

BROUILLON - MODÉLISER, C'EST QUOI.

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution - Pas d’utilisation commerciale - Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



TABLE DES MATIÈRES

1. Coût marginal – Polynômes de degré 2 ou 3	2
1.1. Une modélisation	2
1.2. Le modèle est-il bon ?	3
2. Désintégration radioactive – Probabilités et lois continues, ou pas...	4
2.1. Une modélisation	4
2.2. Le modèle est-il bon ?	5
3. Daniel BERNOULLI et la variole – Équations différentielles non linéaires	6
3.1. Une modélisation	6
3.2. Le modèle est-il bon ?	8
3.3. Annexe	9
4. AFFAIRE À SUIVRE...	10

Dans ce modeste document, nous allons présenter quelques modèles classiques en cherchant surtout à nous interroger sur leur pertinence. Ceci nous amènera à nous questionner sur la signification du mot « *modéliser* ». C’est pour cela que nous reportons la définition du mot « *modéliser* » à la toute dernière section de ce document.

1. COÛT MARGINAL – POLYNÔMES DE DEGRÉ 2 OU 3

1.1. **Une modélisation.** À des fins prospectives, on souhaite modéliser le capital d'une entreprise qui fabrique et vend un produit. On utilise les notations suivantes.

- $C(x)$ est le coût de production en euros pour x unités produites.
- $C_m(x) = C(x) - C(x-1)$ est le coût marginal de production pour $x \in \mathbb{N}^*$ (*c'est le coût spécifique à la x^e unité produite*).
- $CM(x) = \frac{C(x)}{x}$ est le coût moyen de production pour $x \in \mathbb{N}^*$.

Cas 1. Supposons que des études statistiques aient montré que lorsque le nombre d'unités vendues augmente le coût marginal augmente de façon quasi linéaire.

Dans ce cas, on peut faire l'approximation $C_m(x) = ax + b$ avec $(a; b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ (*cette fonction affine peut être celle obtenue via une régression linéaire par la méthode des moindres carrés*). Nous avons alors :

$$\begin{aligned} C(x) &= C(0) + \sum_{k=1}^x C_m(k) \\ &= C(0) + \sum_{k=1}^x (ak + b) \\ &= mx^2 + px + q \end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, nous avons utilisé le fait que $\forall (e, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^x k^e$ est un polynôme en x de degré $(e+1)$. En utilisant les formules exactes de ces polynômes, il est facile de vérifier que nos coefficients m , p et q sont tous positifs et même que $m > 0$.

Avec ce modèle, nous avons $CM(x) = mx + p + \frac{q}{x}$ pour $x \in \mathbb{N}^*$. Nous pouvons donner l'interprétation concrète suivante des termes mx , p et $\frac{q}{x}$.

- (1) p correspond à un coût fixe de fabrication : quelque soit le nombre d'unités vendues, l'entreprise doit déboursier en moyenne q euros par unité fabriquée (*penser à l'usage de bâtiments, aux salaires des employés en CDI...*).
- (2) mx augmente strictement avec x car $m > 0$. Ce terme correspond à un coût d'usage (*penser par exemple à l'entretien d'une chaîne de production, à l'énergie dépensée en plus pour produire plus...*).
- (3) $\frac{q}{x}$ indique un coût amorti en ce sens où plus x augmente moins $\frac{q}{x}$ influence $CM(x)$ (*penser par exemple à des investissement faits pour une nouvelle chaîne de production*).

Cas 2. Supposons que des études statistiques aient montré que lorsque le nombre d'unités vendues augmente le coût marginal diminue strictement puis qu'ensuite il atteint un minimum pour enfin ne cesser d'augmenter strictement. Notons que le minimum est forcément positif, et la valeur où il est atteint strictement positive. Nous supposons de plus que les données sont telles que la courbe de C_m soit quasi parabolique.

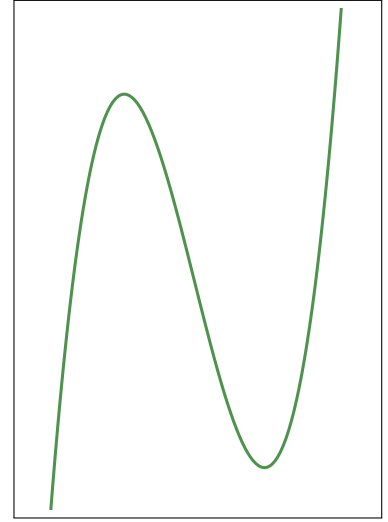
Dans ce cas, on peut faire l'approximation $C_m(x) = ax^2 + bx + c$ avec les contraintes $a > 0$, $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} b^2 - 4ac \leq 0$ ainsi que $\frac{-b}{2a} > 0$ (*ce polynôme du 2^e degré peut être celui obtenu via une régression polynomiale par la méthode des moindres carrés*). Pourquoi ces conditions ?

- (1) $a > 0$ permet de vérifier les contraintes de variation.
- (2) $\Delta \leq 0$ et $\frac{-b}{2a} > 0$ servent à valider la contrainte du minimum.

De nouveau, nous avons :

$$\begin{aligned}
 C(x) &= C(0) + \sum_{k=1}^x C_m(k) \\
 &= C(0) + \sum_{k=1}^x (ak^2 + bk + c) \\
 &= mx^3 + px^2 + qx + r
 \end{aligned}$$

Si une étude statistique rapide sur le coût de fabrication C fournit une courbe similaire à celle ci-contre, on pourra espérer modéliser correctement C avec un polynôme de degré 3 comme ci-dessus. Dans ce cas, il faudra bien choisir certaines données concrètes afin de trouver de « bonnes » valeurs des coefficients m , p , q et r . C'est à l'usage que l'on pourra voir la pertinence ou non de ces choix.



Avec ce modèle, nous avons $CM(x) = mx^2 + px + q + \frac{r}{x}$ pour $x \in \mathbb{N}^*$. Bien que les significations concrètes de px , q et $\frac{r}{x}$ peuvent être similaires à celles données dans le cas 1, il devient difficile de donner un sens concret au terme mx^2 .

Remarque 1.1. Si le coût marginal C_m admet une « courbe en U », on pourrait faire l'approximation $C_m(x) = c(x - \alpha)^{2p} + \beta$ avec $(c; \alpha; \beta) \in (\mathbb{R}_+)^3$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, $C(x)$ sera un polynôme de degré $(2p + 1)$. Est-ce plus efficace au final que de considérer une « courbe en U » comme quasi parabolique ? Ne pas oublier qu'un modèle doit être aisément utilisable quitte à être un peu approximatif. Il est donc parfois inutile de vouloir être trop précis.

Remarque 1.2. Plus généralement, on pourrait considérer d'autres types de fonction avec des variations collant à une étude statistique pour peu que le comportement du coût marginal C_m soit relativement régulier. Le problème que l'on aura à résoudre sera soit d'évaluer simplement $\sum_{k=1}^x C_m(k)$ pour une utilisation « humaine », soit de le faire efficacement de façon informatique.

1.2. Le modèle est-il bon ? Il se trouve que la modélisation du coût de production par un polynôme de degré 2 ou 3 apparaît souvent dans des livres présentant des mathématiques élémentaires pour l'Économie. Cela montre que ces modèles ont leur utilité mais si l'on est honnête, les raisonnements précédents sont fragiles car il repose sur des « approximations de courbes », une technique qui reste tout de même intéressante.

2. DÉSINTÉGRATION RADIOACTIVE – PROBABILITÉS ET LOIS CONTINUES, OU PAS...

2.1. Une modélisation. Les Sciences Physiques nous donnent la loi **[D]** suivante : « *la probabilité qu'à un instant t un noyau radioactif se désintègre dans l'intervalle $[t; t + s]$ ne dépend pas de son âge t et n'est jamais égale à un* ». Concrètement, ceci signifie que l'on suppose que les noyaux radioactifs ne vieillissent pas avant leur désintégration, et que de plus il est impossible qu'ils disparaissent majoritairement d'un seul coup. Il est aussi implicite qu'il est impossible qu'aucun noyau ne disparaisse sur l'intervalle $[0; t]$ pour $t > 0$, ceci revient à n'étudier que le phénomène de radioactivité.

Nous allons supposer de plus que la probabilité P de désintégration suit sur \mathbb{R}_+ une loi de densité continue f de sorte que $P([0; t]) = \int_0^t f(x) dx$ pour $t \geq 0$. Posant $F(t) = P([0; t])$ pour $t \geq 0$, nous avons alors les faits suivants.

- F est une primitive de f sur \mathbb{R}_+ puisque f est continue sur \mathbb{R}_+ par hypothèse.
- La loi **[D]** signifie que la probabilité que le noyau se désintègre dans l'intervalle $[t; t + s]$ sachant qu'il ne s'est pas désintégré dans l'intervalle $[0; t]$ est égale à $P([0; s]) = F(s)$ pour tout couple $(t; s) \in (\mathbb{R}_+)^2$.
- Pour $(t; s) \in (\mathbb{R}_+)^2$, la probabilité que le noyau se désintègre dans l'intervalle $[t; t + s]$ sachant qu'il ne s'est pas désintégré dans l'intervalle $[0; t]$ est $\frac{P([t; t+s])}{1-P([0; t])}$, c'est à dire $\frac{F(t+s)-F(t)}{1-F(t)}$ (notons qu'il n'y a aucun souci car par hypothèse $F(t) \neq 1$).
- Nous obtenons donc $\frac{F(t+s)-F(t)}{1-F(t)} = F(s)$ d'où $F(t+s) - F(t) = F(s)(1 - F(t))$ pour tout couple $(t; s) \in (\mathbb{R}_+)^2$.
- L'équation fonctionnelle vérifiée par F n'est pas très sympathique. Nous allons essayer d'en déduire une autre qui nous éclairera sur la marche à suivre. Il est naturel d'introduire $G(t) = 1 - F(t)$ la probabilité que le noyau ne se soit pas désintégré dans l'intervalle $[0; t]$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} F(t+s) - F(t) &= F(s)(1 - F(t)) \iff 1 - G(t+s) - (1 - G(t)) = (1 - G(s))G(t) \\ &\iff -G(t+s) + G(t) = G(t) - G(s)G(t) \\ &\iff G(t+s) = G(s)G(t) \end{aligned}$$

Nous obtenons donc que la fonction G dérivable sur \mathbb{R}_+ vérifie l'équation fonctionnelle $G(t+s) = G(s)G(t)$. Ceci nous donne alors $G(x) = e^{kx}$ avec $(k; x) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+$.

En effet, il suffit de fixer $t \in \mathbb{R}_+$ puis de dériver par rapport à s ce qui nous donne $G'(t+s) = G'(s)G(t)$. Comme G ne peut pas être constante¹, on a : $k \stackrel{\text{déf}}{=} G'(0) \neq 0$. Nous avons alors pour $t \in \mathbb{R}_+$ quelconque $G'(t) = kG(t)$ soit une équation différentielle classique (il n'est pas gênant que nous soyons juste sur \mathbb{R}_+ au lieu de \mathbb{R} tout entier).

1. Sur \mathbb{R}_+^* , nous avons toujours $G(t) \neq 0$ et $G(t) \neq 1$, i.e. $F(t) \neq 1$ et $F(t) \neq 0$ par hypothèse car on n'exclut les cas de désintégrations probablement certaine et impossible.

- Sur \mathbb{R}_+ , $f(x) = F'(x) = -G'(x) = -ke^{kx}$. En fait nécessairement $k < 0$ car nous devons avoir $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1$. Faisons comme en Physique en n'utilisant que des paramètres positifs : notant $\lambda = -k > 0$, nous avons : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.
- Réciproquement si $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ avec $\lambda > 0$ alors la probabilité P de désintégration de loi de densité continue f vérifie bien la loi **[D]** (*facile à vérifier en « remontant » certains des calculs faits ci-dessus*).

En résumé, si la probabilité P de désintégration vérifie la loi **[D]**, alors elle suit une loi de densité continue f si et seulement si sur \mathbb{R}_+ , $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ avec $\lambda > 0$.

Remarque 2.1. Les physiciens appellent $\tau \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\lambda}$ la constante de temps radioactive.

2.2. Le modèle est-il bon ? Vous aurez noté qu'en ajoutant juste une petite hypothèse, à savoir que la loi de probabilité de désintégration suit une loi de densité continue, nous arrivons à une modélisation robuste vis à vis de la loi physique **[D]**. Ceci étant dit, il serait bien de pouvoir se passer de cette hypothèse additionnelle dont la loi **[D]** ne parle pas. Est-ce possible ?

Nous posons de nouveau $F(t) = P([0; t])$ et $G(t) = 1 - F(t)$ pour $t \geq 0$. On sait juste que $0 < G \leq 1$ sur \mathbb{R}_+ , que $0 < G < 1$ sur \mathbb{R}_+^* , et que G est décroissante sur \mathbb{R}_+ (*la monotonie découle de la croissance des probabilités*).

Reprenant le raisonnement de la section précédente, sans passer par aucun calcul intégral, nous avons de nouveau que $G(t+s) = G(s)G(t)$ pour $(t; s) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Démontrons alors l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $G(x) = e^{-\lambda x}$.

- $G(0+0) = G(0)G(0)$ donne $G(0)(1 - G(0)) = 0$ soit $G(0) = 0$ ou $G(0) = 1$. Seul le second cas est possible.
- Pour tout réel $x \geq 0$, une récurrence facile montre que $G(nx) = G(x)^n$ pour tout naturel n .
- Dans la suite, nous poserons $\alpha = G(1) \in]0; 1[$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $G(n) = \alpha^n$.
- $\forall (p; q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $G(p) = G\left(q \times \frac{p}{q}\right)$, soit $\alpha^p = G\left(\frac{p}{q}\right)^q$. Comme de plus $G > 0$ sur \mathbb{R}_+ , on a : $G\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{\alpha^p} = \alpha^{\frac{p}{q}}$. Autrement dit, $\forall r \in \mathbb{Q}_+$, $G(r) = \alpha^r$.
- Soit enfin $x \in \mathbb{R}_+$. Par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , il existe deux suites de rationnels positifs (r_n) et (R_n) qui convergent vers x et vérifient $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n \leq x \leq R_n$. Comme G décroît, $\forall n \in \mathbb{N}$, $G(r_n) \geq G(x) \geq G(R_n)$, soit $\alpha^{r_n} \geq G(x) \geq \alpha^{R_n}$. Par continuité de la fonction $t \rightarrow \alpha^t$ sur \mathbb{R}_+ , un passage à la limite donne $G(x) = \alpha^x$.
- Il ne reste plus qu'à poser $\lambda = -\ln \alpha > 0$ de sorte que $G(t) = e^{-\lambda t}$ sur \mathbb{R}_+ . Dès lors, $F(t) = 1 - G(t) = 1 - e^{-\lambda t} = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ prouve que la probabilité P suit forcément la loi de densité continue $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Ce qui précède nous montre que l'hypothèse sur la loi de densité continue peut-être omise même si au final notre probabilité suit quand même une loi de densité continue. Nous avons donc pu construire un modèle très robuste au regard de la loi physique **[D]**. Ceci est très joli !

3. DANIEL BERNOULLI ET LA VARIOLE – ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES

3.1. Une modélisation. Daniel Bernoulli² (1700 – 1782) était un médecin, physicien et mathématicien suisse. Il présente en 1760 à l'Académie des sciences de Paris un mémoire intitulé « *Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole³ et des avantages de l'inoculation pour la prévenir* »⁴. Nous allons présenter son raisonnement.

Propagation de la variole. Pour modéliser ceci, nous aurons besoin des notations suivantes où l'unité de temps sera l'année.

- q_I désigne la probabilité d'être infecté par la variole pendant une année.
- q_V désigne la probabilité de mourir lorsque l'on attrape la variole pour la 1^{re} fois. Une personne ne mourant pas pendant une année sera considérée comme immunisée contre la variole.
- $m(t)$ désigne, à la fin de l'année t , le taux de mortalité « normale » sans tenir compte d'une épidémie de variole (*l'année 0 est celle du début de l'étude réelle*).

Les notations précédentes sous-entendent que les quantités nommées sont constantes. C'est une hypothèse de modélisation ! Continuons avec les fonctions suivantes où t désigne une année.

- $S(t)$ est le nombre de personnes saines n'ayant pas la variole à la fin de l'année t .
- $I(t)$ est le nombre de personnes qui se sont immunisées contre la variole au cours de l'année t . Ces personnes sont celles qui ont attrapé la variole pendant l'année t sans mourir.
- $P(t) = S(t) + I(t)$ est le nombre personnes toujours vivantes à la fin de l'année t .

Faisons le bilan entre l'année t et l'année $(t + 1)$.

- $S(t + 1) = S(t) - q_I S(t) - m(t)S(t)$
 - $q_I S(t)$ est le nombre de personnes mortes de la variole.
 - $m(t)S(t)$ est le nombre des personnes saines mortes de cause « normale ».
- $I(t + 1) = I(t) + (1 - q_V)q_I S(t) - m(t)I(t)$
 - Parmi les $q_I S(t)$ nouvelles personnes infectées, il y en a juste $(1 - q_V)q_I S(t)$ qui ne meurent pas de la variole.
 - $m(t)I(t)$ est le nombre d'infectés morts d'autre chose que de la variole.
- Nous en déduisons :

$$P(t + 1) = P(t) - q_V q_I S(t) - m(t)P(t)$$

Notant $\Delta f_b^a = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$ le taux de variation de la fonction f entre a et b distincts, nous avons :

- $\Delta S_{t+1}^t = -q_I S(t) - m(t)S(t)$
- $\Delta P_{t+1}^t = -q_V q_I S(t) - m(t)P(t)$

2. Il était le fils de Jean Bernoulli (1667-1748) et le neveu de Jacques Bernoulli (1654-1705) qui étaient tous les deux des mathématiciens et physiciens suisses.

3. La petite vérole était le nom que l'on donnait à la variole.

4. Pour les aspects historiques, se reporter au livre « *Histoires de mathématiques et de populations* » de Nicolas Bacaër aux éditions CASSINI.

Il n'est pas aisé d'étudier des systèmes d'équations sur des suites comme celui ci-dessus. Nous allons donc émettre de nouvelles hypothèses de modélisation pour aboutir à un modèle utilisant des équations différentielles. L'idée simple, mais peut-être un peu trop, est de négliger les variabilités excessives pendant une année, autrement dit on suppose S et P définies sur \mathbb{R}_+ et affines entre t et $t + 1$. Sous ces hypothèses fortes, nous avons alors pour $\delta t \in [0; 1]$:

- $\Delta S_{t+\delta t}^t = \Delta S_{t+1}^t = -q_I S(t) - m(t)S(t)$
- $\Delta P_{t+\delta t}^t = \Delta P_{t+1}^t = -q_V q_I S(t) - m(t)P(t)$

Il ne reste plus qu'à passer un cap supplémentaire en supposant S et P dérivables en chaque valeur $t \in \mathbb{N}$. Dès lors par passage à la limite via $\delta t \rightarrow 0^+$ sur $[t; t + 1]$ et $\delta t \rightarrow 0^-$ sur $[t - 1; t]$ pour $t \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

- $S'(t) = -q_I S(t) - m(t)S(t)$
- $P'(t) = -q_V q_I S(t) - m(t)P(t)$

Quid des valeurs sur $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$? On peut supposer que l'on étend le système précédent de deux équations aux valeurs de \mathbb{R}_+ tout entier⁵ et non seulement à celles de \mathbb{N} . Encore une hypothèse de modélisation... Notre sac d'hypothèses s'alourdit !

En résumé, nous devons trouver deux fonctions S et P dérivables sur \mathbb{R}_+ vérifiant les deux équations précédentes. A priori, ce n'est pas simple comme problème : ce qui crée une petite difficulté c'est la présence de $m(t)$ dont on ne sait rien. Nous décidons de chercher à obtenir des informations sur $R(t) = \frac{S(t)}{P(t)}$ le taux des personnes saines (*en annexe de cette section sont données deux autres méthodes de résolution du système ci-dessus dont celle de Daniel Bernoulli*). Au passage, nous avons besoin de supposer, de façon non abusive, que S et P ne s'annulent jamais.

$$\begin{aligned} R'(t) &= \frac{1}{P^2(t)} (S'(t)P(t) - S(t)P'(t)) \\ &= \frac{1}{P^2(t)} ([-q_I S(t) - m(t)S(t)]P(t) - S(t)[-q_V q_I S(t) - m(t)P(t)]) \\ &= \frac{1}{P^2(t)} (-q_I S(t)P(t) + q_V q_I S^2(t)) \\ &= -q_I R(t) + q_V q_I R^2(t) \end{aligned}$$

Ce qui est beau, c'est que l'on tombe sur une équation différentielle peu agressive a priori : $R'(t) = -q_I R(t) + q_V q_I R^2(t)$. Quiconque connaissant les formules générales de dérivation trouvent qu'il suffit de raisonner comme suit en se souvenant que S et P ne s'annulent jamais et donc R non plus.

$$\begin{aligned} R'(t) = -q_I R(t) + q_V q_I R^2(t) &\iff -\frac{R'(t)}{R^2(t)} = \frac{q_I}{R(t)} - q_V q_I \\ &\iff f'(t) = q_I f(t) - q_V q_I \text{ où on a posé } f(t) = \frac{1}{R(t)}. \end{aligned}$$

Nous aboutissons à une simple équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre et il est connu que nécessairement $f(t) = q_V + k e^{q_I t}$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante dépendant des conditions réelles⁶. Nous avons finalement : $\frac{S(t)}{P(t)} = \frac{1}{q_V + k e^{q_I t}}$. Tout ceci a été obtenu via de bien jolis calculs...

5. Peut-être que le lecteur aura noté une grosse arnaque ici. Nous en discuterons dans la section suivante.

6. Notre équation différentielle est juste sur \mathbb{R}_+ mais cela n'est pas gênant ici.

Remarque 3.1. L'équation différentielle $R'(t) = -q_I R(t) + q_V q_I R^2(t)$ est une équation du type $y' = ay(1 - by)$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$. De telles équations sont dites « logistiques » et elles se résolvent, pour les solutions ne s'annulant pas, via le changement de fonctions $f = \frac{1}{y}$.

Utilité de l'inoculation pour vacciner. L'idée première de Daniel Bernoulli est de supposer que l'inoculation de la variole à tous les jeunes enfants les rend tous immunisés sans les tuer⁷. Sous cette hypothèse, il faut étudier $Q(t) = \frac{P(t)}{N(t)}$ où $N(t)$ désigne le nombre, non nul par hypothèse, de personnes à la fin de l'année t s'il n'y a aucun cas de variole. En raisonnant comme ci-dessus, nous avons $\Delta N_{t+1}^t = -m(t)N(t)$ puis $N'(t) = -m(t)N(t)$ en supposant N dérivable sur \mathbb{R}_+ .

$$\begin{aligned} Q'(t) &= \frac{1}{N^2(t)} (P'(t)N(t) - P(t)N'(t)) \\ &= \frac{1}{N^2(t)} ([-q_V q_I S(t) - m(t)P(t)]N(t) + m(t)P(t)N(t)) \\ &= -q_V q_I \frac{P(t)}{N(t)} \cdot \frac{S(t)}{P(t)} \\ &= -q_V q_I Q(t) \frac{e^{-q_I t}}{q_V e^{-q_I t} + k} \text{ car } \frac{S(t)}{P(t)} = \frac{1}{q_V + k e^{q_I t}} = \frac{e^{-q_I t}}{q_V e^{-q_I t} + k} \end{aligned}$$

Comme $\frac{Q'(t)}{Q(t)} = \frac{-q_I q_V e^{-q_I t}}{q_V e^{-q_I t} + k}$, la dérivation logarithmique nous donne $Q(t) = K(q_V e^{-q_I t} + k)$ avec $K \in \mathbb{R}^*$ une constante. Ceci permet d'évaluer l'efficacité de l'inoculation de la variole en utilisant les données du terrain pour déterminer les différents paramètres.

3.2. Le modèle est-il bon ? Revenons sur la toute « petite » liste d'hypothèses de modélisation que nous avons faites.

- (1) La probabilité q_I d'être infecté dans l'année, et celle q_V de mourir dans l'année une fois infecté sont supposées indépendantes de l'année t considérée.
- (2) On a supposé S , P et N définies sur \mathbb{R}_+ et affines entre t et $t + 1$.
- (3) Il fallu aussi ajouter la dérivabilité de S , P et N en chaque valeur $t \in \mathbb{N}$, puis carrément sur \mathbb{R}_+ tout entier.
- (4) Enfin nous avons besoin que S , P et N ne s'annulent jamais.

Hypothèse 1. Ceci sous-entend un type particulier de propagation. Par exemple, cette première hypothèse reste-t-elle valable si les personnes malades sont mises en quarantaine ? Non. C'est ce qui permet d'éradiquer des maladies très virulentes. Une autre critique : plus il y a de malades contagieux, plus grande devient la probabilité de tomber malade. Du point de vue de la modélisation, pour une maladie pas « trop violente » et en début d'épidémie, on peut tout de même accepter la première hypothèse⁸.

7. Dans le livre « *Histoires de mathématiques et de populations* », Nicolas Bacaër explique la suite du raisonnement consistant à prendre en compte les effets délétères de l'inoculation dans certains cas.

8. Des règles de quarantaines ne sont pas justifiables politiquement.

Hypothèse 2. Le passage de fonctions définies sur \mathbb{N} à des fonctions définies sur \mathbb{R}_+ ne pose pas de difficultés conceptuelle et concrète. Par contre, l'hypothèse d'un comportement affine entre t et $t + 1$ est concrètement critiquable. Penser par exemple aux maladies saisonnières comme la grippe par exemple. Mais est-ce gênant pour notre modélisation ? En fait non ! Voici pourquoi. Nous avons user d'un simple artifice mathématique qui revient à répartir les données sur l'année. Or nous ne nous intéressons juste à ce qu'il se passe aux années t et $t + 1$, et non à ce qu'il arrive à l'intérieur d'une année.

Hypothèse 3. Nous arrivons ici à un classique des sciences du réel : les fonctions concrètes étudiées sont supposées suffisamment régulières. Pourquoi fait-on ceci ? Comme nous l'avons déjà indiqué, ceci permet de faire appel à des outils mathématiques puissants du calcul différentiel car l'on dispose de moins d'outils efficaces pour étudier les suites.

Ceci étant dit, supposer la dérivabilité juste en $t \in \mathbb{N}$ et sur \mathbb{R}_+ tout entier sont deux choses différentes car dans le second cas on va lisser le comportement des fonctions sur \mathbb{R}_+ tout entier et non juste aux valeurs étudiées. Ainsi les solutions des équations différentielles logistiques $y' = ay(1 - by)$ sont régulières, tandis que l'équation logistique discrète $u_{n+1} = au_n(1 - bu_n)$ peut produire des suites au comportement chaotique.

L'hypothèse 3 est donc lourde de conséquences... Ceci étant dit, cela reste un classique de la modélisation.

Hypothèse 4. Ceci ne pose aucun souci sauf à vouloir étudier une population sans aucune personne saine, ou bien sans personne vivante.

Conclusion. Bien que nous ayons fait un très joli raisonnement mathématique, nous venons de voir que concrètement il y a de réelles failles de modélisation mais comme toujours en modélisation, c'est l'affrontement du modèle et des vraies données qui servira de juge d'utilité.

3.3. Annexe. Nous allons donner deux autres méthodes de résolution⁹ du système suivant où les fonctions S et P sont dérivables sur \mathbb{R}_+ .

- $S'(t) = -q_I S(t) - m(t)S(t)$
- $P'(t) = -q_V q_I S(t) - m(t)P(t)$

Méthode de Daniel Bernoulli. Le médecin suisse raisonne comme suit.

$$\frac{S'(t) + q_I S(t)}{S(t)} = -m(t) = \frac{P'(t) + q_V q_I S(t)}{P(t)}$$

$$(S'(t) + q_I S(t)) P(t) = (P'(t) + q_V q_I S(t)) S(t)$$

$$S'(t)P(t) - P'(t)S(t) = -q_I S(t)P(t) + q_V q_I S^2(t)$$

$$R'(t) = -q_I R(t) + q_V q_I R^2(t) \text{ en notant } R(t) = \frac{S(t)}{P(t)} \dots$$

9. Ces méthodes sont présentes dans le livre « *Histoires de mathématiques et de populations* » de Nicolas Bacaër.

Méthode via la dérivation logarithmique. Supposons la fonction m intégrable sur \mathbb{R}_+ ¹⁰. Les solutions de $S'(t) = -q_I S(t) - m(t)S(t)$ sont du type $S(t) = c_1 \exp\left(-q_I t - \int_0^t m(x) dx\right)$ où $c_1 \in \mathbb{R}$ est une constante (*ceci se démontre via la dérivée logarithmique de S*). Concrètement, nous savons que $c_1 > 0$.

De même, les solutions de $P'(t) = -m(t)P(t)$ sont de la forme $P(t) = c_2 \exp\left(-\int_0^t m(x) dx\right)$ où $c_2 \in \mathbb{R}$ est une constante, tandis que $P'(t) = -q_V q_I S(t) - m(t)P(t)$ admet la solution particulière $P(t) = q_V S(t)$. Dès lors, les solutions de $P'(t) = -q_V q_I S(t) - m(t)P(t)$ sont du type $P(t) = c_2 \exp\left(-\int_0^t m(x) dx\right) + q_V S(t)$. Comme $\exp\left(-\int_0^t m(x) dx\right) = \frac{1}{c_1} e^{q_I t} S(t)$ nous obtenons :

$$P(t) = \frac{c_2}{c_1} e^{q_I t} S(t) + q_V S(t)$$

$$\frac{P(t)}{S(t)} = k e^{q_I t} + q_V \text{ avec } k = \frac{c_2}{c_1} \text{ une constante réelle}$$

$$R(t) = \frac{S(t)}{P(t)} = \frac{1}{q_V + k e^{q_I t}} \dots$$

4. AFFAIRE À SUIVRE...

10. L'ensemble des fonctions intégrables sur \mathbb{R}_+ ne se limite pas à celui des fonctions continues. On y trouve des fonctions plus ou moins complexes suivant le type de calcul intégral que l'on s'autorise. Le lecteur intéressé par le sujet pourra se reporter à l'excellent livre « *Intégration, de Riemann à Kurzweil et Henstock - La construction progressive des théories modernes de l'intégrale* » de Laurent Moonens chez ellipses.