IDENTITÉS PARTICULIÈRES GÉNÉRALISABLES RIGOUREUSEMENT

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/visual-proof/polynomial-analytic-principles.

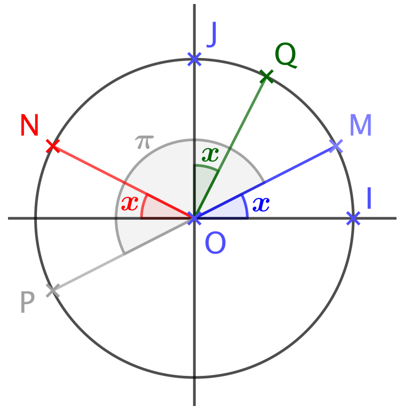
Mentions « légales »

Table des matières

Date: 16 Juillet 2019 - 27 Mars 2025.

1. Puis vinrent les fonctions analytiques d'une seule variable

Considérons le dessin suivant, où les mesures des angles sont en radians.



Via les points M, N, P et Q, il est facile de fournir des arguments géométriques de symétrie justifiant que, sous la condition $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{4}\right[$, nous avons :

- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
  $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
  $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

De nouveau, il serait bien de pouvoir passer, sans plus d'effort, à la validité des formules ci-dessus sur $\mathbb{R}$ tout entier *(considérer les autres cas n'est pas compliqué, mais c'est pénible)*. Nous allons voir que cela est licite grâce au fait **??**, donné plus bas, qui est un peu technique, car il nécessite la notion de fonction analytique.

Préliminaire 1. *Le rayon de convergence R de la série entière complexe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est défini par la formule de Hadamard*[1] $\dfrac{1}{R} = \limsup\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ *avec les conventions* $0 = \dfrac{1}{+\infty}$ *et* $+\infty = \dfrac{1}{0}$. *Ce nombre R s'interprète comme suit.*

(1) Si $R = 0$, la série ne converge que pour $z = 0$, et sinon elle diverge grossièrement.

(2) Si $R = +\infty$, la série converge sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, la série converge normalement sur tout disque ouvert $\mathcal{D}(0\,;r[$ tel que $r \in \mathbb{R}_+^*$.

(3) Si $0 < R < +\infty$, la série converge normalement sur tout disque ouvert $\mathcal{D}(0\,;r[$ tel que $0 < r < R$, donc elle converge sur $\mathcal{D}(0\,;R[$. Par contre, elle diverge grossièrement sur $\mathbb{C} - \mathcal{D}(0\,;R]$, et le comportement sur le cercle $\mathcal{C}(0\,;R)$ doit être traité au cas par cas.

Démonstration. Notons $\ell = \limsup\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$, soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sup\left\{\sqrt[k]{|a_k|}\ ,\ k \in \mathbb{N}_{\geq n}\right\}\right)$, de sorte que $\ell \in [0\,;+\infty]$. Commençons par le cas $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire $R \in \mathbb{R}_+^*$.

- Soit $r \in \left]0\,;R\right[$. Considérons $\rho \in \left]r\,;R\right[$ de sorte que $\frac{1}{r} > \frac{1}{\rho} > \frac{1}{R}$. Par définition de $\ell = \frac{1}{R}$, nous avons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sup\left\{\sqrt[k]{|a_k|}\ ,\ k \in \mathbb{N}_{\geq n_0}\right\} < \frac{1}{\rho}$. Donc pour $z \in \mathcal{D}(0\,;r[$ et $k \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$, nous obtenons $\left|a_k z^k\right| < \left(\frac{r}{\rho}\right)^k$ pour $k \geq n_0$. Comme $0 < \frac{r}{\rho} < 1$, la convergence normale devient évidente.
- Soit $z \in \mathbb{C} - \mathcal{D}(0\,;R]$. Comme $\frac{1}{|z|} < \frac{1}{R}$, nous avons ici $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$, $\sup\left\{\sqrt[k]{|a_k|}\ ,\ k \in \mathbb{N}_{\geq n}\right\} > \frac{1}{|z|}$. En particulier, nous pouvons construire une suite strictement croissante d'indices (k_i) telle que $\left|a_{k_i} z^{k_i}\right| > 1$. Ceci donne la divergence grossière.

---

1. La démonstration va révéler le côté « *naturel* » de la formule de Hadamard.

- La justification du comportement pathologique sur le cercle $\mathcal{C}(0\,;R)$ se fait via des contre-exemples. Nous pouvons citer les exemples classiques suivants.
  (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, de rayon de convergence 1, diverge grossièrement sur $\mathcal{C}(0\,;1)$.
  (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$, de rayon de convergence 1, puisque $\ln\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}\right) = -\frac{2\ln n}{n}$. De plus, cette série entière converge normalement sur $\mathcal{C}(0\,;1)$.
  (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$, de rayon de convergence 1, puisque $\ln\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right) = -\frac{\ln n}{n}$. De plus, cette série entière converge sur $\mathcal{C}(0\,;1)-\{1\}$, mais pas en 1. Le comportement sur $\mathcal{C}(0\,;1)-\{1\}$ est plus délicat à démontrer, car il se base sur le test de Abel-Dirichlet.

Les cas $\ell = 0$, c'est-à-dire $R = +\infty$, et $\ell = +\infty$, c'est-à-dire $R = 0$, s'obtiennent via des adaptations immédiates de ce qui a été fait ci-dessus. □

Exemple 2. *La série entière complexe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ *admet un rayon de convergence infini ; la fonction associée est l'exponentielle complexe* exp. *En effet, notant* Ent *la fonction partie entière, nous avons* $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\mathrm{Ent}\left(\frac{n}{2}\right)} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}$, *puis* $\ln\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}\right) \leq \frac{2-n}{2n} \ln\left(\frac{n}{2}\right)$.

Préliminaire 3. *Soit une série entière complexe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *de rayon de convergence* R *non nul. La fonction* $f : z \in \mathcal{D}(0\,;R[\mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}$ *vérifie les propriétés suivantes.*

(1) f *est infiniment* $\mathbb{C}$*-dérivable.* [2]

(2) $\forall k \in \mathbb{N}$, *la série entière* $\sum\limits_{n=k}^{\infty} \dfrac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$ *admet* R *pour rayon de convergence.*

(3) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathcal{D}(0\,;R[$, $f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} \dfrac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$.

(4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Démonstration. La propriété 4 étant aisée à déduire, une récurrence immédiate à faire montre qu'il suffit de démontrer que $\forall z \in \mathcal{D}(0\,;R[$, $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \mathcal{D}(0\,;R[}} \left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

- $\ln\left(\sqrt[n]{|n a_n|}\right) = \frac{\ln n}{n} + \ln\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ donne que R est le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

  On peut donc définir la fonction $g : z \in \mathcal{D}(0\,;R[\mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \in \mathbb{C}$.
- Pour $(z, z_0) \in \mathcal{D}(0\,;R[^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$, nous introduisons les notations suivantes.
  (a) $f_k(z) = \sum\limits_{n=0}^{k} a_n z^n$.
  (b) $g_k(z) = \sum\limits_{n=1}^{k} n a_n z^{n-1}$, cette fonction étant clairement la $\mathbb{C}$-dérivée de $f_k(z)$.

2. L'analyse complexe étudie les fonctions $\mathbb{C}$-dérivables en les nommant *« fonctions holomorphes »*. Cette théorie est très riche, et très utile.

(c) $T_k(z) = \begin{cases} \frac{f_k(z)-f_k(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \in \mathcal{D}(0\,;R[- \{z_0\} \\ g_k(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$

(d) $T(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \in \mathcal{D}(0\,;R[- \{z_0\} \\ g(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$

- Considérons alors $r \in]0\,;R[$ tel que $z_0 \in \mathcal{D}(0\,;r[$. Par convergence normale sur $\mathcal{D}(0\,;r]$ de $(f_k)_k$ et $(g_k)_k$ vers f et g respectivement, nous avons la convergence uniforme sur $\mathcal{D}(0\,;r]$ de $(T_k)_k$ vers T. Or chaque fonction T_k est continue en z_0 par $\mathbb{C}$-dérivablité de f_k, donc T est continue en z_0, d'où la $\mathbb{C}$-dérivabilité de f en z_0 avec $f'(z_0) = g(z_0)$. Ceci achève la preuve, car $z_0 \in \mathcal{D}(0\,;R[$ est quelconque.

$\square$

Remarque 4. *Une relecture de preuves des résultats préliminaires 1 et 3 donnent que pour toute série entière complexe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *de rayon de convergence* R *non nul, et tout nombre complexe* z_0*, la fonction* $f : z \in \mathcal{D}(z_0\,;R[\mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \in \mathbb{C}$ *vérifie les propriétés suivantes.*

(1) f *est infiniment* $\mathbb{C}$*-dérivable.*

(2) $\forall k \in \mathbb{N}$, *la série* $\sum\limits_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(z-z_0)^{n-k}$ *converge normalement sur* $\mathcal{D}(z_0\,;R[$,

(3) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathcal{D}(z_0\,;R[$, $f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(z-z_0)^{n-k}$.

(4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Nous allons voir que les fonctions développables en série entière autour d'un nombre complexe z_0 ont le bon ton de l'être aussi dans un voisinage de z_0.

Définition 5. *Soit* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *un ouvert non vide. Une fonction* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *est dite analytique en* $z_0 \in \Omega$*, s'il existe une série entière* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *de rayon de convergence* $R > 0$ *et un réel* $r \in]0\,;R]$ *tels qu'on ait* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ *dans le disque ouvert* $\mathcal{D}(z_0\,;r[\subseteq \Omega$.

Si f *est analytique en tout nombre complexe de* Ω*, la fonction* f *est dite analytique sur* Ω.

Fait 6. *Soit* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *où* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *est un ouvert non vide. Si* f *est analytique en* z_0*, alors il existe un réel* $r > 0$ *tel que* f *soit analytique sur* $\mathcal{D}(z_0\,;r[$ *tout entier.*

Démonstration. Reprenons les notations de la définition 5. Nous allons montrer que le réel r convient. Pour cela, considérons $\omega \in \mathcal{D}(z_0\,;r[$ et un disque ouvert non vide $\mathcal{D}(\omega\,;\rho[\subseteq \mathcal{D}(z_0\,;r[$. Notons que $0 < \rho < r$.

- Formellement, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\omega)}{n!}(z-\omega)^n$ et $f^{(n)}(\omega) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k \omega^{k-n}$ conduisent à étudier $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{n!(k-n)!} a_k \omega^{k-n}(z-\omega)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{q=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} a_{n+q} \omega^q (z-\omega)^n$.
- Soit $F \subset \mathbb{N}^2$ un ensemble fini. Introduisons les notations suivantes.
  (1) $\sigma_F(z\,;\omega) = \sum\limits_{(n,q) \in F} \alpha_{n,q}(z\,;\omega)$ où $\alpha_{n,q}(z\,;\omega) = \frac{(n+q)!}{n!q!} a_{n+q} \omega^q (z-\omega)^n$.
  (2) $\mu(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n| z^n$ qui est de rayon de convergence R.

(3) $N = \max\big\{n+q\,,\,(n,q)\in F\big\}$.

Pour $z \in \mathcal{D}(\omega\,;\rho[$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{(n,q)\in F} |\alpha_{n,q}(z\,;\omega)| &\leq \sum_{s=0}^{N} \sum_{n+q=s} |\alpha_{n,q}(z\,;\omega)| \\
&\leq \sum_{s=0}^{N} \sum_{n+q=s} \tbinom{n+q}{q} |a_{n+q}| r^q \rho^n \\
&\leq \sum_{s=0}^{N} |a_s| \Big(\sum_{n+q=s} \tbinom{n+q}{q} r^q \rho^n \Big) \\
&\leq \sum_{s=0}^{N} |a_s| (r+\rho)^s \\
&\leq \sum_{s=0}^{+\infty} |a_s| (r+\rho)^s
\end{aligned}$$

En imposant aussi $r+\rho < R$, c'est-à-dire $\rho < R-r$, pour tout sous-ensemble fini F de $\mathbb{N}^2$, nous avons $\sum\limits_{(n,q)\in F} |\alpha_{n,q}(z\,;\omega)| \leq \mu(r+\rho) < +\infty$.

Donc $\sum\limits_{(n,q)\in \mathbb{N}^2} \alpha_{n,q}(z\,;\omega)$ est absolument convergente, et commutativement convergente.

- Pour $z \in \mathcal{D}(\omega\,;\rho[$, nous avons :

(1)
$$\begin{aligned}
\sum_{(n,q)\in \mathbb{N}^2} \alpha_{n,q}(z\,;\omega) &= \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{n+q=s} \alpha_{n,q}(z\,;\omega) \\
&= \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{n+q=s} \tbinom{n+q}{q} a_{n+q} \omega^q (z-\omega)^n \\
&= \sum_{s=0}^{+\infty} a_s \Big(\sum_{n+q=s} \tbinom{n+q}{q} \omega^q (z-\omega)^n \Big) \\
&= \sum_{s=0}^{+\infty} a_s (\omega + z - \omega)^s \\
&= f(z)
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
\sum_{(n,q)\in \mathbb{N}^2} \alpha_{n,q}(z\,;\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \alpha_{n,q}(z\,;\omega) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \tbinom{n+q}{q} a_{n+q} \omega^q (z-\omega)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \tbinom{k}{k-n} a_k \omega^{k-n} (z-\omega)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!} (z-\omega)^n \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \tfrac{k!}{(k-n)!} a_k \omega^{k-n} \Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{f^{(n)}(\omega)}{n!} (z-\omega)^n
\end{aligned}$$

Nous arrivons à $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\omega)}{n!} (z-\omega)^n$ comme souhaité. □

Passons, enfin, au résultat essentiel de cette section qui va permettre de valider nos identités trigonométriques obtenues partiellement via la géométrie.

Fait 7. *Soit* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *un ouvert connexe non vide,*[3] *et* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *une fonction analytique non identiquement nulle. Pour tout zéro* α *de* f*, il existe un disque ouvert non vide* $\mathcal{D}(\alpha\,; r[\subseteq \Omega$ *tel que* $\forall z \in \mathcal{D}(\alpha\,; r[- \{\alpha\}$*,* $f(z) \neq 0$ (c'est le principe des zéros isolés).

Démonstration. TODO $\square$

3. On parle aussi de « *domaine complexe* ».