MBA 大师《跟学团——MBA 数学》

第二章 整数、实数、有理数练习题

考点一 整除

1. 已知k是整数，关于x的方程$7x-5=kx+9$有正整数解，则k的所有可能取值有(　　)个.

A.1　　B.2　　C.3　　D.4　　E.5

【答案】D

【考点】整数、有理数、实数——整除

【解析】由原方程可得$x=\frac{14}{7-k}$为正整数，从而$7-k$为 14 的正约数，即$7-k=1，2，7，14$，可得k的所有可能取值有 4 个.

2. m^2-k^2能被 4 整除.

（1）$k=2n，m=2n+2，n$为整数.

（2）$k=2n+2，m=2n+4$ ，n为整数

【答案】D

【考点】整数、有理数、实数——整除

【解析】条件（1），$m^2-k^2=(2n+2)^2-(2n)^2=4(2n+1)$，充分.

条件（2），$m^2-k^2=(2n+4)^2-(2n+2)^2=4(2n+3)$，充分.

故选 D.

3. 从 1 到 100 的自然数中，能被 4 或 6 整除的数共有(　　)个.

A.33　　B. 34　　C.35　　D.41　　E.40

【答案】A

【考点】整数、有理数、实数——整除

【解析】能被 4 整除的数可表示为$4k$，$100\div 4=25$，因此k可从 1 取到 25，即有 25 个；能被 6 整除的数可表示为$6k$，由于$100=6\times 16+4$，故k可从 1 取到 16，即有 16 个；

但是有一部分数既可以被 4 整除又可以被 6 整除，它们既是 4 的倍数又是 6 的倍数，即它们是 4 和 6 最小公倍数$2\times2\times3=12$的倍数.这些数被计算了两次，需要减去重复计算的部分.

能被 12 整除的数可表示为$12k$，由于$100=8\times12+4$，故有 8 个数被重复计算，需减去.

所以总个数为$25+16-8=33$（个）.

考点二 带余除法

4. 设a和b都是自然数，则$(a+2)(b+2)$能被 15 整除.

（1）a被 3 除余 1.

（2）b被 5 除余 3.

【答案】C

【考点】整数、有理数、实数——带余除法

【解析】显然条件（1）与条件（2）单独都不充分，考虑两个条件联合.

由条件（l），设 $a=3k_1+1$；由条件（2），设$b=5k_2+3$

两个条件联合可得：

$$
\begin{aligned}
(a+2)(b+2) &= ab+2(a+b)+4 \\
&= (3k_1+1)(5k_2+3)+2(3k_1+1+5k_2+3)+4 \\
&= 15k_1k_2+15k_1+15k_2+15 \\
&= 15(k_1k_2+k_1+k_2+1)
\end{aligned}
$$

$15(k_1k_2+k_1+k_2+1)$一定能被 15 整除，所以两个条件联合起来充分，故选 C.

5. 已知m、n为整数，则$mn+1$能被 3 整除.

（1）m除以 3 余数为 1.

（2）n除以 9 余数为 8.

【答案】C

【考点】整数、有理数、实数——带余除法

【解析】题干要求$mn+1=3k$ （这里k为整数）.

由条件（1），$m=3k_1+1$ （k_1为整数），取$k_1=1,n=0$ ，则$mn+1=1$ ，即条件

（1）不充分.

由条件（2），$n=9k_2+8$ （k_2为整数），取$k_2=1,m=0$ 从而，$mn+1=1$ ，条件（2）也不充分.

联合条件（1）和条件（2），则有$\begin{cases}m=3k_1+1\\n=9k_2+8\end{cases}$，

$mn+1=(3k_1+1)(9k_2+8)+1=27k_1k_2+24k_1+9k_2+9=3(9k_1k_2+8k_1+3k_2+3)$.

联立充分，故选 C.

考点三 最大公因数、最小公倍数

6. 已知$a=140$，$b=810$，则a，b的最大公因数$(a，b)$与最小公倍数$[a，b]$分别为（　　）.

A. 10，1122　　B. 10，11340　　C. 15，11220

D. 15，11340　　E. 以上答案均不正确

【答案】B

【考点】整数、有理数、实数——最大公约数、最小公倍数

【解析】将两数质因数分解得$140=2\times2\times5\times7$

$$810=2\times3\times3\times3\times3\times5$$

按较少个数选取公共的质因数，得两数的最大公因数为$2\times5=10$；按较多个数选取全部质因数，得两数的最小公倍数为$2\times2\times3\times3\times3\times3\times5\times7=11340$.

7. 若两个正整数甲数和乙数的最大公约数是 6，最小公倍数是 90，如果甲数是 18，乙数是m，则m的各个数位之和为（　　）.

A.2　　B.3　　C.4　　D.5　　E.6

【答案】B

【考点】整数、有理数、实数——最大公约数、最小公倍数

【解析】两个数的乘积等于最大公约数与最小公倍数的乘积，即

$6\times90=18\times m$，$m=30$，m的各个数位之和为 3.

8. 施工队要在一东西长 600 米的礼堂顶部沿东西方向安装一排吊灯，根据施工要求，必须在距西墙 375 米处安装一盏，并且各吊灯在东西墙之间均匀排列（墙角不能安装灯）.该施工队至少需要安装（　　）盏吊灯.

A.4　　B.5　　C.6　　D.7　　E.8

【答案】D

【考点】整数、有理数、实数——最大公约数、最小公倍数

【解析】由于要在距离西墙 375 米处安装一盏灯，而 600 和 375 的最大公约数为 75，$600 \div 75 = 8$，墙角不能安装，故至少需要 7 盏.

考点四 质数与合数

9. 已知a是质数，b是大于 2 的质数，且$a^2 + b = 2015$，则$a + b$的值为（　　）.

A.2009　　B.2010　　C.2011　　D.2012　　E.2013

【答案】E

【考点】整数、有理数、实数——质数与合数；奇偶性的判定

【解析】因为 2015 是奇数（奇＋偶＝奇），大于 2 的质数一定为奇数，所以b是奇数，a为偶数且是质数，即$a = 2$，$b = 2011$，所以$a + b = 2013$.

10. 若几个质数的乘积为 330，则他们的和为（　　）.

A.21　　B.25　　C.37　　D.42　　E.50

【答案】A

【考点】整数、有理数、实数——质数与合数

【解析】将 330 质因数分解得$330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11$，它们的和为 21.

11. $4p + 1$ 是个合数.

（1）p 是一个质数.

（2）$2p + 1$ 是一个质数.

【答案】E

【考点】整数、有理数、实数——质数与合数

【解析】条件（1）不充分，比如 $p = 3$ 是个质数，但是 $4p + 1$ 也是个质数.

条件（2）也不充分，比如 $p=3$ 时，$2p+1$ 是个质数，但$4p+1$ 还是个质数.

两个条件联合也不充分，比如 $p=3$.

故选 E.

考点五 奇数与偶数

12. 设n为整数，则$(2n+1)^2-25$一定能被（　　）整除.

A.5　　B.6　　C.7　　D.8　　E.9

【答案】D

【考点】整数、有理数、实数——整除；奇数与偶数

【解析】$(2n+1)^2-25$

$=(2n+1+5)(2n+1-5)\cdots\cdots$ 平方差公式

$=(2n+6)(2n-4)=4(n+3)(n-2)\cdots\cdots$ 提公因式

由于n是整数，

当n是奇数时，$n+3$为偶数，$n-2$是奇数，所以此时$(n+3)(n-2)$是偶数，所以$4(n+3)(n-2)$一定能被8整除.

同理，当n是偶数时，$n+3$是奇数，$n-2$是偶数，所以此时$(n+3)(n-2)$是偶数，所以$4(n+3)(n-2)$一定能被 8 整除.

13. 设a为正奇数，则a^2-1必是（　　）.

A.5 的倍数　　B.6 的倍数　　C.8 的倍数

D.9 的倍数　　E.7 的倍数

【答案】C

【考点】整数、有理数、实数——奇数与偶数

【解析】解法一：奇偶性：$a^2-1=(a+1)(a-1)$

而a为正奇数，则$(a+1)$和$(a-1)$均为偶数，分别各有因数 2，则$(a+1)(a-1)$必有因数 4，选项中有因数 4 的只有 8，即选 C.

解法二：特值代入法.

令a =3，则$a^2-1=8$.

14. 设m，n都为正整数，则可以确定m为偶数.

（1）$5m+(k^2+k)n$ 为偶数，其中k是正整数.

（2）$3m^3+4n^3$为偶数.

【答案】D

【考点】整数、有理数、实数——奇数与偶数

【解析】条件（1），已知$5m+(k^2+k)n$ 为偶数，$(k^2+k)n=k(k+1)n$，k和$k+1$是连续的两个自然数，必为一奇一偶，所以$k(k+1)$一定为偶数，则$k(k+1)n$一定为偶数，偶数 + 偶数 = 偶数，因此$5m$为偶数，从而可以确定 m为偶数，充分.

条件（2），已知$3m^3+4n^3$ 为偶数，由于$4n^3$ 为偶数，因此$3m^3$ 为偶数，则m^3 为偶数，从而可以确定 m 为偶数，充分.故选 D.

考点六 分数、小数运算技巧

15. $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{19\times21}=$（　　）.

A.$\frac{11}{21}$　　B.$\frac{10}{19}$　　C.$\frac{10}{21}$　　D.$\frac{17}{21}$　　E.$\frac{11}{20}$

【答案】C

【考点】整数、有理数、实数——分数、小数运算技巧

【解析】$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{19\times21}=\frac{1}{2}\times[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)]=$
$\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{20}{21}=\frac{10}{21}$.

16. $a=\frac{99}{100}$.

（1）$a=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{99\times100}$.

（2）$a=\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\frac{1}{1+2+3+4+5}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+100}$.

【答案】A

【考点】整数、有理数、实数——分数、小数运算技巧

【解析】条件（1），$a=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{99\times100}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+$
$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$，充分.

条件（2），由于$\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，于是$a=\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\frac{1}{1+2+3+4+5}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+100}=2\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)\right]=\frac{99}{101}$，不充分.

17. $\frac{1}{18}+\frac{1}{54}+\frac{1}{108}+\frac{1}{180}=$（　）.

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{4}{45}$　　C. $\frac{2}{15}$　　D. $\frac{2}{5}$　　E. $\frac{4}{15}$

【答案】B

【考点】整数、有理数、实数——分数、小数运算技巧

【解析】$\frac{1}{18}+\frac{1}{54}+\frac{1}{108}+\frac{1}{180}$

$=\frac{1}{3\times6}+\frac{1}{6\times9}+\frac{1}{9\times12}+\frac{1}{12\times15}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12}+\frac{1}{12}-\frac{1}{15}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{15}\right)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{4}{15}$

$=\frac{4}{45}$.

考点七 无理数性质及其有理化

18. 设$\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+1}$的整数部分为$a$，小数部分为$b$，则$\frac{a}{b}=$（　）.

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{2}-1$　　C. $\sqrt{2}+1$　　D.$2\sqrt{2}$　　E. $2\sqrt{2}-2$

【答案】C

【考点】整数、有理数、实数——无理数性质及其有理化

【解析】$\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}$.

$\sqrt{2}$ 的整数部分为 1，小数部分为$\sqrt{2}-1$.

所以$\frac{a}{b}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$.

19. 已知 $a=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ，$b=\ a+2$，则ab的值等于（　　）.

A.2　　B.1　　C. 3　　D. $\sqrt{2}+2$　　E. $1+\sqrt{2}$

【答案】A

【考点】整数、有理数、实数——无理数性质及其有理化

【解析】因为$a=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=\sqrt{3}-1$.

所以$b=\ a+2$=$\sqrt{3}-1+2=\sqrt{3}+1$.

则$ab=(\sqrt{3}-1)\ (\sqrt{3}+1)$=2.

20. $a=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ 的小数部分为b，则 $\frac{1}{a}+b=$ （　　）.

A.$2\sqrt{3}-3$　　B.$2\sqrt{3}+3$　　C.$\sqrt{3}+3$　　D.$\sqrt{2}-3$

E.以上结论均不正确

【答案】A

【考点】整数、有理数、实数——无理数性质及其有理化

【解析】因为$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{2+2\sqrt{6}+3}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 1.414+1.732\approx 3.1$.

故$b=\sqrt{2}+\sqrt{3}-3$.

所以$\frac{1}{a}+b=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-3\right)=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-3=2\sqrt{3}-3$.