NOMBRE DE SOUS-ENSEMBLES D'UN ENSEMBLE FINI
UNE PREUVE TRÈS ÉLÉMENTAIRE.

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writing/drafts.

Mentions « légales »

Voici comment expliquer rapidement à un lycéen[1] qu'un ensemble $\mathscr{E}$ de n éléments permet de fabriquer 2^n sous-ensembles ayant de 0 à n éléments. Sans entrer dans le détail d'une récurrence, voici comment faire où si besoin le cas 1 peut être omis.

(1) $\emptyset$ est le seul ensemble à 0 élément. Son seul sous-ensemble est $\emptyset$. On a bien $1 = 2^0$.

(2) Soit $\mathscr{E} = \{\spadesuit\}$ un ensemble avec un seul élément. Cet ensemble contient 2 sous-ensembles, à savoir $\emptyset$ et $\{\spadesuit\}$. On a bien $2 = 2^1$.

(3) Soit $\mathscr{E} = \{\spadesuit_1\,;\spadesuit_2\}$ un ensemble avec deux éléments. Cet ensemble contient les $4 = 2^2$ sous-ensembles $\emptyset$, $\{\spadesuit_1\}$, $\{\spadesuit_2\}$ et $\{\spadesuit_1\,;\spadesuit_2\}$.
Le pont clé est de noter que $\{\spadesuit_2\} = \emptyset \cup \{\spadesuit_2\}$ et $\{\spadesuit_1\,;\spadesuit_2\} = \{\spadesuit_1\} \cup \{\spadesuit_2\}$.

(4) Soit maintenant $\mathscr{E} = \{\spadesuit_1\,;\ldots;\spadesuit_{n+1}\}$ un ensemble avec $(n+1)$ éléments. Les sous-ensembles de $\mathscr{E}$ se classent en deux catégories.

   (a) **Catégorie 1 :** les sous-ensembles ne contenant pas $\spadesuit_{n+1}$. Il y en a autant que de sous-ensembles de $\mathscr{F} = \{\spadesuit_1\,;\ldots;\spadesuit_n\}$.

   (b) **Catégorie 2 :** les sous-ensembles contenant $\spadesuit_{n+1}$. De tels sous-ensembles s'obtiennent à partir de sous-ensembles de $\mathscr{F}$ en leur adjoignant $\spadesuit_{n+1}$. Ceci démontre qu'il y a autant de sous-ensembles de catégorie 2 que de sous-ensembles de $\mathscr{F}$.

   Finalement le nombre de sous-ensembles de $\mathscr{E}$ est deux fois plus grand que celui de $\mathscr{F}$.

(5) Finalement de proche en proche, ou plus rigoureusement via une récurrence, nous avons sans effort qu'un ensemble $\mathscr{E}$ de n éléments permet de fabriquer 2^n sous-ensembles ayant de 0 à n éléments.

Date: 19 Octobre 2020.

1. Bien entendu on adaptera le formalisme pour rendre digeste les principes élémentaires utilisés.