

# BROUILLON - UN MODÈLE MATHÉMATIQUE, C'EST QUOI.

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



---

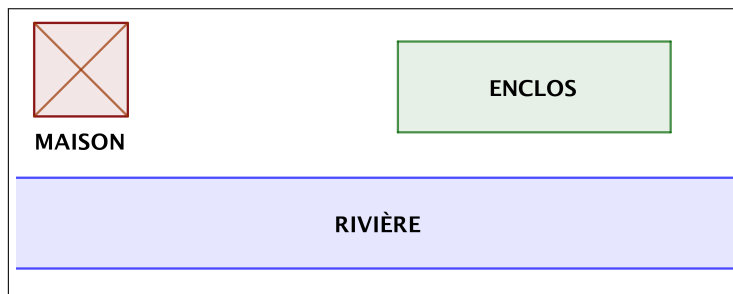
## TABLE DES MATIÈRES

1. Modéliser ce n'est pas mathématiser !	2
2. Le principe de « multi-proportionnalité »	4
3. Coût marginal – Polynômes de degré 2 ou 3	7
4. Désintégration radioactive – Probabilités et lois continues, ou pas...	10
5. Dynamique des populations avec Malthus – Suites géométriques et la fonction exponentielle	12
6. Dynamique des populations avec Verhulst – Une équation différentielle non linéaire	14
7. Daniel BERNOULLI et la variole – Un système d'équations différentielles	16
8. AFFAIRE À SUIVRE...	19

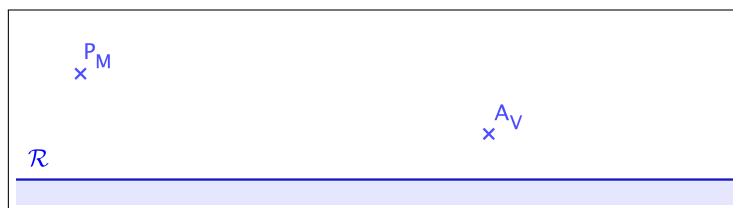
Dans ce modeste document, nous allons présenter quelques modèles mathématiques classiques en cherchant surtout à nous interroger sur leurs fondements mathématiques. Ceci nous amènera à nous questionner sur la signification du mot « *modéliser* », un mot dont nous reportons la définition à la toute dernière section de ce document.

## 1. MODÉLISER CE N'EST PAS MATHÉMATISER !

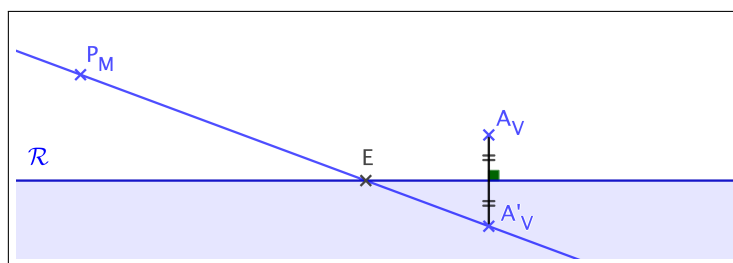
1.1. **Attention à la rivière et au seau d'eau.** Voici un problème classique des manuels scolaires de mathématiques pour collégiens ou lycéens français qui malgré sa grande simplicité va nous donner l'occasion de parler d'un petit biais classique en modélisation. Imaginons la situation suivante où M. CITER<sup>1</sup> doit amener, à l'aide d'un seau, de l'eau de la rivière à l'abreuvoir d'un enclos pour ses vaches.



Commençons par simplifier un tout petit peu les données en ne gardant que la rive à laquelle M. CITER peut accéder, cette dernière étant symbolisée par la droite  $\mathcal{R}$ , ainsi qu'en réduisant la porte de la maison et l'abreuvoir des vaches aux points  $P_M$  et  $A_V$  respectivement.



Une première solution consiste à chercher le chemin le plus court pour accéder à  $A_V$  depuis  $P_M$  en passant par la rive  $\mathcal{R}$ . Ce problème a une solution géométrique très simple que voici<sup>2</sup>, le point  $E$  étant l'endroit où récupérer l'eau.



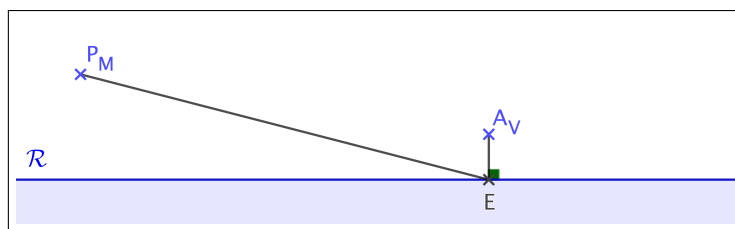
L'idée géniale consiste à tracer  $A'_V$  le symétrique orthogonal de  $A_V$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Comme les longueurs sont conservées par symétrie orthogonale, quelque soit la forme du chemin le plus court entre  $P_M$  et  $A_V$  qui coupe au moins une fois  $\mathcal{R}$ , en restant toujours du même côté de la rive, on peut lui associer un chemin le plus court allant de  $P_M$  à  $A'_V$ , cette association étant réciproque. Il ne reste plus à se souvenir que le chemin le plus court entre deux points du plan, sans contrainte, est une droite.

Bien que très jolie, la solution ci-dessus ne tient pas compte de l'effort à fournir pour amener le seau d'eau depuis la rivière jusqu'à l'abreuvoir. De plus, que faire si l'on doit utiliser plusieurs

1. « citer » est l'anagramme de « recti » pour « rectiligne » comme les représentations sur le schéma.

2. Il existe une réponse analytique via l'étude des extrema de « la fonction »  $EP_V + EA_V$ , un choix de fonction qui sous-entend que l'on ne passe qu'une fois à la rive, un point qu'il resterait à justifier proprement. De plus, techniquement il faut utiliser un théorème délicat d'existence de minimum car le signe de la dérivée n'est pas évident à déterminer.

fois le seau ? Avec cette contrainte de portage en tête, la solution est immédiate. La voici représentée.



1.2. **Qu'est-ce qui ne va pas ?** La modélisation précédente est en fait très critiquable et dangereuse pour les raisons suivantes.

- (1) Comme nous l'avons déjà souligné, la solution géométrique n'est pas la plus pratique. Il vaut mieux marcher un peu plus avec un seau vide qu'avec un seau plein. Or la solution géométrique est d'une grande élégance et c'est là tout le danger que de se laisser aveugler par de beaux raisonnements. Ne pas confondre beauté mathématique et solution concrètement utile.
- (2) Autre chose. Qui nous dit que l'on peut accéder à la rivière par l'un des chemins « *mathématiques* » trouvés ? Nous avons concrètement des contraintes géométriques fortes dues à la topologie du terrain que nous n'avons pas prises en compte.

En résumé, une belle solution mathématique ne fait pas forcément un beau modèle. Nous avons constaté ici certains soucis très facilement. Mais qu'en sera-t-il pour des modèles plus complexes d'un point de vue mathématique ? Pour ne pas se laisser aveugler, il faudra toujours confronter son modèle à la réalité et accepter de devoir garder un modèle « *moche* » mathématiquement mais efficace concrètement.

•  
• •

**Quand on modélise, le contexte est essentiel !**

## 2. LE PRINCIPE DE « MULTI-PROPORTIONNALITÉ »

**2.1. Quelques modèles célèbres.** Les sciences du réel sont avant tout des sciences de la mesure. Il peut arriver que des phénomènes fassent apparaître, via de simples mesures, de la proportionnalité sur plusieurs variables étudiées indépendamment les unes des autres : l'auteur de ces lignes parlent de « *multi-proportionnalité* ». Voici des exemples classiques de ce type fournis par les Sciences Physiques<sup>3</sup>.

- En Électricité, en régime continu, la tension et l'intensité du courant aux bornes d'une résistance vérifient  $U = RI$ . Cette loi est due à Georg<sup>4</sup> Simon Ohm (1789 – 1854). On imagine bien un ensemble de mesures de  $U$  en fonction de  $I$  faisant apparaître une relation de quasi proportionnalité du fait de certaines imprécisions de mesure. Une fois cette observation faite, il devient « *naturel* » de poser la loi  $U = RI$ .
- Amedeo Avogadro (1776 – 1846) a énoncé la loi des gaz parfaits :  $PV = nRT$ . Dans cette relation,  $V$  est un volume de gaz en  $m^3$ ,  $P$  une pression en pascal,  $T$  une température en  $K$ ,  $n$  la quantité de matière en  $mol$ , et  $R \approx 8,314$  la constante des gaz parfait en  $J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$ . On imagine bien ici aussi une étude, à quantité de matière fixée, d'une relation entre  $P$ ,  $V$  et  $T$  en s'intéressant à deux variables, la troisième restant constante. On observerait alors les phénomènes suivants, sous des conditions physiques acceptables correspondant en fait au domaine de validité de la loi.
  - (a)  $P$  étant fixé, on observe que la température est proportionnelle à  $V$  d'où l'on pose  $T = a(P)V$  avec  $a(P)$  une constante dépendant a priori de  $P$ .
  - (b)  $V$  étant fixé, on observe que la température est proportionnelle à  $P$  d'où  $T = b(V)P$  avec  $b(V)$  une constante dépendant a priori de  $V$ .

À ce stade, le physicien aguerri propose une formule du type  $T = kPV$  avec  $k$  une constante ne dépendant pas de  $T$ ,  $P$  et  $V$ . Intuitivement c'est facile à comprendre mais est-ce mathématiquement correct ? Nous verrons dans la section suivante que oui !

Le passage de  $T = kPV$  à la loi des gaz parfaits s'obtiendrait de façon analogue via la prise en compte en plus du paramètre  $n$ . Le choix et la signification de la constante  $R$  sont motivés par le physicien qui veut rendre sa formule la plus expressive possible.

- Nous devons à Isaac Newton (1642 – 1727) la loi de l'attraction universelle qui dit que l'intensité en  $N$  de la force exercée entre deux corps  $A$  et  $B$  est  $F_{A \leftrightarrow B} = G \frac{m_A m_B}{d^2}$  avec  $m_A$  et  $m_B$  les masses en  $kg$  de chacun des deux corps,  $d$  la distance en  $m$  les séparant et  $G \approx 6,674$  la constante gravitationnelle en  $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$ . Tout comme pour la loi des gaz parfaits, on pourrait imaginer étudier l'intensité relativement à  $m_A$ ,  $m_B$  et l'inverse de  $d^2$  respectivement, les deux autres paramètres étant fixés à chaque fois.

Pourquoi l'inverse de  $d^2$  ? On peut imaginer une intuition relativement à l'inverse de  $d$ , puis lors de mesures on s'aperçoit qu'il y a en fait une relation qui semble quadratique relativement à  $\frac{1}{d}$ . Dès lors, il suffit de tenter sa chance avec l'inverse de  $d^2$ .

Dans chacun des cas proposés, nous avons rencontré une fonction  $f$  à  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$  qui est proportionnelle relativement à chaque variable  $x_i$  dès que l'on fixe les autres, puis nous

3. L'auteur n'affirme pas que ce qui suit est effectivement ce qui a guidé l'établissement des lois présentées mais cette approche de modélisation reste concrètement très acceptable. Afin de préciser le propos, une étude historique serait nécessaire mais le temps manque au papa qui écrit ces lignes... Toute contribution est bienvenue !

4. L'absence d'un « e » final n'est pas une faute de frappe.

sommes arrivés à une relation du type  $f(x_1; \dots; x_n) = kx_1 \cdots x_n$  avec  $k$  une constante. Bien que cela semble intuitivement clair, il serait bien de prouver la validité de cette affirmation. Ceci va être fait dans la section suivante.

**Remarque 2.1.** *Bien entendu une fois ces lois établies, il va falloir les valider par des mesures et étudier leur domaine d'applicabilité. Ceci se fait de façon directe et indirecte : par exemple, la loi d'attraction de Newton permet de valider les observations empiriques de Johannes Kepler (1571 – 1630) sur les orbites coniques des astres<sup>5</sup>. N'est-ce pas joli ? C'est là tout le beau travail du scientifique du réel.*

**2.2. Les modèles sont-ils bons ?** Expliquons pourquoi ce qui précède est mathématiquement acceptable. Nous examinerons d'abord le cas de trois variables afin de nous permettre d'envisager sereinement le cas général via une récurrence sur le nombre de variables.

**Cas avec trois variables.** Considérons une fonction réelle  $f(x; y; z)$  définie sur  $(\mathbb{R}_+)^3$  qui vérifie les conditions suivantes.

- (1)  $\forall (y; z) \in (\mathbb{R}_+)^2$ , la fonction  $x \rightarrow f(x; y; z)$  est proportionnelle à  $x$ .
- (2)  $\forall (x; z) \in (\mathbb{R}_+)^2$ , la fonction  $y \rightarrow f(x; y; z)$  est proportionnelle à  $y$ .
- (3)  $\forall (x; y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ , la fonction  $z \rightarrow f(x; y; z)$  est proportionnelle à  $z$ .

Autrement dit, nous avons :

- (1)  $\forall (y; z) \in (\mathbb{R}_+)^2$ , il existe  $a(y; z)$  telle que  $f(x; y; z) = a(y; z)x$ .
- (2)  $\forall (x; z) \in (\mathbb{R}_+)^2$ , il existe  $b(x; z)$  telle que  $f(x; y; z) = b(x; z)y$ .
- (3)  $\forall (x; y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ , il existe  $c(x; y)$  telle que  $f(x; y; z) = c(x; y)z$ .

Nous avons alors :

$a(y; z)x = b(x; z)y$  sur  $(\mathbb{R}_+)^3$  puis  $\frac{a(y; z)}{y} = \frac{b(x; z)}{x}$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^3$ . Comme à droite et à gauche du signe égal, les expressions ne dépendent pas de  $x$  et  $y$  respectivement, mais peuvent dépendre de  $z$ , nous avons l'existence de  $d(z)$  telle que  $\frac{a(y; z)}{y} = \frac{b(x; z)}{x} = d(z)$  d'où  $f(x; y; z) = d(z)xy$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^3$ .

Ensuite nous obtenons :

$d(z)xy = c(x; y)z$  puis  $\frac{d(z)}{z} = \frac{c(x; y)}{xy}$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^3$ . Ceci prouve l'existence d'une constante  $k$  telle que  $\frac{d(z)}{z} = \frac{c(x; y)}{xy} = k$  d'où  $f(x; y; z) = kxyz$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^3$ .

La formule  $f(x; y; z) = kxyz$  reste vraie sur  $(\mathbb{R}_+)^3$  puisque  $f(x; y; z)$  et  $kxyz$  s'annulent dès que l'une au moins des variables est nulle.

**Cas général.** Faisons une preuve par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$  pour démontrer la validité de la propriété  $\mathcal{P}(n)$  définie comme suit : « Pour toute fonction  $f$  à  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  telle que chacune des fonctions  $f_i : t \rightarrow f(x_1; \dots; x_{i-1}; t; x_{i+1}; \dots; x_n)$ <sup>6</sup>, pour  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , soit linéaire en  $t$ , il existe une constante  $k$  telle que  $f(x_1; \dots; x_n) = kx_1 \cdots x_n$  sur  $(\mathbb{R}_+)^n$  ».

- Cas de base.

$\mathcal{P}(1)$  est clairement vraie.

5. L'auteur conseille vivement au lecteur que les questions de géométrie passionnent la lecture de l'ouvrage « Newton implique Kepler : méthodes géométriques élémentaires pour l'enseignement supérieur en mathématiques » de Benoît Rittaud aux éditions ellipses.

6. Désolé pour les abus évidents de notations pour  $i = 1$  et  $i = n$ .

- *Hérédité.*

Supposons  $\mathcal{P}(n)$  valide pour un naturel  $n$  fixé, mais quelconque, puis considérons une fonction  $f$  de  $(n+1)$  variables qui vérifie les conditions de la propriété  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Fixons  $x \in \mathbb{R}_+$  et considérons la fonction  $f_x : (x_1; \dots; x_n) \rightarrow f(x_1; \dots; x_n; x)$ . Comme  $f_x$  vérifie les conditions de la propriété  $\mathcal{P}(n)$ , nous avons par hypothèse de récurrence  $f_x(x_1; \dots; x_n) = a(x)x_1 \cdots x_n$ , soit  $f(x_1; \dots; x_n; x) = a(x)x_1 \cdots x_n$  où  $a(x)$  est une constante dépendant du réel  $x$ .

D'autre part, par hypothèse  $f(x_1; \dots; x_n; x) = b(x_1; \dots; x_n)x$  où  $b(x_1; \dots; x_n)$  est une constante dépendant des réels  $x_1, \dots, x_n$ .

Donc sur  $(\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$ , nous avons  $a(x_{n+1})x_1 \cdots x_n = b(x_1; \dots; x_n)x_{n+1}$ , puis ensuite  $\frac{a(x_{n+1})}{x_{n+1}} = \frac{b(x_1; \dots; x_n)}{x_1 \cdots x_n} = k$  avec  $k$  une constante d'où  $f(x_1; \dots; x_n; x_{n+1}) = kx_1 \cdots x_n x_{n+1}$  qui est valable sur  $(\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$ . Cette formule s'étend à  $(\mathbb{R}_+)^{n+1}$  puisque  $kx_1 \cdots x_n x_{n+1}$  et  $f(x_1; \dots; x_n; x_{n+1})$  s'annulent dès que l'une au moins des variables est nulle.

Nous avons bien déduit la validité de  $\mathcal{P}(n+1)$  à partir de celle de  $\mathcal{P}(n)$ .

- *Conclusion.*

Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ , la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout naturel non nul  $n$ .

## 3. COÛT MARGINAL – POLYNÔMES DE DEGRÉ 2 OU 3

**3.1. Une modélisation.** À des fins prospectives, on souhaite modéliser le capital d'une entreprise qui fabrique et vend un produit. On utilise les notations suivantes.

- $C(x)$  est le coût de production en euros pour  $x$  unités produites.
- $C_m(x) = C(x) - C(x-1)$  est le coût marginal de production pour  $x \in \mathbb{N}^*$  (*c'est le coût spécifique à la  $x^e$  unité produite*).
- $CM(x) = \frac{C(x)}{x}$  est le coût moyen de production pour  $x \in \mathbb{N}^*$ .

**Cas 1.** Supposons que des études statistiques aient montré que lorsque le nombre d'unités vendues augmente le coût marginal évolue de façon quasi linéaire.

Dans ce cas, on peut faire l'approximation  $C_m(x) = ax + b$  avec  $(a; b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  (*cette fonction affine peut être celle obtenue via une régression linéaire par la méthode des moindres carrés*). Nous avons alors :

$$\begin{aligned} C(x) &= C(0) + \sum_{k=1}^x C_m(k) \\ &= C(0) + \sum_{k=1}^x (ak + b) \\ &= mx^2 + px + q \end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, nous avons utilisé le fait que  $\forall (e, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=1}^x k^e$  est un polynôme en  $x$  de degré  $(e+1)$ . En utilisant les formules exactes de ces polynômes, il est facile de vérifier que nos coefficients  $m$ ,  $p$  et  $q$  sont tous positifs et même que  $m > 0$ .

Avec ce modèle, nous avons  $CM(x) = mx + p + \frac{q}{x}$  pour  $x \in \mathbb{N}^*$ . Nous pouvons donner l'interprétation concrète suivante des termes  $mx$ ,  $p$  et  $\frac{q}{x}$ .

- (1)  $p$  correspond à un coût fixe de fabrication : quelque soit le nombre d'unités vendues, l'entreprise doit déboursier en moyenne  $q$  euros par unité fabriquée (*penser à l'usage de bâtiments, aux salaires des employés en CDI...*).
- (2)  $mx$  augmente strictement avec  $x$  car  $m > 0$ . Ce terme correspond à un coût d'usage (*penser par exemple à l'entretien d'une chaîne de production, à l'énergie dépensée en plus pour produire plus...*).
- (3)  $\frac{q}{x}$  indique un coût amorti en ce sens où plus  $x$  augmente moins  $\frac{q}{x}$  influence  $CM(x)$  (*penser par exemple à des investissement faits pour une nouvelle chaîne de production*).

**Cas 2.** Supposons que des études statistiques aient montré que lorsque le nombre d'unités vendues augmente le coût marginal diminue strictement puis qu'ensuite il atteint un minimum pour enfin ne cesser d'augmenter strictement. Notons que le minimum est forcément positif, et la valeur où il est atteint strictement positive. Nous supposons de plus que les données sont telles que la courbe de  $C_m$  soit quasi parabolique.

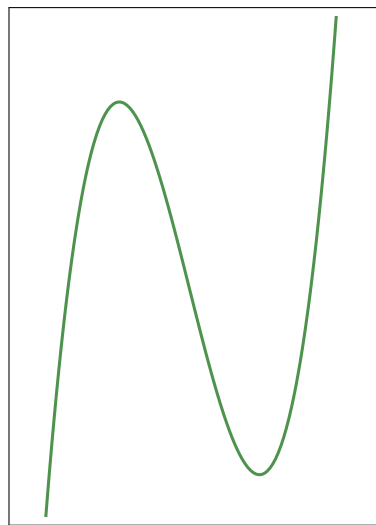
Dans ce cas, on peut faire l'approximation  $C_m(x) = ax^2 + bx + c$  avec les contraintes  $a > 0$ ,  $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} b^2 - 4ac \leq 0$  ainsi que  $\frac{-b}{2a} > 0$  (*ce polynôme du 2<sup>e</sup> degré peut être celui obtenu via une régression polynomiale par la méthode des moindres carrés*). Pourquoi ces conditions ?

- (1)  $a > 0$  permet de vérifier les contraintes de variation.
- (2)  $\Delta \leq 0$  et  $\frac{-b}{2a} > 0$  servent à valider la contrainte du minimum.

De nouveau, nous avons :

$$\begin{aligned}
 C(x) &= C(0) + \sum_{k=1}^x C_m(k) \\
 &= C(0) + \sum_{k=1}^x (ak^2 + bk + c) \\
 &= mx^3 + px^2 + qx + r
 \end{aligned}$$

Si une étude statistique rapide sur le coût de fabrication  $C$  fournit une courbe similaire à celle ci-contre, on pourra espérer modéliser correctement  $C$  avec un polynôme de degré 3 comme ci-dessus. Dans ce cas, il faudra bien choisir certaines données concrètes afin de trouver de « bonnes » valeurs des coefficients  $m$ ,  $p$ ,  $q$  et  $r$ . C'est à l'usage que l'on pourra voir la pertinence ou non de ces choix.



Avec ce modèle, nous avons  $CM(x) = mx^2 + px + q + \frac{r}{x}$  pour  $x \in \mathbb{N}^*$ . Bien que les significations concrètes de  $px$ ,  $q$  et  $\frac{r}{x}$  peuvent être similaires à celles données dans le cas 1, il devient difficile de donner un sens concret au terme  $mx^2$ .

**Remarque 3.1.** Si le coût marginal  $C_m$  admet une « courbe en U », on pourra faire l'approximation  $C_m(x) = c(x - \alpha)^{2p} + \beta$  avec  $(c; \alpha; \beta) \in (\mathbb{R}_+)^3$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ . Dans ce cas,  $C(x)$  sera un polynôme de degré  $(2p + 1)$ . Est-ce plus efficace au final que de considérer une « courbe en U » comme quasi parabolique ? Ne pas oublier qu'un modèle doit être aisément utilisable quitte à être un peu approximatif. Il est donc parfois inutile de vouloir être trop précis.

**Remarque 3.2.** Plus généralement, on pourrait considérer d'autres types de fonction avec des variations collant à une étude statistique pour peu que le comportement du coût marginal  $C_m$  soit relativement régulier. Le problème que l'on aura à résoudre sera soit d'évaluer simplement  $\sum_{k=1}^x C_m(k)$  pour une utilisation « humaine », soit de le faire efficacement de façon informatique.

**Remarque 3.3.** On justifie très souvent les deux modèles précédents via l'utilisation de l'approximation  $C_m(x) \approx C'(x)$ , puis ensuite on utilise les polynômes ainsi trouvés pour des applications numériques avec de faibles valeurs pour  $x$ . On voit que cette démarche est fragile<sup>7</sup>. Le piège est que cette approche fournit tout de même un polynôme de degré 2 ou 3 suivant les hypothèses de départ. Il pourrait être intéressant d'évaluer l'erreur commise par rapport à la méthodologie présentée dans ce document.

7. L'auteur, qui enseigne les mathématiques au lycée, doit admettre qu'il utilise aussi ce type de raisonnement dans des exercices, ce qui est pédagogiquement intéressant dans le cadre du calcul de dérivées. Par contre, les élèves sont avertis de l'arnaque faite en utilisant l'expression polynomiale pour de petites valeurs de  $x$ .



**3.2. Le modèle est-il bon ?** Il se trouve que la modélisation du coût de production par un polynôme de degré 2 ou 3 apparaît souvent dans des livres présentant des mathématiques élémentaires pour l'Économie. Cela montre que ces modèles ont leur utilité et ceci même si les raisonnements précédents sont fragiles car ils reposent sur des « *approximations de courbes* ». La technique d'approximation de formules, ou plus précisément d'interpolation, reste tout de même intéressante.

## 4. DÉSINTÉGRATION RADIOACTIVE – PROBABILITÉS ET LOIS CONTINUES, OU PAS...

**4.1. Une modélisation.** Les Sciences Physiques nous donnent la loi **[D]** suivante : « *la probabilité qu'à un instant  $t$  un noyau radioactif se désintègre dans l'intervalle  $[t; t + s]$  ne dépend pas de son âge  $t$  et n'est jamais égale à un* ». Concrètement, ceci signifie que l'on suppose que les noyaux radioactifs ne vieillissent pas avant leur désintégration, et que de plus il est impossible qu'ils disparaissent majoritairement d'un seul coup. Il est aussi implicite qu'il est impossible qu'aucun noyau ne disparaisse sur l'intervalle  $[0; t]$  pour  $t > 0$ , ceci revient à n'étudier que le phénomène de radioactivité.

Nous allons supposer de plus que la probabilité  $P$  de désintégration suit sur  $\mathbb{R}_+$  une loi de densité continue  $f$  de sorte que  $P([0; t]) = \int_0^t f(x) dx$  pour  $t \geq 0$ . Posant  $F(t) = P([0; t])$  pour  $t \geq 0$ , nous avons alors les faits suivants.

- $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$  puisque  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  par hypothèse.
- La loi **[D]** signifie que la probabilité que le noyau se désintègre dans l'intervalle  $[t; t + s]$  sachant qu'il ne s'est pas désintégré dans l'intervalle  $[0; t]$  est égale à  $P([0; s]) = F(s)$  pour tout couple  $(t; s) \in (\mathbb{R}_+)^2$ .
- Pour  $(t; s) \in (\mathbb{R}_+)^2$ , la probabilité que le noyau se désintègre dans l'intervalle  $[t; t + s]$  sachant qu'il ne s'est pas désintégré dans l'intervalle  $[0; t]$  est  $\frac{P([t; t+s])}{1-P([0; t])}$ , c'est à dire  $\frac{F(t+s)-F(t)}{1-F(t)}$  (notons qu'il n'y a aucun souci car par hypothèse  $F(t) \neq 1$ ).
- Nous obtenons donc  $\frac{F(t+s)-F(t)}{1-F(t)} = F(s)$  d'où  $F(t+s) - F(t) = F(s)(1 - F(t))$  pour tout couple  $(t; s) \in (\mathbb{R}_+)^2$ .
- L'équation fonctionnelle vérifiée par  $F$  n'est pas très sympathique. Nous allons essayer d'en déduire une autre qui nous éclairera sur la marche à suivre. Il est naturel d'introduire  $G(t) = 1 - F(t)$  la probabilité que le noyau ne se soit pas désintégré dans l'intervalle  $[0; t]$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned} F(t+s) - F(t) &= F(s)(1 - F(t)) \iff 1 - G(t+s) - (1 - G(t)) = (1 - G(s))G(t) \\ &\iff -G(t+s) + G(t) = G(t) - G(s)G(t) \\ &\iff G(t+s) = G(s)G(t) \end{aligned}$$

Nous obtenons donc que la fonction  $G$  dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  vérifie l'équation fonctionnelle  $G(t+s) = G(s)G(t)$ . Ceci nous donne alors  $G(x) = e^{kx}$  avec  $(k; x) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+$ .

En effet, il suffit de fixer  $t \in \mathbb{R}_+$  puis de dériver par rapport à  $s$  ce qui nous donne  $G'(t+s) = G'(s)G(t)$ . Comme  $G$  ne peut pas être constante<sup>8</sup>, on a :  $k \stackrel{\text{déf}}{=} G'(0) \neq 0$ . Nous avons alors pour  $t \in \mathbb{R}_+$  quelconque  $G'(t) = kG(t)$  soit une équation différentielle classique (il n'est pas gênant que nous soyons juste sur  $\mathbb{R}_+$  au lieu de  $\mathbb{R}$  tout entier).

---

8. Sur  $\mathbb{R}_+^*$ , nous avons toujours  $G(t) \neq 0$  et  $G(t) \neq 1$ , i.e.  $F(t) \neq 1$  et  $F(t) \neq 0$  par hypothèse car on n'exclut les cas de désintégrations probablement certaine et impossible.

- Sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $f(x) = F'(x) = -G'(x) = -ke^{kx}$ . En fait nécessairement  $k < 0$  car nous devons avoir  $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1$ . Faisons comme en Physique en n'utilisant que des paramètres positifs : notant  $\lambda = -k > 0$ , nous avons :  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ .
- Réciproquement si  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  avec  $\lambda > 0$  alors la probabilité  $P$  de désintégration de loi de densité continue  $f$  vérifie bien la loi **[D]** (*facile à vérifier en « remontant » certains des calculs faits ci-dessus*).

En résumé, si la probabilité  $P$  de désintégration vérifie la loi **[D]**, alors elle suit une loi de densité continue  $f$  si et seulement si sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  avec  $\lambda > 0$ .

**Remarque 4.1.** Les physiciens appellent  $\tau \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\lambda}$  la constante de temps radioactive.

**4.2. Le modèle est-il bon ?** Vous aurez noté qu'en ajoutant juste une petite hypothèse, à savoir que la loi de probabilité de désintégration suit une loi de densité continue, nous arrivons à une modélisation robuste vis à vis de la loi physique **[D]**. Ceci étant dit, il serait bien de pouvoir se passer de cette hypothèse additionnelle dont la loi **[D]** ne parle pas. Est-ce possible ? L'annexe suivante répond positivement à cette question. Plus précisément, nous allons voir que l'hypothèse sur la loi de densité continue peut-être omise même si au final nous allons démontrer que la probabilité suit forcément une loi de densité continue. Nous avons donc pu construire un modèle très robuste au regard de la loi physique **[D]**. Ceci est très joli !

**4.3. Annexe : le cas d'une probabilité quelconque.** Posons  $F(t) = P([0; t])$  ainsi que  $G(t) = 1 - F(t)$  pour  $t \geq 0$  comme précédemment. On sait juste que  $0 < G \leq 1$  sur  $\mathbb{R}_+$ , que  $0 < G < 1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et que  $G$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$  (la monotonie découle de la croissance des probabilités).

Reprenant le raisonnement de la section sur la modélisation, sans passer par aucun calcul intégral, nous avons de nouveau que  $G(t+s) = G(s)G(t)$  pour  $(t; s) \in (\mathbb{R}_+)^2$ . Démontrons alors l'existence de  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $G(x) = e^{-\lambda x}$ .

- $G(0+0) = G(0)G(0)$  donne  $G(0)(1 - G(0)) = 0$  soit  $G(0) = 0$  ou  $G(0) = 1$ . Seul le second cas est possible.
- Pour tout réel  $x \geq 0$ , une récurrence facile montre que  $G(nx) = G(x)^n$  pour tout naturel  $n$ .
- Dans la suite, nous poserons  $\alpha = G(1) \in ]0; 1[$ . En particulier,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $G(n) = \alpha^n$ .
- $\forall (p; q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ ,  $G(p) = G\left(q \times \frac{p}{q}\right)$ , soit  $\alpha^p = G\left(\frac{p}{q}\right)^q$ . Comme de plus  $G > 0$  sur  $\mathbb{R}_+$ , on a :  $G\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{\alpha^p} = \alpha^{\frac{p}{q}}$ . Autrement dit,  $\forall r \in \mathbb{Q}_+$ ,  $G(r) = \alpha^r$ .
- Soit enfin  $x \in \mathbb{R}_+$ . Par densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ , il existe deux suites de rationnels positifs  $(r_n)$  et  $(R_n)$  qui convergent vers  $x$  et vérifient  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $r_n \leq x \leq R_n$ . Comme  $G$  décroît,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $G(r_n) \geq G(x) \geq G(R_n)$ , soit  $\alpha^{r_n} \geq G(x) \geq \alpha^{R_n}$ . Par continuité de la fonction  $t \rightarrow \alpha^t$  sur  $\mathbb{R}_+$ , un passage à la limite donne  $G(x) = \alpha^x$ .
- Il ne reste plus qu'à poser  $\lambda = -\ln \alpha > 0$  de sorte que  $G(t) = e^{-\lambda t}$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

Finalement,  $F(t) = 1 - G(t) = 1 - e^{-\lambda t} = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$  prouve que la probabilité  $P$  suit forcément la loi de densité continue  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ .

## 5. DYNAMIQUE DES POPULATIONS AVEC MALTHUS – SUITES GÉOMÉTRIQUES ET LA FONCTION EXPONENTIELLE

**5.1. Une modélisation due à Thomas Robert Malthus.** Thomas Robert Malthus (1766 – 1834) , un économiste britannique, a proposé le modèle de croissance d'une population suivant : « *les taux de naissance et de décès sont des constantes* ». Pour étudier cette hypothèse, introduisons les notations suivantes.

- $P(t)$  est le nombre de personnes à la fin de l'année  $t$  .
- $f \in [0; 1]$  est le taux de natalité supposé constant.
- $m \in [0; 1]$  est le taux de mortalité supposé lui-aussi constant.

Dès lors, nous avons la relation  $P(t+1) = P(t) + fP(t) - mP(t)$  , ce qui peut aussi s'écrire en terme de taux d'évolution  $P(t+1) - P(t) = fP(t) - mP(t)$  .

→  $fP(t)$  est le nombre de nouveaux nés durant l'année  $t$  .

→  $mP(t)$  est le nombre des personnes décédées durant l'année  $t$  .

Posant  $k = f - m$  , nous avons  $P(t+1) = (1+k)P(t)$  . Ceci définit une suite géométrique et nous avons alors  $\forall t \in \mathbb{N}$  ,  $P(t) = (1+k)^t P(0)$  .

Il se trouve que Thomas Robert Malthus va plus loin dans son raisonnement en considérant  $t \in \mathbb{R}_+$  et en proposant la relation  $P'(t) = kP(t)$  . Il est connu que cette équation différentielle a pour solution  $P(t) = P(0)e^{kt}$  .

Nous allons proposer une explication du choix ainsi fait. Notons  $\Delta f_b^a = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$  le taux de variation de la fonction  $f$  entre  $a$  et  $b$  distincts. L'idée simple, mais peut-être un peu trop, est de dire que le raisonnement fait sur une année pourrait être fait de la même façon sur une portion plus petite d'années, une portion aussi petite que nécessaire. Dès lors, en considérant  $P$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  , et non juste sur  $\mathbb{N}$  , pour tout couple  $(t; \delta t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  tel que  $t + \delta t \geq 0$  , nous avons :  $\Delta P_{t+\delta t}^t = kP(t)$  . Il ne reste plus qu'à passer un cap supplémentaire en supposant  $P$  dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  . Dès lors par passage à la limite via  $\delta t \rightarrow 0$  , ou bien juste  $\delta t \rightarrow 0^+$  pour  $t = 0$  , on obtient<sup>9</sup> :  $P'(t) = kP(t)$  .

Il semble malgré tout étrange que Thomas Robert Malthus ne se soit pas satisfait de la suite géométrique  $P(t) = (1+k)^t P(0)$  qui est simple à manipuler même sans calculateur électronique. Au passage, on pourrait évaluer l'erreur commise  $(1+k)^t P(0) - P(0)e^{kt} = P(0) (e^{t \ln(1+k)} - e^{kt})$  suivant les valeurs de  $k \in ]-1; 1]$  via la détermination des maxima naturels des fonctions  $f_k$  définies sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f_k(t) = e^{t \ln(1+k)} - e^{kt}$  .

**5.2. Le modèle de Thomas Robert Malthus est-il bon ?** Notons que pour  $f > m$  , soit  $k > 0$  , la suite  $(1+k)^t P(0)$  et la fonction  $P(0)e^{kt}$  tendant vers  $+\infty$  . Nous voyons ainsi que la modélisation précédente aura forcément un domaine d'applicabilité très réduit dans le temps. Ceci étant noté, analysons les hypothèses faites.

**Hypothèse 1.** Tout d'abord,  $f$  et  $m$ , les taux de natalité et de mortalité, sont supposés constants. Cette hypothèse est clairement critiquable. En fait elle ne tient aucunement compte d'agents extérieurs agissant sur les valeurs des taux. Ceci étant indiqué, si l'on considère le développement de cellules biologiques dans un substrat propice, on aura  $f = 1$  et  $m = 0$  .

---

9. Peut-être que le lecteur aura noté une grosse arnaque ici. Nous en discuterons dans la section suivante.

**Hypothèse 2.** La relation  $P(t+1) = P(t) + fP(t) - mP(t)$  ne tient compte d'aucun acteur environnemental extérieur car seul la quantité  $P$  est utilisée. Que devient le modèle en cas d'épidémie où il faudrait distinguer les personnes malades de celles saines ? La section 7 propose un exemple d'une telle situation.

**Hypothèse 3 faite par Thomas Robert Malthus.** Le passage de fonctions définies sur  $\mathbb{N}$  à des fonctions définies sur  $\mathbb{R}_+$  ne pose pas de difficultés conceptuelle et concrète.

Ensuite arrive un grand classique des sciences du réel : les fonctions concrètes étudiées sont supposées suffisamment régulières. Pourquoi fait-on ceci ? Ceci permet de faire appel à des outils mathématiques puissants du calcul différentiel car l'on dispose de moins d'outils efficaces pour étudier les suites.

Ceci étant dit, supposer la dérivabilité sur  $\mathbb{R}_+$  tout entier nous amène à étudier des fonctions au comportement très lisse. Ainsi les solutions des équations différentielles, dites logistiques,  $y' = ay(1-by)$  sont très régulières, tandis que l'équation logistique discrète  $u_{n+1} = au_n(1-bu_n)$  peut produire des suites au comportement chaotique.

De plus, comment passer d'une étude entre  $t$  et  $t + \delta t$  avec  $\delta t$  aussi petit que nécessaire, au cas où  $\delta t$  tend vers 0 ? Rien ne justifie ceci sérieusement d'un point de vue concret. Nous sommes là face à un choix très fort de modélisation.

L'hypothèse 3 est donc lourde de conséquences... Ceci étant dit, cela reste un classique de la modélisation et l'histoire des sciences du réel prouve que ce type d'hypothèse est féconde à produire des modèles utiles.

**Conclusion.** Le modèle est globalement fragile et ne correspond qu'à des cas concrets très rares. Ceci a été constaté assez vite et a poussé Pierre François Verhulst à proposer une autre modélisation que nous allons découvrir dans la section suivante.

## 6. DYNAMIQUE DES POPULATIONS AVEC VERHULST – UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE NON LINÉAIRE

**6.1. Une modélisation due à Pierre François Verhulst.** La grosse faiblesse du modèle de Malthus, lequel produit une fonction à la croissance exponentielle dès que le taux de natalité est supérieur à celui de la mortalité, est que ces deux taux sont supposés constants. On peut alors considérer ces taux comme étant des fonctions. La question se posant ensuite est de savoir de quelles variables dépendent ces taux. Du temps uniquement ? De la taille de la population uniquement ? Des deux<sup>10</sup> ? Ayant noté les faiblesses du modèle de Malthus, le mathématicien belge Pierre François Verhulst (1804 – 1849) propose les fonctions suivantes où  $P(t)$  est le nombre d'individus à la fin de l'année  $t$ .

- Le taux de natalité est une fonction affine croissante dépendant du nombre d'individus. Donc pour l'année  $t$ , ce taux sera du type  $f(t) = \alpha P(t) + \beta$  avec  $(\alpha; \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ .
- Le taux de mortalité une fonction affine décroissante dépendant du nombre d'individus. Donc pour l'année  $t$ , ce taux sera du type  $m(t) = qP(t) + r$  avec  $(q; r) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+^*$ .

Dès lors, le taux d'évolution  $P(t+1) - P(t)$  est  $f(t)P(t) - m(t)P(t) = P(t)(A - BP(t))$  en posant  $A = \alpha - q \in \mathbb{R}_+$  et  $B = -\beta + r \in \mathbb{R}$  (la justification du choix d'un signe moins apparaîtra plus bas).

À ce stade, nous avons une équation de récurrence du type  $u_{n+1} = u_n(A - Bu_n)$ . Il se trouve que le comportement de ces suites peut être de type chaotique. Il devient alors plus facile de passer par un modèle différentiel, c'est à dire de passer de suites à des fonctions dérivables comme dans le modèle de Malthus. Ceci nous donne :  $P'(t) = P(t)(A - BP(t))$ . La fonction  $P$  vérifie donc l'équation différentielle  $y' = y(A - By)$ .

Nous allons supposer  $A > 0$ , le cas  $A = 0$  sera examiné plus bas en remarque. Sous cette hypothèse,  $y' = y(A - By)$  se réécrit  $y' = ay(1 - by)$  avec  $a = A > 0$  et  $b = \frac{B}{A}$ . Nous allons établir juste après que  $b > 0$  pour le modèle étudié<sup>11</sup>. Pour  $(a; b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ , Pierre François Verhulst qualifie  $y' = ay(1 - by)$  d'équation « *logistique* » sans que l'on sache vraiment pourquoi.

Justifions que  $b > 0$  pour notre modèle. Pour cela, nous allons tout simplement résoudre  $y' = ay(1 - by)$ , ce qui se fait facilement comme suit en supposant que  $P$  ne s'annule jamais (hypothèse qui concrètement ne pose pas de problème).

$$\begin{aligned} P'(t) = aP(t)(1 - bP(t)) &\iff -\frac{P'(t)}{P^2(t)} = -\frac{a}{P(t)} + ab \\ &\iff f'(t) = -af(t) + ab \text{ où on a posé } f(t) = \frac{1}{P(t)}. \end{aligned}$$

Nous aboutissons à une simple équation différentielle linéaire du 1<sup>er</sup> ordre et il est connu que nécessairement  $f(t) = b + ke^{-at}$  où  $k \in \mathbb{R}$  est une constante dépendant des conditions réelles. Nous avons finalement :  $P(t) = \frac{1}{b + ke^{-at}}$ . Faisant tendre  $t$  vers  $+\infty$ , nous avons que  $\frac{1}{b}$  correspond au nombre d'individus lorsque la population se stabilise<sup>12</sup> d'où  $b > 0$  comme annoncé.

10. ... mon capitaine.

11. Ceci justifie ce signe moins a priori étrange.

12. Attention car cette stabilisation à long terme est due au modèle. Rien ne nous dit que ce phénomène sera concrètement observable.

Pierre François Verhulst rend l'équation plus expressive en écrivant  $y' = ay \left(1 - \frac{y}{K}\right)$  avec  $K = \frac{1}{b}$  qui a la même dimension que  $P(t)$ , de sorte que  $P(t) = \frac{K}{1 + kK e^{-at}}$  peut se réécrire  $P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P(0)} - 1\right)e^{-at}}$ .

**Remarque 6.1.** Dans  $y' = y(A - By)$ , si  $A = 0$ , nous obtenons  $y' = -By^2$  dont les solutions ne s'annulant pas sont du type  $\frac{1}{k+Bt}$  avec  $k$  une constante. Appliqué à notre contexte, ceci fournirait une population  $P(t) = k + Bt$  évoluant de façon linéaire, une modélisation qui n'est pas du tout crédible.

**6.2. Le modèle de Pierre François Verhulst est-il bon ?** La seule nouveauté par rapport au modèle de Malthus est l'introduction des deux fonctions affines suivantes  $f(t) = \alpha P(t) + \beta$  et  $m(t) = qP(t) + r$ , la première étant supposée croissante et la seconde décroissante. Pour les variations, ce sont là des hypothèses optimistes mais non obligatoires. L'étude mathématique montre que ce choix, peut-être trop simple, nous fait aboutir à un modèle plus réaliste où la population se stabilise à long terme.

La modélisation nécessite des simplifications, parfois trop comme dans le cas du modèle de Malthus, parfois de façon féconde comme dans le modèle de Verhulst. Rien n'empêcherait a priori d'envisager des fonctions  $f(t)$  et  $m(t)$  plus réalistes, surtout de nos jours où l'on peut se passer d'une formule en utilisant le calcul électronique à condition d'être prudent puisque, comme nous l'avons indiqué, une modélisation discrète aussi simple que  $u_{n+1} = au_n(1 - bu_n)$  peut produire des suites chaotiques.

## 7. DANIEL BERNOULLI ET LA VARIOLE – UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

**7.1. Une modélisation due à Daniel Bernoulli.** Daniel Bernoulli<sup>13</sup> (1700 – 1782) était un médecin, physicien et mathématicien suisse. Il présente en 1760 à l'Académie des sciences de Paris un mémoire intitulé « *Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole*<sup>14</sup> et des avantages de l'inoculation pour la prévenir »<sup>15</sup>. Nous allons présenter son raisonnement.

**Propagation de la variole.** Pour modéliser ceci, nous aurons besoin des notations suivantes où l'unité de temps sera l'année.

- $q_I$  désigne la probabilité d'être infecté par la variole pendant une année.
- $q_V$  désigne la probabilité de mourir lorsque l'on attrape la variole pour la 1<sup>re</sup> fois. Une personne ne mourant pas pendant une année sera considérée comme immunisée contre la variole.
- $m(t)$  désigne, à la fin de l'année  $t$ , le taux de mortalité « normale » sans tenir compte d'une épidémie de variole (*l'année 0 est celle du début de l'étude réelle*).

Les notations précédentes sous-entendent que les quantités nommées sont constantes. C'est une hypothèse de modélisation ! Continuons avec les fonctions suivantes où  $t$  désigne une année.

- $S(t)$  est le nombre de personnes saines n'ayant pas la variole à la fin de l'année  $t$ .
- $I(t)$  est le nombre de personnes qui se sont immunisées contre la variole au cours de l'année  $t$ . Ces personnes sont celles qui ont attrapé la variole pendant l'année  $t$  sans mourir.
- $P(t) = S(t) + I(t)$  est le nombre personnes toujours vivantes à la fin de l'année  $t$ .

Faisons le bilan entre l'année  $t$  et l'année  $(t + 1)$ .

- $S(t + 1) = S(t) - q_I S(t) - m(t)S(t)$   
 $\rightarrow q_I S(t)$  est le nombre de personnes mortes de la variole.  
 $\rightarrow m(t)S(t)$  est le nombre des personnes saines mortes de cause « normale ».
- $I(t + 1) = I(t) + (1 - q_V)q_I S(t) - m(t)I(t)$   
 $\rightarrow$  Parmi les  $q_I S(t)$  nouvelles personnes infectées, il y en a juste  $(1 - q_V)q_I S(t)$  qui ne meurent pas de la variole.  
 $\rightarrow m(t)I(t)$  est le nombre d'infectés morts d'autre chose que de la variole.
- Nous en déduisons :  
 $P(t + 1) = P(t) - q_V q_I S(t) - m(t)P(t)$

Notant  $\Delta f_b^a = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$  le taux de variation de la fonction  $f$  entre  $a$  et  $b$  distincts, nous avons :

- $\Delta S_{t+1}^t = -q_I S(t) - m(t)S(t)$
- $\Delta P_{t+1}^t = -q_V q_I S(t) - m(t)P(t)$

Comme dans la sous-section 5.1 avec le modèle de Malthus, nous passons de suites à des fonctions dérivables, et de taux de variation à des dérivées. Ceci nous donne :

13. Il était le fils de Jean Bernoulli (1667 – 1748) et le neveu de Jacques Bernoulli (1654 – 1705) qui étaient tous les deux des mathématiciens et physiciens suisses.

14. La petite vérole était le nom que l'on donnait à la variole.

15. Pour les aspects historiques, se reporter au livre « *Histoires de mathématiques et de populations* » de Nicolas Bacaër aux éditions CASSINI.



- $S'(t) = -q_I S(t) - m(t)S(t)$
- $P'(t) = -q_V q_I S(t) - m(t)P(t)$

Avec ces nouveaux choix de modélisation, notre sac d'hypothèses s'alourdit !

En résumé, nous devons trouver deux fonctions  $S$  et  $P$  dérivables sur  $\mathbb{R}_+$  vérifiant les deux équations précédentes. A priori, ce n'est pas simple comme problème : ce qui crée une petite difficulté c'est la présence de  $m(t)$  dont on ne sait rien. Nous décidons de chercher à obtenir des informations sur  $R(t) = \frac{S(t)}{P(t)}$  le taux des personnes saines (*en annexe de cette section sont données deux autres méthodes de résolution du système ci-dessus dont celle utilisée par Daniel Bernoulli*). Au passage, nous avons besoin de supposer, de façon non abusive, que  $S$  et  $P$  ne s'annulent jamais.

$$\begin{aligned}
 R'(t) &= \frac{1}{P^2(t)} (S'(t)P(t) - S(t)P'(t)) \\
 &= \frac{1}{P^2(t)} ([-q_I S(t) - m(t)S(t)]P(t) - S(t)[-q_V q_I S(t) - m(t)P(t)]) \\
 &= \frac{1}{P^2(t)} (-q_I S(t)P(t) + q_V q_I S^2(t)) \\
 &= -q_I R(t) + q_V q_I R^2(t)
 \end{aligned}$$

Ce qui est beau, c'est que l'on tombe sur une équation différentielle peu agressive a priori :  $R'(t) = -q_I R(t) + q_V q_I R^2(t)$ . Il suffit de raisonner comme suit en se souvenant que  $S$  et  $P$  ne s'annulent jamais et donc  $R$  non plus.

$$\begin{aligned}
 R'(t) = -q_I R(t) + q_V q_I R^2(t) &\iff -\frac{R'(t)}{R^2(t)} = \frac{q_I}{R(t)} - q_V q_I \\
 &\iff f'(t) = q_I f(t) - q_V q_I \text{ où on a posé } f(t) = \frac{1}{R(t)}.
 \end{aligned}$$

Nous aboutissons à une simple équation différentielle linéaire du 1<sup>er</sup> ordre et il est connu que nécessairement  $f(t) = q_V + k e^{q_I t}$  où  $k \in \mathbb{R}$  est une constante dépendant des conditions réelles<sup>16</sup>. Nous avons finalement :  $\frac{S(t)}{P(t)} = \frac{1}{q_V + k e^{q_I t}}$ . Tout ceci a été obtenu via de bien jolis calculs...

**Remarque 7.1.** L'équation différentielle  $R'(t) = -q_I R(t) + q_V q_I R^2(t)$  est une équation du type  $y' = ay(1 - by)$  avec  $a < 0$  et  $b > 0$ . Ceci est similaire à l'équation « logistique » de Pierre François Verhulst vue dans la section 6.

**Utilité de l'inoculation pour vacciner.** L'idée première de Daniel Bernoulli est de supposer que l'inoculation de la variole à tous les jeunes enfants les rend tous immunisés sans les tuer<sup>17</sup>. Sous cette hypothèse, il faut étudier  $Q(t) = \frac{P(t)}{N(t)}$  où  $N(t)$  désigne le nombre, non nul par hypothèse, de personnes à la fin de l'année  $t$  s'il n'y a aucun cas de variole. En raisonnant comme ci-dessus, nous avons  $\Delta N_{t+1}^t = -m(t)N(t)$  puis  $N'(t) = -m(t)N(t)$  en supposant  $N$  dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ .

16. Notre équation différentielle est juste sur  $\mathbb{R}_+$  mais cela n'est pas gênant ici.

17. Dans le livre « *Histoires de mathématiques et de populations* », Nicolas Bacaër explique la suite du raisonnement consistant à prendre en compte les effets délétères de l'inoculation dans certains cas.

$$\begin{aligned}
Q'(t) &= \frac{1}{N^2(t)} (P'(t)N(t) - P(t)N'(t)) \\
&= \frac{1}{N^2(t)} ([-q_V q_I S(t) - m(t)P(t)]N(t) + m(t)P(t)N(t)) \\
&= -q_V q_I \frac{P(t)}{N(t)} \cdot \frac{S(t)}{P(t)} \\
&= -q_V q_I Q(t) \frac{e^{-q_I t}}{q_V e^{-q_I t} + k} \text{ car } \frac{S(t)}{P(t)} = \frac{1}{q_V + k e^{q_I t}} = \frac{e^{-q_I t}}{q_V e^{-q_I t} + k}
\end{aligned}$$

Comme  $\frac{Q'(t)}{Q(t)} = \frac{-q_I \cdot q_V e^{-q_I t}}{q_V e^{-q_I t} + k}$ , la dérivation logarithmique nous donne  $Q(t) = K (q_V e^{-q_I t} + k)$  avec  $K \in \mathbb{R}^*$  une constante. Ceci permet d'évaluer l'efficacité de l'inoculation de la variole en utilisant les données du terrain pour déterminer les différents paramètres.

**7.2. Le modèle de Daniel Bernoulli est-il bon ?** Revenons sur la toute « *petite* » liste d'hypothèses de modélisation que nous avons faites.

- (1) La probabilité  $q_I$  d'être infecté dans l'année, et celle  $q_V$  de mourir dans l'année une fois infecté sont supposées indépendantes de l'année  $t$  considérée.
- (2) On a supposé  $S$ ,  $P$  et  $N$  définies et dérivables sur  $\mathbb{R}_+$  tout entier.
- (3) Enfin nous avons besoin que  $S$ ,  $P$  et  $N$  ne s'annulent jamais.

**Hypothèse 1.** Ceci sous-entend un type particulier de propagation. Par exemple, cette première hypothèse reste-t-elle valable si les personnes malades sont mises en quarantaine ? Non. C'est ce qui permet d'éradiquer des maladies très virulentes. Une autre critique : plus il y a de malades contagieux, plus grande devient la probabilité de tomber malade. Du point de vue de la modélisation, pour une maladie « *pas trop violente* » et en début d'épidémie, on peut tout de même accepter la première hypothèse<sup>18</sup>.

**Hypothèse 2.** Le passage de fonctions définies sur  $\mathbb{N}$  à des fonctions définies et dérivables sur  $\mathbb{R}_+$  est soumis aux mêmes critiques non négligeables que celles faites dans la sous-section 5.2.

**Hypothèse 3.** Ceci ne pose aucun souci sauf à vouloir étudier une population sans aucune personne saine, ou bien sans personne vivante.

**Conclusion.** Bien que nous ayons fait un très joli raisonnement mathématique, nous venons de voir que concrètement il y a de réelles failles de modélisation mais comme toujours en modélisation, c'est l'affrontement du modèle et des vraies données qui servira de juge d'utilité.

**7.3. Annexe : résoudre autrement le système d'équations différentielles.** Nous allons donner deux autres méthodes de résolution<sup>19</sup> du système [EDV] suivant où les fonctions  $S$  et  $P$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}_+$  et ne s'annulent jamais.

$$[\text{EDV}] : \begin{cases} S'(t) = -q_I S(t) - m(t)S(t) \\ P'(t) = -q_V q_I S(t) - m(t)P(t) \end{cases}$$

18. Des règles de quarantaines ne sont pas justifiables politiquement pour une maladie « *pas trop violente* » même si celle-ci peut être mortelle dans certains cas.

19. Ces méthodes sont présentes dans le livre « *Histoires de mathématiques et de populations* » de Nicolas Bacaër.

**Méthode de Daniel Bernoulli.** Le médecin suisse raisonne comme suit.

$$\begin{cases} -m(t) = \frac{S'(t) + q_I S(t)}{S(t)} \\ -m(t) = \frac{P'(t) + q_V q_I S(t)}{P(t)} \end{cases}$$

$$(S'(t) + q_I S(t)) P(t) = (P'(t) + q_V q_I S(t)) S(t)$$

$$S'(t)P(t) - P'(t)S(t) = -q_I S(t)P(t) + q_V q_I S^2(t)$$

$$R'(t) = -q_I R(t) + q_V q_I R^2(t) \text{ en notant } R(t) = \frac{S(t)}{P(t)}$$

... etc.

**Méthode via la dérivation logarithmique.** Supposons la fonction  $m$  intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ <sup>20</sup>.

Les solutions de  $S'(t) = -q_I S(t) - m(t)S(t)$  sont du type  $S(t) = c_1 \exp\left(-q_I t - \int_0^t m(x) dx\right)$

où  $c_1 \in \mathbb{R}$  est une constante (*ceci se démontre via la dérivée logarithmique de  $S$  sans aucune connaissance préalable sur les équations différentielles linéaires*). Concrètement, nous savons que  $c_1 > 0$ .

De même, les solutions de  $P'(t) = -m(t)P(t)$  sont de la forme  $P(t) = c_2 \exp\left(-\int_0^t m(x) dx\right)$

où  $c_2 \in \mathbb{R}$  est une constante, tandis que  $P'(t) = -q_V q_I S(t) - m(t)P(t)$  admet la solution particulière  $P(t) = q_V S(t)$ . Dès lors, les solutions de  $P'(t) = -q_V q_I S(t) - m(t)P(t)$  sont du

type  $P(t) = c_2 \exp\left(-\int_0^t m(x) dx\right) + q_V S(t)$ . Comme  $\exp\left(-\int_0^t m(x) dx\right) = \frac{1}{c_1} e^{q_I t} S(t)$

nous obtenons :

$$P(t) = \frac{c_2}{c_1} e^{q_I t} S(t) + q_V S(t)$$

$$\frac{P(t)}{S(t)} = k e^{q_I t} + q_V \text{ avec } k = \frac{c_2}{c_1} \text{ une constante réelle}$$

$$R(t) = \frac{S(t)}{P(t)} = \frac{1}{q_V + k e^{q_I t}}$$

... etc.

---

## 8. AFFAIRE À SUIVRE...

---



---

20. L'ensemble des fonctions intégrables sur  $\mathbb{R}_+$  ne se limite pas à celui des fonctions continues. On y trouve des fonctions plus ou moins complexes suivant le type de calcul intégral que l'on s'autorise. Le lecteur intéressé par le sujet pourra se reporter à l'excellent livre « *Intégration, de Riemann à Kurzweil et Henstock - La construction progressive des théories modernes de l'intégrale* » de Laurent Moonens chez ellipses.