BROUILLON - CANDIDAT - À PROPOS DE L'EXERCICE DE SPÉ MATHS DU BAC S DE JUIN 2018 (MÉTROPOLE)

CHRISTOPHE BAL

Mentions « légales »

Table des matières

1. Ce qui interroge : une matrice « magique » sortie d'un chapeau

Dans le BAC S de Juin 2018 (Métropole), la partie A de l'exercice de Spécialité Mathématiques s'intéressait à l'équation diophantienne **[ED]** : $x^2 - 8y^2 = 1$ sur $\mathbb{N}^2$.

On a une solution évidente $(x\ ;y) = (3\ ;1)$ puis l'exercice introduit une matrice « magique » $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ pour ensuite construite des solutions $(x_n\ ;y_n)$ de façon récursive et linéaire comme suit : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

Très bien mais mais comment peut-on découvrir la matrice « magique » A ?

2. Un moyen élémentaire de découvrir la matrice « magique »

Une idée élémentaire pour découvrir la matrice « magique » A est de noter que nous pouvons écrire $x^2 - 8y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en posant $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ *(le lecteur connaissant les formes quadratiques ne sera pas surpris par cette réécriture)* .

En posant $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, comme nous avons $\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A^T Q A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, il est alors naturel de chercher A vérifiant $A^T Q A = Q$ car d'une solution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on pourra passer à une « autre » solution $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ comme dans le sujet du BAC S.

Utilisant le déterminant, nous avons comme contrainte immédiate que $\det A = \pm 1$ *(A doit donc être inversible).*

Date: 25 Juin 2018 - 10 Juillet 2019.

Cas 1 : *supposons d'abord que* $\det A = 1$.

Notant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, nous avons alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ d'où :

$$\begin{aligned}
A^T Q A = Q &\iff A^T Q = Q A^{-1} \\
&\iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} a & -8c \\ b & -8d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ 8c & -8a \end{pmatrix} \\
&\iff a = d \text{ et } b = 8c
\end{aligned}$$

La condition $\det A = 1$ pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 8c \\ c & a \end{pmatrix}$ nous donne $a^2 - 8c^2 = 1$. Que c'est joli !

Notons que l'ensemble des matrices de ce type est stable par multiplication, et que la matrice du sujet de BAC n'est autre que celle correspondant à la solution élémentaire $(a\,;c) = (3\,;1)$.

Cas 2 : *supposons maintenant que* $\det A = -1$.

Notant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, nous avons alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ d'où comme dans les calculs précédents : $A^T Q A = Q \iff a = -d$ et $b = -8c$.

La condition $\det A = -1$ pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -8c \\ c & -a \end{pmatrix}$ nous redonne $a^2 - 8c^2 = 1$ mais avec un autre ensemble de matrices qui lui n'est pas stable par multiplication.

3. Prenons un peu de hauteur : un groupe « caché »

Ce qui suit reprend les excellentes indications données par Jérôme Germoni dans une discussion au bas de cette page : `http://images.math.cnrs.fr/+Nombres-puissants-au-bac-S+` *(chercher les messages de l'utilisateur projetmbc).*

Dans la suite, nous ne considérons que l'ensemble des matrices A telles que $A^T Q A = Q$ et $\det A = 1$ afin de pouvoir les multiplier entre elles.

Nous savons que A est du type $A = \begin{pmatrix} a & 8c \\ c & a \end{pmatrix}$ et que la contrainte $a^2 - 8c^2 = 1$ est cachée dans la relation $A^T Q A = Q$.

Nous savons aussi que si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ verifie $x^2 - 8y^2 = 1$, il en sera de même pour $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + 8cy \\ cx + ay \end{pmatrix}$.

Notant $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions entières [1] de **[ED]** : $x^2 - 8y^2 = 1$, ce qui précède motive la définition de la loi $\star$ sur $\mathcal{S}$ via $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + 8cy \\ cx + ay \end{pmatrix}$. Nous allons démontrer que cette loi $\star$ est bien définie et qu'elle fait de $\mathcal{S}$ un groupe. Très joli ! Non ?

1. Ce qui suit se généralise aux solutions rationnelles, à celles réelles ou encore à celles complexes mais ne sortons pas du cadre de ce modeste document.

Les raisonnements suivants se font en faisant le parallèle entre $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et la matrice produit $\begin{pmatrix} a & 8c \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 8y \\ y & x \end{pmatrix}$ dont on garde juste la première colonne [2] . Rappelons que les deux matrices du produit précédent sont des matrices entières A vérifiant $A^T Q A = Q$ et $\det A = 1$. Nous avons que pour ce type de matrice, la première colonne est solution de **[ED]** .

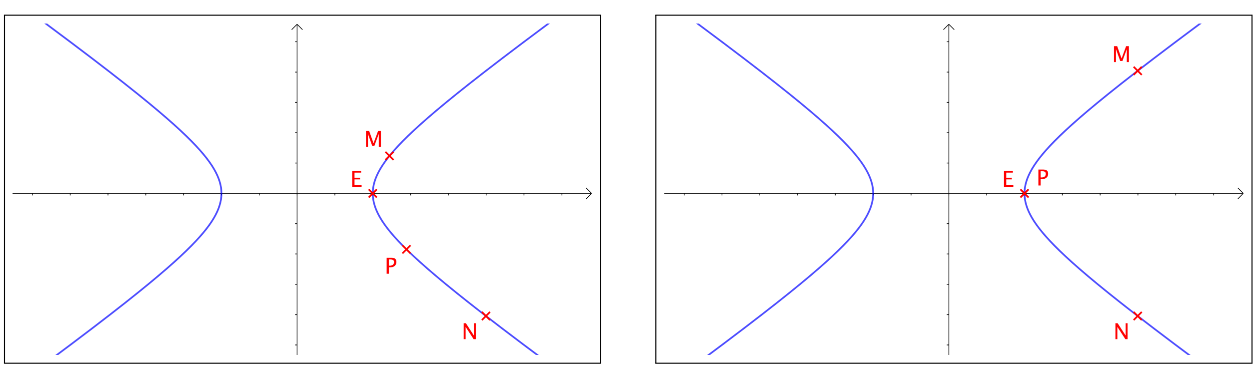
- La loi $\star$ est bien interne à $\mathcal{S}$ car si $A^T Q A = Q$ avec $\det A = 1$ et $B^T Q B = Q$ avec $\det B = 1$, alors nous avons :
  - $(AB)^T Q (AB) = B^T A^T Q A B = B^T Q B = Q$
  - $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 1$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre de $\star$ car sa matrice associée est la matrice identité.
- $\begin{pmatrix} a \\ -c \end{pmatrix}$ est l'inverse de $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ *(revoir si besoin le cas 1 de la section précédente).*
- Pour finir, l'associativité de $\star$ découle de celle de la multiplication des matrices.

4. Tout est géométrie, ou presque...

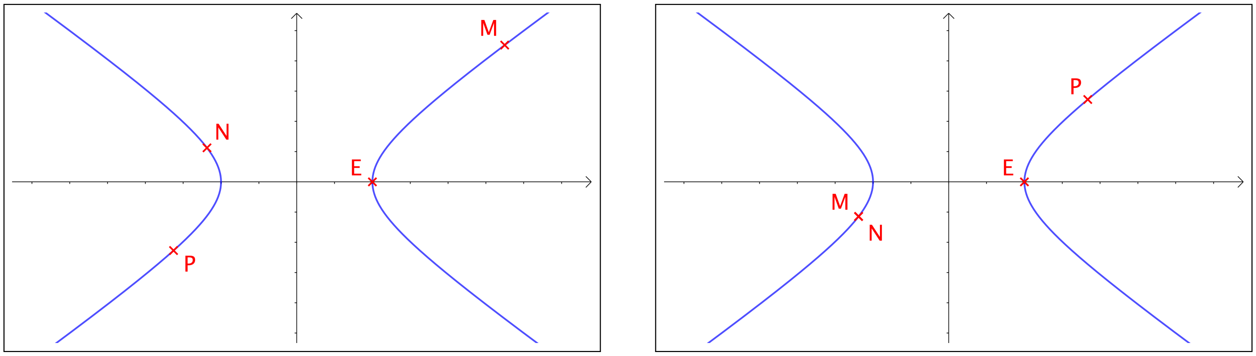
Ce qui suit tente de donner une explication naturelle du lien entre la loi $\star$ et un procédé géométrique rappelé par Jérôme Germoni précédemment cité.

Jusqu'à présent, nous n'avons à aucun moment représenter l'hyperbole $\mathscr{H}$ « à deux branches » d'équation implicite $X^2 - 8Y^2 = 1$ *(on utilise ici des majuscules pour le système de coordonnées)*. C'est un peu dommage !

Ci-dessous se trouvent quatre représentations avec deux points M et N sur $\mathscr{H}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ainsi que les points E , cf. le neutre de $\star$, et P, eux aussi sur $\mathscr{H}$, de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.



2. Les résultats présentés ici se vérifient et se trouvent directement à la main sans passer par les matrices mais ceci est bien moins élégant.



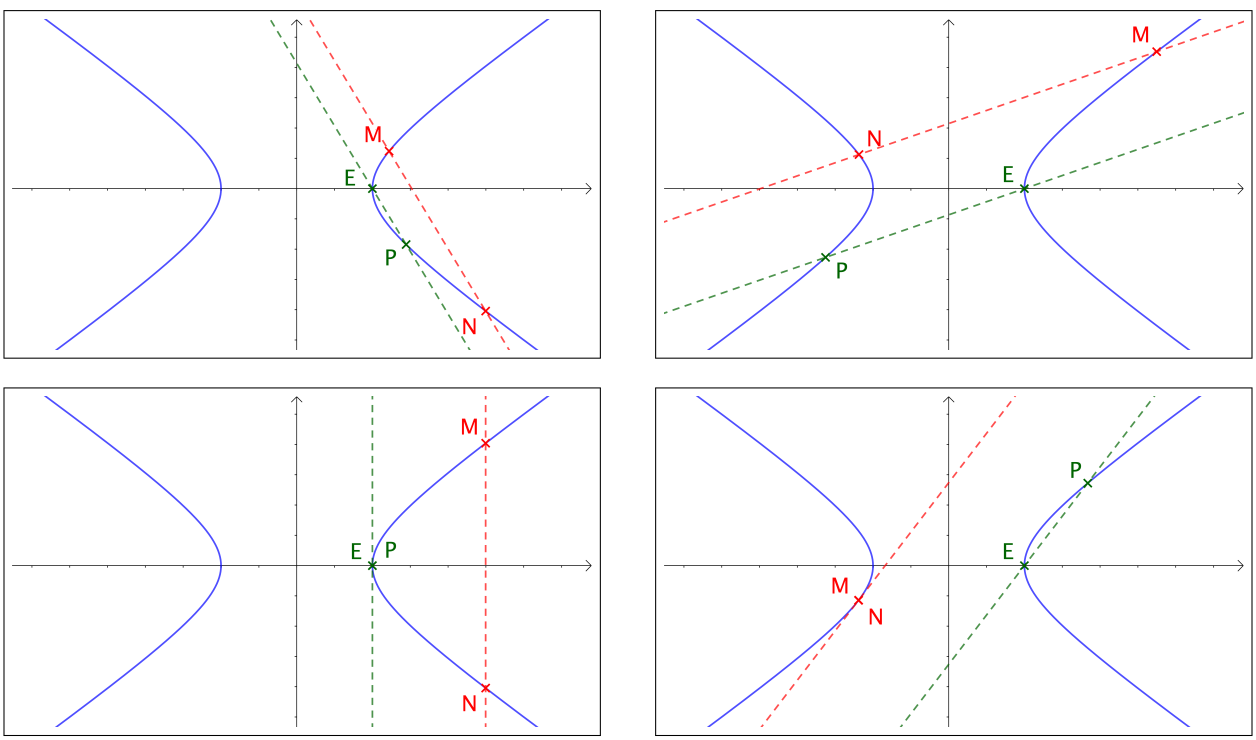
Les graphiques précédents suggèrent[3] un procédé géométrique simple pour construire P.

(1) Si $M \neq N$ et $x_M \neq x_N$ alors on construit la parallèle à (MN) passant par E . Le point P est le second point d'intersection de (MN) avec $\mathscr{H}$.

(2) Si $M \neq N$ et $x_M = x_N$ alors $P = E$. Notons au passage que l'on peut voir ceci comme un cas limite du précédent avec un point d'intersection « double ».

(3) Si $M = N$ on procède comme ci-dessus mais avec la parallèle de la tangente à $\mathscr{H}$ au point M .

Dans les graphiques suivants, nous avons tracé les droites utilisées par le procédé géométrique conjecturé à l'instant.



Prouvons la validité de notre conjecture. Nous confondrons les points avec les vecteurs utilisés pour définir la loi $\star$.

3. Le lieu de téléchargement de ce document contient un fichier GeoGebra `base-tool.ggb` manipulable dynamiquement pour vérifier combien il est aisé de conjecturer la construction géométrique.

(1) Supposons que $M \neq N$ avec $x_M \neq x_N$.

Nous devons juste vérifier que (EP) et (MN) sont parallèles puisque l'on sait que $P \neq E$ *(voir le point suivant si besoin)*. Ce qui suit est quelque peu brutal *(on pourrait faire appel à un logiciel de calcul formel qui ici peut être utilisé en toute confiance)*.

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{EP}\,;\overrightarrow{MN}\right) &= \begin{vmatrix} x''-1 & x'-x \\ y'' & y'-y \end{vmatrix} \\
&= (x''-1)(y'-y) - y''(x'-x) \\
&= (xx'+8yy'-1)(y'-y) - (yx'+xy')(x'-x) \\
&= xx'y' + 8yy'^2 - y' - xx'y - 8y^2y' + y - yx'^2 - xx'y' + yxx' + x^2y' \\
&= 8yy'^2 - y' - 8y^2y' + y - yx'^2 + x^2y'
\end{aligned}$$

Réordonnons les termes en nous souvenant que $x^2 - 8y^2 = 1$ et $x'^2 - 8y'^2 = 1$.

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{EP}\,;\overrightarrow{MN}\right) &= x^2y' - 8y^2y' - yx'^2 + 8yy'^2 - y' + y \\
&= (x^2-8y^2)y' - y(x'^2-8y'^2) - y' + y \\
&= y' - y - y' + y \\
&= 0
\end{aligned}$$

Nous avons bien vérifié le parallélisme des droites (EP) et (MN) .

(2) Supposons que $M \neq N$ avec $x_M = x_N$.

Dans ce cas, il est immédiat que les points M et N sont inversibles, *i.e.* $x_M = x_N$ et $y_M = -y_N$. Ceci justifie que $P = E$.

(3) Supposons que $M = N$.

Notant $F(X\,;Y) = X^2 - 8Y^2 - 1$, la tangente à $\mathcal{H} : F(X\,;Y) = 0$ en M admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -\frac{\partial F}{\partial Y}(x\,;y) \\ \frac{\partial F}{\partial X}(x\,;y) \end{pmatrix}$ c'est à dire $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 16y \\ 2x \end{pmatrix}$ sous la condition $(x\,;y) \neq (0\,;0)$ qui est vérifiée par tout point de notre hyperbole $\mathscr{H}$.

Comme de plus $x'' = x^2 + 8y^2 = 16y^2 + 1$ et $y'' = 2xy$, nous avons $\overrightarrow{EP}\begin{pmatrix} 16y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{EP} = y\overrightarrow{u}$. Ceci permet de conclure.

Remarque. Pour ceux qui connaissent la loi de groupe des courbes elliptiques, notons que ce qui précède peut être un point d'entrée naturel, et humainement calculable, vers celle-ci *(indiquons qu'il existe un moyen naturel, mais d'une très grande technicité, de tomber sur cette fameuse loi de groupe qui est trop souvent donnée violemment sans plus d'explications sur la raison du procédé géométrique qui lui est associé)*.