Лекции для ФПМИ (ФУПМ)
ПРОСТРАНСТВА L_p ЛЕБЕГА

Бесов О.В.

8 июня 2023 г.

Будем пользоваться обозначениями и некоторыми сведениями из [1] и [2]. Нумерация параграфов является продолжением нумерации из [1]. Измеримые множества, измеримые функции, интегрируемые функции и интегралы понимаются в смысле Лебега.

§25.2a. Неравенства Гёльдера и Минковского

Наиболее важными среди пространств $L_p,\ 1 \le p < \infty$, являются пространства $L_1 = L$ и L_2. Неравенство треугольника для норм в пространстве L_1 следует из неравенства треугольника для чисел. Пространство L_2 является евклидовым, и вывод неравенства треугольника для евклидова пространства приведен в § 25.3. Здесь этот вывод (опирающийся не на неравенство Гёльдера, а на оценку скалярного произведения произведением норм) будет приведен в конкретном случае пространства L_2.

Пусть $1 \le p < \infty$ и измеримое множество $E \subset \mathbb{R}^n$. Для измеримой функции $f : E \to \mathbb{R}^n$ положим

$$\|f\|_p = \|f\|_{p,E} = (\int_E |f(x)|^p dx)^{1/p}.$$

Лемма 1. *Пусть* $1 < p < \infty,\ 1 < p' < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Тогда для любых* $a, b \ge 0$ *справедливо неравенство*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}. \tag{1}$$

Доказательство. Рассмотрим на плоскости кривую $y = x^{p-1}$ при $x \ge 0$. Пусть S_1 — площадь фигуры, ограниченной этой кривой, осью Ox и прямой $x = a$, а S_2 — площадь фигуры, ограниченной той же кривой, осью Oy и прямой $y = b$. Тогда, очевидно,

$$ab \le S_1 + S_2 = \int_0^a x^{p-1} dx + \int_0^b y^{p'-1} dy = \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Теорема 1 (неравенство Гёльдера). *Пусть* $1 < p < \infty$, *измеримое множество* $E \subset \mathbb{R}^n$, *функции* $f, g : E \to \mathbb{R}$ *измеримы. Пусть* $\|f\|_{p,E}, \|g\|_{p',E} < \infty$. *Тогда*

$$\int_E |f(x)g(x)| dx \le (\int_E |f(x)|^p dx)^{1/p} (\int_E |g(x)|^{p'} dx)^{1/p'} = \|f\|_{p,E} \|g\|_{p',E}.$$

Доказательство. Пусть $\|f\|_p > 0,\ \|g\|_{p'} > 0$. В силу неравенства (1)

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'}} \le \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}}.$$

Правая часть этого неравенства интегрируема, причём её интеграл равен 1. Поэтому левая часть также интегрируема, и её интеграл не превосходит 1, что равносильно утверждению теоремы.

Теорема 2 (неравенство Минковского)**.** *Пусть* $1 \le p < \infty$, *измеримое множество* $E \subset \mathbb{R}^n$, *функции* $f, g : E \to \mathbb{R}$ *измеримы,* $\|f\|_{p,E} < \infty, \|g\|_{p,E} < \infty$. *Тогда*

$$\|f+g\|_{p,E} \le \|f\|_{p,E} + \|g\|_{p,E}.$$

Доказательство. При $p = 1$ неравенство следует из свойств интеграла Лебега. При $p = 2$

$$\|f+g\|_{2,E}^2 = \int_E [f(x)+g(x)]^2 dx = \int_E [f(x)]^2 dx + 2\int_E f(x)g(x)dx + \int_E [g(x)]^2 dx \le$$

$$\le \|f\|_{2,E}^2 + 2\|f\|_{2,E}\|g\|_{2,E} + \|g\|_{2,E}^2 = (\|f\|_{2,E} + \|g\|_{2,E})^2.$$

Пусть $p > 1,\ 1/p + 1/p' = 1$. Поскольку

$$|f(x)+g(x)|^p \le 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \le 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p),$$

то существует интеграл $\int_E |f(x)+g(x)|^p dx$. Можно считать, что $\int_E |f(x)+g(x)|^p dx > 0$. Оценим этот интеграл, воспользовавшись неравенством

$$|f(x)+g(x)|^p \le |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)| + |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|.$$

К интегралам от каждого слагаемого правой части неравенства применим неравенство Гёльдера с показателями p', p. Поскольку $(p-1)p' = p(1-1/p)p' = p$, получим

$$\int_E |f(x)+g(x)|^p dx \le (\int_E |f(x)+g(x)|^p dx)^{1/p'}(\|f\|_p + \|g\|_p).$$

Остаётся поделить обе части последнего неравенства на $\int_E |f(x)+g(x)|^p dx)^{1/p'}$.

§25.2b. Пространства $L_p(E)$

Через $L_p(E),\ E \subset \mathbb{R}^n$ обозначим множество функций

$$\{f : E \to \mathbb{R},\ \|f\|_{p,E} < \infty\}.$$

$L_p(E)$ — линейное полунормированное пространство, нулевым элементом которого является $f = 0$. Полунорма $\|f\|_{p,E}$ не является нормой, т.к. из равенства $\|f\|_{p,E} = 0$ следует лишь, что $f(x) = 0$ почти всюду на E, но не обязательно всюду на E.

Функции $f, g \in L_p(E)$ называются эквивалентными, если $\|f-g\|_{p,E} = 0$, что равносильно условию $\mu\{x : f(x) \ne g(x)\} = 0$. Линейное пространство $L_p(E)$ разобьём на классы $\widetilde{f}$ эквивалентных между собой функций. Совокупность всех таких классов обозначим через $\widetilde{L}_p(E)$. Она превращается в линейное пространство после введения следующим образом операций сложения и умножения на действительное число.

Пусть $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ — два элемента из $\widetilde{L}_p(E)$, и пусть $f\ (\in \widetilde{f}),\ \widetilde{g}\ (\in \widetilde{g})$ — два каких-либо их представителя. Суммой $\widetilde{f} + \widetilde{g}$ назовём тот класс, который содержит $f + g$, а произведением $\lambda\widetilde{f}$ тот класс, который содержит $\lambda f\ (\lambda \in \mathbb{R})$.

Легко проверить независимость суммы и произведения от выбора таких представителей. Нулём этого линейного пространства является класс функций, эквивалентных тождественно нулевой (иначе: класс таких функций f, которые равны нулю почти всюду, или, что то же самое, $\|f\|_{p,E} = 0$).

Линейное пространство $\widetilde{L}_p(E)$ называется фактор-пространством пространства $L_p(E)$ по пространству функций почти всюду равных нулю.

Для $\widetilde{f} \in \widetilde{L}_p(E)$ введём норму

$$\|\widetilde{f}\|_{p,E} := \|f\|_{p,E} = (\int_E |f|^p dx)^{1/p},$$

где f — произвольная функция из класса $\widetilde{f}$.

Часто пространством $L_p(E)$ называют нормированное пространство функций, в котором отождествлены (т.е. не различаются) функции, совпадающие почти всюду на E.

В обозначении $L_1(E)$ индекс 1 часто опускают.

Лемма 2. *Пусть* $1 \le p_1 < p_2 < \infty,\ \mu(E) < +\infty$. *Тогда* $L_{p_2}(E) \subset L_{p_1}(E)$.

Доказательство. Применив неравенство Гёльдера к произведению функций, где первая из них равна 1, получим

$$\|f\|_{p_1}^{p_1} = \int_E 1|f(x)|^{p_1} dx \le (\mu E)^{1-\frac{p_1}{p_2}} (\int_E |f(x)|^{p_2} dx)^{\frac{p_1}{p_2}}.$$

§ 25.2с. Полнота пространств $L_p(E)$

Теорема 3. *Пространство* $L_1(E)$ *полное.*

Доказательство. Пусть $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность в $L_1(E)$. Выберем возрастающую последовательность натуральных чисел $\{k_j\}$ такую, что

$$\|f_k - f_{k_j}\|_1 < \frac{1}{2^j} \text{ при } k \ge k_j.$$

Рассмотрим последовательность функций $\{\varphi_N(x)\}_1^{\infty}$. где

$$\varphi_N(x) = |f_{k_1}(x)| + \sum_{j=1}^{N} |f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)|.$$

Она не убывает, и интегралы от φ_N ограничены в совокупности:

$$\int_E \varphi_N(x) dx \le \int_E |f_{k_1}(x)| dx + \sum_{j=1}^{N} \int_E |f_{k_{j+1}} - f_{k_j(x)}| dx \le \int_E |f_{k_1}(x)| dx + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j} \le \int_E |f_{k_1}(x)| dx + 1.$$

По теореме Б. Леви почти всюду на E существует конечный предел $\varphi(x) = \lim_{N\to\infty} \varphi_N$, и функция φ интегрируема на E. Таким образом, ряд

$$f_{k_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x))$$

почти для всех $x \in E$ сходится к некоторой функции $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x)$, измеримой в силу теоремы 29.3.3. Функция f интегрируема на E, поскольку $|f(x)| \le \varphi(x)$ п.в. на E. Кроме того при $k \ge k_j$

$$\int_E |f(x) - f_k(x)|dx \le \int_E |f(x) - f_{k_j}(x)|dx + \int_E |f_{k_j}(x) - f_k(x)|dx < \frac{1}{2^{j-1}} + \frac{1}{2^j} = \frac{3}{2^j}.$$

Следовательно, $\int_E |f(x) - f_k(x)|dx \to 0$ при $k \to \infty$.

Теорема 4. *При* $1 < p < \infty$ *пространство* $L_p(E)$ *полное.*

Доказательство. Положим $E_m = \{x : x \in E,\ |x| < m\}$, так что $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность в $L_p(E)$. Тогда для любого m она фундаментальна в $L_p(E_m)$ и в силу леммы 2 фундаментальна в $L_1(E_m)$. По доказанному в теореме 3 существует подпоследовательность $\{f_{k_j^1}\}_{j=1}^{\infty}$, сходящаяся почти всюду на E_1. С помощью т.н. диагонального процесса построим подпоследовательность, сходящуюся почти всюду на E. А именно, из найденной подпоследовательности выделим новую подпоследовательность $\{f_{k_j^2}\}_{j=1}^{\infty}$, сходящуюся почти всюду на E_2. Из неё выделим подпоследовательность $\{f_{k_j^3}\}_{j=1}^{\infty}$, сходящуюся почти всюду на E_3. Продолжая процесс, получим при каждом $m \in \mathbb{N}$ последовательность $\{f_{k_j^m}\}_{j=1}^{\infty}$, сходящуюся почти всюду на E_m. Тогда последовательность $\{f_{k_j^j}\}_{j=1}^{\infty}$ сходится почти всюду на каждом E_m, следовательно, и на E.

Пусть $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_{k_j^j}(x)$ для тех x, для которых этот предел существует, и $f(x) = 0$ для остальных $x \in E$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $J \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\int_E |f_{k_j^j}(x) - f_s(x)|^p dx < \varepsilon \quad \forall j \ge J,\ \forall s \ge J.$$

Переходя к пределу при $j \to \infty$, получаем в силу теоремы Фату, что

$$\int_E |f(x) - f_s(x)|^p dx \le \varepsilon \quad \forall s \ge J,$$

что и требовалось доказать.

§ 25.2d. Плотные множества в пространстве $L_p(E)$

Теорема 5. *Пусть* $1 \le p < \infty$, *измеримое множество* $E \subset \mathbb{R}^n$. *Тогда множество непрерывных финитных функций плотно в* $L_p(E)$.

Доказательство. Требуется доказать, что для любой функции $f \in L_p(E)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся непрерывная финитная функция $h :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что $\|f - h\|_p < \varepsilon$. Продолжив функции пространства $L_p(E)$ нулём на $\mathbb{R}^n \setminus E$, сводим доказательство к случаю $E = \mathbb{R}^n$, Очевидно, что теорему достаточно доказать для неотрицательных функций f.

Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $N \in \mathbb{N}$, $f \ge 0$ и $f_{[N]}$ — срезка функции f:

$$f_{[N]}(x) = f(x) \text{ при } f(x) \le N,\ f_{[N]}(x) = N \text{ при } f(x) > N.$$

Поскольку по теореме Б. Леви $\|f - f_{[N]}\|_p \to 0$ при $N \to \infty$, функцию f можно с любой точностью приблизить в норме $L_p(\mathbb{R}^n)$ ограниченной функцией из $L_p(\mathbb{R}^n)$.

По той же теореме Б. Леви (или в силу определения интеграла по множеству бесконечной меры) всякую функцию $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ можно с любой точностью приблизить в норме

$L_p(\mathbb{R}^n)$ (измеримой) финитной ограниченной функцией $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ вида $g(x) = f(x)$ при $|x| \leq M$, $g(x) = 0$ при $|x| > M$. Каждую функцию g указанного вида можно с любой точностью приблизить в норме пространства $C(\{x : x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq M\})$, а значит, и в норме $L_p(\mathbb{R}^n)$ конечнозначной измеримой функцией $\sum_{j=1}^{J} c_j \chi_{E_j}$, $J < \infty$, где χ_{E_j} характеристическая функция (индикатор) ограниченного измеримого множества E_j.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует блочное множество A_ε такое, что $\mu(E_j \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$. Следовательно, χ_{E_j} можно с любой точностью приблизить в L_p функцией χ_A, где $A = \bigcup_{k=1}^{K} P_k$ — блочное множество, составленное из блоков P_k. Тем самым вопрос сведен к приближению с заданной точностью в $L_p(\mathbb{R}^n)$ функции χ_P непрерывной финитной функцией.

Пусть $\Pi_{i=1}^{n}(a_i, b_i) \subset P \subset \Pi_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ и $\delta > 0$ достаточно мало. Пусть функция h_i непрерывна на $\mathbb{R}$, равна нулю вне интервала (a_i, b_i), равна 1 на отрезке $[a_i + \delta, b_i - \delta]$ и линейна на $[a_i, a_i + \delta]$ и на $[b_i - \delta, b_i]$. Очевидно, что при подходящем выборе $\delta > 0$ функция $h(x) := \prod_{i=1}^{n} h_i(x_i)$ приближает в норме L_p функцию χ_P с заданной точностью. Отсюда следует утверждение теоремы.

Следствие 1. *В пространстве $L_p([a, b])$, $1 \leq p < \infty$ плотными являются множество многочленов, а также множество многочленов с рациональными коэффициентами.*

Доказательство. Достаточно заметить, что по теореме Вейерштрасса для всякой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции существует последовательность многочленов, сходящаяся к ней равномерно, а следовательно, и в $L_p([a, b])$.

§ 25.2e. Непрерывность в L_p функций из $L_p(\mathbb{R}^n)$

Теорема 6. *Пусть $1 \leq p < \infty$ и функция $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$\lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x + h) - f(x)|^p dx \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Это свойство функций из L_p называется непрерывностью в L_p, а в случае $p = 1$ ещё и непрерывностью в среднем.

Доказательство. Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$. Тогда существует финитная непрерывная функция φ такая, что $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - \varphi(x)|^p dx$ такая, что $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - \varphi(x)|^p < \varepsilon^p$. Тогда

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x + h) - f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x + h) - \varphi(x + h)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x + h) - \varphi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x) - f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \varepsilon + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x + h) - \varphi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \varepsilon.$$

Среднее слагаемое правой части меньше ε при достаточно малом $|h|$ в силу равномерной непрерывности функции φ, откуда и следует утверждение теоремы.

Список литературы

[1] Бесов О.В., *Лекции по математическому анализу.* М., ФИЗМАТЛИТ, 2020.

[2] Бесов О.В., *Мера и интеграл Лебега.* Учебное пособие, МФТИ, сайт кафедры высшей математики

[3] Дьяченко М.И., Ульянов П.Л., *Мера и интеграл.* М., Факториал 1998.