

BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



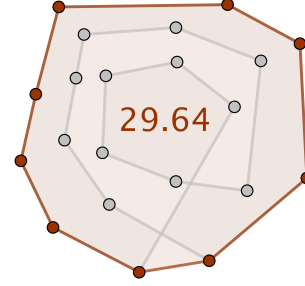
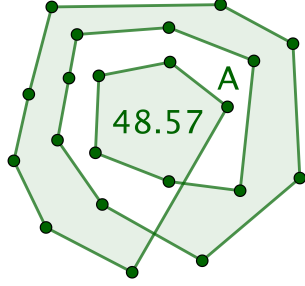
TABLE DES MATIÈRES

0.1. Au moins une solution, ou presque

5

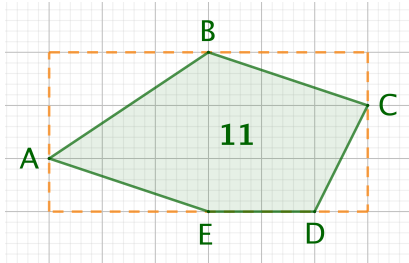
L'existence d'un n -gone solution du problème d'isopérimétrie polygonale nécessite un moyen « continu » de calculer une aire polygonale, ou plus généralement celle d'un n -cycle. Pour ce faire, nous utiliserons l'aire algébrique qui est définie pour tout n -cycle $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ par $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}})$ indépendamment du point Ω .¹

Indiquons au passage qu'il faut être prudent avec cette notion comme le montre l'exemple suivant, obtenu avec **GeoGebra**,² où le n -gone croisé proposé, construit via une spirale positive depuis le point A ,³ possède une aire algébrique positive supérieure à celle de l'enveloppe convexe du n -gone. Contre-intuitif, mais normal.



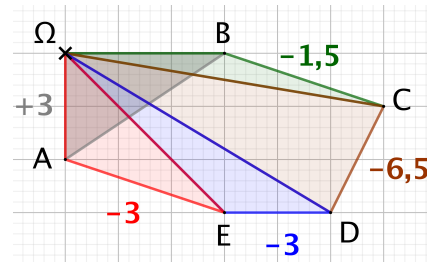
Au commencement étaient les triangles... Il est connu que ABC est d'aire $\frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$ où $\frac{1}{2} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est appelé aire algébrique de ABC . Pour passer aux polygones, il « suffit » d'utiliser des triangles comme dans l'exemple suivant.

Calcul direct à la main.



$$11 = 3 \cdot 6 - \frac{3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{2}$$

Via le déterminant.



$$-11 = 3 - 1,5 - 6,5 - 3 - 3$$

Dans le cas précédent, le résultat pourrait dépendre du point Ω employé, mais le fait suivant nous montre que non. Bonne nouvelle! Yapluca...

Fait 1. Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n -cycle. La quantité $\mu_1^n(\Omega; \mathcal{L}) = \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}})$ est indépendante du point Ω . Dans la suite, cette quantité indépendante de Ω sera notée $\mu_1^n(\mathcal{L})$.

Démonstration. Soit M un autre point du plan.

-
1. Ce fait est démontré un peu plus bas.
 2. Quand **GeoGebra** associe un nombre à un n -cycle \mathcal{L} , il calcule la valeur absolue de son aire algébrique.
 3. En calculant l'aire algébrique avec un point « au centre », les déterminants sont tous positifs.

$$\begin{aligned}
& \mu_1^n(\Omega; \mathcal{L}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MA'_{i+1}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) + \det(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) + \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M}) + \mu_1^n(M; \mathcal{L}) \\
&= \mu_1^n(M; \mathcal{L}) + \sum_{i=2}^{n+1} \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_i}) - \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_i}) \quad \left. \vphantom{\sum_{i=2}^{n+1}} \right\} A'_{n+1} = A'_1 \\
&= \mu_1^n(M; \mathcal{L}) \quad \square
\end{aligned}$$

Fait 2. Soient $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n -cycle, et le n -cycle $\mathcal{L}_k = B_1 B_2 \cdots B_n$ par $B_i = A'_{i+k-1}$ où $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, Nous avons $\mu_1^n(\mathcal{L}) = \mu_1^n(\mathcal{L}_k)$. Cette quantité commune sera notée $\mu(\mathcal{L})$.

Démonstration. Il suffit de s'adonner à un petit jeu sur les indices de sommation. □

Fait 3. Soient $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n -cycle. et son n -cycle « opposé » $\mathcal{L}^{\text{op}} = B_1 B_2 \cdots B_n$ où $B_i = A_{n+1-i}$. Nous avons $\mu(\mathcal{L}^{\text{op}}) = -\mu(\mathcal{L})$.

Démonstration. Soit Ω un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned}
& \mu(\mathcal{L}^{\text{op}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega B'_i}, \overrightarrow{\Omega B'_{i+1}}) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \det(\overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}, \overrightarrow{\Omega A'_j}) \quad \left. \vphantom{\sum_{j=0}^{n-1}} \right\} \begin{array}{l} B'_i = A'_{n+1-i} \text{ et } j = n-i \\ A'_0 = A'_n \text{ et } A'_1 = A'_{n+1} \end{array} \\
&= - \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_j}, \overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}) \\
&= -\mu(\mathcal{L}) \quad \square
\end{aligned}$$

Fait 4. Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n -cycle. La quantité $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{L}) = \frac{1}{2}\mu(\mathcal{L})$ ne dépend que du sens de parcours de \mathcal{L} , mais pas du point de départ.⁴ Elle sera appelée « aire algébrique » de \mathcal{L} .

Démonstration. C'est une conséquence directe des faits 2 et 3. □

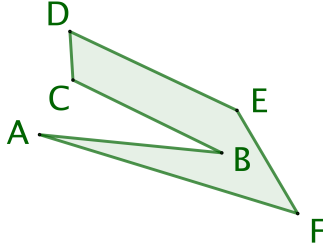
Considérons, maintenant, un n -gone convexe $\mathcal{P} = A_1 A_2 \cdots A_n$ où les sommets sont parcourus dans le sens anti-horaire. En choisissant l'isobarycentre G des points A_1, A_2, \dots, A_n pour calculer $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})$, nous obtenons $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})$: en effet, avec ce choix, tous les déterminants $\det(\overrightarrow{GA'_i}, \overrightarrow{GA'_{i+1}})$ sont positifs. Dans le cas non-convexe, les choses se compliquent a priori, car nous ne maîtrisons plus les signes des déterminants. Heureusement, nous avons le résultat essentiel suivant.

Fait 5. Soit un n -gone $\mathcal{P} = A_1 A_2 \cdots A_n$ tel que A_1, A_2, \dots, A_n soient parcourus dans le sens trigonométrique, ou anti-horaire. Un tel n -gone sera dit « positif ».⁵ Sous cette hypothèse, nous avons $\mu(\mathcal{P}) \geq 0$, i.e. $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) \geq 0$.

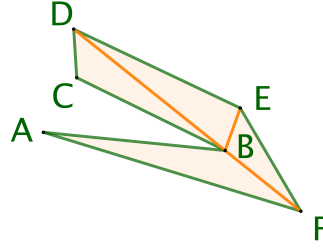
4. Le lecteur pardonnera les abus de langage utilisés.

5. De façon cachée, nous utilisons le célèbre théorème de Jordan, dans sa forme polygonale.

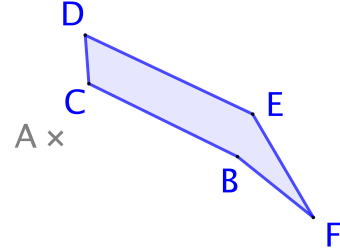
Démonstration. Le théorème de triangulation affirme que tout n -gone est triangulable comme dans l'exemple suivant : ceci laisse envisager une démonstration par récurrence en retirant l'un des triangles ayant deux côtés correspondant à deux côtés consécutifs du n -gone (pour peu qu'un tel triangle existe toujours).



Un n -gone « nu ».



Le n -gone triangulé.



Le n -gone allégé.

Le théorème de triangulation admet une forme forte donnant une décomposition contenant un triangle formé de deux côtés consécutifs du n -gone.⁶ Nous dirons qu'une telle décomposition est « à l'écoute ». Ce très mauvais jeu de mots fait référence à la notion sérieuse « d'oreille » pour un n -gone : une oreille est un triangle inclus dans le n -gone, et formé de deux côtés consécutifs du n -gone. L'exemple suivant donne un n -gone n'ayant que deux oreilles.⁷



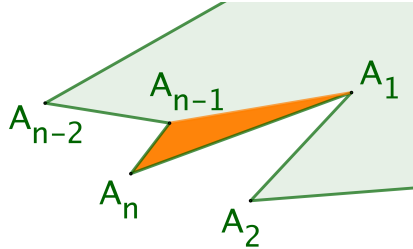
Un n -gone basique.



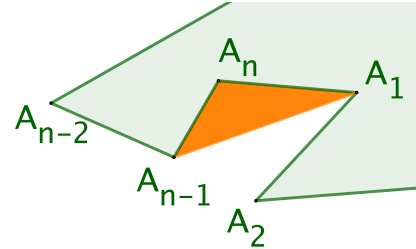
Juste deux oreilles disponibles.

Raisonnons donc par récurrence sur $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

- **Cas de base.** Soit ABC un triangle. Dire que les sommets A , B et C sont parcourus dans le sens trigonométrique, c'est savoir que $\mu(ABC) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) > 0$.
- **Hérédité.** Soit un n -gone positif $\mathcal{P} = A_1 A_2 \cdots A_n$ avec $n \in \mathbb{N}_{>3}$. On peut supposer que $A_{n-1} A_n A_1$ est une oreille d'une triangulation à l'écoute du n -gone \mathcal{P} .



$A_{n-1} A_n A_1$ est une oreille.



$A_{n-1} A_n A_1$ n'est pas une oreille.

Posons $\mathcal{P}' = A_1 \cdots A_{n-1}$ où $k = n - 1$ vérifie $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Par hypothèse, \mathcal{P}' est positif. Nous arrivons finalement aux calculs élémentaires suivants en utilisant A_1 comme point de calcul de $\mu(\mathcal{P})$.

6. En pratique, cette forme forte est peu utile, car elle aboutit à un algorithme de recherche trop lent.

7. On démontre que tout n -gone admet au minimum deux oreilles.

$$\begin{aligned}
& \mu(\mathcal{P}) \\
&= \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{A_1 A'_j}, \overrightarrow{A_1 A'_{j+1}}) \quad \left. \begin{array}{l} A'_{n+1} = A_1 \\ A'_i = A_i \text{ pour } i \leq n \end{array} \right\} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \det(\overrightarrow{A_1 A_j}, \overrightarrow{A_1 A_{j+1}}) \\
&= \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_1 A_j}, \overrightarrow{A_1 A_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1 A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1 A_n}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Pour } \mu(\mathcal{P}'), \text{ noter que} \\ \det(\overrightarrow{A_1 A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1 A_1}) = 0. \end{array} \right\} \\
&= \mu(\mathcal{P}') + \mu(A_{n-1} A_n A_1)
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, nous savons que $\mu(\mathcal{P}') \geq 0$, et comme $A_{n-1} A_n A_1$ est une oreille de \mathcal{P} , la 3-ligne $A_{n-1} A_n A_1$ est forcément positive, d'où $\mu(A_{n-1} A_n A_1) \geq 0$ d'après le cas de base. Nous arrivons bien à $\mu(\mathcal{P}) \geq 0$, ce qui permet de finir aisément la démonstration par récurrence. \square

Fait 6. Pour tout n -gone \mathcal{P} , nous avons : $\text{Aire}(\mathcal{P}) = |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})|$.

Démonstration. Les deux points suivants permettent de faire une preuve par récurrence.

- **Cas de base.** L'égalité est immédiate pour les triangles (c'est ce qui a motivé la définition de l'aire algébrique).
- **Hérédité.** Soit $\mathcal{P} = A_1 \cdots A_n$ un n -gone avec $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Comme $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}^{\text{op}}) = -\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})$ selon le fait 3, nous pouvons choisir de parcourir \mathcal{P} positivement, puis de nous placer dans la situation de la démonstration du fait 5 : $A_{n-1} A_n A_1$ est une oreille positive d'une triangulation à l'écoute du n -gone \mathcal{P} , et $\mathcal{P}' = A_1 \cdots A_{n-1}$ un k -gone positif où $k = n - 1$ vérifie $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Nous arrivons finalement aux calculs élémentaires suivants.

$$\begin{aligned}
& \text{Aire}(\mathcal{P}) \\
&= \text{Aire}(\mathcal{P}') + \text{Aire}(A_{n-1} A_n A_1) \quad \left. \begin{array}{l} A_{n-1} A_n A_1 \text{ est une oreille de } \mathcal{P}. \\ \text{Hypothèse de récurrence et cas de base.} \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{2} |\mu(\mathcal{P}')| + \frac{1}{2} |\mu(A_{n-1} A_n A_1)| \quad \left. \begin{array}{l} \text{Voir le fait 5.} \\ \text{Comme dans la preuve du fait 5.} \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{2} (\mu(\mathcal{P}') + \mu(A_{n-1} A_n A_1)) \\
&= \frac{1}{2} \mu(\mathcal{P}) \\
&= \frac{1}{2} |\mu(\mathcal{P})| \quad \left. \begin{array}{l} \text{Voir le fait 5.} \end{array} \right\} \\
&= |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})|
\end{aligned}$$

\square

Finissons par un théorème de continuité qui permettra de justifier l'existence d'au moins une solution au problème d'isopérimétrie polygonale.

Fait 7. Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ et $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan. On note $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des uplets de coordonnées $(x(A_1); y(A_1); \dots; x(A_n); y(A_n))$ où $A_1 A_2 \cdots A_n$ désigne un n -cycle, et $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction qui à un uplet de \mathcal{U} associe l'aire algébrique du n -cycle qu'il représente. Avec ces notations, la fonction $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue.

Démonstration. Immédiat, car nous avons une fonction polynomiale. \square

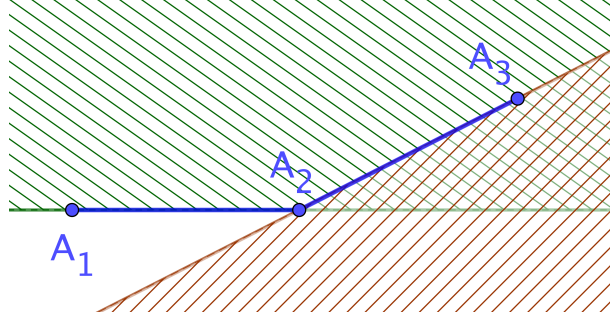
0.1. Au moins une solution, ou presque. L'étude du cas des quadrilatères a montré que la convexité était un ingrédient central. Ceci sera aussi le cas pour les n -gones, bien que moins immédiat à justifier, comme nous le verrons dans le fait ?? dont la preuve est indépendante des résultats de cette section. Ceci explique qu'ici nous cherchions à justifier l'existence d'au moins un n -gone convexe d'aire maximale parmi les n -gones convexes de longueur fixée.

Fait 8. Si \mathcal{L} est un n -cycle convexe, alors nous avons l'une des deux alternatives suivantes.

- $\forall (i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$.
- $\forall (i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \leq 0$.

Démonstration. Soit \mathcal{L} un n -cycle convexe. Supposons avoir $\forall (i, k, j, m) \in \llbracket 1; n \rrbracket^4$ vérifiant $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) > 0$ et $\det(\overrightarrow{A'_j A'_{j+1}}, \overrightarrow{A'_j A'_m}) < 0$. Quitte à considérer \mathcal{L}^{op} , et à changer d'origine, on peut supposer avoir $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_k}) > 0$ et $\det(\overrightarrow{A'_2 A'_3}, \overrightarrow{A'_2 A'_m}) < 0$ (il suffit de considérer k le plus petit possible tel que $k > i$, puis ensuite i le plus grand possible tel que $i < k$, pour obtenir $k = i + 1$). Nous avons alors les résultats suivants.

- Par convexité, $\forall r \in \llbracket 1; n \rrbracket$, nous avons $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_r}) \geq 0$ et $\det(\overrightarrow{A'_2 A'_3}, \overrightarrow{A'_2 A'_r}) \leq 0$.
- En particulier, $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_r}) \geq 0$ et $\det(\overrightarrow{A'_2 A'_3}, \overrightarrow{A'_2 A'_r}) \leq 0$.
- Le point précédent n'est possible que si A_1 , A_2 et A_3 sont alignés comme le montre le dessin suivant où les hachures donnent les zones où doivent se trouver les sommets relativement aux droites $(A_1 A_2)$, hachures vertes, et $(A_2 A_3)$, hachures marron, les droites étant comprises.



- XXXX

□

Fait 9. *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Parmi tous les n -cycles convexes de longueur ℓ fixée, non nulle, il en existe au moins un d'aire algébrique maximale.*

Démonstration.

- Munissons le plan d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- Commençons par noter que tout n -cycle d'origine A_1 translaté via le vecteur $\overrightarrow{A_1 O}$ donne un n -cycle d'origine O , sans modification de la longueur, ni de l'aire algébrique, ni l'ordre des sommets après A_1 . De plus, $\text{Aire}(\mathcal{L}^{\text{op}}) = -\text{Aire}(\mathcal{L})$ pour tout n -cycle \mathcal{L} d'après le fait 3, donc nous pouvons nous concentrer sur les n -cycles convexes vérifiant $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$ pour tous les sommets A_i et A_k grâce au fait précédent.
- Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des uplets de coordonnées $(x(A_1); y(A_1); \dots; x(A_n); y(A_n))$ où $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ est un n -cycle vérifiant les conditions suivantes.
 - (1) $A_1 = O$.
 - (2) $\text{Long}(\mathcal{L}) = \ell$.
 - (3) $\forall (k, i) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$.
- \mathcal{U} est fermé dans \mathbb{R}^{2n} , car les conditions le définissant le sont, et il est borné, car inclus dans la boule fermée de centre O et de rayon ℓ . En résumé, \mathcal{U} est un compact de \mathbb{R}^{2n} .
- Nous définissons la fonction $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui à un uplet de \mathcal{U} associe l'aire algébrique du n -cycle qu'il représente. Cette fonction est continue d'après le fait 7. Donc, α admet un maximum sur \mathcal{U} par continuité et compacité. Affaire conclue! \square

Nous arrivons au résultat central suivant pour les n -gones convexes. On perd a priori des sommets, mais nous verrons plus tard que cela suffit, car nous nous ramènerons à la comparaison de k -gones réguliers convexes pour k variable, ce qui sera facile, puisque nous disposons de formules, en fonction de k , pour le périmètre et l'aire d'un k -gone régulier convexe.

Fait 10. *Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ et $\ell \in \mathbb{R}^*$ fixés. Il existe un k -gone convexe \mathcal{K} validant les assertions suivantes.*

- $k \leq n$.
- $\text{Long}(\mathcal{K}) = \ell$.
- Si \mathcal{P} est un n -gone convexe tel que $\text{Long}(\mathcal{P}) = \ell$, alors $\text{Aire}(\mathcal{P}) \leq \text{Aire}(\mathcal{K})$.

Démonstration. Reprenons les notations de la preuve du fait 9, puis notons \mathcal{K} un n -cycle convexe maximisant la fonction α sur \mathcal{U} , de sorte que $\text{Long}(\mathcal{K}) = \ell$ est validée. Il est immédiat que pour tout n -gone convexe \mathcal{P} tel que $\text{Long}(\mathcal{P}) = \ell$, nous avons $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) \leq \overline{\text{Aire}}(\mathcal{K})$, puis le fait 6 donne que $\text{Aire}(\mathcal{P}) \leq |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{K})|$, après avoir noté que nécessairement $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{K}) \geq 0$. Pour finir, voyons pourquoi \mathcal{K} est un k -gone convexe avec $k \leq n$, ce qui impliquera ensuite $|\overline{\text{Aire}}(\mathcal{K})| = \text{Aire}(\mathcal{K})$.

- XXX
- XXX

□