

**BROUILLON - EN FINIR AVEC LA FORME CANONIQUE DU  
TRINÔME...  
MANQUE DES DESSINS !**

CHRISTOPHE BAL

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



---

## TABLE DES MATIÈRES

- |  |   |
|--|---|
| 1. Critère pour la non existence d’une racine réelle | 2 |
| 2. Quand au moins une racine réelle existe           | 3 |

## 1. CRITÈRE POUR LA NON EXISTENCE D'UNE RACINE RÉELLE

Soient  $f(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a \neq 0$  et  $\mathcal{C}_f$  la représentation graphique de  $f$  vue comme fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Graphiquement on constate vite que  $\mathcal{C}_f$  possède un axe de symétrie  $d : x = m$  où  $m$  se calcule comme suit où  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} f(\alpha) = f(\beta) &\iff a\alpha^2 + b\alpha + c = a\beta^2 + b\beta + c \\ &\iff a(\alpha^2 - \beta^2) + b(\alpha - \beta) = 0 \\ &\iff (\alpha - \beta)(a(\alpha + \beta) + b) = 0 \\ &\iff \frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

Notons  $m = -\frac{b}{2a}$ <sup>1</sup>. Il est aussi aisé de conjecturer que  $f(m)$  est un extremum de  $f$  vue comme fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Ceci rend naturel le calcul suivant qui reprend la factorisation précédente.

$$\begin{aligned} f(x) - f(m) &= (x - m)(ax + am + b) \\ &= (x - m)(ax - am) \quad \left\} m = -\frac{b}{2a} \iff 2am = -b \iff am + b = -am \right. \\ &= a(x - m)^2 \end{aligned}$$

Ce qui précède montre aussi que si  $a > 0$  alors  $f(m)$  est un minimum et si  $a < 0$  alors  $f(m)$  est un maximum. On peut maintenant savoir quand  $f$  n'admet aucun zéro réel.

(1) **Cas 1 :  $a > 0$** 

$f$  n'a pas de zéro si et seulement si  $f(m) > 0$ . Voyons ce que cela implique.

$$\begin{aligned} f(m) > 0 &\iff am^2 + bm + c > 0 \\ &\iff a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - b \cdot \frac{b}{2a} + c > 0 \\ &\iff -\frac{b^2}{4a} + c > 0 \\ &\iff -b^2 + 4ac > 0 \quad \left\} 4a > 0 \right. \end{aligned}$$

(2) **Cas 2 :  $a < 0$** 

$f$  n'a pas de zéro si et seulement si  $f(m) < 0$ . Cela implique ce qui suit.

$$\begin{aligned} f(m) < 0 &\iff -\frac{b^2}{4a} + c < 0 \\ &\iff -b^2 + 4ac > 0 \quad \left\} 4a < 0 \right. \end{aligned}$$

Nous retombons sur le critère classique suivant :  $ax^2 + bx + c$  n'a pas de zéro réel si et seulement si  $-b^2 + 4ac > 0$ , soit de façon équivalente si et seulement si  $b^2 - 4ac < 0$ .

Notons que notre mode de raisonnement ne permet pas de privilégier le 2<sup>e</sup> critère, ce dernier est en fait naturel uniquement si l'on passe via la forme canonique, ou bien lorsque l'on trouvera des formules calculant les zéros de  $f$  lorsque ces derniers existent (*c'est ce que nous allons faire dans la section suivante*).

1. Nous n'avons pas prouver la propriété de symétrie car nous n'en aurons pas besoin. Ceci se fait en montrant que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(m - x) = f(m + x)$ . Cette égalité est évidente dès lors que l'on a  $f(x) - f(m) = a(x - m)^2$ , une identité que nous allons prouver bientôt.

## 2. QUAND AU MOINS UNE RACINE RÉELLE EXISTE

Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a \neq 0$  tel qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  annulant  $f$ .

La factorisation de  $f(\alpha) - f(\beta)$  vue dans la section précédente nous donne ici sans effort :  $f(x) - f(\alpha) = (x - \alpha)(a(x + \alpha) + b)$ . On en déduit l'existence d'un autre zéro  $\beta \in \mathbb{R}$ , éventuellement égal à  $\alpha$ , tel que  $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$ . Ceci implique, après développement, que  $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$  et  $\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$ .

Exploitions ici aussi l'usage de  $m = -\frac{b}{2a}$  de sorte que  $\frac{\alpha + \beta}{2} = m$  (*ceci est aussi une conséquence de l'égalité  $f(\alpha) = f(\beta)$* ). On va paramétrer notre problème relativement à  $m$  en posant  $\delta = \alpha - m = \frac{\alpha - \beta}{2}$  de sorte que  $m - \beta = \delta$ . Comme  $\alpha = m + \delta$  et  $\beta = m - \delta$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} &\iff (m + \delta)(m - \delta) = \frac{c}{a} \\ &\iff m^2 - \delta^2 = \frac{c}{a} \\ &\iff \delta^2 = m^2 - \frac{c}{a} \\ &\iff \delta^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\ &\iff \delta^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\iff \delta = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} &\iff \delta^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\iff \delta = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}} \right\} b^2 - 4ac \geq 0$$

Nous avons donc établi que si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux zéros de  $f$  alors  $b^2 - 4ac \geq 0$  et les zéros sont  $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ . La réciproque est immédiate.