

# À PROPOS DE L'EXERCICE DE SPÉ MATHS DU BAC S DE JUIN 2018

CHRISTOPHE BAL

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons "Attribution - Pas d'utilisation commerciale - Partage dans les mêmes conditions 4.0 International".



Dans le BAC S de Juin 2018, la partie A de l'exercice de SPÉ MATHS s'intéressait à l'équation diophantienne **[ED]** :  $x^2 - 8y^2 = 1$  sur  $\mathbb{N}^2$ .

On a une solution évidente  $(x; y) = (3; 1)$ . L'exercice introduit alors une matrice "magique"  $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  pour ensuite construire des solutions  $(x_n; y_n)$  de façon récursive linéairement comme suit :  $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ .

Très bien mais voyons comment découvrir la matrice "magique"  $A$ . Une idée élémentaire est de noter que  $x^2 - 8y^2 = (x \ y) Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  en posant  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ .

En notant  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , nous avons :  $(X \ Y) Q \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = (x \ y) A^T Q A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

Essayons de trouver  $A$  vérifiant  $A^T Q A = Q$  car d'une solution  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  on pourra passer à une "autre"  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

Utilisant le déterminant, nous avons comme contrainte  $\det A = \pm 1$  donc  $A$  doit être inversible.

Imposons  $\det A = 1$ . Notant  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , nous avons alors  $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$  d'où :

$$\begin{aligned} A^T Q A = Q &\iff A^T Q = Q A^{-1} \\ &\iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a & -8c \\ b & -8d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ 8c & -8a \end{pmatrix} \\ &\iff a = d \text{ et } b = 8c \end{aligned}$$

$\det A = 1$  pour  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 8c \\ c & d \end{pmatrix}$  nous donne  $d^2 - 8c^2 = 1$ . Que c'est joli !

La matrice du sujet de BAC utilise donc la solution élémentaire  $(c; d) = (1; 3)$ .