BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

Table des matières

Date: 18 Jan. 2025 – 11 Fev. 2025.

Fait 1. *Si un n-gone convexe $\mathcal{P}$ n'est pas un n-gone équilatéral, alors on peut construire un n-gone convexe $\mathcal{P}'$ tel que* $\mathrm{Perim}(\mathcal{P}') = \mathrm{Perim}(\mathcal{P})$ *et* $\mathrm{Aire}(\mathcal{P}') > \mathrm{Aire}(\mathcal{P})$.

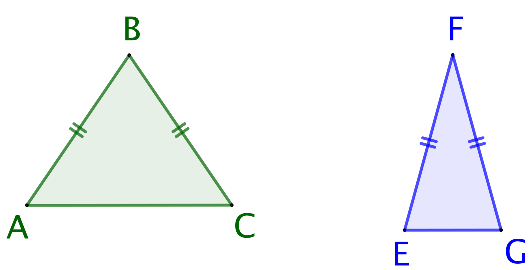
Démonstration. Considérons un n-gone convexe $\mathcal{P}$ qui ne soit pas un n-gone équilatéral. Dans ce cas, $\mathcal{P}$ admet un triplet de sommets consécutifs A, B et C tels que $AB \neq BC$ (sinon, on obtiendrait de proche en proche un n-gone équilatéral). La construction vue dans la preuve du fait **??** nous donne la solution : voir les deux dessins ci-après dans lesquels $(AC) \mathbin{/\!/} (BB')$. Pour le 2$^{\text{e}}$ cas, il n'est pas possible d'utiliser le triangle $AB'C$ isocèle en B' car $(B'C)$ porte le côté de $\mathcal{P}$ de sommet C juste après $[BC]$, mais ce problème se contourne en considérant un point B'' du segment ouvert $]BB'[$ (si besoin, se reporter au 2$^{\text{e}}$ dessin de la preuve du fait **??**).

Dans chaque cas, nous avons construit un n-gone convexe $\mathcal{P}''$ tel que $\mathrm{Perim}(\mathcal{P}'') < \mathrm{Perim}(\mathcal{P})$ et $\mathrm{Aire}(\mathcal{P}'') = \mathrm{Aire}(\mathcal{P})$. Un simple agrandissement donne un n-gone convexe $\mathcal{P}'$ vérifiant $\mathrm{Perim}(\mathcal{P}') = \mathrm{Perim}(\mathcal{P})$ et $\mathrm{Aire}(\mathcal{P}') > \mathrm{Aire}(\mathcal{P})$. □

Remarque 0.1. *Le fait précédent ne permet pas de se ramener toujours au cas d'un n-gone équilatéral convexe. Il nous dit juste que si un n-gone convexe maximise son aire à périmètre fixé, alors il devra être a minima un n-gone équilatéral. La nuance est importante, et une similaire existe pour la conclusion du fait suivant.*

Fait 2. *Si un n-gone équilatéral convexe $\mathcal{P}$ n'est pas un n-isogone, alors il existe un n-gone convexe $\mathcal{P}'$ tel que* $\mathrm{Perim}(\mathcal{P}') = \mathrm{Perim}(\mathcal{P})$ *et* $\mathrm{Aire}(\mathcal{P}') > \mathrm{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. SCHÉMA AVEC CÔTÉ CONTIGUS CAR AU FINAL PAS SI SIMPLE PUISQU'UN COTÉ PEUT ETRE MANGÉ c'est toujours omis !
PARLER DE Zenodore ais trop long et peu éclaiant avec aussi le problème du côté mangé !!!
la preuve geo est trop longue, donc ici on accepte l'analyse !
Par hypothèse, nous avons deux paires de côtés $\big([AB],[BC]\big)$ et $\big([EF],[FG]\big)$ telles que $\widehat{BAC} < \widehat{FEG}$ comme ci-dessous.



Dans nos manipulations à venir, nous fixons A, C, E et G, tout en cherchant à bouger B et F de sorte à toujours avoir des triangles isocèles « *pointant* » vers l'extérieur du convexe $\mathcal{P}$. Posons $\ell = AB$, $d_1 = AC$ et $d_2 = EG$. Comme nous ne touchons pas aux points A, C, E et G, les nombres d_1 et d_2 sont constants.

- ? ? ? ?

- ????

□

Fait 3. *Si un n-gone $\mathcal{P}$ n'est pas régulier, alors il existe un n-gone convexe $\mathcal{P}'$ tel que* $\mathrm{Perim}(\mathcal{P}') = \mathrm{Perim}(\mathcal{P})$ *et* $\mathrm{Aire}(\mathcal{P}') > \mathrm{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Le fait **??** permet de considérer le problème de maximisation d'aire à périmètre fixé juste pour des n-gones convexes. Selon les faits 1 et 2, si, parmi les n-gones convexes de périmètre fixé, il en existe un d'aire maximale, alors ce ne peut être que le n-gone régulier. □