

BROUILLON - MODÉLISER, C'EST QUOI.

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution - Pas d'utilisation commerciale - Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



TABLE DES MATIÈRES

1. Où allons-nous ?	1
2. Coût marginal – Polynômes de degré 2 ou 3	1
2.1. Une modélisation	1
2.2. Notre modèle est-il bon ?	3
3. Désintégration radioactive – Probabilités et lois continues, ou pas...	3
3.1. Une modélisation	3
3.2. Notre modèle est-il bon ?	4
4. AFFAIRE À SUIVRE...	5

1. OÙ ALLONS-NOUS ?

Dans ce modeste document, nous allons présenter quelques modèles classiques tout en nous interrogeant sur leur pertinence ainsi que sur la signification du mot « *modéliser* ». C'est pour cela que nous reportons la définition du mot « *modéliser* » à la toute dernière section de ce document.

2. COÛT MARGINAL – POLYNÔMES DE DEGRÉ 2 OU 3

2.1. Une modélisation. À des fins prospectives, on souhaite modéliser le capital d'une entreprise qui fabrique et vend un produit. On utilise les notations suivantes.

- $C(x)$ est le coût de production en euros pour x unités produites.
- $C_m(x) = C(x) - C(x-1)$ est le coût marginal de production pour $x \in \mathbb{N}^*$ (*c'est le coût spécifique à la x^e unité produite*).
- $CM(x) = \frac{C(x)}{x}$ est le coût moyen de production pour $x \in \mathbb{N}^*$.

Cas 1. Supposons que des études statistiques aient montré que lorsque le nombre d'unités vendues augmente le coût marginal augmente de façon quasi linéaire.

Dans ce cas, on peut faire l'approximation $C_m(x) = ax + b$ avec $(a; b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ (cette fonction affine peut être celle obtenue via une régression linéaire par la méthode des moindres carrés). Nous avons alors :

$$\begin{aligned} C(x) &= C(0) + \sum_{k=1}^x C_m(k) \\ &= C(0) + \sum_{k=1}^x (ak + b) \\ &= mx^2 + px + q \end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, nous avons utilisé le fait que $\forall (e, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^x k^e$ est un polynôme en x de degré $(e+1)$. En utilisant les formules exactes de ces polynômes, il est facile de vérifier que nos coefficients m , p et q sont tous positifs et même que $m > 0$.

Avec ce modèle, nous avons $CM(x) = mx + p + \frac{q}{x}$ pour $x \in \mathbb{N}^*$. Nous pouvons donner l'interprétation concrète suivante des termes mx , p et $\frac{q}{x}$.

- (1) p correspond à un coût fixe de fabrication : quelque soit le nombre d'unités vendues, l'entreprise doit déboursier en moyenne q euros par unité fabriquée (*penser à l'usage de bâtiments, aux salaires des employés en CDI...*).
- (2) mx augmente strictement avec x car $m > 0$. Ce terme correspond à un coût d'usage (*penser par exemple à l'entretien d'une chaîne de production, à l'énergie dépensée en plus pour produire plus...*).
- (3) $\frac{q}{x}$ indique un coût amorti en ce sens où plus x augmente moins $\frac{q}{x}$ influence $CM(x)$ (*penser par exemple à des investissements faits pour une nouvelle chaîne de production*).

Cas 2. Supposons que des études statistiques aient montré que lorsque le nombre d'unités vendues augmente le coût marginal diminue strictement puis qu'ensuite il atteint un minimum pour enfin ne cesser d'augmenter strictement. Notons que le minimum est forcément positif, et la valeur où il est atteint strictement positive. Nous supposons de plus que les données sont telles que la courbe de C_m soit quasi parabolique.

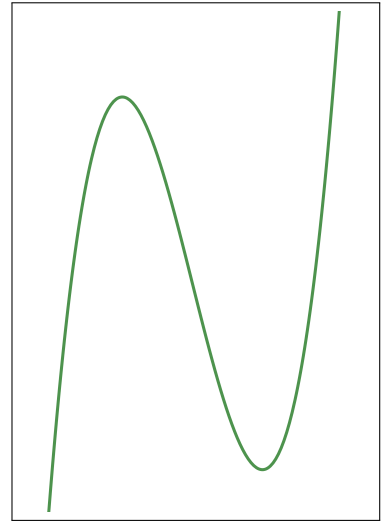
Dans ce cas, on peut faire l'approximation $C_m(x) = ax^2 + bx + c$ avec les contraintes $a > 0$, $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} b^2 - 4ac \leq 0$ ainsi que $\frac{-b}{2a} > 0$ (ce polynôme du 2^e degré peut être celui obtenu via une régression polynomiale par la méthode des moindres carrés). Pourquoi ces conditions ?

- (1) $a > 0$ permet de vérifier les contraintes de variation.
- (2) $\Delta \leq 0$ et $\frac{-b}{2a} > 0$ servent à valider la contrainte du minimum.

De nouveau, nous avons :

$$\begin{aligned} C(x) &= C(0) + \sum_{k=1}^x C_m(k) \\ &= C(0) + \sum_{k=1}^x (ak^2 + bk + c) \\ &= mx^3 + px^2 + qx + r \end{aligned}$$

Si une étude statistique rapide sur le coût de fabrication C fournit une courbe similaire à celle ci-contre, on pourra espérer modéliser correctement C avec un polynôme de degré 3 comme ci-dessus. Dans ce cas, il faudra bien choisir certaines données concrètes afin de trouver de « bonnes » valeurs des coefficients m , p , q et r . C'est à l'usage que l'on pourra voir la pertinence ou non de ces choix.



Avec ce modèle, nous avons $CM(x) = mx^2 + px + q + \frac{r}{x}$ pour $x \in \mathbb{N}^*$. Bien que les significations concrètes de px , q et $\frac{r}{x}$ peuvent être similaires à celles données dans le cas 1, il devient difficile de donner un sens concret au terme mx^2 .

Remarque 2.1. Si le coût marginal C_m admet une « courbe en U », on pourrait faire l'approximation $C_m(x) = c(x - \alpha)^{2p} + \beta$ avec $(c; \alpha; \beta) \in (\mathbb{R}_+)^3$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, $C(x)$ sera un polynôme de degré $(2p+1)$. Est-ce plus efficace au final que de considérer une « courbe en U » comme quasi parabolique ? Ne pas oublier qu'un modèle doit être aisément utilisable quitte à être un peu approximatif. Il est donc parfois inutile de vouloir être trop précis.

Remarque 2.2. Plus généralement, on pourrait considérer d'autres types de fonction avec des variations collant à une étude statistique pour peu que le comportement du coût marginal C_m soit relativement régulier. Le problème que l'on aura à résoudre sera soit d'évaluer simplement $\sum_{k=1}^x C_m(k)$ pour une utilisation « humaine », soit de le faire efficacement de façon informatique.

2.2. Notre modèle est-il bon ? Il se trouve que la modélisation du coût de production par un polynôme de degré 2 ou 3 apparaît souvent dans des livres présentant des mathématiques pour l'Économie. Cela rend pertinent les modèles présentés mais si l'on est honnête, les raisonnements précédents sont fragiles car il repose sur des « approximations de courbes ».

3. DÉSINTÉGRATION RADIOACTIVE – PROBABILITÉS ET LOIS CONTINUES, OU PAS...

3.1. Une modélisation. Les Sciences Physiques nous donnent la loi [D] suivante : « la probabilité qu'à un instant t un noyau radioactif se désintègre dans l'intervalle $[t; t+s]$ ne dépend pas de son âge t et n'est jamais égale à un ». Concrètement, ceci signifie que l'on suppose que les noyaux radioactifs ne vieillissent pas avant leur désintégration, et que de plus il est impossible qu'ils disparaissent majoritairement d'un seul coup. Il est aussi implicite qu'il est impossible qu'aucun noyau ne disparaisse sur l'intervalle $[0; t]$ pour $t > 0$, ceci revient à n'étudier que le phénomène de radioactivité.

Nous allons supposer de plus que la probabilité P de désintégration suit sur \mathbb{R}_+ une loi de densité continue f de sorte que $P([0; t]) = \int_0^t f(x) dx$ pour $t \geq 0$. Posant $F(t) = P([0; t])$ pour $t \geq 0$, nous avons alors les faits suivants.

- F est une primitive de f sur \mathbb{R}_+ puisque f est continue sur \mathbb{R}_+ par hypothèse.
- La loi [D] signifie que la probabilité que le noyau se désintègre dans l'intervalle $[t; t+s]$ sachant qu'il ne s'est pas désintégré dans l'intervalle $[0; t]$ est égale à $P([0; s]) = F(s)$ pour tout couple $(t; s) \in (\mathbb{R}_+)^2$.

- Pour $(t; s) \in (\mathbb{R}_+)^2$, la probabilité que le noyau se désintègre dans l'intervalle $[t; t+s]$ sachant qu'il ne s'est pas désintégré dans l'intervalle $[0; t]$ est $\frac{P([t; t+s])}{1-P([0; t])}$, c'est à dire $\frac{F(t+s)-F(t)}{1-F(t)}$ (notons qu'il n'y a aucun souci car par hypothèse $F(t) \neq 1$).
- Nous obtenons donc $\frac{F(t+s)-F(t)}{1-F(t)} = F(s)$ d'où $F(t+s) - F(t) = F(s)(1 - F(t))$ pour tout couple $(t; s) \in (\mathbb{R}_+)^2$.
- L'équation fonctionnelle vérifiée par F n'est pas très sympathique. Nous allons essayer d'en déduire une autre qui nous éclairera sur la marche à suivre. Il est naturel d'introduire $G(t) = 1 - F(t)$ la probabilité que le noyau ne se soit pas désintégré dans l'intervalle $[0; t]$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} F(t+s) - F(t) = F(s)(1 - F(t)) &\iff 1 - G(t+s) - (1 - G(t)) = (1 - G(s))G(t) \\ &\iff -G(t+s) + G(t) = G(t) - G(s)G(t) \\ &\iff G(t+s) = G(s)G(t) \end{aligned}$$

Nous obtenons donc que la fonction G dérivable sur \mathbb{R}_+ vérifie l'équation fonctionnelle $G(t+s) = G(s)G(t)$. Ceci nous donne alors $G(x) = e^{kx}$ avec $(k; x) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+$.

En effet, il suffit de fixer $t \in \mathbb{R}_+$ puis de dériver par rapport à s ce qui nous donne $G'(t+s) = G'(s)G(t)$. Comme G ne peut pas être constante¹, on a : $k \stackrel{\text{déf}}{=} G'(0) \neq 0$. Nous avons alors pour $t \in \mathbb{R}_+$ quelconque $G'(t) = kG(t)$ soit une équation différentielle classique (il n'est pas gênant que nous soyons juste sur \mathbb{R}_+ au lieu de \mathbb{R} tout entier).

- Sur \mathbb{R}_+ , $f(x) = F'(x) = -G'(x) = -ke^{kx}$. En fait nécessairement $k < 0$ car nous devons avoir $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1$. Faisons comme en Physique en n'utilisant que des paramètres positifs : notant $\lambda = -k > 0$, nous avons : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.
- Réciproquement si $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ avec $\lambda > 0$ alors la probabilité P de désintégration de loi de densité continue f vérifie bien la loi **[D]** (facile à vérifier en « remontant » certains des calculs faits ci-dessus).

En résumé, si la probabilité P de désintégration vérifie la loi **[D]**, alors elle suit une loi de densité continue f si et seulement si sur \mathbb{R}_+ , $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ avec $\lambda > 0$.

Remarque 3.1. Les physiciens appellent $\tau \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\lambda}$ la constante de temps radioactive.

3.2. Notre modèle est-il bon ? Vous aurez noté qu'en ajoutant juste une petite hypothèse, à savoir que la loi de probabilité de désintégration suit une loi de densité continue, nous arrivons à une modélisation robuste vis à vis de la loi physique **[D]**. Ceci étant dit, il serait bien de pouvoir se passer de cette hypothèse additionnelle dont la loi **[D]** ne parle pas. Est-ce possible ?

Nous posons de nouveau $F(t) = P([0; t])$ et $G(t) = 1 - F(t)$ pour $t \geq 0$. On sait juste que $0 < G \leq 1$ sur \mathbb{R}_+ , que $0 < G < 1$ sur \mathbb{R}_+^* , et que G est décroissante sur \mathbb{R}_+ (la monotonie découle de la croissance d'une probabilité).

Reprenant le raisonnement de la section précédente, sans passer par aucun calcul intégral, nous avons de nouveau que $G(t+s) = G(s)G(t)$ pour $(t; s) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Démontrons alors l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $G(x) = e^{-\lambda x}$.

1. Sur \mathbb{R}_+^* , nous avons toujours $G(t) \neq 0$ et $G(t) \neq 1$, i.e. $F(t) \neq 1$ et $F(t) \neq 0$ par hypothèse car on n'exclut les cas de désintégrations probablement certaine et impossible.

- $G(0+0) = G(0)G(0)$ donne $G(0)(1 - G(0)) = 0$ soit $G(0) = 0$ ou $G(0) = 1$. Seul le second cas est possible.
- Pour tout réel $x \geq 0$, une récurrence facile montre que $G(nx) = G(x)^n$ pour tout naturel n .
- Dans la suite, nous poserons $\alpha = G(1) \in]0; 1[$.
- $\forall (p; q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $G(p) = G\left(q \times \frac{p}{q}\right)$, soit $\alpha^p = G\left(\frac{p}{q}\right)^q$. Comme de plus $G > 0$ sur \mathbb{R}_+ , on a : $G\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{\alpha^p} = \alpha^{\frac{p}{q}}$. Autrement dit, $\forall r \in \mathbb{Q}_+$, $G(r) = \alpha^r$.
- Soit enfin $x \in \mathbb{R}_+$. Par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , il existe deux suites de rationnels positifs (r_n) et (R_n) qui convergent vers x et vérifient $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n \leq x \leq R_n$.
Comme G décroît, $\forall n \in \mathbb{N}$, $G(r_n) \geq G(x) \geq G(R_n)$, soit $\alpha^{r_n} \geq G(x) \geq \alpha^{R_n}$. Par continuité de la fonction $t \rightarrow \alpha^t$ sur \mathbb{R}_+ , un passage à la limite donne $G(x) = \alpha^x$.
- Il ne reste plus qu'à poser $\lambda = -\ln \alpha > 0$ de sorte que $G(t) = e^{-\lambda t}$ sur \mathbb{R}_+ . Dès lors,
$$F(t) = 1 - G(t) = 1 - e^{-\lambda t} = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$
 prouve que la loi P suit forcément une loi de densité continue $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Ce qui précède nous montre que l'hypothèse sur la loi de densité continue peut-être omise même si au final notre probabilité suit quand même une loi de densité continue. Nous avons donc pu construire un modèle très robuste au regard de la loi physique **[D]**. Ceci est très joli !

4. AFFAIRE À SUIVRE...
