

BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



TABLE DES MATIÈRES

0.1. Aire algébrique d’un n -cycle

2

0.1. Au moins une solution, ou presque. Nous allons restreindre notre recherche d'un n -gone solution du problème d'isopérimétrie polygonale à l'ensemble des n -gones convexes. Le fait ?? nous montrera plus tard que cette restriction n'en est pas une. Cette section va se résumer à l'unique fait suivant a priori imprécis,¹ mais qui va être essentiel dans la suite de notre analyse.

Fait 1. *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Parmi tous les n -cycles convexes positifs de longueur ℓ fixée, non nulle, il en existe au moins un d'aire algébrique maximale.*

Démonstration.

- Munissant le plan d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des uplets de coordonnées $(x(A_1); y(A_1); \dots; x(A_n); y(A_n))$ où $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ est un n -cycle vérifiant les conditions suivantes.
 - (1) $A_1 = O$.
 - (2) $\text{Long}(\mathcal{L}) = \ell$.
 - (3) $\forall (k, i) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$.
- La condition ?? n'est autre que celle caractérisant les n -cycles convexes et positifs, donc \mathcal{U} est l'ensemble des n -cycles convexes positifs $OA_2 \cdots A_n$ de longueur ℓ .
- \mathcal{U} est fermé dans \mathbb{R}^{2n} , car les conditions le définissant le sont, et il est borné, car inclus dans la boule fermée de centre O et de rayon ℓ . En résumé, \mathcal{U} est un compact de \mathbb{R}^{2n} .
- Nous définissons la fonction $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui à un uplet de \mathcal{U} associe l'aire algébrique du n -cycle qu'il représente. Cette fonction est continue d'après le fait 7. Donc, α admet un maximum sur \mathcal{U} par continuité et compacité.
- Pour conclure, il suffit de noter que tout n -cycle d'origine B_1 translaté via le vecteur $\overrightarrow{B_1 O}$ donne un n -cycle d'origine O , sans modification de la longueur, ni de l'aire algébrique, ni de l'orientation des sommets. □

1. Un n -cycle convexe n'est pas forcément un n -gone. Penser tout bêtement à un n -cycle « plat ». Il existe d'autres exemples de n -cycles convexes dégénérés.

Temporary page!

L^AT_EX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because L^AT_EX now knows how many pages to expect for this document.