

# BROUILLON - FAIRE DES PRODUITS SUR UNE HYPERBOLE

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution - Pas d’utilisation commerciale - Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



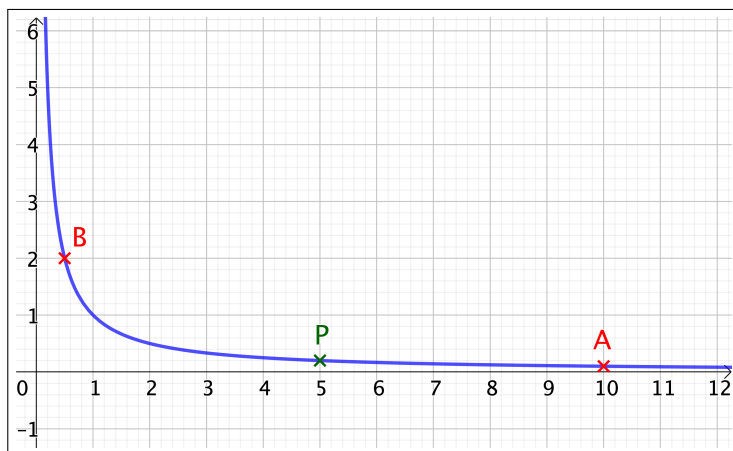
---

## TABLE DES MATIÈRES

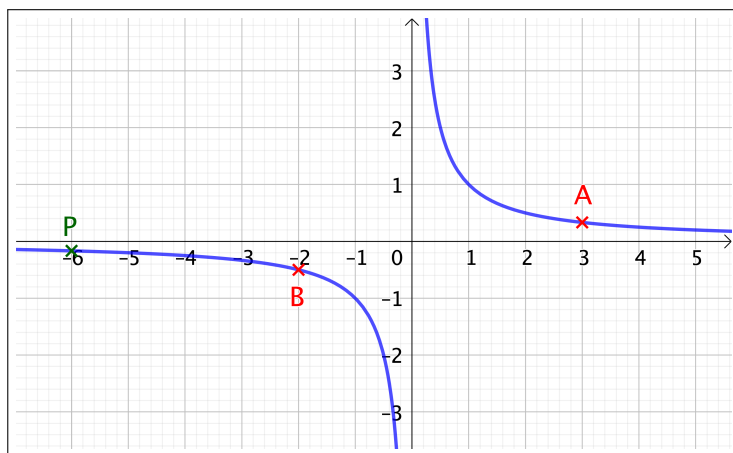
1.	Comment additionner des nombres grâce à l’hyperbole d’équation $y = \frac{1}{x}$	2
2.	Preuve de la validité de la conjecture	4
3.	Toute hyoerbole d’équation $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ a une structure de groupe	4

1. COMMENT ADDITIONNER DES NOMBRES GRÂCE À L'HYPERBOLE D'ÉQUATION  $y = \frac{1}{x}$

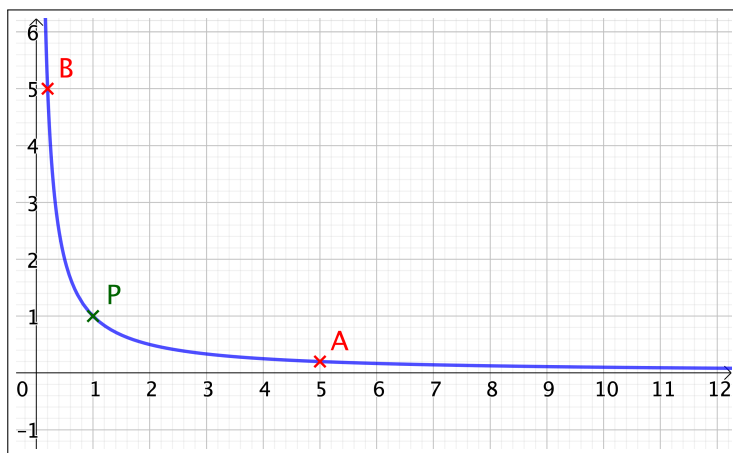
Dans un repère orthogonal, donnons nous l'hyperbole  $\mathcal{H} : y = \frac{1}{x}$ . Plaçons-y les points  $A$ ,  $B$  et  $P$  d'abscisses respectives  $a$ ,  $b$  et  $p = ab$ . Observez<sup>1</sup> les trois cas ci-dessous et essayez de conjecturer quelque chose (*la réponse est donnée dans la page suivante*)<sup>2</sup>.



Cas où  $a > 0$  et  $b > 0$



Cas où  $a < 0$  et  $b > 0$

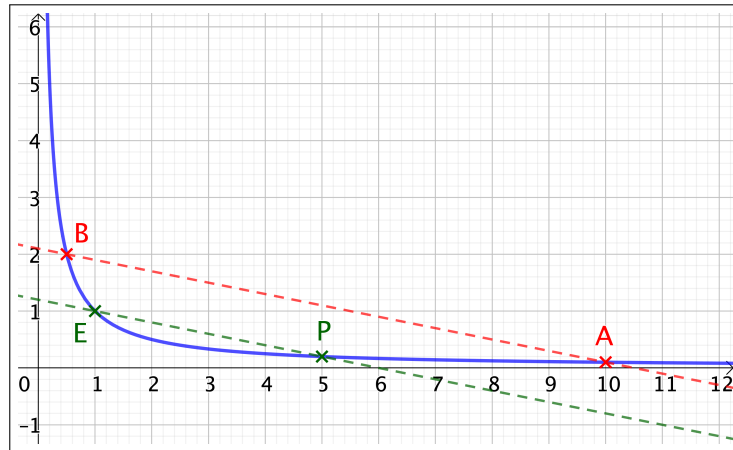


Cas où  $ab = 1$

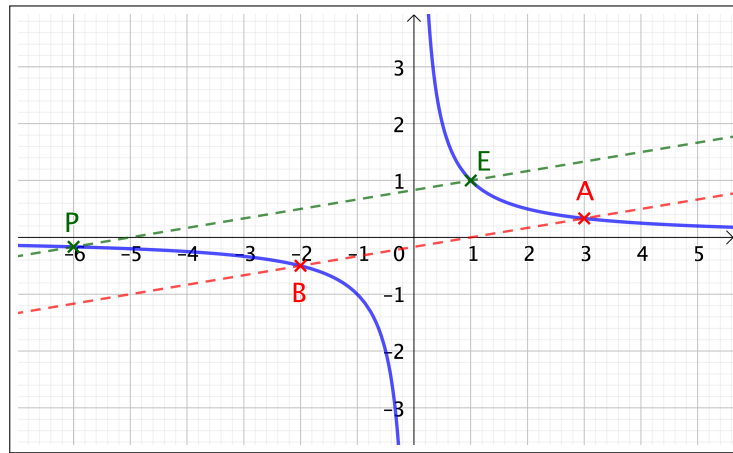
1. Pour conjecturer plus facilement quelque chose, utilisez le fichier GeoGebra `base-tool.ggb` manipulable dynamiquement qui est disponible sur le lieu de téléchargement de ce document.

2. On sait « additionner » sur un cercle et sur  $\mathcal{P} : y = x^2$ . Or  $yx$ ,  $x^2 - y^2$  et  $x^2 - y$  sont des formes quadratiques qui ont des propriétés géométriques communes. Avec tout ceci en tête, la recherche proposée ici devient des plus naturelles.

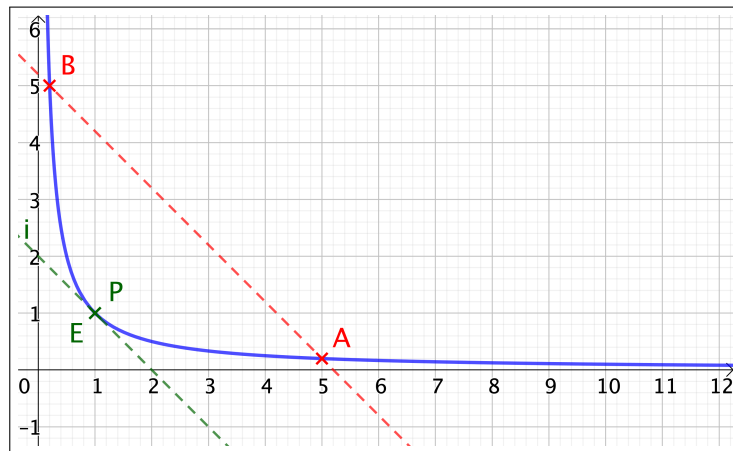
Pour mieux voir ce qu'il se passe, ajoutons  $E(1; 1)$ , ce qui semble naturel car 1 est le neutre de la multiplication, et traçons quelques droites. Voici ce que cela donne.



Cas où  $a > 0$  et  $b > 0$



Cas où  $a < 0$  et  $b > 0$



Cas où  $ab = 1$

Il devient évident de conjecturer que le point  $P$  se construit géométriquement comme suit.

- (1) Si  $x_A x_B \neq 1$  et  $A \neq B$  alors on construit la parallèle à  $(AB)$  passant par  $E$ . Le point  $P$  est le second point d'intersection de cette parallèle avec  $\mathcal{H}$  (notons qu'une droite coupe  $\mathcal{H}$  en au plus deux points).
- (2) Si  $x_A x_B = 1$  alors  $P = E$ . Notons au passage que l'on peut voir ceci comme un cas limite du précédent avec un point d'intersection « double ».

- (3) Si  $x_A x_B \neq 1$  et  $A = B$ , on procède comme au point (1) mais avec la parallèle à la tangente en  $A$  à l'hyperbole  $\mathcal{H}$ .

La section qui suit va valider cette conjecture qui donne un moyen très capillotracté de calculer un produit de deux réels non nuls via l'hyperbole  $\mathcal{H}$ . Plus sérieusement, la construction ci-dessus est une propriété géométrique très jolie de l'hyperbole  $\mathcal{H}$ .

## 2. PREUVE DE LA VALIDITÉ DE LA CONJECTURE

Rappelons que  $\mathcal{H} : y = \frac{1}{x}$ ,  $E(1;1)$ ,  $A(a; \frac{1}{a})$ ,  $B(b; \frac{1}{b})$  et  $P(p; \frac{1}{p})$  où  $p = ab$  avec  $(a; b) \in (\mathbb{R}^*)^2$ .

**Cas 1.** *Supposons que  $x_A x_B = 1$ .*

Il est clair que  $P = E$  dans ce cas.

**Cas 2.** *Supposons que  $x_A x_B \neq 1$  et  $A \neq B$ .*

La droite  $(AB)$  a pour pente  $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1}{a-b} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = -\frac{1}{ab}$ . De plus, la droite  $(EP)$ , qui existe car  $p \neq 1$ , a pour pente  $\frac{y_P - y_E}{x_P - x_E} = \frac{1}{p-1} \left( \frac{1}{p} - 1 \right) = -\frac{1}{p} = -\frac{1}{ab}$ . Les droites  $(AB)$  et  $(EP)$  sont bien parallèles comme nous l'avons affirmé.

**Cas 3.** *Supposons que  $x_A x_B \neq 1$  et  $A = B$ .*

Comme ici  $p = a^2 \neq 1$ , la droite  $(EP)$  a pour pente  $(-\frac{1}{a^2})$  qui est aussi la pente de la tangente en  $A(a; \frac{1}{a})$  à l'hyperbole  $\mathcal{H}$  comme annoncé.

## 3. TOUTE HYPERBOLE D'ÉQUATION $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ A UNE STRUCTURE DE GROUPE

Le procédé de construction que nous venons de prouver se « *conserve* » par translations, et aussi par dilatations verticales et horizontales. Il se trouve que ce sont ces transformations qui permettent d'obtenir une hyperbole  $\mathcal{H}' : y = \frac{ax+b}{cx+d}$ , où  $c \neq 0$  et  $ad - bc \neq 0$ <sup>3</sup>, à partir de celle de l'hyperbole  $\mathcal{H} : y = \frac{1}{x}$ . Nous pouvons donc munir toute hyperbole  $\mathcal{H}' : y = \frac{ax+b}{cx+d}$  d'une structure de groupe isomorphe à celle de  $(\mathbb{R}^*; \times)$ , et ceci avec un procédé géométrique simple pour « *multiplier* » sur  $\mathcal{H}'$ . Que c'est joli !

---

3. La condition  $ad - bc \neq 0$  évite d'avoir une simplification de  $\frac{ax+b}{cx+d}$  en une fonction affine comme on peut le constater en considérant les vecteurs  $\vec{u}(a; b)$  et  $\vec{v}(c; d)$ , puis en notant que  $ad - bc = \det(\vec{u}; \vec{v})$ .