

# BROUILLON - UN SIMPLE (?) BILLARD À DEUX BANDES

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution - Pas d’utilisation commerciale - Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



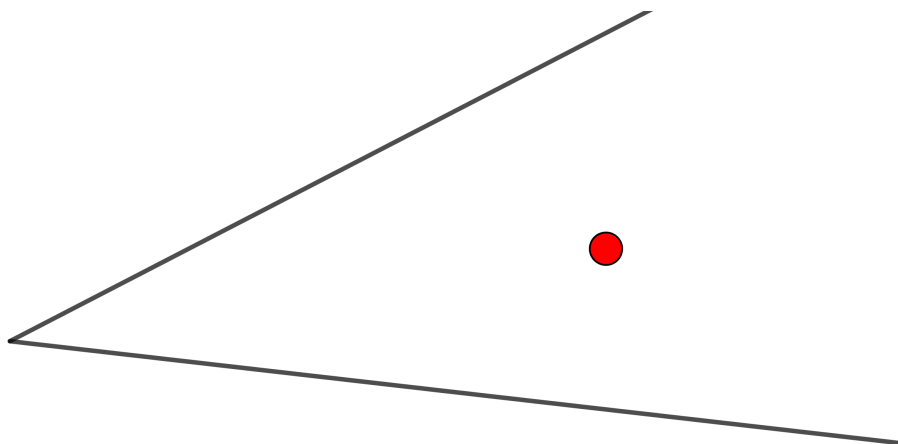
---

## TABLE DES MATIÈRES

1. Présentation du problème	1
2. Rechercher et conjecturer	2
3. Comprendre partiellement...	2
4. Notations pour la suite	3
5. Où se fait le 1 <sup>er</sup> rebond ?	4
6. Quand le 1 <sup>er</sup> rebond se fait "vers le haut"	5

### 1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Notre billard est un peu bizarre car il est juste constitué de deux demi-droites de même origine, et notre bille est dans le secteur angulaire le "plus petit" formé par ces deux bandes. Ceci se représente comme suit.

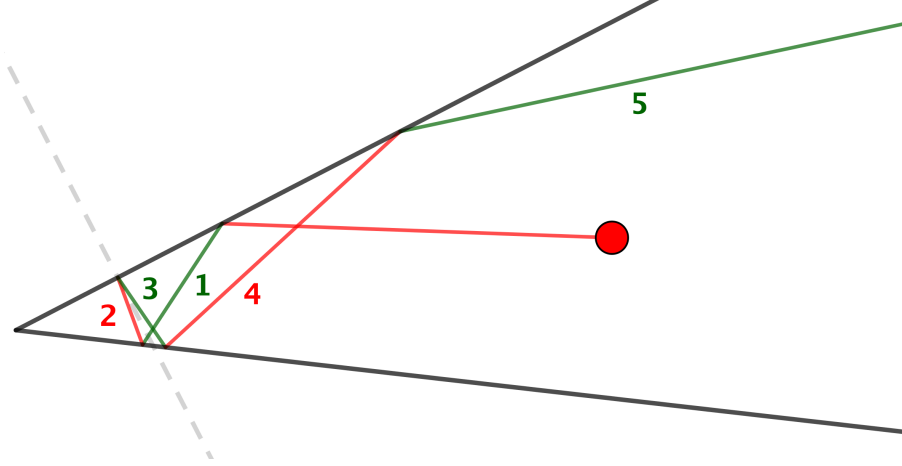


Dans la suite, nous considérons que notre bille est en fait un point, et du coup nous ne considérons pas les effets de rotation de la bille, et de plus nous ignorons les frottements, autorisant ainsi la bille à se balader vers l’infini et au-delà (*tout ceci pour plus de réalisme*).

Concrètement, on pourrait se munir de deux miroirs plans verticaux et d'une source pouvant envoyer, dans un plan horizontal, un rayon laser dans une direction donnée.

## 2. RECHERCHER ET CONJECTURER

width=12cm Avec notre billard, est-il possible d'envoyer notre bille pile à l'intersection des deux demi-droites ? Dans l'exemple ci-dessous, on constate que notre bille s'éloigne sans plus jamais rencontrer de bandes au bout du 5<sup>e</sup> rebond.



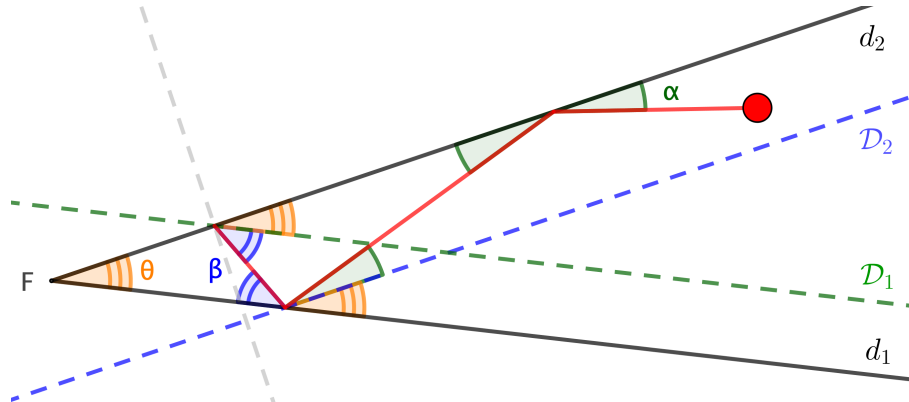
*Nous avons laissé une perpendiculaire en pointillés pour les plus sceptiques.*

En considérant d'autres cas, on se convainc assez vite que la seule façon d'aller au point d'intersection des deux demi-droites, c'est d'y aller directement. Dès lors que l'on fera une bande, il arrivera toujours un instant où la bille s'éloignera inexorablement. Il reste à démontrer ceci proprement. C'est le but de la section suivante.

## 3. COMPRENDRE PARTIELLEMENT...

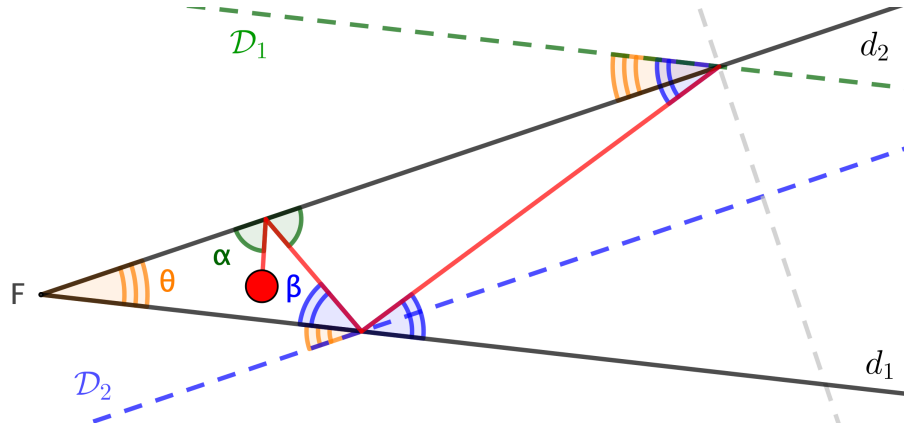
Essayons de voir, sans chercher à être trop rigoureux, la raison de ce phénomène au travers de deux situations instructives. Ci-après  $\mathcal{D}_k // d_k$  pour  $k \in \{1; 2\}$  et  $F$  est le point d'intersection des deux demi-droites.

Dans la 1<sup>re</sup> situation représentée ci-dessous, nous avons un rayon initial "allant vers  $F$ " et faisant avec la direction de la demi-droite  $d_2$  un angle géométrique  $\alpha \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ , puis au bout de deux rebonds, nous obtenons un rayon "allant vers  $F$ " avec un angle géométrique de mesure  $\alpha + 2\theta$  relativement à la direction de  $d_2$ .



*Situation n°1*

Dans la 2<sup>e</sup> situation ci-après, nous avons un rayon initial "allant à l'opposé de  $F$ " et faisant avec la direction de  $d_2$  un angle géométrique  $\alpha \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ , puis au bout de deux rebonds, nous obtenons un rayon "allant à l'opposé de  $F$ " avec un angle géométrique mesurant  $\alpha - 2\theta$  relativement à la direction de  $d_2$ .



Situation n°2

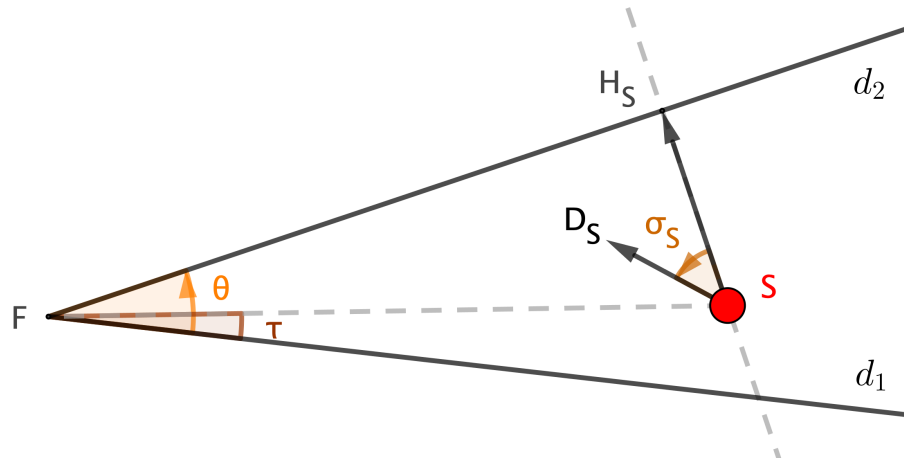
Imaginons que notre bille soit d'abord confrontée à la situation n°1. Au bout de deux rebonds, l'angle relativement à  $d_2$  passe de  $\alpha_0 = \alpha$  à  $\alpha_1 = \alpha + 2\theta$ . Une suite successive de situations n°1 va donc faire augmenter l'angle par rapport à la direction de  $d_2$ . Il arrivera donc un moment où la situation n°2 arrivera, excepté si l'on obtient un rebond perpendiculaire à  $d_2$ . Nous ignorons ici ce cas qui sera géré dans notre démonstration.

Une fois que la situation n°2 se présente, nous avons des angles de plus en plus petit relativement à  $d_2$  jusqu'à arriver au dernier rebond possible après lequel la bille s'éloignera indéfiniment. Voilà une explication partielle du phénomène.

#### 4. NOTATIONS POUR LA SUITE

Tous les angles sont orientés et confondus abusivement avec leur mesure principale.

- (1)  $d_1$  et  $d_2$  sont deux demi-droites d'origine  $F$  et telles que  $\theta = \langle d_1; d_2 \rangle \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ .
- (2)  $S$ , le point de départ, est tel que  $S \notin d_1 \cup d_2$  et  $\tau = \langle d_1; [FS) \rangle \in ]0; \theta[$ .
- (3) Pour tout point  $M$  du plan, nous noterons  $H_M$  son projeté orthogonal sur  $d_2$ .
- (4) Pour tout point  $M$  qui est sur le trajet de la bille, mais pas sur  $d_2$ , si  $D_M$  est un point tel que  $\overrightarrow{MD_M}$  indique la direction et le sens du trajet "sortant" de  $M$ , nous notons  $\sigma_M = \langle \overrightarrow{MH_M}; \overrightarrow{MD_M} \rangle$ .

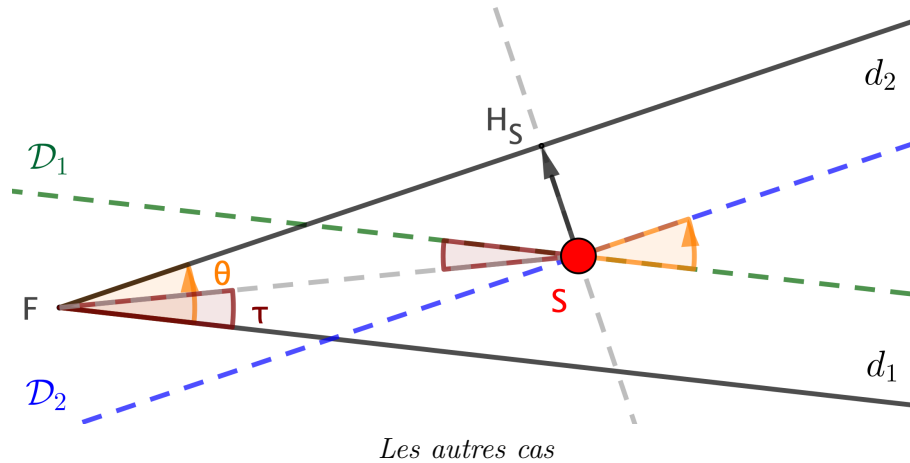
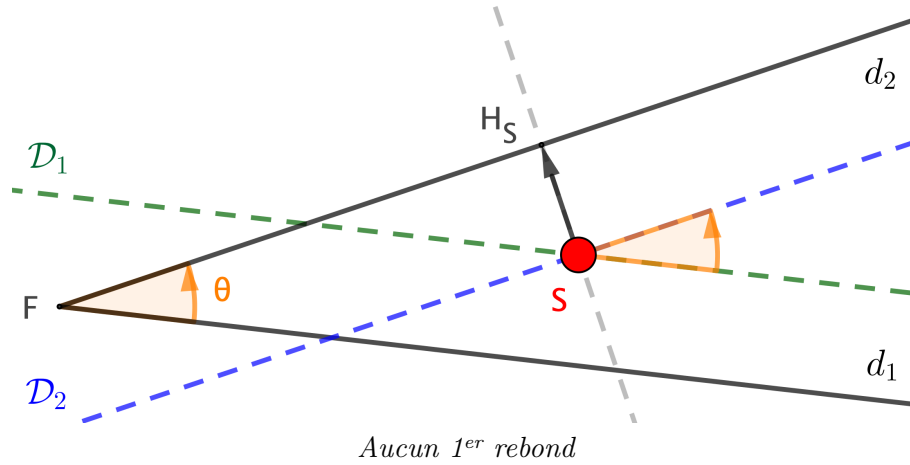


5. OÙ SE FAIT LE 1<sup>ER</sup> REBOND ?

**Fait 1.** Nous avons les cas initiaux suivants.

- Il n'y a aucun rebond si et seulement si  $\sigma_S \in \left[-\frac{\pi}{2} - \theta; -\frac{\pi}{2}\right]$ .
- La bille va directement vers  $F$  si et seulement si  $\sigma_S = \frac{\pi}{2} - \theta + \tau$ .
- Le 1<sup>er</sup> rebond se fait sur  $d_1$  si et seulement si  $\sigma_S \in \left]\frac{\pi}{2} - \theta + \tau; \pi\right] \cup \left]-\pi; -\frac{\pi}{2} - \theta\right[$ .
- Le 1<sup>er</sup> rebond se fait sur  $d_2$  si et seulement si  $\sigma_S \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} - \theta + \tau\right[$ .

*Démonstration.* Tout est contenu dans les deux dessins suivants où  $\mathcal{D}_k \parallel d_k$  pour  $k \in \{1; 2\}$ .



□

Il nous reste juste à traiter les cas d'un 1<sup>er</sup> rebond se faisant sur  $d_1$  et  $d_2$  respectivement. En fait, nous n'avons besoin de traiter que la situation d'un 1<sup>er</sup> rebond sur  $d_2$ . En effet, une fois ceci étudié, l'autre cas s'obtiendra avec le même type de raisonnement excepté que l'on projettera  $S$  sur  $d_1$  au lieu de  $d_2$ .

6. QUAND LE 1<sup>ER</sup> REBOND SE FAIT "VERS LE HAUT"

**Fait 2.** Supposons que  $\sigma_S = 0$ .

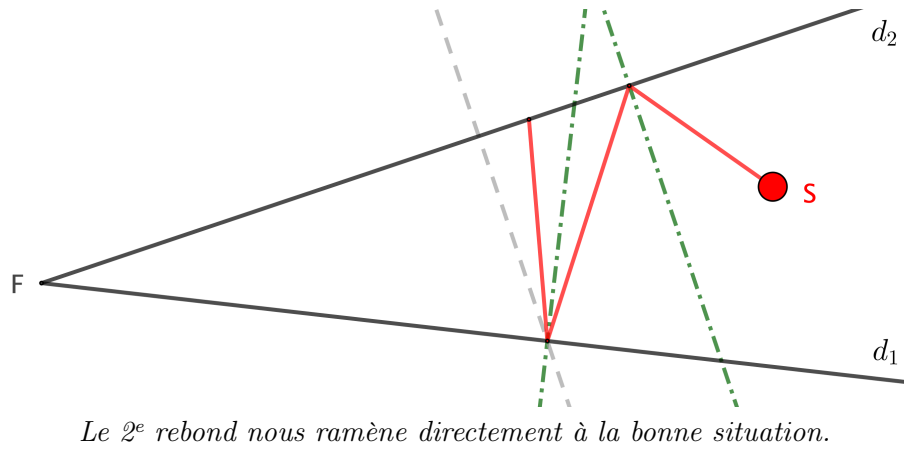
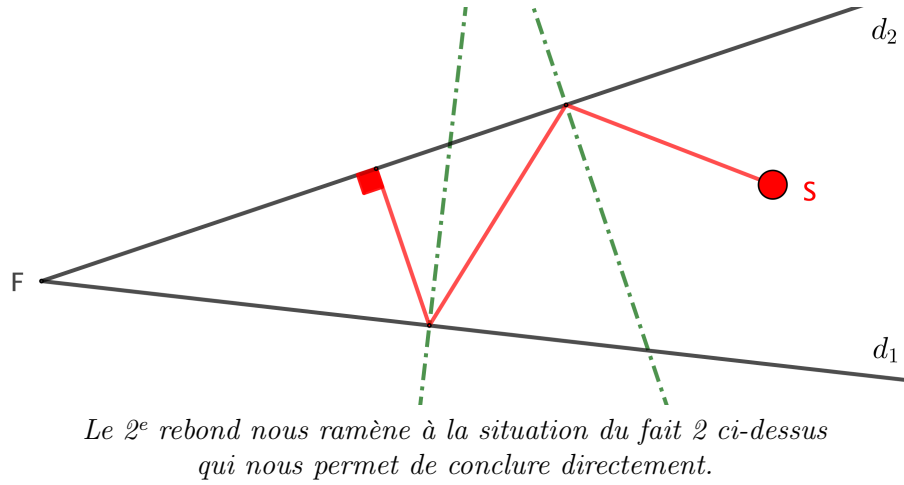
Notant  $M$  l'intersection de  $(SH_S)$  avec  $d_1$ , nous avons que  $M$  est sur le trajet de la bille avec  $\sigma_M < 0$ <sup>1</sup>.

*Démonstration.* Évident grâce au dessin précédent. □

**Fait 3.** Supposons que  $\sigma_S \in \left] 0; \frac{\pi}{2} - \theta + \tau \right[$ .

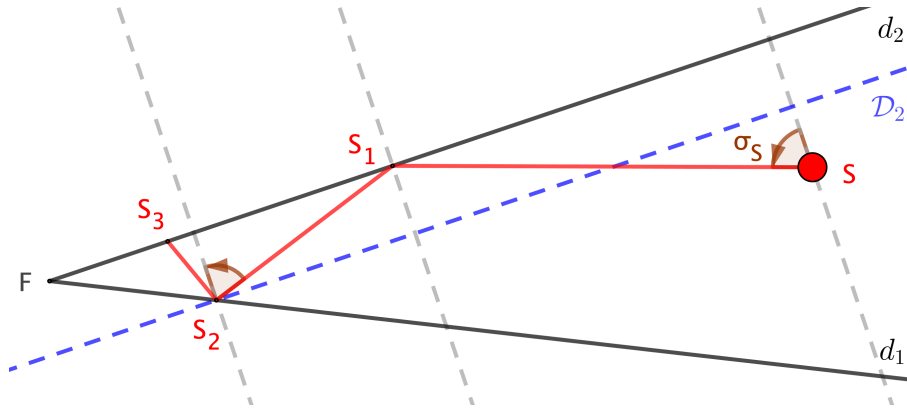
Il existe un point  $M$  sur le trajet de la bille, mais pas sur  $d_1$ , tel que  $\sigma_M < 0$ .

*Démonstration.* Au bout de deux rebonds, nous avons trois situations possibles dont les deux premières ci-après ne nécessitent aucune explication.



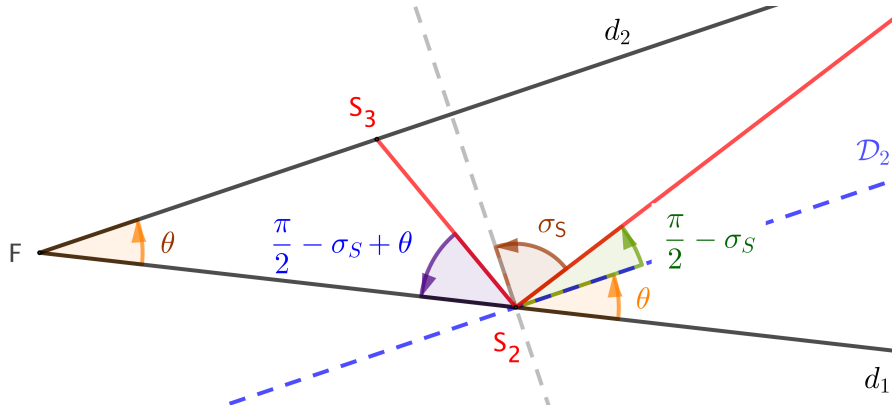
Voici la dernière situation représentée ci-dessous où  $\mathcal{D}_2 \parallel d_2$ .

1. On pourrait avoir un résultat plus fin mais ceci ne nous serait inutile pour la suite.



*Le 2<sup>e</sup> rebond nous ramène à la situation de départ  
mais avec une valeur de  $\sigma$  qui a augmenté.*

Faisons un zoom sur la partie de gauche pour évaluer précisément l'évolution faisant passer de  $\sigma_S$  à  $\sigma_{S_2}$ .



Nous avons alors  $\sigma_{S_2} = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \sigma_S + \theta\right) - \sigma_S = \sigma_S - 2\theta$ . Ceci montre que l'on passe de  $\sigma_S$  à  $\sigma_{S_2} = \sigma_S + \delta$  où  $\delta = -2\theta < 0$ . Cette dernière relation montre que l'on ne pourra pas avoir indéfiniment la dernière situation (*en toute rigueur, il faudrait faire un raisonnement par récurrence*).  $\square$

**Fait 4.** Supposons que  $\sigma_S \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ .

*Il existe un point M sur le trajet de la bille, mais pas sur  $d_1$ , tel que  $\sigma_M < -\frac{\pi}{2}$ . En particulier, à partir de ce point M la bille s'éloignera indéfiniment loin de F.*

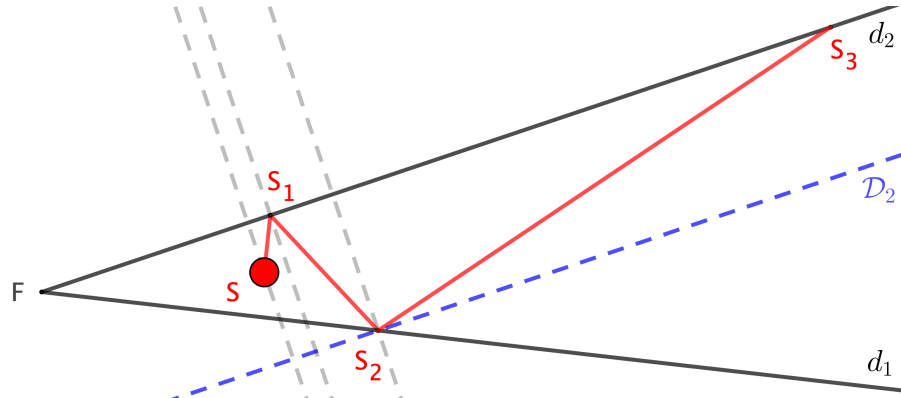
*Démonstration.* La démarche est similaire à la preuve précédente. Pour la situation problématique, on utilise les deux graphiques donnés dans la page suivante qui nous montrent que de nouveau l'on passe de  $\sigma_S$  à  $\sigma_{S_2} = \sigma_S + \delta$  où  $\delta = -2\theta < 0$ . Ceci nous permet une seconde fois de conclure puisque l'on ne pourra pas avoir indéfiniment  $\sigma_{S_{2k}} \geq -\frac{\pi}{2}$ .  $\square$

**Théorème.** Si le 1<sup>er</sup> rebond se fait sur  $d_2$  alors il n'y aura qu'un nombre fini de rebonds et le dernier rebond amènera la bille à s'éloigner indéfiniment loin de F.

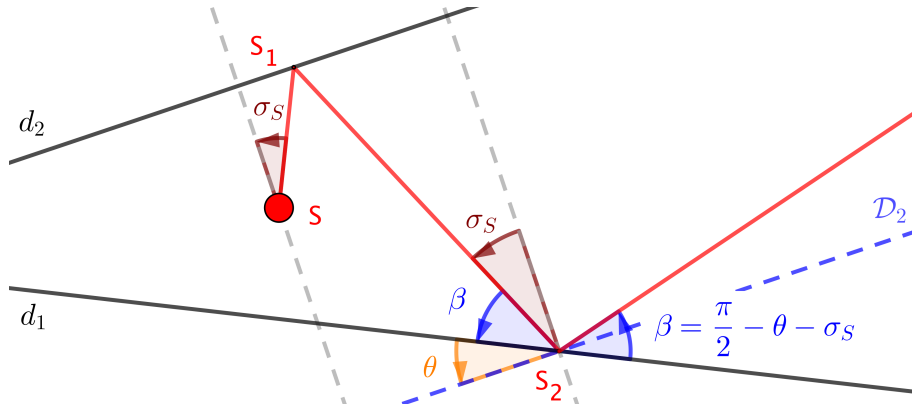
*Démonstration.* Distinguons trois cas.

- Si  $\sigma_S \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$  alors tout est donné par le fait 4.
- Si  $\sigma_S = 0$  alors le fait 2 nous donne un point  $M$  sur le trajet de la bille, mais pas sur  $d_1$ , tel que  $\sigma_M < 0$ .  
Si  $\sigma_M < -\frac{\pi}{2}$ , nous savons qu'à partir de  $M$  la bille s'éloignera indéfiniment loin de  $F$ .  
Sinon nous avons  $\sigma_M \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ . Le fait 4 nous permet alors de conclure.
- Enfin si  $\sigma_S \in \left]0; \frac{\pi}{2} - \theta + \tau\right]$ , il suffit de raisonner comme dans le point précédent mais en invoquant le fait 3.

□



Preuve du fait 4 – Vue large du cas problématique



Preuve du fait 4 – Vue zommée du cas problématique