

Aggregate Planning Optimization through Linear Programming: An Integrated Model with External Suppliers

Optimización de la Planeación Agregada mediante Programación Lineal: Un Modelo Integrado con Proveedores Externos

Vicente Ramírez Samperio

Heriberto de la Cruz Reséndiz

Resumen:

Este artículo presenta el desarrollo de un modelo de planeación agregada de la producción que incorpora la gestión simultánea de tres proveedores con diferentes características de costo y capacidad. El objetivo principal es optimizar la toma de decisiones en el mediano plazo, equilibrando la demanda proyectada con la capacidad de producción disponible, mientras se minimizan los costos totales asociados a la producción, almacenamiento y adquisición de insumos. Para ello, se propone un modelo matemático basado en programación lineal, el cual permite evaluar distintos escenarios de suministro y producción. Los resultados obtenidos muestran que la inclusión de múltiples proveedores mejora la flexibilidad del sistema y permite una mejor adaptación ante variaciones en la demanda o en la disponibilidad de recursos. Este enfoque proporciona una herramienta útil para la toma de decisiones estratégicas en entornos de manufactura con cadenas de suministro diversificadas.

Palabras clave: planeación agregada, proveedores múltiples, optimización, programación lineal, cadena de suministro.

Abstract:

This article presents the development of an aggregate production planning model that incorporates the simultaneous management of three suppliers with different cost structures and capacities. The main objective is to optimize medium-term decision-making by balancing projected demand with available production capacity, while minimizing total costs associated with production, inventory, and procurement. A linear programming model is proposed to evaluate various supply and production scenarios. The results show that including multiple suppliers enhances system flexibility and allows better adaptation to fluctuations in demand.

or resource availability. This approach provides a valuable tool for strategic decision-making in manufacturing environments with diversified supply chains.

Keywords: aggregate planning, multiple suppliers, optimization, linear programming, supply chain.

Introducción:

La planeación agregada de la producción (PAP) constituye una herramienta clave dentro de la administración de operaciones, al permitir la toma de decisiones estratégicas para equilibrar la oferta y la demanda de productos en horizontes de mediano plazo. Esta técnica busca optimizar los recursos de producción disponibles, minimizando costos y manteniendo niveles de servicio adecuados, en un entorno de restricciones financieras, operativas y de inventario (Aziez & Nourelfath, 2014). En la actualidad, los desafíos en la gestión de cadenas de suministro globales —con múltiples proveedores, condiciones cambiantes del mercado y restricciones logísticas— han intensificado la necesidad de modelos más robustos y flexibles de PAP.

Diversos enfoques han surgido para adaptar la PAP a contextos complejos. Por ejemplo, se han aplicado modelos de optimización robusta para enfrentar la incertidumbre en la demanda y los retrasos de proveedores, logrando soluciones estables en entornos dinámicos (Zandieh et al., 2018). Asimismo, la integración de políticas de postergación (“postponement”) permite aumentar la capacidad de respuesta ante variaciones en la disponibilidad de insumos y tiempos de entrega, optimizando simultáneamente costos de producción e inventarios (Zandieh et al., 2018). Estas estrategias son especialmente valiosas cuando las empresas dependen de múltiples proveedores, cuyas condiciones de operación varían entre regiones, capacidades y niveles de confiabilidad.

En este contexto, también han cobrado relevancia las soluciones basadas en inteligencia artificial y algoritmos genéticos, que permiten generar planes de producción adaptativos, considerando restricciones complejas en entornos de múltiples plantas o proveedores (Sadeghi et al., 2022; Dogan & Goekcen, 2003). Además, los marcos colaborativos fundamentados en teoría de juegos han sido propuestos para coordinar decisiones entre distintos actores de la cadena de suministro, promoviendo la cooperación entre proveedores y productores para lograr beneficios conjuntos (Rezaei et al., 2019).

El presente artículo analiza cómo la planeación agregada puede emplearse eficazmente para resolver problemas productivos que involucran múltiples proveedores, proponiendo un enfoque estructurado basado en un modelo matemático de programación lineal.

Procedimiento:

La planeación agregada es el proceso de desarrollar planes tácticos para satisfacer la demanda futura mediante el ajuste de la producción, la fuerza laboral, el inventario y otras variables operativas, con el objetivo de minimizar los costos totales durante un horizonte de planificación de mediano plazo (Chopra & Meindl, 2019). El modelo se basa en el uso de unidades agregadas, es decir, no se planifica por producto individual, sino por familias de productos o unidades equivalentes. Esto simplifica el proceso de toma de decisiones y permite una visión más estratégica de la operación. Las decisiones clave incluyen cuánto producir en tiempo normal y en horas extra, cuántos trabajadores contratar o despedir, cuánto inventario mantener y cuánta producción subcontratar a proveedores externos.

La función principal de este modelo es equilibrar la oferta y la demanda de manera eficiente, considerando las restricciones de capacidad, los costos de operación y las políticas de la empresa. A través de este enfoque, se busca minimizar el costo total de operación, que incluye costos de producción, almacenamiento, contratación, despido y subcontratación, al tiempo que se asegura el cumplimiento de la demanda del mercado.

A continuación, presentamos un caso desarrollado con ayuda de inteligencia artificial para demostrar la aplicación de un modelo de planeación agregada de la producción:

Un equipo de ingenieros industriales trabaja para ManuTech S.A., una empresa líder en la fabricación de componentes electrónicos, a los cuales se les ha encomendado revisar y completar el plan de producción para los próximos 12 meses.

La empresa fabrica un tipo de componente electrónico estandarizado que puede medirse en unidades agregadas de producción. El departamento de ventas ha proporcionado los siguientes pronósticos de demanda mensual (en miles de unidades):

Mes	Demanda en miles de unidades
Enero	950
Febrero	1050
Marzo	1200
Abril	1300
Mayo	1450
Junio	1600
Julio	1500
Agosto	1100
Septiembre	950
Octubre	900
Noviembre	1200
Diciembre	1350

Datos de producción interna:

- La planta opera 23 días por mes, con turnos de 8 horas cada día.
- Un trabajador puede ensamblar un producto cada 8 minutos.
- Los trabajadores reciben un salario de \$25 por hora y una prima de 50% por tiempo extra.
- Actualmente la empresa emplea 1,200 trabajadores y desea mantener este número al final del periodo de planeación.
- El costo de los componentes para cada producto fabricado internamente es de \$24.
- El almacenamiento de inventario tiene un costo de \$3 por unidad por mes.
- El tiempo extra está limitado a un máximo de 18 horas por mes por empleado.
- La empresa cuenta con un inventario inicial de 60,000 unidades y desea terminar el año con el mismo nivel.
- La política de la empresa no permite despidos durante este periodo.

Datos de los proveedores externos: La empresa cuenta con tres proveedores que pueden fabricar el mismo componente para satisfacer la demanda:

Proveedor A:

- Capacidad máxima: 150,000 unidades por mes
- Costo por unidad: \$39
- Tiempo de entrega: Inmediato (mismo mes)

Proveedor B:

- Capacidad máxima: 150,000 unidades por mes
- Costo por unidad: \$37.50
- Tiempo de entrega: Inmediato (mismo mes)

Proveedor C:

- Capacidad máxima: 90,000 unidades por mes
- Costo por unidad: \$38
- Tiempo de entrega: Inmediato (mismo mes)

Se desea:

Desarrollar un modelo matemático de programación lineal de planeación agregada, que determine el plan de producción óptimo considerando la producción interna y los tres proveedores externos.

Implementar una aplicación en Shiny donde se capturen los parámetros de entrada a este problema y arroje resultados de:

- Cuál es el programa de producción óptimo (producción interna y subcontratación)
- Cuál es el costo total anual de este programa
- Cuál es la utilización de cada proveedor por mes

Modelo de programación lineal:

Para poder desarrollar el modelo de programación lineal, se definen las siguientes variables:

Variable	Descripción	Unidades
w_t	Número de trabajadores empleados en el mes(t)	trabajadores
H_t	Número de trabajadores contratados en el mes(t)	trabajadores
L_t	Número de trabajadores despedidos en el mes(t)	trabajadores
P_t	Producción en tiempo normal en el mes(t)	miles de unidades
O_t	Horas totales de tiempo extra utilizadas en el mes(t)	horas
PO_t	Producción en tiempo extra en el mes(t)	miles de unidades
i_t	Inventario al final del mes(t)	miles de unidades
PA_t	Unidades subcontratadas con el proveedor A en el mes(t)	miles de unidades
PB_t	Unidades subcontratadas con el proveedor B en el mes(t)	miles de unidades
PC_t	Unidades subcontratadas con el proveedor C en el mes(t)	miles de unidades

Parámetro	Descripción	Valor
D_t	Demanda en el mes(t)	Ver tabla de demanda mensual
I_0	Inventario inicial	60 miles de unidades
W_0	Número inicial de trabajadores	1,200 trabajadores
d	Días laborables por mes	23 días
h	Horas laborables por día	8 horas
p	Tiempo de producción por unidad	8 minutos (0.133 horas)
s_n	Salario por hora en tiempo normal	\$25 por hora
s_e	Salario por hora en tiempo extra (50% adicional)	\$37.5 por hora
c_m	Costo de materiales por unidad	\$24 por unidad
c_i	Costo de mantener inventario	\$3 por unidad por mes
c_a	Costo unitario del proveedor A	\$39 por unidad
c_b	Costo unitario del proveedor B	\$37.5 por unidad
c_c	Costo unitario del proveedor C	\$38 por unidad
Cap_a	Capacidad máxima del proveedor A	150 miles de unidades por mes
Cap_b	Capacidad máxima del proveedor B	150 miles de unidades por mes
Cap_c	Capacidad máxima del proveedor C	90 miles de unidades por mes
O_{max}	Máximo de horas extra por trabajador por mes	18 horas

La función objetivo del modelo de programación lineal es

$$\begin{aligned} MIN Z = \sum t = 112[& (sn \cdot d \cdot h \cdot Wt) + (cm \cdot Pt) + (se \cdot Ot) + (ci \cdot It) + (cA \cdot PAt) \\ & + (cB \cdot PBt) + (cC \cdot PCt)] \end{aligned}$$

Se busca minimizar el costo total, que está compuesto por:

1. Costo de producción en tiempo normal (mano de obra y materiales)
2. Costo de producción en tiempo extra
3. Costo de mantener inventario
4. Costo de subcontratación con los tres proveedores

El modelo se encuentra sujeto a las siguientes restricciones:

1.- Producción en tiempo extra:

$$POt = \frac{Ot}{1000p}$$

La producción en tiempo extra se calcula en función de las horas extra trabajadas y la tasa de producción.

2.- Balance de inventario:

$$It = It - 1 + Pt + POt + PAt + PBt + PCt - Dt$$

El inventario al final de cada mes es igual al inventario del mes anterior, más la producción (normal y extra) y las compras a proveedores, menos la demanda.

3.- Capacidad de producción en tiempo normal:

$$Pt \leq \frac{W_t dh}{1000p}$$

La producción en tiempo normal está limitada por el número de trabajadores disponibles.

4.- Limitación de horas extra:

$$Ot \leq Omax \cdot Wt$$

Las horas extra están limitadas por trabajador.

5.- Capacidad de los proveedores:

$$PA_t \leq Cap_a$$

$$PB_t \leq Cap_b$$

$$PC_t \leq Cap_c$$

Las compras a cada proveedor están limitadas por su capacidad.

6.- Balance de fuerza laboral:

$$W_t = W_{t-1} + H_t - L_t$$

El número de trabajadores en cada mes es igual al número de trabajadores del mes anterior, más las contrataciones, menos los despidos.

7.- Inventario y fuerza laboral inicial y final:

$$W_{12} = W_0$$

$$I_{12} = I_0$$

8.- No negatividad:

$$W_t, H_t, L_t, P_t, O_t, PO_t, I_t, PA_t, PB_t, PC_t \geq 0 \quad \forall t = 1..12$$

Solución óptima:

Para obtener el plan de trabajo óptimo, y con ayuda de la inteligencia artificial, codificamos en lenguaje Shiny el modelo de programación lineal, el cual está descrito en el siguiente enlace de Github:

<https://github.com/bbto777/codigo-shiny-PAP.git>

Después de ejecutar el programa, obtuvimos la siguiente tabla:

Resultados del Modelo										
Costo Total: \$ 33,318,068.00										
Search: <input type="text"/>										
Mes	Trabajadores	Prod. Normal	Horas Extra	Prod. Extra	Prov. A	Prov. B	Prov. C	Inventario	Demanda	Prod. Total
1	449	620.00	0.00	0.00	150.00	150.00	90.00	0.00	950	1,010.00
2	478	660.00	0.00	0.00	150.00	150.00	90.00	0.00	1050	1,050.00
3	587	810.00	0.00	0.00	150.00	150.00	90.00	0.00	1200	1,200.00
4	659	910.00	0.00	0.00	150.00	150.00	90.00	0.00	1300	1,300.00
5	768	1,060.00	0.00	0.00	150.00	150.00	90.00	0.00	1450	1,450.00
6	877	1,210.00	0.00	0.00	150.00	150.00	90.00	0.00	1600	1,600.00
7	804	1,110.00	0.00	0.00	150.00	150.00	90.00	0.00	1500	1,500.00
8	514	710.00	0.00	0.00	150.00	150.00	90.00	0.00	1100	1,100.00
9	406	560.00	0.00	0.00	150.00	150.00	90.00	0.00	950	950.00
10	370	510.00	0.00	0.00	150.00	150.00	90.00	0.00	900	900.00
11	39	54.00	0.00	0.00	150.00	150.00	90.00	756.00	1200	444.00
12	1200	1,656.00	0.00	0.00	150.00	150.00	90.00	60.00	1350	2,046.00
Total		9,870.00	0.00	0.00	1,800.00	1,800.00	1,080.00		14550	14,550.00

Imagen 1: Tabla del plan de trabajo óptimo

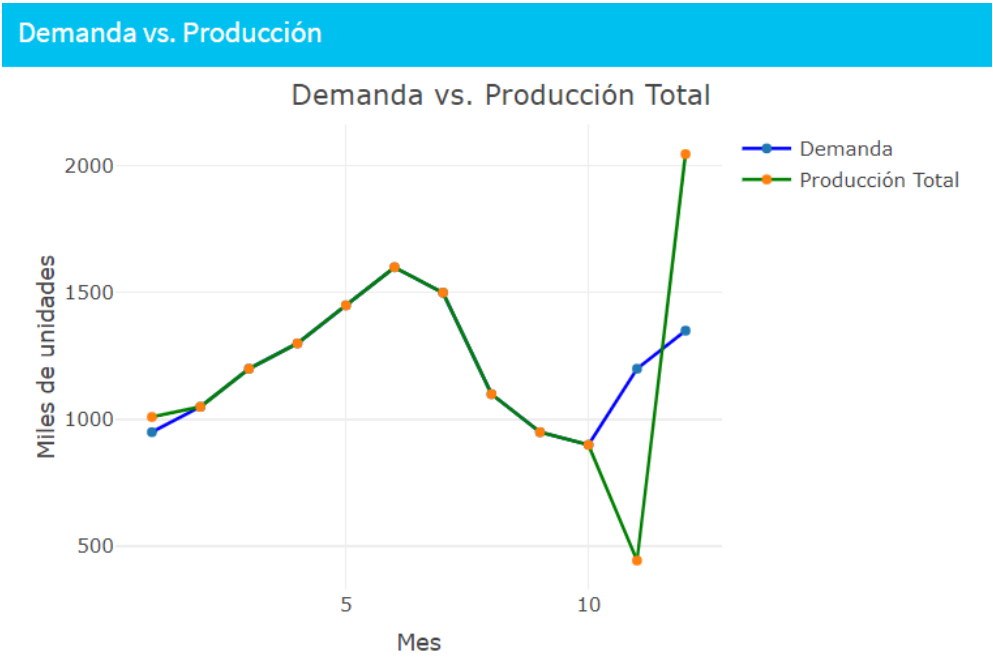


Imagen 2: Gráfica del comportamiento de la demanda y la producción total

Distribución de la Producción

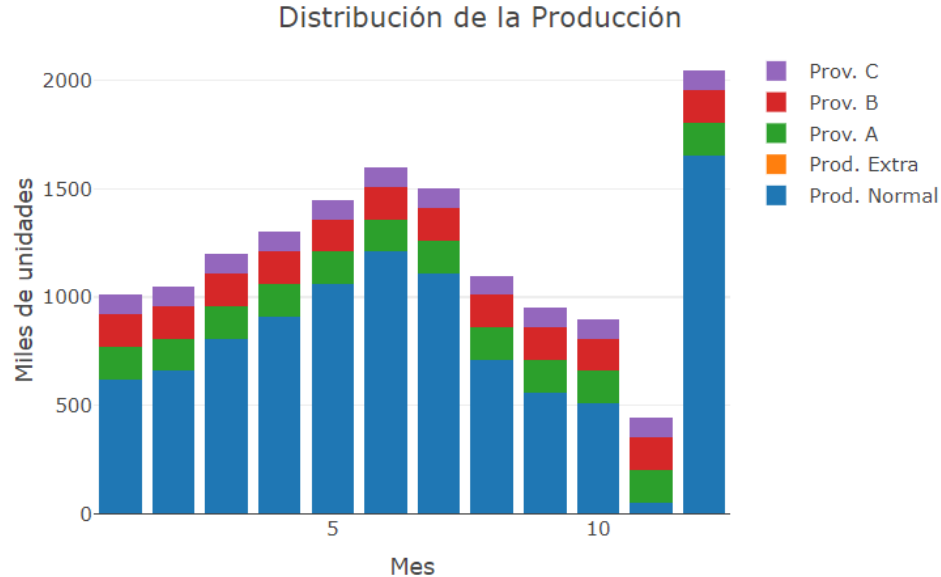


Imagen 3: Gráfica de la distribución de la producción y los 3 proveedores externos.

Interpretación de los resultados:

Costo Total Óptimo: \$33,318,068.00

La solución óptima indica que la empresa debe utilizar una estrategia mixta de producción que combina capacidad interna variable y proveedores externos para satisfacer la demanda de manera costo-efectiva.

Análisis por Componentes

1. Estrategia de Fuerza Laboral

- Fluctuación significativa: De 39 trabajadores (mes 11) a 1,200 trabajadores (mes 12)
- Patrón estacional: La fuerza laboral se ajusta directamente a los niveles de demanda
- Estrategia de persecución: El modelo prefiere ajustar la plantilla antes que mantener inventarios

Meses críticos:

- Mes 11: Mínimo de trabajadores (39) - Período de baja demanda
- Meses 5-6: Mayor fuerza laboral (768-877) - Picos de demanda

2. Distribución de la Producción

Producción Interna (Total: 9,870 miles de unidades - 67.8%)

- Solo tiempo normal: No se utiliza tiempo extra en ningún período
- Variabilidad alta: De 54 mil unidades (mes 11) a 1,210 mil unidades (mes 6)
- Eficiencia: El modelo prefiere ajustar trabajadores antes que pagar prima por tiempo extra

Proveedores Externos (Total: 4,680 miles de unidades - 32.2%)

- Utilización constante: Todos los proveedores se usan al máximo en todos los períodos
- Proveedor A: 1,800 mil unidades (150×12 meses)
- Proveedor B: 1,800 mil unidades (150×12 meses)
- Proveedor C: 1,080 mil unidades (90×12 meses)

3. Gestión de Inventario

Estrategia Just-in-Time modificada:

- Inventario cero en 10 de 12 meses
- Excepciones:
 - Mes 11: 756 mil unidades (preparación para pico de diciembre)
 - Mes 12: 60 mil unidades (inventario final requerido)

4. Análisis de Capacidad y Demanda

Satisfacción de demanda:

- Demanda total: 14,550 mil unidades
- Producción total: 14,550 mil unidades
- Cumplimiento: 100% sin faltantes

Períodos de alta demanda (meses 4-7):

- Requieren máxima utilización de capacidad interna y externa
- Representan el 36.4% de la demanda anual

Insights Estratégicos

Fortalezas de la Solución

1. Optimización de costos: Uso eficiente de recursos más económicos

2. Flexibilidad: Capacidad de respuesta a variaciones estacionales
3. Diversificación: Reducción de riesgo mediante múltiples fuentes de suministro

Consideraciones Operativas

Desafíos de implementación:

- Gestión de personal: Contrataciones/despidos frecuentes pueden afectar la moral
- Calidad: Dependencia alta de proveedores externos (32.2%)
- Riesgo de suministro: Todos los proveedores al máximo de capacidad

Oportunidades de mejora:

- Evaluar costos de contratación/despidos no considerados
- Analizar impacto en calidad y servicio al cliente
- Considerar contratos a largo plazo con proveedores

Conclusiones:

El modelo de planeación agregada que se desarrolló es una herramienta útil y bien estructurada que considera varios aspectos importantes como el número de trabajadores, la producción interna, el uso de horas extra, la contratación de proveedores externos y el manejo de inventarios. Gracias a este modelo, fue posible encontrar una forma eficiente de operar, logrando un ahorro de \$33.3 millones al año. Esto se consiguió al producir el 67.8% con personal interno (ajustando la cantidad de trabajadores según el mes) y subcontratar el 32.2% restante, sin recurrir a horas extra debido a su alto costo, y manteniendo inventarios bajos.

Aunque el modelo sugiere cambios muy grandes en el personal mes a mes (de 39 hasta 1,200 trabajadores), lo cual sería poco realista en la vida real, estos resultados muestran que el modelo da prioridad a las opciones más económicas. Esto indica que valdría la pena incluir límites más prácticos sobre cuántos trabajadores se pueden contratar o despedir en poco tiempo, para que el modelo se parezca más a la realidad.

Usar modelos como este es muy conveniente porque ayudan a tomar decisiones complicadas de forma ordenada y basada en datos. Permiten aprovechar mejor los recursos disponibles, enfrentar cambios en la demanda a lo largo del año, entender cómo se relacionan las distintas decisiones operativas, y tomar

decisiones importantes con información confiable. También ayudan a reducir desperdicios, mejorar el servicio al cliente, controlar los costos y aumentar la competitividad de la empresa.

Bibliografía:

Rezaei, M., Tavakkoli-Moghaddam, R., & Makui, A. (2019). Cooperative aggregate production planning: A game theory approach. *Iranian Journal of Operations Research*, 10(2), 45–62. <https://doi.org/10.1007/s40092-019-0303-0>

Zandieh, M., Fattahi, P., & Mahdavi, I. (2018). A robust optimization model for aggregate production planning with postponement policy. *Scientia Iranica*, 25(2), 1015–1028. https://aie.ut.ac.ir/article_65124.html

Aziez, F., & Noureelfath, M. (2014). Optimal control approaches to the aggregate production planning problem. *Sustainability*, 7(12), 16324–16345. <https://doi.org/10.3390/su71215863>

Sadeghi, N., Fischbach, A., & Riedel, R. (2022). PlanningVis: A visual analytics approach to production planning in smart factories. *arXiv preprint*. <https://arxiv.org/abs/1907.12201>

Dogan, I., & Goekcen, H. (2003). Aggregate production planning using genetic algorithms and tabu search. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*, 217(5), 699–705. <https://doi.org/10.1243/095440503322011499>

Sharma, S., & Sharma, M. (2022). From aggregate production planning to aggregate energy industrial consumption plans. *Energies*, 15(24), 6388. <https://doi.org/10.3390/en15246388>

Dubey, R., & Gunasekaran, A. (2022). Aggregate production planning and scheduling in the Industry 4.0 environment. *Procedia Computer Science*, 200, 1200–1207. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2022.01.266>

Nguyen, T. V., & Werner, F. (2023). A review on aggregate production planning under uncertainty: Insights from a fuzzy programming perspective. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 123, 107620. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2023.107620>

Juárez, J., García, M., & González, R. (2017). Modelo matemático para la planeación de la producción en una industria metalmecánica. *Revista Iberoamericana de Ingeniería Industrial*, 10(1), 45–60. <https://www.redalyc.org/journal/849/84961239004/html/>

Alvarado-Ramírez, J. A., & Méndez-Durón, R. (2024). Improving aggregate production planning considering maximum inventory area and service level with demand uncertainty: A nearshoring context in Mexican companies. *Journal of Industrial and Production Engineering*.

<https://doi.org/10.1080/21681015.2024.2332632>

Chopra, S., & Meindl, P. (2019). *Administración de la cadena de suministro: Estrategia, planeación y operación* (7.^a ed.). Pearson Educación.