NEWTON, BERNOULLI, LEIBNIZ & FIBONACCI

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LaTeX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts.

Table des matières

Date: 17 Mars 2025.

1. Des identités bien connues

Les formules suivantes, qui sont de grands classiques pour les trois premières, [1] partagent une ressemblance évidente. Nous allons donner deux démonstrations de ces identités via deux méthodes rendant moins mystérieuses ces similarités portant sur des objets a priori bien différents. Ci-après, δ_{jk} désigne le symbole de Kronecker valant 1 si $j = k$, et 0 sinon, tandis que X est la variable aléatoire comptant le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli de paramètre $(n\,;p)$, et enfin $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ correspond à la suite de Fibonacci.

- **Formule du binôme de Newton :** $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
- **Formule de dérivation de Leibniz :** $(fg)^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$.
- **Loi binomiale :** $\mathrm{P}(X = j) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_{jk}$.
- **Expression de $\boldsymbol{F_{2n}}$ en fonction de $\boldsymbol{F_k}$ précédents :** $F_{2n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k$.

2. Dites-les avec des arbres !

XXXX

3. La formule du binôme de Newton implique...

XXXX
Les nombres de Bell B_n comptent les partitions d'un ensemble et admettent la relation :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

Cette somme ressemble fortement à la relation pour F_{2n}.
Les **nombres de Bell** B_n comptent le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. Ils apparaissent en combinatoire et ont plusieurs formules intéressantes impliquant des coefficients binomiaux et des sommes.
Le nombre de Bell B_n est défini comme le nombre de façons de partitionner un ensemble de n éléments en sous-ensembles non vides.
Quelques premiers termes :

$$B_0 = 1, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = 2, \quad B_3 = 5, \quad B_4 = 15, \quad B_5 = 52.$$

Par exemple, pour $n = 3$, il y a $B_3 = 5$ partitions possibles de l'ensemble $\{a, b, c\}$: 1. $\{\{a, b, c\}\}$ (1 seul bloc) 2. $\{\{a, b\}, \{c\}\}$ 3. $\{\{a, c\}, \{b\}\}$ 4. $\{\{b, c\}, \{a\}\}$ 5. $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ (chaque élément seul)

1. La 4e identité est un classique des classes préparatoires.