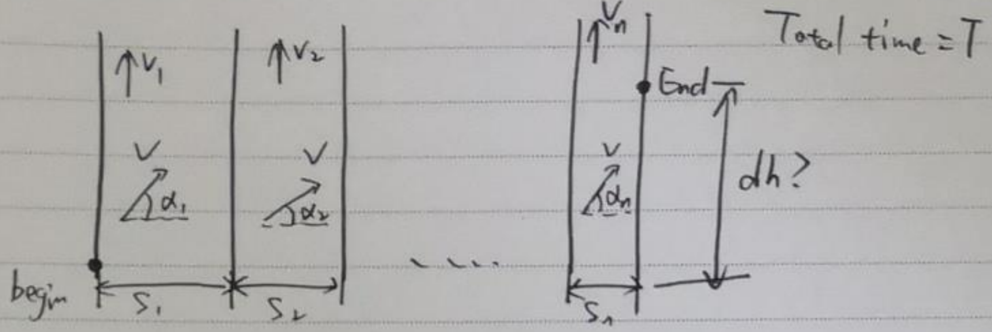

其中 V_i 为河流流速，V为人游泳速度，假设大小都固定。游泳方向 α_i 角度在经过每段河流时会变化。S_i 为每段河流的横向距离，人从起点(begin)到终点(End)的总时间为T。

已知
$$\begin{cases} V_i, & i=1,2,\dots n \\ S_i, & i=1,2,\dots n \\ V & \\ T & \end{cases}$$

求问：如何协调 α_i $(i=1,2,\dots n)$ 使得 dh 最大。

解：由题意，即求

$$\max_{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n}(V\sin\alpha_i+V_i)\cdot t_i\right)$$

$$=\max_{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n}(V\sin\alpha_i+V_i)\cdot\frac{S_i}{V\cos\alpha_i}\right)=\max_{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(S_i\tan\alpha_i+\frac{V_iS_i}{V\cos\alpha_i}\right)\right)$$

因此有：
$$\max_{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\left(S_i\tan\alpha_i+\frac{V_iS_i}{V\cos\alpha_i}\right)$$

$$\text{s.t.}\quad T=\sum_{i=1}^{n}t_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{S_i}{V\cos\alpha_i}\qquad i=1,2,\dots n$$

$$0\le\alpha_i\le\frac{\pi}{2}\qquad i=1,2,\dots n$$

转化为形式化的不等式优化问题：

$$\min_{\alpha} \ -\sum_{i=1}^{n}\left(s_i\tan\alpha_i+\frac{v_i s_i}{V\cos\alpha_i}\right)$$

$$\text{s.t.}\quad T-\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{V\cos\alpha_i}=0 \qquad i=1,2,\sim n$$

$$\alpha_i-\frac{\pi}{2}\le 0 \qquad i=1,2,\sim n$$

$$-\alpha_i\le 0 \qquad i=1,2,\sim n$$

列出Lagrangian 得到无约束优化问题

$$L(\alpha,\beta,\lambda,\gamma)=-\sum_{i=1}^{n}\left(s_i\tan\alpha_i+\frac{v_i s_i}{V\cos\alpha_i}\right)+\beta\left(T-\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{V\cos\alpha_i}\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\alpha_i-\frac{\pi}{2}\right)+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(-\alpha_i)$$

通过之前的分析，便得知加上不等式约束后，可行解α需要满足的就是以下KKT条件：

$$\nabla_\alpha L(\alpha,\beta,\lambda,\gamma)=0 \qquad (1)$$

$$\lambda_i\left(\alpha_i-\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad i=1,2,\sim n \qquad (2)$$

$$\gamma_i\alpha_i=0,\quad i=1,2,\sim n \qquad (3)$$

$$T-\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{V\cos\alpha_i}=0,\quad i=1,2,\sim n \qquad (4)$$

$$\alpha_i-\frac{\pi}{2}\le 0,\quad i=1,2,\sim n \qquad (5)$$

$$-\alpha_i\le 0,\quad i=1,2,\sim n \qquad (6)$$

$$\lambda_i\ge 0,\quad i=1,2,\sim n \qquad (7)$$

$$\gamma_i\ge 0,\quad i=1,2,\sim n \qquad (8)$$

满足KKT条件后极小化Lagrangian即可得到在不等式约束条件下的可行解。其中

(1)：拉格朗日取得可行解的必要条件

(2)~(3)：松弛互补条件

(4)~(6)：初始的约束条件

(7)~(8)：不等式约束的Lagrange Multiplier需满足的条件