BROUILLON - COURBES POLYNOMIALES SIMILAIRES
MANQUE DES DESSINS !

CHRISTOPHE BAL

Table des matières

Date: 2 Octobre 2020.

1. Où allons-nous ?

Il est connu ques les courbes des fonctions affines sont toutes des droites, et celles représentant des trinômes du 2[e] degré sont toutes des paraboles. Quand on présente ce résultat au lycée, on n'a pas défini exactement ce qu'est une parabole [1]. On explique que l 'on peut passer de la représentation de la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$ à celle du trinôme $g : x \mapsto a\,x^2 + b\,x + c$ via une translation, une dilatation verticales et/ou une dilatation horizontale. Ceci nous amènes aux deux questions suivantes.

(1) Peut-on passer de la courbe de $f : x \mapsto x^3$ à celle du polynôme $g : x \mapsto a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ où $a \neq 0$ via une translation, une dilation verticales et/ou une dilatation horizontale.
(2) Que se passe-t-il pour les courbes des fonctions $f : x \mapsto x^k$ pour $k \geq 4$?

2. Cas des polynômes de degré 3

Soit $\mathscr{C}_g$ la courbe de la fonction $g : x \mapsto a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ où $a \neq 0$. Nous allons démontrer que $\mathscr{C}_g$ s'obtient à partir de l'une des courbes suivantes en utilisant une translation horizontale, une translation verticale, une dilatation verticale et/ou une dilatation horizontale.

(1) Γ_1 représente $f_1 : x \mapsto x^3$.
(2) Γ_2 représente $f_2 : x \mapsto x^3 - 3x$.
(3) Γ_3 représente $f_3 : x \mapsto x^3 + 3x$.

Démonstration. Distinguons trois cas en notant que l'on peut supposer que $a = 1$.

(1) **$g'(x)$ a une unique racine réelle.**
Nous avons ici $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g'(x) = 3(x-\alpha)^2$ et donc $g(x) = (x-\alpha)^3 + k$. Il est immédiat que l'on peut passer de Γ_1 à $\mathscr{C}_g$ à l'aide des transformations autorisées.

(2) **$g'(x)$ a deux racines réelles.**
Nous avons ici $\alpha \neq \beta$ deux réels tels que $g'(x) = 3(x-\alpha)(x-\beta)$. Les faits suivants montrent que l'on peut passer de $\mathscr{C}_g$ à Γ_2, et donc aussi de Γ_2 à $\mathscr{C}_g$, à l'aide des transformations autorisées.
   (a) En posant $\delta = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $g'(x+\delta) = 3\left(x + \dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)\left(x + \dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$. Ceci nous fournit $g'(x+\delta) = 3(x-\lambda)(x+\lambda)$ avec $\lambda \neq 0$ puis ensuite $g'(\lambda\,x+\delta) = \lambda^2 f_2'(x)$.
   (b) En résumé, $f_2'(x) = \dfrac{1}{\lambda^2} g'(\lambda\,x+\delta)$ puis par intégration $f_2(x) = \dfrac{1}{\lambda^3} g(\lambda\,x+\delta) + k$.

(3) **$g'(x)$ n'a pas de racine réelle.**
La forme canonique de $g'(x)$ est ici $g'(x) = 3(x-p)^2 + m$ où les réels p et m sont tels que $m > 0$. Les faits suivants montrent que l'on peut passer de $\mathscr{C}_g$ à Γ_3, et donc aussi de Γ_3 à $\mathscr{C}_g$, à l'aide des transformations autorisées.
   (a) $g'(x+p) = 3x^2 + m$.
   (b) Notant $\mu = \sqrt{\frac{m}{3}}$, on a ensuite $g'(\mu x + p) = mx^2 + m$ soit $g'(\mu x + p) = \frac{m}{3} f_3'(x)$.
   (c) En résumé, $f_3'(x) = \frac{3}{m} g'(\mu x + p)$ puis par intégration $f_3(x) = \frac{3}{\mu m} g(\mu x + p) + k$.

□

Il est évident qu'il n'est pas possible de passer de Γ_i à Γ_j à l'aide des transformations autorisées. On peut donc parler de trois types de courbe pour les polynômes de degré 3 contre un seul pour les fonctions affines et un seul pour les trinômes du 2[e] degré.

1. La définition géométrique des grecques anciens restent la meilleure.

3. AFFAIRE À SUIVRE...