MBA 大师《跟学团——MBA 数学》

第五章 方程、不等式与函数

求二次函数解析式及最值

1. 已知函数$f(x)=-x^2+4x+a$，$x\in\left[0, 1\right]$，若$f(x)$有最小值-2，则$f(x)$的最大值为（ ）.

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D. 2　　E. 3

【答案】A

【解析】$f(x)=-x^2+4x+a=-(x-2)^2+a+4$，开口向下，对称轴为$x=2$.

$x\in\left[0, 1\right]$，在对称轴的左边，当$x=0$时，$f(x)$取得最小值，因此$f(0)=a=-2$.

当$x=1$时，$f(x)$取得最大值，因此$f(1)=-1+4+a=-1+4-2=1$.

2. 当火箭竖直向上发射时，它的高度h与时间t之间的关系可以用式子$h=-5t^2+150t+10$来表示，那么当火箭达到它的最高点时，需要经过（ ）

A. 5s　　B. 10s　　C. 15s　　D. 20s　　E. 25s

【答案】C

【解析】当二次函数$h(t)$取得最大值时，一定在对称轴处，此题定义域$t>0$，所以对称轴$t=-\frac{150}{2\times(-5)}=15$，在定义域内，所以$t=15s$

3. 二次函数$y=x^2-2mx-1$在$x\le 1$时y的值随x的增大而减少.

（1）$m\ge 1$

（2）$m\le 1$

【答案】A

【解析】二次函数的对称轴为$x=m$且开口向上.

条件（1），$m\ge 1$，当$x\le 1$时，是在对称轴的左侧，是减函数，充分.

条件（2）不充分.

故选（A）.

4. 若函数$y=x^2+bx+c$的顶点在第一象限，顶点的横坐标是纵坐标的 2 倍，对称轴与x

轴的交点在一次函数$y=x-c$的图像上，则$b+c=$（　　）.

A.$\frac{1}{2}$　　　　B. $-\frac{1}{2}$　　　　C.0　　　　D.1

E.-1

【答案】B

【解析】二次函数$y=x^2+bx+c$的顶点坐标为$\left(-\frac{b}{2},\frac{4c-b^2}{4}\right)$，顶点的横坐标是纵坐标的 2 倍即$-\frac{b}{2}=2\times\frac{4c-b^2}{4}$.对称轴为$x=-\frac{b}{2}$，它与$x$轴的交点即为点$\left(-\frac{b}{2},0\right)$，代入一次函数方程$y=x-c$得$-\frac{b}{2}-c=0$，$b=-2c$.代入$-\frac{b}{2}=2\cdot\frac{4c-b^2}{4}$整理得$c(2c-1)=0$，$c=0$或$c=\frac{1}{2}$，故$b=0$或$b=-2\times\frac{1}{2}=-1$. 题干要求顶点在第一象限即$-\frac{b}{2}>0$，$b<0$，$\frac{4c-b^2}{4}>0$，$4c>b^2$.故$b=-1$，$c=\frac{1}{2}$，$b+c=-\frac{1}{2}$.

一元二次方程 · 根的分布 · 零分布

5. 方程$x^2-2mx+m^2-4=0$有两个不相等的正根.

（1）$m>4$.　　　　（2）$m>3$.

【答案】D

【解析】题干符合【标志词汇】二次方程有两个不相等的正根，则$\Delta>0$，a与c同号，a与b异号，即

$$\begin{cases}\Delta>0\\ m^2-4>0\\ -2m<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4m^2-4(m^2-4)>0\\ m^2-4>0\\ m>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}R\\ (-\infty,-2)\cup(2,+\infty)\\ m>0\end{cases}$$

方程组的解集为$m>2$，所以条件（1）（2）都充分.

6. 方程$x^2-(m-2)x+(m-5)=0$有一正一负两个实根.

（1）$m<10$.　　　　（2）$m<3$.

【答案】B

【解析】题干符合【标志词汇】二次方程有一正一负两个根，则a与c异号.

即$m-5<0$，$m<5$，所以条件（2）充分，选 B.

7. 方程$x^2+(5-a)x+(a-2)=0$有两个不相等的负实根.

（1）$a > 2$.　　　　　　　　（2）$a < 5$.

【答案】E

【解析】题干符合【标志词汇】二次方程有两个不相等的负实根，则$\Delta > 0$且a、b、c同号，

则$\begin{cases} \Delta = (5-a)^2 - 4(a-2) > 0 \\ 5 - a > 0 \\ a - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 14a + 33 > 0 \\ a < 5 \\ a > 2 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a < 3 \text{ 或} a > 11 \\ a < 5 \\ a > 2 \end{cases}$

即不等式组的解集为$2 < a < 3$.

由于$a > 2$，$a < 5$与$2 < a < 5$都不是$2 < a < 3$的子集，所以条件（1）和条件（2）单独不充分，且联合起来也不充分.

一元二次不等式

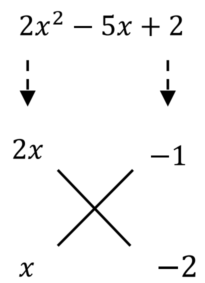
8. 一元二次不等式$2x^2 - 5x + 2 < 0$的解集是（　　）.

A.$x > 2$ 或$x < \frac{1}{2}$　　B. $x > 2$ 或$x < -\frac{1}{2}$　　C.$\frac{1}{2} < x < 2$

D.$-\frac{1}{2} < x < 2$　　E. $1 < x < 2$

【答案】C

【解析】



所以$2x^2 - 5x + 2 = (2x-1)(x-2)$

$(2x-1)(x-2) < 0$

大于0取两边，小于0取中间

解得$\frac{1}{2} < x < 2$.

9. 关于x的一元二次不等式$ax^2 + (a-1)x + a - 1 < 0$的解集为全体实数$R$，则$a$的取值范围为（　　）.

A. $(-\infty,-\frac{1}{3})$　　B. $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$　　C. $(-\infty,\frac{1}{3})$

D. $(-\frac{1}{3},+\infty)$　　E. $(\frac{1}{3},+\infty)$

【答案】A

当$a=0$时，原不等式变为$-x-1<0$，不是恒等式，则不符合题意

要使$ax^2+(a-1)x+a-1<0$恒成立，则$a<0$（一看开口方向），$\Delta=(a-1)^2-4a(a-1)<0$（二看判别式），解出$a>1$或$a<-\frac{1}{3}$，

综上，$a<-\frac{1}{3}$.

10. 不等式$2x^2+(2a-b)x+b\geq 0$的解集为$x\leq 1$或$x\geq 2$，则$a+b=$（　）.

A.1　　B.3　　C.5　　D.7　　E.2

【答案】B

由于不等式的二次项系数为正，说明 1 和 2 是不等式$2x^2+(2a-b)x+b\geq 0$对应的方程的根.

根据韦达定理有，$\begin{cases}-\frac{2a-b}{2}=1+2\\ \frac{b}{2}=1\times 2\end{cases}$

解出$a=-1,b=4$，则$a+b=3$

11. 不等式$(a-2)x^2+2(a-2)x-4\geq 0$无解，则a的取值范围为（　）

A. $(-\infty,2]$　　B. $(-2,2]$　　C.$(-2,2)$

D. $(-\infty,2)$　　E. $[2,+\infty)$

【答案】B

不等式$(a-2)x^2+2(a-2)x-4\geq 0$无解，即不等式$(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$对于所有实数x恒成立.

由于此不等式的二次项系数含参，所以需要对二次项系数是否等于 0 进行分类讨论

当$a-2=0$时，即$a=2$，原不等式有$-4<0$恒成立，符合题意

当$a-2\neq 0$时，由于不等式要小于 0 恒成立，所以$a-2<0\Rightarrow a<2$，

且$\Delta=4(a-2)^2+16(a-2)<0\Rightarrow -2<a<2$，综上所述$-2<a\leq 2$

高次与分式方程、不等式

12. 不等式$(x+2)(x+1)^2(x-1)^3(x-2)\le 0$的解集为（　　）.

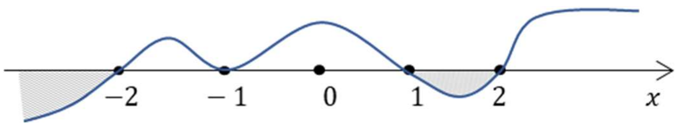
A. $(-\infty,-2]\cup[1,2]$　　B. $(-\infty,-2]\cup\{-1\}\cup[1,2]$

C. $(-\infty,-2]\cup\{-1\}\cup(1,2)$　　D. $(-\infty,-2)\cup\{-1\}\cup[1,2]$

E.以上选项均不正确

【答案】B

【解析】应用数轴穿根法可得下图，注意“奇过偶不过”：即奇次幂的项为$(x+2)$、$(x-1)^3$和$(x-2)$，在$x=-2,1,2$这三个根处可以穿过x轴，偶次幂的项为$(x+1)^2$，在根$x=-1$处折返，不可穿过x轴.



$(x+2)(x+1)^2(x-1)^3(x-2)\le 0$的解集为$x$轴下方的部分（包括$x$轴），即解集为$(-\infty,-2]\cup\{-1\}\cup[1,2]$.

13. 不等式$\frac{(2x+3)(x-2)}{(x+2)(2x-1)}\le 0$的解集为（　　）.

A. $(-2,-\frac{3}{2}]\cup(\frac{1}{2},2]$　　B. $[-\frac{3}{2},\frac{1}{2})\cup[2,+\infty]$

C. $[-2,-\frac{3}{2}]\cup[\frac{1}{2},2]$　　D. $(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}]\cup[2,+\infty)$

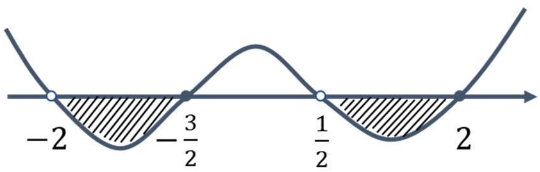
E. $(-\frac{1}{2},0)\cup(2,+\infty)$

【答案】A

【解析】由分式不等式的等价变换可知，$\frac{(2x+3)(x-2)}{(x+2)(2x-1)}\le 0$等价于

$$\begin{cases}(2x+3)(x-2)(x+2)(2x-1)\le 0\\(x+2)(2x-1)\ne 0\end{cases}$$

，使用穿根法（从左到右，从小到大依次标出与不等式对应的方程的根，高次不等式的通解通法）



则解集为$(-2,-\frac{3}{2}]\cup(\frac{1}{2},2]$.

14. 不等式$\frac{3x-5}{x^2+2x-3}\le 2$的解集为（　　）.

A. $(-\infty,-3)\cup[-1,\frac{1}{2}]\cup(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-3]\cup(-1,\frac{1}{2})\cup[1,+\infty)$

C. $(-\infty,-3]\cup[-1,\frac{1}{2}]\cup[1,+\infty)$　　D. $(-3,-1]\cup[\frac{1}{2},1]$

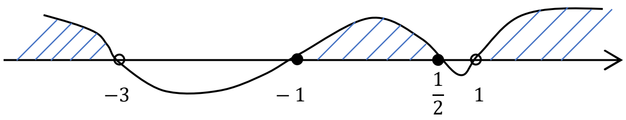
E.以上选项均不正确

【答案】A

【解析】$\frac{3x-5}{x^2+2x-3}\le 2$，$\frac{3x-5}{x^2+2x-3}-2=\frac{3x-5-2(x^2+2x-3)}{x^2+2x-3}=\frac{-2x^2-x+1}{x^2+2x-3}\le 0$，两边同乘$-1$不等号变向$\frac{2x^2+x-1}{x^2+2x-3}\ge 0$.由分式不等式的等价变换可知，$\frac{2x^2+x-1}{x^2+2x-3}\ge 0$等价于

$$\begin{cases}(2x^2+x-1)(x^2+2x-3)=(2x-1)(x+1)(x+3)(x-1)\ge 0\\ x^2+2x-3=(x+3)(x-1)\ne 0\end{cases}$$

由数轴穿根法作图如下：



故不等式是解集为$(-\infty,-3)\cup[-1,\frac{1}{2}]\cup(1,+\infty)$

【技巧】由于$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$位于分母位置，故$x\ne -3$且$x\ne 1$，可直接排除 B、C、D.

15. $x\in R$，不等式$\frac{3x^2+2x+2}{x^2+x+1}>k$恒成立，则正数$k$的取值范围为（　　）.

A.$k<2$　　B.$k>2$　　C.$1<k<2$

D.$k<1$ 或$k>1$　　E.$0<k<2$

【答案】E

【解析】不等式的分母$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$恒大于零，因此不等式为$3x^2+2x+2>k(x^2+x+1)$.

整理得$(3-k)x^2+(2-k)x+(2-k)>0$.

当$3-k=0$即k=3 时，原式可化为$-x-1>0$，解得$x<-1$，不符合题意，故舍去

当$3-k\neq 0$时，要使不等式恒成立，必须满足条件

$$\begin{cases} 3-k>0 \\ \Delta=(2-k)^2-4(3-k)(2-k)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k<3 \\ k<2 \text{ 或} k>\frac{10}{3} \end{cases}$$

解得$k<2$，因为k为正数，所以$0<k<2$.

（**注意**：要使不等式恒大于零成立，则开口方向不能是向下的，结合图像该情况是不存在的，所以不考虑$3-k<0$的情况.恒大于零成立只能是开口向上，Δ小于 0）.