

# BROUILLON - RACINES RATIONNELLES D'UN POLYNÔME SYMÉTRIQUE DE DEGRÉ 4

CHRISTOPHE BAL

La question que l'on se pose est la suivante<sup>1</sup>.

$P(X) = aX^4 + bx^3 + cX^2 + bX + a$ , un polynôme symétrique de degré 4, peut-il n'avoir que des racines entières ? Que des racines rationnelles ?

## 1. CONSTATATIONS GÉNÉRALES

On peut supposer que  $a = 1$  i.e.  $P(X) = X^4 + bX^3 + cX^2 + bX + 1$ .

Dès lors si  $P(r) = 0$  alors  $r \neq 0$  et  $P\left(\frac{1}{r}\right) = 0$  (voir ci-dessous).

En fait, nous avons :

$P(X) = X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$  : caractérisation des polynômes symétriques de degré 4

$$P'(X) = 4X^3 P\left(\frac{1}{X}\right) - X^2 P'\left(\frac{1}{X}\right)$$

On en déduit que si  $r$  est une racine d'ordre au moins 2, il en est de même pour  $\frac{1}{r}$ .

## 2. UNIQUEMENT DES RACINES ENTIÈRES ?

Si  $P$  n'a que des racines entières alors ces dernières ne peuvent être que  $\pm 1$  qui sont les seuls entiers ayant un inverse entier. Ceci donne les uniques possibilités suivantes :

(1) Pour  $P(X) = (X+1)^4$ , nous avons  $X^4 \left(\frac{1}{X} + 1\right)^4 = (1+X)^4$  d'où  $P(X) = X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$  donc  $P$  est bien symétrique<sup>2</sup>.

(2)  $P(X) = (X-1)^4$  est aussi symétrique (on procède comme ci-dessus et en utilisant la parité de l'exposant).

(3) Pour  $P(X) = (X-1)^3(X+1)$ , nous avons  $X^4 \left(\frac{1}{X} - 1\right)^3 \left(\frac{1}{X} + 1\right) = (1-X)^3(1+X)$  d'où  $P(X) = -X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$ . Le polynôme n'est pas symétrique.

En fait  $P(X) = (X-1)^3(X+1) = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$  est anti-symétrique. Un polynôme de degré 4 est anti-symétrique si et seulement si  $P(X) = -X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$ .

---

*Date:* 6 Décembre 2018.

1. L'auteur s'est posé cette question en voulant fabriquer un polynôme symétrique de degré 4 à racines « simples » pour fabriquer une exercice.

2. On évite ainsi la tâche ingrate de développer brutalement  $(X+1)^4$  même si ceci aurait pu être fait sans effort via un programme de calcul formel tel que <https://www.wolframalpha.com>.

(4)  $P(X) = (X + 1)^3(X - 1)$  est anti-symétrique (comme ci-dessus).

(5)  $P(X) = (X + 1)^2(X - 1)^2$  est symétrique car il vérifie  $P(X) = X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$ .

### 3. UNIQUEMENT DES RACINES RATIONNELLES ?

Supposons que  $r \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$  soit une racine de  $P$ .

Le résultat sur la multiplicité supérieure ou égale à 2 nous donne que si  $r$  est de multiplicité au moins 2 alors  $\frac{1}{r} \neq r$  est aussi de multiplicité au moins 2. Ceci implique que  $r$  est de multiplicité 1 ou 2.

**$r$  est de multiplicité 1.** Si  $P$  admet une autre racine  $s \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$  avec  $s \neq r$  et  $s \neq \frac{1}{r}$  alors nécessairement  $P(X) = (X - r) \left(X - \frac{1}{r}\right) (X - s) \left(X - \frac{1}{s}\right)$ .

D'où

$$X^4 P\left(\frac{1}{X}\right) = X^4 \left(\frac{1}{X} - r\right) \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{1}{X} - s\right) \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{s}\right)$$

$$X^4 P\left(\frac{1}{X}\right) = (1 - rX) \left(1 - \frac{X}{r}\right) (1 - sX) \left(1 - \frac{X}{s}\right)$$

$$X^4 P\left(\frac{1}{X}\right) = r \left(\frac{1}{r} - X\right) \times \frac{1}{r} (r - X) \times s \left(\frac{1}{s} - X\right) \times \frac{1}{s} (s - X)$$

$$X^4 P\left(\frac{1}{X}\right) = P(X)$$

Donc  $P$  polynôme est symétrique.

Il reste à étudier les cas suivants.

(1)  $P(X) = (X - r) \left(X - \frac{1}{r}\right) (X + 1)^2$  et  $P(X) = (X - r) \left(X - \frac{1}{r}\right) (X - 1)^2$  sont symétriques car il suffit de reprendre le calcul précédent avec  $s = \pm 1$ .

(2)  $P(X) = (X - r) \left(X - \frac{1}{r}\right) (X + 1)(X - 1)$  vérifie  $P(X) = -X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$  donc  $P$  est anti-symétrique.

**$r$  est de multiplicité 2.** Dans ce cas,  $P(X) = (X - r)^2 \left(X - \frac{1}{r}\right)^2$  nécessairement ! Il est immédiat que  $P(X) = X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$  donc ce polynôme est symétrique.

### 4. ET LES POLYNÔMES ANTI-SYMÉTRIQUES ?

Considérons  $P$  un polynôme anti-symétrique de degré 4 et de coefficient dominant 1 (il est toujours possible de supposer ceci).

$P(X) = -X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$  : caractérisation des polynômes anti-symétriques de degré 4

$$P'(X) = -4X^3 P\left(\frac{1}{X}\right) + X^2 P'\left(\frac{1}{X}\right)$$

Nous avons de nouveau la clé de voûte des raisonnements précédents sur la multiplicité d'une racine et de son inverse. Donc les raisonnements de la section 2 nous donnent :

- (1)  $P$  n'a que des racines entières si et seulement si  $P(X) = (X - 1)^3(X + 1)$  ou  $P(X) = (X - 1)(X + 1)^3$ .
- (2)  $P$  n'a que des racines rationnelles dont une au moins non entière si et seulement si  $P(X) = (X - r) \left( X - \frac{1}{r} \right) (X - 1)(X + 1)$  où  $r \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$ .

## 5. PEUT-ON GÉNÉRALISER À UN DEGRÉ QUELCONQUE ?

**Cas d'un polynôme symétrique de degré  $n \geq 2$ .** Soit  $P$  un polynôme symétrique de degré  $n \geq 2$  et de coefficient dominant 1. On sait donc que  $P(X) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$ . Notons que cette propriété est stable par multiplication.

De nouveau si  $P(r) = 0$  alors  $r \neq 0$  et  $P\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ . De plus, une récurrence facile nous donne :

$$P^{(k)}(X) = \epsilon X^{n-2k} P^{(k)}\left(\frac{1}{X}\right) + \sum_{i=n-2k+1}^{n-k} c_i X^i P^{(i)}\left(\frac{1}{X}\right) \text{ où } \epsilon = \pm 1.$$

On en déduit plus précisément que  $r$  et  $\frac{1}{r}$  ont la même multiplicité (de nouveau à l'aide d'une récurrence facile).

On a donc  $P(X) = (X + 1)^a (X - 1)^b \prod_{fini} (X - r_i)^{k_i} \left( X - \frac{1}{r_i} \right)^{k_i}$  avec d'éventuels  $r_i \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$ , les exposants naturels pouvant être nuls.

Dans ce produit,  $(X + 1)$  et  $(X - r_i) \left( X - \frac{1}{r_i} \right)$  sont symétriques tandis que  $(X - 1)^b$  peut être anti-symétrique. On a donc juste la contrainte  $b \in 2\mathbb{N}$ . Que c'est beau !

**Cas d'un polynôme anti-symétrique de degré  $n \geq 2$ .** La démarche est similaire et on arrive à des polynômes du type  $P(X) = (X + 1)^a (X - 1)^b \prod_{fini} (X - r_i)^{k_i} \left( X - \frac{1}{r_i} \right)^{k_i}$  avec  $b \in 2\mathbb{N} + 1$ , les autres exposants pouvant être nuls avec d'éventuels  $r_i \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$ .

## 6. PEUT-ON GÉNÉRALISER À DES RACINES NON RATIONNELLES ?

Oui, c'est immédiat à voir !

### ANNEXE : CALCUL FORMEL, BON OU MAUVAIS CHOIX ?

Par flemme, l'auteur avait commencé par raisonner avec un logiciel de calcul formel comme suit où des lettres différentes indiquent des racines différentes.

- (1)  $P(X) = (X - r)^4 = X^4 - 4rX^3 + 6r^2X^2 - 4r^3X + r^4$  est symétrique si et seulement si  $r^4 = 1$  et  $r^3 = r$ .

Si  $r \in \mathbb{Q}$  alors nécessairement  $r = \pm 1$  et on tombe sur les polynômes symétriques  $(X - 1)^4$  et  $(X + 1)^4$ .

- (2)  $P(X) = (X - r)^3(X - s) = X^4 - (3r + s)X^3 + (3r^2 + 3rs)X^2 - (r^3 + 3r^2s)X + r^3s$  est symétrique si et seulement si  $r^3s = 1$  et  $3r + s = r^3 + 3r^2s$ .

On en déduit  $3r^4 + 1 = r^6 + 3r^2$  d'où  $T^3 - 3T^2 + 3T - 1 = 0$  i.e.  $(T - 1)^3 = 1$  en posant  $T = r^2$ . On a alors  $r = \pm 1$  mais dans ce cas  $s = r$  ! Nous avons une contradiction.

- (3)  $P(X) = (X-r)^2(X-s)^2 = X^4 - (2r+2s)X^3 + (r^2+4rs+s^2)X^2 - (2r^2s+2rs^2)X + r^2s^2$  est symétrique si et seulement si  $r^2s^2 = 1$  et  $r+s = r^2s+rs^2$  i.e.  $rs = \pm 1$  et  $r+s = rs(r+s)$ . Nous avons deux sous-cas.

- (a)  $rs = 1$  donne  $r+s = r+s$  et surtout  $s = \frac{1}{r}$ . On tombe sur le polynôme symétrique

$$(X-r)^2 \left( X - \frac{1}{r} \right)^2.$$

- (b)  $rs = -1$  donne  $r+s = 0$  i.e.  $s = -r$  d'où  $r = \pm 1$ . Ceci nous donne le polynôme symétrique  $(X-1)^2(X+1)^2$ .

- (4) Soyons fort. Continuons...

$$P(X) = (X-r)^2(X-s)(X-t)$$

$$P(X) = X^4 - (s+t+2r)X^3 + (st+r^2+2rs+2rt)X^2 - (r^2s+r^2t+2rst)X + r^2st$$

$P$  est symétrique si et seulement si  $r^2st = 1$  et  $s+t+2r = r^2s+r^2t+2rst$ . Que faire?

À partir de là, on est bloqué avec trois inconnues et seulement deux équations! De plus, dans tout ce qui précède, on n'a aucun recul sur ce que l'on fait. C'est moche!