

# BROUILLON - FAIRE DES ADDITIONS SUR UNE PARABOLE

CHRISTOPHE BAL

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution - Pas d’utilisation commerciale - Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.

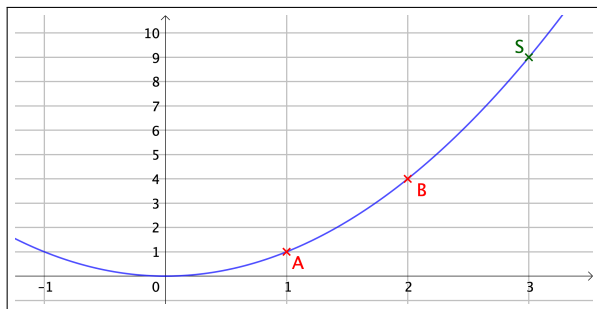


### TABLE DES MATIÈRES

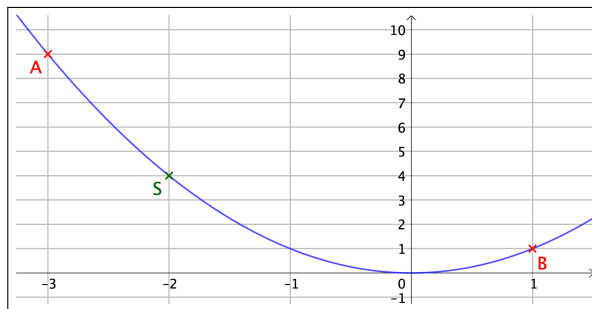
- |   |   |
|---|---|
| 1. Comment additionner des nombres grâce à la parabole d’équation $y = x^2$ | 1 |
| 2. Preuve de la validité de la conjecture                                   | 2 |
| 3. Toute parabole d’équation $y = ax^2 + bx + c$ a une structure de groupe  | 3 |

#### 1. COMMENT ADDITIONNER DES NOMBRES GRÂCE À LA PARABOLE D’ÉQUATION $y = x^2$

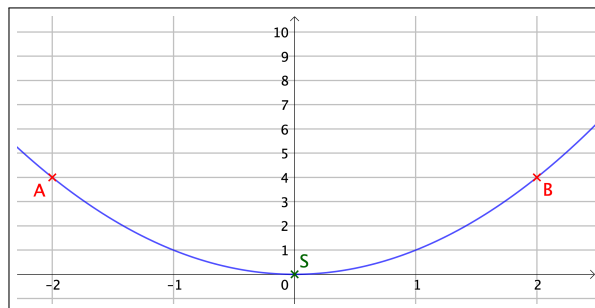
Dans un repère orthogonal, donnons nous la parabole  $\mathcal{P} : y = x^2$ . Plaçons-y les points  $A$ ,  $B$  et  $S$  d’abscisses respectives  $a$ ,  $b$  et  $s = a + b$ . Observez<sup>1</sup> les trois cas ci-dessous et essayez de conjecturer quelque chose (*la réponse est donnée dans la page suivante*).



Cas où  $a > 0$  et  $b > 0$



Cas où  $a < 0$  et  $b > 0$

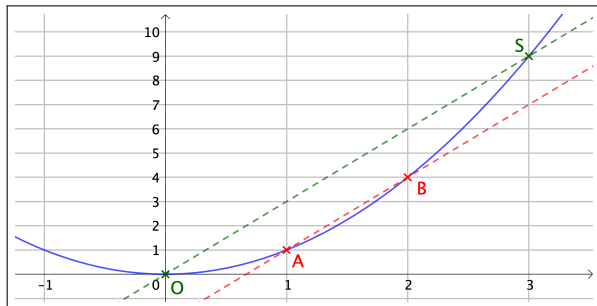


Cas où  $a = -b$

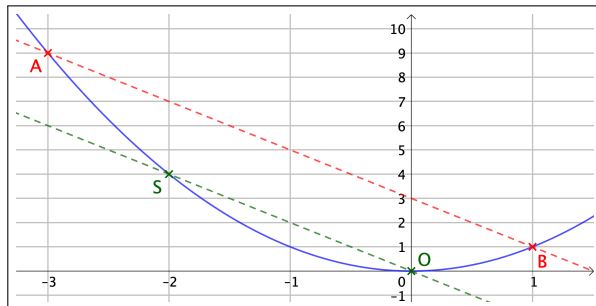
<sup>1</sup> Date: 17 Juillet 2019.

1. Le lieu de téléchargement de ce document contient un fichier GeoGebra `base-tool.ggb` manipulable dynamiquement pour vérifier combien il est aisé de conjecturer quelque chose.

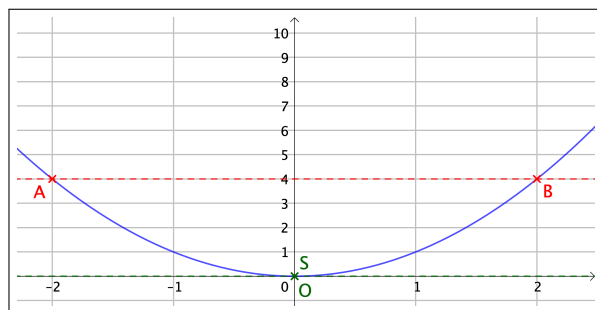
Pour mieux voir ce qu'il se passe, traçons quelques droites. Voici ce que cela donne.



Cas où  $a > 0$  et  $b > 0$



Cas où  $a < 0$  et  $b > 0$



Cas où  $a = -b$

Il devient évident de conjecturer que le point  $S$  se construit géométriquement comme suit.

- (1) Si  $x_A \neq -x_B$  alors on construit la parallèle à  $(AB)$  passant par  $O$  l'origine du repère. Le point  $S$  est le second point d'intersection de cette parallèle avec  $\mathcal{P}$  (notons qu'une droite coupe  $\mathcal{P}$  en au plus deux points).
- (2) Si  $x_A = -x_B$  alors  $S = O$ . Notons au passage que l'on peut voir ceci comme un cas limite du précédent avec un point d'intersection « double ».
- (3) Si  $A = B \neq O$ , on procède comme au point (1) mais avec la parallèle à la tangente en  $A$  à la parabole  $\mathcal{P}$ .

La section qui suit va valider cette conjecture qui donne un moyen très capillotracté de calculer une somme de deux réels via la parabole  $\mathcal{P}$ . Plus sérieusement, la construction ci-dessus est une propriété géométrique très jolie de la parabole  $\mathcal{P}$ .

## 2. PREUVE DE LA VALIDITÉ DE LA CONJECTURE

**Cas 1.** Supposons que  $x_A \neq -x_B$  de sorte que  $x_S \neq 0$ .

La droite  $(AB)$  a pour pente  $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$ . De plus, la droite  $(OS)$  qui passe par l'origine  $O$  du repère a pour pente  $\frac{y_S}{x_S} = \frac{x_S^2}{x_S} = x_S = a + b$ . Les droites  $(AB)$  et  $(OS)$  sont bien parallèles comme nous l'avons affirmé.

**Cas 2.** Supposons que  $x_A = -x_B$ .

Comme  $x_S = a + b = 0$ , nous avons bien  $S = O$ .

**Cas 3.** Supposons que  $A = B \neq O$ .

Dans ce cas,  $x_S = 2a \neq 0$  donc la droite  $(OS)$  a pour pente  $x_S = 2a$  qui est bien la pente de la tangente en  $A$  à la parabole  $\mathcal{P}$ .

3. TOUTE PARABOLE D'ÉQUATION  $y = ax^2 + bx + c$  A UNE STRUCTURE DE GROUPE

Le procédé de construction que nous venons de prouver dans la section 2 se « *conserve* » par translations et dilatations verticales et horizontales. Il se trouve que ce sont ces transformations qui permettent d'obtenir une parabole  $\mathcal{P}' : y = ax^2 + bx + c$ , donc  $a \neq 0$ , à partir de celle de la parabole  $\mathcal{P} : y = x^2$ . Nous pouvons donc munir toute parabole  $\mathcal{P}' : y = ax^2 + bx + c$  d'une structure de groupe isomorphe à celle de  $(\mathbb{R}; +)$ , et ceci avec un procédé géométrique simple pour « *additionner* » sur  $\mathcal{P}'$ . Que c'est joli !