

# BROUILLON - RACINES RATIONNELLES D'UN POLYNÔME SYMÉTRIQUE DE DEGRÉ 4

CHRISTOPHE BAL

$P(X) = aX^4 + bX^3 + cX^2 + bX + a$ , un polynôme symétrique de degré 4, peut-il n'avoir que des racines entières ? Que des racines rationnelles ?

## 1. CONSTATATIONS GÉNÉRALES

On peut supposer que  $a = 1$ , i.e.  $P(X) = X^4 + bX^3 + cX^2 + bX + 1$ .

Dès lors si  $P(r) = 0$  alors  $r \neq 0$  et  $P\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ .

Ensuite, nous avons :

$P(X) = X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$  : caractérisation des polynômes symétriques de degré 4

$$P'(X) = 4X^3 P\left(\frac{1}{X}\right) - X^2 P'\left(\frac{1}{X}\right)$$

On en déduit que si  $r$  est une racine d'ordre au moins 2, il en est de même pour  $\frac{1}{r}$ .

## 2. UNIQUEMENT DES RACINES ENTIÈRES ?

Si  $P$  n'a que des racines entières, alors ces racines ne peuvent être que  $\pm 1$  qui sont les seuls entiers ayant un inverse entier. Ceci donne les uniques possibilités suivantes :

(1) Pour  $P(X) = (X + 1)^4$  comme  $X^4 \left(\frac{1}{X} + 1\right)^4 = (1 + X)^4$  on a :  $P(X) = X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$   
(on évite ainsi la tâche ingrate de développer ceci même si les logiciels de calcul formel, comme <https://www.wolframalpha.com>, le font sans sourciller). Le polynôme est ok.

(2)  $P(X) = (X - 1)^4$  est ok (comme ci-dessus et merci à l'exposant pair).

(3) Pour  $P(X) = (X - 1)^3(X + 1)$  comme  $X^4 \left(\frac{1}{X} - 1\right)^3 \left(\frac{1}{X} + 1\right) = (1 - X)^3(1 + X)$ , on a :  $P(X) = -X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$ . Le polynôme est rejeté.

En fait  $P(X) = (X - 1)^3(X + 1) = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$  est anti-symétrique. Un polynôme de degré 4 est anti-symétrique ssi  $P(X) = -X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$ .

(4)  $P(X) = (X + 1)^3(X - 1)$  est rejeté (comme ci-dessus).

(5)  $P(X) = (X + 1)^2(X - 1)^2$  est ok car il vérifie  $P(X) = X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$ .

## 3. UNIQUEMENT DES RACINES RATIONNELLES ?

Supposons que  $r \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$  soit une racine de  $P$ .

Le résultat sur la multiplicité supérieure ou égale à 2 nous donne que si  $r$  est de multiplicité au moins 2 alors  $\frac{1}{r} \neq r$  est aussi de multiplicité au moins 2. Ceci implique que  $r$  est de multiplicité 1 ou 2.

**$r$  est de multiplicité 1.** Si  $P$  admet une autre racine  $s \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$  avec  $s \neq r$  et  $s \neq \frac{1}{r}$  alors nécessairement  $P(X) = (X - r) \left(X - \frac{1}{r}\right) (X - s) \left(X - \frac{1}{s}\right)$ .

D'où

$$X^4 P\left(\frac{1}{X}\right) = X^4 \left(\frac{1}{X} - r\right) \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{1}{X} - s\right) \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{s}\right)$$

$$X^4 P\left(\frac{1}{X}\right) = (1 - rX) \left(1 - \frac{X}{r}\right) (1 - sX) \left(1 - \frac{X}{s}\right)$$

$$X^4 P\left(\frac{1}{X}\right) = r \left(\frac{1}{r} - X\right) \times \frac{1}{r} (r - X) \times s \left(\frac{1}{s} - X\right) \times \frac{1}{s} (s - X)$$

$$X^4 P\left(\frac{1}{X}\right) = P(X)$$

Ce polynôme est donc ok.

Il reste à étudier les cas suivants.

(1)  $P(X) = (X - r) \left(X - \frac{1}{r}\right) (X + 1)^2$  et  $P(X) = (X - r) \left(X - \frac{1}{r}\right) (X - 1)^2$  sont ok car il suffit de reprendre le calcul précédent avec  $s = \pm 1$ .

(2)  $P(X) = (X - r) \left(X - \frac{1}{r}\right) (X + 1)(X - 1)$  vérifie  $P(X) = -X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$  donc on a un polynôme anti-symétrique que l'on rejette.

**$r$  est de multiplicité 2.** Dans ce cas,  $P(X) = (X - r)^2 \left(X - \frac{1}{r}\right)^2$  nécessairement !

Il est immédiat que  $P(X) = X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$  donc ce polynôme est ok.

## 4. CALCUL FORMEL. BON OU MAUVAIS CHOIX ?

Par flemme, l'auteur avait d'abord raisonner avec un logiciel de calcul formel comme suit où des lettres différentes indiquent des racines différentes.

(1)  $P(X) = (X - r)^4 = X^4 - 4rX^3 + 6r^2X^2 - 4r^3X + r^4$  est symétrique ssi  $r^4 = 1$  et  $r^3 = r$ . Si  $r \in \mathbb{Q}$  alors nécessairement  $r = \pm 1$ . C'est alors ok via le développement de  $(X - r)^4$ .

(2)  $P(X) = (X - r)^3(X - s) = X^4 - (3r + s)X^3 + (3r^2 + 3rs)X^2 - (r^3 + 3r^2s)X + r^3s$  est symétrique ssi  $r^3s = 1$  et  $3r + s = r^3 + 3r^2s$ . On en déduit  $3r^4 + 1 = r^6 + 3r^2$  d'où  $T^3 - 3T^2 + 3T - 1 = 0$  i.e.  $(T - 1)^3 = 1$  en posant  $T = r^2$ . On en déduit que  $r = \pm 1$  mais dans ce cas  $s = r$  ! Donc on rejette.

(3)  $P(X) = (X - r)^2(X - s)^2 = X^4 - (2r + 2s)X^3 + (r^2 + 4rs + s^2)X^2 - (2r^2s + 2rs^2)X + r^2s^2$  est symétrique ssi  $r^2s^2 = 1$  et  $r + s = r^2s + rs^2$  soit  $rs = \pm 1$  et  $r + s = rs(r + s)$ .

(a)  $rs = 1$  donne  $r + s = r + s$  et surtout  $s = \frac{1}{r}$ . C'est alors ok via le développement de

$$(X - r)^2 \left( X - \frac{1}{r} \right)^2.$$

(b)  $rs = -1$  donne  $r + s = 0$  i.e.  $s = -r$  d'où  $r = \pm 1$ . C'est alors ok via le développement de  $(X - 1)^2(X + 1)^2$ .

(4)  $P(X) = (X - r)^2(X - s)(X - t) = X^4 - (s + t + 2r)X^3 + (st + r^2 + 2rs + 2rt)X^2 - (r^2s + r^2t + 2rst)X + r^2st$  est symétrique ssi  $r^2st = 1$  et  $s + t + 2r = r^2s + r^2t + 2rst$ .  
Que faire ?

A partir de là, on est bloqué avec trois inconnues et seulement deux équations ! De plus, pour ce qui précède, on n'a aucun recul sur ce que l'on fait. C'est moche !

## 5. ET LES POLYNÔMES ANTI-SYMÉTRIQUES ?

En fait la preuve nous donne pour  $P$  un polynôme anti-symétrique de coefficient dominant 1 (toujours possible) :

- (1)  $P$  n'a que des racines entières ssi  $P(X) = (X - 1)^3(X + 1)$  ou  $P(X) = (X - 1)(X + 1)^3$ .
- (2)  $P$  n'a que des racines rationnelles dont une au moins non entière ssi  $P(X) = (X - r) \left( X - \frac{1}{r} \right) (X - 1)(X + 1)$  où  $r \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$ .

## 6. À EXPLORER...

Comment généraliser à d'autres degrés ?

Mais surtout, blanquette de veau ou moussaka ?