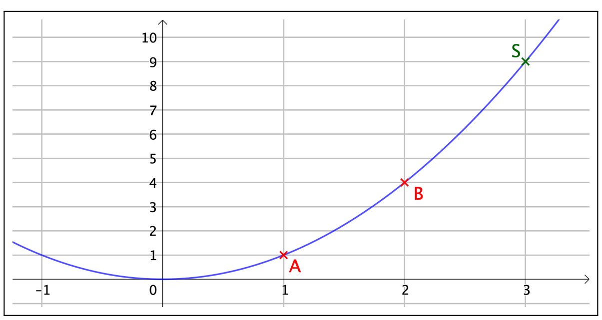
BROUILLON - FAIRE DES ADDITIONS SUR UNE PARABOLE

CHRISTOPHE BAL

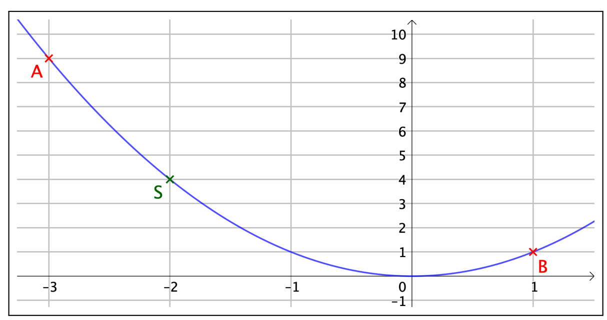
Table des matières

1. Comment additionner des nombres grâce à la parabole d’équation $y = x^2$

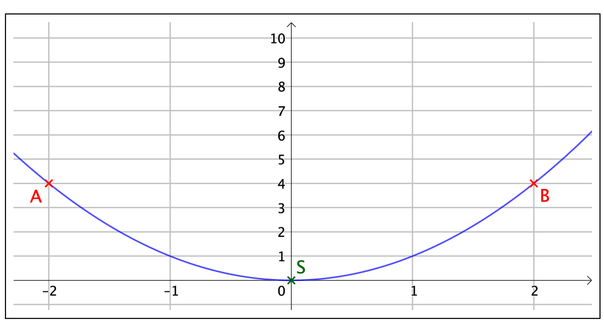
Dans un repère orthogonal, donnons nous la parabole $\mathscr{P} : y = x^2$. Plaçons-y les points A , B et S d’abscisses respectives a , b et $s = a + b$. Observez[1] les trois cas ci-dessous et essayez de conjecturer quelque chose *(la réponse est donnée dans la page suivante)*.



Cas où $a > 0$ et $b > 0$



Cas où $a < 0$ et $b > 0$

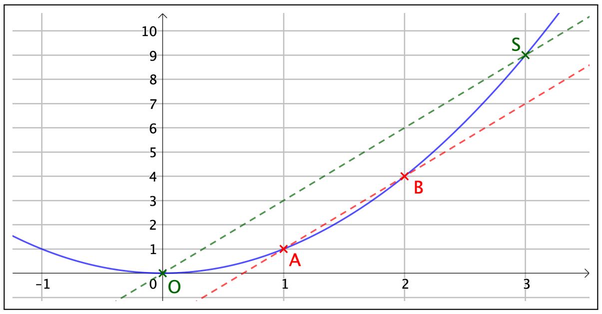


Cas où $a = -b$

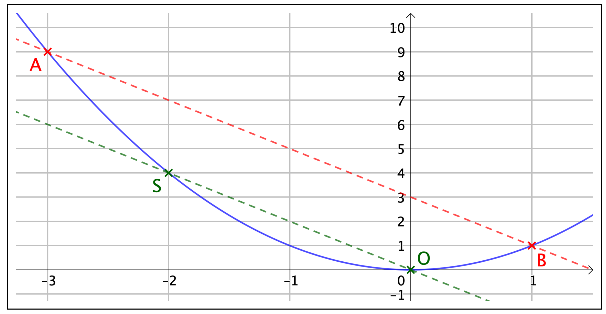
Date: 17 Juillet 2019 - 18 Juillet 2019.

1. Le lieu de téléchargement de ce document contient un fichier GeoGebra `base-tool.ggb` manipulable dynamiquement pour vérifier combien il est aisé de conjecturer quelque chose.

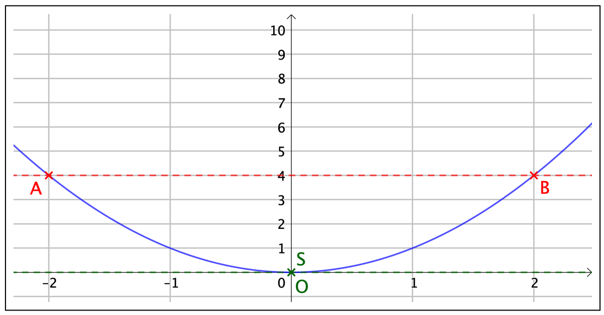
Pour mieux voir ce qu'il se passe, traçons quelques droites. Voici ce que cela donne.



Cas où $a > 0$ et $b > 0$



Cas où $a < 0$ et $b > 0$



Cas où $a = -b$

Il devient évident de conjecturer que le point S se construit géométriquement comme suit.

(1) Si $x_A \neq \pm x_B$ alors on construit la parallèle à (AB) passant par O l'origine du repère. Le point S est le second point d'intersection de cette parallèle avec $\mathscr{P}$ *(notons qu'une droite coupe $\mathscr{P}$ en au plus deux points)*.

(2) Si $x_A = -x_B$ alors $S = O$. Notons au passage que l'on peut voir ceci comme un cas limite du précédent avec un point d'intersection « double ».

(3) Si $x_A = x_B \neq 0$, on procède comme au point (1) mais avec la parallèle à la tangente en A à la parabole $\mathscr{P}$.

La section qui suit va valider cette conjecture qui donne un moyen très capillotracté de calculer une somme de deux réels via la parabole $\mathscr{P}$. Plus sérieusement, la construction ci-dessus est une propriété géométrique très jolie de la parabole $\mathscr{P}$.

2. Preuve de la validité de la conjecture

Cas 1. *Supposons que $x_A \neq \pm x_B$ de sorte que $x_S \neq 0$.*

La droite (AB) a pour pente $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$. De plus, la droite (OS) qui passe par l'origine O du repère a pour pente $\frac{y_S}{x_S} = \frac{x_S^2}{x_S} = x_S = a + b$. Les droites (AB) et (OS) sont bien parallèles comme nous l'avons affirmé.

Cas 2. *Supposons que $x_A = -x_B$.*

Comme $x_S = a + b = 0$, nous avons bien $S = O$.

Cas 3. *Supposons que $x_A = x_B \neq 0$.*

Dans ce cas, $x_S = 2a \neq 0$ donc la droite (OS) a pour pente $x_S = 2a$ qui est bien la pente de la tangente en A à la parabole $\mathscr{P}$.

3. Toute parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ a une structure de groupe

Le procédé de construction que nous venons de prouver dans la section 2 se *« conserve »* par translations et dilatations verticales et horizontales. Il se trouve que ce sont ces transformations qui permettent d'obtenir une parabole $\mathscr{P}\,' : y = ax^2 + bx + c$, donc $a \neq 0$, à partir de celle de la parabole $\mathscr{P} : y = x^2$. Nous pouvons donc munir toute parabole $\mathscr{P}\,' : y = ax^2 + bx + c$ d'une structure de groupe isomorphe à celle de $(\mathbb{R}\,;+)$, et ceci avec un procédé géométrique simple pour *« additionner »* sur $\mathscr{P}\,'$. Que c'est joli !