BROUILLON - CANDIDAT - À PROPOS DE L'EXERCICE DE SPÉ MATHS DU BAC S DE JUIN 2018

CHRISTOPHE BAL

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons "Attribution - Pas d'utilisation commerciale - Partage dans les mêmes conditions 4.0 International".

Table des matières

1. Ce qui interroge : une matrice « magique » sortie d'un chapeau

Dans le BAC S de Juin 2018, la partie A de l'exercice de Spécialité Mathématiques s'intéressait à l'équation diophantienne **[ED]** : $x^2 - 8y^2 = 1$ sur $\mathbb{N}^2$.

On a une solution évidente $(x\,;y) = (3\,;1)$ puis l'exercice introduit une matrice « magique » $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ pour ensuite construite des solutions $(x_n\,;y_n)$ de façon récursive et linéaire comme suit : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

Très bien mais mais comment peut-on découvrir la matrice « magique » A ?

2. Un moyen élémentaire de découvrir la matrice « magique »

Une idée élémentaire pour découvrir la matrice « magique » A est de noter que nous pouvons écrire $x^2 - 8y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en posant $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ *(le lecteur connaissant les formes quadratiques ne sera pas surpris par cette réécriture)* .

En posant $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, comme nous avons $\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A^T Q A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, il est alors naturel de chercher A vérifiant $A^T Q A = Q$ car d'une solution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on pourra passer à une « autre » solution $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ comme dans le sujet du BAC S.

Utilisant le déterminant, nous avons comme contrainte immédiate que $\det A = \pm 1$ *(A doit donc être inversible).*

Date: 25 Juin 2018 - 24 Juin 2019.

Cas 1 : *supposons d'abord que* $\det A = 1$.

Notant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, nous avons alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ d'où :

$$\begin{aligned}
A^T Q A = Q &\iff A^T Q = Q A^{-1} \\
&\iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} a & -8c \\ b & -8d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ 8c & -8a \end{pmatrix} \\
&\iff a = d \text{ et } b = 8c
\end{aligned}$$

La condition $\det A = 1$ pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 8c \\ c & a \end{pmatrix}$ nous donne $a^2 - 8c^2 = 1$. Que c'est joli !

La matrice du sujet de BAC utilise donc la solution élémentaire $(a\,;c) = (3\,;1)$.

Cas 2 : *supposons maintenant que* $\det A = -1$.

Notant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, nous avons alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ d'où comme dans les calculs précédents :

$A^T Q A = Q \iff a = -d$ et $b = -8c$

La condition $\det A = -1$ pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -8c \\ c & -a \end{pmatrix}$ nous redonne $a^2 - 8c^2 = 1$ donc rien de nouveau sous les cocotiers.

3. Prenons un peu de hauteur : un groupe « caché »

Ce qui suit reprend les excellentes indications données par Jérôme Germoni dans une discussion au bas de cette page : `http://images.math.cnrs.fr/+Nombres-puissants-au-bac-S+` *(chercher les messages de l'utilisateur projetmbc).*

Gardant les notations précédentes, les matrices A telles que $A^T Q A = Q$ sont celles du type $A = \begin{pmatrix} a & 8c \\ c & a \end{pmatrix}$. Notez que la contrainte $a^2 - 8c^2 = 1$ utile pour avoir des exemples numériques concrets est cachée dans la relation $A^T Q A = Q$.

Ensuite à partir de toute solution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $x^2 - 8y^2 = 1$, nous en construisons une « autre » via $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Notant $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions entières[1] de **[ED]** : $x^2 - 8y^2 = 1$, ce qui précède motive la définition de la loi $\star$ sur $\mathcal{S}$ via $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + 8cy \\ cx + ay \end{pmatrix}$. Il est important de comprendre que le vecteur obtenu est bien un élément de $\mathcal{S}$ *(nous allons expliquer pourquoi après).* Nous allons démontrer que cette loi $\star$ fait de $\mathcal{S}$ un groupe. Très joli ! Non ?

1. Ce qui suit se généralise aux solutions rationnelles, à celles réelles ou encore à celles complexes mais ne sortons pas du cadre de ce modeste document.

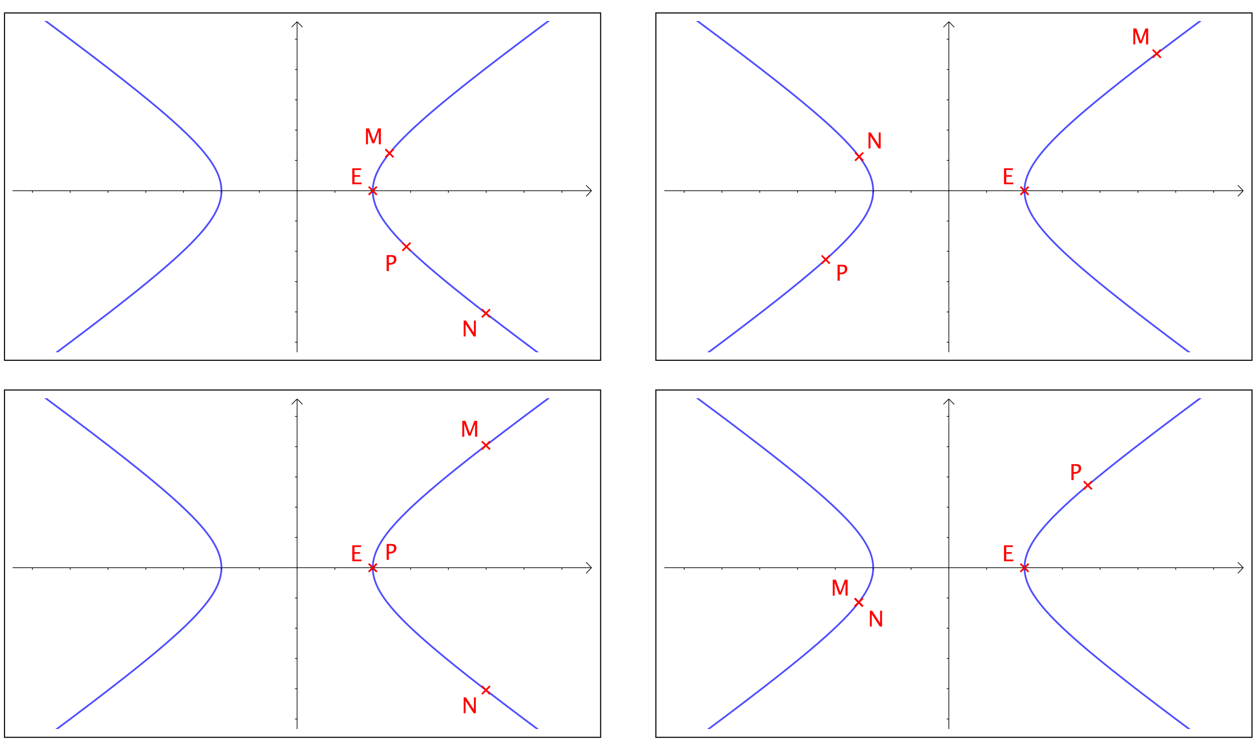
Les raisonnements suivants se font en faisant le parallèle entre $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et la matrice produit $\begin{pmatrix} a & 8c \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 8y \\ y & x \end{pmatrix}$ dont on garde juste la première colonne. Notons que les deux matrices sont celles entières A vérifiant $A^T Q A = Q$. Ceci étant dit, les résultats suivants se vérifient et se trouvent directement à la main sans passer par les matrices *(mais ceci est bien moins élégant).*

- La loi $\star$ est bien interne à $\mathcal{S}$ car si $A^T Q A = Q$ et $B^T Q B = Q$ alors nous avons sans effort : $(AB)^T Q (AB) = B^T A^T Q A B = B^T Q B = Q$.
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre de $\star$ car sa matrice associée est la matrice identité.
- $\begin{pmatrix} a \\ -c \end{pmatrix}$ est l'inverse de $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ *(revoir si besoin le cas 1 de la section précédente).*
- Pour finir, l'associativité de $\star$ découle de celle de la multiplication des matrices.

4. Tout est géométrie, ou presque...

Ce qui suit tente de donner une explication naturelle du lien entre la loi $\star$ et un procédé géométrique rappelé par Jérôme Germoni au bas de cette page : `http://images.math.cnrs.fr/+Nombres-puissants-au-bac-S+` *(chercher les messages de l'utilisateur projetmbc).*

Jusqu'à présent, nous n'avons à aucun moment représenter l'hyperbole $\mathscr{H}$ « à deux branches » d'équation implicite $X^2 - 8Y^2 = 1$ *(on utilise des majuscules pour le système de coordonnées).* C'est un peu dommage ! Nous donnons ci-dessous quatre représentations de deux points M et N sur $\mathscr{H}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ainsi que les points E , cf. le neutre de $\star$, et P, eux aussi sur $\mathscr{H}$, de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.



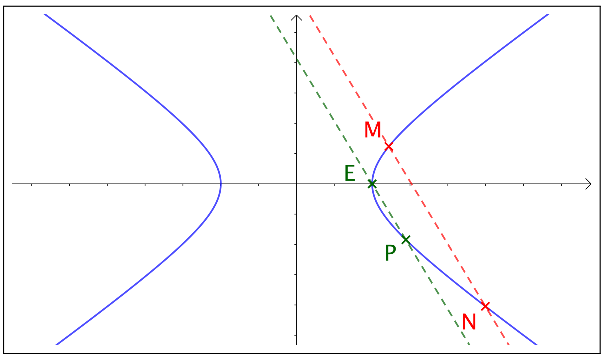
Les graphiques précédents suggèrent [2] un procédé géométrique simple pour construire P.

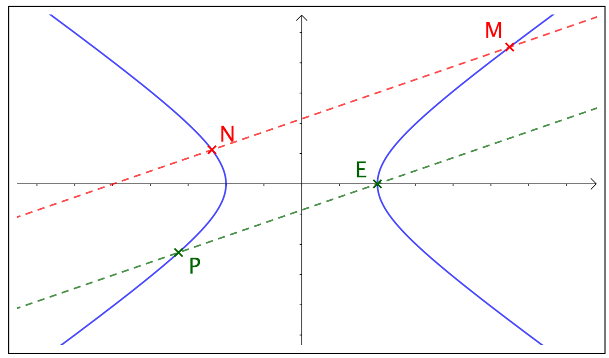
(1) Si $M \neq N$ et $x_M \neq x_N$ alors on construit la parallèle à (MN) passant par E . Le point P est le second point d'intersection de (MN) avec $\mathscr{H}$.

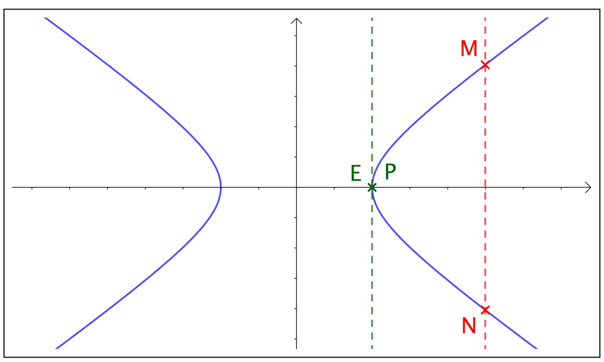
(2) Si $M \neq N$ et $x_M = x_N$ alors $P = E$. Notons au passage que l'on peut voir ceci comme un cas limite du précédent avec un point d'intersection « double ».

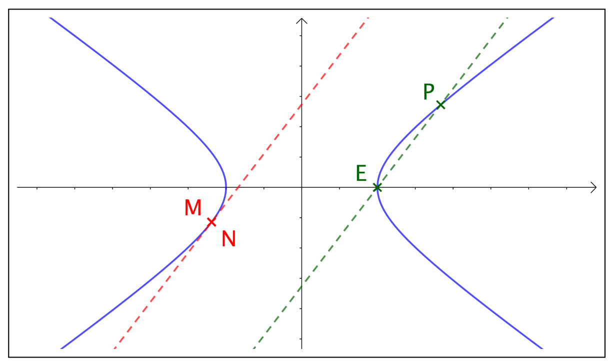
(3) Si $M = N$ on procède comme ci-dessus mais avec la parallèle de la tangente à $\mathscr{H}$ au point M .

Dans les graphiques suivants, les droites utilisées par le procédé géométrique conjecturé ont été tracées.









Prouvons la validité de notre conjecture. Nous confondrons les points avec les vecteurs utilisés pour définir la loi $\star$.

(1) Supposons que $M \neq N$ avec $x_M \neq x_N$.

Nous devons juste vérifier que (EP) et (MN) sont parallèles puisque l'on sait que $P \neq E$ *(voir le point suivant si besoin)*. Ce qui suit est quelque peu brutal *(on pourrait faire appel à un logiciel de calcul formel qui ici peut être utilisé en toute confiance)*.

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{EP}\,;\overrightarrow{MN}\right) &= \begin{vmatrix} x''-1 & x'-x \\ y'' & y'-y \end{vmatrix} \\
&= (x''-1)(y'-y) - y''(x'-x) \\
&= (xx'+8yy'-1)(y'-y) - (yx'+xy')(x'-x) \\
&= xx'y' + 8yy'^2 - y' - xx'y - 8y^2y' + y - yx'^2 - xx'y' + yxx' + x^2y'
\end{aligned}$$

2. En fait, le lieu de téléchargement de ce document contient aussi un fichier GeoGebra `base-tool.ggb` manipulable dynamiquement pour vérifier combien il est aisé de conjecturer la construction géométrique.

Réordonnons les termes en nous souvenant que $x^2 - 8y^2 = 1$ et $x'^2 - 8y'^2 = 1$.

$$
\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{EP}\,;\overrightarrow{MN}\right) &= x^2y' - 8y^2y' - yx'^2 + 8yy'^2 - y' + y \\
&= (x^2 - 8y^2)y' - y(x'^2 - 8y'^2) - y' + y \\
&= y' - y - y' + y \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Nous avons bien vérifié le parallélisme des droites (EP) et (MN) .

(2) Supposons que $M \neq N$ avec $x_M = x_N$.

Dans ce cas, il est immédiat que les points M et N sont inversibles, *i.e.* $x_M = x_N$ et $y_M = -y_N$. Ceci justifie que $P = E$.

(3) Supposons que $M = N$.

Notant $F(X\,;Y) = X^2 - 8Y^2 - 1$, la tangente à $\mathcal{H} : F(X\,;Y) = 0$ en M admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -\frac{\partial F}{\partial Y}(x\,;y) \\ \frac{\partial F}{\partial X}(x\,;y) \end{pmatrix}$ c'est à dire $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 16y \\ 2x \end{pmatrix}$.

Comme de plus $x'' = x^2 + 8y^2 = 16y^2 + 1$ et $y'' = 2xy$, nous avons $\overrightarrow{EP}\begin{pmatrix} 16y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{EP} = y\overrightarrow{u}$. Ceci permet de conclure.

Remarque. Pour ceux qui connaissent la loi de groupe des courbes elliptiques, notons que ce qui précède peut être un point d'entrée naturel, et humainement calculable, vers celle-ci *(indiquons qu'il existe un moyen naturel, mais d'une très grande technicité, de tomber sur cette fameuse loi de groupe qui est trop souvent donnée violemment sans plus d'explications sur la raison du procédé géométrique qui lui est associé).*