

# BROUILLON – CONSTRUCTION SIMPLE DU LOGARITHME ET DE L'EXPONENTIELLE

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



## TABLE DES MATIÈRES

1. Ingrédients utilisés	2
1.1. Une once d’analyse réelle	2
1.2. Un iota de calcul intégral	2
2. Au commencement était le logarithme népérien	2
2.1. Définition intégrale	2
2.2. Equation fonctionnelle	3
2.3. Tableau de variations	5
3. Puis vint l’exponentielle	5
3.1. Inverser le logarithme népérien	5
3.2. Equation fonctionnelle	6
3.3. Tableau de variations (sans dérivée)	7
3.4. Continuité, puis dérivabilité	7

Ce texte construit les fonctions  $\ln$ , logarithme népérien, et  $\exp$ , exponentielle, le plus simplement possible en utilisant juste des notions connues d'un lycéen scientifique en 2025.

## 1. INGRÉDIENTS UTILISÉS

Dans ce document, nous supposons connues les notions de limite, de fonctions monotones, de dérivabilité, de continuité, et d'intégrale d'une fonction réelle continue. Dans les sous-sections suivantes, où  $I \subseteq \mathbb{R}$  désignera toujours un intervalle, nous donnons des faits que nous utiliserons sans les redémontrer.

### 1.1. Une once d'analyse réelle.

**Fait 1** (Théorème des gendarmes, ou du sandwich). *Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  trois fonctions telles que  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  sur  $I$ , ainsi que  $a \in I$ . Nous avons l'implication logique suivante.*

$$\left[ \exists \ell \in \mathbb{R} \text{ tel que } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} f(x) = \ell, \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} h(x) = \ell \right] \implies \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} g(x) = \ell$$

**Fait 2** (TVI, ou théorème des valeurs intermédiaires). *Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. L'ensemble  $f[I] = \{f(x) \text{ pour } x \in I\}$  est un intervalle ( $f[I]$  est l'ensemble des images par  $f$  des réels appartenant à  $I$ ).*

### 1.2. Un iota de calcul intégral.

**Fait 3** (Sens d'intégration). *Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.  $\forall (a; b) \in I^2$ , nous avons :  $\int_b^a f(t) dt = -\int_a^b f(t) dt$ .*

**Fait 4** (Relation de Chasles intégrale). *Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.  $\forall (a; b; c) \in I^3$ , nous avons :  $\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt$ .*

**Fait 5** (Stricte positivité de l'intégrale). *Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  une fonction continue, et strictement positive.  $\forall (a; b) \in I^2$  tel que  $a < b$ , nous avons :  $\int_a^b f(t) dt > 0$ .*

**Fait 6** (Croissance de l'intégrale). *Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues. Si  $\forall x \in I$ ,  $f(x) \leq g(x)$ , alors  $\forall (a; b) \in I^2$  tel que  $a \leq b$ , nous avons :  $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$ .*

## 2. AU COMMENCEMENT ÉTAIT LE LOGARITHME NÉPÉRIEN

### 2.1. Définition intégrale.

**Définition 7.** *Le « logarithme népérien » est la fonction  $\ln$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ . Notons que  $\ln 1 = 0$ .*

**Fait 8** (Monotonie sans dérivée). *La fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .*

*Démonstration.* Soit  $(a; b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  tel que  $b > a$ . Ce qui suit permet de conclure.

$$\begin{aligned} \ln b - \ln a &= \int_1^b \frac{1}{t} dt - \int_1^a \frac{1}{t} dt \\ &= \int_a^1 \frac{1}{t} dt + \int_1^b \frac{1}{t} dt && \left. \begin{array}{l} \text{Voir le fait 3.} \\ \text{Voir le fait 4.} \end{array} \right\} \\ &= \int_a^b \frac{1}{t} dt && \left. \begin{array}{l} \text{Voir le fait 5.} \end{array} \right\} \\ &> 0 \end{aligned}$$

□

**Fait 9.**  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\ln' x = \frac{1}{x}$  (ceci redonne la stricte croissance de  $\ln$ ).

*Démonstration.* Un argument massif est l'emploi du théorème fondamental de l'analyse. Il se trouve que nous pouvons démontrer  $\ln' x = \frac{1}{x}$  à la main.<sup>1</sup> Pour cela, considérons le taux d'accroissement  $T(h) = \frac{\ln(a+h) - \ln a}{h}$  où  $a > 0$  est fixé, et  $h \in ]-a; a[ - \{0\}$  variable, puis faisons le petit calcul suivant.

$$\begin{aligned} T(h) &= \frac{1}{h} \left( \int_1^{a+h} \frac{1}{t} dt - \int_1^a \frac{1}{t} dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_a^{a+h} \frac{1}{t} dt \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{ Voir les faits 3 et 4.}$$

Nous avons ensuite les implications logiques suivantes lorsque  $h > 0$ .

$$\begin{aligned} & \left[ x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^* \text{ est strictement décroissance} \right] \\ \Rightarrow & \forall x \in [a; a+h], \frac{1}{a+h} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a} \\ \Rightarrow & \int_a^{a+h} \frac{1}{a+h} dt \leq \int_a^{a+h} \frac{1}{t} dt \leq \int_a^{a+h} \frac{1}{a} dt \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{ Voir le fait 6 } (a+h > a, \text{ car } h > 0). \\ \Rightarrow & \frac{h}{a+h} \leq hT(h) \leq \frac{h}{a} \\ \Rightarrow & \frac{1}{a+h} \leq T(h) \leq \frac{1}{a} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} h > 0 \end{aligned}$$

Via le théorème des gendarmes, voir le fait 1, nous obtenons :  $\lim_{h \rightarrow 0^+} T(h) = \frac{1}{a}$ .

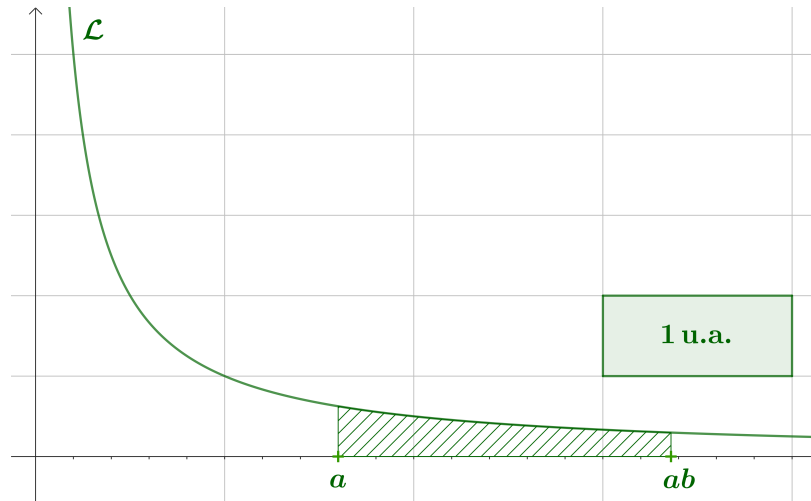
Lorsque  $h < 0$ , nous obtenons :  $\frac{1}{a} \leq T(h) \leq \frac{1}{a+h}$ , puis  $\lim_{h \rightarrow 0^-} T(h) = \frac{1}{a}$ .

Finalement,  $\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \frac{1}{a}$ , ce qui achève la démonstration. □

## 2.2. Equation fonctionnelle.

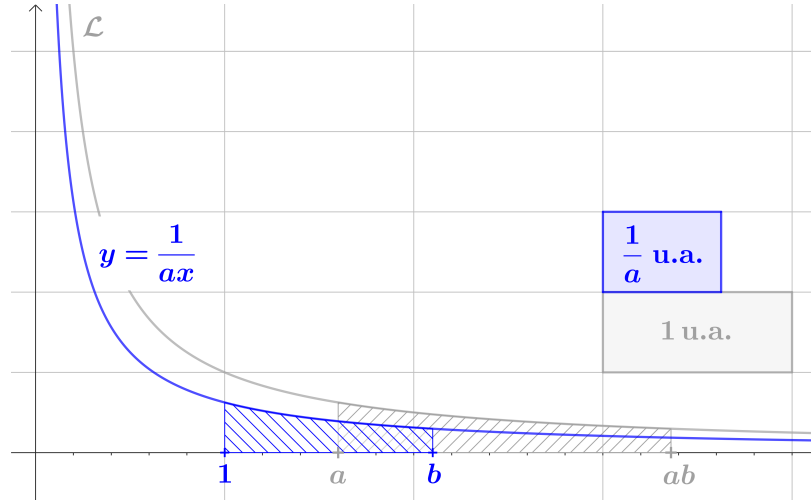
**Fait 10.**  $\forall (a; b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ ,  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ .

*Démonstration.* Par définition de  $\ln$ , nous avons  $\ln(ab) = \ln a + \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt$  (voit le fait 4). Analysons  $\mathcal{I}_a^{ab} = \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt$ . Pour cela, notons  $\mathcal{L}$  la représentation graphique de  $\ln$ .

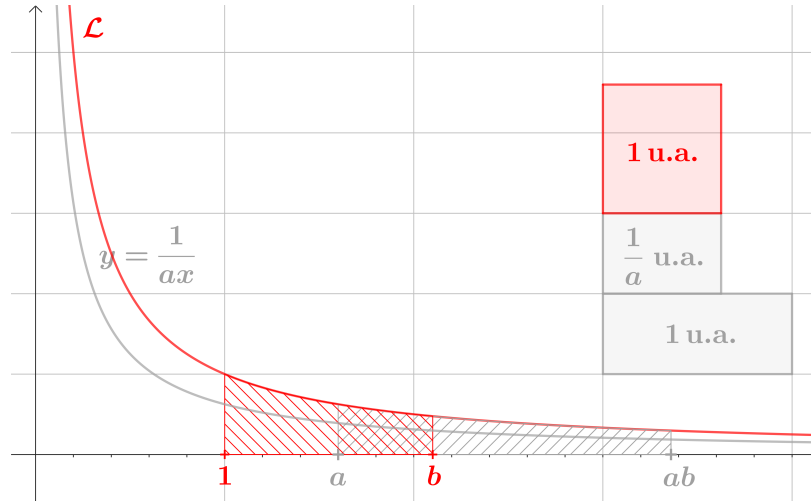


1. Ce qui suit s'adapte sans effort à toute fonction monotone, et s'élargit ensuite en une preuve du théorème fondamental de l'analyse.

Une dilatation horizontale  $\phi$  de coefficient  $\frac{1}{a}$  transforme  $M(x_M; y_M)$  en  $M'(\frac{x_M}{a}; y_M)$ . Appliquons  $\phi$  à la surface associée à l'intégrale  $\mathcal{I}_a^{ab}$ , ainsi qu'à la fonction inverse<sup>2</sup> qui devient  $f : x \mapsto \frac{1}{ax}$ , puisque nous devons avoir  $f(\frac{x}{a}) = \frac{1}{x}$ . Il est important de noter qu'un rectangle d'une unité d'aire est transformé par  $\phi$  en un rectangle de  $\frac{1}{a}$  unité d'aire.



Une dilatation verticale  $\psi$  de coefficient  $a$  transforme  $M(x_M; y_M)$  en  $M'(x_M; ay_M)$ . Appliquons  $\psi$  à la surface associée à l'intégrale  $\int_1^b \frac{1}{at} dt$ , ainsi qu'à la fonction  $f$  qui devient la fonction inverse. Notons qu'un rectangle de  $\frac{1}{a}$  unité d'aire est transformé par  $\psi$  en un rectangle d'une unité d'aire.



Nous venons de justifier que  $\mathcal{I}_a^{ab} = \int_1^b \frac{1}{t} dt$ , d'où  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$  comme annoncé.  $\square$

**Remarque 11** (Aux bourbakistes). *Ce qui a été dit ci-dessus se rédige rigoureusement, sans aucun souci, via des sommes de Riemann, par exemple.<sup>3</sup> La démonstration suivante ne souffre d'aucun doute, mais la donner sans plus d'explication serait bien dommage (la première approche évite toute interprétation mystique de l'équation fonctionnelle  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ ).*

*Démonstration alternative* Nous allons justifier que  $\forall (a; b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ ,  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$  uniquement via l'analyse réelle. Comme les propriétés de la fonction  $\ln$  nécessitent d'avoir une

2. Noter l'abus de langage consistant à ne pas rappeler que nous travaillons juste sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

3. N'oublions pas que nous disposons d'au moins trois jolies théories de l'intégration : celle de Riemann, celle de Lebesgues, et la merveilleuse théorie de Kurzweil et Henstock.

seule variable, il devient naturel de fixer  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , puis de considérer la fonction  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \ln(ax) - \ln a - \ln x$ . La seule possibilité qui s'offre à nous est de dériver :  $f'(x) = a \cdot \frac{1}{ax} - \frac{1}{x} = 0$ . Or, une fonction de dérivée nulle sur un intervalle  $I$  est forcément constante sur  $I$ , donc  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x) = f(1)$ , soit  $f(x) = 0$ . Mission accomplie!  $\square$

**Fait 12.**  $\forall (a; n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{Z}$ , nous avons  $\ln(a^n) = n \ln a$ , et  $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$ .

*Démonstration.* De  $\ln(a \cdot \frac{1}{a}) = \ln a + \ln(\frac{1}{a})$ , nous déduisons  $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$ . Quant à l'identité  $\ln(a^n) = n \ln a$ , une récurrence donne le résultat sur  $\mathbb{N}$ , puis  $\ln(a^{-n}) = -\ln(a^n)$  permet de passer à  $\mathbb{Z}_-$ .  $\square$

### 2.3. Tableau de variations.

**Fait 13.** La fonction  $\ln$  admet le tableau de variations suivant.

$x$	0	$+\infty$
$\ln x$	$-\infty$	$+\infty$

*Démonstration.* La monotonie est donnée par le fait 8 ou 9. Le calcul des limites se fait à la main sans souci, en notant au préalable que, par stricte croissance,  $\ln 10 > \ln 1$  donne  $\ln 10 > 0$ .

- Soit  $A \in \mathbb{R}$ . Il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \ln 10 > A$ . Or, pour  $x > 10^n$ , nous avons  $\ln x > \ln(10^n)$ , puis  $\ln x > A$ , via  $\ln(10^n) = n \ln 10$ . En résumé,  $\forall A \in \mathbb{R}$ ,  $\exists x_0 \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $x > x_0$  implique  $\ln x > A$ . Ceci est la définition de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ .
- Pour la limite en  $0^+$ , le plus efficace est de passer via  $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$  qui donne  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$ . On peut aussi le faire à la main via  $10^{-n}$ .  $\square$

## 3. PUIS VINT L'EXPONENTIELLE

### 3.1. Inverser le logarithme népérien.

**Fait 14.**  $\forall q \in \mathbb{R}$ ,  $\exists ! p \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $\ln p = q$ .

*Démonstration.* Nous connaissons le tableau de variations de  $\ln$ , voir le fait 13. De plus,  $\ln$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , car dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  selon le fait 9. Pour conclure, il suffit d'appliquer le TVI, voir le fait 2.  $\square$

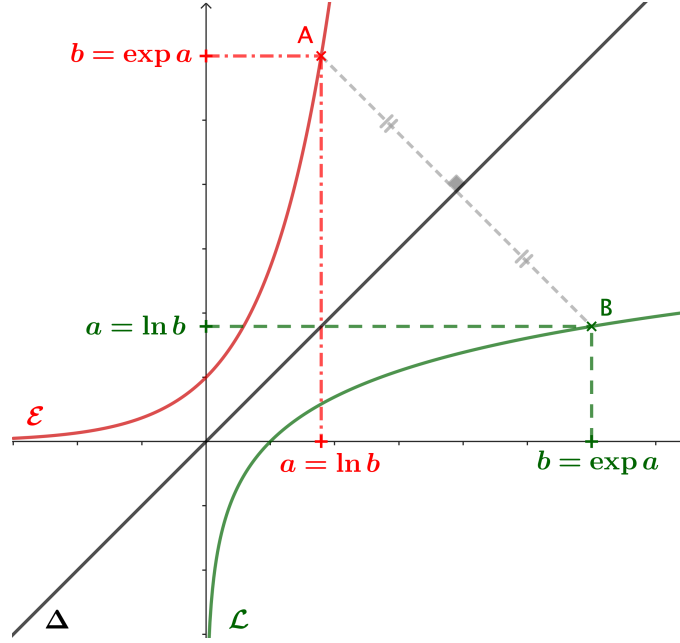
**Définition 15.**  $\forall q \in \mathbb{R}$ , l'unique solution de  $\ln x = q$  est notée  $\exp q$ . Ceci définit une fonction  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  nommée « exponentielle ». Notons que  $\exp 0 = 1$ .

**Fait 16.**  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\ln(\exp x) = x$ , et  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\exp(\ln x) = x$ .

*Démonstration.* Nous devons juste vérifier la 2<sup>e</sup> identité. En appliquant  $\ln(\exp X) = X$  à  $X = \ln x$ , nous obtenons  $\ln(\exp(\ln x)) = \ln x$ . Par injectivité de la fonction  $\ln$ , nous arrivons à  $\exp(\ln x) = x$  comme souhaité.  $\square$

**Fait 17.** Soient  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{E}$  les représentations graphiques respectives des fonctions  $\ln$  et  $\exp$ . Les courbes  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{E}$  sont symétriques par rapport à la 1<sup>re</sup> bissectrice  $\Delta : y = x$ .

*Démonstration.* Considérons  $A(a; \exp a) \in \mathcal{E}$ . Notant  $b = \exp a$ , nous savons que  $a = \ln b$ . Ceci amène à considérer  $B(b; \ln b) \in \mathcal{L}$ , c'est-à-dire  $B(\exp a; a)$ . Or,  $A(x_A; y_A)$  et  $B(y_A; x_A)$  sont symétriques par rapport à  $\Delta$  (coordonnées d'un milieu, et critère d'orthogonalité) : voir le graphique ci-dessous. Réciproquement, il faut considérer  $B(b; \ln b) \in \mathcal{L}$ . Ce cas se traite de façon similaire.



□

### 3.2. Equation fonctionnelle.

**Fait 18.**  $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\exp(a + b) = \exp a \cdot \exp b$ .

*Démonstration.* L'injectivité de  $\ln$  et les calculs suivants permettent de conclure.

$$\begin{aligned}
 & \ln(\exp(a + b)) \\
 = & a + b && \left. \begin{array}{l} \text{Définition de la fonction exp.} \\ \text{Idem.} \end{array} \right\} \\
 = & \ln(\exp a) + \ln(\exp b) \\
 = & \ln(\exp a \cdot \exp b) && \left. \begin{array}{l} \text{Équation fonctionnelle de la fonction ln.} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

□

**Fait 19.**  $\forall (a; n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{Z}$ , nous avons  $(\exp a)^n = \exp(na)$ , et  $\frac{1}{\exp a} = \exp(-a)$ .

*Démonstration.* Deux méthodes s'offrent à nous.

**Méthode 1.** En utilisant le fait 12 (identités vérifiées par  $\ln$ ).

- $\ln(\alpha^n) = n \ln \alpha$  appliquée à  $\alpha = \exp a$  donne  $\ln((\exp a)^n) = n \ln(\exp a) = na$ . Ensuite, une application de  $\exp$  donne  $\exp(\ln((\exp a)^n)) = \exp(na)$ , soit  $(\exp a)^n = \exp(na)$ .
- $\ln(\frac{1}{\alpha}) = -\ln \alpha$  appliquée à  $\alpha = \exp a$  donne  $\ln(\frac{1}{\exp a}) = -\ln(\exp a) = -a$ . Ensuite, une application de  $\exp$  donne  $\exp(\ln(\frac{1}{\exp a})) = \exp(-a)$ , soit  $\frac{1}{\exp a} = \exp(-a)$ .


**Méthode 2.** Sans passer via le fait 12.

- De  $\exp(a - a) = \exp a \cdot \exp(-a)$ , nous déduisons  $\frac{1}{\exp a} = \exp(-a)$ .
- Pour l'identité  $(\exp a)^n = \exp(na)$ , une récurrence donne le résultat sur  $\mathbb{N}$ , puis le passage à  $\mathbb{Z}_-$  se fait via  $(\exp a)^{-n} = \frac{1}{(\exp a)^n}$ .

□

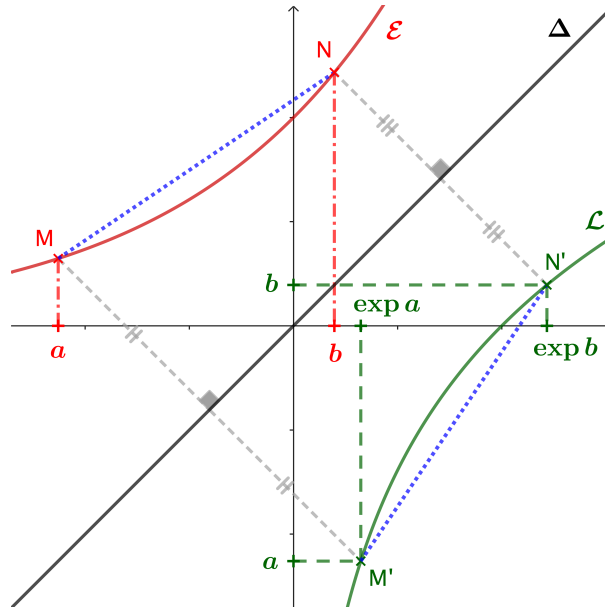
### 3.3. Tableau de variations (sans dérivée).

**Fait 20.** La fonction  $\exp$  admet le tableau de variations suivant.

$x$	0	$+\infty$
$\exp x$	0 	$+\infty$

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{E}$  les représentations graphiques respectives des fonctions  $\ln$  et  $\exp$ , ainsi que  $\Delta : y = x$ .

- La monotonie de  $\exp$  découle de celle de  $\ln$ , et de la symétrie révélée dans le fait 17. En effet, dans la figure suivante, nous partons de  $a < b$ . Comme  $x(M) < x(N)$ , nous avons  $y(M') < y(N')$  par symétrie. Il est immédiat de conclure.



- La limite en  $+\infty$  découle rapidement de  $\exp(\ln(10^n)) = 10^n$ , et de la stricte croissance de  $\exp$  qui donne  $\exp x > 10^n$  dès que  $x > \ln(10^n)$ .
- Pour la limite en  $-\infty$ , le plus efficace est de passer via  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$  pour aboutir à  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\exp x} \right)$ . On peut aussi le faire à la main via  $\ln(10^{-n})$ .  $\square$

### 3.4. Continuité, puis dérivabilité.

**Fait 21.**  $\exp$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Fixons  $x_0 \in \mathbb{R}$ , et considérons  $\epsilon \in ]0; \exp(x_0)[$  quelconque. Nous devons trouver  $\eta \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $x_0 - \eta < x < x_0 + \eta$  implique  $\exp(x_0) - \epsilon < \exp x < \exp(x_0) + \epsilon$ . Voici comment faire.

- Par stricte croissance de  $\ln$  et  $\exp$ , nous avons l'équivalence logique suivante qui montre la voie à suivre.  

$$0 < \exp(x_0) - \epsilon < \exp x < \exp(x_0) + \epsilon \iff \ln(\exp(x_0) - \epsilon) < x < \ln(\exp(x_0) + \epsilon)$$
- La stricte croissance et la continuité de  $\ln$ , via le TVI, voir le fait 2, impliquent que  $\ln(] \exp(x_0) - \epsilon; \exp(x_0) + \epsilon[) = ] \ln(\exp(x_0) - \epsilon); \ln(\exp(x_0) + \epsilon)[$ . Nous noterons  $I_\epsilon$  cet ensemble non vide.

- De  $x_0 = \ln(\exp x_0)$ , nous déduisons que  $x_0 \in I_\epsilon$ , puis le point précédent donne  $\eta \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $]x_0 - \eta; x_0 + \eta[ \subseteq I_\epsilon$ .
- Les implications logiques suivantes permettent de conclure.

$$x_0 - \eta < x < x_0 + \eta$$

$$\Rightarrow x \in I_\epsilon$$

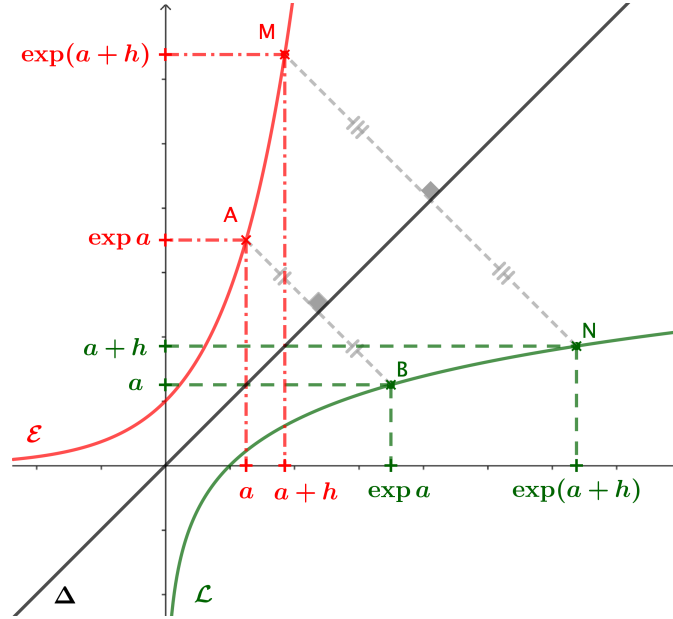
$$\Rightarrow \ln(\exp(x_0) - \epsilon) < x < \ln(\exp(x_0) + \epsilon) \quad \left. \vphantom{\ln(\exp(x_0) - \epsilon)} \right\} \text{Stricte croissante de exp.}$$

$$\Rightarrow \exp(x_0) - \epsilon < \exp x < \exp(x_0) + \epsilon$$

□

**Fait 22.**  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp' x = \exp x$ .

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{E}$  les représentations graphiques respectives des fonctions  $\ln$  et  $\exp$ . Nous savons que  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{E}$  sont symétriques par rapport à la droite  $\Delta : y = x$ . Pour  $h \neq 0$ , considérons  $A(a; \exp a) \in \mathcal{E}$  et  $M(a+h; \exp(a+h)) \in \mathcal{E}$ . Par symétrie, nous avons  $B(\exp a; a) \in \mathcal{L}$  et  $N(\exp(a+h); a+h) \in \mathcal{L}$ . Nous arrivons à la situation graphique suivante.



Le taux d'accroissement  $T(h) = \frac{\exp(a+h) - \exp a}{h}$  est la pente  $m(AM)$  de la droite  $(AM)$ , or  $m(AM) = \frac{1}{m(BN)}$  par raison de symétrie. En raisonnant sur  $\mathcal{L}$ , si  $h$  tend vers 0, nous avons  $x(N)$  qui tend vers  $x(B)$  par continuité de  $\exp$ , voir le fait 21. Comme  $\ln$  est dérivable en  $x(B)$ , nous avons  $\lim_{h \rightarrow 0} m(BN) = \ln'(x(B)) = \frac{1}{\exp a}$ , puis  $\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \exp a$  comme souhaité. □