BROUILLON - RACINES RATIONNELLES D'UN POLYNÔME SYMÉTRIQUE DE DEGRÉ 4

CHRISTOPHE BAL

$P(X) = aX^4 + bx^3 + cX^2 + bX + a$, un polynôme symétrique de degré 4, peut-il n'avoir que des racines entières ? Que des racines rationnelles ?

1. Constatations générales

On peut supposer que $a = 1$, i.e. $P(X) = X^4 + bX^3 + cX^2 + bX + 1$.
Dès lors si $P(r) = 0$ alors $r \neq 0$ et $P\left(\dfrac{1}{r}\right) = 0$.
Ensuite, nous avons :

$P(X) = X^4 P\left(\dfrac{1}{X}\right)$: caractérisation des polynômes symétriques de degré 4

$P'(X) = 4X^3 P\left(\dfrac{1}{X}\right) - X^2 P'\left(\dfrac{1}{X}\right)$

On en déduit que si r est une racine d'ordre au moins 2, il en est de même pour $\dfrac{1}{r}$.

2. Uniquement des racines entières ?

Si P n'a que des racines entières, alors ces racines ne peuvent être que ± 1 qui sont les seuls entiers ayant un inverse entier. Ceci donne les uniques possibilités suivantes :

(1) Pour $P(X) = (X+1)^4$ comme $X^4 \left(\dfrac{1}{X} + 1\right)^4 = (1+X)^4$ on a : $P(X) = X^4 P\left(\dfrac{1}{X}\right)$ (on évite ainsi la tache ingrate de développer ceci même si les logiciels de calcul formel, comme `https://www.wolframalpha.com`, le font sans sourciller). Le polynôme est ok.

(2) $P(X) = (X-1)^4$ est ok (comme ci-dessus et merci à l'exposant pair).

(3) Pour $P(X) = (X-1)^3(X+1)$ comme $X^4 \left(\dfrac{1}{X} - 1\right)^3 \left(\dfrac{1}{X} + 1\right) = (1-X)^3(1+X)$, on a : $P(X) = -X^4 P\left(\dfrac{1}{X}\right)$. Le polynôme est rejeté.

En fait $P(X) = (X-1)^3(X+1) = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$ est anti-symétrique. Un polynôme de degré 4 est anti-symétrique ssi $P(X) = -X^4 P\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

(4) $P(X) = (X+1)^3(X-1)$ est rejeté (comme ci-dessus).

(5) $P(X) = (X+1)^2(X-1)^2$ est ok car il vérifie $P(X) = X^4 P\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

Date: 6 Décembre 2018.

3. Uniquement des racines rationnelles ?

Supposons que $r \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$ soit une racine de P.

Le résultat sur la multiplicité supérieure ou égale à 2 nous donne que si r est de multiplicité au moins 2 alors $\dfrac{1}{r} \neq r$ est aussi de multiplicité au moins 2. Ceci implique que r est de multiplicité 1 ou 2.

r est de multiplicité 1. Si P admet une autre racine $s \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$ avec $s \neq r$ et $s \neq \dfrac{1}{r}$ alors nécessairement $P(X) = (X-r)\left(X - \dfrac{1}{r}\right)(X-s)\left(X - \dfrac{1}{s}\right)$.
D'où

$$X^4 P\left(\frac{1}{X}\right) = X^4\left(\frac{1}{X} - r\right)\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{X} - s\right)\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{s}\right)$$
$$X^4 P\left(\frac{1}{X}\right) = (1 - rX)\left(1 - \frac{X}{r}\right)(1 - sX)\left(1 - \frac{X}{s}\right)$$
$$X^4 P\left(\frac{1}{X}\right) = r\left(\frac{1}{r} - X\right) \times \frac{1}{r}(r - X) \times s\left(\frac{1}{s} - X\right) \times \frac{1}{s}(s - X)$$
$$X^4 P\left(\frac{1}{X}\right) = P(X)$$

Ce polynôme est donc ok.

Il reste à étudier les cas suivants.

(1) $P(X) = (X-r)\left(X - \dfrac{1}{r}\right)(X+1)^2$ et $P(X) = (X-r)\left(X - \dfrac{1}{r}\right)(X-1)^2$ sont ok car il suffit de reprendre le calcul précédent avec $s = \pm 1$.
(2) $P(X) = (X-r)\left(X - \dfrac{1}{r}\right)(X+1)(X-1)$ vérifie $P(X) = -X^4 P\left(\dfrac{1}{X}\right)$ donc on a un polynôme anti-symétrique que l'on rejette.

r est de multiplicité 2. Dans ce cas, $P(X) = (X-r)^2\left(X - \dfrac{1}{r}\right)^2$ nécessairement !

Il est immédiat que $P(X) = X^4 P\left(\dfrac{1}{X}\right)$ donc ce polynôme est ok.

4. Calcul formel. Bon ou mauvais choix ?

Par flemme, l'auteur avait d'abord raisonner avec un logiciel de calcul formel comme suit où des lettres différentes indiquent des racines différentes.

(1) $P(X) = (X-r)^4 = X^4 - 4rX^3 + 6r^2X^2 - 4r^3X + r^4$ est symétrique ssi $r^4 = 1$ et $r^3 = r$. Si $r \in \mathbb{Q}$ alors nécessairement $r = \pm 1$. C'est alors ok via le développement de $(X-r)^4$.
(2) $P(X) = (X-r)^3(X-s) = X^4 - (3r+s)X^3 + (3r^2+3rs)X^2 - (r^3+3r^2s)X + r^3s$ est symétrique ssi $r^3s = 1$ et $3r + s = r^3 + 3r^2s$. On en déduit $3r^4 + 1 = r^6 + 3r^2$ d'où $T^3 - 3T^2 + 3T - 1 = 0$ i.e. $(T-1)^3 = 1$ en posant $T = r^2$. On en déduit que $r = \pm 1$ mais dans ce cas $s = r$! Donc on rejette.
(3) $P(X) = (X-r)^2(X-s)^2 = X^4 - (2r+2s)X^3 + (r^2+4rs+s^2)X^2 - (2r^2s+2rs^2)X + r^2s^2$ est symétrique ssi $r^2s^2 = 1$ et $r + s = r^2s + rs^2$ soit $rs = \pm 1$ et $r + s = rs(r+s)$.

(a) $rs = 1$ donne $r + s = r + s$ et surtout $s = \dfrac{1}{r}$. C'est alors ok via le développement de $(X - r)^2 \left(X - \dfrac{1}{r}\right)^2$.

(b) $rs = -1$ donne $r+s = 0$ i.e. $s = -r$ d'où $r = \pm 1$. C'est alors ok via le développement de $(X - 1)^2(X + 1)^2$.

(4) $P(X) = (X - r)^2(X - s)(X - t) = X^4 - (s + t + 2r)X^3 + (st + r^2 + 2rs + 2rt)X^2 - (r^2 s + r^2 t + 2rst)X + r^2 st$ est symétrique ssi $r^2 st = 1$ et $s + t + 2r = r^2 s + r^2 t + 2rst$. Que faire ?

A partir de là, on est bloqué avec trois inconnues et seulement deux équations ! De plus, pour ce qui précède, on n'a aucun recul sur ce que l'on fait. C'est moche !

5. À explorer...

Que se passe-t-il pour un polynôme anti-symétrique $P(X) = aX^4 + bX^3 - bX - a$?

Comment généraliser à d'autres degrés ?

Et surtout, blanquette de veau ou moussaka ?