

BROUILLON - COURBES POLYNOMIALES SIMILAIRES MANQUE DES DESSINS !

CHRISTOPHE BAL

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



TABLE DES MATIÈRES

1. Où allons-nous ?	2
2. Cas des polynômes de degré 3	2
3. AFFAIRE À SUIVRE...	3

1. OÙ ALLONS-NOUS ?

Il est connu que les courbes des fonctions affines sont toutes des droites, et celles représentant des trinômes du 2^e degré sont toutes des paraboles. Quand on présente ce résultat au lycée, on n'a pas défini exactement ce qu'est une parabole¹. On explique que l'on peut passer de la représentation de la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$ à celle du trinôme $g : x \mapsto ax^2 + bx + c$ via une translation, une dilatation verticale et/ou une dilatation horizontale. Ceci nous amène aux deux questions suivantes.

- (1) Peut-on passer de la courbe de $f : x \mapsto x^3$ à celle du polynôme $g : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $a \neq 0$ via une translation, une dilatation verticale et/ou une dilatation horizontale.
- (2) Que se passe-t-il plus généralement pour les courbes des fonctions $f : x \mapsto x^k$ lorsque $k \geq 4$?

2. CAS DES POLYNÔMES DE DEGRÉ 3

Soit \mathcal{C}_g la courbe de la fonction $g : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $a \neq 0$. Nous allons démontrer que \mathcal{C}_g s'obtient à partir de l'une des courbes suivantes en utilisant une translation horizontale, une translation verticale, une dilatation verticale et/ou une dilatation horizontale.

- (1) Γ_1 représente $f_1 : x \mapsto x^3$.
- (2) Γ_2 représente $f_2 : x \mapsto x^3 - x$ de sorte que $f_2(x) = x(x-1)(x+1)$.
- (3) Γ_3 représente $f_3 : x \mapsto x^3 + x$ de sorte que $f_3(x) = x(x-i)(x+i)$ où $i \in \mathbb{C}$.

Démonstration.

- (1) **On peut supposer que $(a; b; d) = (1; 0; 0)$.**

- (a) Il est immédiat que l'on peut supposer que $a = 1$. Dans la suite, on supposera donc $g(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$.
- (b) En considérant \mathcal{C}_g , on observe un centre de symétrie qui a pour abscisse m celle de l'unique point d'inflexion de \mathcal{C}_g .

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\iff 6x + 2b = 0 \\ &\iff x = -\frac{b}{3} \end{aligned}$$

Il devient naturel de poser $x = m + t$ avec $m = -\frac{b}{3}$.

$$\begin{aligned} g(x) &= g(m + t) \\ &= (m + t)^3 + b(m + t)^2 + c(m + t) + d \\ &= m^3 + 3m^2t + 3mt^2 + t^3 + bm^2 + 2bmt + bt^2 + cm + ct + d \end{aligned}$$

Le coefficient de t^3 reste égal à 1 et celui de t^2 est $3m + b = 0$. Ceci montre que l'on peut supposer $(a; b) = (1; 0)$. Dans la suite, on supposera donc $g(x) = x^3 + cx + d$.

- (c) Il est immédiat que l'on peut supposer dans la suite que $g(x) = x^3 + cx$.

- (2) **Cas 1 : $c = 0$**

Nous n'avons rien à faire de plus car ici $\mathcal{C}_g = \Gamma_1$.

1. La définition géométrique des grecques anciens restent la meilleure.

(3) **Cas 2 :** $c = -k^2$ avec $k > 0$

Ici $g(x) = x^3 - k^2 x$ soit $g(x) = x(x - k)(x + k)$.

Nous avons donc $g(kx) = k^3 x(x - 1)(x + 1) = k^3 f_2(x)$ puis $f_2(x) = \frac{1}{k^3} g(kx)$.

On peut ainsi passer de \mathcal{C}_g à Γ_2 , et donc aussi de Γ_2 à \mathcal{C}_g , à l'aide des transformations autorisées.

(4) **Cas 3 :** $c = k^2$ avec $k > 0$

Ici $g(x) = x^3 - (k\mathbf{i})^2 x$ soit $g(x) = x(x - k\mathbf{i})(x + k\mathbf{i})$.

Nous avons donc $g(kx) = k^3 x(x - \mathbf{i})(x + \mathbf{i}) = k^3 f_3(x)$ puis comme dans le cas précédent on peut passer de Γ_3 à \mathcal{C}_g à l'aide des transformations autorisées.

□

On notera que la preuve précédente est constructive, autrement dit on peut donner les applications à appliquer en fonction des coefficients a , b , c , et d de $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Il est évident qu'il n'est pas possible de passer de Γ_i à Γ_j à l'aide des transformations autorisées (*penser à la conservation géométrique des tangentes horizontales*). On peut donc parler de trois types de courbe pour les polynômes de degré 3 contre un seul pour les fonctions affines, et aussi un seul pour les trinômes du 2^e degré. Alors que se passe-t-il pour les polynômes de degré 4 et plus généralement pour ceux de degré n ?

3. AFFAIRE À SUIVRE...
