BROUILLON - EN FINIR AVEC LA FORME CANONIQUE DU TRINÔME...
MANQUE DES DESSINS !

CHRISTOPHE BAL

Table des matières

Date: 19 Octobre 2020.

1. Critère pour la non existence d'une racine réelle

Soient $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ où $a \neq 0$ et $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f vue comme fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Graphiquement on constate vite que $\mathscr{C}_f$ possède un axe de symétrique $\mathscr{d} : x = m$ où m se calcule come suit où $(\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
f(\alpha) = f(\beta) &\iff a\,\alpha^2 + b\,\alpha + c = a\,\beta^2 + b\,\beta + c \\
&\iff a(\alpha^2 - \beta^2) + b(\alpha - \beta) = 0 \\
&\iff (\alpha - \beta)(a(\alpha + \beta) + b) = 0 \qquad \boxed{1} \\
&\iff \frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{b}{2a}
\end{aligned}$$

Nécessairement $m = -\dfrac{b}{2a}$ [1]. Il est aussi aisé de conjecturer que $f(m)$ est un extremum de f vue comme fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ceci rend naturel le calcul suivant qui part de la factorisation $\boxed{1}$ précédente.

$$\begin{aligned}
f(x) - f(m) &= (x - m)(a\,x + a\,m + b) \\
&= (x - m)(a\,x - a\,m) \\
&= a(x - m)^2
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
m = -\frac{b}{2a} &\iff 2am = -b \\
&\iff am + b = -am
\end{aligned}$$

Ce qui précède montre aussi que si $a > 0$ alors $f(m)$ est un minimum et si $a < 0$ alors $f(m)$ est un maximum. On peut maintenant savoir quand f n'admet aucun zéro réel.

(1) **Cas 1 :** $a > 0$

f n'a pas de zéro si et seulement si $f(m) > 0$. Voyons ce que cela implique.

$$\begin{aligned}
f(m) > 0 &\iff a\,m^2 + b\,m + c > 0 \\
&\iff a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - b \cdot \frac{b}{2a} + c > 0 \\
&\iff -\frac{b^2}{4a} + c > 0 \\
&\iff -b^2 + 4ac > 0 \qquad 4a > 0
\end{aligned}$$

(2) **Cas 2 :** $a < 0$

f n'a pas de zéro si et seulement si $f(m) < 0$. Cela implique ce qui suit.

$$\begin{aligned}
f(m) < 0 &\iff -\frac{b^2}{4a} + c < 0 \\
&\iff -b^2 + 4ac > 0 \qquad 4a < 0
\end{aligned}$$

Nous retombons sur le critère classique suivant : $a\,x^2 + b\,x + c$ n'a pas de zéro réel si et seulement si $-b^2 + 4ac > 0$, soit de façon équivalente si et seulement si $b^2 - 4ac < 0$.

Notons que notre mode de raisonnement ne permet pas de privilégier le 2e critère, ce dernier est en fait naturel uniquement si l'on passe via la forme canonique, ou bien lorsque l'on trouvera des formules calculant les zéros de f lorsque ces derniers existent *(c'est ce que nous allons faire dans la section suivante)*.

---

1. Nous n'avons pas prouver la propriété de symétrie car nous n'en aurons pas besoin. Ceci se fait en montrant que $\forall \delta \in \mathbb{R}$, $f(m - \delta) = f(m + \delta)$. Cette égalité est évidente dès lors que l'on a $f(x) - f(m) = a(x - m)^2$, une identité que nous allons prouver bientôt.

2. Quand au moins une racine réelle existe

Soit $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ où $a \neq 0$ tel qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ annulant f. La section précédente implique que nécessairement $b^2 - 4ac \geq 0$.

La factorisation $\boxed{1}$ de $f(\alpha) - f(\beta)$ vue dans la section précédente nous donne ici sans effort : $f(x) - f(\alpha) = (x - \alpha)(a(x + \alpha) + b)$. On en déduit l'existence d'un autre zéro $\beta \in \mathbb{R}$, éventuellement égal à α, tel que $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$. Ceci implique, après développement, que $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ et $\alpha \cdot \beta = \dfrac{c}{a}$.

Exploitons ici aussi l'usage de $m = -\dfrac{b}{2a}$ de sorte que $\dfrac{\alpha + \beta}{2} = m$ *(ceci est aussi une conséquence de l'égalité $f(\alpha) = f(\beta)$)*. On va paramétrer notre problème via une seule inconnue[2] grâce à m. Pour cela posons $\delta = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$ de sorte que $\alpha = m - \delta$ et $\beta = m + \delta$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} &\iff (m - \delta)(m + \delta) = \frac{c}{a} \\
&\iff m^2 - \delta^2 = \frac{c}{a} \\
&\iff \delta^2 = m^2 - \frac{c}{a} \\
&\iff \delta^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
&\iff \delta^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
&\iff \delta = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad b^2 - 4ac \geq 0
\end{aligned}$$

Nous avons donc établi que si α et β sont deux zéros, éventuellement confondus, de f alors $b^2 - 4ac \geq 0$ et les zéros sont $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. La réciproque est immédiate.

2. Cette astuce permet en fait de diminuer par deux le nombre d'inconnues lorsque l'on cherche les racines d'un polynôme p, de degré pair forcément, tel que $\mathscr{C}_p$ ait un axe de symétrie.