

BROUILLON - IDENTITÉS REMARQUABLES VIA DES CALCULS « GÉOMÉTRIQUES », EST-CE RIGOUREUX ?

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution - Pas d’utilisation commerciale - Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



TABLE DES MATIÈRES

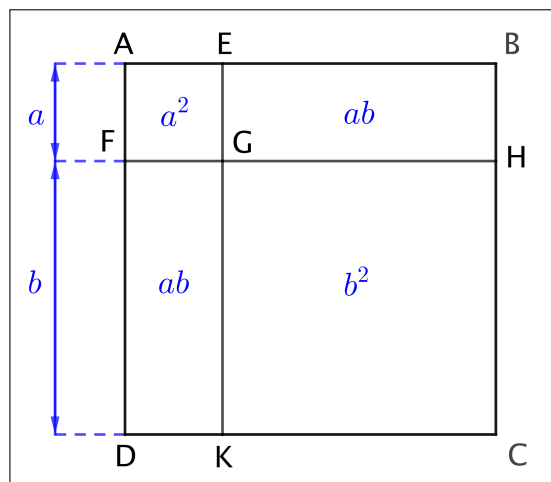
- | | |
|--|---|
| 1. Echauffement avec des égalités entre des polynômes | 1 |
| 2. Allons plus loin avec les formules trigonométriques | 4 |

1. ECHAUFFEMENT AVEC DES ÉGALITÉS ENTRE DES POLYNÔMES

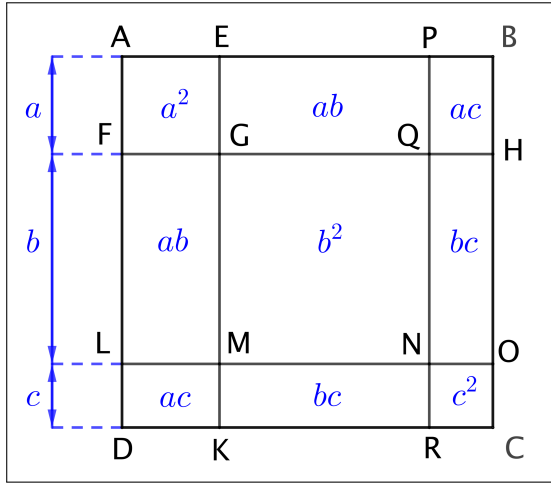
Via de simples calculs d’aires, il est très facile de découvrir les identités remarquables suivantes :

- $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Par exemple, considérons le dessin ci-contre où $ABCD$, $AEFG$ et $GHCK$ sont des carrés de côtés respectifs $(a + b)$, a et b . Il est évident que nous avons alors $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ mais n’oublions que $a > 0$ et $b > 0$ (*ce sont des contraintes géométriques concrètes*).



Comment passer à $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ pour a et b deux réels de signes quelconques ? Une première idée est tout simplement de faire une vérification via un calcul algébrique. En résumé, on conjecture géométriquement puis on valide algébriquement.



Bien que rigoureuse, la démarche précédente est peu satisfaisante car elle balaye d'un revers de main l'approche géométrique dont le rôle est réduit à la découverte d'une formule.

Si l'on considère le dessin ci-contre, il est tout de même dommage de devoir passer par du calcul algébrique, un peu pénible ici, pour avoir l'identité $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ avec a , b et c des réels de signes quelconques.

Ce qui serait bien ce serait de pouvoir dire que puisque $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ est vraie si $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$, alors l'identité est automatiquement vérifiée par a , b et c des réels de signes quelconques.

Ce passage automatique est bien licite car nous avons le fait 1 ci-après que l'on peut appliquer aux polynômes suivants.

- $P(a; b) = (a + b)^2 - a^2 - b^2 - 2ab$
- $P(a; b; c) = (a + b + c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$

Fait 1. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1; \dots; X_n]$ un polynôme réel à n variables où $n \in \mathbb{N}^*$.

Si P s'annule sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ alors P s'annule sur \mathbb{R}^n tout entier.

Démonstration. Faisons une preuve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour démontrer la validité de la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie comme suit : « Pour tout polynôme réel $P \in \mathbb{R}[X_1; \dots; X_n]$ à n variables, si P s'annule sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ alors P s'annule sur \mathbb{R}^n tout entier. ».

- *Cas de base.*

$\mathcal{P}(1)$ signifie qu'un polynôme réel à une variable s'annulant sur \mathbb{R}_+^* est identiquement nul sur \mathbb{R} tout entier.

Comme un polynôme réel non nul n'a qu'un nombre fini de racines, nous avons la validité de $\mathcal{P}(1)$.

- *Hérédité.*

Supposons $\mathcal{P}(n)$ valide pour un naturel n fixé, mais quelconque, puis considérons un polynôme P de $(n + 1)$ variables qui vérifie les conditions de la propriété $\mathcal{P}(n + 1)$.

Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$ et considérons le polynôme $P_x(X_1; \dots; X_n) = P(X_1; \dots; X_n; x)$. Comme P_x vérifie les conditions de la propriété $\mathcal{P}(n)$, nous avons par hypothèse de récurrence $P_x(x_1; \dots; x_n) = 0$ soit $P(x_1; \dots; x_n; x) = 0$ pour tous réels x_1, \dots, x_n .

Fixons maintenant des réels x_1, \dots, x_n de signes quelconques et considérons le polynôme $p(X) = P(x_1; \dots; x_n; X)$. Comme p vérifie $\mathcal{P}(1)$, nous avons $p(x) = 0$ soit $P(x_1; \dots; x_n; x) = 0$ pour tout réel x .

Finalement $P(x_1; \dots; x_n; x) = 0$ pour tous réels x_1, \dots, x_n, x . Nous avons bien déduit la validité de $\mathcal{P}(n + 1)$ à partir de celle de $\mathcal{P}(n)$.

- *Conclusion.*

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout naturel non nul n .

□

Exemple 1. En utilisant une approche géométrique semblable à celle présentée plus haut, il devient évident, mais aussi rigoureux maintenant, d'affirmer que pour tous réels a_1, \dots, a_n , où $n \in \mathbb{N}^*$, l'on a :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n (a_k)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$$

Exemple 2. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier à l'aide d'un cube, le solide géométrique, l'identité $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ valable pour tous réels a et b .

Considérons maintenant le dessin ci-contre avec $d = a - b$ et la contrainte $a > b$. Le fait 1, bien que très utile, ne peut plus s'appliquer ici au calcul géométrique évident suivant.

$$\mathcal{A}_{GHCK} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{ABHF} - \mathcal{A}_{AEKD} + \mathcal{A}_{AEGF}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

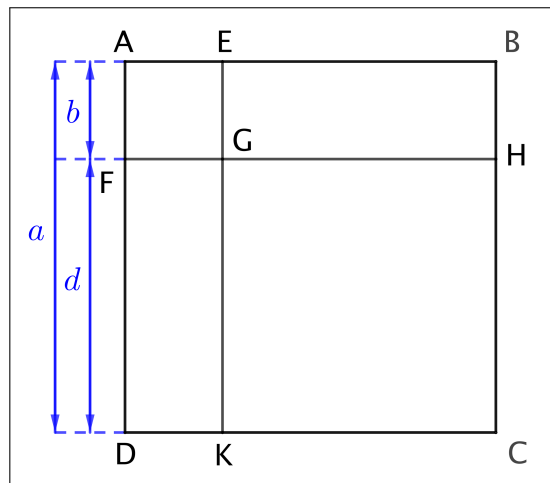
Comment faire alors pour en déduire que pour tous réels a et b , l'identité $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ reste valable ? Aucune crainte à avoir car nous disposons du fait 2 moins restrictif suivant.

Fait 2. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1; \dots; X_n]$ un polynôme réel à n variables où $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^n$ contient $\mathcal{E}_1 \times \dots \times \mathcal{E}_n$ où chaque $\mathcal{E}_k \subseteq \mathbb{R}$ est infini, et si P s'annule sur \mathcal{E} alors P s'annule sur \mathbb{R}^n tout entier.

Démonstration. Il est très facile de vérifier que la preuve du fait 1 s'adapte au cadre plus général proposé ici. □

Exemple 3. Considérons le dessin ci-dessous avec $d = a - b$ et la contrainte $a > b$ afin d'établir l'identité $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

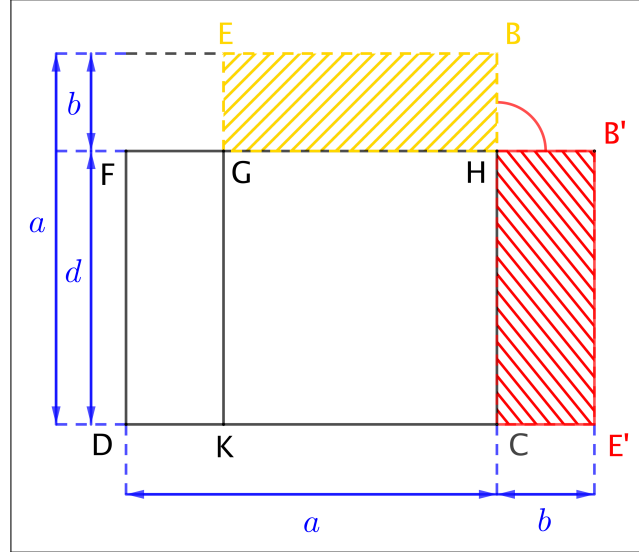


Commençons par des calculs géométriques simples.

$$\mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{AEGF} = \mathcal{A}_{GHCK} + \mathcal{A}_{EBHG} + \mathcal{A}_{FGKD}$$

$$a^2 - b^2 = \mathcal{A}_{GHCK} + \mathcal{A}_{EBHG} + \mathcal{A}_{FGKD}$$

En déplaçant ensuite le rectangle $EBHG$ comme ci-dessous, nous obtenons alors un rectangle de dimension $(a + b) \times (a - b)$.



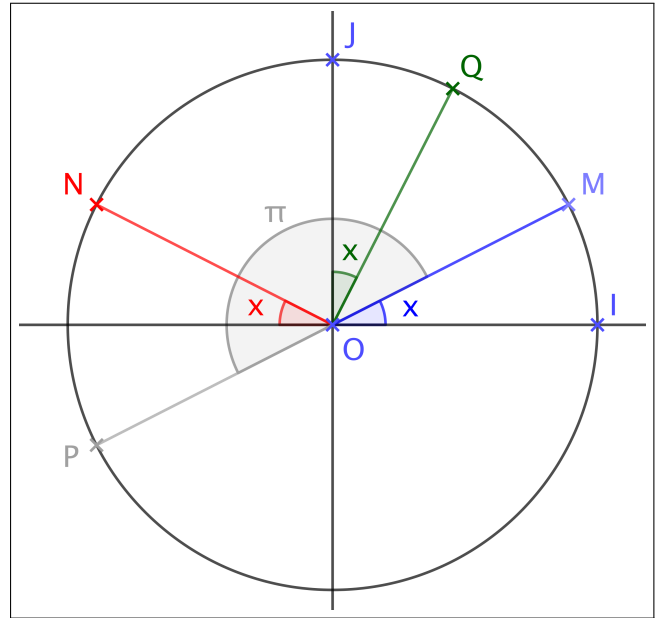
Finalement, nous obtenons $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ si $a > b$. Le fait 2 permet alors d'affirmer que $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

2. ALLONS PLUS LOIN AVEC LES FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

A l'aide du dessin ci-contre, où les mesures des angles sont en radians, il est facile, via les points M , N , P et Q , de fournir des arguments géométriques justifiant que sous la condition $x \in]0; \frac{\pi}{4}[$, on a :

- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
 $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
 $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

De nouveau, il serait bien de pouvoir passer à la validité des formules précédentes sur \mathbb{R} tout entier sans plus d'effort (*considérer les autres cas n'est pas compliqué mais c'est un peu pénible*).



Nous allons voir que cela est licite grâce au fait 3 suivant qui est un peu technique car il nécessite la notion de fonction holomorphe que nous allons définir de suite.

Définition. Soit une fonction complexe f définie sur un ouvert Ω de \mathbb{C} .

f est dite holomorphe en $\omega \in \Omega$ si la limite $\lim_{\substack{|z-\omega| \rightarrow 0 \\ z \in \Omega - \{\omega\}}} \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega}$ existe dans \mathbb{C} .

Tout comme avec les fonctions réelles dérivables sur \mathbb{R} , la propriété d'holomorphie se conserve par addition, multiplication, inverse et composition.

Fait 3. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de \mathbb{C} .

Si $\lambda \in \Omega$ vérifie $f(\lambda) = 0$ alors il existe un ouvert V tel que $\lambda \in V \subseteq \Omega$ et $\forall z \in V - \{\lambda\}$, $f(z) \neq 0$ (c'est le principe des zéros isolés d'une fonction holomorphe).

Démonstration. Ceci nous amènerait trop loin donc nous admettrons ce résultat. \square

Pour conclure, il suffit de savoir que les fonctions circulaires réelles ne sont en fait que les restrictions à \mathbb{R} de fonctions holomorphes sur \mathbb{C} tout entier, et de noter que le raisonnement géométrique au début de cette section fait clairement apparaître des zéros non isolés pour les fonctions holomorphes sur \mathbb{C} ci-dessous¹.

- $A(z) = \cos(\pi - z) + \cos z$ et $B(z) = \sin(\pi - z) - \sin z$
- $C(z) = \cos(z + \pi) + \cos z$ et $D(z) = \sin(z + \pi) + \sin z$
- $E(z) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \sin z$ et $F(z) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \cos z$

1. Nous admettrons ces affirmations qui ne sont pas violentes à démontrer une fois que l'on a les bases de la théorie des fonctions holomorphes.