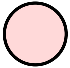
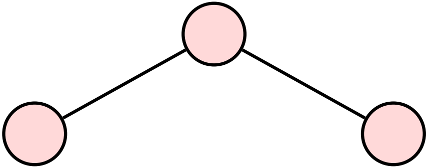
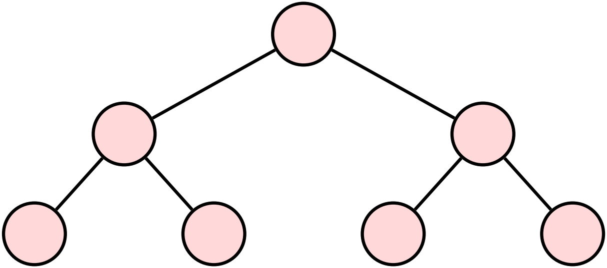
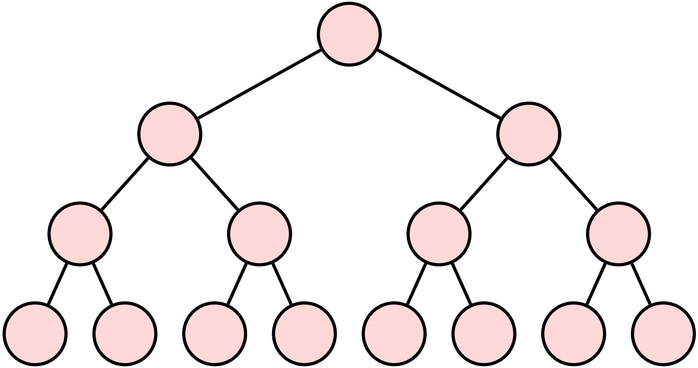
Un moyen très simple de calculer

une somme de puissances successives de 2.

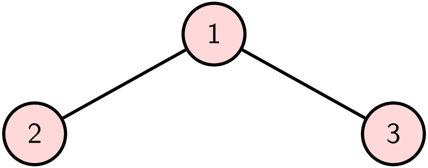


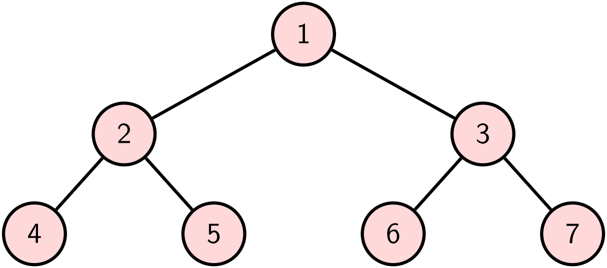


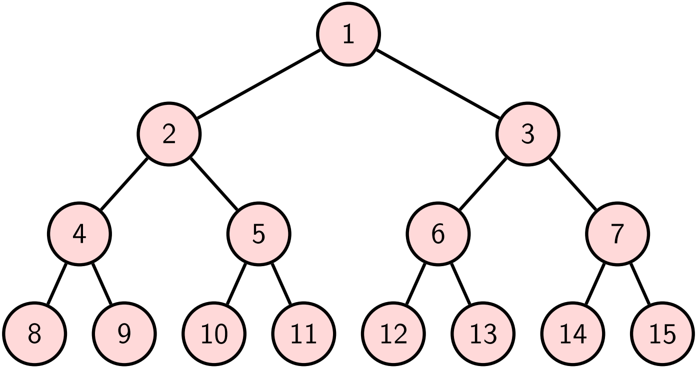




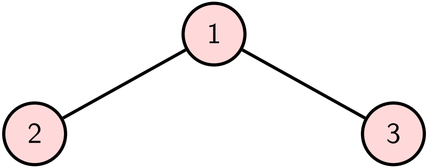

1

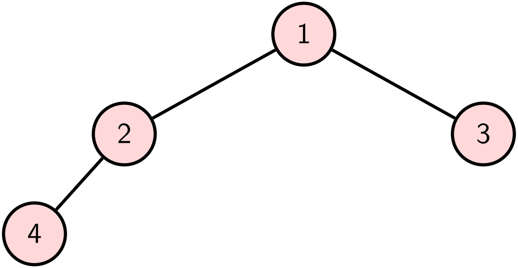

1
2
3

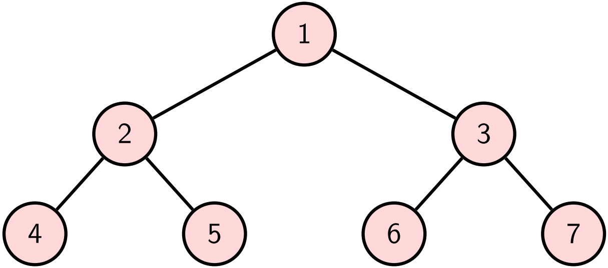

1
2
3
4
5
6
7

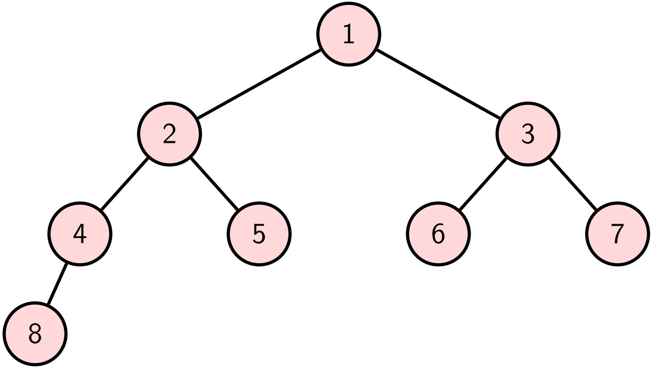

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15

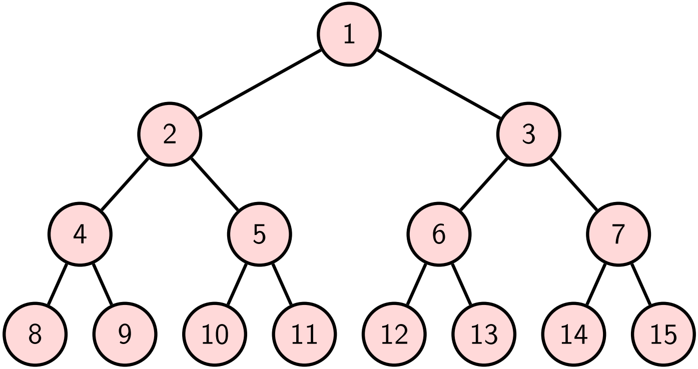

1


1
2
3


1
2
3
4


1
2
3
4
5
6
7


1
2
3
4
5
6
7
8

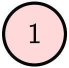

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15

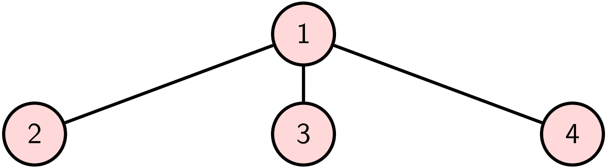
Nous avons découvert assez facilement la formule :

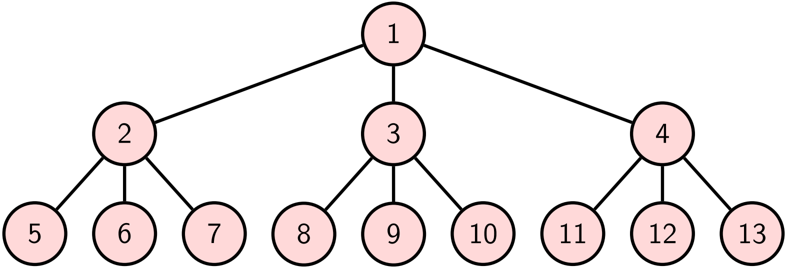
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

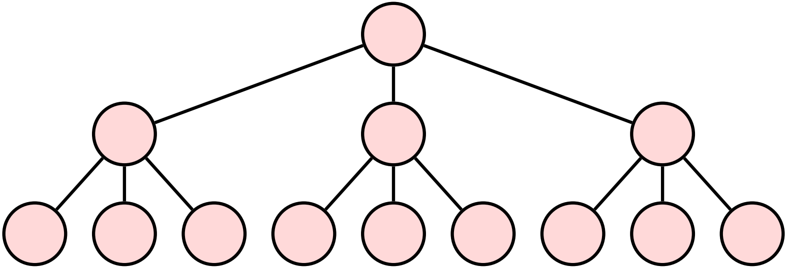
Pouvons-nous généraliser au cas

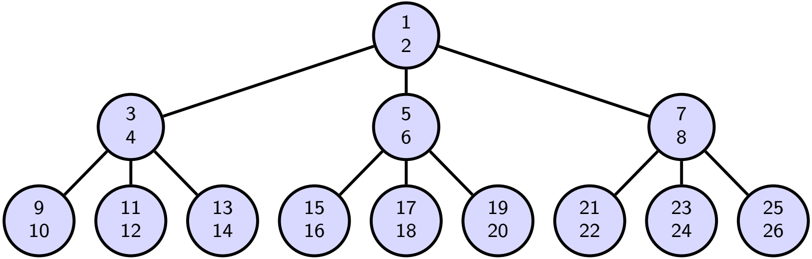
des puissances successives de 3 ?


1


1
2
3
4


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13




1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26

Nous avons découvert assez vite la formule :

$$2\,(1+3+3^2+\cdots+3^n)=3^{n+1}-1.$$

Que se passe-t-il en général avec

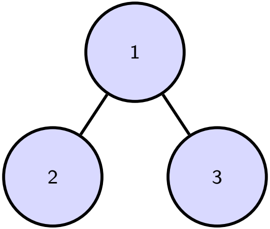
les puissances successives de $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$?

Il est maintenant temps de démontrer

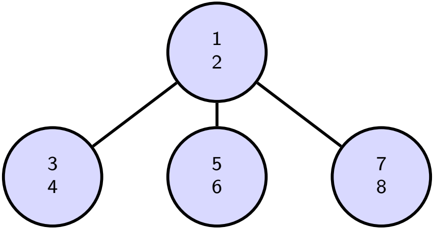
et non juste de constater.

Peut-on trouver une numérotation faisant apparaître les puissances de k à gauche ?

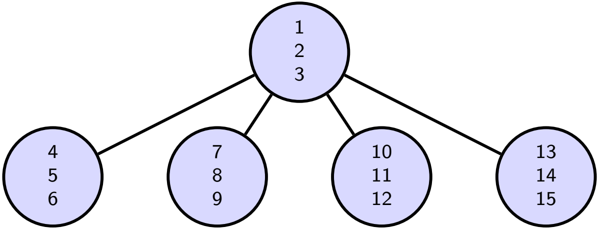
Pour $k = 2$, on fait comme suit.



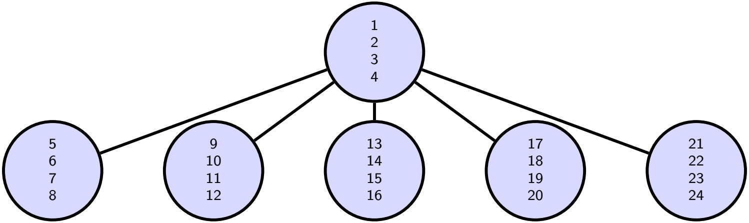
Pour $k = 3$, on fait comme suit.



Pour $k = 4$, on fait comme suit.



Pour $k = 5$, on fait comme suit.



En fait la numérotation n'est pas importante !

En fait la numérotation n'est pas importante !

Le plus utile est le nombre d'entiers par noeud.

En fait la numérotation n'est pas importante !

Le plus utile est le nombre d'entiers par noeud.

La numérotation est là pour le prestige...

En fait la numérotation n'est pas importante !

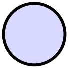
Le plus utile est le nombre d'entiers par noeud.

La numérotation est là pour le prestige...

Voici pourquoi.

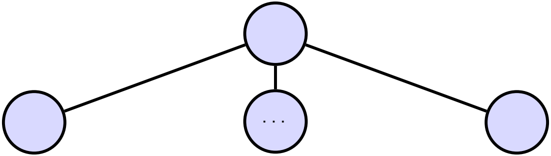
Niveau 1 – Nombre de nouveaux entiers

$$k - 1$$



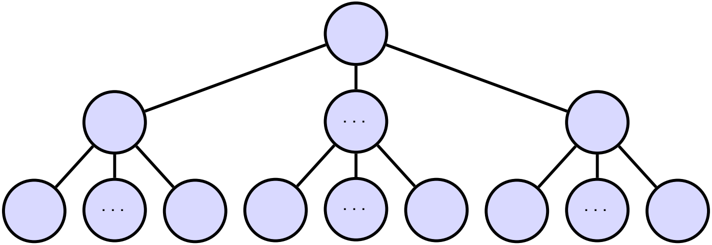
Niveau 2 – Nombre de nouveaux entiers

$$k(k-1) = k^2 - k$$



Niveau 3 – Nombre de nouveaux entiers

$$k^2(k-1) = k^3 - k^2$$



Faisons un 1ier bilan.

Faisons un 1ier bilan.

Niveau 1 : $k - 1$

Faisons un 1ier bilan.

Niveau 1 : $k - 1$

Niveau 2 : $k^2 - k$

Faisons un 1ier bilan.

Niveau 1 : $k-1$

Niveau 2 : k^2-k

Niveau 3 : k^3-k^2

Faisons un 1ier bilan.

Niveau 1 : $k-1$

Niveau 2 : k^2-k

Niveau 3 : k^3-k^2

$$\vdots$$

Faisons un 1ier bilan.

Niveau 1 : $k-1$

Niveau 2 : k^2-k

Niveau 3 : k^3-k^2

$\vdots$

Niveau n : k^n-k^{n-1}

Faisons un 1ier bilan.

$$
\begin{aligned}
\text{Niveau } 1 &: \; k-1 \\
\text{Niveau } 2 &: \; k^2-k \\
\text{Niveau } 3 &: \; k^3-k^2 \\
&\vdots \\
\text{Niveau } n &: \; k^n-k^{n-1} \\
\text{Niveau } n+1 &: \; k^{n+1}-k^n
\end{aligned}
$$

Faisons un 1ier bilan.

Niveau 1 : $k-1$

Niveau 2 : k^2-k

Niveau 3 : k^3-k^2

$\vdots$

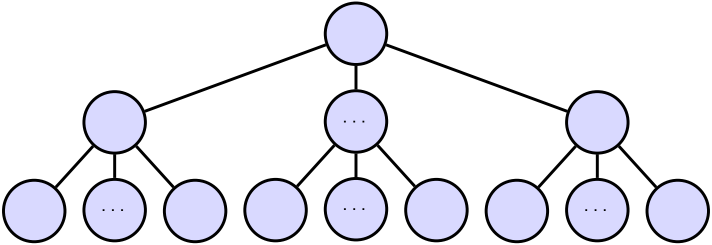
Niveau n : k^n-k^{n-1}

Niveau $n+1$: $k^{n+1}-k^n$

$$TOTAL = k^{n+1}-1$$

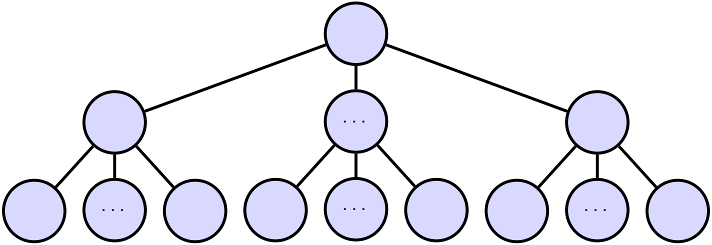
Faisons un 2nd bilan.

Faisons un 2nd bilan.



Faisons un 2nd bilan.

On multiplie le nombre de noeuds par $(k-1)$.

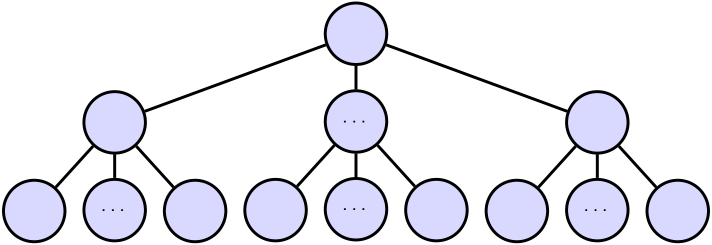


Faisons un 2nd bilan.

On multiplie le nombre de noeuds par $(k-1)$.

Jusqu'au niveau $n+1$:

$$TOTAL = (k-1)(1 + k + k^2 + \cdots + k^n)$$



Pour $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, nous avons finalement démontré :

$$(k-1)\left(1+k+k^2+\cdots+k^n\right)=k^{n+1}-1.$$

Plus généralement, pour $q \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$(q-1)\left(1+q+q^2+\cdots+q^n\right)=q^{n+1}-1.$$