

BROUILLON - FAIRE DES ADDITIONS SUR UNE PARABOLE

CHRISTOPHE BAL

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution - Pas d’utilisation commerciale - Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.

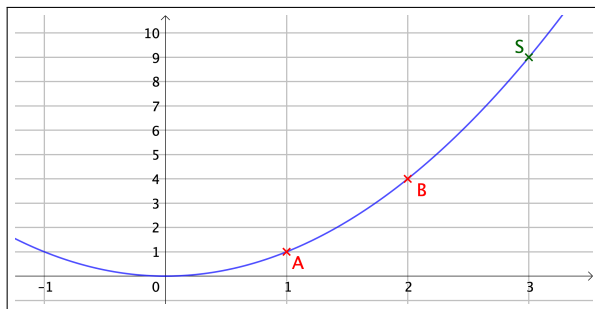


TABLE DES MATIÈRES

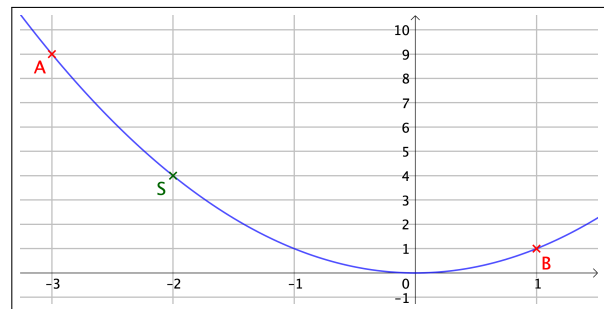
- | | |
|---|---|
| 1. Comment additionner des nombres grâce à la parabole d’équation $y = x^2$ | 1 |
| 2. Preuve de la validité de la conjecture | 2 |
| 3. Toute parabole d’équation $y = ax^2 + bx + c$ a une structure de groupe | 3 |

1. COMMENT ADDITIONNER DES NOMBRES GRÂCE À LA PARABOLE D’ÉQUATION $y = x^2$

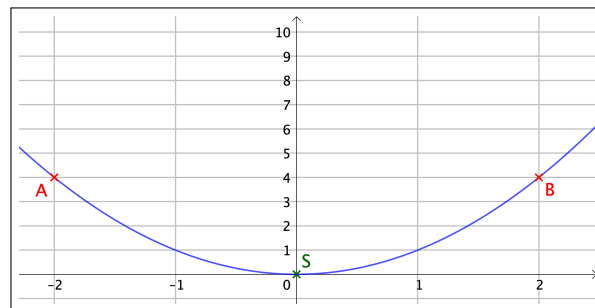
Dans un repère orthogonal, donnons nous la parabole $\mathcal{P} : y = x^2$. Plaçons-y les points A , B et S d’abscisses respectives a , b et $s = a + b$. Observez¹ les trois cas ci-dessous et essayez de conjecturer quelque chose (*la réponse est donnée dans la page suivante*)².



Cas où $a > 0$ et $b > 0$



Cas où $a < 0$ et $b > 0$



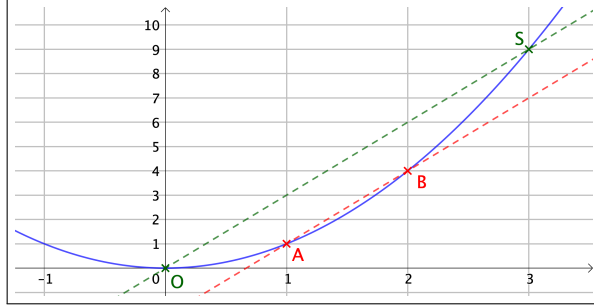
Cas où $a = -b$

Date: 17 Juillet 2019 - 22 Juillet 2019.

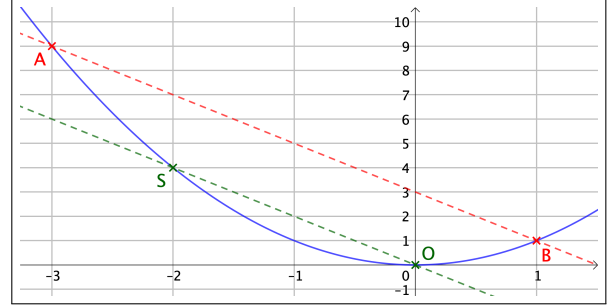
1. Le lieu de téléchargement de ce document contient un fichier GeoGebra `base-tool.ggb` manipulable dynamiquement pour vérifier combien il est aisé de conjecturer quelque chose.

2. On peut géométriquement additionner modulo 2π sur un cercle. Or $x^2 - y^2$ et $x^2 - y$ sont des formes quadratiques avec des propriétés géométriques communes. C’est là l’origine de la recherche proposée ici.

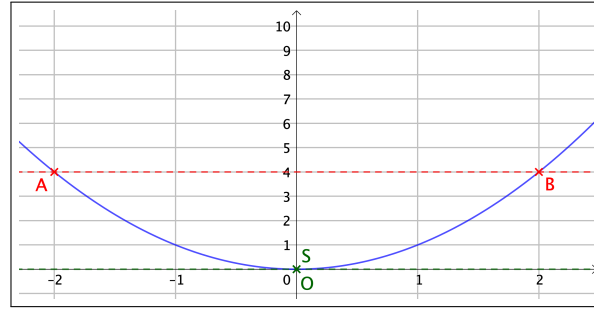
Pour mieux voir ce qu'il se passe, traçons quelques droites. Voici ce que cela donne.



Cas où $a > 0$ et $b > 0$



Cas où $a < 0$ et $b > 0$



Cas où $a = -b$

Il devient évident de conjecturer que le point S se construit géométriquement comme suit.

- (1) Si $x_A \neq \pm x_B$ alors on construit la parallèle à (AB) passant par O l'origine du repère. Le point S est le second point d'intersection de cette parallèle avec \mathcal{P} (notons qu'une droite coupe \mathcal{P} en au plus deux points).
- (2) Si $x_A = -x_B$ alors $S = O$. Notons au passage que l'on peut voir ceci comme un cas limite du précédent avec un point d'intersection « double ».
- (3) Si $x_A = x_B \neq 0$, on procède comme au point (1) mais avec la parallèle à la tangente en A à la parabole \mathcal{P} .

La section qui suit va valider cette conjecture qui donne un moyen très capillotracté de calculer une somme de deux réels via la parabole \mathcal{P} . Plus sérieusement, la construction ci-dessus est une propriété géométrique très jolie de la parabole \mathcal{P} .

2. PREUVE DE LA VALIDITÉ DE LA CONJECTURE

Rappelons que $\mathcal{P} : y = x^2$, $A(a; a^2)$, $B(b; b^2)$ et $S(s; s^2)$ où $s = a + b$.

Cas 1. Supposons que $x_A \neq \pm x_B$ de sorte que $x_S \neq 0$.

La droite (AB) a pour pente $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$. De plus, la droite (OS) qui passe par l'origine O du repère a pour pente $\frac{y_S}{x_S} = \frac{s^2}{s} = s = a + b$. Les droites (AB) et (OS) sont bien parallèles comme nous l'avons affirmé.

Cas 2. Supposons que $x_A = -x_B$.

Comme $x_S = a + b = 0$, nous avons bien $S = O$.

Cas 3. Supposons que $x_A = x_B \neq 0$.

Dans ce cas, $x_S = 2a \neq 0$ donc la droite (OS) a pour pente $\frac{y_S}{x_S} = 2a$ qui est bien la pente de la tangente en A à la parabole \mathcal{P} .

3. TOUTE PARABOLE D'ÉQUATION $y = ax^2 + bx + c$ A UNE STRUCTURE DE GROUPE

Le procédé de construction que nous venons de prouver dans les sections précédentes se « *conserve* » par translations, et aussi par dilatations verticales et horizontales. Il se trouve que ce sont ces transformations qui permettent d'obtenir une parabole $\mathcal{P}' : y = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$, à partir de celle de la parabole $\mathcal{P} : y = x^2$. Nous pouvons donc munir toute parabole $\mathcal{P}' : y = ax^2 + bx + c$ d'une structure de groupe isomorphe à celle de $(\mathbb{R}; +)$, et ceci avec un procédé géométrique simple pour « *additionner* » sur \mathcal{P}' . Que c'est joli !