BROUILLON - FAIRE DES ADDITIONS MODULAIRES SUR UNE ELLIPSE

CHRISTOPHE BAL

Mentions « légales »

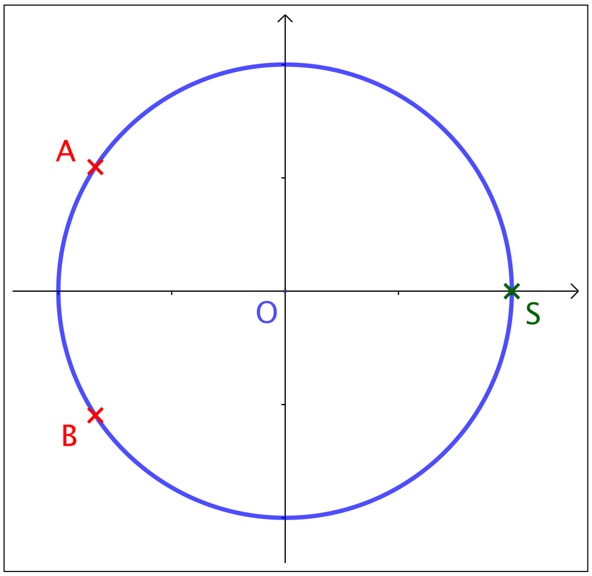
Table des matières

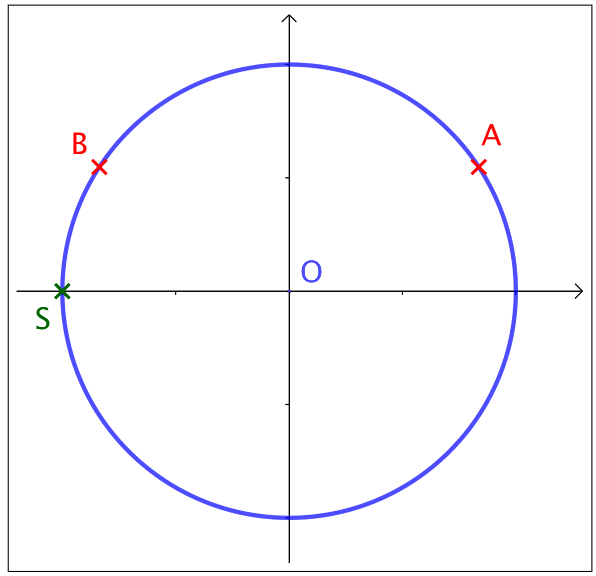
1. Addition d'angles orientés sur un cercle trigonométrique 2
2. Preuve de la conjecture via le déterminant et le produit scalaire 4
3. Preuve de la conjecture via les complexes 4
4. Preuve de la conjecture via la si belle géométrie 5
5. Toute ellipse d'équation $(x(t), y(t)) = (x_0 + a\cos t, y_0 + b\sin t)$ est un groupe 7

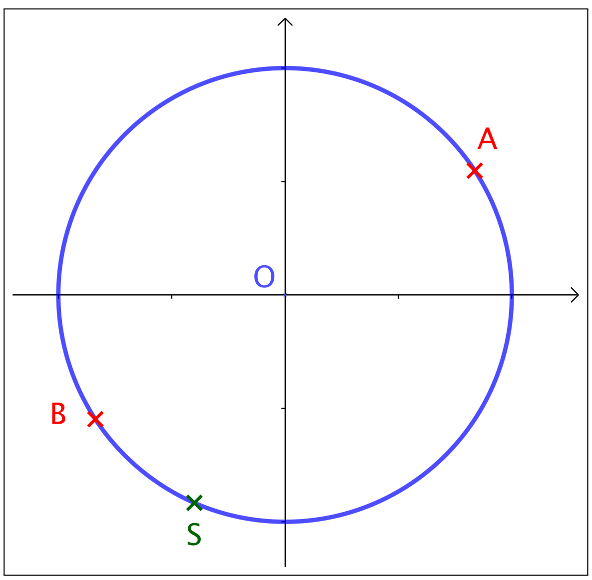
Date: 20 Juillet 2019 - 22 Juillet 2019.

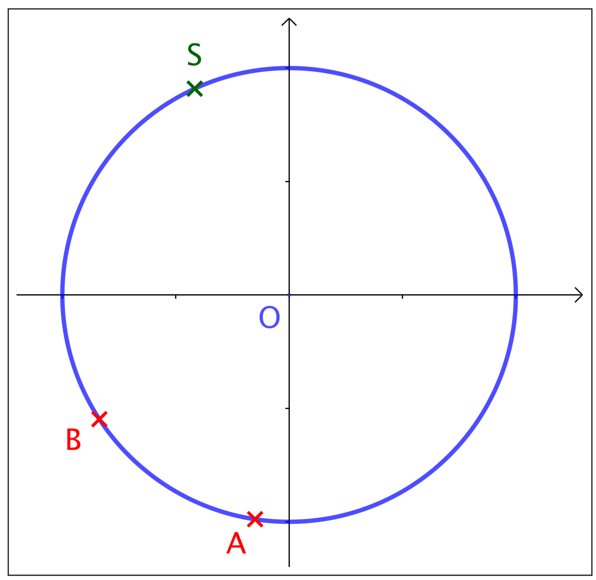
1. Addition d'angles orientés sur un cercle trigonométrique

Ci dessous, sur le cercle trigonométrique associé à un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I},\mathrm{J})$, nous avons placé, les points A , B et S de sorte que $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OS}\right) = \left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OB}\right)$ *(cette construction est très naturelle)*. Sauriez-vous conjecturer [1] un moyen simple de construire le point S à partir des points A et B *(la réponse est donnée dans la page suivante)* ?



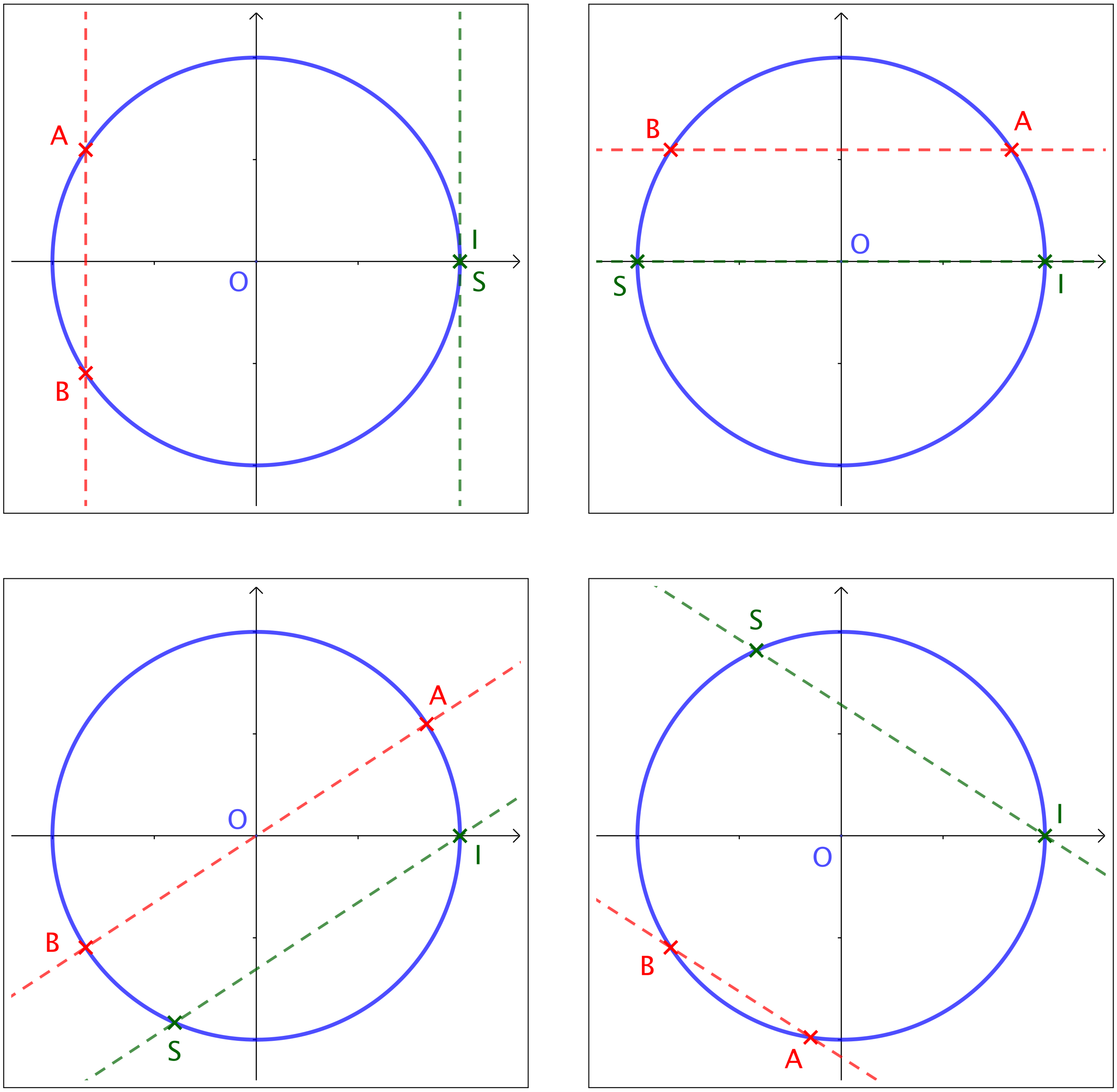






1. Le lieu de téléchargement de ce document contient un fichier GeoGebra `base-tool.ggb` manipulable dynamiquement pour vérifier combien il est aisé de conjecturer quelque chose.

Pour mieux voir ce qu'il se passe, il suffit de tracer quelques droites. Voici ce que cela donne.



Il devient évident de conjecturer que le point S se construit géométriquement comme suit.

(1) Si $A \neq B$ alors on construit la parallèle à (AB) passant par I . Le point S est le second point d'intersection de cette parallèle avec le cercle. Notons que si $x_A = x_B$ et $y_A = -y_B$ alors $S = I$ peut être vu un point d'intersection « double ».

(2) Si $A = B$, on procède comme au point (1) mais avec la parallèle à la tangente en A au cercle. Cette situation consiste à faire *« tendre »* A vers B .

Dans ce qui suit nous allons valider cette conjecture de trois façons en allant du plus brutal au plus élégant.

(1) La 1$^{\text{re}}$ méthode passe assez brutalement via les critères de colinéarité et d'orthogonalité dans un plan.

(2) La 2$^{\text{e}}$ méthode utilise les nombres complexes avec des calculs faciles à mener.

(3) La 3$^{\text{e}}$ méthode, sûrement la plus élégante, est purement géométrique.

2. Preuve de la conjecture via le déterminant et le produit scalaire

Dans le repère $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I},\mathrm{J})$ supposé orthonormé, $A = (\cos a\,;\sin a)$ et $B = (\cos b\,;\sin b)$ avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons alors $S = (\cos(a+b)\,;\sin(a+b))$. Pour faciliter les calculs, nous posons $A = (c_A\,;s_A)$ et $B = (c_B\,;s_B)$ de sorte que $S = (c_A c_B - s_A s_B\,;c_A s_B + s_A c_B)$ d'après les formules trigonométriques d'addition.

Cas 1. *Supposons que $A \neq B$.*

La colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IS}$ est justifiée par les calculs brutaux suivants *(on pourrait faire appel à un logiciel de calcul formel qui ici peut être utilisé en toute confiance).*

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{IS}\right) &= \begin{vmatrix} c_B - c_A & c_A c_B - s_A s_B - 1 \\ s_B - s_A & c_A s_B + s_A c_B \end{vmatrix} \\
&= (c_B - c_A)(c_A s_B + s_A c_B) - (s_B - s_A)(c_A c_B - s_A s_B - 1) \\
&= c_B c_A s_B + s_A c_B^2 - c_A^2 s_B - c_A s_A c_B \\
&\quad - s_B c_A c_B + s_A s_B^2 + s_B + s_A c_A c_B - s_A^2 s_B - s_A \\
&= s_A c_B^2 - c_A^2 s_B + s_A s_B^2 + s_B - s_A^2 s_B - s_A \\
&= s_A(c_B^2 + s_B^2) - (c_A^2 + s_A^2) s_B + s_B - s_A \\
&= s_A - s_B + s_B - s_A \\
&= 0
\end{aligned}$$

Cas 2. *Supposons que $A = B$.*

En notant qu'ici $S = (c_A^2 - s_A^2\,;2c_A s_A)$, l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{IS}$ est justifiée par les calculs suivants *(l'usage d'un logiciel de calcul formel serait un peu excessif).*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{IS} &= c_A \cdot (c_A^2 - s_A^2 - 1) + s_A \cdot 2c_A s_A \\
&= c_A \cdot (1 - s_A^2 - s_A^2 - 1) + 2c_A s_A^2 \\
&= -2c_A s_A^2 + 2c_A s_A^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

3. Preuve de la conjecture via les complexes

Travaillons dans le plan complexe associé au repère $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I},\mathrm{J})$. Nous posons $z_A = \mathbf{e}^{\mathbf{i}a}$ et $z_B = \mathbf{e}^{\mathbf{i}b}$ avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons alors $z_S = \mathbf{e}^{\mathbf{i}(a+b)}$.

Cas 1. *Supposons que $a \not\equiv b\ [2\pi]$, soit $A \neq B$.*

Tout d'abord, nous avons $z_{\overrightarrow{AB}} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}b} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}a}$ et $z_{\overrightarrow{IS}} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}(a+b)} - 1$. Nous devons trouver un réel $k \in \mathbb{R}$ tel que $z_{\overrightarrow{IS}} = k z_{\overrightarrow{AB}}$. Dans la suite, nous noterons $s = a + b$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
z_{\overrightarrow{IS}} &= \mathbf{e}^{\mathbf{i}s} - 1 \\
&= \mathbf{e}^{\mathbf{i}s/2}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}s/2} - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}s/2}\right) \\
&= \mathbf{e}^{\mathbf{i}s/2} \cdot 2\mathbf{i}\sin(0,5s) \\
&= 2\mathbf{i}\sin(0,5s)\mathbf{e}^{\mathbf{i}s/2}
\end{aligned}$$

A l'aide de la même technique classique précédente, notant $d = b - a$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= \mathbf{e}^{\mathbf{i}b} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}a} \\ &= \mathbf{e}^{\mathbf{i}a}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}d} - 1\right) \\ &= \mathbf{e}^{\mathbf{i}a} \cdot 2\mathbf{i}\sin(0,5d)\mathbf{e}^{\mathbf{i}d/2} \\ &= 2\mathbf{i}\sin(0,5d)\mathbf{e}^{\mathbf{i}s/2} && \text{En effet, } d + 2a = s. \end{aligned}$$

Comme $d \not\equiv 0\ [2\pi]$ par hypothèse, soit de façon équivalente $0,5d \not\equiv 0\ [\pi]$, nous avons finalement $z_{\overrightarrow{IS}} = kz_{\overrightarrow{AB}}$ où $k = \frac{\sin(0,5s)}{\sin(0,5d)} \in \mathbb{R}$.

Cas 2. *Supposons que* $a \equiv b\ [2\pi]$ *, soit* $A = B$ *.*

Nous devons prouver l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{IS}$ avec ici $z_S = \mathbf{e}^{2\mathbf{i}a}$. Ceci découle de la nullité de la partie réelle du produit suivant [2].

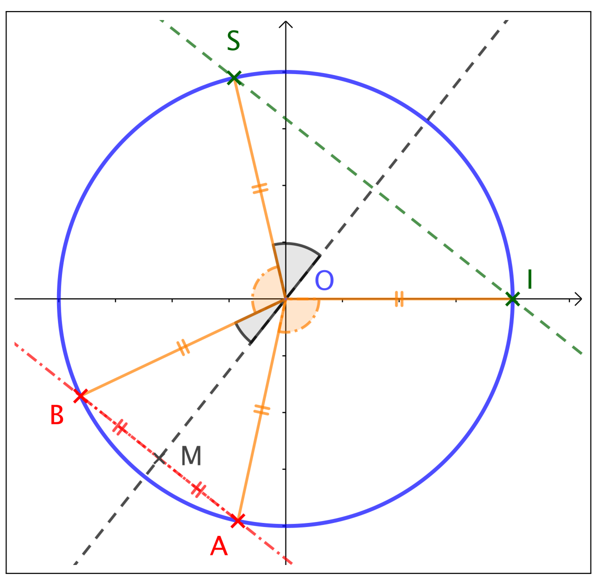
$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{OA}}\ \overline{z_{\overrightarrow{IS}}} &= \mathbf{e}^{\mathbf{i}a}\,\overline{\left(\mathbf{e}^{2\mathbf{i}a} - 1\right)} \\ &= \mathbf{e}^{\mathbf{i}a}\left(\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}a} - 1\right) \\ &= \mathbf{e}^{-\mathbf{i}a} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}a} \\ &= 2\mathbf{i}\sin a \end{aligned}$$

4. Preuve de la conjecture via la si belle géométrie

Bien qu'un peu longue à rédiger, la preuve présentée ici est presque évidente par simple lecture des dessins bien codés ci-après. En tout cas, elle s'explique très vite à l'oral sans faire appel à aucun calcul !

Cas 1. *Supposons que* $A \neq B$ *.*

Nous avons donc une situation du type suivant où sont indiqués des angles très intéressants comme nous allons le constater tout de suite.



2. Se souvenir que $(x + \mathbf{i}y)\,\overline{(x' + \mathbf{i}y')} = xx' + yy' + \mathbf{i}(x'y - xy')$. Notez que cette identité est un deux-en-un contenant le produit scalaire et le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ d'affixes complexes respectives $(x + \mathbf{i}y)$ et $(x' + \mathbf{i}y')$. Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, la notation exponentielle nous donne sans effort que $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|}$ et $\sin\theta = \frac{\det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})}{\|\overrightarrow{u}\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|}$ où θ est une mesure en radians de l'angle orienté $(\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\,)$.

Comme $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OS}\right)=\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OI}\right)+\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OS}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OS}\right)=\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)$ par définition de S , nous avons : $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OS}\right)=\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)$.

Ensuite, notant M le milieu de $[AB]$, la médiane (OM) est aussi une bissectrice du triangle BOA isocèle en O de sorte que $\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OB}\right)=-\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OA}\right)$.

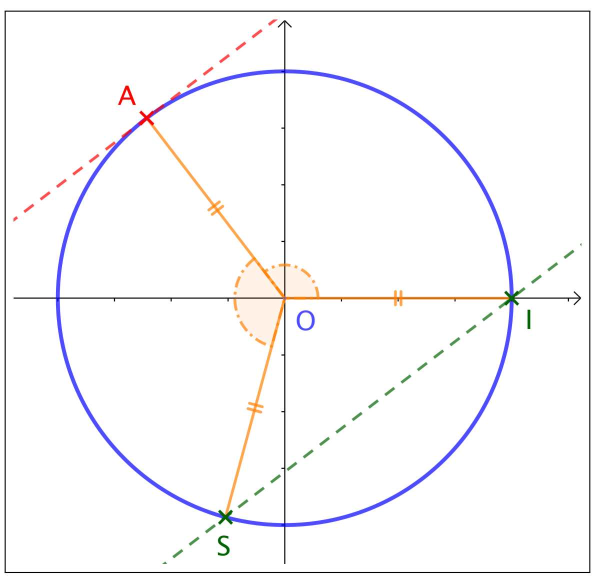
Notant Π l'angle plat, nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{MO};\overrightarrow{OS}\right) &= \left(\overrightarrow{MO};\overrightarrow{OM}\right)+\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OS}\right)\\
&= \Pi-\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)\\
&= \Pi+\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right)+\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)\\
&= \Pi+\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right)\\
&= \left(\overrightarrow{OI};-\overrightarrow{OM}\right)\\
&= \left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{MO}\right)\\
&= -\left(\overrightarrow{MO};\overrightarrow{OI}\right)
\end{aligned}$$

Comme $\left(\overrightarrow{MO};\overrightarrow{OS}\right)=-\left(\overrightarrow{MO};\overrightarrow{OI}\right)$, la droite (OM) est aussi une bissectrice du triangle SOI isocèle en O . Or la bissectrice issue du sommet principal d'un triangle isocèle est aussi une hauteur d'où $(OM)\perp(AB)$ et $(OM)\perp(SI)$ puis $(AB)\,//\,(SI)$ comme souhaité.

Cas 2. *Supposons que $A=B$.*

Tout est dans le dessin suivant ou presque. Nous allons rédiger cela proprement.



Il est immédiat que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)=\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OS}\right)$ puis que $-\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{OI}\right)=\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{OS}\right)$. Nous en déduisons que la droite (AO) est la bissectrice du triangle isocèle SOI issue du sommet principal de ce dernier d'où $(AO)\perp(SI)$ puisque cette bissectrice particulière est aussi une hauteur. Il est alors clair que (SI) est parallèle à la tangente en A au cercle.

5. Toute ellipse d'équation $(x(t), y(t)) = (x_0 + a\cos t, y_0 + b\sin t)$ est un groupe

Le procédé de construction que nous venons de prouver dans les sections précédentes se « *conserve* » par translations, et aussi par dilatations verticales et horizontales [3]. Il se trouve que ce sont ces transformations qui à partir du cercle trigonométrique permettent d'avoir une ellipse d'équation paramétrique $(x(t), y(t)) = (x_0 + a\cos t, y_0 + b\sin t)$. Nous pouvons donc munir toute ellipse d'équation paramétrique $(x(t), y(t)) = (x_0 + a\cos t, y_0 + b\sin t)$ d'une structure de groupe isomorphe à celle de $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\,;+)$, et ceci avec un procédé géométrique simple pour « *additionner* » sur l'ellipse [4]. Que c'est joli !

3. La tangente à un cercle en un point A est l'unique droite coupant le cercle juste en A .
4. La tangente à une ellipse en un point A est aussi l'unique droite coupant l'ellipse juste en A .