MBA 大师《跟学团——MBA 数学》

第七章 平面几何立体几何

三角形基础

1. 等腰三角形底边上的高是 8，周长是 32，则三角形的面积为（ ）.

A. 56 B.48 C. 40 D. 32 E. 24

【答案】B

【解析】 设等腰三角形底边为b，则腰为$\frac{32-b}{2}$，由勾股定理可得$\left(\frac{32-b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+8^2$，

解得$b=12$，因此，$S_\Delta=\frac{1}{2}\times 12\times 8=48$.

2. 三角形 ABC 的面积保持不变.

（1）底边 AB 增加了 2 厘米，AB 上的高 h 减少了 2 厘米.

（2）底边 AB 扩大了 1 倍，AB 上的高 h 减少 50%.

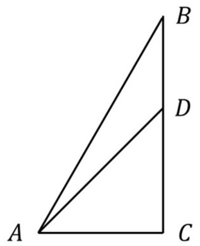
【答案】B

【解析】 设底边 AB 的长为a，高为h.

条件（1），三角形 ABC 原来的面积为$\frac{1}{2}ah$，变化以后的面积为$\frac{1}{2}(a+2)(h-2)$，两者不一定相等，不充分.

条件（2），三角形 ABC 原来的面积为$\frac{1}{2}ah$，变化以后的面积为$\frac{1}{2}(a+a)(h-0.5h)=\frac{1}{2}ah$，充分. 故选 B.

3. 在ΔABC中，$\angle C=90^\circ$，D为BC上的一点，$\angle BAC=60^\circ$，$\angle DAC=45^\circ$，$BD=a$，则线段AB的长度为（ ）.



A. $(\sqrt{3}+1)a$ B. $\sqrt{3}a$ C.a D.$2a$ E.$3a$

【答案】A

【考点】平面几何——重要三角形

设$AC=x$，则$AB=2x$，$BC=\sqrt{3}x$，

$CD=\sqrt{3}x-a$，$CD=AC=x$，所以$\sqrt{3}x-a=x$，$x=\frac{a}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)a}{2}$

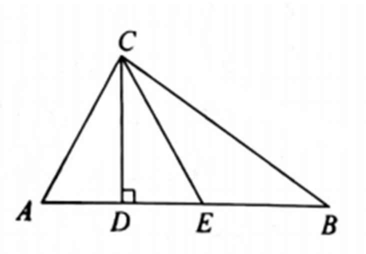
则$AB=2x=(\sqrt{3}+1)a$

注：等腰直角三角形：三边长度之比为$1:1:\sqrt{2}$

内角分别为30°，60°，90°的直角三角形：三边长度之比为$1:\sqrt{3}:2$.

4. 如图，在直角三角形 ABC 中，$\angle ACB=90°$，CD 为 AB 边上的高，CE 为 AB 边上的中线，AD=2，CE=5，则 CD 的长为（　　）.

A. 2　　B.3　　C.4　　D. $2\sqrt{3}$　　E. $2\sqrt{2}$



【答案】C

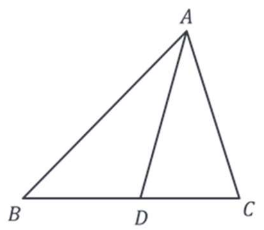
【解析】如图，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，$AE=BE$，$AD=2$，$CE=5$.由斜边中线等于斜边一半可得$CE=AE=BE$.因此$AE=5$，$DE=AE-AD=5-2=3$.

$CD=\sqrt{CE^2-DE^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$. 故选 C.

三角形等高模型

5. 如图所示，在ΔABC中，AD是它的角平分线，$BD=8cm$，$DC=6cm$，则$S_{\Delta ABD}$:

$S_{\Delta ACD}=$（　　）.

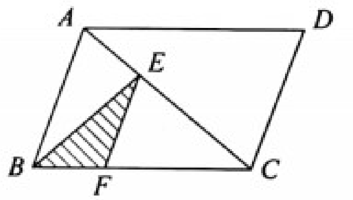


A3: 4　　B. 4: 3　　C.16: 9　　D. 9: 16　　E. 9: 8

【答案】B

【解析】设ΔABD的边B上的高与ΔACD的边CD上的高分别为h_1，h_2，所以$h_1=h_2$，所以$S_{\Delta ABD}$：$S_{\Delta ACD}=BD:DC=8:6=4:3$.

6. 如图，在平行四边形$ABCD$中，E、F分别是AC、BC的三等分点，且平行四边形$ABCD$的面积为 54，则ΔBEF的面积为（　　）.



A. 5　　B.6　　C.7　　D.8　　E.9

【答案】B

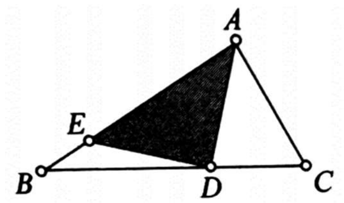
【解析】因为ΔEBF与ΔEBC的高相等，且$BF=\frac{1}{3}BC$，于是$S_{\Delta EBF}=\frac{1}{3}S_{\Delta EBC}$.

同理，ΔEBC与ΔABC的高相等，且$EC=\frac{2}{3}AC$，所以$S_{\Delta EBC}=\frac{2}{3}S_{\Delta ABC}$，

进而$S_{\Delta BEF}=\frac{2}{9}S_{\Delta ABC}=\frac{2}{9}\times\frac{1}{2}S_{\square ABCD}=\frac{1}{9}\times 54=6$.

7. 如图ΔABC面积是 96，D 分 BC 为 2:1，E 分 AB 为 3:1，则ΔADE面积等于（　　）.

A.48　　B.52　　C.56　　D.60　　E.64



【答案】A

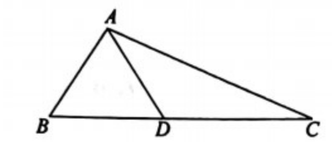
【解析】 因为ΔADE与ΔADB的高相等，且$AE=\frac{3}{4}AB$，即得$S_{\Delta ADE}=\frac{3}{4}S_{\Delta ADB}$.

同理，ΔADB与ΔABC等高，且$BD=\frac{2}{3}BC$，于是$S_{\Delta ADB}=\frac{2}{3}S_{\Delta ABC}$，因此$S_{\Delta ADE}=$

$\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times 96=48.$

相似三角形

8. 在ΔABC中，AD是中线，$BC=4$，$\angle B=\angle DAC$，则线段 AC 的长等于（　　）.



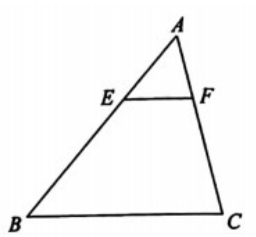
A.$2\sqrt{2}$　　B.2　　C.3　　D.$2\sqrt{3}$　　E.$3\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】由于 $\begin{cases}\angle B=\angle DAC\\ \angle C=\angle C\end{cases}\Rightarrow \Delta BAC\sim\Delta ADC\Rightarrow\frac{AC}{BC}=\frac{DC}{AC}\Rightarrow AC^2=CD\bullet BC=\frac{1}{2}BC\bullet BC=8.$

所以$AC=2\sqrt{2}.$

9. 如图，在ΔABC中，$EF\parallel BC$，$AB=3AE$，若四边形$BCFE$的面积为 16，则ΔABC的面积为（　　）.



A.16　　B.18　　C.20　　D.22　　E.24

【答案】B

【解析】本题符合【标志词汇】A字形相似：三角形内出现边的平行线⟹此平行线分割出的小三角形和大三角形相似.

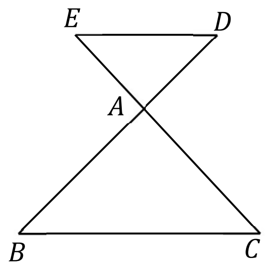
$EF\parallel BC$，故$\Delta AEF\sim\Delta ABC\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{1}{3}$，$\frac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta ABC}}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$，设$S_{\Delta AEF}=x$，从而$\frac{x}{16+x}=\frac{1}{9}\Rightarrow$

$x=2$，$S_{\Delta ABC}=18$.

10. 如图，在ΔABC中，点D、E分别在边BA、CA的延长线上，已知$AB=2AD$，则可以确定$DE\parallel BC$.

（1） $AC=2AE$.

（2） $\angle ABC=\angle ADE$.



【答案】D

【解析】

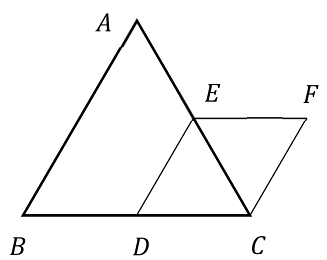
$$\text{条件（1）}\begin{cases} AC=2AE\Rightarrow \frac{AC}{AE}=\frac{2}{1} \\ \angle BAC=\angle DAE \\ AB=2AD\Rightarrow \frac{AB}{AD}=\frac{2}{1} \end{cases}\Rightarrow \quad \Delta BAC\sim\Delta DAE$$

所以$\angle B=\angle D$，即$DE\parallel BC$，条件（1）充分.

条件（2）$\angle ABC$和$\angle ADE$是内错角，由于内错角相等，两直线平行，所以$DE\parallel BC$，条件（2）充分.

四边形

11. ABC和△CFE为等边三角形，D、E分别为BC、AC的中点，已知△ABC的边长为4，则D、F间的距离为（　　）.



A. $\sqrt{3}$　　B. $3\sqrt{3}$　　C. 3　　D. $2\sqrt{3}$　　E. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

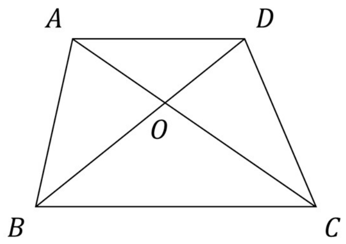
【答案】D

【解析】由题意可得$CD=CE=\frac{1}{2}BC=2$，则三角形DCE面积S_1=三角形CFE面积

S_2=$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2=\sqrt{3}$，四边形$DCFE$为菱形，则四边形$DCFE$的面积$S=\frac{1}{2}EC\cdot DF$，又因为

$S=S_1+S_2$，则$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot DF=2\sqrt{3}$，$DF=2\sqrt{3}$.

12. 如图所示，在梯形$ABCD$中，AD平行于BC，$AD:BC=1:2$,若$\triangle ABO$的面积是 2，则梯形$ABCD$的面积是（　　）.



A.7　　B.8　　C.9　　D.10　　E.11

【答案】C

【解析】$\triangle ADB$和$\triangle ADC$同底等高，所以$S_{\triangle ADB}=S_{\triangle ADC}$

又因为$S_{\triangle ADB}$=$S_{\triangle AD0}+S_{\triangle AB}$ ，$S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ADO}+S_{\triangle DOC}$，

所以$S_{\triangle ABO}=S_{\triangle DOC}=2$

AD平行于BC，所以$\triangle AOD\sim\triangle COB$，且已知$AD:BC=1:2$

则$S_{\triangle AOD}:S_{\triangle BOC}=1:4$ ，AO：CO=1：2，DO：BO=1：2

$\triangle AOD$和$\triangle DOC$的底边都在AC上，共用顶点D，边长比等于面积比，

即$S_{\triangle AOD}:S_{\triangle DOC}=AO:CO=1:2$，所以$S_{\triangle AOD}=1$

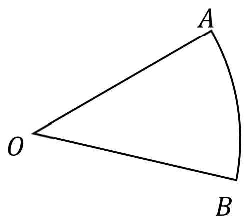
又因为$S_{\triangle AOD}:S_{\triangle BOC}=1:4$，所以$S_{\triangle BOC}=4$

所以$S_{梯形ABCD}=1+2+2+4=9$.

圆与扇形、阴影面积

13. 已知扇形的周长为 4，则扇形面积的最大值为（　　）.

A.2　　B.1　　C.$\frac{1}{2}$　　D.3　　E.$\frac{2}{3}$



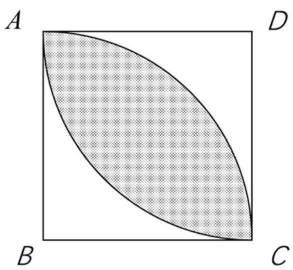
【答案】B

【解析】如图，在扇形OAB中，设半径为r，弧长为 l，于是$l+2r=4$.

由于$l>0,r$>0，满足均值定理使用的前提条件，

扇形面积$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{4}l\cdot 2r\leq\frac{1}{4}\left(\frac{l+2r}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\times\left(\frac{4}{2}\right)^2=1$.

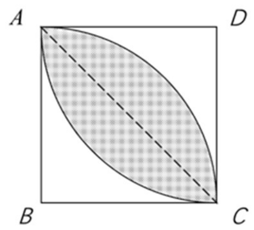
14. 如图所示，正方形的边长为 2，分别以两个对角的顶点为圆心，以 2 为半径画弧，求图中的阴影部分面积为（　　）.



A. $2\pi-4$　　B. $\pi-2$　　C. $2\pi+2$　　D. $2\pi-2$　　E. $4-\pi$

【答案】A

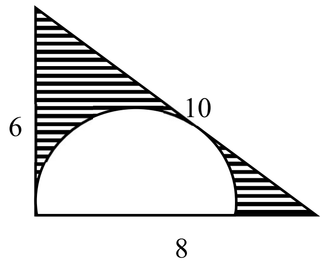
【解析】连接AC，此题阴影面积为一个不规则的图形，而我们需要把不规则的图形转化为规则图形求解.



所以半个阴影面积$=S_{扇ABC}-S_{\Delta ABC}=\frac{1}{4}\pi\cdot2^2-\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=\pi-2$

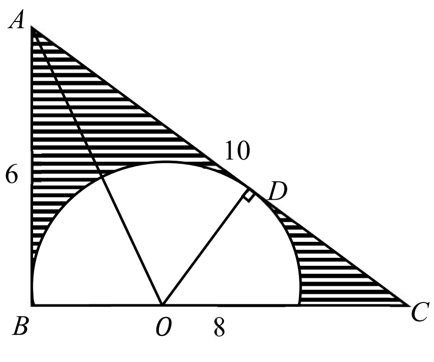
所以$S_{阴}$=$2\pi-4$.

15. 如图所示，直角三角形的三条边分别为6、8、10，它的内部放了一个半圆，则图中阴影部分的面积为（　　）.



A. $24-\frac{3\pi}{2}$　　B. $24-\frac{5\pi}{2}$　　C. $24-3\pi$　　D. $24-\frac{7\pi}{2}$　　E. $24-\frac{9\pi}{2}$

【答案】E



【解析】如图，连接OD、OA，从而$OD\perp AB$，设半圆的半径为r，

于是$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABO}+S_{\Delta ACO}\Longrightarrow\frac{1}{2}\times6\times8=\frac{1}{2}\times6\times r+\frac{1}{2}\times10\times r\Longrightarrow r=3$，

因此，$S_{阴影}=\frac{1}{2}\times6\times8-\frac{\pi\times3^2}{2}=24-\frac{9\pi}{2}$.

立体几何

16. 长方体三个面的面积分别是$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$，则它的体对角线长为(　　).

A.$2\sqrt{3}$　　B.$3\sqrt{2}$　　C.$\sqrt{3}$　　D.$\sqrt{6}$　　E.$2\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】设长方体的三条棱长分别为a，b，c.

由$\begin{cases} ab=\sqrt{2} & ① \\ ac=\sqrt{3} & ② \\ bc=\sqrt{6} & ③ \end{cases}$　①×②可得$a^2bc=\sqrt{6}$，结合③式可得 $a^2=1$

同理可得$b^2=2$，$c^2=3$

因此长方体的对角线$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{1+2+3}=\sqrt{6}$.

17. 已知PQ是一个正方体的一条对角线，如果PQ的长度为a，那么此正方体的表面积为（　　）.

A.$2a^2$　　B.$2\sqrt{2}a^2$　　C.$2\sqrt{3}a^2$　　D.$3\sqrt{3}a^2$　　E.$6a^2$

【答案】A

【解析】设正方体的棱长为x，于是$a=\sqrt{3}x$，即$x=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

所以，此正方体的表面积为$S=6x^2=6\times\frac{a^2}{3}=2a^2$.

18. 一张长是12，宽是8的矩形铁皮卷成一个圆柱体的侧面，其高是12.则这个圆柱体的体积是(　　).

A.$\frac{288}{\pi}$　　B.$\frac{192}{\pi}$　　C.288　　D.192　　E.288π

【答案】B

【解析】设圆柱体的底面半径为r，高为h，圆柱体的侧面积为$12\times8=96$，即$2\pi rh=96$，其中 $h=12$，所以$r=\frac{4}{\pi}$，所以体积$V=\pi r^2h=\frac{192}{\pi}$.

19. 圆柱形容器的内壁底半径为 5cm，两个直径为 5cm 的玻璃小球浸没于容器的水中，若取出这两个小球，则容器内的水面将下降（　　）cm.

A.$\frac{5}{2}$　　B.2　　C.$\frac{3}{2}$　　D.$\frac{4}{3}$　　E.$\frac{5}{3}$

【答案】E

【解析】设取出小球后，容器水平面将下降$h$cm，两小球体积等于圆柱形容器内水面下降的体积.即$2\times\frac{4\pi}{3}\times\left(\frac{5}{2}\right)^3=\pi\times5^2\times h$，即$\frac{125\pi}{3}=25\pi h$，则$h=\frac{5}{3}$.