

BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source $L^A T^E X$, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



TABLE DES MATIÈRES

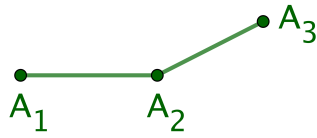
0.1. Au moins une solution, ou presque	2
--	---

0.1. Au moins une solution, ou presque. Le cas des quadrilatères a montré que la convexité était un ingrédient central. Ceci sera aussi le cas pour les n -gones, bien que moins immédiat à justifier, comme nous le verrons dans le fait ??, dont la preuve est indépendante des résultats de cette section. Ceci explique que nous allons chercher à justifier l'existence d'au moins un n -gone convexe d'aire maximale parmi les n -gones convexes de longueur fixée. Nous allons presque y arriver...

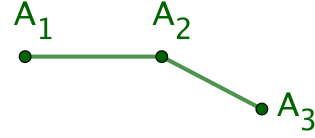
Fait 1. *Pour tout n -gone convexe $\mathcal{P} = A_1 A_2 \cdots A_n$, l'une des alternatives suivantes a lieu.*

- $\forall (i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, si $k \notin \{i; i+1\}$, alors $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) > 0$.
- $\forall (i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, si $k \notin \{i; i+1\}$, alors $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) < 0$.

Démonstration. Le cas $n = 3$ des triangles est immédiat. On considère alors \mathcal{P} un n -gone convexe où $n \geq 4$. Nous savons que, relativement à \mathcal{P} , les sommets sont distincts deux à deux, et qu'aucun triplet de sommets consécutifs alignés n'existe. Dès lors, dans le plan orienté, les trois premiers sommets sont placés suivant l'une des deux configurations suivantes.



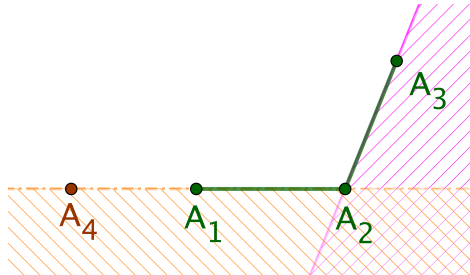
Cas positif.



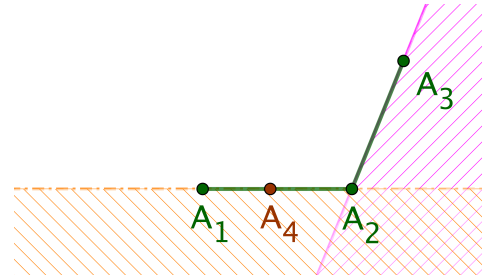
Cas négatif.

Considérons le cas positif, c'est-à-dire supposons que $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_3}) > 0$.

- $\overrightarrow{A'_1 A'_3} = \overrightarrow{A'_1 A'_2} + \overrightarrow{A'_2 A'_3}$ donne $\det(\overrightarrow{A'_2 A'_3}, \overrightarrow{A'_2 A'_1}) > 0$.
- Comme A_2, A_3 et A_4 ne sont pas alignés, et de plus A_1 et A_4 du même côté, au sens large, de la droite $(A_2 A_3)$, nous obtenons $\det(\overrightarrow{A'_2 A'_3}, \overrightarrow{A'_2 A'_4}) > 0$.
- En continuant de proche en proche, nous arrivons à $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_{i+2}}) > 0$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ quelconque.
- Le point précédent et la convexité donnent $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$ pour $(i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ tel que $k \notin \{i; i+1\}$.
- Montrons maintenant que $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_k}) > 0$ pour $k \in \llbracket 3; n \rrbracket$. Nous savons déjà l'inégalité vraie pour $k = 3$, donc passons à $k = 4$. Pour avoir $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_4}) > 0$, le point précédent donne qu'il faut vérifier que $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_k}) = 0$ est impossible. Supposons donc l'égalité vraie, ce qui implique d'avoir $n \geq 5$, et donne les configurations suivantes où les hachures et la droite en trait plein sont des zones interdites pour A_4 .

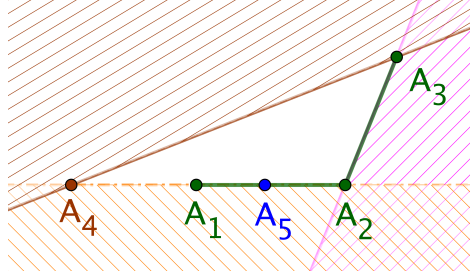


Cas 1.

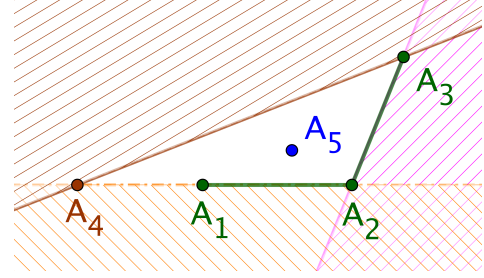


Cas 2.

Le cas 2 est impossible par raison de convexité, car A_1 et A_2 sont de part et d'autre de la droite (A_3A_4) . Voyons donc ce qu'implique le 1^{er} cas pour A_5 .



Cas 1-1.



Cas 1-2.

Le cas 1-2 est impossible par raison de convexité à cause de (A_4A_5) . Notons que dans le cas 1-1, il est possible d'avoir $A_5 \in]A_4A_1[$. Comme $A_5 \in (A_1A_2)$, nous devons avoir $n \geq 6$. Dès lors, nous avons de nouveau $A_6 \in (A_1A_2)$, mais ceci donne la contradiction $A_6 \in (A_4A_5)$. Continuons ensuite de proche en proche, nous obtenons bien $\det(\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_1A'_k}) > 0$ pour $k \in \llbracket 3; n \rrbracket$.

- En généralisant le raisonnement précédent,¹ nous avons $\det(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_k}) > 0$ pour tout couple $(i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ vérifiant $k \notin \{i; i+1\}$.

Le cas négatif se traite de façon similaire. □

1. Se souvenir de la définition de la suite (A'_i) .

Nous allons établir une réciproque élargie du résultat précédent. Ce nouveau fait va nous rendre un grand service par la suite.²

Fait 2. Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n -cycle vérifiant l'une des alternatives suivantes.

- $\forall (i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$.
- $\forall (i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \leq 0$.

Ceci implique la validité de l'une des assertions ci-dessous.

- i. Tous les sommets de \mathcal{L} sont alignés, autrement dit, \mathcal{L} est totalement dégénéré.
- ii. \mathcal{L} est un n -gone convexe.
- iii. Il existe un k -gone convexe \mathcal{C} tel que $k < n$, $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \text{Long}(\mathcal{L})$ et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{L})$, ceci se faisant en retirant des sommets de \mathcal{L} , sans modifier l'ordre de parcours pour les sommets gardés.

Démonstration. Par symétrie des alternatives, nous pouvons nous concentrer sur le cas positif, c'est-à-dire supposer que $\forall (i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$. Traitons alors le cas où \mathcal{L} est non totalement dégénéré, de sorte que $\exists (i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ tel que $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) > 0$.

XXX Pour raisonner algorithmiquement, nous aurons besoin d'un ensemble \mathcal{T} de sommets testés, et d'une liste \mathbb{U} de sommets utiles, tous les deux initialement vides.

- XXXX
- XXXX
- XXXX
- Prenons alors k minimal.

YYYY

Quitte à changer l'origine de \mathcal{L} , sans changer le sens de parcours des sommets, nous pouvons supposer avoir $i = 1$, et donc $k \in \llbracket 3; n \rrbracket$ tel que $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_k}) > 0$. Lors de ce renommage, on met aussi à jour tous les noms des points contenus dans \mathcal{T} et \mathbb{U} . \square

2. Pourquoi s'attarder sur des inégalités larges ? Parce que nous allons travailler dans un ensemble compact, et donc fermé, de n -cycles, même si cela aura pour inconvénient de ne pas garantir le caractère n -gonal, selon le fait 2, mais nous n'avons pas le choix !

Le résultat qui suit est juste là pour simplifier la justification du fait 4, central, à venir.

Fait 3. Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan et $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des uplets de coordonnées $(x(A_1); y(A_1); \dots; x(A_n); y(A_n))$ où $\mathcal{L} = A_1 A_2 \dots A_n$ désigne un n -cycle vérifiant les conditions suivantes.

- $\text{Long}(\mathcal{L}) = \ell$.
- $\forall (i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$.

On considère alors la fonction $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui à un uplet de \mathcal{U} associe l'aire algébrique du n -cycle qu'il représente. Avec ces notations, la fonction $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$ admet au moins un maximum forcément positif strict.

Démonstration. \mathcal{U} est fermé dans \mathbb{R}^{2n} , car les conditions le définissant le sont, et il est borné, car inclus dans la boule fermée de centre O et de rayon ℓ , donc \mathcal{U} est un compact de \mathbb{R}^{2n} . De plus, α est continue d'après le fait ???. Donc, par continuité et compacité, α admet un maximum sur \mathcal{U} , celui-ci étant positif strict pour les raisons suivantes.

- Via une translation, on peut supposer \mathcal{R} d'origine O .
- Un n -gone régulier convexe \mathcal{R} , de périmètre ℓ , est d'aire non nulle.
- $\text{Aire}(\mathcal{R}) = |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R})|$ selon le fait ???, et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}^{\text{op}}) = -\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R})$ d'après le fait ???.
- $\mathcal{R} \in \mathcal{U}$, ou $\mathcal{R}^{\text{op}} \in \mathcal{U}$ selon le fait 1.
- Si $\mathcal{R} \in \mathcal{U}$, alors \mathcal{R} est orienté positivement, d'où $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}) \geq 0$, et par conséquent $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}) = \text{Aire}(\mathcal{R})$ (c'est immédiat en utilisant le centre de gravité de \mathcal{R} comme point de calcul). Il en va de même pour \mathcal{R}^{op} . \square

Nous arrivons, au résultat essentiel pour les n -gones convexes où la perte éventuelle de sommets est un faux problème, car nous aboutirons, plus tard, à la comparaison de k -gones réguliers convexes pour k variable, une tâche aisée, puisque le périmètre et l'aire d'un k -gone régulier convexe s'expriment en fonction de k .

Fait 4. Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ et $\ell \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe un k -gone convexe \mathcal{K} validant les assertions suivantes.

- $k \leq n$ et $\text{Long}(\mathcal{K}) = \ell$.
- Si \mathcal{P} est un n -gone convexe tel que $\text{Long}(\mathcal{P}) = \ell$, alors $\text{Aire}(\mathcal{P}) \leq \text{Aire}(\mathcal{K})$.

Démonstration. Reprenons les notations du fait 3, puis choisissons $\mathcal{L} \in \mathcal{U}$ maximisant l'aire algébrique sur \mathcal{U} . Ce n -cycle ne peut être totalement dégénéré, car $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{L}) > 0$. Dès lors, pour tout n -gone convexe \mathcal{P} vérifiant $\text{Long}(\mathcal{P}) = \ell$, nous pouvons raisonner comme suit.

- Via une translation, on peut supposer \mathcal{P} d'origine O .
- Comme dans la preuve du fait 3, soit $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$ et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$, soit $\mathcal{P}^{\text{op}} \in \mathcal{U}$ et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}^{\text{op}}) = \text{Aire}(\mathcal{P}^{\text{op}})$. Quitte à échanger \mathcal{P} et \mathcal{P}^{op} , on peut supposer que $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$.
- Le fait 2 donne un k -gone convexe \mathcal{C} , où $k \leq n$, tel que $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \text{Long}(\mathcal{L})$, ainsi que $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{L})$.
- Le choix de \mathcal{L} fait que $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \ell$ et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) \leq \overline{\text{Aire}}(\mathcal{C})$, mais aussi que $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) > 0$.
- Comme $\text{Aire}(\mathcal{C}) = |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C})| = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{C})$ selon le fait ???, $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) \leq \overline{\text{Aire}}(\mathcal{C})$ devient $\text{Aire}(\mathcal{P}) \leq \text{Aire}(\mathcal{C})$.
- Or $\text{Long}(\mathcal{C}) > 0$, donc une homothétie de rapport $\frac{\ell}{\text{Long}(\mathcal{C})} \geq 1$ fournit finalement un k -gone convexe \mathcal{K} tel que $k \leq n$, $\text{Long}(\mathcal{K}) = \ell$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}) \leq \text{Aire}(\mathcal{K})$. Affaire conclue! \square