

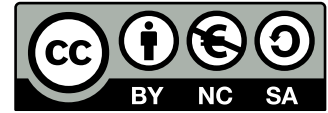
NOMBRE DE SOUS-ENSEMBLES D'UN ENSEMBLE FINI UNE PREUVE TRÈS ÉLÉMENTAIRE.

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



Voici comment expliquer rapidement à un lycéen¹ qu’un ensemble \mathcal{E} de n éléments permet de fabriquer 2^n sous-ensembles ayant de 0 à n éléments. Sans entrer dans le détail d’une récurrence, voici comment faire où si besoin le cas 1 peut être omis.

- (1) \emptyset est le seul ensemble à 0 élément. Son seul sous-ensemble est \emptyset . On a bien $1 = 2^0$.
- (2) Soit $\mathcal{E} = \{\spadesuit\}$ un ensemble avec un seul élément. Cet ensemble contient 2 sous-ensembles, à savoir \emptyset et $\{\spadesuit\}$. On a bien $2 = 2^1$.
- (3) Soit $\mathcal{E} = \{\spadesuit_1; \spadesuit_2\}$ un ensemble avec deux éléments. Cet ensemble contient les $4 = 2^2$ sous-ensembles \emptyset , $\{\spadesuit_1\}$, $\{\spadesuit_2\}$ et $\{\spadesuit_1; \spadesuit_2\}$.
Le pont clé est de noter que $\{\spadesuit_2\} = \emptyset \cup \{\spadesuit_2\}$ et $\{\spadesuit_1; \spadesuit_2\} = \{\spadesuit_1\} \cup \{\spadesuit_2\}$.
- (4) Soit maintenant $\mathcal{E} = \{\spadesuit_1; \dots; \spadesuit_{n+1}\}$ un ensemble avec $(n+1)$ éléments. Les sous-ensembles de \mathcal{E} se classent en deux catégories.
 - (a) **Catégorie 1** : les sous-ensembles ne contenant pas \spadesuit_{n+1} . Il y en a autant que de sous-ensembles de $\mathcal{F} = \{\spadesuit_1; \dots; \spadesuit_n\}$.
 - (b) **Catégorie 2** : les sous-ensembles contenant \spadesuit_{n+1} . De tels sous-ensembles s’obtiennent à partir de sous-ensembles de \mathcal{F} en leur adjoignant \spadesuit_{n+1} . Ceci démontre qu’il y a autant de sous-ensembles de catégorie 2 que de sous-ensembles de \mathcal{F} .

Finalement le nombre de sous-ensembles de \mathcal{E} est deux fois plus grand que celui de \mathcal{F} .

- (5) Finalement de proche en proche, ou plus rigoureusement via une récurrence, nous avons sans effort qu’un ensemble \mathcal{E} de n éléments permet de fabriquer 2^n sous-ensembles ayant de 0 à n éléments.

Date: 19 Octobre 2020.

1. Bien entendu on adaptera le formalisme pour rendre digeste les principes élémentaires utilisés.