BROUILLON - FAIRE DES PRODUITS SUR UNE HYPERBOLE

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writing/drafts.

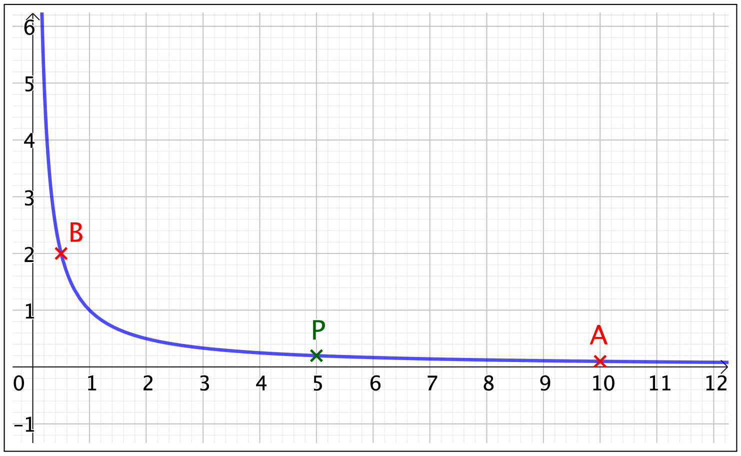
Mentions « légales »

Table des matières

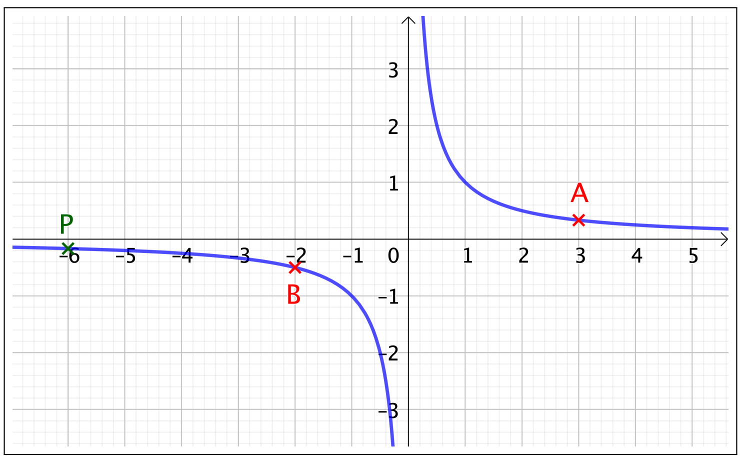
Date: 22 Juillet 2019 - 27 Juillet 2019.

1. Comment additionner des nombres grâce à l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$

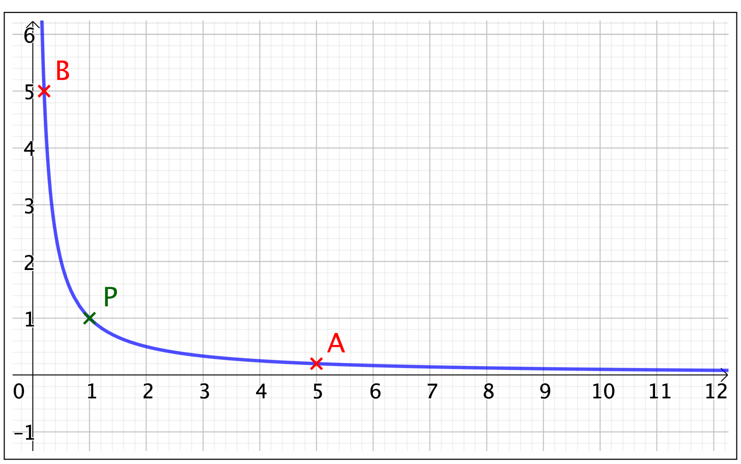
Dans un repère orthogonal, donnons nous l'hyperbole $\mathscr{H} : y = \frac{1}{x}$. Plaçons-y les points A , B et P d'abscisses respectives a , b et $p = ab$. Observez[1] les trois cas ci-dessous et essayez de conjecturer quelque chose *(la réponse est donnée dans la page suivante)*[2].



Cas où $a > 0$ et $b > 0$



Cas où $a < 0$ et $b > 0$

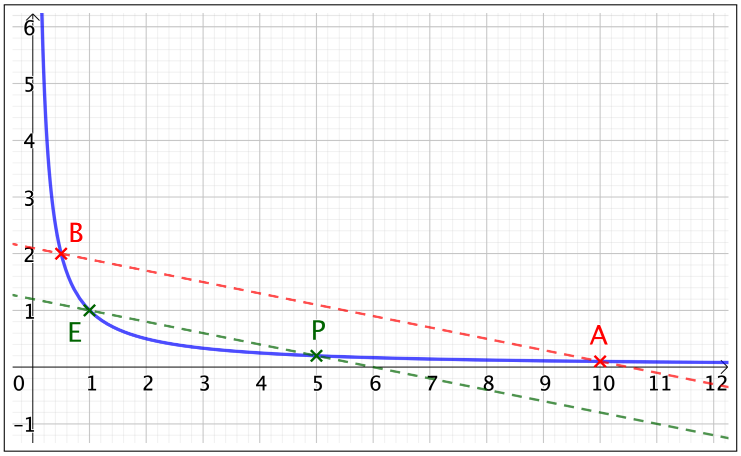


Cas où $ab = 1$

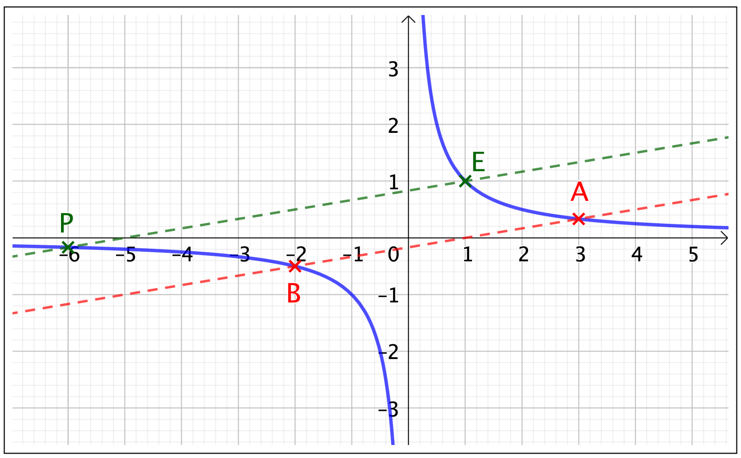
---

1. Pour conjecturer plus facilement quelque chose, utilisez le fichier GeoGebra `base-tool.ggb` manipulable dynamiquement qui est disponible sur le lieu de téléchargement de ce document.
2. On sait *« additionner »* sur un cercle et sur $\mathscr{P} : y = x^2$. Or yx , $x^2 - y^2$ et $x^2 - y$ sont des formes quadratiques qui ont des propriétés géométriques communes. Avec tout ceci en tête, la recherche proposée ici devient très naturelle.

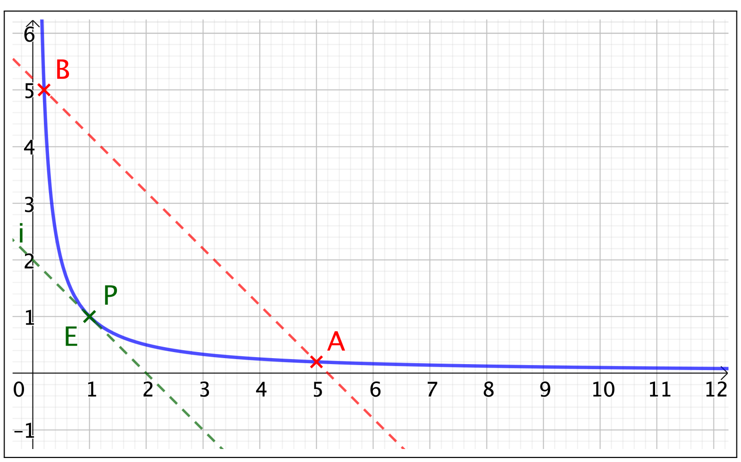
Pour mieux voir ce qu'il se passe, ajoutons $E(1\,;1)$, ce qui semble naturel car 1 est son propre inverse, et traçons quelques droites. Voici ce que cela donne.



Cas où $a>0$ et $b>0$



Cas où $a<0$ et $b>0$



Cas où $ab=1$

Il devient évident de conjecturer que le point P se construit géométriquement comme suit.

(1) Si $x_A x_B \neq 1$ et $A \neq B$ alors on construit la parallèle à (AB) passant par E . Le point P est le second point d'intersection de cette parallèle avec $\mathscr{H}$ *(notons qu'une droite coupe $\mathscr{H}$ en au plus deux points).*

(2) Si $x_A x_B = 1$ alors $P = E$. Notons au passage que l'on peut voir ceci comme un cas limite du précédent avec un point d'intersection « double ».

(3) Si $x_A x_B \neq 1$ et $A = B$, on procède comme au point (1) mais avec la parallèle à la tangente en A à l'hyperbole $\mathscr{H}$.

La section qui suit va valider cette conjecture qui donne un moyen très capillotracté de calculer un produit de deux réels non nuls via l'hyperbole $\mathscr{H}$. Plus sérieusement, la construction ci-dessus est une propriété géométrique très jolie de l'hyperbole $\mathscr{H}$.

2. Preuve de la validité de la conjecture

Rappelons que $\mathscr{H} : y = \frac{1}{x}$, $E(1\,;1)$, $A\left(a\,;\frac{1}{a}\right)$, $B\left(b\,;\frac{1}{b}\right)$ et $P\left(p\,;\frac{1}{p}\right)$ où $p = ab$ avec $(a\,;b) \in \left(\mathbb{R}^*\right)^2$.

Cas 1. *Supposons que* $x_A x_B = 1$ *.*

Il est clair que $P = E$ dans ce cas.

Cas 2. *Supposons que* $x_A x_B \neq 1$ *et* $A \neq B$ *.*

La droite (AB) a pour pente $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = -\frac{1}{ab}$. De plus, la droite (EP) , qui existe car $p \neq 1$, a pour pente $\frac{y_P - y_E}{x_P - x_E} = \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{p} - 1\right) = -\frac{1}{p} = -\frac{1}{ab}$. Les droites (AB) et (EP) sont bien parallèles comme nous l'avons affirmé.

Cas 3. *Supposons que* $x_A x_B \neq 1$ *et* $A = B$ *.*

Comme ici $p = a^2 \neq 1$. la droite (EP) a pour pente $\left(-\frac{1}{a^2}\right)$ qui est aussi la pente de la tangente en $A\left(a\,;\frac{1}{a}\right)$ à l'hyperbole $\mathscr{H}$ comme annoncé.

3. Toute hyperbole d'équation $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ a une structure de groupe

Le procédé de construction que nous venons de prouver se *« conserve »* par translations, et aussi par dilatations verticales et horizontales. Il se trouve que ce sont ces transformations qui permettent d'obtenir une hyperbole $\mathscr{H}' : y = \frac{ax+b}{cx+d}$, où $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$ [3], à partir de celle de l'hyperbole $\mathscr{H} : y = \frac{1}{x}$. Nous pouvons donc munir toute hyperbole $\mathscr{H}' : y = \frac{ax+b}{cx+d}$ d'une structure de groupe isomorphe à celle de $(\mathbb{R}^*\,;\times)$, et ceci avec un procédé géométrique simple pour *« multiplier »* sur $\mathscr{H}'$. Que c'est joli !

3. La condition $ad - bc \neq 0$ évite d'avoir une simplification de $\frac{ax+b}{cx+d}$ en une fonction constante comme on peut le constater en considérant les vecteurs $\vec{u}(a\,;b)$ et $\vec{v}(c\,;d)$, puis en notant que $ad - bc = \det(\vec{u}\,;\vec{v})$.