

IDENTITÉS PARTICULIÈRES GÉNÉRALISABLES RIGOREUSEMENT

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
[https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/visual-proof/
polynomial-analytic-principles](https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/visual-proof/polynomial-analytic-principles).*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



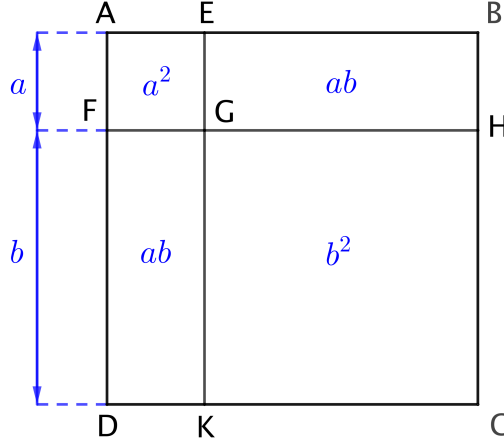
TABLE DES MATIÈRES

- | | |
|--|---|
| 1. Au commencement étaient les polynômes | 2 |
| 2. Puis vinrent les fonctions analytiques d’une seule variable | 6 |

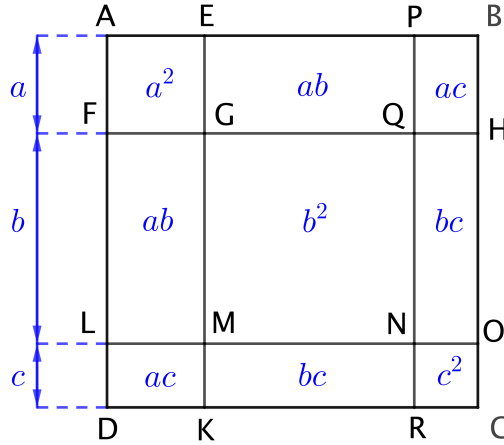
Ce document donne un cadre rigoureux pour justifier la généralisation de certaines identités obtenues via des cas « *particuliers évidents* » comme, par exemple, dans les preuves sans mot.

1. AU COMMENCEMENT ÉTAIENT LES POLYNÔMES

Via de simples calculs d'aires, il est très facile de découvrir les classiques identités remarquables $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ et $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Par exemple, en considérant le dessin ci-dessous où $ABCD$, $AEFG$ et $GHCK$ sont des carrés, il est évident que $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Malheureusement, cette démonstration n'est valable que pour $a > 0$ et $b > 0$ (ce sont des contraintes géométriques concrètes).



Comment passer à $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ pour a et b deux réels de signes quelconques ? Classiquement, nous faisons une vérification via un calcul algébrique. En résumé, nous conjecturons géométriquement, puis nous validons algébriquement. Bien que rigoureuse, la démarche précédente est peu satisfaisante, car elle balaye d'un revers de main l'approche géométrique, dont le rôle est réduit à la découverte d'une formule. Si nous considérons le dessin ci-après, il est dommage de devoir faire du calcul algébrique pour valider $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ pour a , b et c des réels de signes quelconques. Ce serait bien de pouvoir passer directement de $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ vraie pour $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$, à la validation de l'identité pour a , b et c de signes quelconques.



Le fait 2, donné un peu plus bas, rend licite le passage des formules géométriques contraintes précédentes au cas général en faisant les choix suivants de fonctions polynomiales.

- $p_1(a; b) = (a+b)^2 - a^2 - b^2 - 2ab$
- $p_2(a; b; c) = (a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$

Préliminaire 1. Soit $p(x)$ une fonction polynomiale à une variable et de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe une fonction polynomiale $q(x)$ de degré $(n-1)$ telle qu'on ait $p(x) - p(\lambda) = (x - \lambda)q(x)$. Ceci implique que p ne peut pas avoir plus de n zéros.

Démonstration. Posant $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$ par hypothèse, nous avons :

$$\begin{aligned} p(x) - p(\lambda) &= \sum_{k=0}^n a_k (x^k - \lambda^k) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k (x - \lambda) \left(\sum_{i=0}^{k-1} x^i \lambda^{k-1-i} \right) \\ &= (x - \lambda) \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} a_k x^i \lambda^{k-1-i} \end{aligned}$$

La factorisation conjointe à la diminution du degré ne permet pas d'avoir plus de n zéros. \square

Fait 2. Soit $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale à n variables, où $n \in \mathbb{N}^*$. Si p s'annule sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$, alors p s'annule sur \mathbb{R}^n tout entier.

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour démontrer la validité de la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie par « Pour tout fonction polynomiale réelle $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, si p s'annule sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$, alors p s'annule sur \mathbb{R}^n tout entier. ».

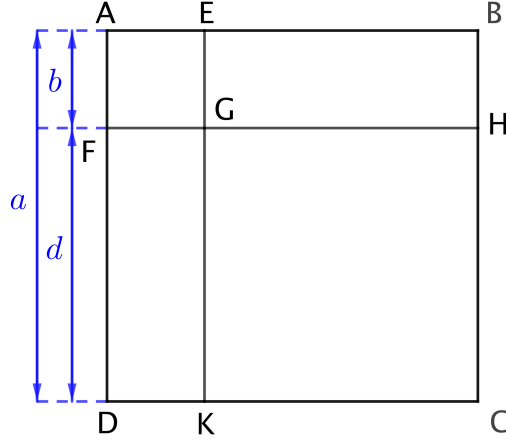
- **Cas de base.** $\mathcal{P}(1)$ signifie qu'une fonction polynomiale réelle à une variable s'annulant sur \mathbb{R}_+^* est identiquement nulle sur \mathbb{R} tout entier. Or, selon le résultat préliminaire 1, un polynôme réel non nul n'a qu'un nombre fini de racines, donc $\mathcal{P}(1)$ est validée.
- **Hérédité.** Supposons $\mathcal{P}(n)$ valide pour un naturel n quelconque. Soit une fonction polynomiale p à $(n+1)$ variables vérifiant les conditions de la propriété $\mathcal{P}(n+1)$.
 - (1) Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, puis la fonction polynomiale $p_x(x_1; \dots; x_n) = p(x_1; \dots; x_n; x)$. Comme p_x vérifie les conditions de la propriété $\mathcal{P}(n)$, par hypothèse de récurrence, nous avons $p_x(x_1; \dots; x_n) = 0$, soit $p(x_1; \dots; x_n; x) = 0$, pour tous réels x_1, \dots, x_n .
 - (2) Fixons maintenant des réels x_1, \dots, x_n de signes quelconques, et considérons la fonction polynomiale $\ell(x) = p(x_1; \dots; x_n; x)$. Le point précédent montre que ℓ vérifie $\mathcal{P}(1)$, donc $\ell(x) = 0$, soit $p(x_1; \dots; x_n; x) = 0$, pour tout réel x , d'après le cas de base.
 - (3) Finalement, $p(x_1; \dots; x_n; x) = 0$ pour tous réels x_1, \dots, x_n et x . Autrement dit, nous avons déduit la validité de $\mathcal{P}(n+1)$ à partir de celle de $\mathcal{P}(n)$.
- **Conclusion.** Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout naturel non nul n . \square

Exemple 3. En utilisant une approche géométrique semblable à celle présentée plus haut, il devient évident, et rigoureux maintenant, que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1; \dots; a_n) \in \mathbb{R}^n$, nous avons :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n (a_k)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$$

Exemple 4. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier à l'aide d'un cube, le solide géométrique, la validité de l'identité $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ pour tous réels a et b .

Considérons maintenant le dessin ci-dessous avec $d = a - b$, et la contrainte $a > b$.



Le fait 2, très utile, ne peut pas s'appliquer au calcul géométrique évident suivant.

$$\text{Aire}(GHCK) = \text{Aire}(ABCD) - \text{Aire}(ABHF) - \text{Aire}(AEKD) + \text{Aire}(AEGF)$$

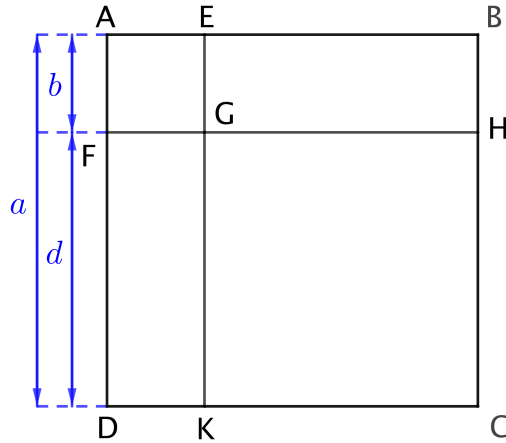
$$\iff (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Peut-on tout de même déduire du calcul géométrique précédent la validité, pour tous les réels a et b , de l'identité $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$? Cela est rendu possible par le fait 5 suivant.

Fait 5. Soit $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale à n variables, où $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^n$ contient $\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n$ où chaque $\mathcal{E}_k \subseteq \mathbb{R}$ est infini, et si p s'annule sur \mathcal{E} , alors p s'annule sur \mathbb{R}^n tout entier.

Démonstration. La preuve du fait 2 s'adapte facilement au cadre proposé ici (se souvenir que la clé du raisonnement était le fait qu'un polynôme réel n'admet qu'un nombre fini de racines). \square

Exemple 6. Considérons le dessin ci-dessous avec $d = a - b$, et la contrainte $a > b$.

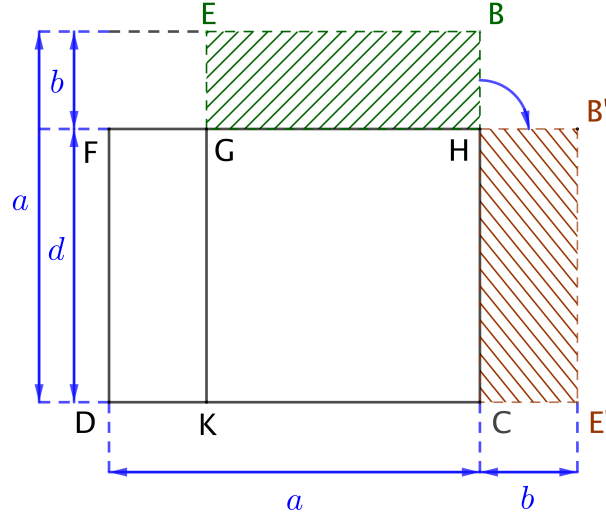


Nous avons les calculs géométriques simples suivants.

$$\text{Aire}(ABCD) - \text{Aire}(AEGF) = \text{Aire}(GHCK) + \text{Aire}(EBHG) + \text{Aire}(FGKD)$$

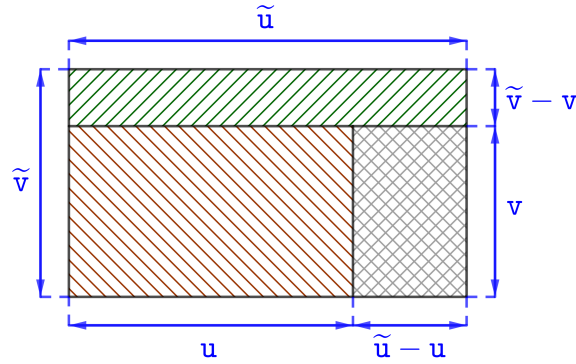
$$\iff a^2 - b^2 = \text{Aire}(GHCK) + \text{Aire}(EBHG) + \text{Aire}(FGKD)$$

En déplaçant ensuite le rectangle $EBHG$ comme ci-dessous, nous obtenons alors un rectangle de dimension $(a + b) \times (a - b)$.



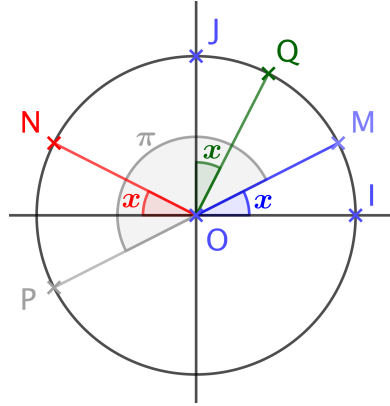
Finalement, nous obtenons $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ si $a > b$, puis, en appliquant le fait 5 au polynôme $p(a; b) = a^2 - b^2 - (a + b)(a - b)$, nous avons : $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Exemple 7. Finissons par l'identité polynomiale $\tilde{u}\tilde{v} = uv + v(\tilde{u} - u) + \tilde{u}(\tilde{v} - v)$ obtenue sans effort via le dessin suivant sous les contraintes géométriques $\tilde{u} > u$ et $\tilde{v} > v$. Cette identité permet de rendre naturelle la démonstration de la dérivabilité du produit de deux fonctions via $\frac{1}{h}(u(a + h)v(a + h) - u(a)v(a)) = \frac{1}{h}v(a)(u(a + h) - u(a)) + \frac{1}{h}u(a + h)(v(a + h) - v(a))$.



2. PUIS VINRENT LES FONCTIONS ANALYTIQUES D'UNE SEULE VARIABLE

Considérons le dessin suivant, où les mesures des angles sont en radians.



Via les points M , N , P et Q , il est facile de fournir des arguments géométriques de symétrie justifiant que, sous la condition $x \in]0; \frac{\pi}{4}[$, nous avons :

$$\begin{array}{lll} \bullet \cos(\pi - x) = -\cos x & \bullet \cos(x + \pi) = -\cos x & \bullet \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin(\pi - x) = \sin x & \sin(x + \pi) = -\sin x & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{array}$$

De nouveau, il serait bien de pouvoir passer, sans plus d'effort, à la validité des formules ci-dessus sur \mathbb{R} tout entier (*considérer les autres cas n'est pas compliqué, mais c'est pénible*). Nous allons voir que cela est licite grâce au fait ??, donné plus bas, qui est un peu technique, car il nécessite la notion de fonction analytique.

Préliminaire 8. Le rayon de convergence R de la série entière complexe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est défini par la formule de Hadamard¹ $\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{|a_n|})$ avec les conventions $0 = \frac{1}{+\infty}$ et $+\infty = \frac{1}{0}$.

Ce nombre R s'interprète comme suit.

- (1) Si $R = 0$, la série ne converge que pour $z = 0$, et sinon elle diverge grossièrement.
- (2) Si $R = +\infty$, la série converge sur \mathbb{C} . Plus précisément, la série converge normalement sur tout disque ouvert $\mathcal{D}(0; r[$ tel que $r \in \mathbb{R}_+^*$.
- (3) Si $0 < R < +\infty$, la série converge normalement sur tout disque ouvert $\mathcal{D}(0; r[$ tel que $0 < r < R$, donc elle converge sur $\mathcal{D}(0; R[$. Par contre, elle diverge grossièrement sur $\mathbb{C} - \mathcal{D}(0; R]$, et le comportement sur le cercle $\mathcal{C}(0; R)$ doit être traité au cas par cas.

Démonstration. Notons $\ell = \limsup_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{|a_n|})$, soit $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sup \{\sqrt[k]{|a_k|}, k \in \mathbb{N}_{\geq n}\})$, de sorte que $\ell \in [0; +\infty]$. Commençons par le cas $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire $R \in \mathbb{R}_+^*$.

- Soit $r \in]0; R[$. Considérons $\rho \in]r; R[$ de sorte que $\frac{1}{r} > \frac{1}{\rho} > \frac{1}{R}$. Par définition de $\ell = \frac{1}{R}$, nous avons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sup \{\sqrt[k]{|a_k|}, k \in \mathbb{N}_{\geq n_0}\} < \frac{1}{\rho}$. Donc pour $z \in \mathcal{D}(0; r[$ et $k \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$, nous obtenons $|a_k z^k| < \left(\frac{r}{\rho}\right)^k$ pour $k \geq n_0$. Comme $0 < \frac{r}{\rho} < 1$, la convergence normale devient évidente.
- Soit $z \in \mathbb{C} - \mathcal{D}(0; R]$. Comme $\frac{1}{|z|} < \frac{1}{R}$, nous avons ici $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$, $\sup \{\sqrt[k]{|a_k|}, k \in \mathbb{N}_{\geq n}\} > \frac{1}{|z|}$. En particulier, nous pouvons construire une suite strictement croissante d'indices (k_i) telle que $|a_{k_i} z^{k_i}| > 1$. Ceci donne la divergence grossière.

1. La démonstration va révéler le côté « naturel » de la formule de Hadamard.

- La justification du comportement pathologique sur le cercle $\mathcal{C}(0; R)$ se fait via des contre-exemples. Nous pouvons citer les exemples classiques suivants.

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, de rayon de convergence 1, diverge grossièrement sur $\mathcal{C}(0; 1)$.
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$, de rayon de convergence 1, puisque $\ln \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \right) = -\frac{2 \ln n}{n}$. De plus, cette série entière converge normalement sur $\mathcal{C}(0; 1)$.
- (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$, de rayon de convergence 1, puisque $\ln \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \right) = -\frac{\ln n}{n}$. De plus, cette série entière converge sur $\mathcal{C}(0; 1) - \{1\}$, mais pas en 1. Le comportement sur $\mathcal{C}(0; 1) - \{1\}$ est plus délicat à démontrer, car il se base sur le test de Abel-Dirichlet.

Les cas $\ell = 0$, c'est-à-dire $R = +\infty$, et $\ell = +\infty$, c'est-à-dire $R = 0$, s'obtiennent via des adaptations immédiates de ce qui a été fait ci-dessus. \square

Exemple 9. La série entière complexe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ admet un rayon de convergence infini ; la fonction associée est l'exponentielle complexe \exp . En effet, notant Ent la fonction partie entière, nous avons $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\text{Ent}(\frac{n}{2})} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}$, puis $\ln \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \right) \leq \frac{2-n}{2n} \ln \left(\frac{n}{2} \right)$.

Remarque 10. On peut démontrer que $\exp : (\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ est un morphisme de groupes, et que son noyau est du type $i r \mathbb{Z}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$.² Posant $\pi = \frac{r}{2}$, le noyau s'écrit $2 i \pi \mathbb{Z}$. C'est un moyen, comme un autre, de définir et construire le nombre réel π .

Exemple 11. Les fonctions circulaires sont définissables sur \mathbb{C} via $\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$ et $\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$, c'est-à-dire via $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ et $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$. La remarque précédente donne la 2π -périodicité des fonctions complexes \cos et \sin .

Préliminaire 12. Soit une série entière complexe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R non nul. La fonction $f : z \in \mathcal{D}(0; R[\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}$ vérifie les propriétés suivantes.

(1) f est infiniment \mathbb{C} -dérivable.³

(2) $\forall k \in \mathbb{N}$, la série entière $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$ admet R pour rayon de convergence.

(3) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathcal{D}(0; R[$, $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$.

(4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Démonstration. La propriété 4 étant aisée à déduire, une récurrence immédiate à faire montre qu'il suffit de démontrer que $\forall z \in \mathcal{D}(0; R[$, $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \mathcal{D}(0; R[}} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

2. Entre autres choses, ceci nécessite de savoir que $f(z) = \exp z - 1$ n'a que des zéros isolés, et que les sous-groupes de \mathbb{R} sont soit denses, soit discrets et du type $r\mathbb{Z}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$.

3. L'analyse complexe étudie les fonctions \mathbb{C} -dérivables en les nommant « fonctions holomorphes ». Cette théorie est ludique, riche, et très utile.

- $\ln \left(\sqrt[n]{|na_n|} \right) = \frac{\ln n}{n} + \ln \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right)$ donne que R est le rayon de convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$.

On peut donc définir la fonction $g : z \in \mathcal{D}(0; R[\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1} \in \mathbb{C}$.

- Pour $(z, z_0) \in \mathcal{D}(0; R]^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$, nous introduisons les notations suivantes.

$$(a) \quad f_k(z) = \sum_{n=0}^k a_n z^n.$$

$$(b) \quad g_k(z) = \sum_{n=1}^k na_n z^{n-1}, \text{ cette fonction étant clairement la } \mathbb{C}\text{-dérivée de } f_k(z).$$

$$(c) \quad T_k(z) = \begin{cases} \frac{f_k(z) - f_k(z_0)}{z - z_0} & \text{si } z \in \mathcal{D}(0; R[- \{z_0\} \\ g_k(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

$$(d) \quad T(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si } z \in \mathcal{D}(0; R[- \{z_0\} \\ g(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

- Considérons alors $r \in]0; R[$ tel que $z_0 \in \mathcal{D}(0; r[$. Par convergence normale sur $\mathcal{D}(0; r[$ de $(f_k)_k$ et $(g_k)_k$ vers f et g respectivement, nous avons la convergence uniforme sur $\mathcal{D}(0; r[$ de $(T_k)_k$ vers T . Or chaque fonction T_k est continue en z_0 par \mathbb{C} -dérivabilité de f_k , donc T est continue en z_0 , d'où la \mathbb{C} -dérivabilité de f en z_0 avec $f'(z_0) = g(z_0)$. Ceci achève la preuve, car $z_0 \in \mathcal{D}(0; R[$ est quelconque. \square

Remarque 13. Une relecture de preuves des résultats préliminaires 8 et 12 donnent que pour toute série entière complexe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R non nul, et tout nombre complexe z_0 , la fonction $f : z \in \mathcal{D}(z_0; R[\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \in \mathbb{C}$ vérifie les propriétés suivantes.

(1) f est infiniment \mathbb{C} -dérivable.

(2) $\forall k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k}$ converge normalement sur $\mathcal{D}(z_0; R[$,

(3) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathcal{D}(z_0; R[$, $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k}$.

(4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Nous allons voir que les fonctions développables en série entière autour d'un nombre complexe z_0 ont le bon ton de l'être aussi dans un voisinage de z_0 .

Définition 14. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert non vide. Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dite analytique en $z_0 \in \Omega$, s'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et un réel $r \in]0; R[$ tels qu'on ait $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ dans le disque ouvert $\mathcal{D}(z_0; r[\subseteq \Omega$.

Si f est analytique en tout nombre complexe de Ω , la fonction f est dite analytique sur Ω .

Fait 15. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ où $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ est un ouvert non vide. Si f est analytique en z_0 , alors il existe un réel $r > 0$ tel que f soit analytique sur $\mathcal{D}(z_0; r[$ tout entier.

Démonstration. Reprenons les notations de la définition 14. Nous allons montrer que le réel r convient. Pour cela, considérons $\omega \in \mathcal{D}(z_0; r[$ et un disque ouvert non vide $\mathcal{D}(\omega; \rho[\subseteq \mathcal{D}(z_0; r[$. Notons que $0 < \rho < r$.

- Formellement, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\omega)}{n!} (z - \omega)^n$ et $f^{(n)}(\omega) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k \omega^{k-n}$ conduisent à étudier $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{n!(k-n)!} a_k \omega^{k-n} (z - \omega)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} a_{n+q} \omega^q (z - \omega)^n$.

- Soit $F \subset \mathbb{N}^2$ un ensemble fini. Introduisons les notations suivantes.

$$(1) \sigma_F(z; \omega) = \sum_{(n,q) \in F} \alpha_{n,q}(z; \omega) \text{ où } \alpha_{n,q}(z; \omega) = \frac{(n+q)!}{n!q!} a_{n+q} \omega^q (z - \omega)^n.$$

$$(2) \mu(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| z^n \text{ qui est de rayon de convergence } R.$$

$$(3) N = \max \{n + q, (n, q) \in F\}.$$

Pour $z \in \mathcal{D}(\omega; \rho]$, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{(n,q) \in F} |\alpha_{n,q}(z; \omega)| &\leq \sum_{s=0}^N \sum_{n+q=s} |\alpha_{n,q}(z; \omega)| \\ &\leq \sum_{s=0}^N \sum_{n+q=s} \binom{n+q}{q} |a_{n+q}| r^q \rho^n \\ &\leq \sum_{s=0}^N |a_s| \left(\sum_{n+q=s} \binom{n+q}{q} r^q \rho^n \right) \\ &\leq \sum_{s=0}^N |a_s| (r + \rho)^s \\ &\leq \sum_{s=0}^{+\infty} |a_s| (r + \rho)^s \end{aligned}$$

En imposant $r + \rho < R$, c'est-à-dire $\rho < R - r$, pour tout sous-ensemble fini F de \mathbb{N}^2 , nous avons $\sum_{(n,q) \in F} |\alpha_{n,q}(z; \omega)| \leq \mu(r + \rho) < +\infty$.

Donc $\sum_{(n,q) \in \mathbb{N}^2} \alpha_{n,q}(z; \omega)$ est absolument convergente, et commutativement convergente.

- Pour $z \in \mathcal{D}(\omega; \rho] \subseteq \mathcal{D}(z_0; r]$, où $0 < \rho < R - r$, ce qui suit nous donne, comme souhaité,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\omega)}{n!} (z - \omega)^n.$$

$$\begin{aligned} (1) \quad &\sum_{(n,q) \in \mathbb{N}^2} \alpha_{n,q}(z; \omega) \\ &= \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{n+q=s} \alpha_{n,q}(z; \omega) \\ &= \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{n+q=s} \binom{n+q}{q} a_{n+q} \omega^q (z - \omega)^n \\ &= \sum_{s=0}^{+\infty} a_s \left(\sum_{n+q=s} \binom{n+q}{q} \omega^q (z - \omega)^n \right) \\ &= \sum_{s=0}^{+\infty} a_s (\omega + z - \omega)^s \\ &= f(z) \end{aligned} \quad \begin{aligned} (2) \quad &\sum_{(n,q) \in \mathbb{N}^2} \alpha_{n,q}(z; \omega) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \alpha_{n,q}(z; \omega) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \binom{n+q}{q} a_{n+q} \omega^q (z - \omega)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{k-n} a_k \omega^{k-n} (z - \omega)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z - \omega)^n \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k \omega^{k-n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\omega)}{n!} (z - \omega)^n \end{aligned}$$

□

Passons, enfin, au résultat essentiel de cette section qui va permettre de valider nos identités trigonométriques obtenues partiellement via la géométrie.

Fait 16. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe non vide,⁴ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique non identiquement nulle. Pour tout zéro α de f , il existe un disque ouvert non vide $\mathcal{D}(\alpha; r[\subseteq \Omega$ tel que $\forall z \in \mathcal{D}(\alpha; r[- \{\alpha\}$, $f(z) \neq 0$ (c'est le principe des zéros isolés).

Démonstration. Nous allons voir que la connexité est essentielle. Rappelons que ceci signifie que \emptyset et Ω sont les seules sous-ensembles de Ω qui sont à la fois ouverts et fermés.

$\forall \omega \in \Omega$, il existe un disque ouvert $\mathcal{D}(\omega; r[\subseteq \Omega$ sur lequel $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\omega)}{n!} (z - \omega)^n$. Ceci permet de constater que les deux ensembles suivants sont identiques.

$$(1) V = \{\omega \in \Omega \mid f \text{ s'annule sur un voisinage de } \omega\}$$

$$(2) D = \{\omega \in \Omega \mid \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(\omega) = 0\}$$

Clairement, V est ouvert, et D fermé, donc, par raison de connexité, D est soit vide, soit égal à Ω . Comme f n'est pas identiquement nulle sur Ω , seule l'alternative $D = \emptyset$ est possible.

Supposons alors avoir un zéro α de f . Le point précédent donne $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \llbracket 0; m[$, $f^{(n)}(\alpha) = 0$, et $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$. Ceci permet d'écrire $f(z) = (z - \alpha)^m \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - \alpha)^{n-m}$ sur un disque

ouvert non vide $\mathcal{D}(\alpha; \rho[\subseteq \Omega$, avec $a_m = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!} \neq 0$. Posant $g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - \alpha)^{n-m}$, nous obtenons une fonction continue sur $\mathcal{D}(\alpha; \rho[$, et vérifiant $g(\alpha) \neq 0$. Comme $f(z) = (z - \alpha)^m g(z)$, il devient clair qu'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{D}(\alpha; r[\subseteq \mathcal{D}(\alpha; \rho[$ et $\forall z \in \mathcal{D}(\alpha; r[- \{\alpha\}$, $f(z) \neq 0$. \square

Exemple 17. Notre raisonnement géométrique de début de section fait clairement apparaître des zéros non isolés pour les fonctions analytiques sur \mathbb{C} suivantes, l'analyticité des f_k venant de celle des fonctions complexes \cos et \sin (voir l'exemple 11).

- $f_1(z) = \cos(\pi - z) + \cos z$ et $f_2(z) = \sin(\pi - z) - \sin z$
- $f_3(z) = \cos(z + \pi) + \cos z$ et $f_4(z) = \sin(z + \pi) + \sin z$
- $f_5(z) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \sin z$ et $f_6(z) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \cos z$

4. On parle aussi de « domaine complexe ».