

Correction TD1 : Approximation de fonctions

1 Méthode des moindres carrés

Exercice 2 (régression linéaire pondérée). Soit le modèle de régression linéaire

$$f(x, a, b) = ax + b$$

Lorsque on veut estimer les paramètres adéquats pour ce modèle en fonction des données (n points (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$) et de leurs incertitudes, on cherche les paramètres a et b minimisant

$$\chi^2(a, b) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - ax_i - b}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^n w_i (y_i - ax_i - b)^2$$

avec σ_i l'écart-type de l'erreur commise sur la mesure de y_i . On a $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{w_i}}$. Notons les moyennes pondérées \bar{x}^p et \bar{y}^p définies de la manière suivante :

$$\bar{x}^p = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad \bar{y}^p = \frac{\sum_{i=1}^n w_i y_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

1. Montrer qu'au minimum de χ^2 , b vaut

$$b = \bar{y}^p - a\bar{x}^p$$

On cherche le minimum de la fonction χ^2 . Pour cela, il faut chercher où le gradient de χ^2 vaut 0. On doit donc calculer les dérivées partielles de χ^2 par rapport à a et b . Celles-ci valent

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi^2}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n w_i x_i (y_i - ax_i - b) \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n w_i (y_i - ax_i - b) \end{cases}$$

Le minimum de χ^2 est donc atteint pour (a, b) solution de

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n w_i x_i (y_i - ax_i - b) = 0 \\ \sum_{i=1}^n w_i (y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases}$$

La seconde ligne du système à résoudre donne

$$\sum_{i=1}^n w_i (y_i - ax_i - b) = 0 \iff \sum_{i=1}^n w_i y_i - a \sum_{i=1}^n w_i x_i - b \sum_{i=1}^n w_i = 0$$

D'où

$$b = \frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i} \left(\sum_{i=1}^n w_i y_i - a \sum_{i=1}^n w_i x_i \right) = \bar{y}^p - a\bar{x}^p$$

2. Montrer qu'au minimum de χ^2 , a vaut

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}^p) (y_i - \bar{y}^p)}{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}^p)^2}$$

Si on réécrit le système à résoudre, on a

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n w_i x_i (y_i - a x_i - b) = \sum_{i=1}^n w_i x_i (y_i - \bar{y}^p - a(x_i - \bar{x}^p)) = 0 \\ \sum_{i=1}^n w_i (y_i - a x_i - b) = \sum_{i=1}^n w_i (y_i - \bar{y}^p - a(x_i - \bar{x}^p)) = 0 \end{cases}$$

Si on multiplie la deuxième ligne par \bar{x}^p et qu'on la soustrait à la première ligne, on obtient

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i (y_i - \bar{y}^p - a(x_i - \bar{x}^p)) - \bar{x}^p \sum_{i=1}^n w_i (y_i - \bar{y}^p - a(x_i - \bar{x}^p)) = 0 - \bar{x}^p \times 0 = 0$$

Or

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n w_i x_i (y_i - \bar{y}^p - a(x_i - \bar{x}^p)) - \bar{x}^p \sum_{i=1}^n w_i (y_i - \bar{y}^p - a(x_i - \bar{x}^p)) = \sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}^p) (y_i - \bar{y}^p - a(x_i - \bar{x}^p)) \\ &= \sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}^p) (y_i - \bar{y}^p) - a \sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}^p)^2 \end{aligned}$$

Et finalement, on obtient

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}^p) (y_i - \bar{y}^p)}{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}^p)^2}$$

3. Supposons que les écart-types des erreurs commises sur y_i soient égaux. Que valent a et b ?

Supposons maintenant que les écart-types des erreurs commises sur y_i soient égaux. Cela veut dire que les w_i ont tous la même valeur, notons cette valeur w . Les moyennes pondérées valent

$$\begin{aligned} \bar{x}^p &= \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{w \sum_{i=1}^n x_i}{w \sum_{i=1}^n 1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x} & \bar{y}^p &= \frac{\sum_{i=1}^n w_i y_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{w \sum_{i=1}^n y_i}{w \sum_{i=1}^n 1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \bar{y} \end{aligned}$$

On remarque que \bar{x}^p et \bar{y}^p sont égales aux moyennes usuelles \bar{x} et \bar{y} . Pour a et b , on a

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}^p) (y_i - \bar{y}^p)}{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}^p)^2} = \frac{w \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}^p) (y_i - \bar{y}^p)}{w \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}^p)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\ b &= \bar{y}^p - a \bar{x}^p = \bar{y} - a \bar{x} \end{aligned}$$

On retrouve a et b , les deux coefficients de la régression linéaire.

2 Interpolation

Exercice 3. La mesure de la tension aux bornes d'un dipôle a donné les valeurs suivantes

t [s]	0	3	4
U [V]	-8	4	0

On suppose que cette tension varie suffisamment lentement pour qu'on puisse l'approximer par un polynôme de degré faible. Estimez à partir de ces données l'instant \hat{t} où la tension devrait atteindre son maximum, ainsi que la tension \hat{U} en ce maximum.

On suppose que la tension varie suffisamment lentement pour qu'on puisse l'approximer par un polynôme de degré faible. On va donc interpoler la tension aux points $(0, -8)$, $(3, 4)$ et $(4, 0)$. Pour cela, on va contruire la forme lagrangienne du polynôme d'interpolation noté L . On rappelle que ce polynôme est une combinaison linéaire $L(x) = \sum_{j=0}^n y_j \ell_j(x)$ de polynômes de Lagrange

$$\ell_j(x) = \prod_{k=0, k \neq j}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \cdots \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_j - x_n}$$

Dans notre cas n vaut 2, l'indice j varie donc de 0 à 2 et

$$\ell_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x - 3}{0 - 3} \frac{x - 4}{0 - 4} = \frac{1}{12}(x - 3)(x - 4)$$

$$\ell_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - 0}{3 - 0} \frac{x - 4}{3 - 4} = -\frac{1}{3}x(x - 4)$$

$$\ell_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - 0}{4 - 0} \frac{x - 3}{4 - 3} = \frac{1}{4}x(x - 3)$$

et le polynôme d'interpolation vaut

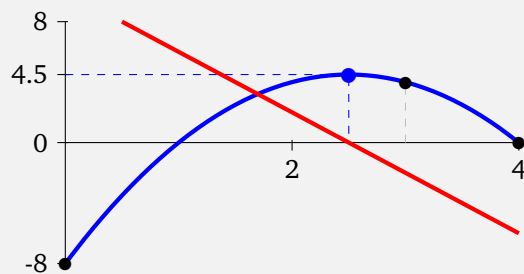
$$\begin{aligned} L(x) &= \sum_{j=0}^2 y_j \ell_j(x) = -8\ell_0(x) + 4\ell_1(x) + 0\ell_2(x) = -\frac{8}{12}(x - 3)(x - 4) - \frac{4}{3}x(x - 4) \\ &= (x - 4) \left(-\frac{2}{3}(x - 3) - \frac{4}{3}x \right) = (x - 4)(-2x + 2) = -2x^2 + 10x - 8 \end{aligned}$$

et sa dérivée

$$L'(x) = -4x + 10$$

d'où le tableau des variations suivant.

x	0	2.5	3	4
$L'(x)$		+	0	-
$L(x)$	-8	$\hat{U} = 4.5$	4	0



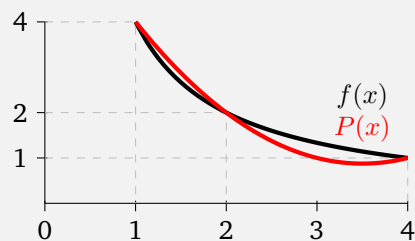
La tension maximale est donc atteinte en $\hat{t} = 2.5$ et elle vaut $\hat{U} = 4.5$.

Exercice 4. Le polynôme $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 7$ interpole la fonction $f(x) = \frac{4}{x}$ aux points d'abscisses 1, 2, 4.

1. Vérifier que P interpole bien f aux points d'abscisses 1, 2, 4.

$$\begin{aligned} f(1) &= 4 & P(1) &= \frac{1}{2} - \frac{7}{2} + 7 = 7 - 3 = 4 \\ f(2) &= \frac{4}{2} = 2 & P(2) &= \frac{1}{2} \times 2^2 - \frac{7}{2} \times 2 + 7 = 2 - 7 + 7 = 2 \\ f(4) &= \frac{4}{4} = 1 & P(4) &= \frac{1}{2} \times 4^2 - \frac{7}{2} \times 4 + 7 = 8 - 14 + 7 = 1 \end{aligned}$$

Le polynôme $P(x)$ interpole bien f aux points d'abscisses 1, 2 et 4.



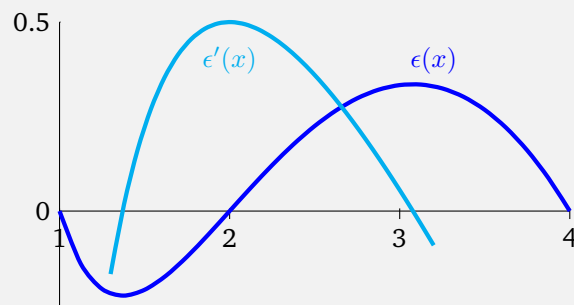
2. Calculer l'erreur $\epsilon(x) = f(x) - P(x)$.

$$\text{L'erreur vaut } \epsilon(x) = \frac{4}{x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 7 = \frac{1}{2x} (8 - x^3 + 7x^2 - 14x) = \frac{1}{2x} (1-x)(2-x)(4-x).$$

3. Quand cette erreur prend-elle sa valeur maximale pour x dans $[1, 4]$?

Pour savoir où l'erreur prend sa valeur maximale sur $[1, 4]$, on calcule sa dérivée. On a $\epsilon'(x) = -\frac{4}{x^2} - x + \frac{7}{2}$. Il nous faut déterminer le signe de ϵ' pour connaître les variations de ϵ . On va donc calculer la dérivée seconde $\epsilon''(x) = \frac{8}{x^3} - 1$ et on a le tableau des variations suivant pour ϵ'

x	1	x_1	2	x_2	4
$\epsilon''(x)$		+	0	-	
$\epsilon'(x)$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$



D'après le **théorème des valeurs intermédiaires** (cf. cours résolution d'équations non-linéaires), il existe $x_1 \in]1, 2[$ et $x_2 \in]2, 4[$ tel que

$$\epsilon'(x_1) = \epsilon'(x_2) = 0$$

Numériquement, on trouve que $x_1 \approx 1.37$ et $x_2 \approx 3.07$. On a maintenant le tableau des variations pour ϵ

x	1	x_1	2	x_2	4
$\epsilon'(x)$	—	0	+	0	—
$\epsilon(x)$	0	<div><div>$\epsilon(x_1) \approx -0.2237$</div><div>$\epsilon(x_2) \approx 0.3354$</div><div>0</div></div>			

L'erreur prend sa valeur maximale en x_2 , elle vaut environ 0.3354.

4. Que faire pour réduire cette erreur ?

Une idée pour diminuer l'erreur serait d'ajouter un point d'interpolation (par exemple, $(x_2, f(x_2))$). Cependant, il est possible qu'ajouter ce point d'interpolation fasse empirer les choses (phénomène de Runge par exemple).

3 Extrait de l'examen de 2012

3.1 Interpolation polynômiale (4 points)

On veut calculer les valeurs d'une fonction $f(x)$ pour toutes les valeurs de x , mais on ne connaît pas f explicitement. Ceci se produit typiquement lorsque f n'est connue qu'en certains points expérimentaux. On considère la fonction f dont 3 points du graphique sont connus ($f(0) = 1$, $f(1) = 3$ et $f(2) = 7$). On propose de chercher f dans la famille des polynômes.

1. Quel est le degré n du polynôme d'interpolation P tel que le problème admette une solution unique ?

On cherche à interpoler une fonction f en trois points en utilisant l'interpolation polynômiale. Notons P le polynôme interpolant f en ces trois points. On note que les points d'interpolation ont des abscisses différentes. Ainsi, pour que le polynôme d'interpolation P soit unique, il faut que son degré soit de $n = 2$ (nombre de points d'interpolation - 1).

2. Écrire le système d'équations qui détermine les coefficients (a,b,c) de ce polynôme ($P(x) = a + bx + cx^2$) et le résoudre.

On veut que $P(0) = 1$, $P(1) = 3$ et $P(2) = 7$ (car P interpole f en ces points). On a donc à résoudre le système suivant

$$\begin{cases} a & & & = & 1 \\ a & + & b & + & c & = & 3 \\ a & + & 2b & + & 4c & = & 7 \end{cases}$$

On a immédiatement que $a = 1$ et on réinjecte la valeur de a dans les deuxième et troisième lignes. On a ainsi le système suivant pour trouver b et c

$$\begin{cases} b & + & c & = & 2 \\ 2b & + & 4c & = & 6 \end{cases}$$

Si on multiplie la première ligne par 2 et qu'on la soustraie à la seconde ligne, on a

$$2b + 4c - 2 \times (b + c) = 2c = 6 - 2 \times 2 = 4$$

d'où $c = 1$ et comme $b + c = 2$, on en déduit que $b = 1$. Le polynôme

$$P(x) = 1 + x + x^2$$

interpole donc f aux points $f(0) = 1$, $f(1) = 3$ et $f(2) = 7$.

3. Écrire directement la solution grâce à la forme de Lagrange.

On recherche maintenant P en utilisant la forme de Lagrange. On rappelle ici que $P(x) = \sum_{j=0}^n y_j \ell_j(x)$ avec les polynômes de Lagrange

$$\ell_j(x) = \prod_{k=0, k \neq j}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \cdots \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_j - x_n}$$

Dans notre cas n vaut 2, l'indice j varie donc de 0 à 2 et

$$\ell_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x - 1}{0 - 1} \frac{x - 2}{0 - 2} = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2)$$

$$\ell_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - 0}{1 - 0} \frac{x - 2}{1 - 2} = -x(x - 2)$$

$$\ell_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - 0}{2 - 0} \frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{1}{2}x(x - 1)$$

et le polynôme d'interpolation vaut

$$P(x) = \sum_{j=0}^2 y_j \ell_j(x) = \ell_0(x) + 3\ell_1(x) + 7\ell_2(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2) - 3x(x - 2) + \frac{7}{2}x(x - 1) = x^2 + x + 1$$

On retrouve bien le même polynôme d'interpolation qu'à la question précédente.

3.2 Approximation au sens des moindres carrés (4 points)

On considère toujours la fonction f connue expérimentalement en trois points. Cependant, on considère que les mesures sont entachées d'erreurs ($f(0) \approx 1$, $f(1) \approx 3$ et $f(2) \approx 7$) et on cherche une fonction f de la forme $f(x) = a\sqrt{|x-1|} + bx^2$.

1. A priori, peut-on trouver une fonction de la forme $f(x) = a\sqrt{|x-1|} + bx^2$ qui passe exactement par les trois points expérimentaux ?

On cherche 2 inconnues a et b . Pour que la forme f passe par les trois points expérimentaux, il faut que a et b suivent trois équations. Or il n'y a en général pas de solution pour un système de 3 équations à 2 inconnues. Il est donc vraisemblable qu'il n'existe pas une fonction de la forme $f(x) = a\sqrt{|x-1|} + bx^2$ passant exactement par les trois points expérimentaux.

2. Écrire le problème de minimisation qui détermine les coefficients a et b au sens des moindres carrés.

La fonction modèle est de la forme

$$f(x, \beta) = \sum_{k=1}^m \beta_k \phi_k(x)$$

Ici, $\beta_1 = a$, $\phi_1(x) = \sqrt{|x-1|}$ et $\beta_2 = b$, $\phi_2(x) = x^2$. On a donc affaire à un problème des moindres carrés linéaires. On cherche ainsi a et b tel que la quantité suivante $S(a, b)$ soit minimale

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^3 (y_i - a\sqrt{|x_i-1|} - bx_i^2)^2 = (1-a)^2 + (3-b)^2 + (7-a-4b)^2$$

3. Déterminer le système d'équations linéaires à résoudre. Résoudre le système.

Le minimum de S est atteint lorsque les dérivées partielles de S en a et b s'annulent or

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = -2(1-a) - 2(7-a-4b) = 4a + 8b - 16 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = -2(3-b) - 2 \times 4(7-a-4b) = 8a + 34b - 62 \end{cases}$$

On doit donc résoudre le système suivant

$$\begin{cases} 4a + 8b = 16 \\ 8a + 34b = 62 \end{cases}$$

Maintenant si on multiplie la première ligne par 2 et qu'on la soustraie à la seconde ligne, on a

$$-2 \times (4a + 8b) + (8a + 34b) = 18b = -2 \times 16 + 62 = 30$$

et on obtient que $b = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$. Si on remplace la valeur de b nouvellement obtenue dans la première équation, on a $a = 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}$. La fonction f donc vaut

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{|x-1|} + \frac{5}{3}x^2.$$

On vérifie d'ailleurs qu'elle ne passe pas exactement par les points donnés.