

# BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



## TABLE DES MATIÈRES

**Fait 1.** Soit  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  une  $n$ -ligne. La fonction qui à un point  $\Omega$  du plan associe  $\mu_1^n(\Omega; \mathcal{L}) = \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}})$  est indépendante du point  $\Omega$ . Dans la suite, cette quantité indépendante de  $\Omega$  sera notée  $\mu_1^n(\mathcal{L})$ .

Démonstration. Soit  $M$  un autre point du plan.

$$\begin{aligned}
& \mu_1^n(\Omega; \mathcal{L}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{M A'_i}, \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{M A'_{i+1}}) \quad \text{(Cette bonne vieille relation de Chasles.)} \\
&= \sum_{i=1}^n \left[ \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{M A'_{i+1}}) + \det(\overrightarrow{M A'_i}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det(\overrightarrow{M A'_i}, \overrightarrow{M A'_{i+1}}) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{M A'_{i+1}}) + \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{M A'_i}, \overrightarrow{\Omega M}) + \mu_1^n(M; \mathcal{L}) \\
&= \mu_1^n(M; \mathcal{L}) + \sum_{i=2}^{n+1} \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{M A'_i}) - \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{M A'_i}) \\
&= \mu_1^n(M; \mathcal{L}) + \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{M A'_{n+1}}) - \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{M A'_1}) \quad \text{A}'_{n+1} = A'_1 \\
&= \mu_1^n(M; \mathcal{L}) \quad \square
\end{aligned}$$

**Fait 2.** Soit  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  une  $n$ -ligne. Pour  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , la  $n$ -ligne  $\mathcal{L}_j = B_1 B_2 \cdots B_n$ , où  $B_i = A'_{k+i-1}$ , vérifie  $\mu_1^n(\mathcal{L}) = \mu_1^n(\mathcal{L}_k)$ . Dans la suite, cette quantité commune sera notée  $\mu(\mathcal{L})$ .

Démonstration. Il suffit de s'adonner à un petit jeu sur les indices de sommation.  $\square$

**Fait 3.** Soit  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  une  $n$ -ligne. La  $n$ -ligne  $\mathcal{L}^{\text{op}} = B_1 B_2 \cdots B_n$ , où  $B_i = A_{n+1-i}$ , vérifie  $\mu(\mathcal{L}^{\text{op}}) = -\mu(\mathcal{L})$ .

Démonstration. Soit  $\Omega$  un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned}
& \mu(\mathcal{L}^{\text{op}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega B'_i}, \overrightarrow{\Omega B'_{i+1}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_{n+1-i}}, \overrightarrow{\Omega A'_{n-i}}) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \det(\overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}, \overrightarrow{\Omega A'_j}) \quad \text{A}'_0 = A'_n \text{ et } A'_1 = A'_{n+1} \\
&= \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}, \overrightarrow{\Omega A'_j}) \\
&= - \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_j}, \overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}) \\
&= -\mu(\mathcal{L}) \quad \square
\end{aligned}$$

**Fait 4.** Soit  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  une  $n$ -ligne. La quantité  $\frac{1}{2}|\mu(\mathcal{L})|$  ne dépend ni du sens de parcours de  $\mathcal{L}$ , ni du point de départ choisi.<sup>1</sup> Elle sera notée  $\text{AireGe}(\mathcal{L})$ , et nommée « aire généralisée » de la  $n$ -ligne  $\mathcal{L}$ .

Démonstration. C'est une conséquence directe des faits 2 et 3.  $\square$

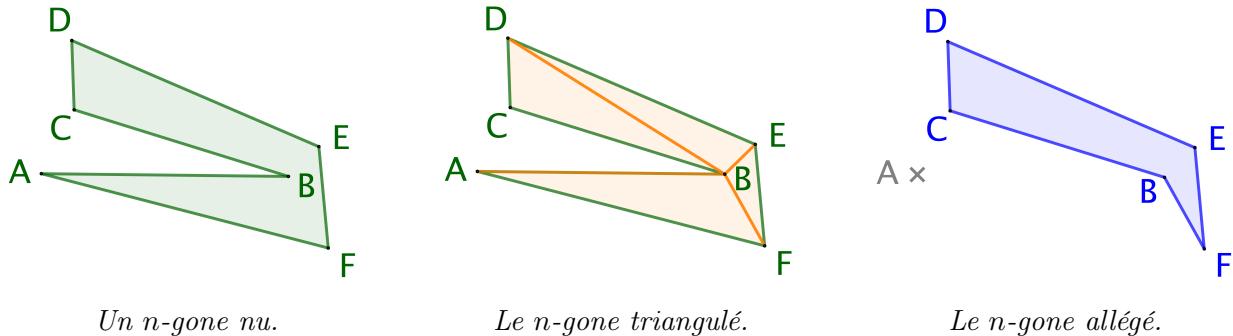
---

1. Le lecteur pardonnera les abus de langage utilisés.

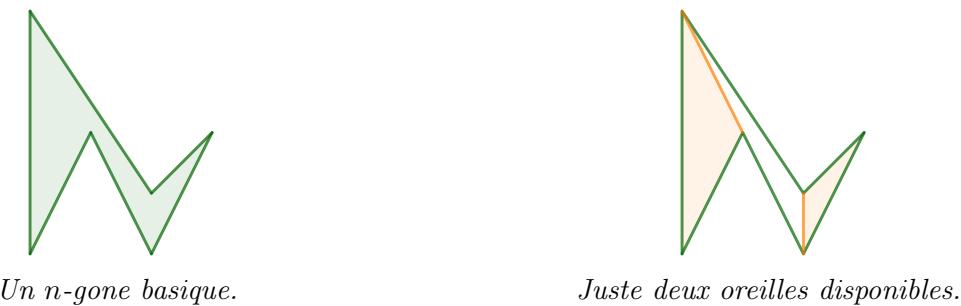
Pour notre démonstration finale, nous aurons besoin de savoir que  $\text{AireGe}(\mathcal{P}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$  pour tout  $n$ -gone  $\mathcal{P}$ .<sup>2</sup> Ceci est évident dans le cas convexe, car il suffit de choisir l'isobarycentre  $G$  de  $A_1, A_2, \dots, A_n$  pour le calcul de  $\text{AireGe}(\mathcal{P})$  : en effet, avec ce choix, tous les déterminants  $\det(\overrightarrow{GA'_i}, \overrightarrow{GA'_{i+1}})$  ont le même signe. Dans le cas non-convexe, les choses se compliquent a priori, car nous ne maîtrisons plus les signes des déterminants. Heureusement nous avons le résultat fort suivant qui est un pas important pour atteindre notre but.

**Fait 5.** Soit un  $n$ -gone  $\mathcal{P}$ . On suppose la  $n$ -ligne  $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$  associée à  $\mathcal{P}$  telle que les points  $A_1, A_2, \dots, A_n$  soient parcourus dans le sens trigonométrique, ou anti-horaire. Une telle  $n$ -ligne sera dite « positive ».<sup>3</sup> Sous cette hypothèse, nous avons  $\mu(\mathcal{L}) \geq 0$ .

*Démonstration.* Le théorème de triangulation affirme que tout  $n$ -gone est triangulable comme dans l'exemple très basique suivant qui laisse envisager une démonstration par récurrence en retirant l'un des triangles ayant deux côtés correspondant à deux côtés consécutifs du  $n$ -gone (pour peu qu'un tel triangle existe toujours).



Le théorème de triangulation admet une forme forte donnant une décomposition contenant un triangle formé de deux côtés consécutifs du  $n$ -gone.<sup>4</sup> Nous dirons qu'une telle décomposition est « à l'écoute ». Ce très mauvais jeu de mots fait référence à la notion sérieuse « d'oreille » pour un  $n$ -gone : une oreille est un triangle inclus dans le  $n$ -gone, et formé de deux côtés consécutifs du  $n$ -gone. L'exemple suivant donne un  $n$ -gone n'ayant que deux oreilles : ceci montre que l'existence d'une oreille ne va pas de soi.<sup>5</sup>



Nous allons raisonner par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ .

- **Cas de base.** Soit  $ABC$  un triangle. Dire que les sommets  $A, B$  et  $C$  sont parcourus dans le sens trigonométrique, c'est savoir que  $\mu(ABC) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) > 0$ .

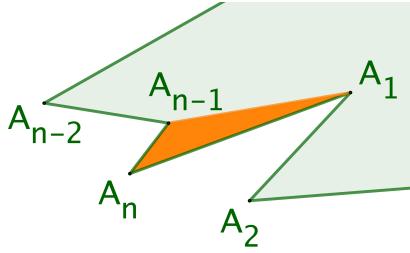
2. Nous obtenons ainsi la généralisation de l'aire géométrique usuelle au cas des polygones croisés.

3. Bien noté que cette notion ne peut exister lorsqu'on considère un polygone croisé. De façon cachée, nous utilisons le célèbre théorème de Jordan, dans sa forme polygonale.

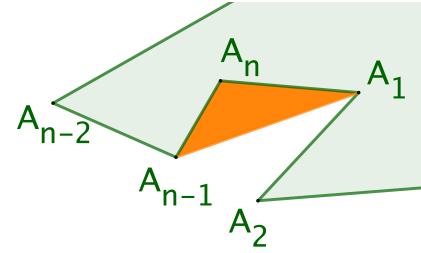
4. En pratique, cette forme forte est peu utile, car elle aboutit à un algorithme de recherche trop lent.

5. On démontre que tout  $n$ -gone admet au minimum deux oreilles.

- **Héritéité.** Soient un  $n$ -gone  $\mathcal{P}$ , avec  $n \in \mathbb{N}_{>3}$ , et  $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$  une  $n$ -ligne positive qui lui est associée. On peut supposer que  $A_{n-1}A_nA_1$  est une oreille du  $n$ -gone  $\mathcal{P}$ .



$A_{n-1}A_nA_1$  est une oreille.



$A_{n-1}A_nA_1$  n'est pas une oreille.

Notons  $\mathcal{P}'$  le  $k$ -gone associé à la  $k$ -ligne  $\mathcal{L}' = A_1 \cdots A_{n-1}$  où  $k = n - 1$  vérifie  $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ . Par hypothèse,  $\mathcal{L}'$  est positive. Nous arrivons aux calculs élémentaires suivants en utilisant  $\Omega = A_1$  comme point de calcul de  $\mu(\mathcal{L})$ .

$$\begin{aligned}
 & \mu(\mathcal{L}) \\
 &= \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_1A'_j}, \overrightarrow{A_1A'_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1A'_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A'_n}) + \det(\overrightarrow{A_1A'_n}, \overrightarrow{A_1A'_{n+1}}) \\
 &= \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_1A_j}, \overrightarrow{A_1A_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A_n}) + \det(\overrightarrow{A_1A_n}, \overrightarrow{A_1A_1}) \\
 &= \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_1A_j}, \overrightarrow{A_1A_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A_n}) \quad \left. \begin{array}{l} \det(\overrightarrow{A_1A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A_1}) = 0 \\ \text{pour } i \leq n \end{array} \right. \\
 &= \mu(\mathcal{L}') + \mu(A_{n-1}A_nA_1)
 \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, nous savons que  $\mu(\mathcal{L}') \geq 0$ , et comme  $A_{n-1}A_nA_1$  est une oreille de  $\mathcal{P}$ , la 3-ligne  $A_{n-1}A_nA_1$  est forcément positive, d'où  $\mu(A_{n-1}A_nA_1) \geq 0$  d'après le cas de base. Nous arrivons bien à  $\mu(\mathcal{L}) \geq 0$ , ce qui permet de finir aisément la démonstration par récurrence.

□

**Fait 6.** Pour tout  $n$ -gone  $\mathcal{P}$ , nous avons :  $\text{AireGe}(\mathcal{P}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$ .

*Démonstration.* Nous donnons juste les deux clés pour une preuve par récurrence.

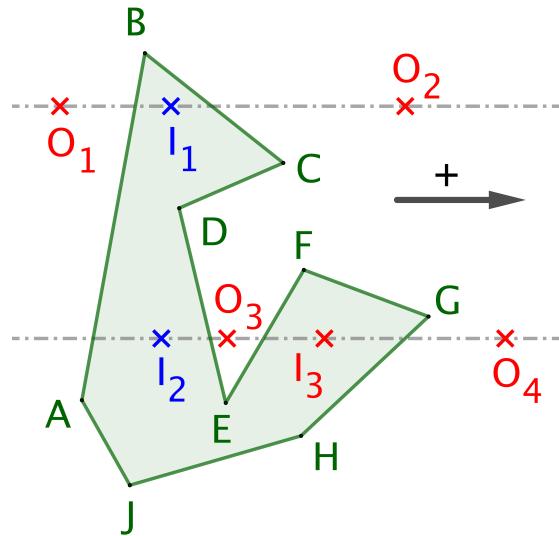
- **Cas de base.** L'égalité est immédiate pour les triangles.
- **Héritéité.** Reprenons les notations de la démonstration du fait 5 :  $\mathcal{P}$  est un  $n$ -gone, avec  $n \in \mathbb{N}_{>3}$ ,  $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$  une  $n$ -ligne positive qui lui est associée,  $A_{n-1}A_nA_1$  une oreille du  $n$ -gone  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}'$  le  $k$ -gone associé à la  $k$ -ligne  $\mathcal{L}' = A_1 \cdots A_{n-1}$  où  $k = n - 1$  vérifie  $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ , avec  $\mathcal{L}'$  positive. Nous arrivons aux calculs élémentaires suivants.

$$\begin{aligned}
 & \text{Aire}(\mathcal{P}) \\
 &= \text{Aire}(\mathcal{P}') + \text{Aire}(A_{n-1}A_nA_1) \\
 &= \text{AireGe}(\mathcal{P}') + \text{AireGe}(A_{n-1}A_nA_1) \\
 &= \frac{1}{2}(\mu(\mathcal{L}') + \mu(A_{n-1}A_nA_1)) \\
 &= \frac{1}{2}\mu(\mathcal{L}) \\
 &= \text{AireGe}(\mathcal{P})
 \end{aligned}$$

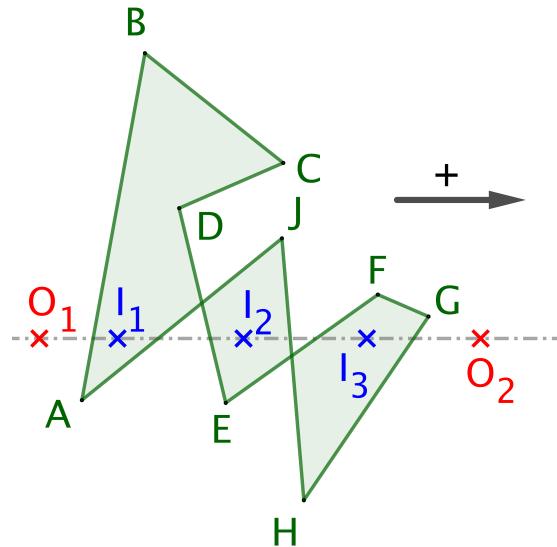
)  $A_{n-1}A_nA_1$  est une oreille de  $\mathcal{P}$ .  
 ) Hypothèse de récurrence et cas de base.  
 ) Voir le fait 5.  
 ) Comme dans la preuve du fait 5.  
 ) Voir le fait 5.

□

Avant d'avancer, nous devons mieux comprendre le calcul de  $\text{AireGe}(\mathcal{L})$  pour une  $n$ -ligne  $\mathcal{L}$  correspondant à un polygone croisé. Pour cela commençons par expliquer le coloriage standard de la surface d'un polygone croisé, ou non, comme dans les images annotées ci-dessous qui ont été produites via GeoGebra.

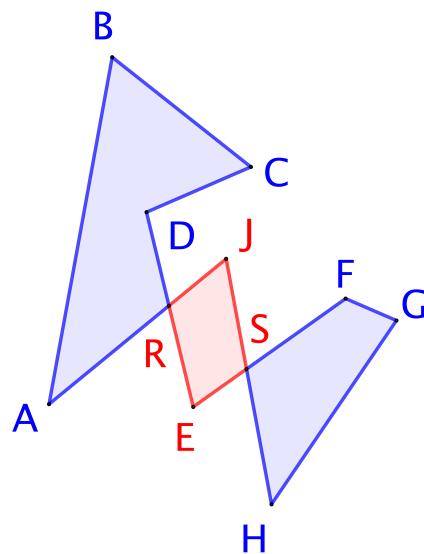


Cas non croisé.



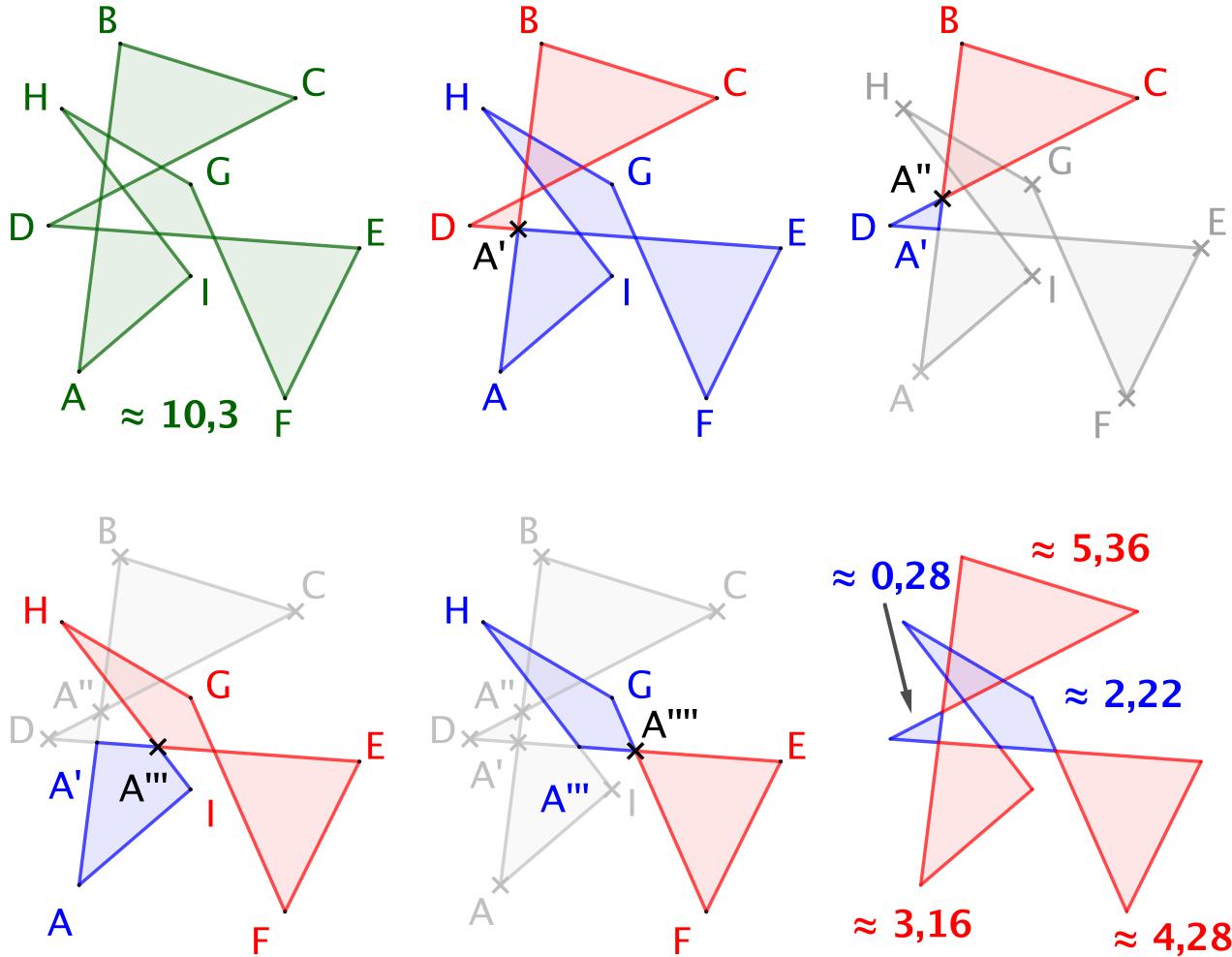
Cas croisé.

HHH



$$9,4 - 2,41 + 4,84 = 11,83$$

HHH



Nous obtenons bien  $|0,28 + 2,22 - 5,36 - 3,16 - 4,28| = 10,3$ .

**Fait 7.** Si une  $n$ -ligne  $\mathcal{L}$  non dégénérée n'est pas un  $n$ -gone, donc est un polygone croisé, alors on peut construire une  $n$ -ligne  $\mathcal{L}'$  telle que  $\text{Perim}(\mathcal{L}') = \text{Perim}(\mathcal{L})$  et  $\text{AireGe}(\mathcal{L}') > \text{AireGe}(\mathcal{L})$ .

Démonstration. XXXX

## FAUX

L'idée est simple : comme nous savons que les triangles  $A'_i A'_{i+1} A'_{i+2}$  ne sont pas tous orientés de la même façon, il suffit de remplacer l'un de ces triangles par son symétrique relativement à la droite  $(A'_i A'_{i+2})$  pour diminuer ou augmenter  $\mu(\mathcal{L})$  suivant le signe initial de  $\mu(\mathcal{L})$ . Les figures suivantes illustrent cette idée que nous formalisons juste après (les nombres indiquées sont les aires calculées par GeoGebra).

Supposons pour commencer que  $\mu(\mathcal{L}) \leq 0$ . Dans ce cas, considérons  $A'_i A'_{i+1} A'_{i+2}$  orienté positivement, autrement tel que  $\delta = \det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_{i+2}}) > 0$ . En calculant  $\mu(\mathcal{L})$  via  $\Omega = A'_i$ , la somme des déterminants de la définition contient  $\delta$ . En remplaçant  $A'_i A'_{i+1} A'_{i+2}$  par son symétrique relativement à la droite  $(A'_i A'_{i+2})$ , nous obtenons une nouvelle  $n$ -ligne  $\mathcal{L}'$  telle que le calcul de  $\mu(\mathcal{L}')$  se fait en remplaçant  $\delta$  par  $(-\delta)$  dans la définition de  $\mu(\mathcal{L})$ . Nous avons alors  $\mu(\mathcal{L}') < \mu(\mathcal{L}) \leq 0$ , et donc  $\text{AireGe}(\mathcal{L}') > \text{AireGe}(\mathcal{L})$  en appliquant la valeur absolue. Comme  $\text{Perim}(\mathcal{L}') = \text{Perim}(\mathcal{L})$ , clairement, le contrat est rempli dès que  $\mu(\mathcal{L}) \leq 0$ .

Si  $\mu(\mathcal{L}) > 0$ , la démarche est similaire, mais via un triangle orienté négativement.  $\square$

**Fait 8.** Soit  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  un naturel fixé. Considérons tous les  $n$ -gones de périmètre fixé. Parmi tous ces  $n$ -gones, il en existe au moins un d'aire maximale.

*Démonstration.* Ce qui suit nous donne plus généralement l'existence d'un  $n$ -gone, au moins, maximisant l'aire généralisée parmi toutes les  $n$ -lignes de périmètre fixé  $p$ . Ce résultat plus fort convient d'après le fait 6.

- On munit le plan d'un repère orthonormé direct  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .
- On note  $\mathcal{Z}$  l'ensemble des  $n$ -lignes  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  telles que  $\text{Perim}(A_1 A_2 \cdots A_n) = p$  et  $A_1(0; 0)$ .<sup>6</sup>
- Considérons alors  $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{2n}$  l'ensemble des uplets  $(x(A_1); y(A_1); \dots; x(A_n); y(A_n))$  correspondant aux coordonnées des sommets  $A_i$  de  $n$ -lignes appartenant à  $\mathcal{Z}$ .
- $\mathcal{G}$  est clairement fermé dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . De plus, il est borné, car les coordonnées des sommets des  $n$ -lignes considérées le sont. En résumé,  $\mathcal{G}$  est un compact de  $\mathbb{R}^{2n}$ .
- Nous définissons la fonction  $s : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui à un uplet de  $\mathcal{G}$  associe l'aire généralisée de la  $n$ -ligne qu'il représente. Cette fonction est continue comme valeur absolue d'une fonction polynomiale en les coordonnées.
- Finalement, par continuité et compacité, on sait que  $s$  admet un maximum sur  $\mathcal{G}$ . Or, un tel maximum ne peut être atteint en une  $n$ -ligne dégénérée, clairement, ni en un polygone croisé d'après le fait 7, donc un tel maximum sera obtenu en un  $n$ -gone. That's all folks !

 $\square$ 

**Fait 9.** Soit  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  un naturel fixé. Considérons tous les  $n$ -gones de périmètre fixé. Parmi tous ces  $n$ -gones, un seul est d'aire maximale, c'est le  $n$ -gone régulier.

*Démonstration.* Ceci découle directement des faits ?? et 8. Ici s'achève notre joli voyage.  $\square$

---

6. Le mot « *Zeile* » est une traduction possible de « *ligne* » en allemand.