# BROUILLON - RACINES RATIONNELLES D'UN POLYNÔME SYMÉTRIQUE DE DEGRÉ 4

CHRISTOPHE BAL

$P(X) = aX^4 + bx^3 + cX^2 + bX + a$, un polynôme symétrique de degré 4, peut-il n'avoir que des racines entières ? Que des racines rationnelles ?

## 1. Constatations générales

On peut supposer que $a = 1$, i.e. $P(X) = X^4 + bX^3 + cX^2 + bX + 1$.
Dès lors si $P(r) = 0$ alors $r \neq 0$ et $P\left(\dfrac{1}{r}\right) = 0$.
Ensuite, nous avons :

$$P(X) = X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$$

$$P'(X) = 4X^3 P\left(\frac{1}{X}\right) - X^2 P'\left(\frac{1}{X}\right)$$

On en déduit que si $r$ est une racine d'ordre au moins 2, il en est de même pour $\dfrac{1}{r}$.

## 2. Uniquement des racines entières ?

Si $P$ n'a que des racines entières, alors ces racines ne peuvent être que $\pm 1$ qui sont les seuls entiers ayant un inverse entier. Ceci donne les uniques possibilités suivantes :

(1) $P(X) = (X+1)^4 = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1$ : ce polynôme est ok.
(2) $P(X) = (X-1)^4 = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$ : ce polynôme est ok.
(3) $P(X) = (X+1)^3(X-1) = X^4 + 2X^3 - 2X - 1$ : on rejette. Notons que l'on a un polynôme anti-symétrique.
(4) $P(X) = (X-1)^3(X+1) = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$ : on rejette. Notons que l'on a un polynôme anti-symétrique.
(5) $P(X) = (X+1)^2(X-1)^2 = X^4 - 2X^2 + 1$ : ce polynôme est ok.

## 3. Uniquement des racines rationnelles ?

Supposons que $r \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$ soit une racine de $P$.

Le résultat sur la multiplicité supérieure ou égale à 2 nous donne que si $r$ est de multiplicité au moins 2 alors $\dfrac{1}{r} \neq r$ est aussi de multiplicité au moins 2. Ceci implique que $r$ est de multiplicité 1 ou 2.

*Date*: 6 Décembre 2018.

$r$ **est de multiplicité** 1. Si $P$ admet une autre racine $s \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$ avec $s \neq r$ et $s \neq \dfrac{1}{r}$ alors nécessairement $P(X) = (X-r)\left(X - \dfrac{1}{r}\right)(X-s)\left(X - \dfrac{1}{s}\right)$.

D'où $P(X) = X^4 - \left(r + \dfrac{1}{r} + s + \dfrac{1}{s}\right)X^3 + \left(2 + \dfrac{s}{r} + \dfrac{r}{s} + rs + \dfrac{1}{rs}\right)X^2 - \left(r + \dfrac{1}{r} + s + \dfrac{1}{s}\right)X + 1$

Ce polynôme est ok (utilisation d'un logiciel de calcul formel par flemme !).

Il reste à étudier les cas suivants.

(1) $P(X) = (X-r)\left(X - \dfrac{1}{r}\right)(X+1)^2$ et $P(X) = (X-r)\left(X - \dfrac{1}{r}\right)(X-1)^2$ sont ok car il suffit de reprendre le calcul formel précédent avec $s = \pm 1$.

(2) $P(X) = (X-r)\left(X - \dfrac{1}{r}\right)(X+1)(X-1) = X^4 - \left(r + \dfrac{1}{r}\right)X^3 + \left(r + \dfrac{1}{r}\right)X - 1$ : on rejette. Notons que l'on a un polynôme anti-symétrique.

$r$ **est de multiplicité** 2. Dans ce cas, $P(X) = (X-r)^2\left(X - \dfrac{1}{r}\right)^2$ nécessairement !

$$P(X) = (X-r)^2\left(X - \frac{1}{r}\right)^2 = X^4 - \left(2r + \frac{2}{r}\right)X^3 + \left(4 + r^2 + \frac{1}{r^2}\right)X^2 - \left(2r + \frac{2}{r}\right)X + 1$$

Ce polynôme est ok (utilisation d'un logiciel de calcul formel par flemme !).

## 4. Problèmes similaires

Que se passe-t-il pour un polynôme anti-symétrique $P(X) = aX^4 + bx^3 - bX - a$ ?

Comment généraliser à d'autres degrés ?

Et surtout, blanquette de veau ou moussaka ?