

BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.

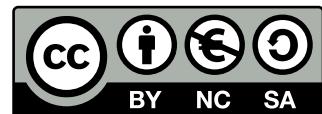


TABLE DES MATIÈRES

1. Les polygones	2
1.1. Au moins une solution	2
1.2. Théorème d’isopérimétrie polygonale	7

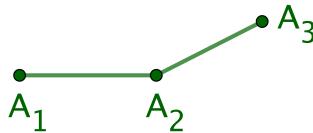
1. LES POLYGONES

1.1. Au moins une solution. Tout comme pour les quadrilatères, la convexité va jouer un rôle central pour l’isopérimétrie polygonale dans le cas général. Ceci explique que nous allons chercher à justifier l’existence d’au moins un n -gone convexe d’aire maximale parmi les n -gones convexes de longueur fixée.

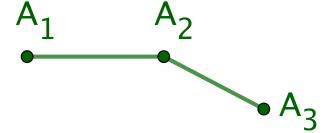
Fait 1. Pour tout n -gone convexe $\mathcal{P} = A_1 A_2 \cdots A_n$, l’une des alternatives suivantes a lieu.

- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, si $k \notin \{i ; i + 1\}$, alors $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) > 0$.
- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, si $k \notin \{i ; i + 1\}$, alors $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) < 0$.

Démonstration. Le cas $n = 3$ des triangles est immédiat. Considérons alors \mathcal{P} un n -gone convexe où $n \geq 4$. Nous savons que, relativement à \mathcal{P} , aucun triplet de sommets consécutifs alignés n’existe. Dès lors, dans le plan orienté, les trois premiers sommets sont placés suivant l’une des deux configurations suivantes.



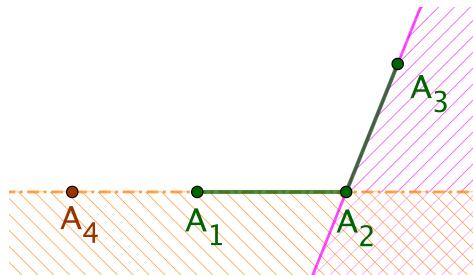
Cas positif.



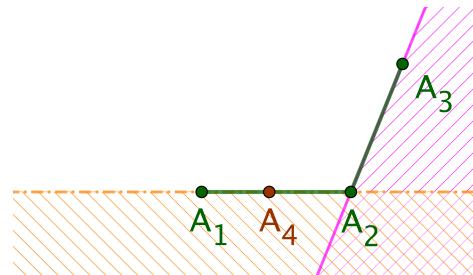
Cas négatif.

Considérons le cas positif, c'est-à-dire supposons que $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_3}) > 0$.

- $\overrightarrow{A'_1 A'_3} = \overrightarrow{A'_1 A'_2} + \overrightarrow{A'_2 A'_3}$ donne $\det(\overrightarrow{A'_2 A'_3}, \overrightarrow{A'_1 A'_2}) > 0$.
- Comme A_2, A_3 et A_4 ne sont pas alignés, et de plus A_1 et A_4 du même côté de la droite $(A_2 A_3)$, au sens large, nous obtenons $\det(\overrightarrow{A'_2 A'_3}, \overrightarrow{A'_2 A'_4}) > 0$.
- En continuant de proche en proche, nous arrivons à $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_{i+2}}) > 0$ pour $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ quelconque.
- Le point précédent et la convexité donnent $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$ pour $(i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ tel que $k \notin \{i ; i+1\}$.
- Montrons maintenant que $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_k}) > 0$ pour $k \in \llbracket 3 ; n \rrbracket$. Nous savons déjà l'inégalité vraie pour $k = 3$; passons donc à $k = 4$. Pour avoir $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_4}) > 0$, le point précédent donne qu'il faut vérifier que $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_4}) = 0$ est impossible. Supposons donc l'égalité vraie, ce qui implique d'avoir $n \geq 5$, car dans le cas contraire les sommets consécutifs A_4, A_1 et A_2 seraient alignés. Nous aboutissons aux configurations suivantes où les hachures et la droite en trait plein sont des zones interdites pour A_4 .

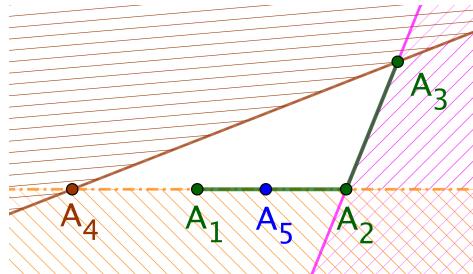


Cas 1.

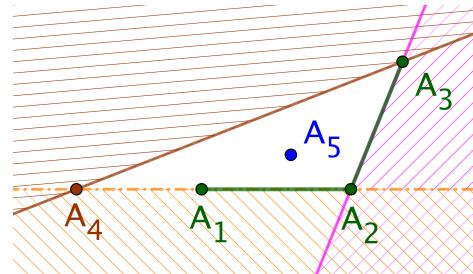


Cas 2.

Le cas 2 est impossible par raison de convexité, car A_1 et A_2 sont de part et d'autre de la droite $(A_3 A_4)$. Voyons donc ce qu'implique le 1^{er} cas pour A_5 .



Cas 1-1.



Cas 1-2.

Le cas 1-2 est impossible par raison de convexité, car $(A_4 A_5)$ sépare les points A_3 et A_2 . Notons que dans le cas 1-1, il est possible d'avoir $A_5 \in]A_4 A_1[$. Comme $A_5 \in (A_1 A_2)$, nous devons avoir $n \geq 6$, mais A_6 ne peut être ni à l'intérieur du triangle $A_2 A_3 A_4$ par convexité, ni sur la droite $(A_1 A_2)$, car A_4, A_5 et A_6 ne peuvent pas être alignés. Cette situation contradictoire montre que $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_4}) > 0$. En continuant de même, de proche en proche, nous arrivons à $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_k}) > 0$ pour $k \in \llbracket 3 ; n \rrbracket$.

- En généralisant le raisonnement précédent,¹ nous avons $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) > 0$ pour tout couple $(i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ vérifiant $k \notin \{i ; i+1\}$.

1. Se souvenir de la définition « cyclique » de la suite (A'_i) .

Le cas négatif se traite de façon similaire. \square

Nous allons établir une réciproque élargie du résultat précédent. Ce nouveau fait, le plus technique à justifier, va nous rendre un grand service par la suite.²

Fait 2. Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n -cycle vérifiant l'une des alternatives suivantes.

- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$.
- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \leq 0$.

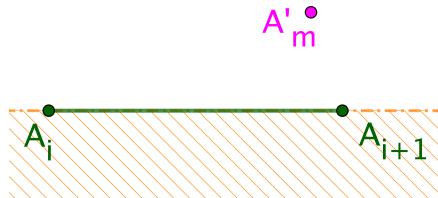
Sous l'une de ces hypothèses, l'une des assertions ci-après est validée.

i. \mathcal{L} est totalement dégénéré.

ii. Il existe un k -gone convexe \mathcal{C} tel que $k \leq n$, $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \text{Long}(\mathcal{L})$ et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{L})$. \mathcal{C} se construit en retirant, si nécessaire, des sommets de \mathcal{L} , sans modifier l'ordre de parcours pour les sommets gardés. De plus, si A'_i et A'_k sont deux sommets consécutifs de \mathcal{C} , alors les sommets A'_j , pour $j \in \llbracket i ; k \rrbracket$, sont les seuls situés sur $[A'_i A'_k]$.

Démonstration. Par symétrie des alternatives, nous pouvons nous concentrer sur le cas positif,³ c'est-à-dire supposer que $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$. Seul le cas \mathcal{L} non totalement dégénéré requiert notre attention. L'idée de la construction est simple : il s'agit de chercher des sommets extrémaux, c'est-à-dire qui « forment un angle ». Nous allons raisonner algorithmiquement en utilisant une variable i initialisée à 1, et une liste C , initialement vide, pour stocker les sommets « utiles » à la fabrication du k -gone convexe final.

- A1** Si $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_{i+2}}) > 0$, nous ajoutons A'_{i+1} à la fin de la liste C , puis nous passons directement à l'action **A3**.
- A2** Sinon, il existe $m \in \mathbb{N}_{>i+2}$ minimal tel que $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_m}) > 0$, car \mathcal{L} n'est pas totalement dégénéré.



Nous arrivons aux constatations suivantes.

- Les points A'_i , A'_{m-1} et A'_m ne sont pas alignés, et par conséquent deux à deux distincts.
- Comme $\forall j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $\det(\overrightarrow{A'_{m-1} A'_m}, \overrightarrow{A'_{m-1} A'_j}) \geq 0$, nous avons $A'_j \in (A'_i, A'_{m-1}]$, pour $j \in \llbracket i ; m-1 \rrbracket$.⁴
- L'évaluation de l'aire algébrique via le point de calcul A'_{m-1} peut se passer des sommets A'_j pour $j \in \llbracket i ; m-1 \rrbracket$, par raison d'alignement.
- Ignorer des sommets, tout en conservant l'ordre de parcours, pour former un nouveau cycle \mathcal{L}' , donne $\text{Long}(\mathcal{L}') \leq \text{Long}(\mathcal{L})$.

2. Pourquoi s'attarder sur des inégalités larges ? Parce que nous allons travailler dans un ensemble compact, et donc fermé, de n -cycles. Pour garder des n -gones, nous devrions utiliser des non-égalités, mais ceci nous ferait sortir du cadre fermé qui nous intéresse. Nous n'avons pas le choix !

3. On pourrait aussi invoquer des cycles opposés.

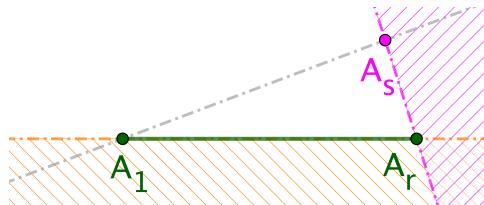
4. Le point A'_{m-1} est le plus à droite sur notre schéma.

Les constatations précédentes justifient l'ajout de A'_{m-1} à la fin de la liste C , uniquement si A'_{m-1} n'est pas dans cette liste,⁵ puis de poser $i = m - 2$, puisque nous augmentons i de 1 juste après.

A3 Ajoutons 1 à i . Si $i \geq n + 1$, nous avons fini, sinon nous retournons à l'action **A1**.

Commençons par justifier que l'algorithme s'arrête sans entrer dans une boucle infinie. Tant que l'indice m de l'étape **A2** vérifie $m \leq n$, il n'y a aucune difficulté, car i augmente, et les sommets ajoutés se placent « *avant* » l'origine A_1 du n -cycle initial \mathcal{L} sans empiéter sur les « *premiers* » sommets. Supposons avoir $m \in \llbracket n ; n + i \rrbracket$ pour un indice i , où forcément $i > 1$, et par conséquent A'_i a été stocké dans la liste C .

- Commençons par noter l'existence de A_1 , A_r et A_s non alignés avec A_r et A_s stockés dans C . En effet, A_r vient de l'application de l'algorithme à $i = 1$, puis A_s s'obtient avec $i = r$.
- Supposons que $i = s$. Pour $j \in \llbracket s + 1 ; n \rrbracket$, les points A'_j sont sur la droite $(A'_s A'_1)$, et ensuite plus généralement pour $j \in \llbracket s ; m \rrbracket$. Le schéma suivant montre sans ambiguïté qu'alors $A'_{m-1} = A'_1$.⁶ Dès lors, $m = n + 2$, d'où l'ajout de A'_1 à la fin de la liste C , puis l'arrêt de l'algorithme à l'étape suivante.



- Le raisonnement précédent fonctionne plus généralement lorsque $A'_i \notin (A'_1 A'_r)$.
- Il reste le cas où $A'_i \in (A'_1 A'_r)$. Ceci nous donne le schéma suivant, où $A'_i \in [A'_1 A'_r]$ est possible, a priori.



L'algorithme assure l'existence d'un point $A'_p \notin (A'_1, A'_r)$ stocké dans C et « *précédent* » A'_i , tel que tout point entre A'_p et A'_i soit sur $(A'_p A'_i)$. Nous arrivons au schéma plus précis ci-dessous, où $A'_1 \in [A'_i, A'_r]$ par positivité large des déterminants $\det(\overrightarrow{A'_p A'_{p+1}}, \overrightarrow{A'_p A'_k})$, avec la possibilité d'avoir $A'_p = A'_s$.



Ici, A'_r est déjà présent dans C , donc l'algorithme s'arrêtera après avoir juste modifié i en $(n + r)$. Notons que les points de A'_{i+1} à A'_{r-1} sont « *mangés* » comme attendu.

5. La justification de l'algorithme, donnée un peu plus bas, montrera la possibilité d'avoir un doublon dans la liste C .

6. $A'_{m-1} \neq A'_1$ contredirait la condition de positivité large sur les déterminants.

Il faut aussi justifier que la liste C , lue de gauche à droite, donnera les sommets du k -gone convexe \mathcal{C} cherché.

- Par construction, deux sommets « consécutifs » A'_r et A'_s de \mathcal{C} , sont tels que tout point du cycle initial \mathcal{L} situé entre A'_r et A'_s se trouve sur le segment $[A'_r A'_s]$. En ignorant ces points, on fait donc diminuer, au sens large, la longueur du n -cycle, mais sans modifier la valeur de l'aire algébrique, cette dernière étant calculable depuis A'_r , ou A'_s . Donc $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \text{Long}(\mathcal{L})$ et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{L})$
- Par construction, trois sommets « consécutifs » A'_q , A'_r et A'_s de \mathcal{C} , sont tels que $\det(\overrightarrow{A'_q A'_r}, \overrightarrow{A'_q A'_s}) > 0$. En particulier, ces trois sommets « consécutifs » ne sont pas alignés. Dès lors, \mathcal{C} est un k -gone, et il est aussi convexe.

Pour finir, la preuve ci-dessus de l'algorithme montre que pour A'_i et A'_k deux sommets consécutifs de \mathcal{C} , les sommets $(A'_j)_{j \in \llbracket i;k \rrbracket}$ sont les seuls situés sur $[A'_i A'_k]$. \square

Remarque 1.1. La propriété sur les sommets donne un algorithme très simple de construction de \mathcal{C} lorsque \mathcal{L} n'est pas totalement dégénéré.

- A1** On pose $i = 1$, et on considère une liste vide C .
- A2** On pose $j = i + 1$, puis tant que $A'_j = A'_i$, on augmente j de 1.
- A3** On pose $k = j + 1$, puis tant que $A'_k \in (A'_i A'_j)$, on augmente k de 1.
- A4** Si A'_k n'est pas dans C , on ajoute ce sommet à droite de la liste, on pose $i = k$, et on retourne à l'action **A2**.

Le résultat qui suit est juste là pour simplifier la démonstration du fait 4 à venir qui est la raison d'être de cette section.

Fait 3. Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan et $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des uplets de coordonnées $(x(A_1); y(A_1); \dots; x(A_n); y(A_n))$ où $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ désigne un n -cycle vérifiant les conditions suivantes.

- $\text{Long}(\mathcal{L}) = \ell$.
- $\forall (i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$.

Dès lors, la fonction $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, qui à un uplet de \mathcal{U} associe l'aire algébrique du n -cycle qu'il représente, est une fonction admettant au moins un maximum, qui est positif strict. De plus, un n -cycle maximisant α est forcément un n -gone convexe.

Démonstration. \mathcal{U} est fermé dans \mathbb{R}^{2n} , car les conditions le définissant le sont, et il est borné, car inclus dans la boule fermée de centre O et de rayon ℓ , donc \mathcal{U} est un compact de \mathbb{R}^{2n} . De plus, α est continue d'après le fait ???. Donc, par continuité et compacité, α admet un maximum sur \mathcal{U} , celui-ci étant positif strict pour les raisons suivantes où \mathcal{R} désigne un n -gone régulier convexe.

- Il est connu, et facile de démontrer, que pour tout n -gone régulier convexe \mathcal{R} , nous avons $\text{Perim}(\mathcal{R}) = 2n \sin(\frac{\pi}{n})\rho$ et $\text{Aire}(\mathcal{R}) = n \sin(\frac{\pi}{n}) \cos(\frac{\pi}{n})\rho^2$ où ρ désigne le rayon du cercle circonscrit à \mathcal{R} . Ceci donne un n -gone régulier convexe \mathcal{R} de longueur ℓ , et d'aire non nulle.
- Via une translation, nous pouvons supposer \mathcal{R} d'origine O .
- $\text{Aire}(\mathcal{R}) = |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R})|$ selon le fait ???, et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}^{\text{op}}) = -\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R})$ d'après le fait ???.
- $\mathcal{R} \in \mathcal{U}$, ou $\mathcal{R}^{\text{op}} \in \mathcal{U}$ selon le fait 1.

- Si $\mathcal{R} \in \mathcal{U}$, alors \mathcal{R} est orienté positivement, d'où $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}) \geq 0$, et par conséquent $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}) = \text{Aire}(\mathcal{R})$ (c'est immédiat en utilisant le centre de gravité de \mathcal{R} comme point de calcul). Nous avons une propriété similaire si $\mathcal{R}^{\text{op}} \in \mathcal{U}$.

Pour finir, justifions que $\mathcal{M} \in \mathcal{U}$ maximisant α est forcément un n -gone convexe.

- Les côtés de \mathcal{M} contiennent tous exactement deux sommets.

XXXXX

- La positivité des déterminants $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k})$ et le point précédent impliquent que deux côtés non contigus de \mathcal{M} ne peuvent pas être sécants.

XXXX

fait ??

Le fait 2 donne un k -gone convexe \mathcal{C} , où $k \leq n$, tel que $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \text{Long}(\mathcal{M})$, ainsi que $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{M})$. Ceci nous amène aux deux alternatives suivantes donnant un n -gone convexe \mathcal{C}' tel que $\text{Long}(\mathcal{C}') \leq \text{Long}(\mathcal{M})$ et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}') \geq \overline{\text{Aire}}(\mathcal{M})$.

- (1) Si M est déjà un n -gone convexe, alors $\mathcal{C} = \mathcal{M}$ et donc $\mathcal{C}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}$ convient.
- (2) Sinon, forcément \mathcal{C} possède strictement moins de sommets que \mathcal{M} , de sorte que $\text{Long}(\mathcal{C}) < \text{Long}(\mathcal{M})$. Dans ce cas, le n -gone convexe \mathcal{C}' est donné par le fait ?? ci-dessous appliqué au convexe \mathcal{C} avec $s = n - k$ et $L = \text{Long}(\mathcal{M})$, en se souvenant que $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) = |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C})| = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{C})$ selon le fait ??.

Nous arrivons au résultat fondamental sur les n -gones convexes.

Fait 4. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Parmi les n -gones convexes de longueur fixée, non nulle, il en existe au moins un d'aire maximale.

Démonstration. Soit un n -gone convexe \mathcal{P} ayant la longueur fixée. Comme pour \mathcal{R} dans la preuve précédente, nous pouvons supposer \mathcal{P} d'origine O , via une translation, puis nous avons soit $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$ et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$, soit $\mathcal{P}^{\text{op}} \in \mathcal{U}$ et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}^{\text{op}}) = \text{Aire}(\mathcal{P}^{\text{op}})$. Comme, de plus, $\text{Aire}(\mathcal{P}^{\text{op}}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$, nous pouvons supposer avoir $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$, quitte à échanger \mathcal{P} et \mathcal{P}^{op} . Dès lors, pour conclure, il suffit de faire appel au fait 3. \square

1.2. Théorème d'isopérimétrie polygonale.

Fait 5. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Parmi les n -gones de périmètre fixé, non nul, le n -gone régulier convexe est le seul à maximiser l'aire.

Démonstration. Tout a été fait, il ne reste plus qu'à assembler les arguments.

- (1) Le cas $n = 3$ correspond au fait ??.
- (2) Le cas $n = 4$ a été établi dans le fait ??.
- (3) Pour $n \geq 5$, il suffit de se rappeler des faits suivants où $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.
 - D'après le fait 4, il existe, au moins, un n -gone convexe maximisant l'aire parmi les n -gones convexes de périmètre, ou de longueur, fixé.
 - Selon le fait ??, un n -gone « *maximal* » doit être, a minima, régulier et convexe.
 - Soit \mathcal{M} un n -gone convexe maximisant l'aire parmi les n -gones convexes de périmètre fixé. Si \mathcal{M} n'est pas régulier, alors soit il n'est pas équilatéral, soit il est équilatéral, mais pas équiangle. Or, ces alternatives sont impossibles d'après les faits ?? et ??.
 - Pour un périmètre donné, non nul, il n'existe qu'un seul n -gone régulier convexe ayant ce périmètre. \square

Ici s'achève notre joli voyage.