BROUILLON - IDENTITÉS REMARQUABLES VIA DES CALCULS « GÉOMÉTRIQUES », EST-CE RIGOUREUX ?

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page `https://github.com/bc-writing/drafts`.

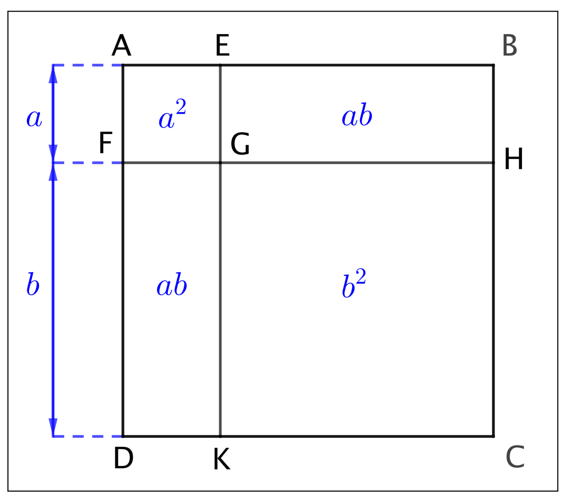
Mentions « légales »

Table des matières

1. Echauffement avec des égalités entre des polynômes

Via de simples calculs d'aires, il est très facile de découvrir les identités remarquables suivantes :

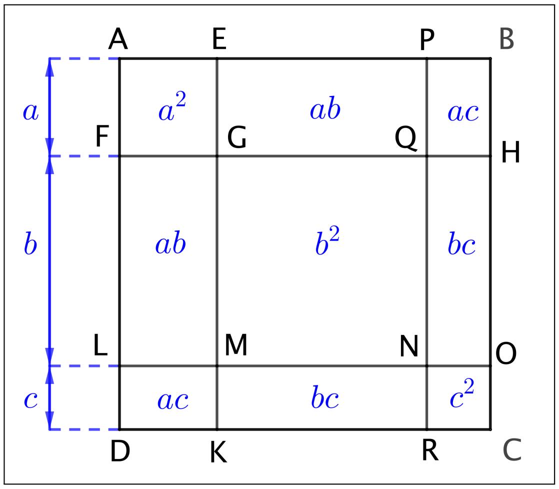
- $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$



Par exemple, considérons le dessin ci-contre où $ABCD$, $AEGF$ et $GHCK$ sont des carrés de côtés respectifs $(a+b)$, a et b . Il est évident que nous avons alors $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ mais n'oublions que $a > 0$ et $b > 0$ *(ce sont des contraintes géométriques concrètes)*.

Comment passer à $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ pour a et b deux réels de signes quelconques ? Une première idée est tout simplement de faire une vérification via un calcul algébrique. En résumé, on conjecture géométriquement puis on valide algébriquement.

Date: 16 Juillet 2019 - 18 Juillet 2019.



Bien que rigoureuse, la démarche précédente est peu satisfaisante car elle balaye d'un revers de main l'approche géométrique dont le rôle est réduit à la découverte d'une formule.

Si l'on considère le dessin ci-contre, il est tout de même dommage de devoir passer par du calcul algébrique, un peu pénible ici, pour avoir l'identité $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ avec a , b et c des réels de signes quelconques.

Ce qui serait bien ce serait de pouvoir dire que puisque $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ est vraie si $a>0$, $b>0$ et $c>0$, alors l'identité est automatiquement vérifiée par a , b et c des réels de signes quelconques.

Ce passage automatique est bien licite car nous avons le fait 1 ci-après que l'on peut appliquer aux polynômes suivants.

- $P(a\,;b) = (a+b)^2 - a^2 - b^2 - 2ab$
- $P(a\,;b\,;c) = (a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$

Fait 1. *Soit $P \in \mathrm{R}\big[X_1\,;\dots;X_n\big]$ un polynôme réel à n variables où $n \in \mathrm{N}^*$.*
Si P s'annule sur $\left(\mathrm{R}_+^*\right)^n$ alors P s'annule sur R^n tout entier.

Démonstration. Faisons une preuve par récurrence sur $n \in \mathrm{N}^*$ pour démontrer la validité de la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie comme suit : « *Pour tout polynôme réel $P \in \mathrm{R}\big[X_1\,;\dots;X_n\big]$ à n variables, si P s'annule sur $\left(\mathrm{R}_+^*\right)^n$ alors P s'annule sur R^n tout entier.* ».

- *Cas de base.*

  $\mathcal{P}(1)$ signifie qu'un polynôme réel à une variable s'annulant sur R_+^* est identiquement nul sur R tout entier.

  Comme un polynôme réel non nul n'a qu'un nombre fini de racines, nous avons la validité de $\mathcal{P}(1)$.

- *Hérédité.*

  Supposons $\mathcal{P}(n)$ valide pour un naturel n fixé, mais quelconque, puis considérons un polynôme P de $(n+1)$ variables qui vérifie les conditions de la propriété $\mathcal{P}(n+1)$.

  Fixons $x \in \mathrm{R}_+^*$ et considérons le polynôme $P_x(X_1\,;\dots;X_n) = P(X_1\,;\dots;X_n\,;x)$. Comme P_x vérifie les conditions de la propriété $\mathcal{P}(n)$, nous avons par hypothèse de récurrence $P_x(x_1\,;\dots;x_n) = 0$ soit $P(x_1\,;\dots;x_n\,;x) = 0$ pour tous réels x_1 , ... , x_n .

  Fixons maintenant des réels x_1 , ... , x_n de signes quelconques et considérons le polynôme $p(X) = P(x_1\,;\dots;x_n\,;X)$. Comme p vérifie $\mathcal{P}(1)$, nous avons $p(x) = 0$ soit $P(x_1\,;\dots;x_n\,;x) = 0$ pour tout réel x .

  Finalement $P(x_1\,;\dots;x_n\,;x) = 0$ pour tous réels x_1 , ... , x_n , x . Nous avons bien déduit la validité de $\mathcal{P}(n+1)$ à partir de celle de $\mathcal{P}(n)$.

- *Conclusion.*

  Par récurrence sur $n \in \mathrm{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout naturel non nul n .

□

Exemple 1. *En utilisant une approche géométrique semblable à celle présentée plus haut, il devient évident, mais aussi rigoureux maintenant, d'affirmer que pour tous réels a_1 , ... , a_n , où $n \in \mathrm{N}^*$, l'on a :*

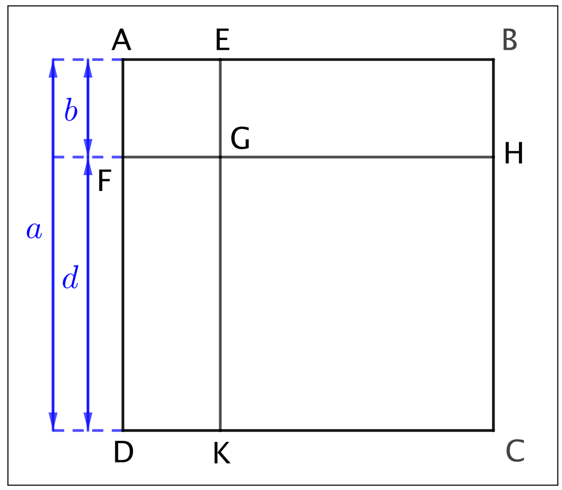
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} (a_k)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$$

Exemple 2. *Nous laissons le soin au lecteur de vérifier à l'aide d'un cube, le solide géométrique, l'identité $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ valable pour tous réels a et b .*

Considérons maintenant le dessin ci-contre avec $d = a - b$ et la contrainte $a > b$. Le fait 1, bien que très utile, ne peut plus s'appliquer ici au calcul géométrique évident suivant.

$\mathscr{A}_{GHCK} = \mathscr{A}_{ABCD} - \mathscr{A}_{ABHF} - \mathscr{A}_{AEKD} + \mathscr{A}_{AEGF}$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$



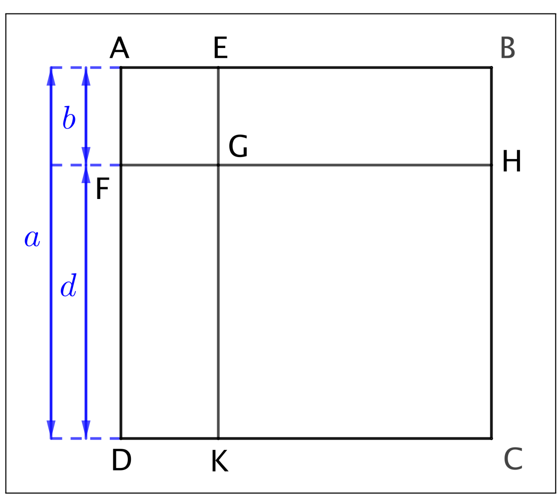
Comment faire alors pour en déduire que pour tous réels a et b , l'identité $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ reste valable ? Aucune crainte à avoir car nous disposons du fait 2 moins restrictif suivant.

Fait 2. *Soit $P \in \mathrm{R}[X_1 ; ... ; X_n]$ un polynôme réel à n variables où $n \in \mathrm{N}^*$.*

Si $\mathscr{E} \subseteq \mathrm{R}^n$ contient $\mathscr{E}_1 \times \cdots \times \mathscr{E}_n$ où chaque $\mathscr{E}_k \subseteq \mathrm{R}$ est infini, et si P s'annule sur $\mathscr{E}$ alors P s'annule sur R^n tout entier.

Démonstration. Il est très facile de vérifier que la preuve du fait 1 s'adapte au cadre plus général proposé ici. □

Exemple 3. *Considérons le dessin ci-dessous avec $d = a - b$ et la contrainte $a > b$ afin d'établir l'identité $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.*

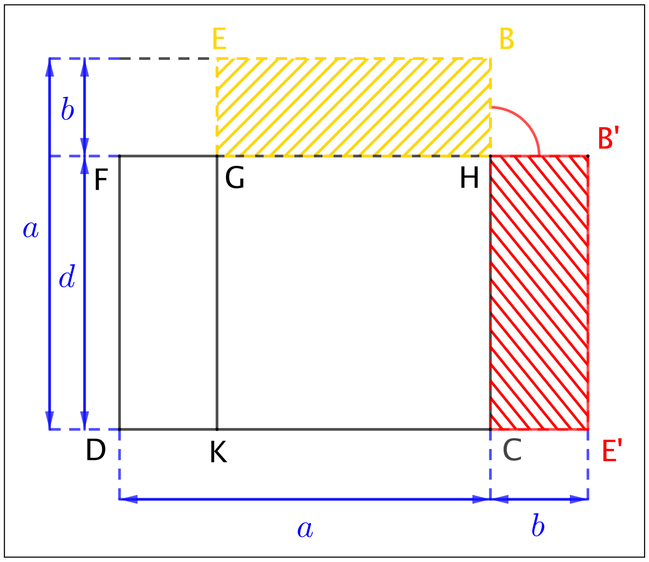


Commençons par des calculs géométriques simples.

$\mathscr{A}_{ABCD} - \mathscr{A}_{AEGF} = \mathscr{A}_{GHCK} + \mathscr{A}_{EBHG} + \mathscr{A}_{FGKD}$

$a^2 - b^2 = \mathscr{A}_{GHCK} + \mathscr{A}_{EBHG} + \mathscr{A}_{FGKD}$

En déplaçant ensuite le rectangle $EBHG$ comme ci-dessous, nous obtenons alors un rectangle de dimension $(a+b) \times (a-b)$.

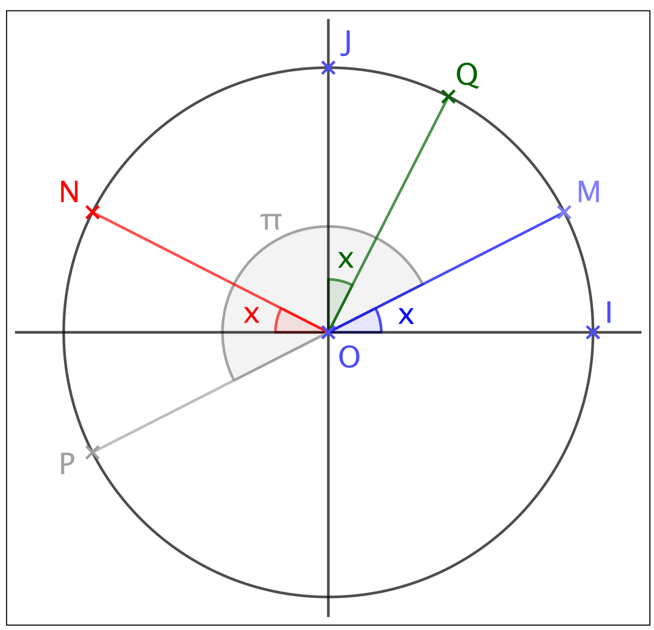


Finalement, nous obtenons $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ si $a > b$. Le fait 2 permet alors d'affirmer que $\forall (a\,;b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

2. Allons plus loin avec les formules trigonométriques

A l'aide du dessin ci-contre, où les mesures des angles sont en radians, il est facile, via les points M , N , P et Q , de fournir des arguments géométriques justifiant que sous la condition $x \in \left]0\,; \frac{\pi}{4}\right[$, on a :

- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
  $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
  $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$



De nouveau, il serait bien de pouvoir passer à la validité des formules précédentes sur $\mathbb{R}$ tout entier sans plus d'effort *(considérer les autres cas n'est pas compliqué mais c'est un peu pénible)*.

Nous allons voir que cela est licite grâce au fait 3 suivant qui est un peu technique car il nécessite la notion de fonction holomorphe que nous allons définir de suite.

Définition. *Soit une fonction complexe f définie sur un ouvert Ω de* C .
f *est dite holomorphe en* $\omega \in \Omega$ *si la limite* $\lim\limits_{\substack{|z-\omega| \to 0 \\ z \in \Omega - \{\omega\}}} \dfrac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega}$ *existe dans* C .

Tout comme avec les fonctions réelles dérivables sur R, la propriété d'holomorphie se conserve par addition, multiplication, inverse et composition.

Fait 3. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de* C .
Si $\lambda \in \Omega$ vérifie $f(\lambda) = 0$ alors il existe un ouvert V tel que $\lambda \in V \subseteq \Omega$ et $\forall z \in V - \{\lambda\}$, $f(z) \neq 0$ (c'est le prinicpe des zéros isolés d'une fonction holomorphe).

Démonstration. Ceci nous amènerait trop loin donc nous admettrons ce résultat. □

Pour conclure, il suffit de savoir que les fonctions circulaires réelles ne sont en fait que les restrictions à R de fonctions holomorphes sur C tout entier, et de noter que le raisonnement géométrique au début de cette section fait clairement apparaître des zéros non isolés pour les fonctions holomorphes sur C ci-dessous [1].

- $A(z) = \cos(\pi - z) + \cos z$ et $B(z) = \sin(\pi - z) - \sin z$
- $C(z) = \cos(z + \pi) + \cos z$ et $D(z) = \sin(z + \pi) + \sin z$
- $E(z) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \sin z$ et $F(z) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \cos z$

1. Nous admettrons ces affirmations qui ne sont pas violentes à démontrer une fois que l'on a les bases de la théorie des fonctions holomorphes.