BROUILLON - RACINES RATIONNELLES D'UN POLYNÔME SYMÉTRIQUE DE DEGRÉ 4

CHRISTOPHE BAL

La question que l'on se pose est la suivante.

> $P(X) = aX^4 + bx^3 + cX^2 + bX + a$, un polynôme symétrique de degré 4, peut-il n'avoir que des racines entières ? Que des racines rationnelles ?

1. Constatations générales

On peut supposer que $a = 1$ i.e. $P(X) = X^4 + bX^3 + cX^2 + bX + 1$.
Dès lors si $P(r) = 0$ alors $r \neq 0$ et $P\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ (voir ci-dessous).
En fait, nous avons :

$P(X) = X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$: caractérisation des polynômes symétriques de degré 4

$P'(X) = 4X^3 P\left(\frac{1}{X}\right) - X^2 P'\left(\frac{1}{X}\right)$

On en déduit que si r est une racine d'ordre au moins 2, il en est de même pour $\frac{1}{r}$.

2. Uniquement des racines entières ?

Si P n'a que des racines entières alors ces dernières ne peuvent être que ± 1 qui sont les seuls entiers ayant un inverse entier. Ceci donne les uniques possibilités suivantes :

(1) Pour $P(X) = (X+1)^4$, nous avons $X^4\left(\frac{1}{X} + 1\right)^4 = (1+X)^4$ d'où $P(X) = X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$ donc P est bien symétrique [1].

(2) $P(X) = (X-1)^4$ est aussi symétrique (on procède comme ci-dessus et en utilisant la parité de l'exposant).

(3) Pour $P(X) = (X-1)^3(X+1)$, nous avons $X^4\left(\frac{1}{X} - 1\right)^3\left(\frac{1}{X} + 1\right) = (1-X)^3(1+X)$ d'où $P(X) = -X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$. Le polynôme n'est pas symétrique.
En fait $P(X) = (X-1)^3(X+1) = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$ est anti-symétrique. Un polynôme de degré 4 est anti-symétrique si et seulement si $P(X) = -X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$.

(4) $P(X) = (X+1)^3(X-1)$ est anti-symétrique (comme ci-dessus).

Date: 6 Décembre 2018.

1. On évite ainsi la tache ingrate de développer brutalement $(X+1)^4$ même si ceci aurait pu être fait sans effort via un programme de calcul formel tel que `https://www.wolframalpha.com`.

(5) $P(X) = (X+1)^2(X-1)^2$ est symétrique car il vérifie $P(X) = X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$.

3. Uniquement des racines rationnelles ?

Supposons que $r \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$ soit une racine de P.

Le résultat sur la multiplicité supérieure ou égale à 2 nous donne que si r est de multiplicité au moins 2 alors $\frac{1}{r} \neq r$ est aussi de multiplicité au moins 2. Ceci implique que r est de multiplicité 1 ou 2.

r est de multiplicité 1. Si P admet une autre racine $s \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$ avec $s \neq r$ et $s \neq \frac{1}{r}$ alors nécessairement $P(X) = (X-r)\left(X - \frac{1}{r}\right)(X-s)\left(X - \frac{1}{s}\right)$.
D'où

$$X^4 P\left(\frac{1}{X}\right) = X^4 \left(\frac{1}{X} - r\right)\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{X} - s\right)\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{s}\right)$$
$$X^4 P\left(\frac{1}{X}\right) = (1 - rX)\left(1 - \frac{X}{r}\right)(1 - sX)\left(1 - \frac{X}{s}\right)$$
$$X^4 P\left(\frac{1}{X}\right) = r\left(\frac{1}{r} - X\right) \times \frac{1}{r}(r - X) \times s\left(\frac{1}{s} - X\right) \times \frac{1}{s}(s - X)$$
$$X^4 P\left(\frac{1}{X}\right) = P(X)$$

Donc P polynôme est symétrique.

Il reste à étudier les cas suivants.

(1) $P(X) = (X-r)\left(X - \frac{1}{r}\right)(X+1)^2$ et $P(X) = (X-r)\left(X - \frac{1}{r}\right)(X-1)^2$ sont symétriques car il suffit de reprendre le calcul précédent avec $s = \pm 1$.
(2) $P(X) = (X-r)\left(X - \frac{1}{r}\right)(X+1)(X-1)$ vérifie $P(X) = -X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$ donc P est anti-symétrique.

r est de multiplicité 2. Dans ce cas, $P(X) = (X-r)^2\left(X - \frac{1}{r}\right)^2$ nécessairement ! Il est immédiat que $P(X) = X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$ donc ce polynôme est symétrique.

4. Et les polynômes anti-symétriques ?

Considérons P un polynôme anti-symétrique de degré 4 et de coefficient dominant 1 (il est toujours possible de supposer ceci).

$P(X) = -X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$: caractérisation des polynômes anti-symétriques de degré 4

$P'(X) = -4X^3 P\left(\frac{1}{X}\right) + X^2 P'\left(\frac{1}{X}\right)$

Nous avons de nouveau la clé de voûte des raisonnements précédents sur la multiplicité d'une racine et de son inverse. Donc les raisonnements de la section 2 nous donnent :

(1) P n'a que des racines entières si et seulement si $P(X) = (X-1)^3(X+1)$ ou $P(X) = (X-1)(X+1)^3$.
(2) P n'a que des racines rationnelles dont une au moins non entière si et seulement si $P(X) = (X-r)\left(X-\dfrac{1}{r}\right)(X-1)(X+1)$ où $r \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$.

5. Peut-on généraliser ?

Cas d'un polynôme symétrique de degré $n \geqslant 2$. Soit P un polynôme symétrique de degré $n \geqslant 2$. On sait donc que $P(X) = X^n P\left(\dfrac{1}{X}\right)$. Notons que cette propriété est stable par multiplication.

De nouveau si $P(r) = 0$ alors $r \neq 0$ et $P\left(\dfrac{1}{r}\right) = 0$. De plus, une récurrence facile nous donne :

$$P^{(k)}(X) = \epsilon X^{n-2k} P^{(k)}\left(\frac{1}{X}\right) + \sum_{i=n-2k+1}^{n-k} c_i X^i P^{(i)}\left(\frac{1}{X}\right) \text{ où } \epsilon = \pm 1.$$

On en déduit plus précisément que r et $\dfrac{1}{r}$ ont la même multiplicité (de nouveau à l'aide d'une récurrence facile).

On a donc $P(X) = (X+1)^a(X-1)^b \prod\limits_{fini}(X-r_i)^{k_i}\left(X-\dfrac{1}{r_i}\right)^{k_i}$ avec d'éventuels $r_i \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$, les exposants naturels pouvant être nuls.

Dans ce produit, $(X+1)$ et $(X-r_i)\left(X-\dfrac{1}{r_i}\right)$ sont symétriques tandis que $(X-1)^b$ peut être anti-symétrique. On a donc juste la contrainte $b \in 2\mathbb{N}$. Que c'est beau !

Cas d'un polynôme anti-symétrique de degré $n \geqslant 2$. La démarche est similaire et on arrive à des polynômes du type $P(X) = (X+1)^a(X-1)^b \prod\limits_{fini}(X-r_i)^{k_i}\left(X-\dfrac{1}{r_i}\right)^{k_i}$ avec $b \in 2\mathbb{N}+1$, les autres exposants pouvant être nuls avec d'éventuels $r_i \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$.

Annexe : Calcul formel, bon ou mauvais choix ?

Par flemme, l'auteur avait commencé par raisonner avec un logiciel de calcul formel comme suit où des lettres différentes indiquent des racines différentes.

(1) $P(X) = (X-r)^4 = X^4 - 4rX^3 + 6r^2X^2 - 4r^3X + r^4$ est symétrique si et seulement si $r^4 = 1$ et $r^3 = r$.
    Si $r \in \mathbb{Q}$ alors nécessairement $r = \pm 1$ et on tombe sur les polynômes symétriques $(X-1)^4$ et $(X+1)^4$.
(2) $P(X) = (X-r)^3(X-s) = X^4 - (3r+s)X^3 + (3r^2+3rs)X^2 - (r^3+3r^2s)X + r^3s$ est symétrique si et seulement si $r^3s = 1$ et $3r+s = r^3+3r^2s$.
    On en déduit $3r^4+1 = r^6+3r^2$ d'où $T^3 - 3T^2 + 3T - 1 = 0$ i.e. $(T-1)^3 = 1$ en posant $T = r^2$. On a alors $r = \pm 1$ mais dans ce cas $s = r$! Nous avons une contradiction.
(3) $P(X) = (X-r)^2(X-s)^2 = X^4 - (2r+2s)X^3 + (r^2+4rs+s^2)X^2 - (2r^2s+2rs^2)X + r^2s^2$ est symétrique si et seulement si $r^2s^2 = 1$ et $r+s = r^2s+rs^2$ i.e. $rs = \pm 1$ et $r+s = rs(r+s)$.
    Nous avons deux sous-cas.

(a) $rs = 1$ donne $r+s = r+s$ et surtout $s = \dfrac{1}{r}$. On tombe sur le polynôme symétrique $(X-r)^2\left(X - \dfrac{1}{r}\right)^2$.

(b) $rs = -1$ donne $r+s = 0$ i.e. $s = -r$ d'où $r = \pm 1$. Ceci nous donne le polynôme symétrique $(X-1)^2(X+1)^2$.

(4) Soyons fort. Continuons ...
$P(X) = (X-r)^2(X-s)(X-t)$
$P(X) = X^4 - (s+t+2r)X^3 + (st + r^2 + 2rs + 2rt)X^2 - (r^2s + r^2t + 2rst)X + r^2st$
P est symétrique si et seulement si $r^2st = 1$ et $s+t+2r = r^2s + r^2t + 2rst$. Que faire ?

À partir de là, on est bloqué avec trois inconnues et seulement deux équations ! De plus, dans tout ce qui précède, on n'a aucun recul sur ce que l'on fait. C'est moche !