

BROUILLON - ALGORITHME D'EUCLIDE ET COEFFICIENTS DE BACHET-BÉZOUT POUR LES HUMAINS

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution - Pas d’utilisation commerciale - Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.

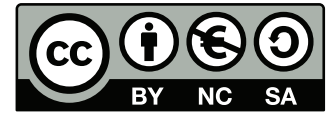


TABLE DES MATIÈRES

1.	Où allons-nous ?	2
2.	L’algorithme « <i>human friendly</i> » appliqué de façon magique	2
2.1.	Un exemple complet façon « <i>diaporama</i> »	2
2.2.	Phase 1 – Au début était l’algorithme d’Euclide	2
2.3.	Phase 2 – Remonter facile des étapes	3
2.4.	Et voilà comment conclure !	4
3.	Pourquoi cela marche-t-il ?	5
4.	AFFAIRE À SUIVRE...	5

1. OÙ ALLONS-NOUS ?

Un résultat classique d'arithmétique dit qu'étant donné $(a; b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, il existe $(u; v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $au + bv = \text{pgcd}(a; b)$. Les entiers u et v seront appelés « *coefficients de Bachet-Bézout* ». Notons qu'il n'y a pas unicité car nous avons par exemple :

$$(-3) \times 12 + 1 \times 42 = 4 \times 12 + (-1) \times 42 = 6 = \text{pgcd}(12; 42)$$

Nous allons voir comment trouver de tels entiers u et v tout d'abord de façon humainement rapide puis ensuite via des algorithmes efficaces pour un ordinateur.

2. L'ALGORITHME « *human friendly* » APPLIQUÉ DE FAÇON MAGIQUE

2.1. Un exemple complet façon « *diaporama* ». Sur le lieu de téléchargement de ce document se trouve un fichier PDF de chemin relatif `bezout-coef-for-human/slide-version.pdf` présentant la méthode sous la forme d'un diaporama. Nous vous conseillons de le regarder avant de lire les explications suivantes.

2.2. Phase 1 – Au début était l'algorithme d'Euclide. Pour chercher des coefficients de Bachet-Bézout pour $(a; b) = (27; 141)$, on commence par appliquer l'algorithme d'Euclide « *verticalement* » comme suit.

141

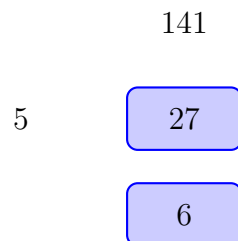
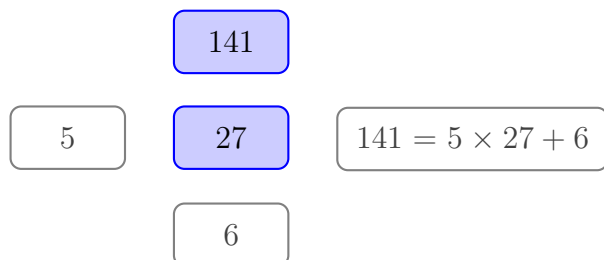
27

141

27

Étape 1: le plus grand naturel est mis au-dessus.

Étape 2: deux naturels à diviser.



Étape 3: première division euclidienne.

Étape 4: on passe aux deux naturels suivants.

En répétant ce processus, nous arrivons à la représentation suivante.

141

5	27
4	6
2	3
	0

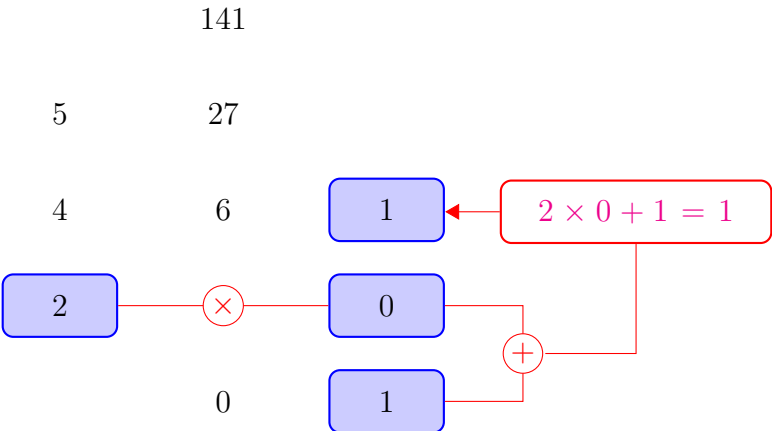
Étape finale (1^{re} phase): l’algorithme d’Euclide « vertical ».

2.3. **Phase 2 – Remonter facile des étapes.** La méthode classique consiste à remonter les calculs. Mais comment faire cette remontée tout en évitant un claquage neuronal ? L’astuce est la suivante.

		141				141
5	27			5	27	
4	6			4	6	
2	3	0		2	3	0
	0	1			0	1

Étape 1: ajout d’une nouvelle colonne.

Étape 2: on n’utilise pas la colonne centrale.



Étape 3: on fait une sorte de division « inversée ».

$$\begin{array}{rcc}
 & & 141 \\
 & 5 & 27 \\
 & \boxed{4} & 6 & \boxed{1} \\
 & 2 & 3 & \boxed{0} \\
 & & 0 & 1
 \end{array}$$

Étape 4: on passe aux trois naturels suivants.

En répétant ce processus, nous arrivons à la représentation suivante.

$$\begin{array}{rcc}
 & 141 & 21 \\
 & 5 & 27 & 4 \\
 & 4 & 6 & 1 \\
 & 2 & 3 & 0 \\
 & & 0 & 1
 \end{array}$$

Étape finale (2^e phase): remontée à mains nues des calculs.

2.4. Et voilà comment conclure !

$$\begin{array}{rcc}
 & \boxed{\begin{array}{cc} 141 & 21 \\ 27 & 4 \end{array}} & \rightarrow \boxed{141 \times 4 - 21 \times 27 = -3} \\
 5 & & \\
 4 & 6 & 1 \\
 2 & 3 & 0 \\
 & 0 & 1
 \end{array}$$

Étape finale (la vraie): on finit avec un produit en croix.

Des coefficients de Bachet-Bézout s'obtiennent sans souci via l'équivalence suivante où nous avons $3 = \text{pgcd}(27, 141)$.

$$141 \times 4 - 27 \times 21 = -3 \iff 27 \times 21 - 141 \times 4 = 3$$

Nous allons voir, dans la section qui suit, que l'on obtient forcément à la fin $\pm\text{pgcd}(27, 141)$.

En pratique, nous n'avons pas besoin de détailler les calculs comme nous l'avons fait à certains moments afin d'expliquer comment procéder. Avec ceci en tête, on comprend toute l'efficacité de la méthode présentée, mais pas encore justifiée, car il suffit de garder une trace minimale, mais complète, des étapes tout en ayant à chaque étape des opérations assez simples à effectuer. Il reste à démontrer que notre méthode marche à tous les coups. Ceci est le propos de la section suivante.

3. POURQUOI CELA MARCHE-T-IL ?

????

4. AFFAIRE À SUIVRE...
