BROUILLON - FAIRE DES ADDITIONS MODULAIRES SUR UNE ELLIPSE

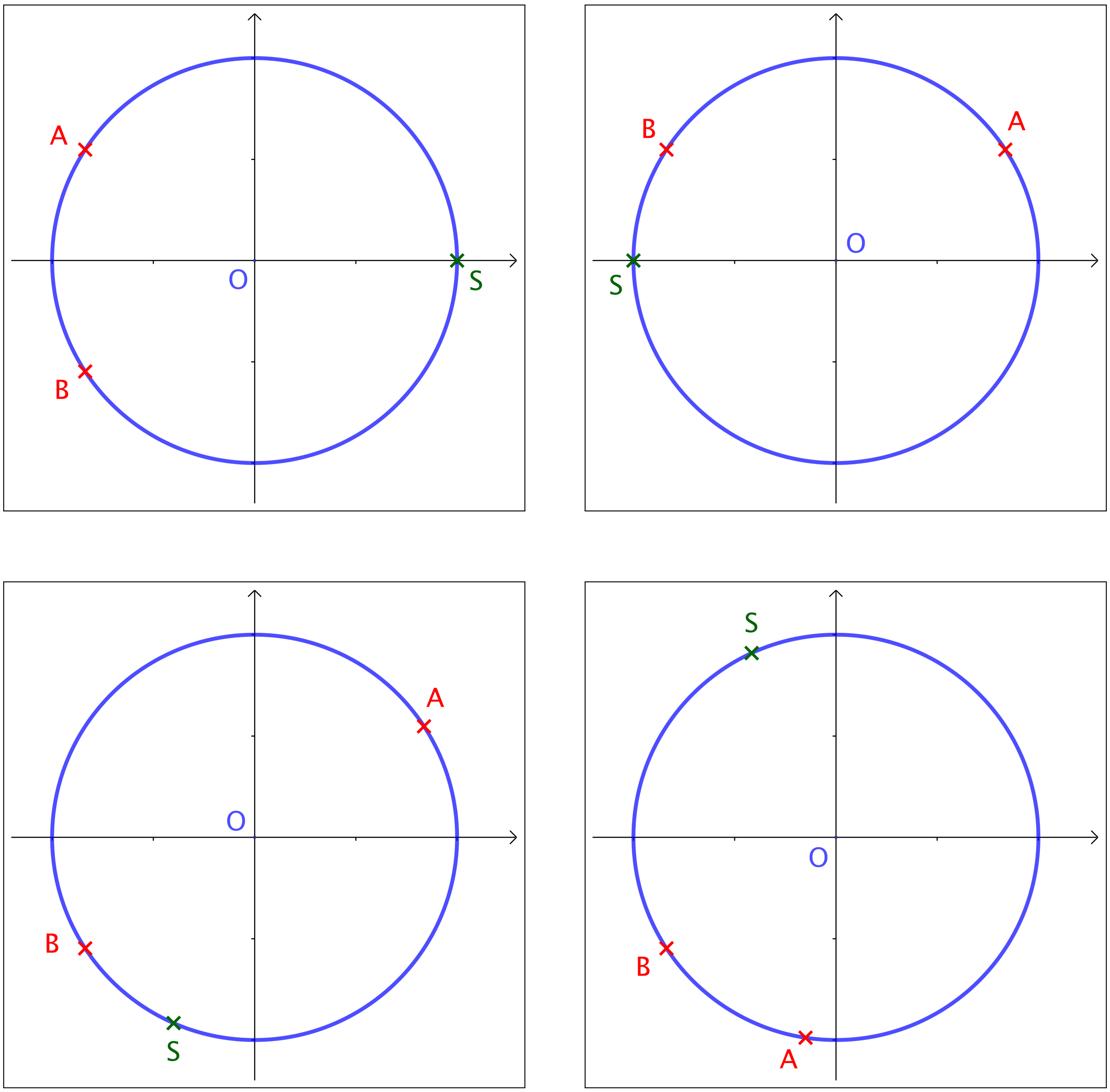
CHRISTOPHE BAL

Table des matières

Date: 20 Juillet 2019.

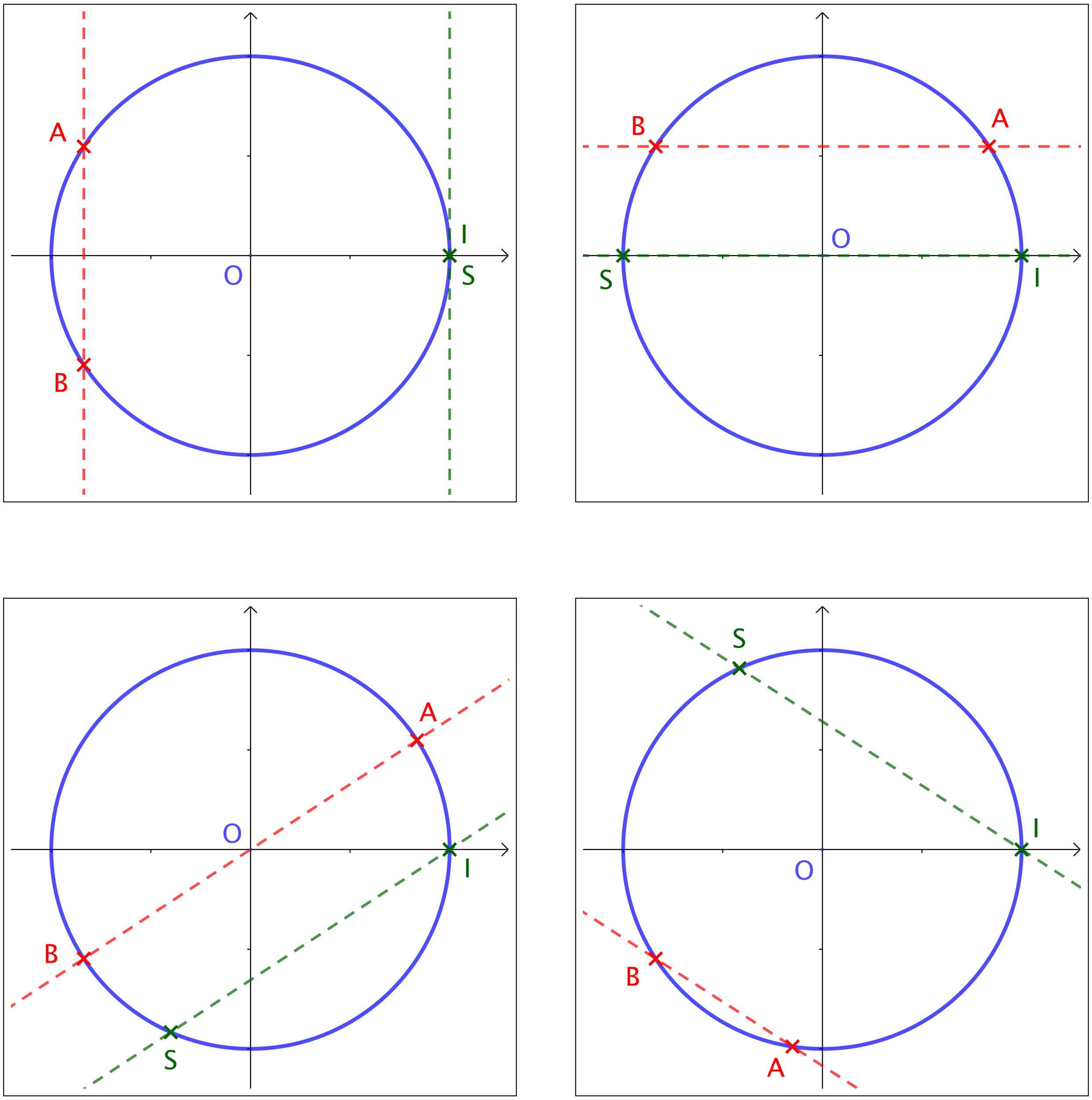
1. Addition d'angles orientés sur un cercle trigonométrique

Ci dessous, sur le cercle trigonométrique associé à un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I},\mathrm{J})$, nous avons placé les points A , B et S de sorte que $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OS}\right) = \left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OB}\right)$. Sauriez-vous conjecturer[1] un moyen simple de construire le point S à partir des points A et B *(la réponse est donnée dans la page suivante)* ?



1. Le lieu de téléchargement de ce document contient un fichier GeoGebra `base-tool.ggb` manipulable dynamiquement pour vérifier combien il est aisé de conjecturer quelque chose.

Pour mieux voir ce qu'il se passe, il suffit de tracer quelques droites. Voici ce que cela donne.



Il devient évident de conjecturer que le point S se construit géométriquement comme suit.

(1) Si $A \neq B$ alors on construit la parallèle à (AB) passant par I . Le point S est le second point d'intersection de cette parallèle avec le cercle. Notons que si $x_A = x_B$ et $y_A = -y_B$ alors $S = I$ peut être vu un point d'intersection « double ».

(2) Si $A = B$, on procède comme au point (1) mais avec la parallèle à la tangente en A au cercle. Cette situation consiste à faire *« tendre »* A vers B .

Dans ce qui suit nous allons valider cette conjecture de deux façons.

(1) La 1^{re} méthode utilise les nombres complexes.

(2) La 2^{e} passe plus brutalement via les critères de colinéarité et d'orthogonalité du plan.

2. Preuve de la conjecture via les complexes

Travaillons dans le plan complexe associé au repère $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I},\mathrm{J})$. Nous posons $z_A = \mathbf{e}^{\mathbf{i}a}$ et $z_B = \mathbf{e}^{\mathbf{i}b}$ avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons alors $z_S = \mathbf{e}^{\mathbf{i}(a+b)}$.

Cas 1. *Supposons que $a \not\equiv b\ [2\pi]$, soit $A \neq B$.*

Tout d'abord, nous avons $z_{\overrightarrow{AB}} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}b} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}a}$ et $z_{\overrightarrow{IS}} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}(a+b)} - 1$. Nous devons trouver un réel $k \in \mathbb{R}$ tel que $z_{\overrightarrow{IS}} = k z_{\overrightarrow{AB}}$. Dans la suite, nous noterons $s = a + b$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
z_{\overrightarrow{IS}} &= \mathbf{e}^{\mathbf{i}s} - 1 \\
&= \mathbf{e}^{\mathbf{i}s/2}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}s/2} - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}s/2}\right) \\
&= \mathbf{e}^{\mathbf{i}s/2} \cdot 2\mathbf{i}\sin(0,5s) \\
&= 2\mathbf{i}\sin(0,5s)\mathbf{e}^{\mathbf{i}s/2}
\end{aligned}$$

A l'aide de la même technique classique précédente, notant $d = b - a$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
z_{\overrightarrow{AB}} &= \mathbf{e}^{\mathbf{i}b} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}a} \\
&= \mathbf{e}^{\mathbf{i}a}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}d} - 1\right) \\
&= \mathbf{e}^{\mathbf{i}a} \cdot 2\mathbf{i}\sin(0,5d)\mathbf{e}^{\mathbf{i}d/2} \\
&= 2\mathbf{i}\sin(0,5d)\mathbf{e}^{\mathbf{i}s/2} && \text{En effet, } d + 2a = s.
\end{aligned}$$

Comme $d \neq 0$ par hypothèse, nous avons $z_{\overrightarrow{IS}} = k z_{\overrightarrow{AB}}$ en posant $k = \frac{\sin(0,5s)}{\sin(0,5d)}$ qui est un réel.

Cas 2. *Supposons que $a \equiv b\ [2\pi]$, soit $A = B$.*

Nous devons prouver l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{IS}$ avec ici $z_S = \mathbf{e}^{2\mathbf{i}a}$. Ceci découle de la nullité de la partie réelle du produit suivant [2].

$$\begin{aligned}
z_{\overrightarrow{OA}}\,\overline{z_{\overrightarrow{IS}}} &= \mathbf{e}^{\mathbf{i}a}\,\overline{\left(\mathbf{e}^{2\mathbf{i}a} - 1\right)} \\
&= \mathbf{e}^{\mathbf{i}a}\left(\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}a} - 1\right) \\
&= \mathbf{e}^{-\mathbf{i}a} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}a} \\
&= 2\mathbf{i}\sin a
\end{aligned}$$

3. Preuve de la conjecture via le déterminant et le produit scalaire

Dans le repère $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I},\mathrm{J})$, $A = (\cos a\,;\sin a)$ et $B = (\cos b\,;\sin b)$ avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons alors $S = (\cos(a+b)\,;\sin(a+b))$. Pour faciliter les calculs, nous posons $A = (c_A\,;s_A)$ et aussi $B = (c_B\,;s_B)$ de sorte que $S = (c_A c_B - s_A s_B\,;c_A s_B + s_A c_B)$ d'après les formules trigonométriques d'addition.

Cas 1. *Supposons que $A \neq B$.*

2. Se souvenir que $(x + \mathbf{i}y)\,\overline{(x' + \mathbf{i}y')} = xx' + yy' + \mathbf{i}(x'y - xy')$.

La colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IS}$ est justifiée par les calculs brutaux suivants *(on pourrait faire appel à un logiciel de calcul formel qui ici peut être utilisé en toute confiance).*

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{IS}\right) &= \begin{vmatrix} c_B - c_A & c_A c_B - s_A s_B - 1 \\ s_B - s_A & c_A s_B + s_A c_B \end{vmatrix} \\
&= (c_B - c_A)(c_A s_B + s_A c_B) - (s_B - s_A)(c_A c_B - s_A s_B - 1) \\
&= c_B c_A s_B + s_A c_B^2 - c_A^2 s_B - c_A s_A c_B \\
&- s_B c_A c_B + s_A s_B^2 + s_B + s_A c_A c_B - s_A^2 s_B - s_A \\
&= s_A c_B^2 - c_A^2 s_B + s_A s_B^2 + s_B - s_A^2 s_B - s_A \\
&= s_A(c_B^2 + s_B^2) - (c_A^2 + s_A^2) s_B + s_B - s_A \\
&= s_A - s_B + s_B - s_A \\
&= 0
\end{aligned}$$

Cas 2. *Supposons que* $A = B$.

En notant qu'ici $S = (c_A^2 - s_A^2\,; 2c_A s_A)$, l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{IS}$ est justifiée par les calculs suivants *(l'usage d'un logiciel de calcul formel serait un peu excessif).*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{IS} &= c_A \cdot (c_A^2 - s_A^2 - 1) + s_A \cdot 2c_A s_A \\
&= c_A \cdot (1 - s_A^2 - s_A^2 - 1) + 2c_A s_A^2 \\
&= -2c_A s_A^2 + 2c_A s_A^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

4. Toute ellipse a une structure de groupe

Le procédé de construction que nous venons de prouver dans les sections 2 et 3 se *« conserve »* par translations et dilatations verticales et horizontales. Il se trouve que ce sont ces transformations qui à partir du cercle trigonométrique permettent d'avoir une ellipse d'équation paramétrique $(x(t), y(t)) = (x_0 + a\cos t, y_0 + b\sin t)$. Nous pouvons donc munir toute ellipse d'équation paramétrique $(x(t), y(t)) = (x_0 + a\cos t, y_0 + b\sin t)$ d'une structure de groupe isomorphe à celle de $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\,;+)$, et ceci avec un procédé géométrique simple pour *« additionner »* sur l'ellipse. Que c'est joli !