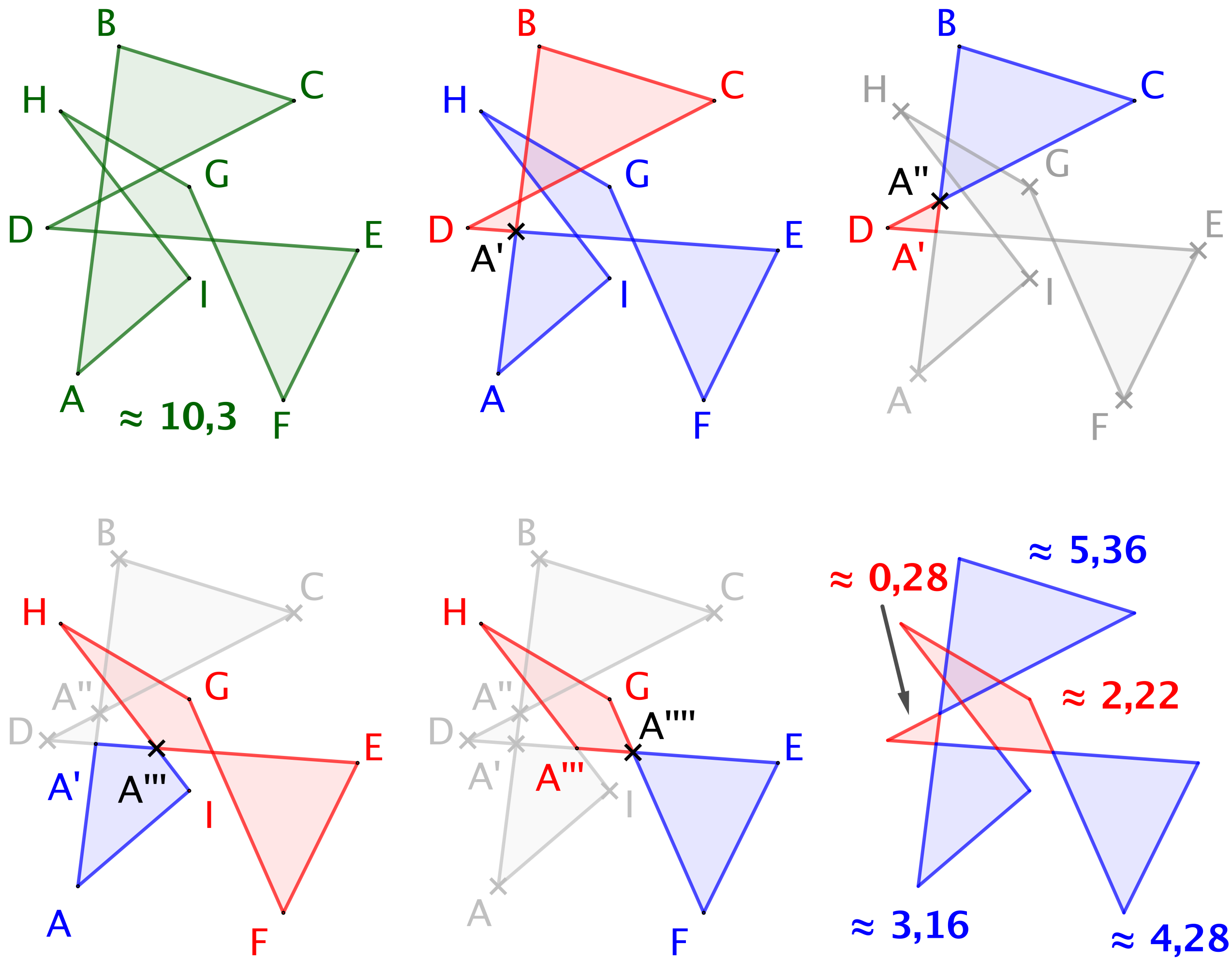
BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

Table des matières

Date: 18 Jan. 2025 – 6 Fev. 2025.



Fait 1. *Si une n-ligne $\mathcal{L}$ non dégénérée n'est pas un n-gone, donc est un polygone croisé, alors il existe une n-ligne $\mathcal{L}'$ telle que* $\mathrm{Perim}(\mathcal{L}') = \mathrm{Perim}(\mathcal{L})$ *et* $\mathrm{AireGene}(\mathcal{L}') > \mathrm{AireGene}(\mathcal{L})$.

Démonstration. ? ? ? ? □

Fait 2. *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Considérons tous les n-gones de périmètre fixé. Parmi tous ces n-gones, il en existe au moins un d'aire maximale.*

Démonstration. Ce qui suit nous donne plus généralement l'existence d'un n-gone, au moins, maximisant l'aire généralisée parmi toutes les n-lignes de périmètre fixé p. Ce résultat plus fort convient d'après le fait 6.

- On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
- On note $\mathcal{Z}$ l'ensemble des n-lignes $\mathcal{L} = A_1A_2\cdots A_n$ telles que $\mathrm{Perim}(A_1A_2\cdots A_n) = p$ et $A_1\,(0\,;0)$.[1]
- Considérons alors $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des uplets $\big(x(A_1)\,; y(A_1)\,; \ldots; x(A_n)\,; y(A_n)\big)$ correspondant aux coordonnées des sommets A_i de n-lignes appartenant à $\mathcal{Z}$.
- $\mathcal{G}$ est clairement fermé dans $\mathbb{R}^{2n}$. De plus, il est borné, car les coordonnées des sommets des n-lignes considérées le sont. En résumé, $\mathcal{G}$ est un compact de $\mathbb{R}^{2n}$.

1. Le mot « *Zeile* » est une traduction possible de « *ligne* » en allemand.

- Nous définissons la fonction $s : \mathcal{G} \to \mathbb{R}_+$ qui à un uplet de $\mathcal{G}$ associe l'aire généralisée de la n-ligne qu'il représente. Cette fonction est continue comme valeur absolue d'une fonction polynomiale en les coordonnées.
- Finalement, par continuité et compacité, on sait que s admet un maximum sur $\mathcal{G}$. Or, un tel maximum ne peut être atteint en une n-ligne dégénérée, clairement, ni en un polygone croisé d'après le fait 7, donc un tel maximum sera obtenu en un n-gone. That's all folks !

$\square$

Fait 3. *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Considérons tous les n-gones de périmètre fixé. Parmi tous ces n-gones, un seul est d'aire maximale, c'est le n-gone régulier.*

Démonstration. Ceci découle directement des faits **??** et 8. Ici s'achève notre joli voyage. $\square$

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows how many pages to expect for this document.