BROUILLON - FAIRE DES ADDITIONS SUR UNE PARABOLE

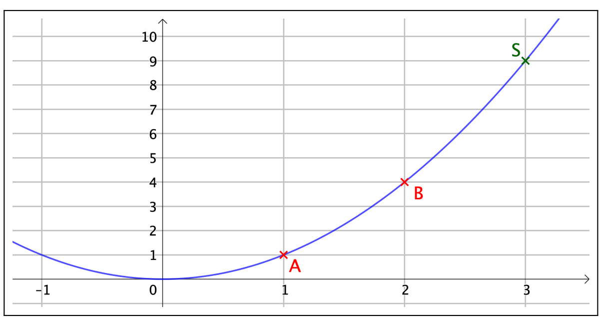
CHRISTOPHE BAL

Mentions « légales »

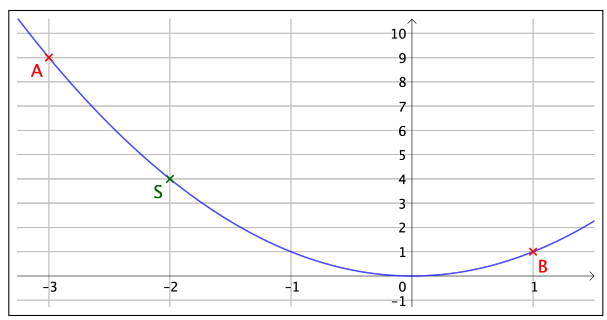
Table des matières

1. Comment additionner des nombres grâce à la parabole d'équation $y = x^2$

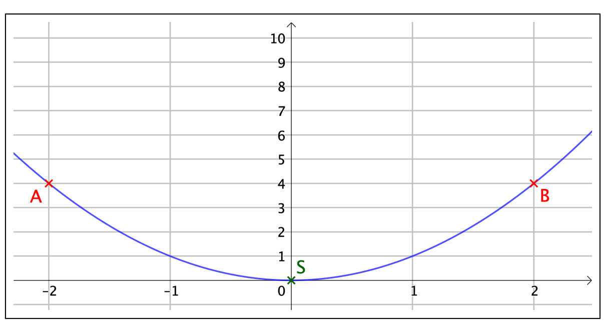
Dans un repère orthogonal, donnons nous la parabole $\mathscr{P} : y = x^2$. Plaçons-y les points A , B et S d'abscisses respectives a , b et $s = a + b$. Observez[1] les trois cas ci-dessous et essayez de conjecturer quelque chose *(la réponse est donnée dans la page suivante)*[2].



Cas où $a > 0$ et $b > 0$



Cas où $a < 0$ et $b > 0$



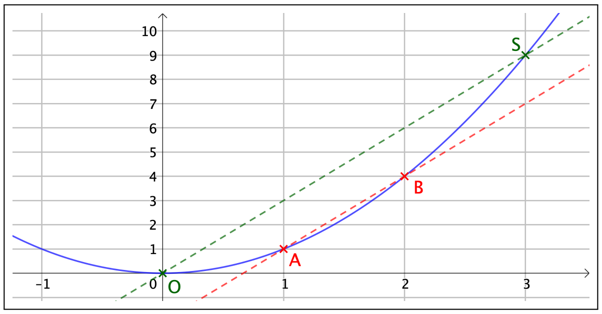
Cas où $a = -b$

Date: 17 Juillet 2019 - 27 Juillet 2019.

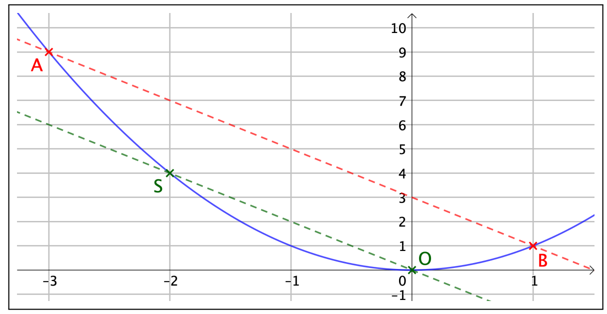
1. Le lieu de téléchargement de ce document contient un fichier GeoGebra `base-tool.ggb` manipulable dynamiquement pour vérifier combien il est aisé de conjecturer quelque chose.

2. On peut géométriquement additionner modulo 2π sur un cercle. Or $x^2 - y^2$ et $x^2 - y$ sont des formes quadratiques avec des propriétés géométriques communes. C'est là l'origine de la recherche proposée ici.

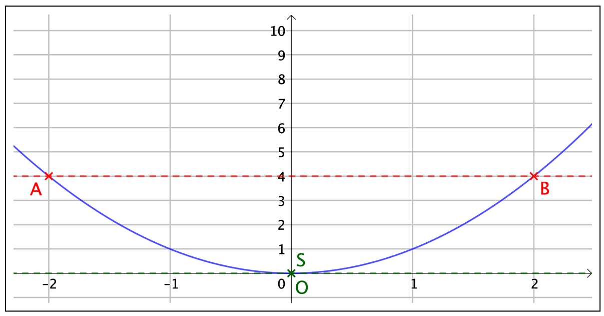
Pour mieux voir ce qu'il se passe, traçons quelques droites. Voici ce que cela donne.



Cas où $a > 0$ *et* $b > 0$



Cas où $a < 0$ *et* $b > 0$



Cas où $a = -b$

Il devient évident de conjecturer que le point S se construit géométriquement comme suit.

(1) Si $x_A \neq \pm x_B$ alors on construit la parallèle à (AB) passant par O l'origine du repère. Le point S est le second point d'intersection de cette parallèle avec $\mathscr{P}$ *(notons qu'une droite coupe* $\mathscr{P}$ *en au plus deux points).*

(2) Si $x_A = -x_B$ alors $S = O$. Notons au passage que l'on peut voir ceci comme un cas limite du précédent avec un point d'intersection « double ».

(3) Si $x_A = x_B \neq 0$, on procède comme au point (1) mais avec la parallèle à la tangente en A à la parabole $\mathscr{P}$.

La section qui suit va valider cette conjecture qui donne un moyen très capillotracté de calculer une somme de deux réels via la parabole $\mathscr{P}$. Plus sérieusement, la construction ci-dessus est une propriété géométrique très jolie de la parabole $\mathscr{P}$.

2. Preuve de la validité de la conjecture

Rappelons que $\mathscr{P} : y = x^2$, $A(a\,;a^2)$, $B(b\,;b^2)$ et $S(s\,;s^2)$ où $s = a + b$.

Cas 1. *Supposons que* $x_A \neq \pm x_B$ *de sorte que* $x_S \neq 0$.

La droite (AB) a pour pente $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$. De plus, la droite (OS) qui passe par l'origine O du repère a pour pente $\frac{y_S}{x_S} = \frac{s^2}{s} = s = a + b$. Les droites (AB) et (OS) sont bien parallèles comme nous l'avons affirmé.

Cas 2. *Supposons que* $x_A = -x_B$.

Comme $x_S = a + b = 0$, nous avons bien $S = O$.

Cas 3. *Supposons que* $x_A = x_B \neq 0$.

Dans ce cas, $x_S = 2a \neq 0$ donc la droite (OS) existe et a pour pente $\frac{y_S}{x_S} = 2a$ qui est bien la pente de la tangente en A à la parabole $\mathscr{P}$.

3. Toute parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ a une structure de groupe

Le procédé de construction que nous venons de prouver dans les sections précédentes se *« conserve »* par translations, et aussi par dilatations verticales et horizontales. Il se trouve que ce sont ces transformations qui permettent d'obtenir une parabole $\mathscr{P}' : y = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$, à partir de celle de la parabole $\mathscr{P} : y = x^2$. Nous pouvons donc munir toute parabole $\mathscr{P}' : y = ax^2 + bx + c$ d'une structure de groupe isomorphe à celle de $(\mathbb{R}\,;+)$, et ceci avec un procédé géométrique simple pour *« additionner »* sur $\mathscr{P}'$. Que c'est joli !

4. Une caractérisation analytique des fonctions trinomes nulles en zéro

Finissons ce document avec un résultat plus technique en nous demandant quelles peuvent être les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient les propriétés suivantes utilisées dans la démonstration de la section 2.

(1) $\forall(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$, si $a \neq b$ alors $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{f(a+b)}{a+b}$.

(2) $f(0) = 0$.

(3) $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $f'(a) = \frac{f(2a)}{2a}$. Notons que cette propriété est en fait une conséquence de la première via un passage à la limite de b vers a .

La fonction f doit être une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2x\,y'(x) = y(2x)$ qui n'est pas très sympathique car d'un côté il a x comme variable et de l'autre il y a $2x$! Pour avancer, nous allons nous limiter au cas où f est la restriction d'une fonction $\widetilde{f}$ définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$, c'est à dire telle que $\forall\omega \in \mathbb{C}$, la limite $\lim\limits_{\substack{|z-\omega|\to 0\\ z\neq\omega}} \dfrac{\widetilde{f}(z) - \widetilde{f}(\omega)}{z-\omega}$ existe dans $\mathbb{C}$ *(par exemple, les fonctions polynomiales vérifient cette hypothèse).*

On sait alors qu'il existe $R > 0$ tel que $|z| < R$ implique $\widetilde{f}(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$, ce développement étant unique car $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. De plus, on a le résultat fort suivant : les éventuels zéros λ de $\widetilde{f}$ sont isolés, c'est à dire qu'il existe un voisinage de λ sur lequel $\widetilde{f}$ ne s'annule qu'en λ . Nous admettrons ces deux faits de l'analyse complexe car les prouver nous amènerait trop loin.

Nous admettrons aussi que $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x\,f'(x) = f(2x)$ implique $\forall z \in \mathbb{C}$, $2z\,\widetilde{f}'(z) = \widetilde{f}(2z)$ *(ceci vient principalement de la propriété des zéros isolés et du fait que toute fonction holomorphe l'est à tout ordre).*

Dès que $|z| < 0,5R$, nous avons alors :

$$\begin{aligned}
2z\,\widetilde{f}'(z) = \widetilde{f}(2z) &\iff 2z \sum_{k=0}^{+\infty} k c_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (2z)^k \\
&\iff \sum_{k=0}^{+\infty} 2k c_k z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (2z)^k \\
&\iff \forall k \in \mathbb{N}\,,\ 2kc_k = 2^k c_k \\
&\iff c_1 \text{ et } c_2 \text{ quelconques et } \forall k \in \mathbb{N}^* - \{1\,;2\}\ ,\ c_k = 0 \\
&\iff \widetilde{f}(z) = c_1 z + c_2 z^2
\end{aligned}$$

Le principe des zéros isolés et le fait que $\widetilde{f}(z)$ et $c_1 z + c_2 z^2$ soient holomorphes sur $\mathbb{C}$ nous donnent que $\widetilde{f}(z) = c_1 z + c_2 z^2$ sur $\mathbb{C}$ tout entier, et donc $f(x) = c_1 x + c_2 x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Compte tenu de la section précédente, la condition nécessaire ci-dessus est aussi suffisante. Nous avons donc obtenu une caractérisation des fonctions trinômes nulles en zéro parmi les fonctions qui sont la restriction d'une fonction définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$.