BROUILLON - UN SAUTE-MOUTON BICOLORE POUR GLOUTONS

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LaTeX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writing/drafts.

Table des matières

1. Une devinette qui défrise

Voici une petite devinette bien sympathique.

(1) Dans des cases sont disposés à gauche uniquement des moutons noirs **N** et à droite que des blancs **B** avec une case vide entre chaque groupe. Voici un exemple.

N	N	N		B	B	B	B

(2) Les moutons noirs ne se déplacent que vers la droite, et les blancs uniquement vers la gauche. Aucun retour en arrière n'est possible !

(3) Pour avancer, un mouton ne peut faire que deux choses dans sa direction de déplacement.
   (a) Si la case vide est devant lui, un mouton peut avancer dans cette case.
   (b) Un mouton peut sauter au-dessus d'un seul mouton d'une autre couleur pour arriver dans la case vide.

Date: 11 Mars 2019.

Question. Peut-on faire passer tous les moutons blancs à gauche les uns à côté des autres, et tous les noirs à droite avec une case vide entre ces deux groupes de moutons ?

A titre d'exemple, considérons une partie avec la grille initiale suivante.

N	**N**		**B**	**B**	**B**

Voici des mouvements possibles à partir de cette configuration.

`[E1]` ← Le mouton no.4 va avancer vers la gauche.

N	**N**		**B**	**B**	**B**
1	2	3	4	5	6

`[E2]` ← Le mouton no.2 va sauter vers la droite au dessus d'un blanc.

N	**N**	**B**		**B**	**B**
1	2	3	4	5	6

`[E3]` ← Le mouton no.1 va avancer vers la droite

N		**B**	**N**	**B**	**B**
1	2	3	4	5	6

`[E4]` ← Le mouton no.3 va sauter vers la droite au dessus d'un noir.

	N	**B**	**N**	**B**	**B**
1	2	3	4	5	6

`[E5]` ← Le mouton no.2 va avancer vers la droite

B	**N**		**N**	**B**	**B**
1	2	3	4	5	6

`[E6]` ← Plus aucun mouvement n'est possible. Partie perdue !

B		**N**	**N**	**B**	**B**
1	2	3	4	5	6

Si le coeur vous en dit, n'hésitez pas à tenter de résoudre cette devinette en prenant par exemple 3 moutons noirs et 3 blancs.

2. Vocabulaire et notations

Définition 1. *Une configuration désigne juste un ensemble de moutons noirs et blancs sur une ligne de cases dont une seule est vide* (une configuration ne vient pas forcément de mouvements faits lors d'une partie).

Définition 2. *Une configuration* `kN•pB` *désignera un début de parties avec k moutons noirs et p blancs. Par exemple,* `5N•3B` *correspond à la configuration suivante.*

N	**N**	**N**	**N**	**N**		**B**	**B**	**B**

Définition 3. *La configuration* `kN•pB` *sera dite résoluble si l'on peut résoudre la devinette des moutons qui lui est associée.*

Remarque 1. *Plus généralement, nous noterons certains configurations de façon naturelle. Par exemple,* `3NB•4B` *correspond à la configuration suivante.*

N	**B**	**N**	**B**	**N**	**B**		**B**	**B**	**B**	**B**

Un autre exemple : `2N3NB•4B` *désigne la configuration suivante.*

N	**N**	**N**	**B**	**N**	**B**	**N**	**B**		**B**	**B**	**B**	**B**

3. Quelques configurations particulières

Afin de nous construire une petite intuition pour la résolution, ou non, de la devinette des moutons, nous allons étudier quelques configurations simples.

3.1. **Configuration `1N•1B`.**

Fait 1. *La configuration* `1N•1B` *est résoluble.*

Démonstration. Nous n'avons que deux façons de résoudre le jeu. En voici une.

`[E1]`	N		B	
`[E2]`	N	B		
`[E3]`		B	N	
`[E4]`	B		N	← Gagné !

□

3.2. **Configuration `2N•1B`.**

Fait 2. *La configuration* `2N•1B` *est résoluble.*

Démonstration. Pour résoudre cette configuration, nous utilisons la résolution de la sous-configuration `1N•1B` sur les trois dernières cases. Ceci nous permet ci-après de passer directement de `[E1]` à `[E2]` dans notre preuve.

`[E1]`	N	N		B	
`[E2]`	N	B		N	
`[E3]`		B	N	N	
`[E4]`	B		N	N	← Gagné !

□

3.3. **Configuration `2N•2B`.**

Essayons maintenant de résoudre la configuration `2N•2B` en passant comme précédemment par la résolution d'une sous-configuration. Voici un premier essai en passant par la configuration `2N•1B` des quatre premières cases.

`[E1]`	N	N		B	B	
`[E2]`	B		N	N	B	← Perdu !

Nous sommes bloqués : le mouton blanc tout à droite ne pourra jamais se déplacer. De façon analogue, passer par la sous-configuration `1N•2B` sur les quatre dernières cases ne nous permet pas de gagner car nous aurons un mouton noir tout à gauche qui ne pourra jamais se déplacer *(notez au passage une forme de symétrie du jeu sur laquelle nous reviendrons plus tard).*

Il reste une dernière sous-configuration à utiliser, à savoir la `1N•1B` sur les trois cases centrales. Une possibilité consiste à faire comme suit où en `[E3]` les trois moutons à gauche sont définitivement bloqués.

`[E1]`	N	N		B	B	
`[E2]`	N	B		N	B	
`[E3]`	N	B	B	N		← Perdu !

Il est facile de vérifier qu'en partant de `[E2]` ci-dessus, il est impossible de gagner ! On peut alors se demander si le jeu `2N•2B` est en fait impossible à gagner. La réponse est non comme nous allons le voir.

Fait 3. *La configuration* `2N•2B` *est résoluble.*

Démonstration. Nous allons utiliser une méthode simple consistant à faire le maximum possible de mouvements pour une couleur donnée et ceci sans bloquer le jeu. On ne cherche pas ici à raisonner à long terme. Ce type de méthode est dite *« gloutonne »*.

`[E1]`	N	N		B	B	← On choisit une couleur, la blanche.
`[E2]`	N	N	B		B	← Ne pouvant plus bouger de blancs, on passe aux noirs.
`[E3]`	N		B	N	B	
`[E4]`		N	B	N	B	
`[E5]`	B	N		N	B	← Ne pouvant plus bouger de noirs, on passe aux blancs.
`[E6]`	B	N	B	N		← Ne pouvant plus bouger de blancs, on passe aux noirs.
`[E7]`	B	N	B		N	
`[E8]`	B		B	N	N	← Seul un mouton blanc peut bouger.
`[E9]`	B	B		N	N	← Gagné !

Il n'était pas évident qu'avec une vision à court terme nous puissions gagner. □

3.4. **Configuration** `3N•2B`**.** Regardons si la méthode gloutonne vue dans la preuve du fait 3.3 peut s'appliquer à une autre configuration comme la `3N•2B` par exemple. Nous allons commencer avec la couleur blanche.

`[E1]`	N	N	N		B	B	
`[E2]`	N	N	N	B		B	
`[E3]`	N	N		B	N	B	
`[E4]`	N		N	B	N	B	
`[E5]`	N	B	N		N	B	
`[E6]`	N	B	N	B	N		
`[E7]`	N	B	N	B		N	
`[E8]`	N	B		B	N	N	
`[E9]`		B	N	B	N	N	
`[E10]`	B		N	B	N	N	
`[E11]`	B	B	N		N	N	
`[E12]`	B	B		N	N	N	← Gagné !

Indiquons au passage le résultat que nous venons de démontrer.

Fait 4. *La configuration* `3N•2B` *est résoluble.*

Remarque 2. *Intuitivement, nous pouvons penser que nous avons là une méthode générale de résolution. Est-ce vrai ? Nous allons bientôt répondre positivement à cette question.*

3.5. **Configuration `kN•1B`.** Avant de passer au cas général, nous allons démontrer le fait suivant où le nombre de moutons noirs est quelconque.

Fait 5. *La configuration* `kN•1B` *est résoluble.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser un raisonnement par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

- **Cas de base :** pour $k = 0$, la configuration `kN•1B` est résoluble car on passe de $\boxed{}\boxed{\mathbf{B}}$ à $\boxed{\mathbf{B}}\boxed{}$ directement.
- **Hérédité :** supposons que la configuration `kN•1B` soit résoluble. Nous devons en déduire que la configuration `(k+1)N•1B` l'est aussi. Voici comment faire où les points de suspension indiquent soit rien du tout, soit des moutons noirs côte à côte.

[E1]	···	N		B	← Il y a $(k+1)$ noirs à gauche. On décide de bouger le blanc.
[E2]	···	N	B		← Un noir va aller prendre sa place définitive à droite.
[E3]	···		B	N	← Nous reconnaissons à gauche la sous-configuration `kN•1B`.

  A partir de la dernière étape, il suffit de résoudre la sous-configuration `kN•1B` à gauche grâce à l'hypothèse de récurrence, et ceci sans toucher le mouton noir bien placé tout à droite qui de toute façon ne peut plus bouger.

$\square$

Les preuves des faits 3.3 et 3.4 sont faciles à comprendre mais leur généralisation va nous demander un peu de travail et de prudence. Le chemin entre l'intuition est la démonstration n'est pas toujours direct.

4. Deux principes de symétrie

Imaginons que nous soyons de part et d'autre de la ligne de jeux. Pour vous les règles de déplacement et les couleurs sont inversés par rapport à moi. Si je résous une configuration, vous pourrez aussi la faire avec la votre un peu particulière. Ceci nous donne l'idée de chercher des principes de symétrie. Les faits suivants en proposent deux.

Fait 6. *La configuration* `kN•pB` *est résoluble si et seulement si la configuration* `pN•kB` *l'est aussi. Par exemple, nous avons :*

| N | N | N | N | | B | B | *est résoluble.* $\iff$ | N | N | | B | B | B | B | *est résoluble.*

Plus généralement, considérons deux configurations $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, et pour chaque $k \in \{1;2\}$ notons $\mathcal{R}_k$ la configuration obtenue en faisant un demi-tour et en échangeant les couleurs. Alors il existe des mouvements permettant de passer de $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}_2$ si et seulement si il en existe pour aller de $\mathcal{R}_1$ à $\mathcal{R}_2$ (attention à l'ordre des indices).

Démonstration. Donnons un exemple d'application des transformations.

(1) On applique un demi-tour à la ligne de jeu :

| N | N | N | N | | B | B | devient | B | B | | N | N | N | N | .

Tout mouvement ou saut fait dans un sens sur une ligne de jeu sera fait dans l'autre sens sur l'autre.

(2) Après le demi-tour, on échange les couleurs pour revenir aux règles classiques du jeu :

| B | B | | N | N | N | N | devient | N | N | | B | B | B | B | .

Revenons au cas général. Si l'on peut passer de $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}_2$ alors il suffit de reprendre la même séquence de mouvements en échangeant les couleurs et les sens de parcours pour aller de $\mathcal{R}_1$ à $\mathcal{R}_2$. Ceci s'applique en particulier à la résolution d'un jeu telle que nous l'avons indiquée. Ceci est un petit truc tout bête qui va nous rendre un énorme service très bientôt. ☐

Redonnons les mouvements proposés pour résoudre la configuration `2N•2B`.

`[E1]`	N	N		B	B
`[E2]`	N	N	B		B
`[E3]`	N		B	N	B
`[E4]`		N	B	N	B
`[E5]`	B	N		N	B
`[E6]`	B	N	B	N	
`[E7]`	B	N	B		N
`[E8]`	B		B	N	N
`[E9]`	B	B		N	N

Constatez-vous quelque chose ? Si vous regardez de part et d'autre de l'étape `[E5]`, nous avons une autre forme de symétrie. Mettons-là en valeur.

`[E1]`	N	N		B	B	⌝	↱	`[E9]`	B	B		N	N
`[E2]`	N	N	B		B	↓	↑	`[E8]`	B		B	N	N
`[E3]`	N		B	N	B	↓	↑	`[E7]`	B	N	B		N
`[E4]`		N	B	N	B	↓	↑	`[E6]`	B	N	B	N	

↳ → `[E5]` | B | N | | N | B | → ⬏

Ceci motive le fait général suivant.

Fait 7. *Considérons deux configurations $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, et pour chaque $k \in \{1\,;2\}$ notons $\mathcal{R}_k$ la configuration obtenue en faisant juste un demi-tour sans échanger les couleurs. Alors il existe des mouvements permettant de passer de $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}_2$ si et seulement si il en existe pour aller de $\mathcal{R}_2$ à $\mathcal{R}_1$* (attention à l'ordre des indices).

Démonstration. Il suffit de raisonner sur deux étapes successives en considérant les différents mouvements possibles. ☐

5. Résolution de la configuration `kN·kB`

Les démonstrations ci-dessous sont sans astuce particulière et faites en raisonnant sur la ligne de jeu telle que nous la connaissons. Autrement dit, nous n'allons pas travailler avec une représentation ad-hoc du jeu.

Remarque 3. *Dans la suite, pour ne pas alourdir le document, nous indiquerons d'un seul coup plusieurs mouvements successifs. Par exemple, voici une méthode possible pour résoudre la configuration* `3N•3B` *qui va au passage nous éclairer pour le cas général.*

`[E1]`	**N**	**N**	**N**		**B**	**B**	**B**	← Un seul blanc peut bouger.
`[E2]`	**N**	**N**	**N**	**B**		**B**	**B**	← Deux noirs peuvent bouger.
`[E3]`	**N**		**N**	**B**	**N**	**B**	**B**	← Trois blancs peuvent bouger.
`[E4]`	**N**	**B**	**N**	**B**	**N**	**B**		← Trois noirs peuvent bouger.
`[E5]`		**B**	**N**	**B**	**N**	**B**	**N**	← Par symétrie, on sait que l'on va gagner. Voir le fait 7.

Notons au passage la configuration particulière de l'étape `[E4]` *car ceci va être important pour notre preuve du cas général.*

Fait 8. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Suivant la parité de k nous avons :*

(1) Si $k = 2r$ est pair, nous pouvons passer de `kN•kB` *à* `kNB•` .

(2) Si $k = 2r + 1$ est impair, nous pouvons passer de `kN•kB` *à* `•kNB` .

Démonstration. Ceci découle du résultat plus général suivant en prenant $m = 0$. □

Fait 9. *Soit $(k\,;m) \in \mathbb{N}^2$. Suivant la parité de k nous avons :*

(1) Si $k = 2r$ est pair, nous pouvons passer de `kNmNB•kB` *à* `(k+m)NB•` .

(2) Si $k = 2r + 1$ est impair, nous pouvons passer de `kNmNB•kB` *à* `•(k+m)NB` .

Démonstration. Pour $j \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_j$ la propriété « $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ *tel que* $0 \leq k \leq j$, *soit (1) est vrai, soit (2) est vrai* ». Prouvons $\mathcal{P}_j$ par récurrence sur $j \in \mathbb{N}$.

- **Cas de base :** pour la suite nous devons à la fois prouver $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$.
  $\mathcal{P}_0$ est clairement vérifiée puisque $\mathcal{P}_0$ est « $\forall m \in \mathbb{N}$, *nous pouvons passer de* `mNB•` *à* `(0+m)NB•` » .
  Passons à $\mathcal{P}_1$. Nous devons valider la proposition « $\forall m \in \mathbb{N}$, *nous pouvons passer de* `1NmNB•1B` *à* `•(1+m)NB` » . Les cas $m = 0$ et $m = 1$ sont faciles à traiter, tandis que pour $m \geq 2$, il suffit de faire les mouvements suivants.

`[E1]`	**N**	**N**	**B**	···	**N**	**B**		**B**	← Du type `1NmNB•1B` .
`[E2]`		**N**	**B**	···	**N**	**B**	**N**	**B**	← Du type `•(1+m)NB` .

- **Hérédité :** supposons que $\mathcal{P}_j$ avec en plus $j \geq 1$. On peut faire ceci car si $j = 0$ alors $j + 1 = 1$ donne un cas qui a déjà été traité. Nous devons alors déduire $\mathcal{P}_{j+1}$ de $\mathcal{P}_j$.

  Si $m = 0$ alors nous faisons les mouvements suivants.

`[E1]`	···	**N**	**N**	**N**		**B**	**B**	**B**	···	← Du type `(j+1)N0NB•(j+1)B` .
`[E2]`	···	**N**	**N**		**N**	**B**	**B**	**B**	···	
`[E3]`	···	**N**	**N**	**B**	**N**	**B**		**B**	···	← Du type `(j-1)N2NB•(j-1)B` .

  Comme $j - 1 \geq 0$ et $j + 1 \geq 2$ sont de même parité, la validité de $\mathcal{P}_j$ permet, si $j + 1 = 2r + 1$ est impair, d'arriver à `•(j-1+2)NB` c'est à dire à `•(j+1)NB` , et sinon d'arriver à `(j+1)NB•` .

  Si $m \geq 1$ alors nous faisons les mouvements suivants avec un abus de notations évidents pour les $\boxed{\mathbf{N}}\boxed{\mathbf{B}}$ centraux si $m = 1$ mais ceci n'invalide pas le raisonnement fait.

`[E1]`	···	N	N	N	N	B	···	N	B		B	B	B	···
`[E2]`	···	N	N		N	B	···	N	B	N	B	B	B	···
`[E3]`	···	N	N	B	N	B	···	N	B	N	B		B	···

La dernière configuration étant du type `(j-1)N(m+2)NB•(j-1)B` , nous pouvons de nouveau arriver à `•(j+1+m)NB` ou `(j+1+m)NB•` suivant la parité de $(j+1)$.

□

Fait 10. *$\forall k \in \mathbb{N}^*$, la configuration* `kN•kB` *est résoluble.*

Démonstration. Distinguons deux cas avec des abus de notations évidents qui sont juste là pour faciliter la compréhension.

- Supposons que $k = 2r$ soit pair. Nous pouvons alors faire les mouvements suivants d'après le fait 8.

`[E1]`	···	N	N	N		B	B	B	···
`[E2]`	N	B	N	B	···	N	B		
`[E3]`		B	N	···	B	N	B	N	

  Comme les configurations des étapes `[E2]` et `[E3]` sont symétriques, en reprenant les mouvements à rebours de `[E2]` à `[E1]` et en échangeant juste les sens de parcours, et non les couleurs, nous arrivons finalement à la configuration symétrique de | ··· | N | N | | B | B | ··· | qui est | ··· | B | B | | N | N | ··· | ce qui nous fait gagner *(voir le fait 7)*.

- Supposons que $k = 2r+1$ soit impair. Nous pouvons alors faire les mouvements suivants de nouveau en faisant appel au fait 8.

`[E1]`	···	N	N	N		B	B	B	···
`[E2]`		N	B	N	B	···	N	B	
`[E3]`	B	N	···	B	N	B	N		

  Nous pouvons conclure comme précédemment avec un argument de symétrie.

□

Remarque 4. *Si vous reprenez les preuves de cette section, vous noterez que nous avons de nouveau appliquer une tactique gloutonne en commençant par faire bouger un mouton noir.* ***Nous avons une preuve algorithmique constructive !***

6. Résolution de la configuration `kN·pB`

Fait 11. *Soit la configuration initiale* `kN•pB` *avec* $(k\,;p) \in \mathbb{N}^2$ *tel que* $k > p \geq 1$ (autrement dit, nous avons plus de moutons noirs que de blancs). *Suivant la parité de p nous avons :*

(1) Si $p = 2s$ est pair, nous pouvons passer de `kN•pB` *à* `(k-p)NpNB•` *.*

(2) Si $p = 2s+1$ est impair, nous pouvons passer de `kN•pB` *à* `(k-p)N•pNB` *.*

Démonstration. C'est immédiat en notant que `kN•pB` et `(k-p)NpN•pB` désignent la même configuration. Il suffit alors de faire appel au fait 8 en laissant immobile les $(k-p)$ premiers moutons noirs. □

Fait 12. *Soit $(k\,;p) \in \mathbb{N}^2$. La configuration initiale* `kN•pB` *est résoluble.*

Démonstration. Les cas $k = 0$ ou $p = 0$ sont évidents à résoudre donc nous supposerons dans la suite que $k \geq 1$ et $p \geq 1$.

Ensuite le 1er principe de symétrie vu dans le fait 6 permet de se ramener au cas où $k \geq p \geq 1$, puis le fait 10 permet de supposer $k > p \geq 1$ afin de pouvoir nous appuyer sur le fait précédent.

Distinguons alors deux cas avec des abus de notations évidents qui sont juste là pour faciliter la compréhension. Nous ne donnons que les grandes lignes *(les récurrences non rédigées ne sont pas difficiles)*.

- Supposons que $p = 2r$ soit pair. Nous pouvons alors faire les mouvements suivants.

`[E1]`	···	N	N	N	N	N		B	···	B	
`[E2]`	···	N	N	N	N	B	···	N	B		← Voir le fait précédent.
`[E3]`	···	N	N		N	B	···	N	B	N	← Un **N** bien placé tout à droite.
`[E4]`	···	N	N	B	N	···	B	N		N	
`[E5]`	···	N	N	B	···	N	B		N	N	← Un autre **N** bien placé à droite.
`[E6]`	N	B	···	N	B		N	···	N	N	← En continuant de proche en proche.
`[E7]`	B	···	B		N	···	N	N	···	N	← Voir la preuve du fait 10.

- Supposons que $p = 2r+1$ soit impair. Nous pouvons alors faire les mouvements suivants.

`[E1]`	···	N	N	N	N	N		B	···	B	
`[E2]`	···	N	N	N		N	B	···	N	B	← Voir le fait précédent.
`[E3]`	···	N	N	N	B	N	···	B	N		
`[E4]`	···	N		N	B	N	···	B	N	N	← Un **N** bien placé tout à droite.
`[E5]`		N	B	···	N	B	N	···	N	N	← En continuant de proche en proche.
`[E6]`	B	···	B		N	···	N	N	···	N	← Voir la preuve du fait 10.

□

Remarque 5. ***Là aussi, nous avons une preuve algorithmique constructive !***