BROUILLON - SUITES HOMOGRAPHIQUES SANS MYSTICISME

CHRISTOPHE BAL

Table des matières

1. Fractions homographiques et matrices

Soit $F(X) = \dfrac{aX+b}{cX+d}$ et $G(X) = \dfrac{pX+q}{rX+s}$ non constantes c'est à dire telles que $ad - bc \neq 0$ et $ps - rq \neq 0$.

Il est immédiat qu'il existe des paramètres α, β, γ et δ tels que $F \circ G(X) = \dfrac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta}$. Existe-t-il un moyen simple de calculer les paramètres de $F \circ G$ en fonction de ceux de F et G ?

$$\begin{aligned} F \circ G(X) &= \frac{a(pX+q) + b(rX+s)}{c(pX+q) + d(rX+s)} \\ &= \frac{(ap+br)X + aq + bD}{(cp+dr)X + cq + ds} \end{aligned}$$

En associant $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à $F(X)$, $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ à $G(X)$ et $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ à $F \circ G(X)$, nous venons de démontrer que $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$.

Comme $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{aX+b}{cX+d} = \dfrac{\lambda aX + \lambda b}{\lambda cX + \lambda d}$, on va considérer l'écriture de F telle que $ad - bc = 1$ et lui associer la matrice $M_F \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Par choix $\det M_F = 1$, de sorte que l'on a un isomorphisme de groupes entre les fonctions homographiques $F(X) = \dfrac{aX+b}{cX+d}$ avec $ad - bc = 1$ et le groupe $SL(2, \mathbb{C})$ des matrices 2×2 de déterminant 1 .

2. AFFAIRE À SUIVRE...

Date: ? ? Novembre 2020.