

# BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



---

## TABLE DES MATIÈRES

1.	Pourquoi un nouveau document sur l’isopérimétrie ?	2
2.	Triangles	2
2.1.	Avec un côté fixé	2
2.2.	Le cas général	3
2.3.	Des preuves courtes non géométriques	4

Ce document, de niveau élémentaire,<sup>1</sup> s'intéresse au classique problème de l'isopérimétrie plane, c'est-à-dire à la recherche d'une surface plane maximisant son aire pour un périmètre donné. Nous nous limiterons ici au cas des polygones, en privilégiant des démonstrations les plus géométriques que possible, et en ne faisant appel à l'analyse qu'en cas de nécessité.<sup>2</sup>

*Afin d'alléger le texte, nous raisonnerons parfois modulo des isométries. Ainsi, nous parlerons directement du « carré de côté  $c$  », du « triangle équilatéral de côté  $c$  », etc.*

## 1. POURQUOI UN NOUVEAU DOCUMENT SUR L'ISOPÉRIMÉTRIE ?

Voici quelques apports de ce document.

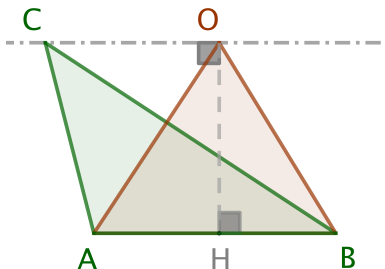
- **Pour les triangles**, l'auteur expose une démonstration ne s'appuyant pas sur le théorème des extrema d'une fonction réelle continue sur un compact. Il propose à la place une construction itérative basique qui, partant d'un triangle quelconque, converge vers le triangle équilatéral, solution du problème d'isopérimétrie pour les triangles.
- **Pour les quadrilatères**, le problème est traité sans aucune utilisation de l'analyse, en s'appuyant uniquement sur des considérations purement géométriques de niveau élémentaire.
- **Pour les polygones à 5 côtés et plus**, l'existence se fera via le basique théorème des extrema d'une fonction réelle continue sur un compact. La caractérisation des solutions optimales sera ensuite faite de façon élémentaires. L'auteur a veillé à ne laisser aucune ellipse explicative dans les démonstrations proposées.

## 2. TRIANGLES

### 2.1. Avec un côté fixé.

**Fait 1.** *Considérons tous les triangles de périmètre fixé, et ayant tous un côté en commun. Parmi tous ces triangles, un seul est d'aire maximale, c'est le triangle isocèle ayant pour base le côté commun.*

*Démonstration.* Soit  $ABC$  un triangle de périmètre  $p$ , et fixons le côté  $[AB]$ . Pour tout point  $M$  sur la parallèle à  $(AB)$  passant par  $C$ , nous savons que  $\text{Aire}(ABM) = \text{Aire}(ABC)$ . Notons alors  $O$  le point sur cette parallèle tel que  $ABO$  soit isocèle en  $O$ .

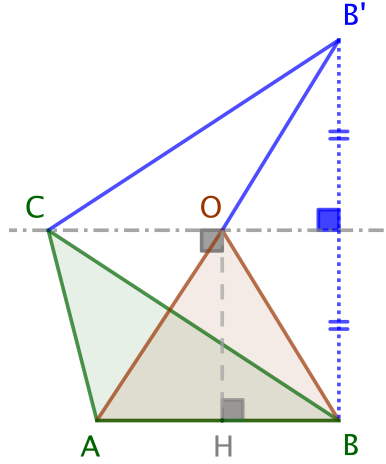


Via une symétrie axiale, voir ci-dessous, il est aisé de noter que  $\text{Long}(ABC) \geq \text{Long}(ABO)$ , avec égalité uniquement si  $ABC$  est isocèle en  $C$ .<sup>3</sup>

1. Cela nous conduira à admettre certains théorèmes qui, bien que paraissant simples, méritent une justification approfondie.

2. L'usage des nombres complexes fournit une approche très synthétique.

3. Plus précisément, en passant de  $C$  à  $O$ , le périmètre diminue.



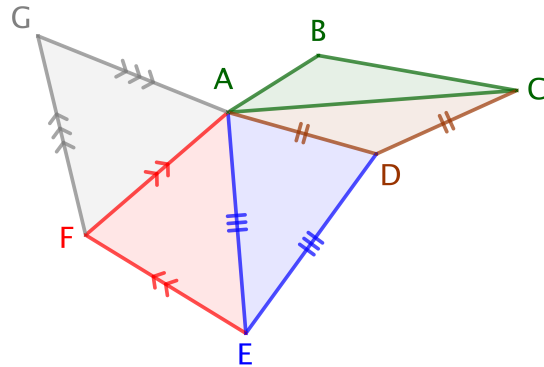
Une dilatation « verticale » de rapport  $r = \frac{\text{Long}(ABC)}{\text{Long}(ABO)} \geq 1$  donne un triangle isocèle  $ABO'$  tel que  $\text{Long}(ABO') = p$  et  $\text{Aire}(ABO') \geq \text{Aire}(ABC)$ , avec égalité uniquement si  $ABC$  est isocèle en  $C$ . Contrat rempli!<sup>4</sup>  $\square$

**Remarque 2.1.** La recherche parmi les triangles avec un côté fixé de celui ayant un périmètre minimal pour une aire fixée est le problème dual de l'isopérimétrie pour ces triangles.

## 2.2. Le cas général.

**Fait 2.** Considérons tous les triangles de périmètre fixé  $p$ . Parmi tous ces triangles, un seul est d'aire maximale, c'est le triangle équilatéral de côté  $c = \frac{1}{3}p$ .

*Démonstration.* Nous allons donner une démonstration constructive via une application itérative du fait 1 qui va donner à la limite le triangle équilatéral d'aire maximale, et ceci avec une vitesse de convergence exponentielle.<sup>5</sup> Partons donc d'un triangle  $ABC$  quelconque, mais de périmètre  $p$ , le fait 1 nous donne successivement les triangles  $ACD$ ,  $ADE$  et  $AEF$  isocèles en  $D$ ,  $E$  et  $F$  respectivement, ayant tous pour périmètre  $p$ , et ceci avec des aires de plus en plus grandes. Le dessin suivant amène à conjecturer qu'en poursuivant le procédé pour avoir ensuite un triangle  $AFG$  isocèle en  $G$ ..., nous aboutirons « à la limite » à un triangle équilatéral.



Le passage d'un triangle quelconque  $ABC$  au triangle  $ACD$  isocèle en  $D$  nous amène à nous concentrer sur ce que donne notre procédé d'agrandissement d'aire à périmètre fixé pour des

4. La remarque 2.3 explique comment employer la méthode des extrema liés. Les arguments fournis à cet endroit s'adaptent facilement au cas des triangles de base fixée.

5. Ceci ne va nécessiter que l'emploi de propriétés simples de l'ensemble des réels.

triangles isocèles. Voici ce que nous pouvons affirmer en supposant  $AC > AD$ , comme dans notre exemple (nous allons voir que cette hypothèse est sans conséquence).

- (1) Comme  $AC + 2AD = p$  et  $AC > AD$ , nous avons  $AC > \frac{1}{3}p > AD$ . À l'étape suivante, comme  $AD + 2AE = p$ , nous obtenons  $AD < \frac{1}{3}p < AE$ .
- (2) Pour  $AEF$  isocèle en  $F$ , comme  $AE + 2AF = p$ , nous arrivons à  $AE > \frac{1}{3}p > AF$ .
- (3) Tentons de quantifier les écarts à la mesure pivot  $p' = \frac{1}{3}p$ .
  - Dans  $ACD$ , posant  $AD = p' - \epsilon_1$ , nous avons  $AC = p' + 2\epsilon_1$ .
  - Dans  $ADE$ , posant  $AE = p' + \epsilon_2$ , nous avons  $AD = p' - 2\epsilon_2$ .
  - Dans  $AEF$ , posant  $AF = p' - \epsilon_3$ , nous avons  $AE = p' + 2\epsilon_3$ .
  - Dans  $AFG$ , posant  $AG = p' + \epsilon_4$ , nous avons  $AF = p' - 2\epsilon_4$ .
  - Donc  $\epsilon_2 = \frac{1}{2}\epsilon_1$ ,  $\epsilon_3 = \frac{1}{2}\epsilon_2$  et  $\epsilon_4 = \frac{1}{2}\epsilon_3$ .

Voici les enseignements de ce qui précède en partant d'un triangle  $ABC$  non équilatéral.

- Si  $AC = \frac{1}{3}p$ , dès la 1<sup>re</sup> itération, nous avons un triangle équilatéral d'aire plus grande.
- Si  $AC \neq \frac{1}{3}p$ , notre procédé n'arrivera jamais en un nombre fini d'étapes à un triangle équilatéral. Dans ce cas, le point 3 ci-dessus nous donne une convergence exponentielle des longueurs des côtés vers  $p' = \frac{1}{3}p$ , tout en ayant des aires des plus en plus grandes.

Dans tous les cas, l'aire d'un triangle non équilatéral de périmètre  $p$  est strictement majorée par celle du triangle équilatéral de périmètre  $p$ . Et tout ceci a été obtenu via de la géométrie et de l'analyse élémentaires!  $\square$

### 2.3. Des preuves courtes non géométriques.

Nous donnons ici des preuves courtes du fait 2, mais sans notion géométrique intuitive. Efficacité versus beauté, l'auteur a choisi son camp depuis longtemps!

*Démonstration alternative 1.* Selon la **formule de Héron**,  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  est l'aire d'un triangle de côtés  $a, b, c$  et de demi-périmètre  $s = 0,5p$ . La comparaison des moyennes géométrique et arithmétique<sup>6</sup> donne  $\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}((s-a) + (s-b) + (s-c))$ , puis  $s(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{1}{27}s^4$ , et enfin  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{p^2}{12\sqrt{3}}$  où  $\frac{p^2}{12\sqrt{3}}$  est l'aire du triangle équilatéral de périmètre  $p$ .  $\square$

*Démonstration alternative 2.* Faisons appel à l'**analyse élémentaire aidée du fait 1**. Ce fait permet de se concentrer sur  $ABC$  isocèle en  $C$ . Choisissons un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $A(0; 0)$ ,  $B(AB; 0)$  et  $C(x_C; y_C)$  avec  $y_C \geq 0$ , et posons  $c = AC = BC \neq 0$  et  $s = \frac{p}{2}$ . Donc  $x_B = 2s - 2c \neq 0$ , et  $y_C = \sqrt{c^2 - (s - c)^2}$ , puis  $\text{Aire}(ABC)^2 = (s - c)^2(c^2 - (s - c)^2)$ , soit  $\text{Aire}(ABC)^2 = s(s - c)^2(s - 2c)$ .<sup>7</sup> Or, le maximum de la fonction  $\alpha : c \mapsto s(s - c)^2(s - 2c)$  est forcément atteint en  $c$  annulant  $\alpha'(c) = -2s(s - c)(s - 2c) - 2s(s - c)^2 = 2s(c - s)(2s - 3c)$ , soit pour  $c = \frac{2s}{3} = \frac{p}{3}$ , car  $c = s$  est exclu, donc  $ABC$  équilatéral est la solution « optimale ».  $\square$

*Démonstration alternative 3.* Utilisons **juste la continuité et la compacité**.

- On munit le plan d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

6. La formule de Héron reste un argument géométrique, mais quid de la comparaison des moyennes géométrique et arithmétique d'ordre 3, généralement justifiée via la concavité de la fonction logarithme. À l'ordre 2, l'inégalité s'obtient aisément par un argument géométrique simple : voir la remarque ??.

7. Nous venons de démontrer la formule de Héron dans le cas particulier d'un triangle isocèle.

- Les triangles  $ABC$  tels que  $\text{Long}(ABC) = p$  sont représentés en posant  $A(0;0)$ ,  $B(AB;0)$  et  $C(x_C; y_C)$  avec  $y_C \geq 0$ . Un triangle peut donc avoir trois représentations, mais peu importe. De plus, on accepte les triangles dégénérés pour lesquels nous avons  $x_B = 0$  ou  $y_C = 0$  dans notre représentation. Nous notons alors  $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$  l'ensemble des triplets  $(x_B; x_C; y_C)$  ainsi obtenus.
- Il est facile de justifier que  $\mathcal{T}$  est séquentiellement fermé dans  $\mathbb{R}^3$ . De plus,  $\mathcal{T}$  est borné car  $x_B$ ,  $x_C$  et  $y_C$  le sont. En résumé,  $\mathcal{T}$  est un compact de  $\mathbb{R}^3$ .
- La fonction  $\alpha : (x_B; x_C; y_C) \in \mathcal{T} \mapsto 0,5x_By_C \in \mathbb{R}_+$  est la fonction « aire » des triangles représentés. Par continuité et compacité,  $\alpha$  admet un maximum sur  $\mathcal{T}$ .
- Notons  $ABC$  un triangle maximisant  $\alpha$ , qui forcément n'est pas dégénéré. Le fait 1 implique que  $ABC$  est équilatéral. En effet, dans le cas contraire, il existe un sommet  $X$  en lequel  $ABC$  n'est pas isocèle, mais la « maximalité » de  $ABC$  contredit le fait 1 en considérant comme fixé le côté opposé au sommet  $X$ .  $\square$

*Démonstration alternative 4.* Nous allons faire appel à **la méthode des extrema liés et la formule de Héron**. Pour cela, notons que l'aire d'un triangle étant positive ou nulle, nous pouvons chercher à maximiser son carré  $f(a; b; c) = s(s-a)(s-b)(s-c)$  sous la contrainte  $2s = a + b + c$  où  $s = 0,5p > 0$  est constant. Notant  $g(a; b; c) = a + b + c - 2s$ , la contrainte s'écrit  $g(a; b; c) = 0$ .

- Si un extremum existe,  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\partial_a f = \lambda \partial_a g$ ,  $\partial_b f = \lambda \partial_b g$  et  $\partial_c f = \lambda \partial_c g$  d'après la méthode des extrema liés.
- Donc  $-s(s-b)(s-c) = -s(s-a)(s-c) = -s(s-a)(s-b)$ , et par conséquent  $(s-b)(s-c) = (s-a)(s-c) = (s-a)(s-b)$ .
- Les cas  $s = a$ ,  $s = b$  et  $s = c$  donnent  $f(a; b; c) = 0$ .
- Le cas  $[s \neq a, s \neq b \text{ et } s \neq c]$  n'est envisageable que si  $a = b = c = \frac{p}{3}$ , ceci impliquant  $f(a; b; c) = \frac{1}{16}p\left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{p^2}{12\sqrt{3}}\right)^2 > 0$ .
- En résumé, l'existence d'un maximum implique que ce maximum corresponde au cas du triangle équilatéral.
- Il reste à démontrer qu'un tel maximum existe pour pouvoir conclure : ceci est facile à justifier en considérant l'ensemble compact  $[0; 2s]^3$  de  $\mathbb{R}^3$ , et la continuité de  $f$ .  $\square$