

CROIX, DORN & VERMELO

CB², 1

Source: "Théo. des Ensembles et Logique Math."
Jacques POTHIN des étapes

YBII

AC (Axiome du Choix)

Pour tout E , $\exists f: \underline{\mathcal{P}(E)}^* \rightarrow E$ tq $\forall A \subseteq E, A \neq \emptyset, f(A) \in A$.

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$$

i) On a deux variantes plus "réalistes".

↳ DEN (Axiome du Choix Dénombrable)

Pour toute famille dénombrable $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'ens. non vides, $\exists f: \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ tq $\forall i, f(i) \in A_i$.

↳ DEF (Axiome du Choix Dépendant)

A une ens. non vide, R une relati^e sur A tq $\forall x \in A, \exists y \in A$ tq $x R y$.

$\forall x_0 \in A, \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tq $\forall i \in \mathbb{N}, x_i R x_{i+1}$.

Pages 53 et suivantes est démontrée l'équivalence de AC avec ces axiomes suivants.

↳ AC₁: pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'ens. non vides, $i \in I \neq \emptyset, \exists f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ tq $\forall i, f(i) \in A_i$.

↳ AC₂: pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'ens. non vides, $i \in I \neq \emptyset, \prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

↳ AC₃: pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'ens. non vides, $i \in I \neq \emptyset$, avec $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, il existe un ens. C tq $\forall i, \exists! x \in C$ tq $x \in A_i$, si $\#(A_i \cap C) = \ell$.

DÉM
D

IGOR

sp
Ronn

DJ

A2o (Axiome de Zorn)

Pour tout ens. inductif E , $\exists c \in E$ tq $\forall x \in E$, $c \leq x \Rightarrow c = x$,
i.e. E admet un élément maxi.

i

Ens. inductif: ens. ordonné dont tous les chaînes sont majorées.

Chaîne: C m. ens. de E ordonné qui est totalement ordonné via l'intersection \cap de l'ordre de E .

A2e (Axiome de Zorn étendu)

Tt ens. non vide peut être bien ordonné.

$$AC \Leftrightarrow A2o \Leftrightarrow A2e$$

A2e \Rightarrow AC

Soit $E \neq \emptyset$ un ens.

\hookrightarrow A2e donne (E, \leq) bien ordonné.

\hookrightarrow $f: \mathcal{P}(E)^+ \rightarrow E$ convient.

$$A \mapsto \min_{\leq} A$$

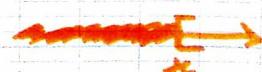
On a obtenu AC.

AC \Rightarrow A2e

Soit $f: \mathcal{P}(E)^+ \rightarrow E$ une fnc. de choix sur E un ens. non vide.

\hookrightarrow T m-ens. suppose munie d'un bon ordre \leq_T .

\hookrightarrow T ait une f -chaîne si $\forall x \in T$, $x = f(E - \{y \in T / y <_T x\})$





↪ B est un segment initial de T, $B \subseteq T$, où $\{y \in T / y <_T x\} \subseteq B$.

Si $q \in (T, \leq_T)$ et (U, \leq_U) sont deux f -chaînes, alors l'un des eus. est un segment initial de l'autre, et son bordure est la restriction de celle de l'autre.

↪ $P = \{x \in T \cap U / \forall n \in U, [n \leq_U x \Rightarrow n \in T \wedge n <_T x]\}$
et $\forall u \in T, [u <_T x \Rightarrow u \in U \wedge u <_U x]\}$

↪ Supposons $P \neq U$ et $P \neq T$.

$d_0 = \min_{\leq_T} (T - P)$ et $n_0 = \min_{\leq_U} (U - P)$ existent.

On pose: $I = \{d \in T / d <_T d_0\}$

$I = \{n \in U / n <_U n_0\}$

GO

DU

TFI

↪ Supposons avoir $d \in I \subseteq T$.

Comme $d <_T d_0$, $d \in P \subseteq T \cap U \subseteq U$.

Par déf. de P, montrant $n_0 <_U d$, alors $n_0 \in T$ et $n_0 <_T d$, on aurait donc $[n_0 \leq_U d \Rightarrow n_0 \in T \wedge n_0 <_T d_0]$, d'où $n_0 \in I \subseteq P$, d'où une contradiction.

Donc nécessairement $n_0 >_U d$, puis $I \subseteq J$, puis $I = J$ par sym.-des rétés.
Donc $J \neq \emptyset$.

↪ Ensuite, $d_0 = f(E - I)$ et $n_0 = f(E - J)$ donnent $d_0 = n_0$ (on travaille avec deux f -chaînes).

Donc $\forall n \in U$, on a:

$$n <_U n_0 \Rightarrow n \in J$$

$$\Rightarrow n \in I$$

$$\Rightarrow n \in T \wedge n <_T d_0$$

$$\Rightarrow n \in T \wedge n <_T n_0$$

DI

1

Par sym., $\forall v \in T$, $[v <_T d_0 \Rightarrow v \in U \wedge v <_U d_0]$
 ie $[v <_T d_0 \Rightarrow v \in U \text{ et } v <_U d_0]$.

Donc $n_0 \in P$ contredit $n_0 \in T - P$.

↳ Donc si $I \neq \emptyset$, on a une contradiction résultant $P \neq T$ et $T \neq U$ impossible.

↳ Partons avoir $I = \emptyset$ et $J = \emptyset$?

$I = \emptyset$ signifie que $d_0 = \min_{\leq_T} T$.

$J = \emptyset$ signifie que $n_0 = \min_{\leq_U} U$.

T et U étant des f -chaînes, on a :

$$d_0 = f(E) = n_0.$$

On conclut comme avant car "ces implications sont vides",
 ie du type $\perp \Rightarrow \dots$.

↳ En résumé, $P = U$

ou $P = T$. CQFD!

⚠️ Nous ne savons pas si une f -chaîne existe.

$Z_0 = \min$ des f -chaînes de E ($Z_0 = \emptyset$ possible).

↳ $Z_0 \neq \emptyset$ car $\{a\} = f(E)$ est une f -chaîne.

↳ (Z_0, \leq) déf. via :

$$x \leq y \iff \begin{cases} \exists T \text{ une } f\text{-chaîne tq } (x; y) \in T \\ \text{et } x \leq_T y \end{cases}$$

↳ le résultat précédent sur (T, \leq_T) et (U, \leq_U)
 donne que \leq déf. bien un ordre sur Z_0 .

$\hookrightarrow \sqsubseteq_{Tq} \leq$ est un bon ordre.

Soit $P \subseteq \mathbb{Z}$ avec $P \neq \emptyset$.

Soit $x \in P$ et (T_x, \leq_{T_x}) une f -chaîne contenant x .

$P \cap T \Rightarrow x_0 = \min_{\leq_{T_x}} (P \cap T)$ existe.

Soit $y \in P$ qqq et (T_y, \leq_{T_y}) une f -chaîne contenant y .

• cas 1: $y \notin T_x$

On sait que T_x est un reg. initial de T_y , d'où

$x_0 \leq_{T_y} y$.

• cas 2: $y \in T_x$

Dans ce cas, par déf. de \leq , on a: $x_0 \leq_{T_x} y$,

dans ce cas, par déf. de \leq , on a: $x_0 \leq y$, i.e.
 $x_0 = \min_{\leq} P$.

$\hookrightarrow (Z, \leq)$ est une f -chaîne.

Soit $x \in \mathbb{Z}$, et (T_x, \leq_x) une f -chaîne contenant x .

prop. du reg. initial

On sait que $\{y \in \mathbb{Z} / y < x\} \stackrel{?}{=} \{y \in T_x / y <_{T_x} x\}$

d'où $f(E - \{y \in \mathbb{Z} / y < x\})$

$$= f(E - \{y \in T_x / y <_{T_x} x\})$$

$$= x.$$

\hookrightarrow Supposons enfin que $\mathbb{Z} \notin E$.

$$x_0 = f(E - \mathbb{Z}) \text{ puis } Z_0 = \mathbb{Z} \cup \{x_0\}.$$

On prolonge \leq à Z_0 via $x \leq x_0$ pour $x \in Z_0$ qqq.

• Z_0 est une f -chaîne comme \mathbb{Z} et par défaut de x_0 .

• Donc $Z_0 \subseteq \mathbb{Z}$ d'où $x_0 \in \mathbb{Z}$ nécessaire⁺, puis

↳ Impossible car
 \mathbb{Z} est une chaîne
de deux!

Finalité, $E = \emptyset$ permet de conclure.

$A^{\text{fin}} \sim AC \Rightarrow A^{\text{fin}}$

$f : A \rightarrow A$ croissante sur (A, \leq_A) un ens. inductif.

f admet alors au moins un pt fixe.

↳ Si non $\{a \in A / a <_A f(a)\} = A$.

↳ Soit $P = \mathcal{P}(A)$ que l'ordonne bien via \leq_P .) On utilise A^{fin} ici.

On sait que $\text{card } P > \text{card } A$.

↳ ν est une applic. qui à tte éléme C associe un maj. de C. → Besoin de AC car on ne sait rien de la card. de l'ens. des majs.

On pose alors $g(\beta) = f(\nu(\{g(\alpha), \alpha < \beta\}))$ car c'est faisable.

En effet,

$\text{Prep } \mathcal{B}(\beta)$ [montrons par induc. que $\overset{g(\beta)}{\text{est bien ordg. avec car }} \tilde{P}$]
tpt $\forall \alpha \in P, \alpha < \beta \Rightarrow g(\alpha) <_A g(\beta)$.

Il s'agit de montrer que $\mathcal{B}(\beta)$ est vrai pour tt $\beta < d$, alors on a aussi $\mathcal{B}(d)$ validée.

Sat $d_1 < d$ et $d_2 < d$, $\underset{\text{dés que}}{g(d_1) <_A g(d_2)}$

comme $\{g(\alpha) / \alpha < d\}$ Avec l'existence!

est totale= ordonné, il admet un maj. et donc $g(d)$ existe.

Pour $d < \beta$, on a: $g(d) \leq \nu(\{g(\alpha), \alpha < \beta\})$
 $\Rightarrow g(d) <_A f(g(d)) \leq g(\beta)$

↳ g étant injective, on a $\text{card } P \leq \text{card } A < \text{card } \mathbb{N}$.
Contradic. !

Soit enfin A un ens. inductif "qci".

On doit trouver $m \in A$ un majorant de A .

on considère $f : A \rightarrow A$

Besoin de AC.

$$x \mapsto \begin{cases} a_x \text{ si } \exists a_x \text{ tq } a_x >_A x \rightarrow \text{"petits" vols} \\ x \text{ sinon} \end{cases} \rightarrow \text{"grands" vols}$$

clairet $\vdash f(x) \geq_A x$ d'où $m \in A$ tq $f(m) = m$, mais dans ce cas $\neg (\exists a \in A / a >_A m)$ par déf. de f , d'où $\forall a \in A, a \leq_A m$.

i) Si $\exists m \in A$, et $f : A \rightarrow A$ avec A inductif et $x \leq_A f(x)$, alors le pt fixe m de f s'obtient via le maxi. de A !

(AC&) $A \neq \emptyset \Rightarrow A \neq \emptyset$

Soit $A \neq \emptyset$ un ens., il s'agit de bien l'ordonner.

$\mathcal{B} = \{ (B, \leq_B) \text{ bien ordonné avec } B \subseteq A \}$

$\hookrightarrow \mathcal{B} \neq \emptyset$ via ces injections.

$\hookrightarrow \mathcal{B}$ munissoit d'un ordre \leq comme suit.

$(B, \leq_B) \leq (C, \leq_C)$ unique⁵ si :

- $B \subseteq C$
- $\forall b \in B, \forall c \in C - B, b \leq_C c$
- Sur B^2 , $b \leq_B b' \Leftrightarrow b \leq_C b'$

$\hookrightarrow (\mathcal{B}, \leq)$ est inductif?

Soit \mathcal{F} une chaîne de \mathcal{B} . On pose $M = \bigcup_{(B, \leq_B) \in \mathcal{F}} B$.

On munira M d'un ordre \leq_n comme suit.

$a \leq_n b \Leftrightarrow \exists (B, \leq_B) \in \mathcal{F} \text{ tq } a \leq_B b$.

(M, \leq_n) est bien ordonné :

- $P \subseteq M$ et $p \in P$ fixes.
- Sur $(B, \leq_B) \in \mathcal{F}$ tq $p \in B$.

- $P \cap B \neq \emptyset$ donc $P \cap B$ admet un plus petit élément pour \leq_B (qui est un bon ordre).
- Soit $m \in P$ tqq, il faut tqq $e \leq_B m$.
 - $m \in B$: $e \leq_B m$, i.e. $e \leq_{\pi} m$.
 - $m \notin B$: on sait que $\exists (C, \leq_C) \in \mathbb{F}$ tqq $m \in C$.

\mathfrak{F} étant une chaîne, on a au bien $(B, \leq_B) \leq (C, \leq_C)$ ou bien $(C, \leq_C) \leq (B, \leq_B)$.

Comme $m \in C - B$, on ne peut avoir que $(B, \leq_B) \leq (C, \leq_C)$.

Par déf. de l'ordre \leq_C , comme $e \in B$ et $m \in C - B$, on a: $e \leq_C m$, puis $e \leq_{\pi} m$.

Comme (π, \leq_{π}) est bien ordon., c'est un max. de \mathbb{F} , et donc (B, \leq) est inductif.

↔ Donnons (Z, \leq_Z) un max. de \mathbb{F}_B .

Supposons par l'absurde que $Z \subset A$, i.e. $Z \notin A$.

AC (Prenant $a \in A - Z$, on construit (S, \leq_S) avec $S = Z \cup \{a\}$ et \leq_S étant \leq_Z via $x \leq_S a$ pour $x \in S$.

Des lors, $Z < S$ contredit la déf. de Z .

Nécessairement $A = Z$ est bien ordonnée via \leq_Z .



Tout ce qui précède est "naturel" mais assez technique.

A-t-on des équivalents à la DÉN qui seraient moins violents à démontrer?