

# BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



### TABLE DES MATIÈRES

1. Les polygones - TOUT REPRENDRE !	2
1.1. Où allons-nous ?	2
1.2. Condition nécessaire	2
1.3. Condition suffisante	7
1.4. Théorème d’isopérimétrie polygonal	14

## 1. LES POLYGONES - TOUT REPRENDRE !

### 1.1. Où allons-nous ? XXXX

idée de généraliser remarque ?? en relachnat le probleème, indiquer au psassage les erreeurs siuivent commise dans l'approche purement géoémétrique

Nous allons commencer par obtenir une condition nécessaire, puis ensuite nous verrons que cette condition suffit. Ceci va nécessiter plus de technicité.

**Définition 1.** Pour  $n \geq 3$ , un «  $n$ -cycle » désigne une ligne brisée fermée à  $n$  sommets et  $n$  côtés sans restriction particulière.<sup>1</sup>

**Définition 2.** Un «  $n$ -gone » est un  $n$ -cycle n'admettant aucun couple de sommets confondus, ni aucun couple de côtés non contigüs sécants.

**Définition 3.** Un  $n$ -gone est dit « équilatéral » si tous ses côtés sont de même mesure.

**Définition 4.** Un «  $n$ -isogone » est un  $n$ -gone dont tous les angles au sommet sont de même mesure.

**Définition 5.** Un  $n$ -gone est dit « régulier » si c'est un  $n$ -isogone équilatéral.

**Remarque 1.1.** Un losange non carré est un  $n$ -gone équilatéral convexe non régulier, et un rectangle non carré est un  $n$ -isogone convexe non régulier.

**1.2. Condition nécessaire.** Nous allons établir le fait 4 affirmant qu'un  $n$ -gone maximisant son aire à périmètre fixé doit être, a minima, régulier.

Les cas  $n = 3$  et  $n = 4$  étant résolus, voir les faits ?? et ??, dans toutes les preuves de cette section, nous supposerons  $n \geq 5$ .

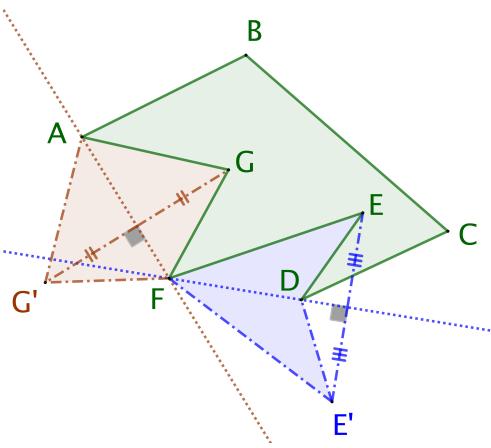
**Fait 1.** Si un  $n$ -gone  $\mathcal{P}$  n'est pas convexe, alors on peut construire un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}'$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$ .

*Démonstration.* Ici, il ne faut pas être expéditif en indiquant que la preuve du fait ?? se généralise sans aucun souci. En effet, comme  $n \geq 5$ , nous pouvons avoir plusieurs points de non-convexité, et les éliminer comme nous l'avons fait pour le quadrilatère n'est pas immédiat : dans la figure suivante, l'élimination des deux points de non convexité  $G$  et  $E$  de l'heptagone  $ABCDEFG$  nous amène à un nouvel heptagone  $ABCDE'FG'$  ayant lui aussi deux points de non-convexité  $F$  et  $D$  ! Donc, rien n'empêche, a priori, d'avoir une suite de constructions n'aboutissant jamais à un heptagone convexe de même périmètre que celui de  $ABCDEFG$ , et d'aire strictement supérieure à celle de  $ABCDEFG$ .<sup>2</sup>

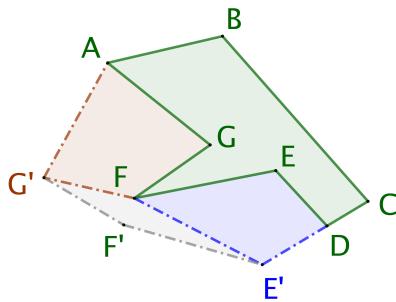
---

1. Tous les cas pathologiques sont acceptés.

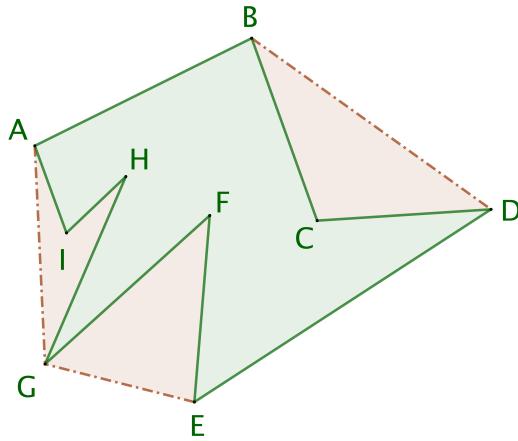
2. L'auteur est convaincu que le procédé aboutira en un nombre fini d'étapes à un polygone convexe, mais il ne l'a pas démontré pour le moment (un raisonnement sur les angles aux sommets devraient permettre de valider une telle conjecture).



On peut aussi perdre des côtés lors de la construction comme dans l'exemple suivant où  $C$ ,  $D$  et  $E'$  sont alignés.<sup>3</sup>



Laissons de côté la construction précédente pour nous concentrer sur la classique enveloppe convexe<sup>4</sup> du  $n$ -gone de départ. Par exemple, l'ennéagone  $ABCDEFGHI$  non convexe ci-dessous admet le pentagone  $ABDEG$  pour enveloppe convexe : le périmètre diminue et l'aire augmentent strictement, c'est très utile, mais il reste à avoir le bon nombre de côtés.

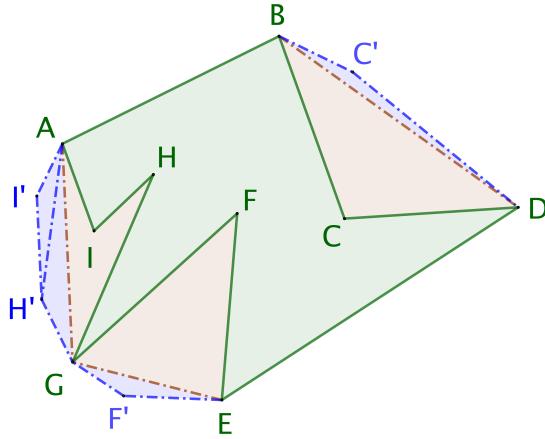


Une idée simple, que nous allons formaliser rigoureusement après, consiste à ajouter les sommets manquants suffisamment près des côtés de l'enveloppe convexe pour ne pas perdre la convexité, tout en gardant un périmètre inférieur strictement au périmètre initial, et une aire strictement plus grande que l'aire initiale. Si nous arrivons à faire ceci, alors une homothétie

3. Ce problème n'en est pas un. Une petite adaptation des arguments à venir permet de vérifier cela.

4. C'est le plus petit polygone convexe « *contenant* » le  $n$ -gone considéré, où « *petit* » est relatif à l'inclusion.

de rapport  $r > 1$  nous ramènera au bon périmètre avec une aire strictement plus grande que l'aire initiale. La figure suivante illustre cette idée.



Considérons donc un  $n$ -gone non convexe  $\mathcal{P}$ . Son enveloppe convexe  $\mathcal{C}$  vérifie, par construction,  $\text{Perim}(\mathcal{C}) < \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{C}) > \text{Aire}(\mathcal{P})$ . Notons  $m$  le nombre de sommets en moins dans  $\mathcal{C}$  relativement à  $\mathcal{P}$ . Si  $m = 0$ , il n'y a rien à faire. Sinon, posons  $\delta = \frac{\text{Perim}(\mathcal{P}) - \text{Perim}(\mathcal{C})}{m}$ .

- (1) Considérons  $[AB]$  un côté quelconque de  $\mathcal{C}$ . Les droites portées par les côtés « *autour* » de  $[AB]$  « *dessinent* » une région contenant toujours un triangle  $ABC$  dont l'intérieur est à l'extérieur<sup>5</sup> de  $\mathcal{C}$  comme dans les deux cas ci-dessous.



- (2) Clairement, le polygone  $\mathcal{C}'$  obtenu à partir de  $\mathcal{C}$  en remplaçant le côté  $[AB]$  par les côtés  $[AC]$  et  $[CB]$  est un convexe avec un sommet de plus que  $\mathcal{C}$ .
- (3) Comme  $HC$  peut être rendu aussi proche de 0 que souhaité, il est aisément de voir que l'on peut choisir cette distance de sorte que  $AC + BC < AB + \delta$ . Dès lors, le périmètre de  $\mathcal{C}'$  augmente inférieurement à  $\delta$  relativement à  $\mathcal{C}$ .
- (4) En répétant  $(m - 1)$  fois les étapes 1 à 3, nous obtenons un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}'$  tel que  $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$  et  $\text{Perim}(\mathcal{P}') < \text{Perim}(\mathcal{C}) + m\delta = \text{Perim}(\mathcal{P})$ .

□

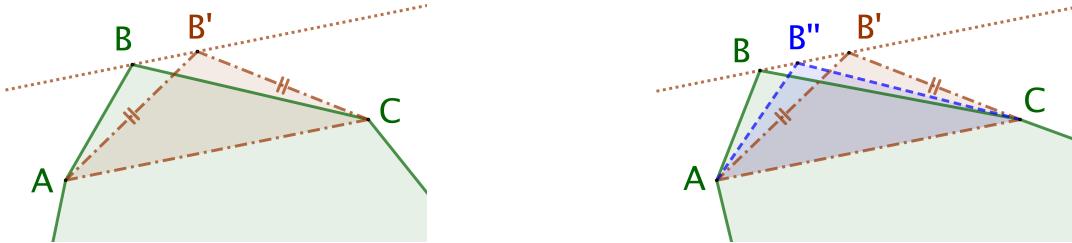
**Remarque 1.2.** Le fait précédent permet de toujours se ramener au cas d'un  $n$ -gone convexe.

**Fait 2.** Si un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}$  n'est pas un  $n$ -gone équilatéral, alors on peut construire un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}'$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$ .

*Démonstration.* Considérons un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}$  qui ne soit pas un  $n$ -gone équilatéral. Dans ce cas,  $\mathcal{P}$  admet un triplet de sommets consécutifs  $A, B$  et  $C$  tels que  $AB \neq BC$  (sinon, on

5. C'est ce que l'on appelle de la « *low poetry* » .

obtiendrait de proche en proche un  $n$ -gone équilatéral). La construction vue dans la preuve du fait ?? nous donne la solution : voir les deux dessins ci-après dans lesquels  $(AC) \parallel (BB')$ . Pour le 2<sup>e</sup> cas, il n'est pas possible d'utiliser le triangle  $AB'C$  isocèle en  $B'$  car  $(B'C)$  porte le côté de  $\mathcal{P}$  de sommet  $C$  juste après  $[BC]$ , mais ce problème se contourne en considérant un point  $B''$  du segment ouvert  $]BB'[$  (si besoin, se reporter au 2<sup>e</sup> dessin de la preuve du fait ??).

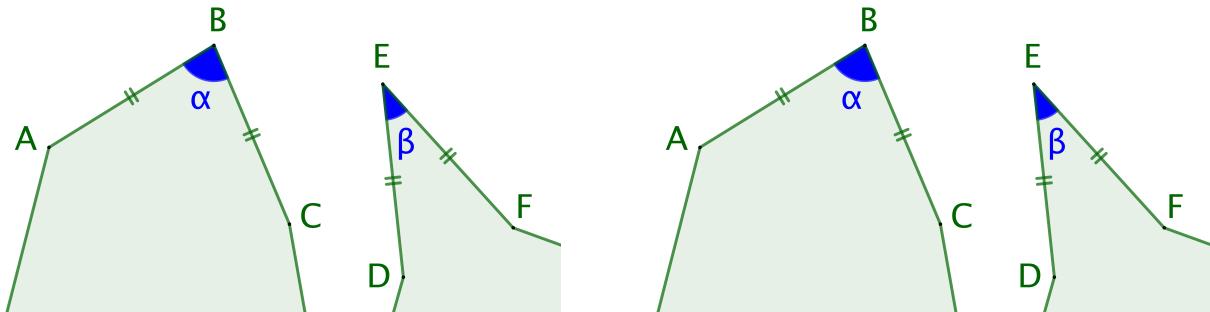


Dans chaque cas, nous avons construit un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}''$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{P}'') < \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}'') = \text{Aire}(\mathcal{P})$ . Un simple agrandissement donne un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}'$  vérifiant  $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$ .  $\square$

**Remarque 1.3.** *Le fait précédent ne permet pas de se ramener toujours au cas d'un  $n$ -gone équilatéral convexe. Il nous dit juste que si un  $n$ -gone convexe maximise son aire à périmètre fixé, alors il devra être, à minima, un  $n$ -gone équilatéral. La nuance est importante, et une similaire existe pour la conclusion du fait suivant.*

**Fait 3.** *Si un  $n$ -gone équilatéral convexe  $\mathcal{P}$  n'est pas un  $n$ -isogone, alors il existe un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}'$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$ .*

*Démonstration.* Par hypothèse, nous avons deux paires de côtés  $([AB], [BC])$  et  $([DE], [EF])$  telles que  $\widehat{BAC} > \widehat{DEF}$  comme ci-dessous, sans savoir si un côté lie les sommets  $C$  et  $D$ , et de même pour  $F$  et  $A$ . Par contre, il est possible que  $C$  et  $D$  soient confondus.



Dans nos manipulations à venir, nous fixons  $A, C, E$  et  $G$ , tout en cherchant à bouger  $B$  et  $F$  de sorte à toujours avoir des triangles isocèles « *pointant* » vers l'extérieur du convexe  $\mathcal{P}$ . Posons  $\ell = AB$ ,  $d_1 = AC$  et  $d_2 = EG$ . Comme nous ne touchons pas aux points  $A, C, E$  et  $G$ , les nombres  $d_1$  et  $d_2$  sont constants.

- ? ? ?
- ? ? ?

**FAUX** Les deux exemples ci-dessus nous permettent de noter que si  $\alpha = \widehat{ABC}$  diminue, et  $\beta = \widehat{EFG}$  augmente, alors la somme des aires se rapprochent de 0. Par raison de symétrie, si on fixe  $\widehat{ABC} + \widehat{EFG}$ , on devine que la somme des aires est maximisée quand  $\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$ . Nous allons établir ceci de façon élémentaire en commençant par les calculs suivants où  $\ell = AB$ ,  $\mu = \frac{\alpha+\beta}{2}$  et  $\delta = \mu - \beta > 0$  (rappelons que nous avons supposé  $\alpha > \beta$ ).

$$\begin{aligned} & \text{Aire}(ABC) + \text{Aire}(EFG) \\ &= \frac{1}{2}BA \cdot BC \cdot \sin(\widehat{ABC}) + \frac{1}{2}FE \cdot FG \cdot \sin(\widehat{EFG}) \quad \left. \right) \text{Formule dite des sinus.} \\ &= \frac{1}{2}\ell^2(\sin \alpha + \sin \beta) \\ &= \frac{1}{2}\ell^2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad \left. \right) \text{Formules de Simpson.} \\ &= \frac{1}{2}\ell^2 \sin \mu \cos \delta \end{aligned}$$

Comme  $(\delta; \mu) \in ]0; \pi[^2$ , nous avons  $\sin \mu \cos \delta > \sin \mu$ . Remplaçons alors  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement par  $\alpha'$  et  $\beta'$  de telle sorte que  $\alpha' = \beta' = \frac{\alpha+\beta}{2} = \mu$ . Notons que  $0 < \beta < \mu < \alpha < \pi$  (diminution de  $\alpha$  et augmentation de  $\beta$ ). Deux situations se présentent à nous.

- Le  $n$ -gone obtenu ne perd aucun côté. Comme la convexité est gardée, c'est gagné.
- Le  $n$ -gone obtenu perd au moins un côté. La solution consiste à choisir  $\alpha'' = \mu + \frac{\delta}{2}$  et  $\beta'' = \mu - \frac{\delta}{2}$  au lieu de  $\alpha' = \beta' = \mu$ , puisque nous avons  $\cos \delta < \cos(\frac{\delta}{2})$  et  $0 < \beta < \beta'' < \mu < \alpha'' < \alpha < \pi$ .

□

**Remarque 1.4.** Une démonstration géométrique courante du fait précédent, que l'on retrouve souvent reproduite, s'appuie sur un résultat attribué à Zénodore sur la maximisation de l'aire totale de deux triangles isocèles de bases fixées, et de périmètre total constant : ce résultat affirme que les deux triangles doivent avoir des angles en leur sommet principal de même mesure. Malheureusement, cette preuve échoue lors de la disparition d'un sommet en choisissant les deux triangles isocèles optimaux pour construire un nouveau  $n$ -gone « plus gros », sauf à affiner la recherche comme nous l'avons avec notre approche analytique. Indiquons, au passage, que la preuve du résultat de Zénodore est un peu fastidieuse, sans être ingrate.

**Remarque 1.5.** La méthode des extrema liés, rappelée dans la remarque ??, donne une autre justification. Voici comment faire.

- $\text{Aire}(ABC) + \text{Aire}(EFG) = \frac{1}{4}(d_1^2 \tan \alpha + d_2^2 \tan \beta)$
- $4\ell = AB + BC + EF + FG$   
 $= 2(AB + EF)$   
 $= \frac{d_1}{\cos \alpha} + \frac{d_2}{\cos \beta}$

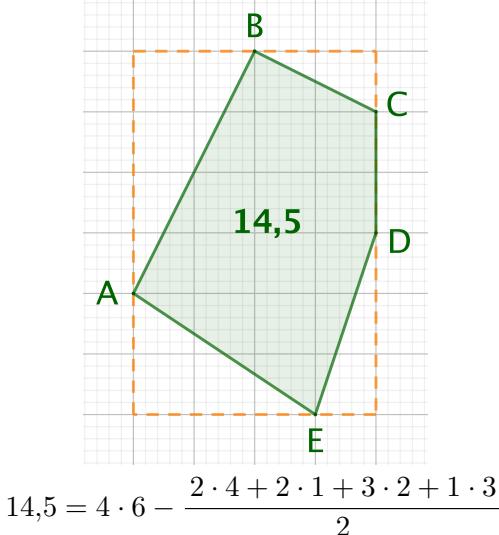
- Pour  $(\alpha; \beta) \in ]0; \frac{\pi}{2}[^2$ , on cherche donc à maximiser  $f(\alpha; \beta) = d_1^2 \tan \alpha + d_2^2 \tan \beta$  sous la contrainte  $g(\alpha; \beta) = 0$  où  $g(\alpha; \beta) = 4\ell - \frac{d_1}{\cos \alpha} - \frac{d_2}{\cos \beta}$ .
- On doit avoir  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\partial_\alpha f = \lambda \partial_\alpha g$  et  $\partial_\beta f = \lambda \partial_\beta g$  (méthode des extrema liés).
- Donc  $\frac{d_1^2}{\cos^2 \alpha} = \lambda \frac{d_1 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$ , c'est-à-dire  $\lambda \sin \alpha = d_1$ . De même,  $\lambda \sin \beta = d_2$ .
- ????

**Fait 4.** Si un  $n$ -gone  $\mathcal{P}$  n'est pas régulier, alors il existe un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}'$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$ .

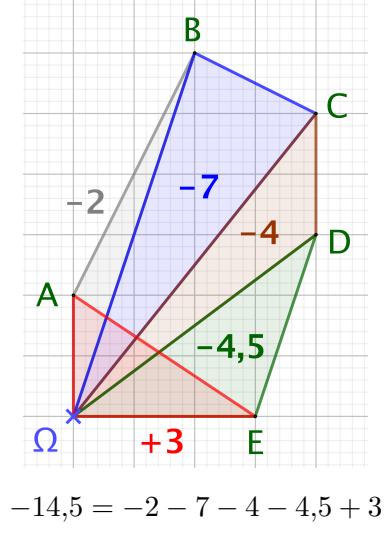
*Démonstration.* Le fait 1 permet de considérer le problème de maximisation d'aire à périmètre fixé juste pour des  $n$ -gones convexes. Selon les faits 2 et 3, si, parmi les  $n$ -gones convexes de périmètre fixé, il en existe un d'aire maximale, alors il devra être, a minima, régulier.  $\square$

**1.3. Condition suffisante.** Nous venons d'établir, dans le fait 4, que si un  $n$ -gone maximise son aire à périmètre fixé, alors il devra être régulier. Le but de cette section est de prouver l'existence d'au moins un  $n$ -gone d'aire maximale à périmètre fixé. Comme dans la remarque ??, nous allons convier le couple continuité/compacité, mais ici les choses se compliquent, car nous allons devoir accepter de travailler avec des polygones croisés, et par conséquent de mesurer la surface de tels polygones (le vrai point délicat est ici). Pour cela, plaçons-nous d'un point de vue informatique : comme on sait calculer l'aire algébrique d'un triangle grâce au déterminant,<sup>6</sup> il est naturel de définir l'aire algébrique d'un  $n$ -gone via des triangles. Voici une méthode possible où l'usage du déterminant pour calculer les aires des triangles à partir de coordonnées de vecteurs fait apparaître des signes moins. On obtient alors l'aire géométrique à un signe près. A priori, le résultat dépend du point  $\Omega$  employé, mais le fait 5, donné plus bas, montrera que ce n'est pas le cas.

Calcul direct à la main.

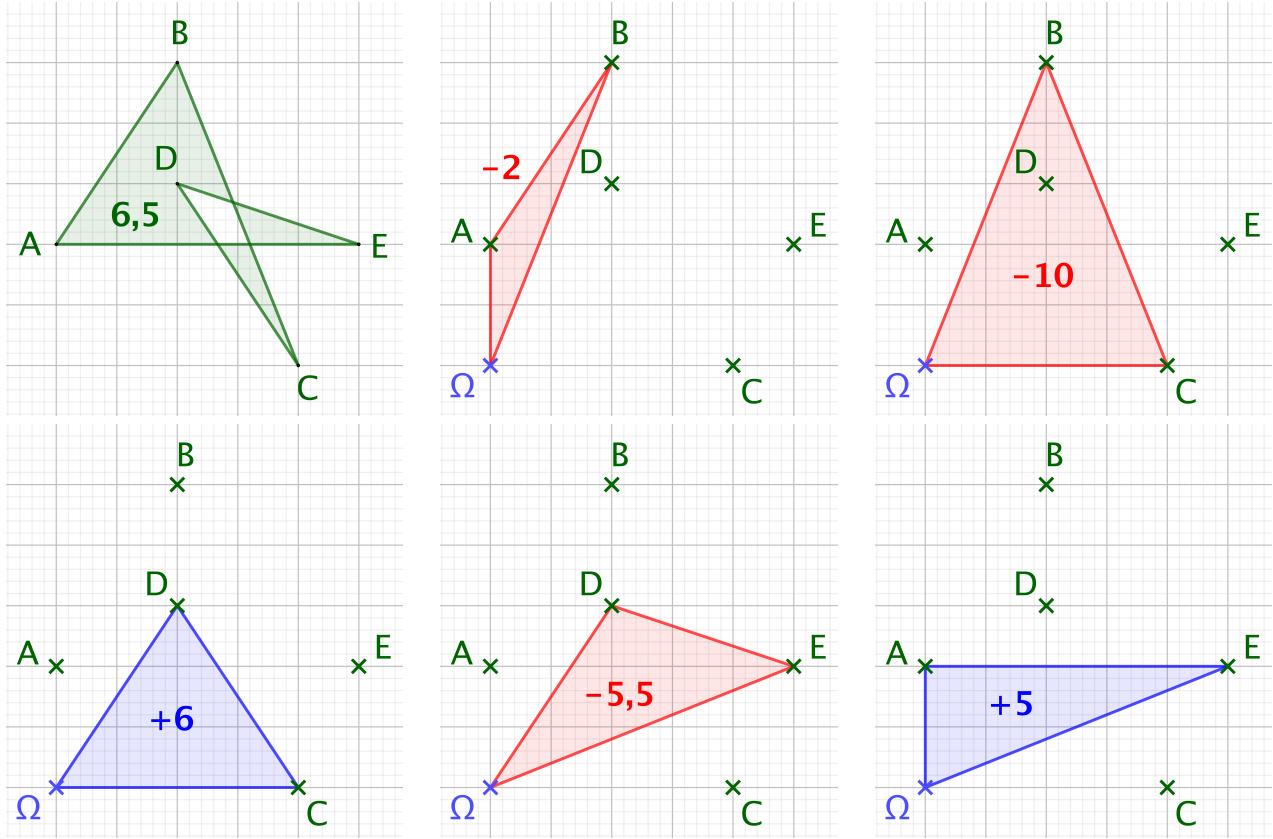


Via le déterminant.

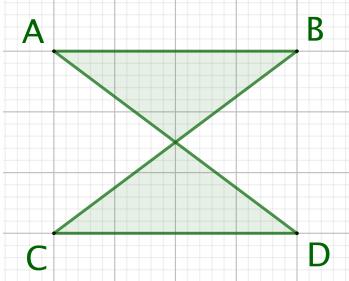


Ce mode de calcul est celui employé par **GeoGebra** qui donne une aire de 6,5 pour le polygone croisé de la bande dessinée ci-après qui détaille les calculs faits : les aires algébriques représentées en bleu sont positives, et celles en rouge négatives. Nous obtenons un total de  $(-6,5)$ , soit, de nouveau, la valeur fournie par **GeoGebra** au signe près. L'apparition du signe moins dans ce cas et le précédent vient en fait du sens horaire de parcours des polygones comme nous le montrera le fait 9.

6. On sait que  $\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right|$ . On nomme  $\frac{1}{2} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  l'aire algébrique de  $ABC$ .



Avant de formaliser ce qui précède, il faut noter que la notion d'aire algébrique est à manier avec prudence lorsqu'on la découvre. Si c'est votre cas, que pensez-vous de l'aire algébrique du quadrilatère croisé  $ABCD$  ci-dessous qui est un antiparallélogramme très particulier ? Réponse en note de bas de page.<sup>7</sup>



**Définition 6.** Pour tout  $n$ -cycle  $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ , on définit  $(A'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  comme étant  $n$ -périodique, et vérifiant  $A'_i = A_i$  sur  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ .

7. La réponse est 0. Comme nous verrons que le choix de  $\Omega$  est libre, il suffit de faire les calculs avec  $\Omega$  l'intersection des segments  $[AD]$  et  $[BC]$ . On peut donner du sens à ceci. Voici comment. Plongeons-nous dans l'espace. Imaginons une toile rectangulaire bleue sur le dessus, et rouge en dessous. Tournons de  $180^\circ$  verticalement l'un des côtés du rectangle. En supposant que la toile soit parfaitement tendue, nous obtenons, vue de dessus, un antiparallélogramme dont l'un des triangles est bleu, et l'autre rouge. De façon savante, les deux faces ont deux orientations différentes. Nous reparlerons de cette notion plus tard, c'est elle qui justifie les jeux de signes dans les calculs introductifs précédents.

**Fait 5.** Soit  $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle. La fonction qui à un point  $\Omega$  du plan associe  $\mu_1^n(\Omega; \mathcal{L}) = \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}})$  est indépendante du point  $\Omega$ . Dans la suite, cette quantité indépendante de  $\Omega$  sera notée  $\mu_1^n(\mathcal{L})$ .

Démonstration. Soit  $M$  un autre point du plan.

$$\begin{aligned}
& \mu_1^n(\Omega; \mathcal{L}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MA'_{i+1}}) \quad \text{(Cette bonne vieille relation de Chasles.)} \\
&= \sum_{i=1}^n \left[ \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) + \det(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) + \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M}) + \mu_1^n(M; \mathcal{L}) \\
&= \mu_1^n(M; \mathcal{L}) + \sum_{i=2}^{n+1} \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_i}) - \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_i}) \\
&= \mu_1^n(M; \mathcal{L}) + \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{n+1}}) - \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_1}) \quad \text{A}'_{n+1} = A'_1 \\
&= \mu_1^n(M; \mathcal{L})
\end{aligned}$$

□

**Fait 6.** Soit  $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle. Pour  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , le  $n$ -cycle  $\mathcal{L}_j = B_1B_2 \cdots B_n$ , où  $B_i = A'_{i+k-1}$ , vérifie  $\mu_1^n(\mathcal{L}) = \mu_1^n(\mathcal{L}_k)$ . Dans la suite, cette quantité commune sera notée  $\mu(\mathcal{L})$ .

Démonstration. Il suffit de s'adonner à un petit jeu sur les indices de sommation. □

**Fait 7.** Soit  $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle. le  $n$ -cycle  $\mathcal{L}^{\text{op}} = B_1B_2 \cdots B_n$ , où  $B_i = A_{n+1-i}$ , vérifie  $\mu(\mathcal{L}^{\text{op}}) = -\mu(\mathcal{L})$ .

Démonstration. Soit  $\Omega$  un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned}
& \mu(\mathcal{L}^{\text{op}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega B'_i}, \overrightarrow{\Omega B'_{i+1}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_{n+1-i}}, \overrightarrow{\Omega A'_{n-i}}) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \det(\overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}, \overrightarrow{\Omega A'_j}) \quad \text{A}'_0 = A'_n \text{ et } A'_1 = A'_{n+1} \\
&= \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}, \overrightarrow{\Omega A'_j}) \\
&= - \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_j}, \overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}) \\
&= -\mu(\mathcal{L})
\end{aligned}$$

□

**Fait 8.** Soit  $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle. La quantité  $\frac{1}{2}|\mu(\mathcal{L})|$  ne dépend ni du sens de parcours de  $\mathcal{L}$ , ni du point de départ choisi.<sup>8</sup> Elle sera notée  $\text{AireGene}(\mathcal{L})$ , et nommée « aire généralisée » du  $n$ -cycle  $\mathcal{L}$ .

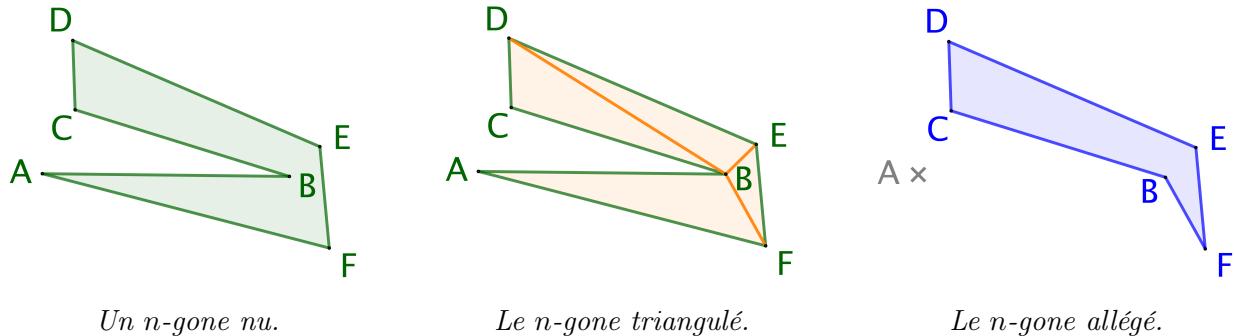
Démonstration. C'est une conséquence directe des faits 6 et 7. □

8. Le lecteur pardonnera les abus de langage utilisés.

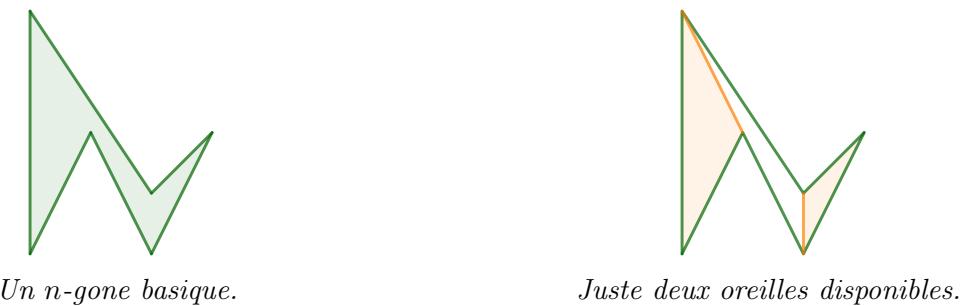
Pour notre démonstration finale, nous aurons besoin de savoir que  $\text{AireGene}(\mathcal{P}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$  pour tout  $n$ -gone  $\mathcal{P}$ .<sup>9</sup> Ceci est évident dans le cas convexe, car il suffit de choisir l'isobarycentre  $G$  de  $A_1, A_2, \dots, A_n$  pour le calcul de  $\text{AireGene}(\mathcal{P})$  : en effet, avec ce choix, tous les déterminants  $\det(\overrightarrow{GA'_i}, \overrightarrow{GA'_{i+1}})$  ont le même signe. Dans le cas non-convexe, les choses se compliquent a priori, car nous ne maîtrisons plus les signes des déterminants. Heureusement nous avons le résultat fort suivant qui est un pas important pour atteindre notre but.

**Fait 9.** *Soit un  $n$ -gone  $\mathcal{P}$ . On suppose le  $n$ -cycle  $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$  associée à  $\mathcal{P}$  telle que les points  $A_1, A_2, \dots, A_n$  soient parcourus dans le sens trigonométrique, ou anti-horaire. Un tel  $n$ -cycle sera dit « positif ».<sup>10</sup> Sous cette hypothèse, nous avons  $\mu(\mathcal{L}) \geq 0$ .*

*Démonstration.* Le théorème de triangulation affirme que tout  $n$ -gone est triangulable comme dans l'exemple très basique suivant qui laisse envisager une démonstration par récurrence en retirant l'un des triangles ayant deux côtés correspondant à deux côtés consécutifs du  $n$ -gone (pour peu qu'un tel triangle existe toujours).



Le théorème de triangulation admet une forme forte donnant une décomposition contenant un triangle formé de deux côtés consécutifs du  $n$ -gone.<sup>11</sup> Nous dirons qu'une telle décomposition est « à l'écoute ». Ce très mauvais jeu de mots fait référence à la notion sérieuse « d'oreille » pour un  $n$ -gone : une oreille est un triangle inclus dans le  $n$ -gone, et formé de deux côtés consécutifs du  $n$ -gone. L'exemple suivant donne un  $n$ -gone n'ayant que deux oreilles : ceci montre que l'existence d'une oreille ne va pas de soi.<sup>12</sup>



Raisonnons donc par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ .

- **Cas de base.** Soit  $ABC$  un triangle. Dire que les sommets  $A, B$  et  $C$  sont parcourus dans le sens trigonométrique, c'est savoir que  $\mu(ABC) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) > 0$ .

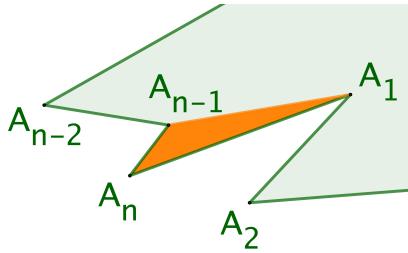
9. Nous obtenons ainsi la généralisation de l'aire géométrique usuelle au cas des polygones croisés.

10. Bien noté que cette notion ne peut exister lorsqu'on considère un polygone croisé. De façon cachée, nous utilisons le célèbre théorème de Jordan, dans sa forme polygonale.

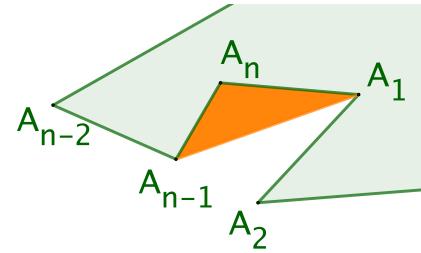
11. En pratique, cette forme forte est peu utile, car elle aboutit à un algorithme de recherche trop lent.

12. On démontre que tout  $n$ -gone admet au minimum deux oreilles.

- **Héritéité.** Soient un  $n$ -gone  $\mathcal{P}$ , avec  $n \in \mathbb{N}_{>3}$ , et  $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle positif qui lui est associée. On peut supposer que  $A_{n-1}A_nA_1$  est une oreille du  $n$ -gone  $\mathcal{P}$ .



$A_{n-1}A_nA_1$  est une oreille.



$A_{n-1}A_nA_1$  n'est pas une oreille.

Notons  $\mathcal{P}'$  le  $k$ -gone associé au  $k$ -cycle  $\mathcal{L}' = A_1 \cdots A_{n-1}$  où  $k = n - 1$  vérifie  $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ . Par hypothèse,  $\mathcal{L}'$  est positive. Nous arrivons aux calculs élémentaires suivants en utilisant  $\Omega = A_1$  comme point de calcul de  $\mu(\mathcal{L})$ .

$\mu(\mathcal{L})$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_1A_j}, \overrightarrow{A_1A'_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1A'_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A'_n}) + \det(\overrightarrow{A_1A'_n}, \overrightarrow{A_1A'_{n+1}}) \\ &= \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_1A_j}, \overrightarrow{A_1A_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A_n}) + \det(\overrightarrow{A_1A_n}, \overrightarrow{A_1A_1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_1A_j}, \overrightarrow{A_1A_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A_n}) \\ &= \mu(\mathcal{L}') + \mu(A_{n-1}A_nA_1) \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} A_1 = A'_{n+1} \\ A_i = A'_i \\ \text{pour } i \leq n \end{array} \right\}$

Par hypothèse de récurrence, nous savons que  $\mu(\mathcal{L}') \geq 0$ , et comme  $A_{n-1}A_nA_1$  est une oreille de  $\mathcal{P}$ , la 3-ligne  $A_{n-1}A_nA_1$  est forcément positive, d'où  $\mu(A_{n-1}A_nA_1) \geq 0$  d'après le cas de base. Nous arrivons bien à  $\mu(\mathcal{L}) \geq 0$ , ce qui permet de finir aisément la démonstration par récurrence.

□

**Fait 10.** Pour tout  $n$ -gone  $\mathcal{P}$ , nous avons :  $\text{AireGene}(\mathcal{P}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$ .

*Démonstration.* Les deux points suivants permettent de faire une preuve par récurrence.

- **Cas de base.** L'égalité est immédiate pour les triangles (c'est ce qui a motivé la définition de l'aire généralisée).
- **Héritéité.** Reprenons les notations de la démonstration du fait 9 :  $\mathcal{P}$  est un  $n$ -gone, avec  $n \in \mathbb{N}_{>3}$ ,  $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle positif qui lui est associée,  $A_{n-1}A_nA_1$  une oreille du  $n$ -gone  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}'$  le  $k$ -gone associé au  $k$ -cycle  $\mathcal{L}' = A_1 \cdots A_{n-1}$  où  $k = n - 1$  vérifie  $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ , avec  $\mathcal{L}'$  positive. Nous arrivons aux calculs élémentaires suivants.

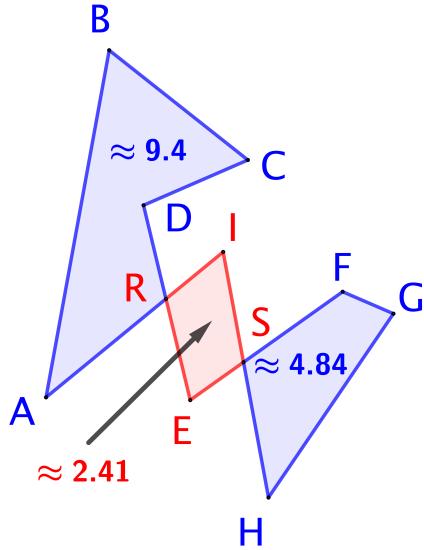
$$\begin{aligned} &\text{Aire}(\mathcal{P}) \\ &= \text{Aire}(\mathcal{P}') + \text{Aire}(A_{n-1}A_nA_1) \\ &= \text{AireGene}(\mathcal{P}') + \text{AireGene}(A_{n-1}A_nA_1) \\ &= \frac{1}{2}(\mu(\mathcal{L}') + \mu(A_{n-1}A_nA_1)) \\ &= \frac{1}{2}\mu(\mathcal{L}) \\ &= \text{AireGene}(\mathcal{P}) \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} A_{n-1}A_nA_1 \text{ est une oreille de } \mathcal{P}. \\ \text{Hypothèse de récurrence et cas de base.} \end{array} \right\}$

$\left. \begin{array}{l} \text{Voir le fait 9.} \\ \text{Comme dans la preuve du fait 9.} \\ \text{Voir le fait 9.} \end{array} \right\}$

□

Avant d'avancer, nous devons mieux comprendre le calcul de  $\text{AireGene}(\mathcal{L})$  pour un  $n$ -cycle  $\mathcal{L}$  correspondant à un polygone croisé. Considérons la figure suivante produite via **GeoGebra**, ce dernier donnant les valeurs indiquées sur l'image où l'on constate que  $9,4 - 2,41 + 4,84 = 11,83$ .

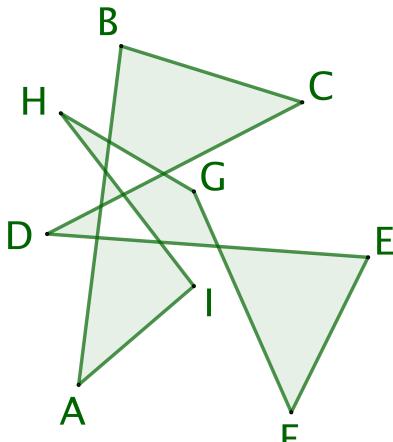


$$\text{Aire}(\text{ABCDEFGHI}) \approx 11.83$$

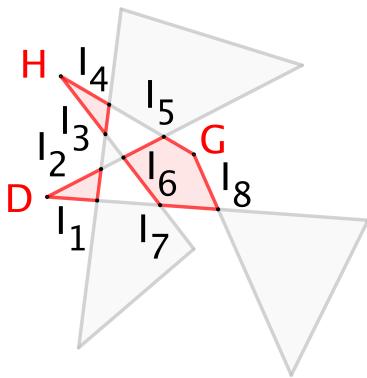
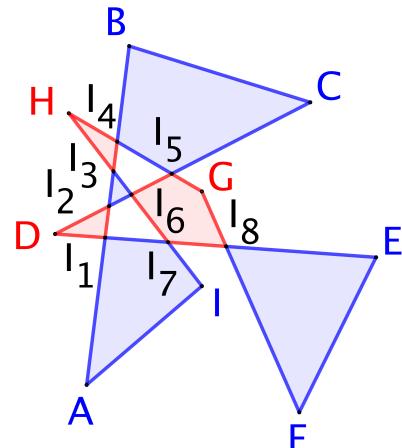
Pour calculer l'aire généralisée d'un polygone croisé associé au  $n$ -cycle  $\mathcal{L}$ , il suffit de procéder comme suit (cette méthode est utile pour un humain).

- On part d'un point, puis on parcourt le  $n$ -cycle dans un sens donné jusqu'à la première intersection croisée. Dans notre exemple, on va de  $A$  à  $R$ .
- De cette intersection, on change de direction pour choisir celle allant vers notre point de départ. Dans notre exemple, nous obtenons le  $k$ -cycle  $ABCDR$ .
- Le reste des points non parcourus fournit un autre  $k$ -cycle qui est  $REFGHI$  dans notre cas. Formellement, nous avons scindé  $ABCDEFGHI$  en  $ABCDR$  et  $REFGHI$ .
- On répète ce processus avec les sous  $k$ -cycles obtenus jusqu'à n'avoir que des  $k$ -gones. Pour notre exemple, nous avons trois  $k$ -gones  $ABCDR$ ,  $RESI$  et  $SFGH$ .
- Les  $k$ -gones obtenus sont ordonnés en respectant l'ordre du  $n$ -cycle initial.
- Le calcul de l'aire généralisée se fait en ajoutant les aires des  $k$ -gones de rang impair, puis en retirant celles des  $k$ -gones de rang pair. En appliquant la valeur absolue au résultat obtenu, nous obtenons l'aire généralisée du polygone croisé initial. Dans notre exemple, nous devons calculer  $|\text{Aire}(ABCDR) - \text{Aire}(RESI) + \text{Aire}(SFGH)|$ .

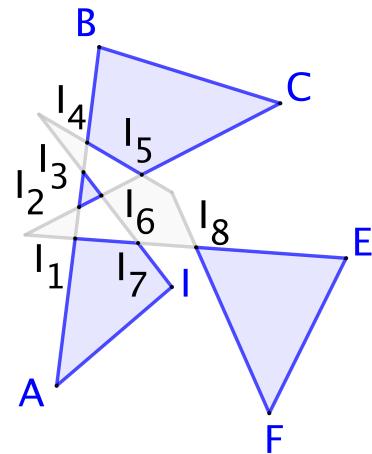
Pourquoi cela fonctionne-t-il ? Il suffit de revenir à la définition de  $\mu(\mathcal{L})$  pour constater qu'une règle de type Chasles existe, et de plus qu'en utilisant un point d'intersection de deux arêtes pour un calcul effectif de  $\mu(\mathcal{L})$ , nous avons un changement de sens de parcours du point de vue de ce point d'intersection, ceci justifiant les changements de signe de notre recette, qui n'en est plus une. Pour le cas suivant, notre approche, plus combinatoire que géométrique, donne  $12,26 - 1,96 = 10,3$  comme attendu.



$$\text{Aire(ABCDEFGHI)} \approx 10.3$$



$$\begin{aligned} &\approx 0.28 + 0.27 + 1.4 \\ &\approx 1.96 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\approx 0.13 + 4.69 + 3.16 + 4.28 \\ &\approx 12.26 \end{aligned}$$

**Fait 11.** Si un  $n$ -cycle  $\mathcal{L}$  non dégénéré n'est pas un  $n$ -gone, donc est un polygone croisé, alors il existe un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{P}) = \text{Perim}(\mathcal{L})$  et  $\text{AireGene}(\mathcal{P}) > \text{AireGene}(\mathcal{L})$ .

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{C}$  l'enveloppe convexe de  $\mathcal{L}$ . La méthode de calcul de  $\text{AireGene}(\mathcal{L})$  exposée ci-dessus donne sans ambiguïté que  $\text{AireGene}(\mathcal{C}) > \text{AireGene}(\mathcal{L})$ . De plus, il est clair que  $\text{Perim}(\mathcal{C}) < \text{Perim}(\mathcal{L})$ . Par contre, nous savons juste que  $\mathcal{C}$  est un  $k$ -gone avec  $k < n$ . Ceci est un faux problème comme nous l'avons vu dans la preuve du fait 1, ce qui nous permet de conclure.  $\square$

**Fait 12.** Soit  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  un naturel fixé. Considérons tous les  $n$ -gones de périmètre fixé. Parmi tous ces  $n$ -gones, il en existe au moins un d'aire maximale.

*Démonstration.* Ce qui suit nous donne plus généralement l'existence d'un  $n$ -gone, au moins, maximisant l'aire généralisée parmi tous les  $n$ -cycles de périmètre fixé  $p$ . Ce résultat plus fort convient d'après le fait 10.

- Munissant le plan d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on note  $\mathcal{Z}$  l'ensemble des  $n$ -cycles  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  tels que  $\text{Perim}(A_1 A_2 \cdots A_n) = p$  et  $A_1(0; 0)$ ,<sup>13</sup> puis  $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{2n}$  l'ensemble des uplets de coordonnées  $(x(A_1); y(A_1); \dots; x(A_n); y(A_n))$  pour  $A_1 A_2 \cdots A_n \in \mathcal{Z}$ .

13. Le mot « Zeile » est une traduction possible de « ligne » en allemand.

- $\mathcal{G}$  est clairement fermé dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . De plus, il est borné, car les coordonnées des sommets des  $n$ -cycles considérés le sont. En résumé,  $\mathcal{G}$  est un compact de  $\mathbb{R}^{2n}$ .
- Nous définissons la fonction  $s : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui à un uplet de  $\mathcal{G}$  associe l'aire généralisée du  $n$ -cycle qu'il représente. Cette fonction est continue comme valeur absolue d'une fonction polynomiale en les coordonnées.
- Finalement, par continuité et compacité, on sait que  $s$  admet un maximum sur  $\mathcal{G}$ . Or, un tel maximum ne peut pas être atteint en un  $n$ -cycle dégénéré, clairement, ni en un polygone croisé d'après le fait 11, donc un tel maximum sera obtenu en un  $n$ -gone. That's all folks !

□

#### 1.4. Théorème d'isopérimétrie polygonal.

**Fait 13.** Soit  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  un naturel fixé. Considérons tous les  $n$ -gones de périmètre fixé. Parmi tous ces  $n$ -gones, un seul est d'aire maximale, c'est le  $n$ -gone régulier.

*Démonstration.* Les cas  $n = 3$  et  $n = 4$  sont donnés par les faits ?? et ??. Pour  $n \geq 5$ , il suffit d'invoquer les faits 4 et 12. □

*Ici s'achève notre joli voyage.*