

TP4 : Systèmes linéaires et équations différentielles

Exercice 1 (Splines cubiques).

Pour rappel, une spline cubique $x(t)$ est une fonction polynomiale par morceaux qui interpole un ensemble de $p + 1$ points (t_i, x_i) tel que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$. Pour simplicité, on suppose que $a = 0, b = 1$, et $t_{i+1} - t_i = h = \frac{1}{p}$.

Une spline cubique peut être défini comme le résultat de minimisation suivante avec des contraintes d'égalité :

$$\min_x \int_0^1 \|x''(t)\|^2 dt, \quad x(t_i) = x_i \quad \forall i = 0, \dots, p. \quad (1)$$

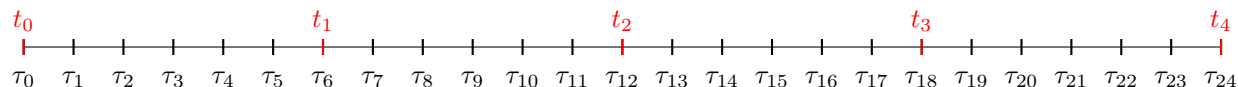
Résoudre le problème (1) est équivalent à résoudre l'équation biharmonique (équation différentielle de l'ordre 4) avec des contraintes positionnelles :

$$x^{iv}(t) = 0, \quad x(t_i) = x_i \quad \forall i = 0, \dots, p. \quad (2)$$

On va maintenant discretizer le problème (2) afin de le résoudre. Pour discretizer le paramètre t (variable temporelle), on découpe chaque interval $[t_i, t_{i+1}]$ à n sous-intervalles pour avoir une abscisse uniforme

$$\tau_k = k/N, \quad k = 0, \dots, N = n \times p$$

avec $n - 1$ points intérieurs par morceau de spline. Exemple pour $p = 4, n = 6$:



On note $x_k = x(\tau_k)$. Pour discretizer la dérivée quatrième de x , on considère la différence finie de l'ordre 4 suivante :

$$x^{iv}(\tau_k) \approx \frac{1}{h^4} (x_{k-2} - 4x_{k-1} + 6x_k - 4x_{k+1} + x_{k+2}).$$

Utilisez les questions suivantes pour compléter le code dans `TP4_spline.sce` afin de calculer une spline cubique qui interpole les données fournies dans le fichier.

1. Définir les variables `indices` et `coeffs` qui permettent de calculer les différences finies de l'ordre 4.
 - (a) `indices` contient les indices des voisins de x_k relative à l'indice k , soit le vecteur $[-2, -1, 0, 1, 2]$.
 - (b) `coeffs` contient les coefficients utilisés pour calculer x^{iv} .
2. Résoudre le système $A \cdot X = B$ en utilisant la factorisation LU de la matrice A . Tracer la courbe (décommenter la ligne `xpoly(X...)`).
3. Expérimenter avec les 4 ensembles fournis et varier le nombre de points par morceau (variable `n`). Visualiser toutes les points qui constituent la courbe (décommenter la ligne `plot2d(X...)`). Quel est le problème avec la discretization utilisé ?

Exercice 2 (Équation de la chaleur).

Soit une fonction $u(x, y, t)$ solution de l'équation différentielle suivante (équation de la chaleur)

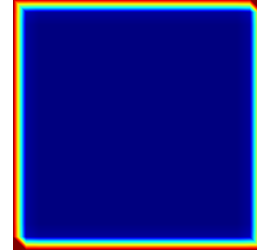
$$\frac{\partial u}{\partial t} - c \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} - c \nabla^2 u = 0$$

- $t \geq 0$, variable temporelle ;
- x, y , variables spatiales comprises entre 0 et N ;
- $c > 0$ coefficient dit de diffusion thermique.

Pour simplification, on suppose que $c = 1$.

On a les conditions de bord suivantes :

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = u(1, y, t) &= 100, & t \geq 0, y \in [0, 1] \\ u(x, 0, t) = u(x, 1, t) &= 100, & t \geq 0, x \in [0, 1] \\ u(x, y, 0) &= 0, & x, y \in]0, 1[\end{aligned}$$



Problème initial ($t = 0$) :
rouge = 100°C, bleu = 0°C

On veut résoudre de manière numérique cette équation. Pour cela, on subdivise le temps et l'espace :

- pour l'espace, on a une grille uniforme : $x_i = i, y_j = j, i, j = 0, \dots, N$
 - pour le temps, $t_k = k\tau$, avec $\tau > 0$ un pas de temps **choisi**.
 - on note $u_{i,j}^k = u(x_i, y_j, t_k)$.
- i. Même sans la résolution de l'équation différentielle, on connaît déjà un certain nombre de $u_{i,j}^k$.
Lesquels ?

On suppose maintenant qu'on connaisse à un instant t_k donné **tous** les $u_{i,j}^k, i, j = 0, \dots, N$. Par contre, on ne connaît pas tous les $u_{i,j}^{k+1}$ à l'instant suivant t_{k+1} . Le but des prochaines questions est de pouvoir exprimer les $u_{i,j}^{k+1}$ en fonction des $u_{i,j}^k$ en discrétisant l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t_k) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_k) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_k) = 0.$$

Cette méthode est dite d'**Euler explicite**.

- ii. Discrétiser le terme suivant $\partial u / \partial t (x_i, y_j, t_k)$ en fonction uniquement de $u_{i,j}^k, u_{i,j}^{k+1}$ et τ .
Quel est l'ordre de l'approximation en temps ?
- iii. Discrétiser le terme suivant $\partial^2 u / \partial x^2 (x_i, y_j, t_k)$ en fonction uniquement de $u_{i-1,j}^k, u_{i,j}^k, u_{i+1,j}^k$.
Discrétiser le terme suivant $\partial^2 u / \partial y^2 (x_i, y_j, t_k)$ en fonction uniquement de $u_{i,j-1}^k, u_{i,j}^k, u_{i,j+1}^k$.
Quel est l'ordre de l'approximation en espace ?
- iv. Établir le système à résoudre pour trouver les $u_{i,j}^{k+1}$ en fonction des $u_{i,j}^k$.

Complétez le code dans TP4_heat.sce et visualisez l'équation de la chaleur sur un domaine carré $[0, 1]^2$.

1. Les températures $u_{i,j}^k$ sont stockés dans une matrice T. Construire la matrice initiale $T0(i, j) = u_{i,j}^0$.
2. Dans une boucle : calculer la prochaine iteration T1 avec la méthode d'Euler explicite en utilisant les valeurs dans T0. Passer à la prochaine iteration ($T0 = T1$).
3. Modifier le pas de temps τ (variable dt). Que se passe-t-il ?