BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LaTeX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts.

Mentions « légales »

Table des matières

0.1. Au moins une solution, ou presque 2

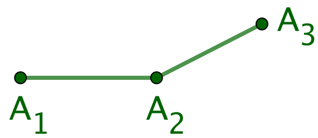
Date: 18 Jan. 2025 – 2 Mars 2025.

0.1. **Au moins une solution, ou presque.** Le cas des quadrilatères a montré que la convexité était un ingrédient central. Ceci sera aussi le cas pour les n-gones, bien que moins immédiat à justifier, comme nous le verrons dans le fait **??**, dont la preuve est indépendante des résultats de cette section. Ceci explique que nous allons chercher à justifier l'existence d'au moins un n-gone convexe d'aire maximale parmi les n-gones convexes de longueur fixée. Nous allons presque y arriver... Pour ce faire, commençons par vérifier que notre définition d'un n-gone convexe correspond bien à ce que nous connaissions des polygones convexes au lycée.

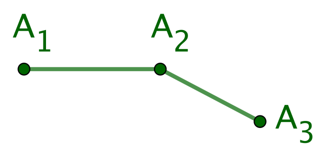
Fait 1. *Pour tout n-gone convexe $\mathcal{P} = A_1A_2\cdots A_n$, l'une des alternatives suivantes a lieu.*

- $\forall (i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$, *si* $k \notin \{i\,; i+1\}$, *alors* $\det\left(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_k}\right) > 0$.
- $\forall (i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$, *si* $k \notin \{i\,; i+1\}$, *alors* $\det\left(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_k}\right) < 0$.

Démonstration. Le cas $n = 3$ des triangles est immédiat. On considère alors $\mathcal{P}$ un n-gone convexe où $n \geq 4$. Nous savons que, relativement à $\mathcal{P}$, les sommets sont distincts deux à deux, et qu'aucun triplet de sommets consécutifs alignés n'existe. Dès lors, dans le plan orienté, les trois premiers sommets sont placés suivant l'une des deux configurations suivantes.



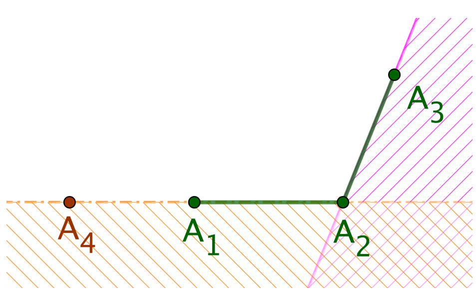
Cas positif.



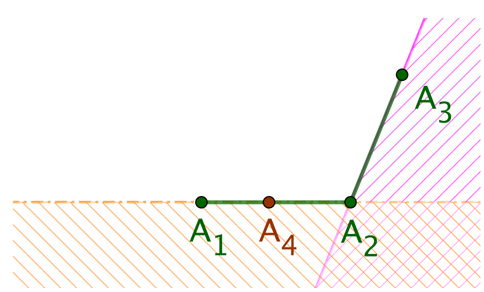
Cas négatif.

Considérons le cas positif, c'est-à-dire supposons que $\det\left(\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_1A'_3}\right) > 0$.

- $\overrightarrow{A'_1A'_3} = \overrightarrow{A'_1A'_2} + \overrightarrow{A'_2A'_3}$ donne $\det\left(\overrightarrow{A'_2A'_3}, \overrightarrow{A'_2A'_1}\right) > 0$.
- Comme A_2, A_3 et A_4 ne sont pas alignés, et de plus A_1 et A_4 du même côté, au sens large, de la droite (A_2A_3), nous obtenons $\det\left(\overrightarrow{A'_2A'_3}, \overrightarrow{A'_2A'_4}\right) > 0$.
- En continuant de proche en proche, nous arrivons à $\det\left(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_{i+2}}\right) > 0$ pour $i \in [\![1\,;n]\!]$ quelconque.
- Le point précédent et la convexité donnent $\det\left(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_k}\right) \geq 0$ pour $(i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tel que $k \notin \{i\,; i+1\}$.
- Montrons maintenant que $\det\left(\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_1A'_k}\right) > 0$ pour $k \in [\![3\,;n]\!]$. Nous savons déjà l'inégalité vraie pour $k = 3$, donc passons à $k = 4$. Pour avoir $\det\left(\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_1A'_k}\right) > 0$, le point précédent donne qu'il faut vérifier que $\det\left(\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_1A'_k}\right) = 0$ est impossible. Supposons donc l'égalité vraie, ce qui implique d'avoir $n \geq 5$, et donne les configurations suivantes où les hachures et la droite en trait plein sont des zones interdites pour A_4.

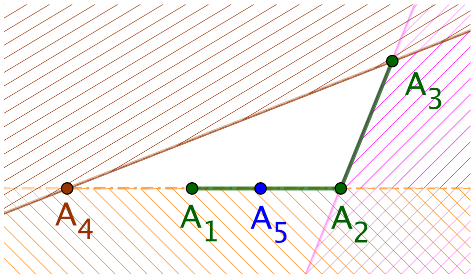


Cas 1.

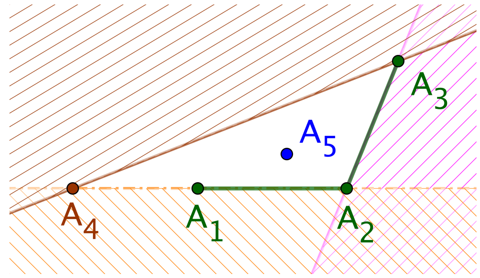


Cas 2.

Le cas 2 est impossible par raison de convexité, car A_1 et A_2 sont de part et d'autre de la droite (A_3A_4). Voyons donc ce qu'implique le 1^er cas pour A_5.



Cas 1-1.



Cas 1-2.

Le cas 1-2 est impossible par raison de convexité à cause de (A_4A_5). Notons que dans le cas 1-1, il est possible d'avoir $A_5 \in]A_4A_1[$. Comme $A_5 \in (A_1A_2)$, nous devons avoir $n \geq 6$. Dès lors, nous avons de nouveau $A_6 \in (A_1A_2)$, mais ceci donne la contradiction $A_6 \in (A_4A_5)$. Continuons ensuite de proche en proche, nous obtenons bien $\det\left(\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_1A'_k}\right) > 0$ pour $k \in [\![3\,;n]\!]$.

- En généralisant le raisonnement précédent,[1] nous avons $\det\left(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_k}\right) > 0$ pour tout couple $(i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$ vérifiant $k \notin \{i\,;i+1\}$.

Le cas négatif se traite de façon similaire. □

1. Se souvenir de la définition de la suite (A'_i).

Nous allons établir une réciproque élargie du résultat précédent. Ce nouveau fait va nous rendre un grand service par la suite.[2]

Fait 2. *Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n-cycle convexe vérifiant l'une des alternatives suivantes.*

- $\forall (i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $\det\left(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}\right) \geq 0$.
- $\forall (i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $\det\left(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}\right) \leq 0$.

Ceci implique la validité de l'une des deux assertions ci-dessous.

i. Tous les sommets de $\mathcal{L}$ sont alignés, autrement dit, $\mathcal{L}$ est totalement dégénéré.

ii. XXXX

Démonstration. Par symétrie des alternatives à vérifier, nous pouvons nous concentrer sur le cas positif, c'est-à-dire supposer que $\forall (i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $\det\left(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}\right) \geq 0$. Supposons alors $\mathcal{L}$ non totalement dégénéré, de sorte qu'il existe $(i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tel que $k \notin \{i\,;i+1\}$ et $\det\left(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}\right) > 0$. Pour raisonner algorithmiquement, nous aurons besoin d'un ensemble $\mathscr{T}$ de sommets testés, et d'une liste $\mathbb{U}$ de sommets utiles, tous les deux initialement vides.

(1) XXXX

(2) XXXX

(3) XXXX

(4) Prenons alors k minimal.

YYYY

Quitte à changer l'origine de $\mathcal{L}$, sans changer le sens de parcours des sommets, nous pouvons supposer avoir $i = 1$, et donc $k \in [\![3\,;n]\!]$ tel que $\det\left(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_k}\right) > 0$. Lors de ce renommage, on met aussi à jour tous les noms des points contenus dans $\mathscr{T}$ et $\mathbb{U}$. □

2. Pourquoi s'attarder sur des inégalités larges ? Parce que nous allons travailler dans un ensemble compact, et donc fermé, de n-cycles, même si cela aura pour inconvénient de ne pas garantir le caractère n-gonal, selon le fait 2, mais nous n'avons pas le choix !

XXX
Le résultat qui suit est juste là pour simplifier la justification du fait 4 à venir.

Fait 3. *Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct du plan et $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des uplets de coordonnées $\big(x(A_1)\,;y(A_1)\,;\ldots;x(A_n)\,;y(A_n)\big)$ où $\mathcal{L} = A_1A_2\cdots A_n$ désigne un n-cycle vérifiant les conditions suivantes.*

- $\mathrm{Long}(\mathcal{L}) = \ell$.
- $\forall (i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $\det\big(\overrightarrow{A_i'A_{i+1}'}, \overrightarrow{A_i'A_k'}\big) \geq 0$.

On considère alors la fonction $\alpha : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+$ qui à un uplet de $\mathcal{U}$ associe l'aire algébrique du n-cycle qu'il représente. Avec ces notations, la fonction $\alpha : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+$ admet au moins un maximum.

Démonstration. $\mathcal{U}$ est fermé dans $\mathbb{R}^{2n}$, car les conditions le définissant le sont, et il est borné, car inclus dans la boule fermée de centre O et de rayon ℓ, donc $\mathcal{U}$ est un compact de $\mathbb{R}^{2n}$. De plus, α est continue d'après le fait **??**. Finalement, par continuité et compacité, α admet un maximum sur $\mathcal{U}$. $\square$

XXX
Nous arrivons, ci-dessous, au résultat central pour les n-gones convexes où la perte éventuelle de sommets est un faux problème, car nous aboutirons, plus tard, à la comparaison de k-gones réguliers convexes pour k variable, une tâche aisée, puisque le périmètre et l'aire d'un k-gone régulier convexe s'expriment en fonction de k.

Fait 4. *Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ et $\ell \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe un k-gone convexe $\mathcal{K}$ validant les assertions suivantes.*

- $k \leq n$ *et* $\mathrm{Long}(\mathcal{K}) = \ell$.
- *Si $\mathcal{P}$ est un n-gone convexe tel que* $\mathrm{Long}(\mathcal{P}) = \ell$, *alors* $\mathrm{Aire}(\mathcal{P}) \leq \mathrm{Aire}(\mathcal{K})$.

Démonstration. Reprenons les notations du fait 3, et considérons $\mathcal{M} \in \mathcal{U}$ maximisant α.

- Une simple translation permet de se ramener au cas de n-gones convexes d'origine O.
- XXXX
- XXXX
- XXXX
- XXXX
- XXXX

XXXX
Commençons par chercher un n-cycle $\mathcal{M}$ tel que $\mathrm{Aire}(\mathcal{P}) \leq \mathrm{Aire}(\mathcal{M})$ pour tout n-gone convexe $\mathcal{P}$ vérifiant $\mathrm{Long}(\mathcal{P}) = \ell$.
De plus, selon le fait 1,
$\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{L}^{\mathrm{op}}) = -\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{L})$ pour tout n-cycle $\mathcal{L}$ d'après le fait **??**, donc nous pouvons nous concentrer sur les n-cycles convexes vérifiant $\det\left(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_k}\right) \geq 0$ pour tous les sommets A_i et A_k grâce au fait précédent.

- Munissons le plan d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, puis notons $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des uplets de coordonnées $\big(x(A_1)\,; y(A_1)\,; \ldots; x(A_n)\,; y(A_n)\big)$ où $\mathcal{L} = A_1A_2\cdots A_n$ est un n-cycle vérifiant les conditions suivantes.
  (1) $A_1 = \mathrm{O}$.
  (2) $\mathrm{Long}(\mathcal{L}) = \ell$.
  (3) $\forall (k,i) \in [\![1\,; n]\!]^2$, $\det\left(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_k}\right) \geq 0$.
- $\mathcal{U}$ est fermé dans $\mathbb{R}^{2n}$, car les conditions le définissant le sont, et il est borné, car inclus dans la boule fermée de centre O et de rayon ℓ. En résumé, $\mathcal{U}$ est un compact de $\mathbb{R}^{2n}$.
- Nous définissons la fonction $\alpha : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+$ qui à un uplet de $\mathcal{U}$ associe l'aire algébrique du n-cycle qu'il représente. Cette fonction est continue d'après le fait **??**. Donc, α admet un maximum sur $\mathcal{U}$ par continuité et compacité. Affaire conclue !
- Reprenons les notations de la preuve du fait 3, puis notons $\mathcal{K}$ un n-cycle convexe maximisant la fonction α sur $\mathcal{U}$, de sorte que $\mathrm{Long}(\mathcal{K}) = \ell$ est validée. Il est immédiat que pour tout n-gone convexe $\mathcal{P}$ tel que $\mathrm{Long}(\mathcal{P}) = \ell$, nous avons $\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{P}) \leq \overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{K})$, puis le fait **??** donne que $\mathrm{Aire}(\mathcal{P}) \leq \left|\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{K})\right|$, après avoir noté que nécessairement $\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{K}) \geq 0$. Pour finir, voyons pourquoi $\mathcal{K}$ est un k-gone convexe avec $k \leq n$, ce qui impliquera ensuite $\left|\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{K})\right| = \mathrm{Aire}(\mathcal{K})$. $\square$

Affaire conclue !