BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts.

Mentions « légales »

Table des matières

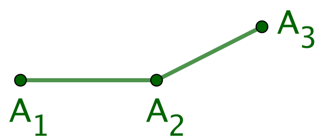
Date: 18 Jan. 2025 – 1er Mars 2025.

0.1. **Au moins une solution, ou presque.** L'étude du cas des quadrilatères a montré que la convexité était un ingrédient central. Ceci sera aussi le cas pour les n-gones, bien que moins immédiat à justifier, comme nous le verrons dans le fait **??**, dont la preuve est indépendante des résultats de cette section. Ceci explique que nous allons chercher à justifier l'existence d'au moins un n-gone convexe d'aire maximale parmi les n-gones convexes de longueur fixée. Nous allons presque y arriver...

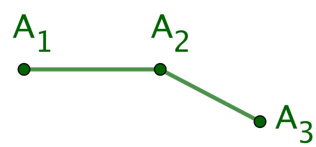
Fait 1. *Si $\mathcal{P} = A_1 A_2 \cdots A_n$ est un n-gone convexe, alors nous avons l'une des deux alternatives suivantes.*

- $\forall (i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $\det\left(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}\right) \geq 0$.
- $\forall (i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $\det\left(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}\right) \leq 0$.

Démonstration. Le cas $n = 3$ étant immédiat, nous allons supposer $n \geq 4$. Comme $\mathcal{P}$ est un n-gone, nous savons que ses sommets sont distincts deux à deux, et qu'aucun triplet de sommets consécutifs alignés n'existe. Dès lors, dans le plan orienté, les trois premiers sommets sont placés suivant l'une des deux configurations suivantes.



Cas positif.



Cas négatif.

Considérons le cas positif, c'est-à-dire supposons que $\det\left(\overrightarrow{A_1'A_2'}, \overrightarrow{A_1'A_3'}\right) > 0$.

- $\overrightarrow{A_1'A_3'} = \overrightarrow{A_1'A_2'} + \overrightarrow{A_2'A_3'}$ donne $\det\left(\overrightarrow{A_2'A_3'}, \overrightarrow{A_2'A_1'}\right) > 0$.
- Comme A_2, A_3 et A_4 ne sont pas alignés, et de plus A_1 et A_4 du même côté de la droite (A_2A_3), nous obtenons $\det\left(\overrightarrow{A_2'A_3'}, \overrightarrow{A_2'A_4'}\right) > 0$.
- En continuant de proche en proche, nous arrivons à $\det\left(\overrightarrow{A_i'A_{i+1}'}, \overrightarrow{A_i'A_{i+2}'}\right) > 0$ pour $i \in [\![1\,;n]\!]$ quelconque.
- Le point précédent et la convexité donnent $\det\left(\overrightarrow{A_i'A_{i+1}'}, \overrightarrow{A_i'A_k'}\right) \geq 0$ pour $(i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tel que $k \notin \{i\,;i+1\}$.

Le cas négatif se traite de façon similaire. □

On aurait pu établir des inégalités strictes pour les indices $k \notin \{i\,;i+1\}$, mais nous n'aurons pas besoin de cette précision, car nous allons travailler dans un ensemble compact, et donc fermé, de n-cycles. Ceci aura pour inconvénient de ne pas garantir le caractère n-gonal, mais nous n'avons pas le choix !

Fait 2. *Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct du plan et $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des uplets de coordonnées $\big(x(A_1)\,;y(A_1)\,;\ldots;x(A_n)\,;y(A_n)\big)$ où $\mathcal{L} = A_1A_2\cdots A_n$ désigne un n-cycle vérifiant les conditions suivantes.*

- $\mathrm{Long}(\mathcal{L}) = \ell$.
- $\forall (i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $\det\left(\overrightarrow{A_i'A_{i+1}'}, \overrightarrow{A_i'A_k'}\right) \geq 0$.

On considère alors la fonction $\alpha : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+$ qui à un uplet de $\mathcal{U}$ associe l'aire algébrique du n-cycle qu'il représente. Avec ces notations, la fonction $\alpha : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+$ admet au moins un maximum.

Démonstration. $\mathcal{U}$ est fermé dans $\mathbb{R}^{2n}$, car les conditions le définissant le sont, et il est borné, car inclus dans la boule fermée de centre O et de rayon ℓ, donc $\mathcal{U}$ est un compact de $\mathbb{R}^{2n}$. De plus, α est continue d'après le fait **??**. Finalement, par continuité et compacité, α admet un maximum sur $\mathcal{U}$. □

Nous arrivons, ci-dessous, au résultat central pour les n-gones convexes où la perte éventuelle de sommets est un faux problème, car nous aboutirons, plus tard, à la comparaison de k-gones réguliers convexes pour k variable, une tâche aisée, puisque le périmètre et l'aire d'un k-gone régulier convexe s'expriment en fonction de k.

Fait 3. *Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ et $\ell \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe un k-gone convexe $\mathcal{K}$ validant les assertions suivantes.*

- $k \leq n$ *et* $\mathrm{Long}(\mathcal{K}) = \ell$.
- *Si $\mathcal{P}$ est un n-gone convexe tel que* $\mathrm{Long}(\mathcal{P}) = \ell$, *alors* $\mathrm{Aire}(\mathcal{P}) \leq \mathrm{Aire}(\mathcal{K})$.

Démonstration. Commençons par chercher un n-cycle $\mathcal{M}$ tel que $\mathrm{Aire}(\mathcal{P}) \leq \mathrm{Aire}(\mathcal{M})$ pour tout n-gone convexe $\mathcal{P}$ vérifiant $\mathrm{Long}(\mathcal{P}) = \ell$.

-

XXXX
Commençons par noter que tout n-cycle d'origine A_1 translaté via le vecteur $\overrightarrow{A_1\mathrm{O}}$ donne un n-cycle d'origine O, sans modification de la longueur, ni de l'aire algébrique, ni l'ordre des sommets après A_1. De plus, selon le fait 1, $\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{L}^{\mathrm{op}}) = -\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{L})$ pour tout n-cycle $\mathcal{L}$ d'après le fait **??**, donc nous pouvons nous concentrer sur les n-cycles convexes vérifiant $\det\left(\overrightarrow{A_i'A_{i+1}'}, \overrightarrow{A_i'A_k'}\right) \geq 0$ pour tous les sommets A_i et A_k grâce au fait précédent.

- Munissons le plan d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, puis notons $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des uplets de coordonnées $\big(x(A_1)\,;y(A_1)\,;\ldots;x(A_n)\,;y(A_n)\big)$ où $\mathcal{L} = A_1A_2\cdots A_n$ est un n-cycle vérifiant les conditions suivantes.
  (1) $A_1 = \mathrm{O}$.
  (2) $\mathrm{Long}(\mathcal{L}) = \ell$.
  (3) $\forall (k,i) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $\det\big(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_k}\big) \geq 0$.
- $\mathcal{U}$ est fermé dans $\mathbb{R}^{2n}$, car les conditions le définissant le sont, et il est borné, car inclus dans la boule fermée de centre O et de rayon ℓ. En résumé, $\mathcal{U}$ est un compact de $\mathbb{R}^{2n}$.
- Nous définissons la fonction $\alpha : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+$ qui à un uplet de $\mathcal{U}$ associe l'aire algébrique du n-cycle qu'il représente. Cette fonction est continue d'après le fait **??**. Donc, α admet un maximum sur $\mathcal{U}$ par continuité et compacité. Affaire conclue !
- Reprenons les notations de la preuve du fait 2, puis notons $\mathcal{K}$ un n-cycle convexe maximisant la fonction α sur $\mathcal{U}$, de sorte que $\mathrm{Long}(\mathcal{K}) = \ell$ est validée. Il est immédiat que pour tout n-gone convexe $\mathcal{P}$ tel que $\mathrm{Long}(\mathcal{P}) = \ell$, nous avons $\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{P}) \leq \overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{K})$, puis le fait **??** donne que $\mathrm{Aire}(\mathcal{P}) \leq \big|\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{K})\big|$, après avoir noté que nécessairement $\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{K}) \geq 0$. Pour finir, voyons pourquoi $\mathcal{K}$ est un k-gone convexe avec $k \leq n$, ce qui impliquera ensuite $\big|\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{K})\big| = \mathrm{Aire}(\mathcal{K})$. $\square$

Affaire conclue !