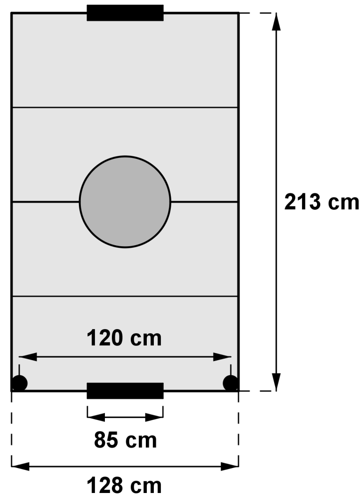
Chapitre N : Lois de probabilité à densité continue

I) Vers une modélisation

Considérons un joueur très maladroit qui s'entraîne seul sur un « Air Hockey » de forme rectangulaire *(voir le dessin ci- contre)*. Sa maladresse est telle que l'on peut considérer qu'il lance totalement au hasard son palet. Quelle probabilité a-t-il de marquer un but au début de son entraînement ?



En considérant le point de contact du palet circulaire avec le côté du camp adverse, **on peut modéliser** notre expérience par le choix au hasard d'un nombre réel x avec les deux règles suivantes :

- l'ensemble de tous les tirages possibles est l'ensemble des réels associés aux points atteignables sur le côté du camp adverse,
- un tirage est gagnant pour un réel pris dans un intervalle donné correspondant à un point sur la largeur du but.

Sachant que le palet en forme de disque a pour rayon $4\ cm$, la 1ère règle donne la condition $0 \leqslant x \leqslant 128 - 2\times 4$, *i.e.* $0 \leqslant x \leqslant 120$.

Quant à la seconde, elle correspond alors au cas où $\dfrac{120-85}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{120-85}{2} + 85$, *i.e.* au cas où $17{,}5 \leqslant x \leqslant 102{,}5$. Il est alors *« naturel »* de penser que la probabilité de marquer un but est égale à $\dfrac{85}{120} = \dfrac{102{,}5-17{,}5}{120}$, soit $\dfrac{17}{24} \simeq 0{,}71$. Finalement, le joueur a environ 71% de chance de marquer un but au tout début de son entraînement *(avec notre choix de modélisation)*.

Nous avons choisi comme probabilité $\dfrac{\textit{Largeur du but}}{\textit{Largeur de la zone atteignable par le palet}}$, ce qui se traduit en termes d'intervalles par $\dfrac{\textit{Diamètre de l'intervalle « gagnant »}}{\textit{Diamètre de l'intervalle total}}$. Ce choix semble *« naturel »* car si l'intervalle total est celui *« gagnant »*, on a bien une probabilité égale à 1, si l'intervalle *« gagnant »* est deux fois plus petit que le total, on obtient une probabilité égale à $\dfrac{1}{2}$, s'il est trois fois plus petit, elle sera égale à $\dfrac{1}{3}$ … etc.

La modélisation ci-dessus peut être très rapidement mise en défaut. En effet, continuons de considérer notre joueur maladroit mais après quelques heures d'entraînement qu'il lui ont conféré une meilleure habilité dans le lancé du palet. Calculer la probabilité de marquer un but comme nous l'avons fait juste avant n'a plus de sens car il faut donner plus de *« poids »* aux réels correspondant au but.

Nous avons vu en 1ère S comment donner des probabilités différentes à des résultats d'une expérience n'ayant qu'un nombre fini de résultats possibles : nous arrivions sur la notion de probabilité générale p qui par définition est une application sur un ensemble fini $E = \{x_1\ ;\ x_2\ ;\ \ldots\ ;\ x_n\}$ vérifiant $0 \leqslant p(x_i) \leqslant 1$ pour chaque évènement élémentaire $\{x_i\}$, et telle que $p(x_1) + p(x_2) + \ldots + p(x_n) = 1$. On définissait ensuite la probabilité d'un évènement $A = \{a_1\ ;\ a_2\ ;\ \ldots\ ;\ a_k\}$ par $p(A) = p(a_1) + p(a_2) + \ldots + p(a_k)$ **[1]**.

Inspirons-nous de ce qui précède pour *« construire »* une probabilité modélisant le cas où notre joueur possède une meilleure dextérité. On note $f(x)$ *(et non* $p(x)$*, gardant la lettre* p *pour notre probabilité)* le poids de chaque réel x de l'intervalle $[0\,;120]$ correspondant au camp adverse. Nous ne chercherons pas à trouver une formule de f *(cette question sera effleurée à la fin du paragraphe **IV**)*. Par *« analogie »* avec la formule **[1]** ci-dessus, pour un intervalle $[a\,;b]$ *(avec* $a < b$ *)* inclus dans l'intervalle total $[0\,;120]$, on souhaiterait poser $p([a\,;b]) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **[2]**, où l'intégrale correspond au passage à une *« sommation sur une infinité de réels »*.

La formule **[2]** nécessite comme hypothèse sur la fonction f qu'elle puisse être intégrée sur l'intervalle $[0;120]$.
On doit aussi avoir $f \geqslant 0$ sur $[0;120]$ et $\int_0^{120} f(x)\,dx = 1$.
Les deux approches se rejoignent-elles ? Oui car si on prend pour *« poids »* la fonction constante $f(x) = \frac{1}{120}$ *(par analogie avec le cas d'une équiprobabilité discrète)*, nous avons : $\int_a^b \frac{dx}{120} = \frac{1}{120} \times (b-a)$, ce qui donne :
$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{\textit{Diamètre de l'intervalle « gagnant » } [a;b]}{\textit{Diamètre de l'intervalle total } [0;120]}$.

Toutes les *« divagations »* ci-dessus vont permettre de mieux comprendre les résultats **<u>théoriques</u>** proposés dans le paragraphe qui suit.

II) Lois de probabilité à densité continue

<u>A savoir</u> : Soit $\mathbf{I} = [a;b]$ *(avec $a < b$)* un intervalle fermé borné *(donc $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$).*

Si f est une fonction continue, positive sur $\mathbf{I}$ telle que $\int_a^b f(x)\,dx = 1$, la loi de probabilité P sur $\mathbf{I}$ de densité continue f vérifie les propriétés suivantes :

1) $P([c;d]) = \int_c^d f(x)\,dx$ pour tout intervalle $[c;d] \subseteq \mathbf{I}$ *(avec $c < d$)*.
2) $P([c;d]) = P(]c;d]) = P([c;d[) = P(]c;d[)$ pour tout intervalle $[c;d] \subseteq \mathbf{I}$ *(avec $c < d$)*.

<u>A savoir</u> : Soit $\mathbf{I} = [a;+\infty[$ un intervalle fermé minoré mais non majoré *(donc $a \in \mathbb{R}$).*

Si f est une fonction continue, positive sur $\mathbf{I}$ telle que $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx = 1$, la loi de probabilité P sur $\mathbf{I}$ de densité continue f vérifie les propriétés suivantes :

1) $P([c;d]) = \int_c^d f(x)\,dx$ pour tout intervalle borné $[c;d] \subseteq \mathbf{I}$ *(avec $c < d$ et $(c\,;d) \in \mathbb{R}^2$).*
2) $P([c;d]) = P(]c;d]) = P([c;d[) = P(]c;d[)$ pour tout intervalle borné $[c;d] \subseteq \mathbf{I}$ *(avec $c < d$ et $(c\,;d) \in \mathbb{R}^2$).*
3) $P([c;+\infty[) = 1 - P([a;c[)$ et $P(]c;+\infty[) = 1 - P([a;c])$ pour tout intervalle minoré $[c;+\infty[\subseteq \mathbf{I}$ *(avec $c \in \mathbb{R}$).* Dans un tel cas, nous avons donc $P([c;+\infty[) = 1 - \int_a^c f(x)\,dx$ et $P(]c;+\infty[) = 1 - \int_a^c f(x)\,dx$.

<u>Remarque n°1</u> : Soit une loi de probabilité P sur $\mathbf{I}$ de densité continue f. Pour tout réel c de $\mathbf{I}$, nous avons : $P([c;c]) = \int_c^c f(x)\,dx$, d'où $P(\{c\}) = 0$.

<u>Remarque n°2</u> : La définition rigoureuse d'une loi de probabilité P de densité continue f est la suivante : pour tout évènement *« acceptable »* E *(mais pas pour tous les sous-ensembles possibles de l'intervalle $\mathbf{I}$)*, on pose $P(\mathsf{E}) = \int_{\mathsf{E}} f(x)\,dx$. Ceci demande de savoir intégrer sur un ensemble E *« quelconque acceptable »* . Aborder cette question va bien au-delà de l'objectif de la Terminale S.
Cette définition jouit de la propriété *« naturelle »* suivante : pour tous intervalles $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{I}$ et $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{I}$ tels que $\mathbf{J} \cap \mathbf{K} = \varnothing$, on a : $P(\mathbf{J} \cup \mathbf{K}) = P(\mathbf{J}) + P(\mathbf{K})$.

Exemple : Vérifions qu'il n'existe qu'un seul réel λ tel qu'on puisse modéliser le choix d'un nombre réel dans $[0;1]$ par une loi de probabilité de densité la fonction continue λx^2. Nous calculerons alors $P([0,4;0,7])$.

III) 1^er exemple : la Loi uniforme sur [0 ; 1]

Comme la fonction constante égale à 1 est continue et vérifie $\int_0^1 dx = 1$, on peut poser la définition suivante *(qui correspond au 1^er cas de l'exemple d'introduction).*

Définition : La loi de probabilité uniforme sur $[0;1]$ est la loi de probabilité P sur $[0;1]$ de densité continue la fonction constante égale à 1.

Propriété : Soit P la loi de probabilité uniforme sur $[0;1]$. Pour tout intervalle $[a;b] \subseteq [0;1]$ *(avec* $a < b$ *)*, nous avons : $P([a;b]) = b - a$.

Remarque : On définit plus généralement la loi de probabilité uniforme sur un intervalle $[a;b]$ *(avec* $a < b$ *)* comme étant la loi de probabilité P sur $[a;b]$ de densité continue la fonction constante égale à $\dfrac{1}{b-a}$.

Exemple : On choisit un nombre réel α au hasard dans $[0;1]$. Sachant que ce nombre α est supérieur à $0{,}6$, quelle est la probabilité pour qu'il soit inférieur à $0{,}95$?

IV) 2ème exemple : la Loi exponentielle de paramètre λ (hors programme)

Commençons par un exemple concret. D'après les lois de la Physique, nous avons la loi **[S]** suivante : *« La probabilité qu'à un instant t un noyau radioactif se désintègre dans l'intervalle $[t;t+s]$ ne dépend pas de son âge t et n'est jamais égale à un. »*
Concrètement on suppose que les noyaux radioactifs ne vieillissent pas avant leur désintégration, et que de plus il est impossible qu'ils disparaissent majoritairement d'un seul coup.

Admettons que cette probabilité soit une loi de probabilité P sur $[0;+\infty[$ de densité continue f. On note alors $F(t) = P([0;t]) = \int_0^t f(x)\,dx$ pour $t \geqslant 0$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$ *(cela fait partie de notre hypothèse de travail)*, nous savons que F est un primitive de f sur $\mathbb{R}_+$.

• La loi **[S]** se traduit par la probabilité que le noyau se désintègre dans l'intervalle $[t;t+s]$ sachant qu'il ne s'est pas désintégré dans l'intervalle $[0;t]$ est égale à $P([0;s]) = F(s)$ pour tous réels $t \geqslant 0$ et $s \geqslant 0$.

• La probabilité que le noyau ne se soit pas désintégré dans l'intervalle $[0;t]$ est bien entendu égale à $1 - P([0;t]) = 1 - F(t)$. Nous obtenons alors que la probabilité conditionnelle que le noyau se désintègre dans l'intervalle $[t;t+s]$ sachant qu'il ne s'est pas désintégré dans l'intervalle $[0;t]$ est aussi égale à $\dfrac{P([t;t+s])}{1-F(t)}$ *(la loi implique que l'on suppose $P([0;t]) \neq 1$, i.e. $F(t) \neq 1$).*

• Comme $P([t;t+s]) = \int_t^{t+s} f(x)\,dx = \int_0^{t+s} f(x)\,dx - \int_0^t f(x)\,dx$ d'après la relation de Chasles pour les intégrales, nous avons : $P([t;t+s]) = F(t+s) - F(t)$.

• D'après les points ci-dessus, on a $\dfrac{P([t;t+s])}{1-F(t)} = F(s)$ puis $F(t+s) - F(t) = F(s) \times [1 - F(t)]$ pour tous réels $t \geqslant 0$ et $s \geqslant 0$. Considérant la fonction $G(t) = 1 - F(t)$, nous avons pour tous réels $t \geqslant 0$ et $s \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} F(t+s) - F(t) = F(s) \times [1 - F(t)] &\Leftrightarrow 1 - G(t+s) - 1 + G(t) = G(t) \times [1 - G(s)] \\ &\Leftrightarrow G(t+s) = G(t)\,G(s) \end{aligned}$$

• D'après le dernier exemple du cours sur la fonction exp, nous savons qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $G(x) = exp(k\,x)$ sur $\mathbb{R}_+$ *(on comprend mieux pourquoi nous avons introduit la fonction G).* Par dérivation, comme F est un primitive de f sur $\mathbb{R}_+$, nous obtenons : $f(x) = F\,'(x) = -\,G\,'(x) = -\,k\,e^{k\,x}$.

• Pour achever de montrer la possibilité de modéliser la probabilité de désintégration par une loi de probabilité P sur $[0;+\infty[$ de densité continue f la fonction trouvée ci-dessus, il nous reste à voir s'il est possible ou non d'avoir $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_0^t f(x)\,dx = 1$.
$\int_0^t (-\,k\,e^{k\,x})\,dx = [-\,e^{k\,x}]_0^t$ nous donne $\int_0^t (-\,k\,e^{k\,x})\,dx = 1 - e^{k\,t}$. Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_0^t f(x)\,dx = 1$ si et seulement si $k < 0$. Notre hypothèse de travail nous a permis d'aboutir à un modèle probabiliste de la désintégration des noyaux radioactifs.

Au lieu de considérer la densité $(-\,k\,e^{k\,x})$ avec $k < 0$, on choisira $\lambda\,e^{-\lambda x}$ avec $\lambda = -\,k$ qui est telle que $\lambda > 0$.
Les calculs faits dans le dernier point ci-dessus justifient que l'on puisse poser la définition suivante.

<u>Définition</u> : La loi de probabilité exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$ est la loi de probabilité P sur $[0;+\infty[$ de densité continue la fonction $\lambda\,e^{-\lambda x}$.

Remarque : Les lois de probabilité exponentielles sont aussi appelées lois de durée de vie sans vieillissement *(ce qui se comprend avec l'exemple concret d'introduction).*

Exemple : On considère sur $[0;+\infty[$ la loi de probabilité exponentielle de paramètre $\lambda = 1{,}54 \times 10^{-10}$ la constante de désintégration annuelle pour l'uranium **238**. Calculons $P([0;10^{10}])$ et $P([10^{9};10^{10}])$, puis déterminons t_0 tel que $P([0;t_0]) = 0{,}99$.

<u>Une méthode possible pour déterminer une densité dans un cas concret</u> : En pratique, une étude statistique permet d'établir un tableau de valeurs de $P([0;t_i])$ pour des réels t_i suffisamment voisins les uns des autres. Posant $F(t) = P([0;t]) = \int_0^t f(x)\,dx$, on peut ensuite proposer une formule « simple » pour cette fonction F . On préfèrera pour F *(dans un premier temps mais ce n'est pas une obligation)* des fonctions dérivables de dérivée continue, afin de pouvoir poser $F' = f$.