IDENTITÉS PARTICULIÈRES GÉNÉRALISABLES RIGOUREUSEMENT

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/visual-proof/polynomial-analytic-principles.

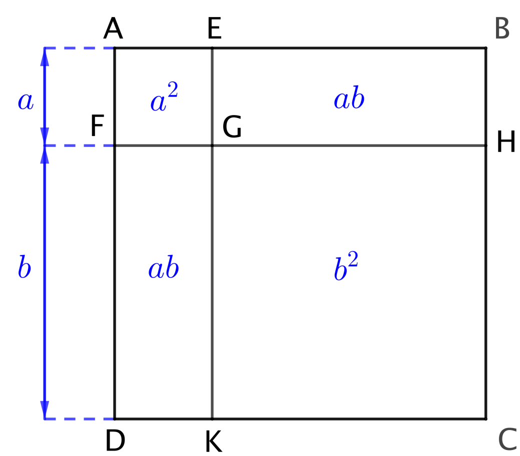
Mentions « légales »

Table des matières

Ce document donne un cadre rigoureux pour justifier la généralisation de certaines identités obtenues via des cas *« particuliers évidents »* comme, par exemple, dans les preuves sans mot.

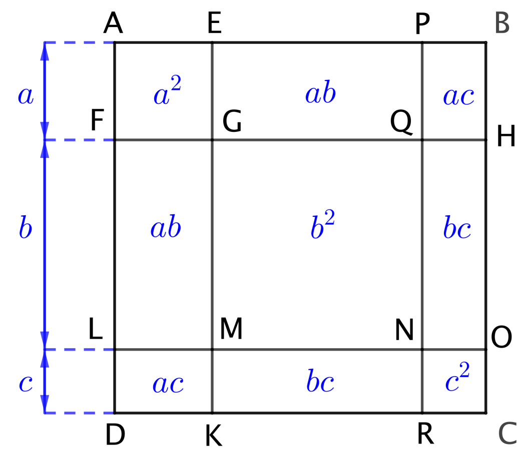
1. Au commencement étaient les polynômes

Via de simples calculs d'aires, il est très facile de découvrir les classiques identités remarquables $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ et $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Par exemple, en considérant le dessin ci-dessous où $ABCD$, $AEGF$ et $GHCK$ sont des carrés, il est évident que $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Malheureusement, cette démonstration n'est valable que pour $a > 0$ et $b > 0$ *(ce sont des contraintes géométriques concrètes).*



Date: 16 Juillet 2019 - 26 Mars 2025.

Comment passer à $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ pour a et b deux réels de signes quelconques ? Classiquement, nous faisons une vérification via un calcul algébrique. En résumé, nous conjecturons géométriquement, puis nous validons algébriquement. Bien que rigoureuse, la démarche précédente est peu satisfaisante, car elle balaye d'un revers de main l'approche géométrique, dont le rôle est réduit à la découverte d'une formule. Si nous considérons le dessin ci-après, il est dommage de devoir faire du calcul algébrique pour valider $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ pour a, b et c des réels de signes quelconques. Ce serait bien de pouvoir passer directement de $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ vraie pour $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$, à la validation de l'identité pour a, b et c de signes quelconques.



Le fait 2, donné un peu plus bas, rend licite le passage des formules géométriques contraintes précédentes au cas général en faisant les choix suivants de fonctions polynomiales.

- $p_1(a\,;b) = (a+b)^2 - a^2 - b^2 - 2ab$
- $p_2(a\,;b\,;c) = (a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$

Préliminaire 1. *XXX*

Démonstration. Soit □

Fait 2. *Soit $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale à n variables, où $n \in \mathbb{N}^*$. Si p s'annule sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$, alors p s'annule sur $\mathbb{R}^n$ tout entier.*

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour démontrer la validité de la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie par « *Pour tout fonction polynomiale réelle $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si p s'annule sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$, alors p s'annule sur $\mathbb{R}^n$ tout entier.* ».

- **Cas de base.** $\mathcal{P}(1)$ signifie qu'une fonction polynomiale réelle à une variable s'annulant sur $\mathbb{R}_+^*$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier. Or, selon le résultat préliminaire 1, un polynôme réel non nul n'a qu'un nombre fini de racines, donc $\mathcal{P}(1)$ est validée.
- **Hérédité.** Supposons $\mathcal{P}(n)$ valide pour un naturel n quelconque. Soit une fonction polynomiale p à $(n+1)$ variables vérifiant les conditions de la propriété $\mathcal{P}(n+1)$.
  1. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, puis la fonction polynomiale $p_x(x_1\,;\dots;x_n) = p(x_1\,;\dots;x_n\,;x)$. Comme p_x vérifie les conditions de la propriété $\mathcal{P}(n)$, par hypothèse de récurrence, nous avons $p_x(x_1\,;\dots;x_n) = 0$, soit $p(x_1\,;\dots;x_n\,;x) = 0$, pour tous réels x_1 , ... , x_n.
  2. Fixons maintenant des réels x_1 , ... , x_n de signes quelconques, et considérons la fonction polynomiale $\ell(x) = p(x_1\,;\dots;x_n\,;x)$. Le point précédent montre que ℓ vérifie $\mathcal{P}(1)$, donc $\ell(x) = 0$, soit $p(x_1\,;\dots;x_n\,;x) = 0$, pour tout réel x, d'après le cas de base.

(3) Finalement, $p(x_1\,;\ldots;x_n\,;x)=0$ pour tous réels x_1 , ... , x_n et x. Autrement dit, nous avons déduit la validité de $\mathcal{P}(n+1)$ à partir de celle de $\mathcal{P}(n)$.

- **Conclusion.** Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout naturel non nul n.

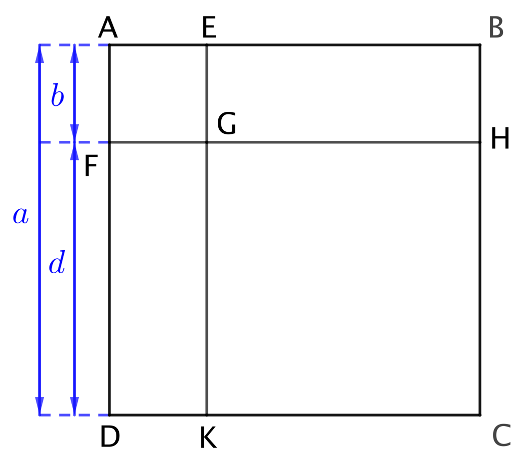
$\square$

Exemple 3. *En utilisant une approche géométrique semblable à celle présentée plus haut, il devient évident, et rigoureux maintenant, que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall(a_1\,;\ldots;a_n)\in\mathbb{R}^n$, nous avons :*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k\Big)^2=\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j$$

Exemple 4. *Nous laissons le soin au lecteur de vérifier à l'aide d'un cube, le solide géométrique, la validité de l'identité $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ pour tous réels a et b.*

Considérons maintenant le dessin ci-dessous avec $d=a-b$, et la contrainte $a>b$.

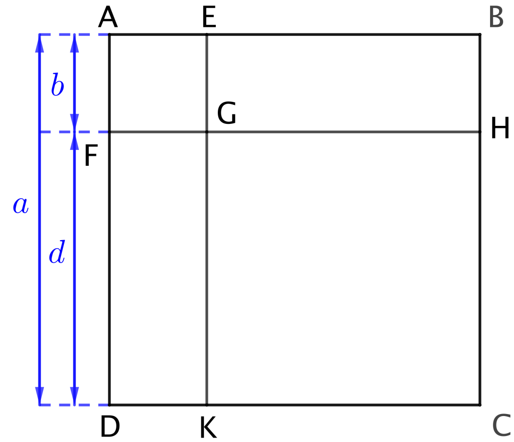


Le fait 2, très utile, ne peut pas s'appliquer au calcul géométrique évident suivant.
Aire$(GHCK)$ = Aire$(ABCD)$ − Aire$(ABHF)$ − Aire$(AEKD)$ + Aire$(AEGF)$
$\iff$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
Peut-on tout de même déduire du calcul géométrique précédent la validité, pour tous les réels a et b, de l'identité $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$? Cela est rendu possible par le fait 5 suivant.

Fait 5. *Soit $p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction polynomiale à n variables, où $n\in\mathbb{N}^*$. Si $\mathscr{E}\subseteq\mathbb{R}^n$ contient $\mathscr{E}_1\times\cdots\times\mathscr{E}_n$ où chaque $\mathscr{E}_k\subseteq\mathbb{R}$ est infini, et si p s'annule sur $\mathscr{E}$, alors p s'annule sur $\mathbb{R}^n$ tout entier.*

Démonstration. La preuve du fait 2 s'adapte facilement au cadre proposé ici (se souvenir que la clé du raisonnement était le fait qu'un polynôme réel n'admet qu'un nombre fini de racines). $\square$

Exemple 6. *Considérons le dessin ci-dessous avec $d=a-b$, et la contrainte $a>b$.*

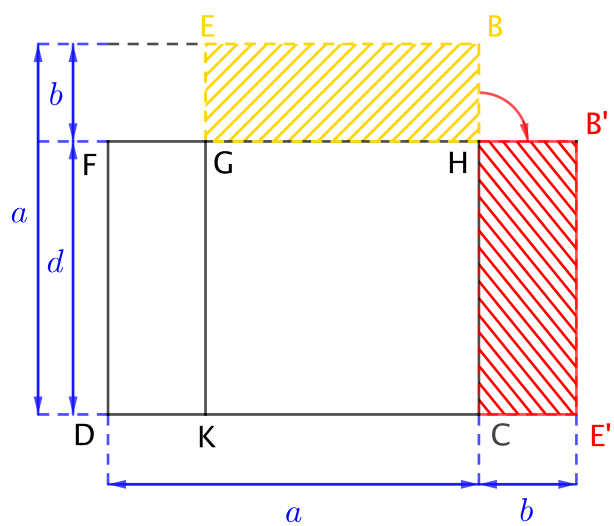


Nous avons les calculs géométriques simples suivants.

$$\mathrm{Aire}(ABCD) - \mathrm{Aire}(AEGF) = \mathrm{Aire}(GHCK) + \mathrm{Aire}(EBHG) + \mathrm{Aire}(FGKD)$$

$$\iff a^2 - b^2 = \mathrm{Aire}(GHCK) + \mathrm{Aire}(EBHG) + \mathrm{Aire}(FGKD)$$

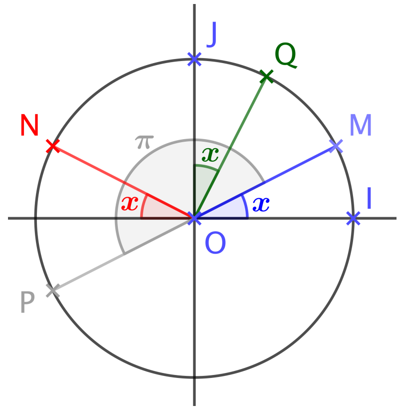
En déplaçant ensuite le rectangle $EBHG$ comme ci-dessous, nous obtenons alors un rectangle de dimension $(a+b) \times (a-b)$.



Finalement, nous obtenons $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ si $a > b$, puis, en appliquant le fait 5 au polynôme $p(a\,;b) = a^2 - b^2 - (a+b)(a-b)$, nous avons : $\forall (a\,;b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

2. Puis vinrent les fonctions analytiques

Considérons le dessin suivant, où les mesures des angles sont en radians.



Via les points M, N, P et Q, il est facile de fournir des arguments géométriques de symétrie justifiant que, sous la condition $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{4}\right[$, nous avons :

- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
  $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
  $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

De nouveau, il serait bien de pouvoir passer, sans plus d'effort, à la validité des formules ci-dessus sur $\mathbb{R}$ tout entier *(considérer les autres cas n'est pas compliqué, mais c'est pénible)*. Nous allons voir que cela est licite grâce au fait 8 suivant qui est un peu technique, car il nécessite la notion de fonction analytique.

Définition 7. *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert non vide. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite analytique en $z_0 \in \Omega$, s'il existe une série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $\rho_0 > 0$, et un réel $r \in]0\,;\rho_0]$ tels que dans le disque ouvert $\mathcal{D}(z_0\,;r[\subseteq U$, on ait : $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.*

Si f est analytique en tout complexe de Ω, la fonction f est dite analytique sur Ω.

Fait 8. *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe non vide, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Si f s'annule sur un ouvert de Ω, alors f est identiquement nulle* (c'est le théorème d'identité).

Démonstration. TODO □

Fait 9. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ où $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ est un ouvert non vide. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$, et une série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence infini telle que $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, alors f est analytique sur Ω.*

Démonstration. TODO □

Si nous revenons à nos identités trigonométriques, il suffit de savoir que les fonctions circulaires réelles sont analytiques sur $\mathbb{C}$ tout entier, et de noter que le raisonnement géométrique au début de cette section fait clairement apparaître des zéros non isolés pour les fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$ suivantes.[1]

- $f_1(z) = \cos(\pi - z) + \cos z$ et $f_2(z) = \sin(\pi - z) - \sin z$

1. Nous admettrons ces affirmations qui ne sont pas violentes à démontrer une fois que l'on a les bases de la théorie des fonctions analytiques.

- $f_3(z) = \cos(z+\pi) + \cos z$ et $f_4(z) = \sin(z+\pi) + \sin z$
- $f_5(z) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \sin z$ et $f_6(z) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \cos z$