Chapitre E

Dérivation locale et tangente

I Des « *maths* » utiles ? [À lire seul.e]

1 Le mot « *dérivée* » en Science Physique

Voici deux lois de la Science Physique que nous énonçons volontairement de façon peu rigoureuse pour ne pas complexifier le propos.

1. Soit un objet de masse m en kg. À un instant donné t, le vecteur accélération $\overrightarrow{a}(t)$ d'un objet est tel que $m\overrightarrow{a}(t)$ soit égal à $\sum_i \overrightarrow{F}_i$ la somme des forces qui s'appliquent sur cet objet.

   Par définition, $\overrightarrow{a}(t)$ est la « *dérivée* » du vecteur vitesse instantanée $\overrightarrow{v}(t)$ qui lui-même est défini comme étant la « *dérivée* » du vecteur déplacement $\overrightarrow{d}(t)$.
2. Considérons un circuit électrique soumis à un courant alternatif sinusoïdal forcé[1]. À un instant donné t, la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$ au borne d'une bobine d'inductance L, une constante qui caractérise une bobine, vérifient la propriété suivante : $u(t)$ est égale à L fois la « *dérivée* » de l'intensité $i(t)$.

On pourrait continuer ainsi longtemps... La Science Physique use de la notion de « *dérivée* » , en fait de plusieurs notions de « *dérivée* » , pour modéliser des phénomènes diverses. Voir avec l'enseignant de la matière Enseignement Scientifique.

2 Des « *taux d'accroissement* » en Biologie

L'étude de l'évolution d'une population est importante en Biologie. On peut ainsi étudier l'évolution de cellules. Ce type d'étude peut se faire avec des suites : on peut raisonner toutes les secondes pour étudier les cellules. Malheureusement les suites ne sont pas toujours faciles à étudier.

C'est pour cette raison que l'on peut choisir de modéliser de tels phénomènes avec des fonctions. Par exemple, l'étude d'une population de cellules se traduirait par

[1]. Nous découvrirons ce qu'est la fonction sinus cette année.

celle de la fonction $N(t)$ du nombre de cellules à un instant t en seconde. Au lieu d'étudier comment passer d'une seconde à l'autre, c'est à dire comment passer de $N(t)$ à $N(t+1)$ avec $t \in \mathbb{N}$, on se demande comment évolue le nombre de cellules lors d'une durée ϵ très courte, autrement dit on étudie le passage de $N(t)$ à $N(t+\epsilon)$.

Comme la durée ϵ n'est pas forcément constante, il devient naturel de s'intéresser à $\dfrac{N(t+\epsilon)-N(t)}{t+\epsilon-t} = \dfrac{N(t+\epsilon)-N(t)}{\epsilon}$.
Cette quantité est appelée « *taux d'accroissement* ». Ce taux mesure une évolution relative. On peut aussi voir ce taux comme une vitesse moyenne d'évolution du nombre de cellules. De plus, en prenant ϵ de plus en plus petit, on obtiendra une sorte de « *vitesse instantanée* » pour quantifier l'évolution des cellules.

3 Quand le projectile prend la « *tangente* »

Imaginons une pierre attachée à une ficelle non élastique que l'on fait tourner très vite horizontalement au-dessus de notre tête. La pierre décrit alors un cercle. Que se passera-t-il lorsque nous lâcherons la ficelle ? Le projectile va partir de façon « *tangente* » au cercle. Dans le même ordre d'idée, on peut s'intéresser à la direction que prend un pratiquant de planche à neige à la sortie d'un tremplin. Si aucune impulsion n'est donnée par l'acrobate, il sortira de façon tangente au tremplin.

II Taux d'accroissement et nombre dérivé

Pour instant donné t, notons $d(t)$ la distance parcourue par un projectile qui se déplace suivant une direction et un sens donnés.

La vitesse moyenne entre deux instants $t_1 < t_2$ se calcule via $\dfrac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1}$.

En particulier, pour un réel $h > 0$ fixé, $\dfrac{d(t+h)-d(t)}{h}$ donne la vitesse moyenne entre les instants t et $t+h$.

La vitesse instantanée se définirait donc en considérant $\dfrac{d(t+h)-d(t)}{h}$ pour des réels $h > 0$ non nuls infiniment petits.

Plus précisément, on étudie le comportement de $\dfrac{d(t+h)-d(t)}{h}$ lorsque $h > 0$ se rapproche de plus en plus prêt de 0.

On dit que l'on étudie la limite du taux d'accroissement $\dfrac{d(t+h)-d(t)}{h}$ quand $h > 0$ tend vers 0. De façon plus symbolique, on étudie $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{d(t+h)-d(t)}{h}$.

Nous nous limiterons à une présentation très intuitive, peut-être trop, de la notion de limite *(les élèves motivé.e.s peuvent venir me voir en dehors du cours).*

Définition II.1. *Considérons un objet se déplaçant uniquement sur un axe* (réel ou imaginaire) *qui va servir d'axe des abscisses. On note $x(t)$ l'abscisse de l'objet à un instant connu t. On va travailler avec les unités S.I. à savoir le mètre et la seconde.*

La « vitesse instantanée » *au temps t est définie par* $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{x(t+h)-x(t)}{h}$ *si cette limite existe* (ici h est de signe quelconque)*. Cette vitesse instantanée sera en $m.s^{-1}$.*

Définition II.2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.*

f est dit dérivable en a uniquement si $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *est un nombre réel ℓ .*

Si tel est le cas, le réel ℓ est appelé « nombre dérivé » *de f en a et il est noté $f'(a)$.*

En résumé, $f'(a) \overset{def}{=} \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (quand la limite est un réel).

Méthodologie II.3. *Pour étudier la dérivabilité d'une fonction en a, on procède en deux étapes.*

1. *Calcul et simplification du taux d'accroissement* $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *avec* $h \neq 0$ *quelconque éventuellement soumis à certaines conditions.*

   Ici a est un paramètre figé et h une variable.

2. *Étude « intuitive » de la limite* $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Exercice II.4. *Dans chaque cas, démontrer que f n'est pas dérivable en a .*

1. $a = 2$ *et* $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$ *qui est définie sur* $\mathbb{R} - \{2\}$.
2. $a = 0$ *et* $f : x \mapsto |x|$ *est la fonction valeur absolue définie sur* $\mathbb{R}$.

Exercice II.5. *Dans chaque cas, démontrer que f est dérivable en a en calculant la valeur de $f'(a)$.*

1. $a = 10$ *et* $f : x \mapsto x^2$ *est la fonction carrée définie sur* $\mathbb{R}$.
2. $a = 7$ *et* $f : x \mapsto \sqrt{x}$ *est la fonction racine carrée définie sur* $\mathbb{R}_+$.

Méthodologie II.6. *Pour modifier utilement une fraction avec des racines carrées au dénominateur et/ou au numérateur, on peut essayer d'utiliser une expression conjuguée.*

Par exemple, une expression conjuguée de $\sqrt{a} - 4\sqrt{b}$ *est* $\sqrt{a} + 4\sqrt{b}$.

On peut aussi dire que $17 - 3\sqrt{c}$ *est une expression conjuguée de* $17 + 3\sqrt{c}$.

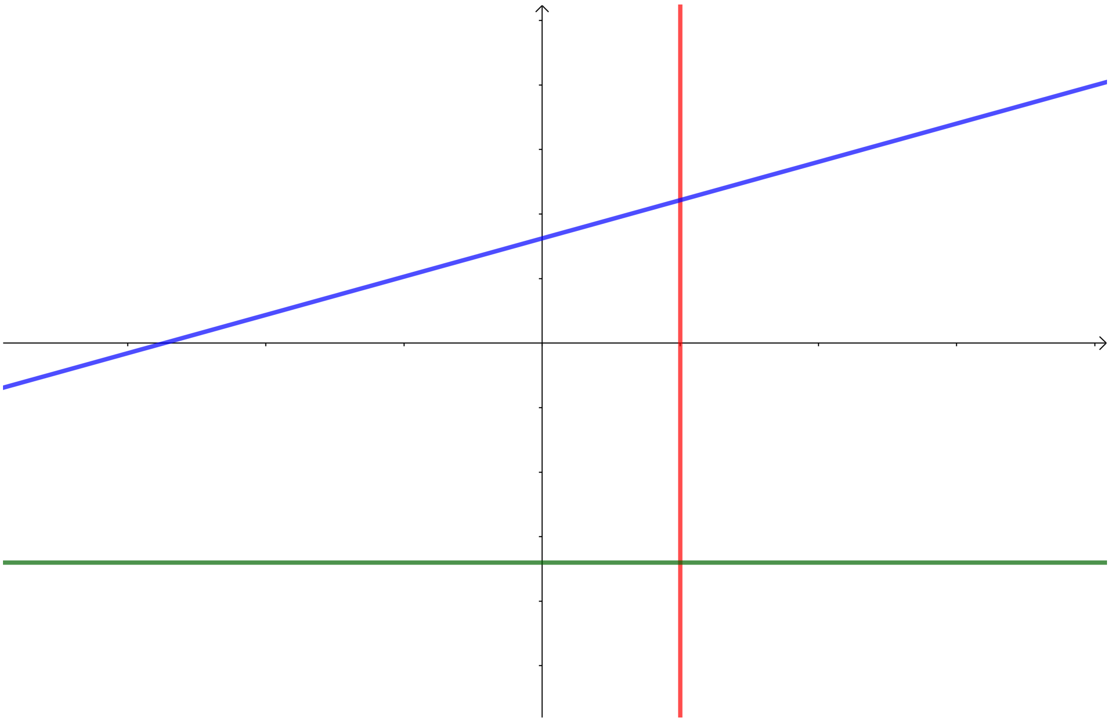
Remarque II.7. *Si f est dérivable en a, on note parfois* $\dfrac{df}{dx}(a) \overset{def}{=} f'(a)$*, autrement dit, nous avons :* $\dfrac{df}{dx}(a) \overset{def}{=} \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

A quoi bon ? *Ceci est très utile en Science Physique, mais aussi en Economie ou en Sciences de la Vie et de la Terre, car il peut y avoir d'autres variables que x comme par exemple le temps t , ou un angle θ.*

Par exemple, si $M : \theta \mapsto M(\theta)$ *alors* $\dfrac{dM}{d\theta}(a) \overset{def}{=} M'(a)$.

III Tangente

1 Équations de droites - Rappels et compléments



Proposition III.1 (Équation cartésienne réduite – Droite non verticale)**.**
Soient deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ tels que $x_A \neq x_B$.
(AB) : $y = mx+p$ est une droite non verticale dont les paramètres m et p se calculent comme suit.

1. ***Calcul de la pente ou du coefficient directeur.***
   $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$
2. ***Calcul de l'ordonnée à l'origine.***
   Après avoir calculé la valeur de m , on résout $y_A = mx_A + p$ où l'inconnue est p, tandis que m, x_A et y_A sont des paramètres connus.

Proposition III.2. *Soient deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ tels que $x_A \neq x_B$.*
Notant $m = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$, la droite non verticale (AB) admet aussi pour équation $y - y_A = m(x - x_A)$ i.e. $y = m(x - x_A) + y_A$.

Preuve de III.2 (Uniquement pour les plus motivé.e.s).
On raisonne par équivalences logiques. Ici $M(x_M\,;y_M)$ est un point « mobile » .

$$M \in (AB)$$

$$\overset{ssi}{\Longleftrightarrow} \text{ Les vecteurs } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires.}$$

Ne pas oublier la cas très particulier où A et M sont confondus.

Critère de colinéarité vu en 2G via le déterminant.

$$\overset{ssi}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{cc} \overrightarrow{AM} & \overrightarrow{AB} \\ \end{array} \begin{vmatrix} x_M - x_A & x_B - x_A \\ y_M - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0$$

$$\overset{ssi}{\Longleftrightarrow} \left(x_M - x_A\right)\left(y_B - y_A\right) - \left(x_B - x_A\right)\left(y_M - y_A\right) = 0$$

$\div(x_B - x_A)$ où $x_A \neq x_B$ $\quad$ *$\times(x_B - x_A)$*

$$\overset{ssi}{\Longleftrightarrow} \left(x_M - x_A\right)\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} - \left(y_M - y_A\right) = 0$$

$m = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$$\overset{ssi}{\Longleftrightarrow} (x_M - x_A)m - (y_M - y_A) = 0$$

$$\overset{ssi}{\Longleftrightarrow} y_M - y_A = m(x_M - x_A)$$

$$\overset{ssi}{\Longleftrightarrow} y_M = m(x_M - x_A) + y_A$$

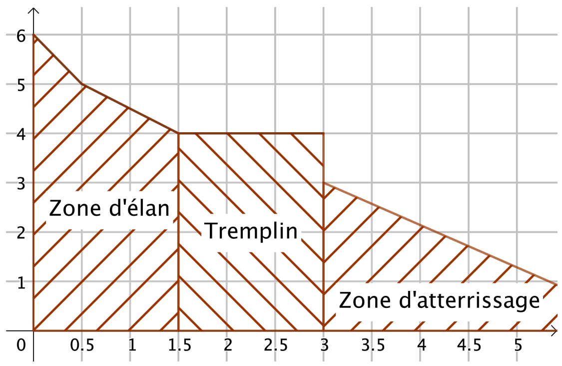
Proposition III.3 (Équation cartésienne réduite – Droite horizontale).
Soient deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ tels que $y_A = y_B$.
La droite horizontale (AB) admet $y = y_A$ pour équation cartésienne (l'ordonnée est fixée mais l'abscisse est libre).

Proposition III.4 (Équation cartésienne réduite – Droite verticale).
Soient deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ tels que $x_A = x_B$.
La droite verticale (AB) admet $x = x_A$ pour équation cartésienne (l'abscisse est fixée mais l'ordonnée est libre).

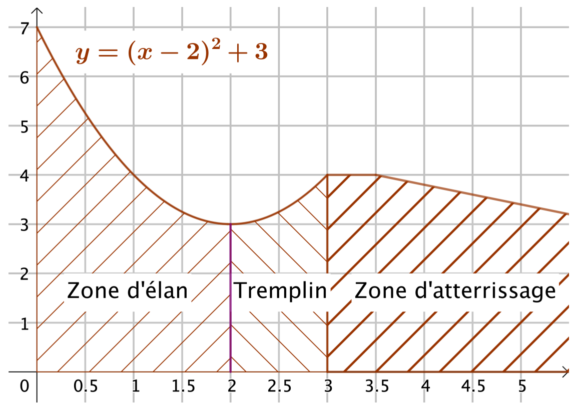
2 Un tremplin vers la tangente

Exercice III.5. *On souhaite déterminer la direction que va suivre un pratiquant de planche à neige à la sortie de l'un des tremplins suivants* (avec 1 unité = 3 m en abscisse et 1 unité = 1 m en ordonnée). *On supposera qu'à chaque fois le sportif se laissera soulever sans donner aucune impulsion.*

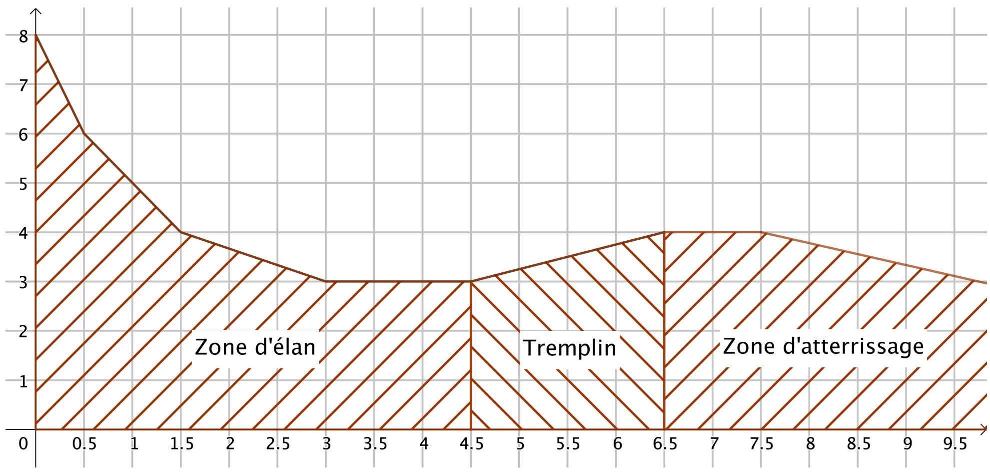
1. *Donner pour le 1*^{er} *tremplin une droite* $\mathscr{D}$ *qui* « porte » *le tout début du saut du sportif. Faire de même pour le 2*^{e} *tremplin.*
2. *Proposer une démarche permettant de proposer une réponse plausible dans le cas du 3*^{e} *tremplin.*



Tremplin n°1



Tremplin n°3

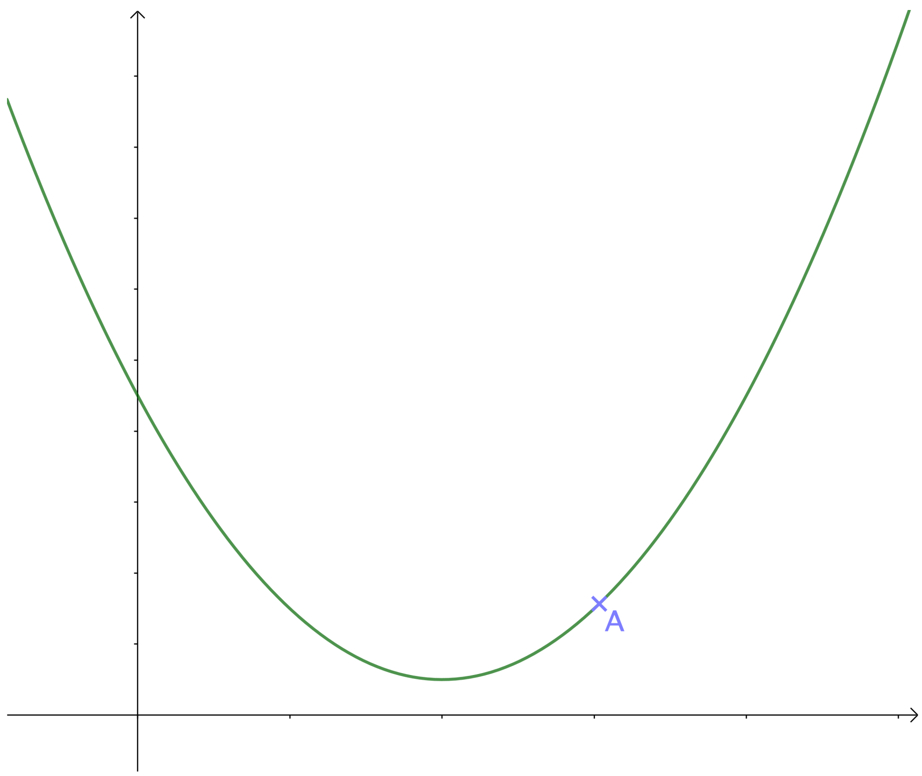


Tremplin n°2

3 La notion de droite tangente à une courbe

Considérons f une fonction définie sur un intervalle I dont on a donné la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ ci-dessous. Considérons $a \in I$, ainsi que sur $\mathscr{C}_f$ le point A d'abscisse fixe a et le point mobile M d'abscisse variable $a+h$ avec $h \neq 0$.

D'après la proposition III.1, $\dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est la pente de la corde (AM).

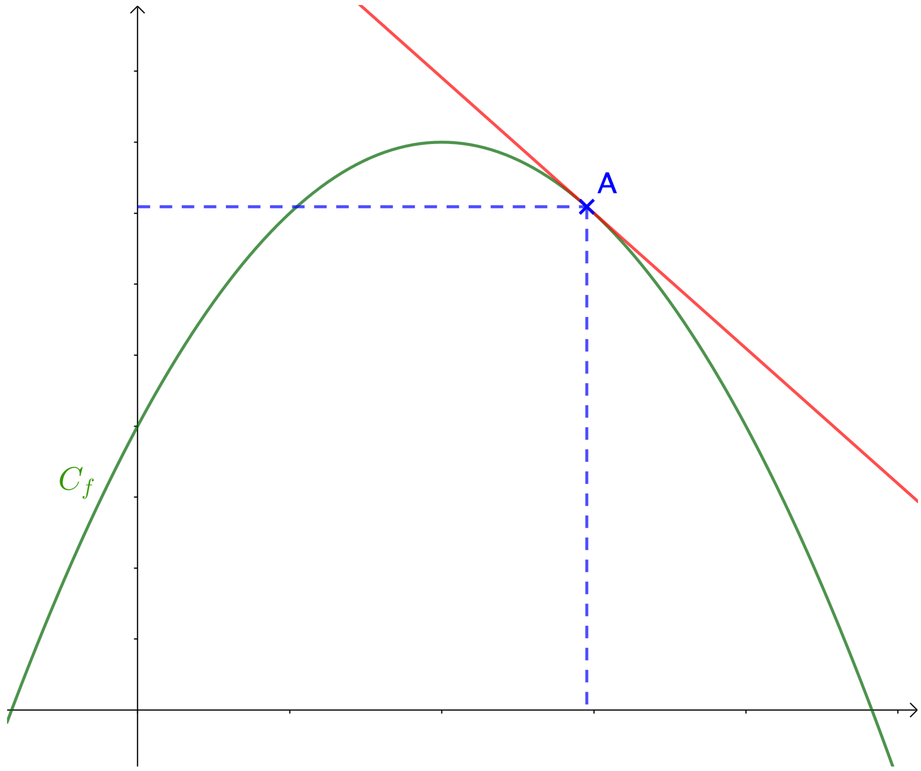


Intuitivement lorsque h tend vers zéro, le point M se rapproche du point A tout en restant sur la courbe $\mathscr{C}_f$. Ainsi pour h tendant vers zéro, la corde (AM) semble aller vers une « *position tangente limite* », la pente de cette « *position tangente limite* » étant $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$. Ceci motive la définition à venir.

ATTENTION !

Pour ne pas alourdir le cours, jusqu'à la fin de cette section f désignera toujours une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$, et $\mathscr{C}_f$ sera sa représentation graphique dans un repère orthogonal.

Définition III.6. *La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est l'unique droite T_a passant par le point $A(a\,;f(a))$ et de pente $f'(a)$.*



Proposition III.7. *La tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a admet pour équation $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$ i.e. $T_a : y - f(a) = f'(a)(x-a)$.*

Preuve de III.7.

Exercice III.8 (Tangentes horizontales)**.**
Que peut-on dire pour f si la tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est une droite horizontale ?

Exercice III.9. *Soit la fonction affine $g : x \to 7x + 3$ qui est définie sur $\mathbb{R}$. En raisonnant graphiquement, justifier que g est dérivable en tout réel a avec $g'(a) = 7$.*

Exercice III.10 (Tangentes parallèles à une droite connue)**.**
Soit la fonction cube $g : x \to x^3$ qui est définie sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative $\mathscr{C}_g$ admet-elle des tangentes parallèles à $\mathscr{D} : y = 12x + 20$?