跟学团 特值法在整式、分式中的应用

特值法 $\begin{cases}\text{恒等式问题}\\ \text{化简求值}\end{cases}$

【标志词汇】<u>给出恒等式 ⇔ x取任意值，两多项式均相等 ⇔ 取x特值得到关于系数的等式</u>

【标志词汇】求代数式具体值 ⇔ 特值代入法

特值选取方向：消去未知量，提取待求式

常用特值：$x=0$，± 1

10以内整数的平方

5以内整数的立方

2^n（$n=0,1,2\ldots$）

以及它们的常见和、差

跟学团 特值法在整式、分式中的应用

【模拟题】对任意实数x，等式$ax-5x+6+b=0$恒成立，则$(a+b)^{2019}$为（　C　）.

A. 0　B. 1　C. -1　D. 2^{2019}　E. -2^{2019}

【标志词汇】<u>给出恒等式⇔ x取任意值，两多项式均相等 ⇔ 取x特值得到关于系数的等式</u>

特值选取方向：消去未知量，提取待求式　常用特值：0，± 1，± 2

寻找可以提取出$a+b$的x的特值

当$x=1$时　$a-5+6+b=0$

即$a+b=-1$

故$(a+b)^{2019}=-1$

跟学团 特值法在整式、分式中的应用

【模拟题】多项式x^3+ax^2+bx-6的两个因式是$x-1$和$x-2$，则其第三个一次因式为（ B ）.

A. $x-6$　　B. $x-3$　　C. $x+1$　　D. $x+2$　　E. $x+3$

有恒等式$x^3+ax^2+bx-6=(x-1)(x-2)(x+m)$

【标志词汇】给出恒等式⇔ x取任意值，两多项式均相等 ⇔ 取x特值得到关于系数的等式

特值选取方向：消去未知量，提取待求式　常用特值：0，±1，±2

取特值$x=0$以消去未知字母a,b

得：$(-1)\times(-2)\times m=-6$，$m=-3$

故所求因式为$x-3$

跟学团 特值法在整式、分式中的应用

特值法$\begin{cases}\text{恒等式问题}\\\text{化简求值}\end{cases}$

【标志词汇】给出恒等式 ⇔ x取任意值，两多项式均相等 ⇔ 取x特值得到关于系数的等式

【标志词汇】求代数式具体值 ⇔ 特值代入法

特值选取方向：消去未知量，提取待求式

常用特值：0，±1，±2

10以内整数的平方

5以内整数的立方

2^n（$n=0,1,2\ldots$）

以及它们的常见和、差

跟学团 特值法在整式、分式中的应用

【模拟题】已知$x-y=5$，$z-y=10$，则$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$的值为（ B ）.

A. 50　　B. 75　　C. 100　　D. 105　　E. 110

【标志词汇】求代数式具体值 ⇔ 特值代入法

取特值$x=5,y=0,z=10$

代入得$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=25+0+100-0-0-50=75.$

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2]$$
$$=\frac{1}{2}[5^2+(-5)^2+(-10)^2]=75$$

跟学团 特值法在整式、分式中的应用

【模拟题】已知$\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x+y+z}=1$，则$(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2=$（E）.

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1　　E. 2

【标志词汇】求代数式具体值 ⇔ 特值代入法

取特值$x=0$，$y=0$，则$z^2=1$，取$z=1$

则$(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2=0+1+1=2$

$$\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x+y+z}=\frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)}{x+y+z}=x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz=1$$

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2=2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz=2$$

跟学团 特值法在整式、分式中的应用

【模拟题】对于非零整数a,b,c，满足$a^2+b^2=c^2$，$2b=a+c$，则$\frac{a+b+c}{a+b-c}=$（ C ）.

A. -3　　B.3　　C. 6　　D. .$\sqrt{13}$　　E.-6

【标志词汇】求代数式具体值 ⇔ 特值代入法

观察知a,b,c满足勾股数，结合$2b=a+c$，取特值$a=3$，$b=4$，$c=5$

$$\frac{a+b+c}{a+b-c}=\frac{3+4+5}{3+4-5}=6$$

$a^2+b^2=c^2$，$b^2=c^2-a^2$，故$4b^2=(a+c)^2=4(c^2-a^2)$

$(a+c)(5a-3c)=0$　由于$2b=a+c\neq 0$，故$c=\frac{5}{3}a$，$b=\frac{4}{3}a$　代入得$\frac{a+b+c}{a+b-c}=6$

跟学团 特值法在整式、分式中的应用

【模拟题】若$a+b=4$，$a^3+b^3=28$，则$a^2+b^2=$（ D ）

A.16　　B.14　　C.12　　D.10　　E.8

【标志词汇】求代数式具体值 ⇔ 特值代入法

取特值$a=1$ $b=3$

$1+3=4$，$1^3+3^3=1+27=28$　　$a^2+b^2=1+9=10$

$\begin{cases}a^2+b^2+2ab=16\\(a+b)(a^2+b^2-ab)=28\end{cases}$　$\begin{cases}a^2+b^2+2ab=16\\a^2+b^2-ab=7\end{cases}$　$ab=3$

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=10$

跟学团 特值法在整式、分式中的应用

【标志词汇】给出恒等式 ⇔ x取任意值，两多项式均相等 ⇔ 取x特值得到关于系数的等式

【标志词汇】求代数式具体值 ⇔ 特值代入法

跟学团 特值法在整式、分式中的应用

【真题2018.05】设实数a,b满足$|a-b|=2$，$|a^3-b^3|=26$，则$a^2+b^2=$（ E ）.

A. 30　　B. 22　　C. 15　　D. 13　　E. 10

【标志词汇】求代数式具体值 ⇔ 特值代入法

【标志词汇】给定含绝对值的对称算式⇒设定未知字母间大小关系以去掉绝对值

设实数$a>b>0$　则有$|a-b|=a-b=2$

$$|a^3-b^3|=a^3-b^3=26$$

观察题目特征可知$26=27-1=3^3-1^3$

故可取特值$a=3$，$b=1$　代入得$a^2+b^2=3^2+1^2=10$

跟学团 特值法在整式、分式中的应用

【真题2019.04】设实数a，b满足$ab=6$，$|a+b|+|a-b|=6$，则$a^2+b^2=$（ D ）

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13　　E. 14

【标志词汇】求代数式具体值 ⇔ 特值代入法

【标志词汇】给定含绝对值的对称算式⇒设定未知字母间大小关系以去掉绝对值

设$a>b>0$，则$|a+b|+|a-b|=a+b+a-b=2a=6$

$a=3$，$b=2$

$a^2+b^2=4+9=13$

跟学团 根式

	$x^2=a$	$\boldsymbol{x^n=a}$
	已知a求x的运算：开平方运算 x是a的平方根	其中n称为根指数 若n是偶数，x是a的**偶次方根**
$a>0$时	$x=\pm\sqrt{a}$，两个平方根	$x=\pm\sqrt[n]{a}$，两个偶次方根
$a=16$	$x=\pm\sqrt{16}=\pm4$	$n=4$，$x=\pm\sqrt[4]{16}=\pm2$
$a=0$时	$x=\sqrt{0}=0$，一个平方根	$x=\sqrt[n]{o}=0$，一个偶次方根
$a<0$时	无意义	无意义

跟学团 根式

$x^3=a$	$\boldsymbol{x^n=a}$
已知a求x的运算：开立方运算 x是a的立方根	其中n称为根指数 若n是奇数，x是a的**奇次方根**
$x=\sqrt[3]{a}$ 立方根有且仅有一个	$x=\sqrt[n]{a}$ 奇次方根有且仅有一个
$\sqrt[3]{-8}=-2$ $(-2)\times(-2)\times(-2)=-8$	

跟学团 根式

$a^{\frac{n}{m}}$：**分子代表乘方**，**分母代表开方**

$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$　　$\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$　　$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

（m为偶数时，$a\neq$负数）

$$a^{\frac{5}{2}}=a^{\frac{1}{2}\times5}=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^5=(\sqrt{a})^5\quad=a^{5\times\frac{1}{2}}=(a^5)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a^5}$$

$$8^{\frac{2}{3}}=\left(\sqrt[3]{8}\right)^2=\sqrt[3]{8^2}=4$$

负指数幂 = 取倒数：$a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$ （$a\neq0$）

$$8^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{8^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{4}$$

跟学团 根式

注意：0的非正指数幂无意义

常见应用	公式	举例
指数为正整数	$a^m=a\times a\times\cdots\times a$	$2^3=2\times2\times2$
指数为零	$a^0=a^{1-1}=\frac{a^1}{a^1}=1$	$2^0=1$
指数为负	$a^{-m}=a^{0-m}=\frac{a^0}{a^m}=\frac{1}{a^m}$	$3^{-2}=\frac{1}{3^2}$ $5^{-3}=\frac{1}{5^3}$
指数为分数	$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$	$3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ $125^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{125^2}=25$
	$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ $a^{-\frac{1}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$	$5^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{5^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ $2^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

m,n为正整数，$n>1$，$a>0$

跟学团 根式

二次根式 形如$\sqrt{a}$（$a\geq0$）的式子.

a叫做被开方数，可以是一个数字，也可以是一个代数式.

双重非负性$\begin{cases}a\geq0\\\sqrt{a}\geq0\end{cases}$，当$a<0$时，二次根式无意义.

$\sqrt{0}=0$

以形式界定：$\sqrt{9}$也是二次根式

跟学团 根式

二次根式乘法法则 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ $(a\ge 0,b\ge 0)$

有条件逆运算 $\sqrt{ab}\overset{?}{=}\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ $\quad\sqrt{(-2)\cdot(-3)}\ne\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}$

$\sqrt{(-2)\cdot(-3)}=\sqrt{6}$

二次根式除法法则 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ $(a\ge 0,b>0)$

有条件逆运算 $\sqrt{\frac{a}{b}}\overset{?}{=}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $\quad\sqrt{\frac{-9}{-16}}\ne\frac{\sqrt{-9}}{\sqrt{-16}}$

$\sqrt{\frac{-9}{-16}}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}$

跟学团 根式

二次根式的乘法法则：$\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\times\beta}$ $(\alpha\ge 0,\beta\ge 0)$

二次根式的除法法则：$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ $(\alpha\ge 0,\beta>0)$

根式乘除法法则 同次根式相乘除，把被开方数相乘除，根指数不变.

$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{4\times 8}=\sqrt[3]{32}$ $\quad\boxed{(ab)^n=a^nb^n}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ $\quad 1=1^n=\sqrt[n]{1}$ $\quad\sqrt[n]{\frac{1}{m}}=\frac{1}{\sqrt[n]{m}}$ $\quad\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}}$

跟学团 根式

【模拟题】$a+b=1$.（　）

（1）$b=\frac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{1-a^2}}{a+1}$　　（2）$b=\frac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{1-a^2}}{a-1}$

二次根式双重非负性 $\sqrt{a}\geq 0$，$a\geq 0$

条件（1）$b=\frac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{1-a^2}}{a+1}$

根式有意义$\begin{cases}a^2-1\geq 0\\1-a^2\geq 0\end{cases}$　$a^2=1$，$a=\pm 1$

分式有意义$a+1\neq 0$，$a\neq -1$　　故$a=1$，$b=0$，$a+b=1$.

跟学团 根式

【模拟题】$a+b=1$.（ A ）

（1）$b=\frac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{1-a^2}}{a+1}$　　（2）$b=\frac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{1-a^2}}{a-1}$

二次根式双重非负性 $\sqrt{a}\geq 0$，$a\geq 0$

条件（2）$b=\frac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{1-a^2}}{a-1}$

根式有意义$\begin{cases}a^2-1\geq 0\\1-a^2\geq 0\end{cases}$　$a^2=1$，$a=\pm 1$

分式有意义$a-1\neq 0$，$a\neq 1$　　故$a=-1$，$b=0$，$a+b=-1\neq 1$

MBA大师-数学系统精讲

方程、不等式与函数

董璞

跟学团 方程、不等式与函数

- 联考核心技能

  一元二次方程

  一元二次不等式

  一元二次函数

- 既是重要考点，又是重要工具

跟学团 方程、不等式与函数·基础

含有未知量的等式叫做**方程** $2x+6=0$

方程中有几个未知量，就叫做**几元方程** $5x+6y+4=0$

未知量前面的数字或者字母叫做未知量的**系数**（字母系数一般以a,b,c,m,n,p,q等表示）.

$ax+6=0$（$a\neq 0$）

未知量的最高次幂，叫做**方程的次数**，最高次幂是几，就叫做**几次方程.**

$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）

把若干个方程合在一起研究，未知量同时满足每一个方程的一组方程称为**方程组（联立方程）**

$$\begin{cases}5x+6y+4=0\\3x-2y+2=0\end{cases}$$

跟学团 方程、不等式与函数·基础

【举例】已知$a\neq 0$

(1) $ax+6=0$ ___元___次方程

(2) $ax^2+bx+c=0$ ___元___次方程

(3) $3x^2+mx+5=0$ ___元___次方程

(4) $x^2+px+q=0$ ___元___次方程

(5) $ax^3+bx^2+2x+c=0$ ___元___次方程

(6) $x^2+axy+2y^2+px+q=0$ ___元___次方程

跟学团 方程、不等式与函数 · 基础

整式方程 等号两边都是关于未知量的整式的方程

仅包含数字与字母的和或乘积

未知量不能在分母上，不能在绝对值内、不能在指数上、不能在对数中

$|x-1|+x=2$ $\quad$ $x^2-x-5=|2x-1|$ $\quad$ $\sqrt{1-x^2}=x+1$

$\frac{3x^2-2}{x^2-1}=1$ $\quad$ $\frac{a}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=0$ $\quad$ $\frac{2y+3x}{3}=2$

$4^x+2^x=1$ $\quad$ $\log_a x=1$

跟学团 方程、不等式与函数 · 基础

使方程左右两边相等的未知量（一般为x或y）的值（或未知数的一组值），称为**方程的解**

一元方程解也叫作**方程的根**.

关于x的一元二次方程$x^2+2x-3=0$ $\quad$ $(x-1)(x+3)=0$

当$x=1$和$x=-3$时，均有方程等号左右两边相等，故1和-3均为该一元二次方程的根.

能令等号成立的未知量的值

m是关于x的一元二次方程$x^2+2x-3=0$的根

5是关于x的一元二次方程$x^2+mx-3=0$的根

跟学团 方程、不等式与函数·基础

【模拟题】（条件充分性判断）$\frac{3a^2-4a-3}{a^2-1}=1$.（A）

（1）a是$x^2-2x-1=0$的根.　　（2）a是$x^2-2x-2=0$的根.

【标志词汇】 <u>给定某数为方程的根 ⇒ 给定一个此数满足的等式.</u>

条件（1）a满足$a^2-2a-1=0$　　$a^2=2a+1$

$$\frac{3a^2-4a-3}{a^2-1}=\frac{3(2a+1)-4a-3}{2a+1-1}=1$$

条件（2）a满足$a^2-2a-2=0$　　$a^2=2a+2$

$$\frac{3a^2-4a-3}{a^2-1}=\frac{3(2a+2)-4a-3}{2a+2-1}=\frac{2a+3}{2a+1}\neq 1$$

跟学团 一元二次方程·根与系数关系

使一元二次方程左右两边相等的x的值，称为一元二次方程的**解**（或**根**）.

$x^2+2x-3=0$　　$x_1=1$，$x_2=-3$

$2x^2=0$　　$x_1=x_2=0$

$x^2+4=0$　　没有实数根

一元二次方程根的3种可能情况：
- 没有实数根
- 两个相等的实数根
- 两个不等的实数根

跟学团 一元二次方程·求根公式

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，当$b^2-4ac\geq 0$时，它的根是

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \longrightarrow \textbf{一元二次方程根的判别式}\boldsymbol{\Delta}$$

（1）$\Delta=b^2-4ac>0$时，方程有两个不相等的实数根，即

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

跟学团 一元二次方程·根的判别式

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，当$b^2-4ac\geq 0$时，它的根是

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \longrightarrow \textbf{一元二次方程根的判别式}\boldsymbol{\Delta}$$

（2）$\Delta=b^2-4ac=0$时，方程有两个相等的实数根，即$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$

注意：此时方程仍然有两实根，它们取值相等，而非仅有一个根.

（3）$\Delta=b^2-4ac<0$时，方程无实数根.

跟学团 一元二次方程·根的判别式

。。。。。

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，当$b^2-4ac\geq 0$时，它的根是

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\longrightarrow$$ **一元二次方程根的判别式Δ**

$x^2+2x-3=0$　　$\Delta=2^2-4\times 1\times(-3)=4+12=16$

$$x_1=\frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1}=\frac{-2+4}{2\times 1}=1,\ x_2=\frac{-2-4}{2\times 1}=-3$$

$2x^2=0$　　$2x^2+0\cdot x+0=0$　　$\Delta=0^2-4\times 2\times 0=0$　　$x_1=x_2=\dfrac{0}{2\times 2}=0$

$x^2+4=0$　　$x^2+0\cdot x+4=0$　　$\Delta=0^2-4\times 1\times 4=-16<0$　　没有实数根

跟学团 一元二次方程·根的判别式

。。。。。

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\longrightarrow$$ **一元二次方程根的判别式Δ**

【标志词汇】 一元二次方程有实根$\Leftrightarrow\Delta\geq 0$.

【标志词汇】 一元二次方程有两个**相等**的实根$\Leftrightarrow\Delta=0$.

【标志词汇】 一元二次方程有两个**不相等**的实根$\Leftrightarrow\Delta>0$.

【标志词汇】 一元二次方程无实根$\Leftrightarrow\Delta<0$.

跟学团 一元二次方程·根的判别式

【真题2019.20】（条件充分性判断）关于x的方程$x^2+ax+b-1=0$有实根.（D）

（1）$a+b=0$.　　（2）$a-b=0$.

【标志词汇】一元二次方程有实根⇔ $\varDelta \geq 0$.　　$\Delta=a^2-4(b-1)\geq 0$

【标志词汇】给定未知字母取值或关系式，代数式求值/范围 ⇒ 直接代入

条件（1）$a+b=0$，$b=-a$，$a=-b$

代入得：$\varDelta=a^2-4(b-1)=b^2-4b+4=(b-2)^2\geq 0$，充分.

条件（2）$a-b=0$，$a=b$

代入得：$\varDelta=a^2-4(b-1)=b^2-4b+4=(b-2)^2\geq 0$，充分.

跟学团 一元二次方程·根的判别式

【真题2014.10.24】关于x的方程 $mx^2+2x-1=0$有两个不相等的实根.（ C ）

（1）$m>-1$.　　（2）$m\neq 0$.

【标志词汇】一元二次方程有两个**不相等**的实根⇔ $\varDelta>0$.

题干结论成立要求$\varDelta=2^2+4m>0$　且$m\neq 0$.

即$m>-1$且$m\neq 0$

【注意】当方程中二次项系数为未知字母时，要判断它是否可能为零.

当二次项系数为零时，方程变为一次方程，不可能有两实根.

因此本题中需要添加限制条件$m\neq 0$

跟学团 一元二次方程·根的判别式

【模拟题】已知a,b,c为$\triangle ABC$的三边，且关于x的方程$a(x^2-1)-2cx+b(x^2+1)=0$有两相等实数根，则$\triangle ABC$为（ C ）.

A. 等腰三角形　B. 等边三角形　C. 直角三角形　D. 等腰直角三角形　E. 锐角三角形

【标志词汇】 一元二次方程有两个**相等**的实根$\Leftrightarrow \Delta=0$.

将方程化为标准形式：$(a+b)x^2-2cx+b-a=0$

$\Delta=(-2c)^2-4(a+b)(b-a)=0$

$4c^2-4(b^2-a^2)=0$

$a^2+c^2=b^2$，满足勾股定理，ΔABC为直角三角形

跟学团 一元二次方程·根的判别式

【模拟题】实数a,b之间满足$a=2b$.（ C ）

（1）关于x的方程$x^2-ax+b^2=0$有两相等实数根

（2）实数a,b为二元二次方程的一组解$x^2-xy-2y^2=0$

条件（1）【标志词汇】 一元二次方程有两个相等的实根$\Leftrightarrow \Delta=0$.

$\Delta=(-a)^2-4b^2=0$　$(a-2b)(a+2b)=0$　$a=2b$或$a=-2b$

条件（2）【标志词汇】 给定某数为方程的根 $\Longrightarrow$ 给定一个此数满足的等式.

实数a,b满足$a^2-ab-2b^2=0$　$(a-2b)(a+b)=0$

$a=2b$或$a=-b$

两个条件联合（同时成立）得$a=2b$，充分

跟学团 一元二次方程·根与系数关系

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的两根有：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

两根相加 $$\boldsymbol{x_1+x_2}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=-\boldsymbol{\frac{b}{a}}$$

跟学团 一元二次方程·根与系数关系

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的两根有：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

两根相乘 $$\boldsymbol{x_1\cdot x_2}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\cdot\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\boldsymbol{\frac{c}{a}}$$

跟学团 一元二次方程·根与系数关系

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的两根有：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

【标志词汇】一元二次方程有实根/有两个相等的实根/有两个不相等的实根/无实根

$\Delta\geq 0$　　$\Delta=0$　　$\Delta>0$　　$\Delta<0$

根的判别式是判定方程是否有实根的充要条件

根与系数关系（韦达定理） $\boldsymbol{x_1+x_2=-\frac{b}{a}}$　$\boldsymbol{x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}}$

韦达定理说明了根与系数的关系.

跟学团 一元二次方程·根与系数关系

根与系数关系

$$\boxed{x_1+x_2}=\boxed{-\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{x_1\cdot x_2}=\boxed{\frac{c}{a}}$$

根　系数

【举例】已知方程$2x^2-3x-4=0$有两个实数根x_1和x_2，则$x_1+x_2=$ $\underline{\frac{3}{2}}$，$x_1\cdot x_2=$ $\underline{-2}$.

$2x^2-3x-4=0$　　$x_1+x_2=-\frac{-3}{2}=\frac{3}{2}$　　$x_1\cdot x_2=\frac{-4}{2}=-2$

【标志词汇】 <u>给出方程求两根</u> ⇒ 凑配为由x_1+x_2和x_1x_2表示的形式，代入韦达定理求值.

由x_1与x_2的组成的代数式值

跟学团 一元二次方程·根与系数关系

【真题2015.09】已知x_1,x_2是方程$x^2+ax-1=0$的两个实根，则${x_1}^2+{x_2}^2=$（ A ）

(A) a^2+2　(B) a^2+1　(C) a^2-1　(D) a^2-2　(E) $a+2$

【标志词汇】 给出方程求两根⇒凑配为由x_1+x_2和x_1x_2表示的形式，代入韦达定理求值.

$x_1+x_2=-a \quad x_1\cdot x_2=-1$

【标志词汇】 给定m^2+n^2，mn，$m+n$和$m-n$中任意两个⇒ 利用完全平方公式推出其余

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=a^2+2$

跟学团 一元二次方程·根与系数关系

【真题2015.09】已知x_1,x_2是方程$x^2+ax-1=0$的两个实根，则${x_1}^2+{x_2}^2=$（ A ）

(A) a^2+2　(B) a^2+1　(C) a^2-1　(D) a^2-2　(E) $a+2$

【标志词汇】 求代数式具体值⇒特值代入法

【核心】所有/任意/恒成立

$x^2+ax-1=0$ 含参方程

令$a=0$，则方程变为$x^2-1=0$

${x_1}^2+{x_2}^2=1^2+(-1)^2=2$

排除B、C、D　${x_1}^2+{x_2}^2$一定非负，排除E

跟学团 一元二次方程·根与系数关系

根与系数关系 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

常用凑配手段：通分、完全平方公式、平方差公式

$x_1{}^2+x_2{}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{b}{c}$ $\frac{1}{x_1{}^2}+\frac{1}{x_2{}^2}=\frac{x_1{}^2+x_2{}^2}{x_1{}^2x_2{}^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$

$x_1-x_2=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ （设 $x_1>x_2$）

$x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$

跟学团 一元二次方程·根与系数关系

【真题2002.01.07】已知方程$3x^2+5x+1=0$的两个根为α、β，则$\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=$（B）.

A. $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{5}$

【标志词汇】 给出方程求两根 $\Rightarrow$ 凑配为由x_1+x_2和x_1x_2表示的形式，代入韦达定理求值.

$\alpha+\beta=-\frac{5}{3}$ $\alpha\beta=\frac{1}{3}$

$$\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\sqrt{(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}})^2}=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+2}=\sqrt{\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}}=\sqrt{\frac{(-\frac{5}{3})^2}{\frac{1}{3}}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

【技巧】

跟学团 一元二次方程·根与系数关系

【真题2002.01.07】已知方程$3x^2+5x+1=0$的两个根为α、β，则$\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=$（B）.

A. $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{5}$

【标志词汇】 <u>给出方程求两根</u> ⟹ 凑配为由x_1+x_2和x_1x_2表示的形式，代入韦达定理求值.

【典型错误】 $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}=-\frac{5\sqrt{3}}{3}$

只有当$\alpha\geq0$，$\beta>0$时，才有$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$

跟学团 一元二次方程·根与系数关系

根与系数关系

$$\boxed{x_1+x_2}=\boxed{-\frac{b}{a}}$$
$$\boxed{x_1\cdot x_2}=\boxed{\frac{c}{a}}$$

根　　系数

【举例】已知方程$x^2+mx+n=0$的两根分别是-3和-4，则$m=$__7__，$n=$__12__.

$x_1+x_2=-3-4=-7=-m$　　$x_1\cdot x_2=(-3)(-4)=12=n$

【标志词汇】 <u>给出两根求系数</u> ⟹ 凑配为由x_1+x_2和x_1x_2表示的形式，代入韦达定理求值.

由x_1与x_2的组成的代数式值

跟学团 一元二次方程·根与系数关系

【真题1997.01.02】若$x^2+bx+1=0$的两个根为x_1和x_2，且$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=5$，则$b$的值是（ B ）.

A. -10　　B. -5　　C. 3　　D. 5　　E. 10

【标志词汇】 <u>给出两根求系数</u> ⇒ 凑配为由x_1+x_2和x_1x_2表示的形式，代入韦达定理求值.

已知$x^2+bx+1=0$的两个根为x_1和x_2

由韦达定理可知：$x_1+x_2=-b$，$x_1x_2=1$.

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-b}{1}=5 \qquad b=-5$$

跟学团 一元二次方程

$\Delta=\boldsymbol{b^2-4ac}$

【标志词汇】一元二次方程有实根/有两个相等的实根/有两个不相等的实根/无实根

$\Delta\geq 0$　　$\Delta=0$　　$\Delta>0$　　$\Delta<0$

$$\boldsymbol{x_1+x_2=-\frac{b}{a}} \qquad \boldsymbol{x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}}$$

【标志词汇】 <u>给出方程求两根</u> ⇒ 凑配为由x_1+x_2和x_1x_2表示的形式，代入韦达定理求值.

【标志词汇】 <u>给出两根求系数</u> ⇒ 凑配为由x_1+x_2和x_1x_2表示的形式，代入韦达定理求值.

由x_1与x_2的组成的代数式值

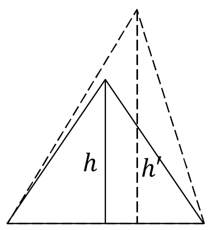
跟学团 函数·定义与求值

买1斤面粉　2元

买2斤面粉　4元

买3斤面粉　6元

买x斤面粉　$2x$元



函数	$y=2x$	$S=\frac{1}{2}ah$
常量	2	$\frac{1}{2}a$
自变量	x	h
因变量	y	S

跟学团 函数·定义与求值

买1斤面粉　2元

买2斤面粉　4元　　$y=2x$　函数表达式/解析式

买3斤面粉　6元　　y被x唯一确定⇔ y是x的函数　　$y^2=2x$?

$y=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$　　$y=x^2$

定义域：x的取值范围　　$(-\infty,+\infty)$

对应法则：x与y的对应关系　　平方　　函数的三要素

值域：y的取值范围　　$[0,+\infty)$

跟学团 函数·定义与求值

【举例】已知函数$f(x)=x^2+1$，求$f(1)$的值. 求$f\big(f(1)\big)$的值.

$f(1)=1^2+1=2$

由内向外算 由于$f(1)=2$，代入得$f\big(f(1)\big)=f(2)=2^2+1=5$

【举例】已知函数$f(x+1)=x^2+1$，求$f(4)$的值.

$x+1=4$，$x=3$

$f(x+1)=x^2+1$

$f(4)=3^2+1=10$

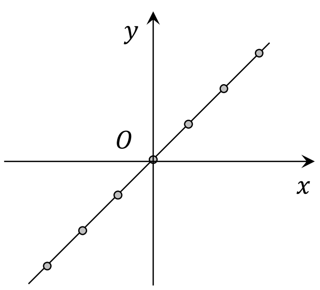
跟学团 函数·表示方式·一次函数

解析式：$y=x$，$x\in\mathbf{R}$

列表法

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

图像法



一次函数$y=kx+b$（$k\neq0$）图像为一条直线

$x=m$：竖直直线，与y轴平行

$x=0$：y轴

$y=n$：水平直线，与x轴平行

$y=0$：x轴

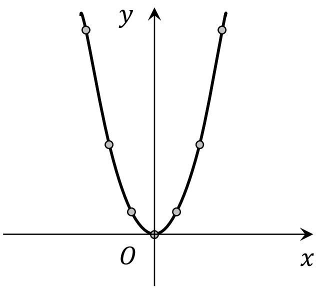
跟学团 函数・表示方式・二次函数

解析式：$y=x^2$，$x\in\mathbf{R}$

列表法

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

图像法



二次函数图像为一条抛物线

开口方向

对称性：对称轴

增减性

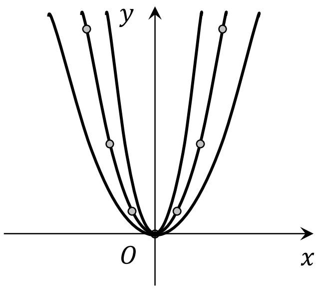
顶点（最值）

跟学团 函数・二次函数图像・开口方向与大小

二次函数$y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）图像为一条抛物线

图像与系数关系　　$y=x^2$　　$y=2x^2$　　$y=\frac{1}{2}x^2$

开口大小不同，a越接近于零，开口越大，抛物线越胖　极限分析法



抛物线

开口方向　向上

对称性：对称轴　y轴

增减性　y轴左侧递减，右侧递增

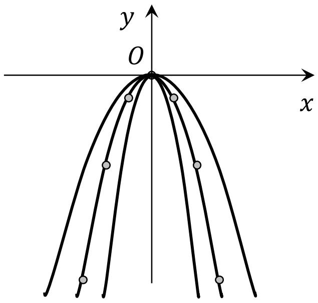
顶点（最值）　顶点为原点，取得最小值

跟学团 函数·二次函数图像·开口方向与大小

二次函数$y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）图像为一条抛物线

图像与系数关系　　$y=-x^2$　　$y=-2x^2$　　$y=-\frac{1}{2}x^2$

$a<0$时　　开口大小不同，a越接近于零，开口越大，抛物线越胖



抛物线

开口方向　向下

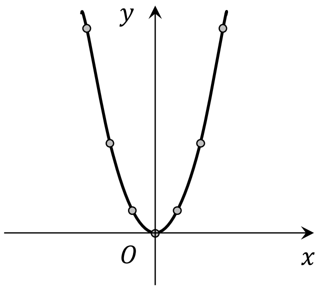
对称性：对称轴　y轴

增减性　y轴左侧递增，右侧递减

顶点（最值）　顶点为原点，取得最大值

跟学团 函数·二次函数图像·开口方向与大小

二次函数$y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）图像为一条抛物线



二次项系数a决定抛物线形状

开口方向：当$a>0$时抛物线开口向上

当$a<0$时抛物线开口向下

开口大小：$|a|$越大，开口越小

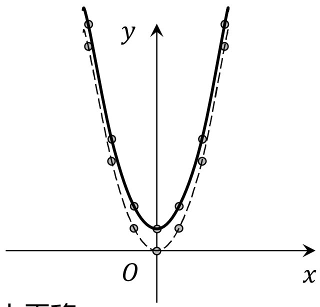
$|a|$越小，开口越大

跟学团 函数·二次函数图像·平移

二次函数$y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）图像为一条抛物线

$y=x^2$　对称轴：y轴　顶点：$(0,0)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9



$y=x^2+1$　对称轴：y轴　顶点：$(0,1)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	10	5	2	0	2	5	10

向上平移

跟学团 函数·二次函数图像·平移

二次函数$y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）图像为一条抛物线

$y=x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

对称轴：y轴

顶点：$(0,0)$

$y=(x+1)^2$

x	-3	-2	-1	0	1
y	4	1	0	1	4

对称轴：$x=-1$

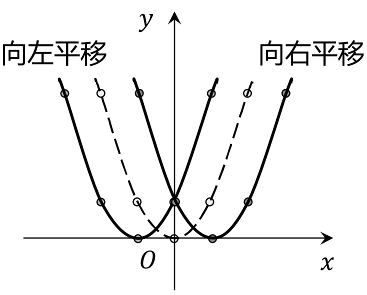
顶点：$(-1,0)$

$y=(x-1)^2$

x	-1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4

对称轴：$x=1$

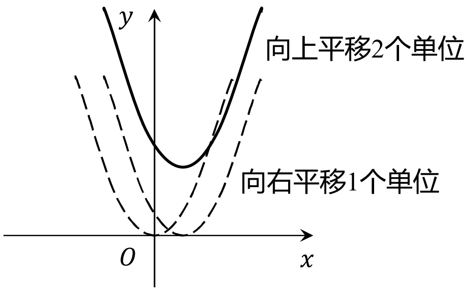
顶点：$(1,0)$



跟学团 函数·二次函数图像·顶点式

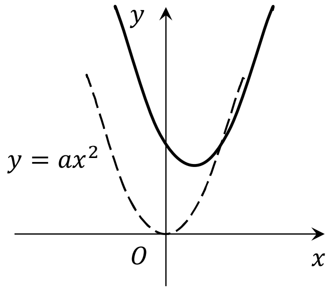
二次函数$y = ax^2 + bx + c$（$a \neq 0$）图像为一条抛物线

$y = (x-1)^2 + 2$



对称轴：$x = 1$　顶点：$(1,2)$

$y = a(x-h)^2 + k$　二次函数的顶点式

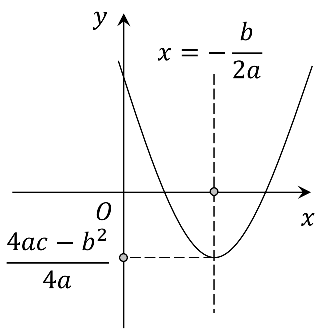


对称轴：$x = h$　顶点：(h,k)

跟学团 函数·二次函数图像·对称轴

二次函数$y = ax^2 + bx + c$（$a \neq 0$）图像为一条抛物线

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - \frac{-b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$



对称轴为$x = -\frac{b}{2a}$

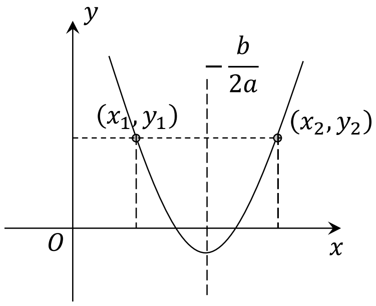
当x =对称轴时，二次函数可取到最值$\frac{4ac-b^2}{4a}$

对称轴左右两侧单调性不同

抛物线顶点坐标：$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

跟学团 函数·二次函数图像·图像上点的性质

二次函数$y = ax^2 + bx + c$（$a \neq 0$）图像为一条抛物线



抛物线上一对对称点的横纵坐标性质

$y_1 = y_2$ 纵坐标相等

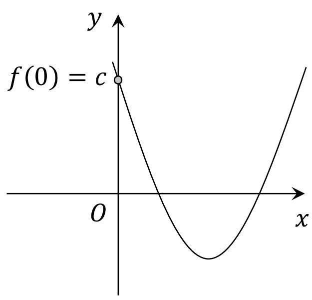
$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$ 到对称轴距离相等

【举例】已知$(1, m)$和$(-5, m)$在抛物线$y = x^2 + bx + 2$上，求b.

纵坐标相等，$(1, m)$和$(-5, m)$关于对称轴对称 $\frac{-5+1}{2} = -\frac{b}{2}$，$b = 4$

跟学团 函数·二次函数图像·与坐标轴交点

二次函数$y = ax^2 + bx + c$（$a \neq 0$）图像为一条抛物线



y轴上的点的横坐标为0，表示形式为$(0, y)$

代入$x = 0$求图像与y轴交点

$f(0) = 0 + 0 + c = c$

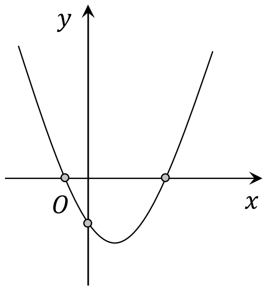
抛物线与y轴交点的纵坐标=抛物线在y轴截距

常数项$c = 0$时，抛物线必过原点.

$y = x^2 - 3x + 2$

跟学团 函数·二次函数图像·与坐标轴交点

二次函数$y = ax^2 + bx + c$（$a \neq 0$）图像为一条抛物线



x轴上的点的纵坐标为0，表示形式为$(x, 0)$

代入$y = 0$求图像与x轴交点

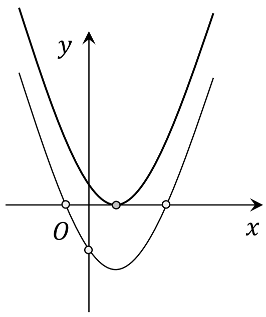
$y = x^2 - 4x - 5 = 0$

$(x-5)(x+1) = 0$

$x = 5$或$x = -1$

跟学团 函数·二次函数图像·与坐标轴交点

二次函数$y = ax^2 + bx + c$（$a \neq 0$）图像为一条抛物线



x轴上的点的纵坐标为0，表示形式为$(x, 0)$

代入$y = 0$求图像与x轴交点

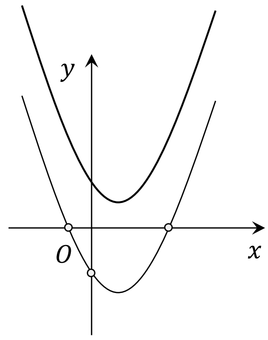
$y = x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x-2)^2 = 0$

$x_1 = x_2 = 2$

跟学团 函数·二次函数图像·与坐标轴交点

二次函数$y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）图像为一条抛物线



x轴上的点的纵坐标为0，表示形式为$(x,0)$

代入$y=0$求图像与x轴交点

$y=x^2-4x+5=0$

$\Delta=(-4)^2-4\times 1\times 5=16-20<0$

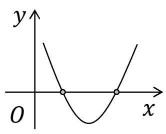
跟学团 函数·二次函数与方程

二次方程的根⇔抛物线与x轴的交点

二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的根

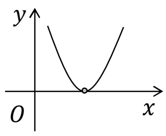
二次函数$y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）与x轴交点

$\Delta>0$，方程有两不同实根x_1，x_2



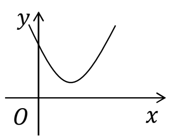
抛物线与x轴有两不同交点

$\Delta=0$，方程有两相同实根$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$



抛物线与x轴有一个交点

$\Delta<0$，方程无实根



抛物线与x轴无交点