{x^2+1}}}=4$$

① $a$，$b$可以代表任何正代数式.

② 使用范围：$a$，$b>0$　　$x^2+1>0$　$\frac{4}{x^2+1}>0$

③ 当且仅当$a=b$时，等号成立.　$x^2+1=\frac{4}{x^2+1}$　$(x^2+1)^2=4$　$x^2+1=2$　$x=\pm1$

| | |
|---|---|
| $x^2+1+\frac{4}{x^2+1}\geq 4$ | 恒成立 |
| $x^2+1+\frac{4}{x^2+1}>4$ | $x\neq\pm1$ |
| $x^2+1+\frac{4}{x^2+1}=4$ | $x=\pm1$ |

## 跟学团 均值定理·求和的最小值

$a+b \geq 2\sqrt{ab}\ (a,b>0)$

$$\underbrace{\boxed{x^2+1}}_{a}+\underbrace{\boxed{\frac{4}{x^2+1}}}_{b} \geq 2\sqrt{\cancel{(x^2+1)}\cdot\frac{4}{\cancel{x^2+1}}}=4$$

① $a$，$b$可以代表任何正代数式.

② 使用范围：$a$，$b>0$　　$x^2+1>0$　$\frac{4}{x^2+1}>0$

③ 当且仅当$a=b$时，等号成立.　$x^2+1=\frac{4}{x^2+1}$　$(x^2+1)^2=4$　$x^2+1=2$　$x=\pm1$

$x^2+1+\frac{4}{x^2+1}\geq 4$，即它的最小值为4，当$x=\pm1$时取得最小值.

两个正代数式乘积为定值，则它们的和有最小值　积定和最小

当两代数式相等时可取得此最小值.

## 跟学团 均值定理·求和的最小值

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$ （$a,b$可以代表任何正代数式）

一正 ① $a,b$均为正. 能用套用均值不等式

二定 ② $ab$为定值　能求最值

三相等 ③ 当且仅当$a=b$时，和可取到最小值.　能取到最值

---

$a+b+c\geq 3\cdot\sqrt[3]{abc}$ （$a,b$可以代表任何正代数式）

一正 ① $a,b,c$均为正能用公式

二定 ② $abc$为定值　能求最值

三相等 ③ 当且仅当$a=b=c$时，和可取到最小值.

## 跟学团 均值定理·求和的最小值·一正

$a+b\geq 2\sqrt{ab}\ (a,b>0)$

$\boxed{x}+\boxed{\frac{1}{x}}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$　不一定成立

$a$　$b$

① $a$，$b$可以代表任何正代数式.

② 使用范围：$a$，$b>0$

注意天然为正的讨论范围

如：非零完全平方、恒为正的二次函数、指数函数、平面几何、概率

③ 当且仅当$a=b$时，等号成立.　$x=\frac{1}{x}$　$x^2=1$　$x=1$

偶数次方、偶次方根

奇数次方、奇次方根

## 跟学团 均值定理·求和的最小值·一正

**【模拟题】**面积为9的直角三角形两直角边之和最小值为（ B ）

A. 12 B. $6\sqrt{2}$ C. 8 D. $2\sqrt{6}$ E. 以上都不是

---

令三角形两直角边分别为$a$和$b$ 边长天然为正

直角三角形面积$S_{RT\triangle}=\frac{1}{2}ab=9$ $ab=18$

$a+b\geq 2\sqrt{ab}=2\sqrt{18}=6\sqrt{2}$

当且仅当$a=b=3\sqrt{2}$时，两边之和可取到此最小值

**【标志词汇】**<u>限制为正+求最值 ⇒ 均值定理</u>

## 跟学团 均值定理·求和的最小值

**【真题2020.24条件（1）】**设$a$，$b$是正实数，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$存在最小值.

（1）已知$ab$的值

---

**【标志词汇】**<u>限制为正+求最值 ⇒ 均值定理</u>

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$

已知$ab$的值 ⇔ $ab$的值为一确定的数（定值） ⇔ $ab$为一个常数

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$存在最小值$2\sqrt{\frac{1}{ab}}$ 当$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$时取得此最小值 条件（1）充分.

## 跟学团 均值定理·求和的最小值·三相等

$a+b\geq 2\sqrt{ab}\ (a,b>0)$

$$\underbrace{\boxed{x^2+5}}_{a}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{x^2+5}}}_{b}\geq 2\sqrt{\cancel{(x^2+5)}\cdot\frac{1}{\cancel{x^2+5}}}=2$$

① $a$，$b$可以代表任何正代数式.

② 使用范围：$a$，$b>0$　　$x^2+5>0$　$\frac{1}{x^2+5}>0$

③ 当且仅当$a=b$时，等号成立.　　$x^2+5=\frac{1}{x^2+5}$

$(x^2+5)^2=1$

$x^2+5=1$　不可能成立

## 跟学团 均值定理·求和的最小值

**【模拟题】**已知$x,y\in R$，且$x+y=4$，则$3^x+3^y$的最小值是（ B ）.

A. $\sqrt{2}$　　B. 18　　C. 9　　D. $2\sqrt{2}$　　E. $\sqrt{6}$

---

**【标志词汇】** 限制为正+求最值 $\Rightarrow$ 均值定理

一正　$3^x>0$，$3^y>0$

二定　$3^x+3^y\geq 2\sqrt{3^x\times 3^y}=2\sqrt{3^{x+y}}=2\times\sqrt{3^4}=18.$

三相等　当$3^x=3^y$，即$x=y$时等号成立，取到最小值18.

## 跟学团 联考求最值方法对比

| 方法 | 二次函数 | 均值定理 |
|---|---|---|
| 描述 | $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$<br>$x=-\frac{b}{2a}$时，可取得最值$\frac{4ac-b^2}{4a}$ | $a+b\geq 2\sqrt{ab}\ (a,b>0)$<br>$ab$为定值，$a=b$时可取得$a+b$的最小值 |
| 比较 | 不限制变量的取值范围 | 参与运算的每项必须为正 |
| | 只能处理完全符合二次函数形式的算式 | 算式形式多变 |

- （可化为）二次函数$ax^2+bx+c$形式的均优先使用二次函数求最值
- 不可化为二次函数形式的使用均值定理求最值 分式如$x+\frac{1}{x}$ 高次如$x^2(1-x)$

## 跟学团 均值定理·求和的最小值·凑配定值

**【标志词汇】** 限制为正+求最值 ⟹ 均值定理

若它们的乘积为常数，则直接使用均值定理求和的最小值 $a+b\geq 2\sqrt{ab}$

- 互为倒数，乘积天然为常数
- 题目给定乘积为常数

$$\boxed{x^2+1}+\boxed{\frac{4}{x^2+1}}\geq 2\cdot\sqrt{\cancel{(x^2+1)}\cdot\frac{4}{\cancel{x^2+1}}}=4$$ 当$x=\pm 1$时取得最小值4.

$$\boxed{\frac{y}{x}+\frac{x}{y}}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=2\quad(x,y>0)$$ 当$\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$，$x=y$时取得最小值2.

## 跟学团 均值定理·求和的最小值·凑配定值

【标志词汇】限制为正+求最值 ⇒ 均值定理 **求和最小，凑积定**

若它们的乘积不是常数，则**凑配**使参与运算的项乘积为常数.

【举例】求$x+\frac{1}{2x^2}$的最小值（$x>0$） $x+\frac{1}{2x^2}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{2x^2}}=2\sqrt{\frac{1}{2x}}=\boxed{\sqrt{\frac{2}{x}}}$ **非**常数

---

$$\boldsymbol{x}+\frac{1}{2x^2}=\boldsymbol{\frac{x}{2}}+\boldsymbol{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2x^2}\ge 3\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2x^2}}=\frac{3}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{3}{2}$$

**平均拆分 使乘积为定值** 拆分后注意参与运算的项数发生变化

当且仅当$\frac{x}{2}=\frac{x}{2}=\frac{1}{2x^2}$，$x^3=1$，$x=1$时可取到“＝”（最小值）

## 跟学团 均值定理·求和的最小值·凑配定值

【标志词汇】限制为正+求最值 ⇒ 均值定理

若它们的乘积不是常数，则**凑配**使参与运算的项乘积为常数.

【举例】求$x+\frac{1}{2x^2}$的最小值（$x>0$）

---

$x+\frac{1}{2x^2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{2x^2}$ 次数不同时，将较低次项平均拆分，拆得项数等于较高次数
拆分后注意参与运算的项数发生变化

$$\frac{x}{3}+\frac{2x}{3}+\frac{1}{2x^2}\ge 3\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{3}\cdot\frac{2x}{3}\cdot\frac{1}{2x^2}}=3\times\sqrt[3]{\frac{1}{9}}=\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{\frac{1}{9}}=\sqrt[3]{27\times\frac{1}{9}}=\sqrt[3]{3}\approx 1.44$$

取“＝”（最小值）条件$\frac{x}{3}=\frac{2x}{3}=\frac{1}{2x^2}$不可能成立

## 跟学团 均值定理 • 求和的最小值• 凑配定值

**【标志词汇】** 限制为正+求最值 ⇒ 均值定理

若它们的乘积不是常数，则**凑配**使参与运算的项乘积为常数.

次数不同时，将较低次项平均拆分，拆得项数等于较高次数
（拆分后注意参与运算的项数发生变化）

【举例】求$x+\frac{1}{3x^3}$的最小值（$x>0$）

---

$$x+\frac{1}{3x^3}=\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{1}{3x^3}\geq 4\cdot\sqrt[4]{\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3x^3}}=\frac{4}{\sqrt[4]{3^4}}=\frac{4}{3}$$

当且仅当$\frac{x}{3}=\frac{x}{3}=\frac{x}{3}=\frac{1}{3x^3}$，$x^4=1$，$x=1$ （$x>0$）时可取到“ = ”（最小值）

## 跟学团 均值定理 • 求和的最小值• 凑配定值

**【标志词汇】** 限制为正+求最值 ⇒ 均值定理

若它们的乘积不是常数，则**凑配**使参与运算的项乘积为常数.

次数不同时，将较低次项平均拆分，拆得项数等于较高次数
（拆分后注意参与运算的项数发生变化）

【举例】求$4x^2+\frac{1}{x}$的最小值（$x>0$）

---

$$4x^2+\frac{1}{x}=4x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\geq 3\cdot\sqrt[3]{4x^2\cdot\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{2x}}=3\cdot\sqrt[3]{1}=3$$

当且仅当$4x^2=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2x}$，$x^3=\frac{1}{8}$，$x=\frac{1}{2}$时，时可取到“ = ”（最小值）

## 跟学团 均值定理 • 求和的最小值• 凑配定值

**【标志词汇】** 限制为正+求最值 ⟹ 均值定理

若它们的乘积不是常数，则**凑配**使参与运算的项乘积为常数.

形式不同时，将整式部分与分式部分分母凑成相同形式.

【举例】求$x+\frac{1}{x-2}$的最小值（$x>2$）

$$\boldsymbol{x}+\frac{1}{x-2}=\boxed{\boldsymbol{x}-\mathbf{2}+\frac{1}{x-2}}+\mathbf{2}\geq 2\cdot\sqrt{(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}}+2=4$$

当且仅当$x-2=\frac{1}{x-2}$，即$x-2=\pm1$，$x=3$或$x=1$（舍）时取到最小值

## 跟学团 均值定理 • 求和的最小值• 凑配定值

**【标志词汇】** 限制为正+求最值 ⟹ 均值定理

若它们的乘积不是常数，则**凑配**使参与运算的项乘积为常数.

形式不同时，将整式部分与分式部分分母凑成相同形式.

【举例】求$x+\frac{1}{x-2}$的最小值（$x>2$）

$$x+\frac{1}{x-2}=\boxed{x-2+\frac{1}{x-2}+2}\geq 3\cdot\sqrt[3]{(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}\cdot 2}=3\sqrt[3]{2}$$

$x-2=\frac{1}{x-2}=2$，$x=4$且$x=3$且$x=\frac{5}{2}$，取最值条件不可能取得

求最值时只对带未知量部分使用均值定理

## 跟学团 均值定理・求和的最小值・凑配定值

次数不同时，如$x+\frac{1}{2x^2}$

将较低次项平均拆分，拆得项数等于较高次数

注意拆分后注意参与运算的项数发生变化

形式不同时，如$x+\frac{1}{x-2}$

将整式部分与分式部分分母凑成相同形式

注意只对凑配后的带未知量部分使用均值定理求最值.

形式与次数均不同时，如$x+\frac{1}{3(x-2)^3}$

**先凑形式，再凑次数**

## 跟学团 均值定理・求和的最小值・凑配定值

【举例】求$x+\frac{1}{3(x-2)^3}$的最小值（$x>2$）

---

形式与次数均不同：先凑形式，再凑次数

$$x+\frac{1}{3(x-2)^3}=x-2+\frac{1}{3(x-2)^3}+2=\frac{x-2}{3}+\frac{x-2}{3}+\frac{x-2}{3}+\frac{1}{3(x-2)^3}+2$$

$$\geq 4\cdot\sqrt[4]{\frac{x-2}{3}\cdot\frac{x-2}{3}\cdot\frac{x-2}{3}\cdot\frac{1}{3(x-2)^3}}+2=\frac{4}{\sqrt[4]{3^4}}+2=\frac{10}{3}$$

当且仅当$\frac{x-2}{3}=\frac{1}{3(x-2)^3}$，$(x-2)^4=1$，$x=3$时可取到“$=$”（最小值）

## 跟学团 均值定理·求和的最小值

【真题2019.02】设函数$f(x)=2x+\frac{a}{x^2}$ $(a>0)$ 在$(0,+\infty)$内的最小值为$f(x_0)=12$，则$x_0=$（ B ）.

A.5　　B.4　　C.3　　D.2　　E.1

【标志词汇】限制为正+求最值 ⇒ 均值定理

次数不同：将较低次项平均拆分，拆得项数等于较高次数

注意拆分后注意参与运算的项数发生变化

$f(x)=x+x+\frac{a}{x^2}\ \geq 3\cdot\sqrt[3]{x\cdot x\cdot\frac{a}{x^2}}=3\cdot\sqrt[3]{a}=12$　$\Rightarrow a=4^3$　$x=x=\frac{a}{x^2}$　${x_0}^3=a=4^3$

【技巧】参与运算的每项都相等时可取到最值，故$x_0=4$

## 跟学团 均值定理·求和的最小值

$x_1+x_2+\cdots+x_n\geq n\cdot\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$　积定和最小

**一正** 所有参与运算的项均为正. 能用套用均值不等式

注意天然为正的讨论范围

如：非零完全平方、恒为正的二次函数、指数函数、平面几何、概率

**二定** 所有参与运算的项乘积为一确定的值 能求最值

形式不同如$x+\frac{1}{x-2}$　次数不同如$x+\frac{1}{2x^2}$　形式与次数均不同如$x+\frac{1}{3(x-2)^3}$

**三相等** 当且仅当所有参与运算的项均相等时，它们的和可取到最小值.

能取到最值

## 跟学团 均值定理·求积的最大值

均值不等式 $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$

$x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n\cdot\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$　　$a+b\geq 2\sqrt{ab}$　积定和最小

**求和的最小值　凑积定**

$x_1x_2\cdots x_n \leq \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n$　　$ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$　和定积最大

**求积的最大值　凑合定**

注：$a,b$表示任意正代数式

## 跟学团 均值定理·求积的最大值

$ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

① $a$，$b$可以代表任何正代数式.　　$x(1-x)\leq\left[\frac{x+(1-x)}{2}\right]^2=\frac{1}{4}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$a$ $b$

② 使用范围：$a$，$b>0$　　$x>0$　$1-x>0$　$0<x<1$

③ 当且仅当$a=b$时，等号成立.　　当且仅当$x=1-x$，$x=\frac{1}{2}$时“ = ”成立，取得最大值.

两个正代数式之和为定值，则它们的乘积有最大值　　和定积最大

当两代数式相等时可取得此最大值.

## 跟学团 均值定理

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$ 【标志词汇】限制为正+求和的最小值 ⇒ 凑“积定”后用均值定理

一正 ① $a,b$均为正代数式. 能用套用均值不等式

二定 ② $ab$为定值 能求最值

三相等 ③ 当且仅当$a=b$时，和可取到最小值. 能取到最值

---

$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ 【标志词汇】限制为正+求积的最大值 ⇒ 凑“和定”后用均值定理

一正 ① $a,b$均为正代数式. 能用套用均值不等式

二定 ② $a+b$为定值 能求最值

三相等 ③ 当且仅当$a=b$时，可取到最值. 能取到最值

## 跟学团 平均值、绝对值

【标志词汇】限制为正+求积的最大值 ⇒ 凑“和定”后用均值定理

$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$  $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ （$a,b,c$可以代表任何正代数式）

【举例】求$x(1-x)$的最大值（$0<x<1$）

---

若它们的和为常数，则直接使用均值定理求乘积的最大值

$$x(1-x) \leq \left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

当且仅当参与运算的所有项相等，即$x=1-x$，$x=\frac{1}{2}$时取到最大值

## 跟学团 均值定理·求积的最大值·凑配定值

**【标志词汇】** 限制为正+求积的最大值 ⇒ 凑“和定”后用均值定理

若它们的和不是常数，则**凑配**使参与运算的项之和为常数.

【举例】求$x^2(1-2x)$的最大值（$0<x<\frac{1}{2}$）

---

$$x^2(1-2x)\le\left(\frac{x^2-2x+1}{2}\right)^2$$

$$x^2(1-2x)=x\cdot x\cdot(1-2x)\ \le\left(\frac{x+x+1-2x}{3}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

**平均拆至同次数**

当且仅当参与运算的所有项相等，即$x=x=1-2x$，$x=\frac{1}{3}$时，可取得最大值.

## 跟学团 均值定理·求积的最大值·凑配定值

**【标志词汇】** 限制为正+求积的最大值 ⇒ 凑“和定”后用均值定理

若它们的和不是常数，则**凑配**使参与运算的项之和为常数.

**【举例】**求$x^2(1-x)$的最大值（$0<x<1$）

---

$$x^2(1-x)\le\left(\frac{x^2+1-x}{2}\right)^2$$

$$x^2(1-x)=x\cdot x\cdot(1-x)\ =\frac{1}{2}\cdot x\cdot x\cdot(2-2x)\ \le\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x+x+2-2x}{3}\right)^3=\frac{2^2}{3^3}$$

**再按需乘系数**

**先平均拆至同次数**

当且仅当参与运算的所有项相等，即$x=x=2-2x$，即$x=\frac{2}{3}$时可取得此最大值.

## 跟学团 均值定理·求积的最大值·凑配定值

**【标志词汇】** 限制为正+求积的最大值 ⇒ 凑“和定”后用均值定理

先平均拆至同次数，再按需乘系数

注意：只对凑配后的带未知量部分使用均值定理求最值.

【举例】求$x^2(1-x)$的最大值（$0<x<1$）

---

$$x^2(1-x)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot x\cdot(2-2x)\le\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x+x+2-2x}{3}\right)^3=\frac{2^2}{3^3}$$

$$x^2(1-x)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot x\cdot(2-2x)\ \le\left(\frac{\frac{1}{2}+x+x+2-2x}{4}\right)^4=\left(\frac{5}{8}\right)^4$$

取最值条件$\frac{1}{2}=x=x=2-2x$，无法取得.

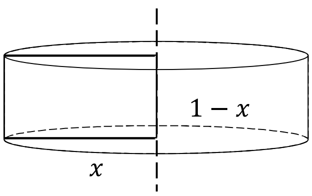
## 跟学团 均值定理·求积的最大值

**【真题2004.01.04】**矩形周长为2，将它绕其一边旋转一周，所得圆柱体体积最大时的矩形面积是（ C ）.

A. $\frac{4\pi}{27}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{2}{9}$　　D. $\frac{27}{4}$　　E. 以上都不对

---

**【标志词汇】** 限制为正+求积的最大值 ⇒ 凑“和定”后用均值定理




$V=\pi x^2(1-x)=\pi\cdot x\cdot x\cdot(1-x)$ 先平均拆至同次数

$$=\frac{1}{2}\pi\cdot x\cdot x\cdot(2-2x)\le\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{x+x+2-2x}{3}\right)^3=\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

再按需乘系数

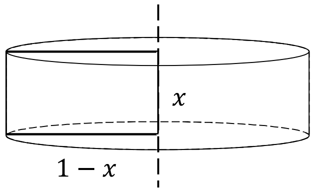
当且仅当$x=2-2x$，$x=\frac{2}{3}$时，体积$V$可取得最大值. 此时矩形的面积为$\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}$.

## 跟学团 均值定理·求积的最大值

【真题2004.01.04】矩形周长为2，将它绕其一边旋转一周，所得圆柱体体积最大时的矩形面积是（ C ）.

A. $\frac{4\pi}{27}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{2}{9}$　　D. $\frac{27}{4}$　　E. 以上都不对

【标志词汇】限制为正+求积的最大值 ⇒ 凑"和定"后用均值定理




$V=\pi(1-x)^2x=\pi\cdot(1-x)\cdot(1-x)\cdot x$ 先平均拆至同次数

$=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(1-x)\cdot(1-x)\cdot 2x\le\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{1-x+1-x+2x}{3}\right)^3=\frac{\pi}{2}(\frac{2}{3})^3$

再按需乘系数

当且仅当$1-x=2x$，$x=\frac{1}{3}$时，体积$V$可取得最大值. 此时矩形的面积为$\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}$.

## 跟学团 均值定理·求积的最大值

【例题】已知正实数$x$，$y$满足$2x+y=2$，则$xy$的最大值等于（ B ）.

A. $\frac{5}{8}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{8}$　　D. $\frac{1}{4}$　　E. $\frac{1}{8}$

【标志词汇】限制为正+求积的最大值 ⇒ 凑"和定"后用均值定理

$$xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

$$2x\cdot y\le\left(\frac{2x+y}{2}\right)^2=\left(\frac{2}{2}\right)^2=1$$

$2xy$的最大值为1　　$xy$的最大值为$\frac{1}{2}$

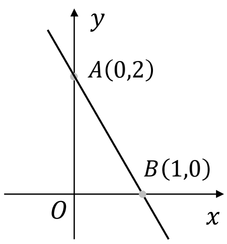
## 跟学团 均值定理·求积的最大值

【**真题2015.12**】设点$A(0,2)$和$B(1,0)$，在线段$AB$上取一点$M(x,y)$（$0<x<1$），则以$x$、$y$为两边长的矩形面积的最大值为（ B ）

A. $\frac{5}{8}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{8}$　　D. $\frac{1}{4}$　　E. $\frac{1}{8}$

---

**【标志词汇】** 限制为正+求积的最大值 ⇒ 凑“和定”后用均值定理




$AB$所在直线方程为$2x+y=2$

矩形面积$S=xy=\frac{1}{2}\cdot 2xy\le\frac{1}{2}\left(\frac{2x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

当$2x=y$时，可取得此最值

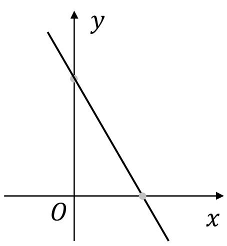
结合$2x+y=2$可得：$x=\frac{1}{2}$，$y=1$


## 跟学团 均值定理·求积的最大值

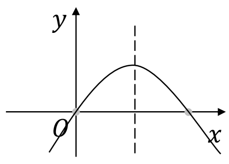
【**真题2015.12**】设点$A(0,2)$和$B(1,0)$，在线段$AB$上取一点$M(x,y)$（$0<x<1$），则以$x$、$y$为两边长的矩形面积的最大值为（ B ）

A. $\frac{5}{8}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{8}$　　D. $\frac{1}{4}$　　E. $\frac{1}{8}$


---




$AB$所在直线方程为$2x+y=2$　　$y=-2x+2$




矩形面积$S=xy=x(2-2x)=-2x^2+2x$

当$x=\frac{1}{2}$时，矩形面积$xy$取最大值$-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$

## 跟学团 均值定理逆应用

**【模拟题】**实数$a,b$的算术平均值为3，几何平均值也为3，则$a-1$和$b^2+9$（$a>1$，$b>0$）的算术平均值和几何平均值分别为（ A ）.

A. 10和6　　B. 9和6　　C . 8和8　　D. 3和6　　E. 6和8

**【均值定理逆应用】**<u>如果几个正数的算术平均值和它们的几何平均值相等，那么这几个正数相等.</u>

$a=b=3$　$\begin{cases} a-1=2 \\ b^2+9=18 \end{cases}$　算术平均值为$\frac{2+18}{2}=10$　几何平均值为$\sqrt{2\times 18}=6$.

**【简要证明】** $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$　$a+b=2\sqrt{ab}$　$(a+b)^2=4ab$

$a^2+2ab+b^2-4ab=(a-b)^2=0$　$a=b$

## 跟学团 均值定理

一正：能用套用均值不等式
二定：可求最值
三相等：能取到最值

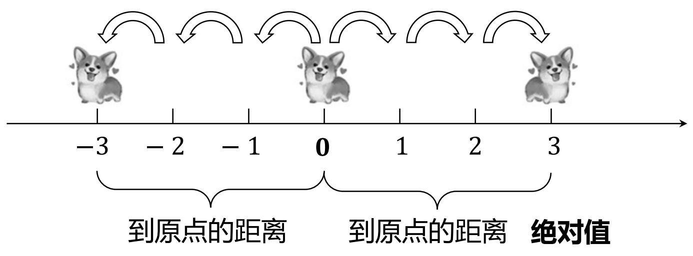
| 应用 | 和的最小值 | 积的最大值 |
| --- | --- | --- |
| 两项时 | $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ | $ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ |
| | 【常用不等式链】$2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2\geq 4ab$ | |
| 三项时 | $a+b+c\geq 3\cdot\sqrt[3]{abc}$ | $abc\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ |
| 互为倒数 | $a+\frac{1}{a}\geq 2$ | — |
| 逆应用 | 如果几个正数的算术平均值和它们的几何平均值相等，那么这几个正数相等. | |

$$2(a^2+b^2)=a^2+b^2+(a^2+b^2)\geq a^2+b^2+2ab=(a+b)^2\geq\left(2\sqrt{ab}\right)^2=4ab$$

## 基础知识 绝对值

- 绝对值的定义（代数、几何）
- 绝对值的性质
- 去掉绝对值
- 绝对值的几何意义
- 绝对值三角不等式

## 基础知识 绝对值的定义




$|3| = 3$　　$|1.2| = 1.2$　　$|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$　　正数的绝对值是它本身

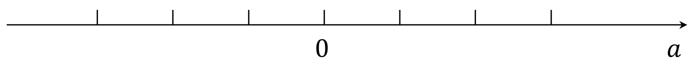
$|-3| = 3$　　$|-1.2| = 1.2$　　$|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$　　负数的绝对值是它的相反数

$|0| = 0$　　零的绝对值是零

## 基础知识 绝对值的性质

$$
\text{任意实数}a\text{的绝对值，}|a| = \begin{cases} a > 0 & |a| = a \\ a = 0 & |a| = 0 \\ a < 0 & |a| = -a \quad \text{负号表示“相反”} \end{cases}
$$

分情况讨论：先判断符号，再求绝对值.




（1）$|a| \geq a$，即一个数的绝对值大于等于它本身.

## 考点一 绝对值的性质

C or E

【例题1】（条件充分性判断）实数$a, b$满足$|a|(a+b) > a|a+b|$（ C ）.

（1）$a < 0$.　　　　（2）$b > -a$.

---

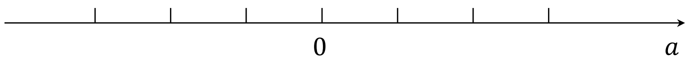
条件（1）：$a < 0$　　$|a| = -a > a$

条件（2）：$a + b > 0$　　$|a+b| = a+b$

联合两条件得：$|a|(a+b) = -a(a+b) > a(a+b) = a|a+b|$，故联合充分.

## 基础知识 绝对值的性质

任意实数$a$的绝对值，$|a|=\begin{cases} a & (当a>0时) \\ 0 & (当a=0时) \\ -a & (当a<0时) \end{cases}$

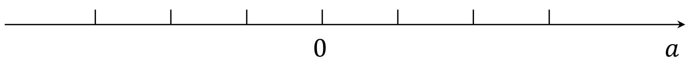



（2）$\sqrt{a^2}=|a|$　　$\sqrt{2^2}=\sqrt{4}=2=|2|$　　$\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2=|-2|$

（3）$|a|^2=|a^2|=a^2$　$|2|^2=|2^2|=2^2=4$　　$|-2|^2=|(-2)^2|=(-2)^2=4$

## 基础知识 绝对值的性质

任意实数$a$的绝对值，$|a|=\begin{cases} a & (当a>0时) \\ 0 & (当a=0时) \\ -a & (当a<0时) \end{cases}$




（4）$|a|=|-a|$：对称性，即互为相反数的两个数的绝对值相等.

（5）若$|a|=3$，则$a$的可能取值有两个，为$a=3$或$a=-3$，即$a=\pm 3$

$\Uparrow$

可换为任意正实数

（6）逆应用：若已知$|a|=a$，则一定有$a\geq 0$

若已知$|a|=-a$，则一定有$a\leq 0$

## 考点一 绝对值的性质

$\sqrt{\ }$ 具有双重非负性

【例题2】已知$\sqrt{x^3+2x^2}=-x\sqrt{2+x}$，则$x$的取值范围是（ C ）.

A. $x<0$　　B. $x\geq -2$　　C. $-2\leq x\leq 0$　　D. $-2<x<0$　　E. 以上均不正确

---

【技巧】为使$\sqrt{2+x}$有意义，要求$2+x\geq 0$，即$x\geq -2$.

代入$x=0$得$\sqrt{x^3+2x^2}=0=-x\sqrt{2+x}$，即$x=0$可令等式成立，选C.

**范围型选项：含错必错 不含对必错**

$\boxed{\sqrt{a^2}=|a|}$

左侧 $=\sqrt{x^3+2x^2}=\sqrt{x^2(x+2)}=|x|\sqrt{2+x}=$ 右侧 $=-x\sqrt{2+x}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{即}|x|\text{去掉绝对值后}x\text{变为它的相反数，则有}x\leq 0.\\ \text{为使}\sqrt{2+x}\text{有意义，要求}2+x\geq 0\text{，即}x\geq -2.\end{array}\right\}-2\leq x\leq 0$$

## 基础知识 绝对值的性质

任意实数$a$的绝对值，$|a|=\begin{cases}a & (\text{当}a>0\text{时})\\ 0 & (\text{当}a=0\text{时})\\ -a & (\text{当}a<0\text{时})\end{cases}$

（7）自比性：$\dfrac{|a|}{a}=\dfrac{a}{|a|}=\begin{cases}1 & (a>0)\\ -1 & (a<0)\end{cases}$任一非零代数式与其绝对值的比值为$+1$或$-1$

| | | |
|---|---|---|
| $a>0$ | $\lvert a\rvert=a$ | $\dfrac{\lvert a\rvert}{a}=\dfrac{a}{\lvert a\rvert}=1$ |
| $a<0$ | $\lvert a\rvert=-a$ | $\dfrac{\lvert a\rvert}{a}=\dfrac{a}{\lvert a\rvert}=-1$ |

## 考点一 绝对值的性质

$\frac{|a|}{a}$，$\frac{b}{|b|}$，$\frac{|c|}{c}$这几项的值分别都只可能为$+1$或$-1$

【例题3】已知$\frac{|a|}{a}+\frac{b}{|b|}+\frac{|c|}{c}=1$，则$\frac{|ab|}{ab}+\frac{bc}{|bc|}+\frac{|ac|}{ac}+\frac{abc}{|abc|}=$（ E ）.

A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. $-1$　　E. $-2$

**【标志词汇】**题目中出现形如$\frac{|a|}{a}$或$\frac{a}{|a|}$，即一个代数式与其绝对值之比的形式

入手方向：将这个比看作一个整体，利用绝对值的自比性求值.

$\boxed{\frac{|a|}{a}=\frac{a}{|a|}=\begin{cases}1 & (a>0)\\ -1 & (a<0)\end{cases}}$

$1+1-1=1$　设$\frac{|a|}{a}=1$，$\frac{b}{|b|}=1$，$\frac{|c|}{c}=-1$

$a>0$　$b>0$　$c<0$

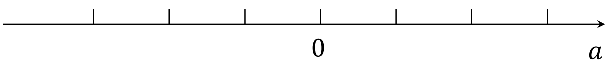
$ab>0$，$bc<0$，$ac<0$，$abc<0$

$$\frac{|ab|}{ab}+\frac{bc}{|bc|}+\frac{|ac|}{ac}+\frac{abc}{|abc|}=1-1-1-1=-2$$

## 基础知识 绝对值的性质

条件等式数量少，形式复杂，未知量多，无法向待求式转化.

任意实数$a$的绝对值，$|a|=\begin{cases}a & (当a>0时)\\ 0 & (当a=0时)\\ -a & (当a<0时)\end{cases}$




【标志词汇】$|(\ \ )|+\sqrt{(\ \ )}+(\ \ )^2=0$

每一个算式分别为零，进而得到关于未知字母的方程组，解方程.

（8）非负性：$|a|\geq 0$.　$|a|\geq 0$，$\sqrt{a}\geq 0$（$a\geq 0$），$a^2\geq 0$.　$\sqrt{a^2}=|a|$

$|a-3|=0$　　$|x-2|+|y-3|=0$

$|x-1|+\sqrt{y+2}+(z-3)^2=0$　　$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{y+2}+(z-3)^2=0$

$\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$

## 考点一 绝对值的性质

【例题4】已知$|x-y+1|+(2x-y)^2=0$，则$2^x+y^3=$（ D ）.

A.4 B.6 C.8 D.10 E.12

条件等式数量少，形式复杂，未知量多，无法向待求式转化.

【标志词汇】几个具有非负性的算式之和为零.

$$\underbrace{\boxed{|x-y+1|}}_{0}+\underbrace{\boxed{(2x-y)^2}}_{0}=0$$

$$\begin{cases}x-y+1=0\\2x-y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$$

$$2^x+y^3=2^1+2^3=10$$

## 考点一 绝对值的性质

【例题5】设$x,y,z$满足$|3x+y-z-2|+(2x+y-z)^2=\sqrt{x+y-2002}+\sqrt{2002-x-y}$，则$(y-z)^x$的值为（ C ）.

A. 0 B. 1 C. 16 D. 20 E. 24

条件等式数量少，形式复杂，未知量多，无法向待求式转化.

$|3x+y-z-2|+(2x+y-z)^2=\sqrt{x+y-2002}+\sqrt{2002-x-y}$ 二次根式的双重非负性

$x+y-2002\ge0$ $2002-x-y\ge0$

$x+y-2002\le0$

$\underbrace{\boxed{|3x+y-z-2|}}_{0}+\underbrace{\boxed{(2x+y-z)^2}}_{0}=0$ 【标志词汇】几个具有非负性的算式之和为零.

$$\begin{cases}3x+y-z-2=0\\2x+y-z=0\\x+y=2002\end{cases}\quad\begin{cases}x=2\\y=2000\\z=2004\end{cases}\quad(y-z)^x=(2000-2004)^2=16$$

## 考点一 绝对值的性质

两式相加　　　　陷阱

【例题6】已知实数$a,b,x,y$满足$\boxed{y+|\sqrt{x}-\sqrt{2}|=1-a^2}$和$\boxed{|x-2|=y-1-b^2}$，则$\boxed{3^{x+y}+3^{a+b}}$=（ D）.

A. 25　　B. 26　　C. 27　　D.28　　E.29

条件等式数量少，形式复杂，未知量多，无法向待求式转化.

【技巧】特值法，令$x=2$，$a=b=0$，$y=1$，恰满足题目条件，代入得$3^{2+1}+3^{0+0}=28$.

$y+|\sqrt{x}-\sqrt{2}|+|x-2|=1-a^2+y-1-b^2$

$|\sqrt{x}-\sqrt{2}|+|x-2|+a^2+b^2=0$

【标志词汇】几个具有非负性的算式之和为零. $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{2}=0\\ x-2=0\\ a=0\\ b=0\end{cases}$，代回原式可得$y=1$

故$3^{x+y}+3^{a+b}=3^{2+1}+3^{0+0}=28$

## 考点一 绝对值的性质

条件等式数量少，形式复杂，未知量多，无法向待求式转化.

【例题7】设$x,y,z$满足条件$|x^2+4xy+5y^2|+\sqrt{z+\frac{1}{2}}=-2y-1$，则$(4x-10y)^z$等于（ C ）

A.1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{6}$　　D. 2　　E. $\frac{1}{2}$

【标志词汇】几个具有非负性的算式之和为零.

移项得$|x^2+4xy+5y^2|+2y+1+\sqrt{z+\frac{1}{2}}=0$

$$x^2+4xy+4y^2+y^2=(x+2y)^2+y^2\geq 0$$

$$(x+2y)^2+y^2+2y+1+\sqrt{z+\frac{1}{2}}=(x+2y)^2+(y+1)^2+\sqrt{z+\frac{1}{2}}=0$$

$$\begin{cases}x+2y=0\\ y+1=0\\ z+\frac{1}{2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-1\\ z=-\frac{1}{2}\end{cases}\quad (4x-10y)^z=(4\times 2+10)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

## 基础知识 拓展•常见方程整理方法

**普通方程**：将所有项全部移至等号左边，等号右边为零.

**无理方程**：将无理部分移至等号一边，有理部分移至另一边.

**多变量方程**：将变量分离，如将包含$x$的移项至方程一边，包含$y$的移项至另一边.

**含参方程**：将带参数的部分移至等号一边，其余部分移至另一边，如

$kx-y+8-6k=0$移项为$k(x-6)=y-8$，此即参变分离.

**通用整理**：向能提取出待求式方向整理.

$x^2-4xy+4y^2+\sqrt{3}x+\sqrt{3}y-6=0$，求$x+y$最值.

$(x-2y)^2+\sqrt{3}(x+y)-6=0$ $\quad$ $x+y=\dfrac{6-(x-2y)^2}{\sqrt{3}}\le\dfrac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

**多个方程**：全部相加.

## 基础知识 绝对值性质总结

(1) $|a|\ge a$

(2) $\sqrt{a^2}=|a|$.

(3) $|a|^2=|a^2|=a^2$.

(4) $|a|=|-a|$

(5) 若$|a|=3$，则$a=\pm3$.

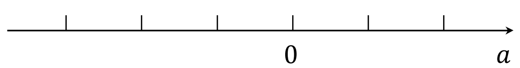
(6) 若已知$|a|=a$，则一定有$a\ge0$

若已知$|a|=-a$，则一定有$a\le0$

(7) 自比性：$\dfrac{|a|}{a}=\dfrac{a}{|a|}=\begin{cases}1 & (a>0)\\-1 & (a<0)\end{cases}$

(8) 非负性：$|a|\ge0$

任意实数$a$的绝对值，$|a|=\begin{cases}a & （当a>0时）\\0 & （当a=0时）\\-a & （当a<0时）\end{cases}$ 代数




距离

几何