MBA 大师《跟学团——MBA 数学》

第六章 数列

数列基础与三项数列

1. 三个不同的非零实数a、b、c成等差数列，且a、c、b成等比数列，则$a:b=$（ ）.

A.1　　B.4　　C.2　　D.-2　　E.-3

【答案】B

【解析】a、b、c成等差数列$\Leftrightarrow 2b=a+c$，即$c=2b-a$

a、c、b成等比数列$\Leftrightarrow c^2=ab$

可得$(2b-a)^2=ab\Rightarrow 4b^2-4ab+a^2=ab\Rightarrow a^2-5ab+4b^2=0$

$\Rightarrow(a-b)(a-4b)=0$，

因为a,b,c互不相等，所以$a=4b$，则$a:b=4$

2. 二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）与x轴相切.

（1）：$a,\frac{b}{2},c$成等比数列.

（2）：$a,\frac{b}{2},c$成等差数列.

【答案】A

【解析】题干要求二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$与x轴相切，即要求其对应二次方程$ax^2+bx+=0$（$a\neq0$）有两个相等实根，根的判别式$\Delta=b^2-4ac=0$.

条件（1）符合【标志词汇】$a,\frac{b}{2},c$成等比数列，等价于给定$\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4}=ac$，$b^2=4ac$且$a,b,c$非零.代入得$\Delta=b^2-4ac=0$，条件（1）充分.

条件（2）符合【标志词汇】$a,\frac{b}{2},c$成等差数列，等价于给定$2\times\frac{b}{2}=b=a+c$，代入得$\Delta=b^2-4ac=(a+c)^2-4ac=(a-c)^2\geq0$，仅当$a=c$时有$\Delta=0$，故条件（2）不充分.

3. a,b,c为三个不相等的正数，且$a+b+c=9$，则$a=1,b=3,c=5$.

（1）a,b,c成等差数列.

（2）$a,b,c+4$成等比数列.

【答案】C

【解析】条件（1）$2b=a+c=9-b$，解得$b=3$，但$a+c=6$，a,c的值无法唯一确定，单独不充分.

条件（2）$b^2=a(c+4)$，与$a+b+c=9$，$b=9-a-c$联立可得$(9-a-c)^2=a(c+4)$，无法唯一确定a,b,c的值，亦不充分.

联合可知$\begin{cases}a+b+c=9\\2b=a+c\\b^2=a(c+4)\end{cases}$，故$b=3$，$a=6-c$，代入$b^2=a(c+4)$得$c^2-2c-15=(c-5)(c+3)=0$，$c=5$或$c=-3$（舍）.故$a=1,b=3,c=5$，联合充分.

等差数列定义与判定

4. 等差数列-2，3，8，…中的第 18 项为（　　）.

A.80　　B.81　　C.82　　D.83　　E.84

【答案】D

【解析】由已知首项$a_1=-2$，公差$d=5$，由通项公式$a_n=a_1+(n-1)d$

可得$a_n=-2+(n-1)\times 5(n=1，2，\cdots)$，

所以$a_{18}=-2+17\times 5=83$.

5. 设等差数列$\{a_n\}$的前三项分别依次为$a-1,a+3,2a+4$，则这个数列的前n项和$S_n=$（　　）.

A. $2n^2$　　B. $2n^2-n$　　C. $2n^2+2n$　　D. $2n^2-2n$　　E. $2n^2+n$

【答案】A

【解析】根据等差中项得:

$2(a+3)=a-1+2a+4$

解得$a=3$，

即前三项分别为 2，6，10

该数列是以 2 为首项，以 4 为公差的等差数列

所以$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=2n+\frac{n(n-1)}{2}\times 4=2n^2$

6. 数列$\{a_n\}$为等差数列.

（1）点$(n，a_n)$在直线$y=3x+2$上

（2） 数列$\{a_n\}$的前n项的和为$S_n=2n^2-3n$

【答案】D

【解析】 由条件（1），得$a_n=3n+2$，所以

$a_n-a_{n-1}=3n+2-[3(n-1)+2]=3\left(n\in N^+,\ n\geq 2\right)$，即数列$\{a_n\}$为公差等于 3 的等差数列，条件（1）充分.

由条件（2），数列$\{a_n\}$的前n项的和为$S_n=2n^2-3n$

符合【标志词汇】数列前n项和满足$S_n=An^2+Bn$的形式时，判定数列为等差数列

所以条件（2）也充分，选 D

等差数列下标和

7. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_2+a_9=5$，则$3a_5+a_7=$（ ）.

A.15 B. 25 C.5 D.20 E.10

【答案】E

【解析】

思路一：由等差数列下标和相等的两项之和相等，可知$3a_5+a_7=2a_5+(a_5+a_7)=2a_5+2a_6=2(a_5+a_6)=2(a_2+a_9)=2\times 5=10$.

思路二：设等差数列$\{a_n\}$为公差$d=0$的常数列$a_n=t$，则$a_2+a_9=2t=5$，$3a_5+a_7=3t+t=4t=10$.

8. 已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_6+a_{10}=13$，$a_4=2$，则$a_{12}=$（ ）.

A. 10 B. 11 C. 12 D. 13 E. 14

【答案】B

【解析】 由于$a_6+a_{10}=a_4+a_{12}$，所以$a_{12}=a_6+a_{10}-a_4=13-2=11$.

9. 两个等差数列$\{a_n\},\{b_n\}$，他们的前n项和之比为$\frac{5n+3}{2n-1}$，那么两个数列的第 9 项之比为（ ）.

A. $\frac{11}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{7}{3}$ E. $\frac{8}{3}$

【答案】E

【解析】本题符合【标志词汇】等差数列各项与下标间关系.已知等差数列前n项（n为奇

数）的和为S_n，可求出这n项的中间项$a_{中间项}=\frac{1}{n}S_n$.数列的第 9 项为前 17 项的中间项.

设等差数列$\{a_n\},\{b_n\}$的前n项和分别为H_n,T_n，故$\frac{a_9}{b_9}=\frac{\frac{1}{17}H_{17}}{\frac{1}{17}T_{17}}=\frac{H_{17}}{T_{17}}=\frac{5\times17+3}{2\times17-1}=\frac{8}{3}$.

【知识点】数列:等差数列各项与下标间关系.

10. $\{a_n\}$ 是公差为$\frac{1}{2}$ 的等差数列，且S_{100}=145 ，则$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=($　　$)$

A.70　　B.60　　C.50　　D.40　　E.30

【答案】B

【标志词汇】等差数列某几项和⇒下标和相等的两项之和相等.

$a_1+a_{99}=a_3+a_{97}=\cdots=a_{49}+a_{51}$　一共有 25 对

$$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=25(a_1+a_{99})=\cdots=25(a_{49}+a_{51})=25\times\frac{24}{10}=60$$

【等差数列套路】已知奇数个项的中间项，可求出$S_n=na_{中间}$；反之亦然

已知偶数个项的中间两项之和，可求出$S_n=n\cdot\frac{1}{2}\cdot(中间两项和)$；反之亦然

$S_{100}=50(a_1+a_{100})=\cdots=50(a_{50}+a_{51})=145.$

$a_{50}+a_{51}=\frac{145}{50}=\frac{29}{10}=a_{49}+d+a_{51}=a_{49}+\frac{1}{2}+a_{51}$　$a_{49}+a_{51}=\frac{29}{10}-\frac{1}{2}=\frac{24}{10}$.

等比数列基础、下标

11. 若数列$\{a_n\}$是等比数列，且$S_3=3a_3$，则此数列的公比是（　）.

A.$-\frac{1}{2}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.1 或 $-\frac{1}{2}$　　D.-1 或$\frac{1}{2}$　　E.1

【答案】C

【解析】 由$S_3=3a_3$得$a_1+a_2+a_3=3a_3$，即$a_1+a_2=2a_3$.

所以$a_1+a_1q=2a_1q^2$，即$2q^2-q-1=0$，解得$q=1$ 或$q=-\frac{1}{2}$.

12. 等比数列$\{a_n\}$中，a_3和a_5是方程$x^2+kx+5=0$的两个根，则$a_2a_4a_6=$（　）.

A.25　　B. $5\sqrt{5}$　　C.$-5\sqrt{5}$　　D.$\pm5\sqrt{5}$　　E.$\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】 由题：$a_3a_5=5$，所以$a_4^2=5$，即$a_4=a_4^3=\pm\sqrt{5}$，所以$a_2a_4a_6=a_4^3=\pm5\sqrt{5}$.

13. 等比数列$\{a_n\}$满足$a_2+a_4=20$，则$a_3+a_5=40$.

（1）公比$q=2$.

（2）$a_1+a_3=10$.

【答案】D

【解析】 已知$a_2+a_4=20$　要证明$a_3+a_5=40$.

$a_3+a_5=(a_2+a_4)q$　所以$q=2$（结论的等价表达）.

条件（1）符合题意.

条件（2）$a_2+a_4=(a_1+a_3)\cdot q$，解得$q=2$（符合题意）

等比数列前n项和、特值法

14. 设S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项的和，$8a_2+a_5=0$，则$\frac{S_5}{S_2}=$（　）.

A. 11　B. 5　C. -8　D. -11　E. -2

【答案】D

【解析】 由$8a_2+a_5=0$可得$a_5=-8a_2$，即$\frac{a_5}{a_2}=q^3=-8$，所以$q=-2$.

$$\frac{S_5}{S_2}=\frac{\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^2)}{1-q}}=\frac{1-q^5}{1-q^2}=\frac{1+32}{1-4}=-11.$$

15. 数列$\{a_n^2\}$的前n项的和为$S_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$.

（1）数列$\{a_n\}$是等比数列，公比$q=2$，首项$a_1=1$

（2）数列$\{a_n\}$前n项的和为$S_n=2^n-1$

【答案】D

【解析】 由条件（1）可得，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$，所以$\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2}=\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2=4$，为常数.

所以，数列$\{a_n^2\}$是首项$a_1^2=1$，公比$q^2=4$的等比数列，所以，$S_n=\frac{1-4^n}{1-4}=\frac{1}{3}(4^n-1)$，即条件（1）充分.

由条件（2）得$n=1$时，$a_1=S_1=2-1=1$；

当$n\geq2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}(2-1)=2^{n-1}$.

把$n=1$代入$a_n=2^{n-1}$中得$a_1=1$，与$a_1=S_1$相符，可得$a_n=2^{n-1}$.

所以，数列$\{a_n\}$是首项$a_1=1$，公比$q=2$的等比数列，与条件（1）等价，所以也充分.

16. 在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_4+a_7+a_{10}+a_{13}=20$，则S_{16}=（　）

A.60　　B.70　　C.80　　D.90　　E.100

【答案】C

【解析】思路一：题干没有明确给出某一项的值，仅是给出了数列中几项的关系式，故可以使用常数列特值法.

令$\{a_n\}$为公差$d=0$的常数列，则此时每一项均相等，设为t，

则有$a_4=a_7=a_{10}=a_{13}=t$，故$a_4+a_7+a_{10}+a_{13}=4t=20$，解得$t=5$，

$S_{16}=16t=80$

思路二：利用等差数列下标和相等的两项之和相等求解，即$a_4+a_7+a_{10}+a_{13}=(a_4+a_{13})+(a_7+a_{10})=2(a_8+a_9)=20$.解得$a_8+a_9=10$.

等差数列$\{a_n\}$的前 16 项和S_{16}=$\frac{16(a_1+a_{16})}{2}=8(a_1+a_{16})=8(a_8+a_9)=80$.

17. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n^2-1$，$n=1,2,3,\ldots$那么$a_{2018}+a_{2019}$的值为（　　）.

A.2　　B.8　　C.1　　D.-1　　E.无法确定

【答案】D

【解析】本题符合一般数列【标志词汇】a_n与a_{n+1}递推关系式，一般解题入手方向为把$n=1,2,3,\cdots$时得到的前几项代入计算出每一项的具体数字，然后寻找数字的规律.故有$a_1=1$，$a_2={a_1}^2-1=0$，$a_3={a_2}^2-1=-1, a_4={a_3}^2-1=0, a_5={a_4}^2-1=-1$，$\cdots$.观察知数列$\{a_n\}$为首项为 1，从第二项起为$0,-1,0,-1,0,-1\ldots\ldots$的数列，任意连续两项和均为$-1$.$a_{2018}+a_{2019}$为连续两项，不论它们是$0,-1$还是$-1,0$，均有这两项之和$a_{2018}+a_{2019}=-1$.