

BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.

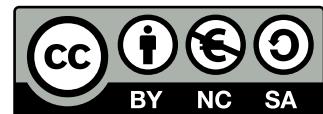
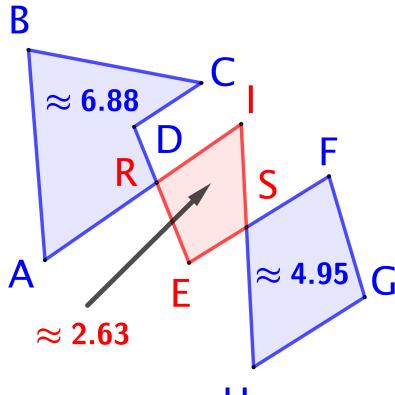


TABLE DES MATIÈRES

Avant d'avancer, nous devons mieux comprendre le calcul de $\text{AireGene}(\mathcal{L})$ pour un n -cycle \mathcal{L} correspondant à un polygone croisé. Considérons la figure suivante produite via **GeoGebra**, ce dernier donnant les valeurs indiquées sur l'image où $6,88 - 2,63 + 4,95 = 9,2$.



$$\text{Aire(ABCDEFGHI)} \approx 9.2$$

Pour calculer l'aire généralisée d'un polygone croisé associé au n -cycle \mathcal{L} , il suffit de procéder comme suit (cette méthode est utile pour un humain).

- On part du 1^{re} sommet de \mathcal{L} , puis on parcourt \mathcal{L} dans un sens donné jusqu'à la première intersection de deux arêtes non contigües. Dans notre exemple, on va de A à R .
- De cette intersection, on part en changeant de direction pour choisir celle allant vers notre point de départ. Dans notre exemple, nous obtenons le 5-cycle $RABCD$.
- Le reste des points non parcourus, en respectant le sens de parcours initial, fournit un autre k -cycle qui est $REFGH$ dans notre cas. Formellement, nous avons scindé $ABCDEFGHI$ en $RABCD$ et $REFGH$.
- On répète ce processus tant qu'il reste des intersections d'arêtes non contigües, autrement dit, tant que nous n'obtenons que des k -gones. Pour notre exemple, il reste $REFGH$ qui se scinde en $SIRE$ et $SFGH$.
- Les deux cas précédents peuvent s'écrire comme suit où l'opération « *point* » sera définie proprement plus tard (ici on peut la voir comme une forme de concaténation pointée).

on de l'intersection B: ABCDEFGHI

$$\begin{aligned} &= ABCDR \cdot REFGHI \\ &= ABCDR \cdot RESI \cdot SFGH \end{aligned}$$

En permutant les sommets sans changer le sens de parcours, nous retrouvons la décomposition précédente $RABCD$, $SIRE$ et $SFGH$.

- Ce qui précède motive les calculs suivants où $\mu(\Omega; \mathcal{L})$ indique que Ω est le point de calcul de $\mu(\mathcal{L})$. Ne pas hésiter à s'aider du dessin ici.

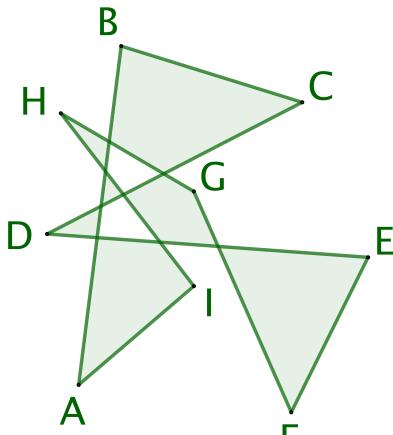
Résumé qu'on va démontrer. $\mu(ABCDEFGHI)$

$$\begin{aligned} &= \mu(R; ABCDEFGHI) \\ &= \mu(R; ABCDR) + \mu(R; REFGHI) \\ &= \mu(ABCDR) + \mu(S; REFGHI) \\ &= \mu(ABCDR) + \mu(S; RESI) + \mu(S; SFGH) \\ &= \mu(ABCDR) + \mu(RESI) + \mu(SFGH) \end{aligned}$$

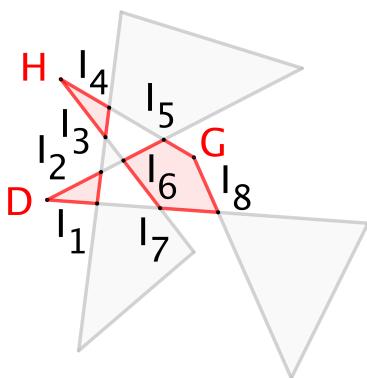
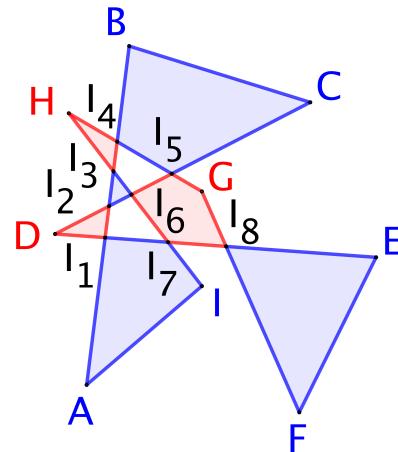
Finalement, $\mu(ABCDEFGHI) = \text{Aire}(ABCDR) - \text{Aire}(RESI) + \text{Aire}(SFGH)$ selon les faits ?? et ??. Ceci justifie $6,88 - 2,63 + 4,95 = 9,2$ indiqué plus haut.

- Il est important de noter dans les calculs précédents que pour chaque intersection utilisée pour « éclater » les calculs intermédiaires de $\mu(\mathcal{L})$, nous avons un changement de sens de parcours du point de vue de ce point d'intersection, ceci faisant apparaître des changements de signes des aires algébriques des n -gones finaux.

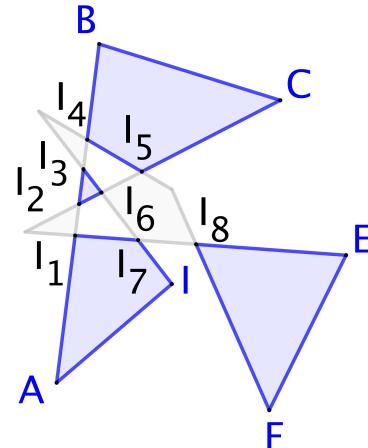
Pour fixer mieux le mécanisme de calcul, plus combinatoire que géométrique, nous proposons l'exemple ci-après qui aboutit à $12,26 - 1,96 = 10,3$ comme attendu.¹



$$\text{Aire}(ABCDEFGHI) \approx 10.3$$



$$\begin{aligned} &\approx 0.28 + 0.27 + 1.4 \\ &\approx 1.96 \end{aligned}$$



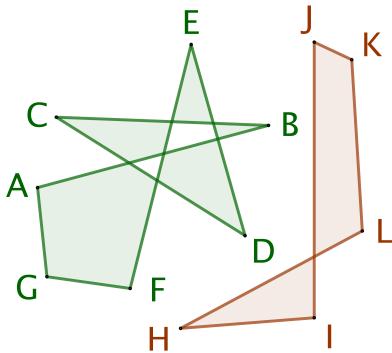
$$\begin{aligned} &\approx 0.13 + 4.69 + 3.16 + 4.28 \\ &\approx 12.26 \end{aligned}$$

Pour une preuve formelle de ce qui précède, nous aurons besoin d'un peu de vocabulaire.

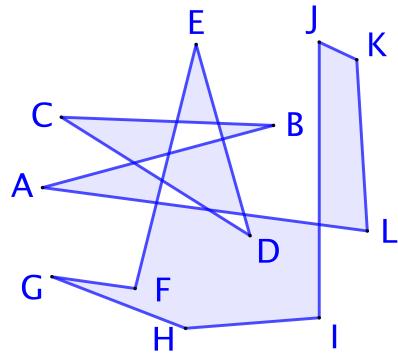
Définition 1. Soient $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ et $\mathcal{L}' = B_1 B_2 \cdots B_k$ deux cycles. Leur « unification » est le $(n+k)$ -cycle $\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}' = A_1 A_2 \cdots A_n B_1 B_2 \cdots B_k$. Clairement, $\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}' = \mathcal{L}' \cdot \mathcal{L}$.

Cette notion d'unification n'est pas toujours pertinente comme le montre l'exemple suivant, mais nous en aurons juste besoin pour un cas très particulier correspondant aux intersections d'arêtes non contigües d'un n -cycle.

1. Les valeurs numériques ont été fournies par **GeoGebra**.



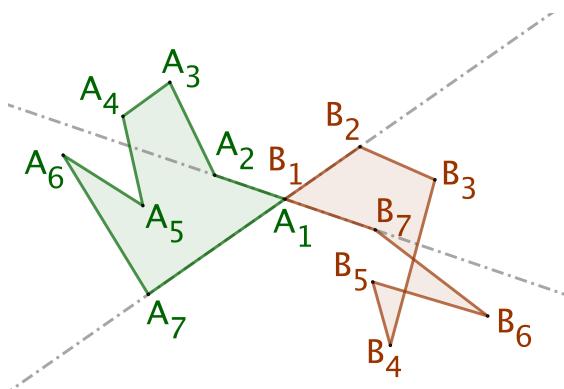
Deux cycles libres.



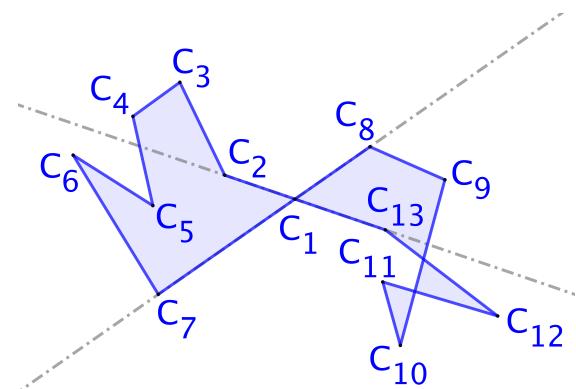
Deux cycles unifiés.

Définition 2. Deux cycles $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ et $\mathcal{L}' = B_1B_2 \cdots B_k$ sont « mariables » lorsque $B_1 \in [B_k A_2]$, $A_1 \in [A_n B_2]$ et $A_1 = B_1$.

L'exemple suivant montre que l'unification de deux cycles mariables est paisible.²



Deux cycles mariables.



Deux cycles dans le rang.

Fait 1. Si les cycles $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ et $\mathcal{L}' = B_1B_2 \cdots B_k$ vérifient $A_1 = B_1$, alors nous avons $\mu(\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}') = \mu(\mathcal{L}) + \mu(\mathcal{L}')$.

Démonstration. Ci-dessous, $\mu(\Omega ; \mathcal{L})$ indique que Ω est le point de calcul de $\mu(\mathcal{L})$.

$$\begin{aligned}
& \mu(\mathcal{L}' \cdot \mathcal{L} \cdot A_1) \\
&= \mu(A_1^{k+1} \cdot \mathcal{L} \cdot \mathcal{L}') \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \det(\overrightarrow{A_1 A_j}, \overrightarrow{A_1 A_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1 A_n}, \overrightarrow{A_1 B_1}) + \sum_{j=1}^{k-1} \det(\overrightarrow{A_1 B_j}, \overrightarrow{A_1 B_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1 B_k}, \overrightarrow{A_1 A_1}) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \det(\overrightarrow{A_1 A_j}, \overrightarrow{A_1 A_{j+1}}) + \sum_{j=1}^{k-1} \det(\overrightarrow{A_1 B_j}, \overrightarrow{A_1 B_{j+1}}) \\
&= \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{A_1 A'_j}, \overrightarrow{A_1 A'_{j+1}}) + \sum_{j=1}^k \det(\overrightarrow{B_1 B'_j}, \overrightarrow{B_1 B'_{j+1}}) \\
&= \mu(A_1 ; \mathcal{L}) + \mu(B_1 ; \mathcal{L}') \\
&= \mu(\mathcal{L}) + \mu(\mathcal{L}')
\end{aligned}$$

□

2. L'histoire ne dit pas s'il en va de même pour les hommes.

Fait 2. Tout n -cycle \mathcal{L} non dégénéré admet une décomposition $\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2 \cdot \dots \cdot \mathcal{L}_s$ vérifiant les conditions suivantes.

- (1) $s \in \mathbb{N}^*$.
- (2) $\forall i \in \llbracket 1 ; s \rrbracket$, \mathcal{L}_i est un k_i -gone.
- (3) $\forall i \in \llbracket 1 ; s-1 \rrbracket$, \mathcal{L}_i et \mathcal{L}_{i+1} sont mariables.
- (4) Les surfaces intérieures des \mathcal{L}_i sont disjointes deux à deux.

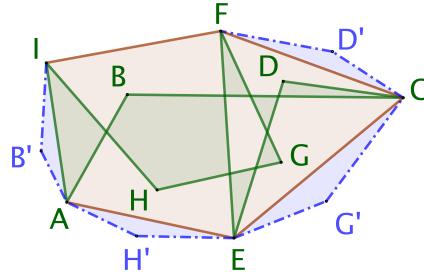
Pour une telle décomposition, $\text{AireGene}(\mathcal{L}) = \frac{1}{2} \left| \sum_j \mu(\mathcal{L}_{2j+1}) - \sum_j \mu(\mathcal{L}_{2j}) \right|$.

Démonstration. XXX

prouvr viz ntersection la plus proche, puis arg de type induction comme dans lexemples! \square

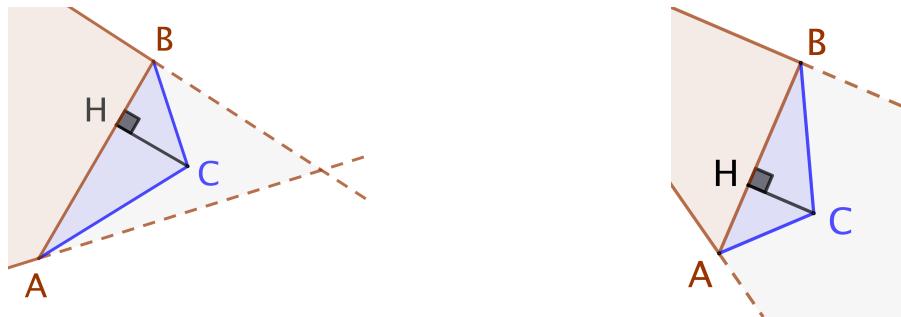
Fait 3. Si un n -cycle \mathcal{L} non dégénéré n'est pas un n -gone, donc est un polygone croisé, alors il existe un n -gone convexe \mathcal{P} tel que $\text{Perim}(\mathcal{P}) = \text{Perim}(\mathcal{L})$ et $\text{AireGene}(\mathcal{P}) > \text{AireGene}(\mathcal{L})$.

Démonstration. Notons \mathcal{C} l'enveloppe convexe de \mathcal{L} . Le fait ?? donne sans ambiguïté que $\text{AireGene}(\mathcal{C}) > \text{AireGene}(\mathcal{L})$. De plus, il est clair que $\text{Perim}(\mathcal{C}) < \text{Perim}(\mathcal{L})$, mais nous savons juste que \mathcal{C} est un k -gone avec $k < n$. Comment gérer ce problème? Une idée simple, formalisée après, consiste à ajouter des sommets suffisamment près des côtés de \mathcal{C} pour garder la convexité, un périmètre strictement inférieur à $\text{Perim}(\mathcal{L})$, et une aire généralisée strictement plus grande que $\text{AireGene}(\mathcal{L})$. Si cela est faisable, un agrandissement de rapport $r > 1$ ramènera au périmètre $\text{Perim}(\mathcal{L})$ avec une aire strictement plus grande que $\text{AireGene}(\mathcal{L})$. La figure suivante illustre cette idée.



Notons s le nombre de sommets dans \mathcal{C} , nous notons $m = n - s$ le nombre de sommets manquants. Si $m = 0$, il n'y a rien à faire. Sinon, posons $\delta = \frac{\text{Perim}(\mathcal{L}) - \text{Perim}(\mathcal{C})}{m}$.

- (1) Considérons $[AB]$ un côté quelconque de \mathcal{C} . Les droites portées par les côtés « *autour* » de $[AB]$ « *dessinent* » une région contenant toujours un triangle ABC dont l'intérieur est à l'extérieur³ de \mathcal{C} comme dans les deux cas ci-dessous.



3. C'est ce que l'on appelle de la « *low poetry* » .

- (2) Clairement, le polygone \mathcal{C}_+ obtenu à partir de \mathcal{C} en remplaçant le côté $[AB]$ par les côtés $[AC]$ et $[CB]$ est un convexe avec un sommet de plus que \mathcal{C} .
- (3) Comme HC peut être rendu aussi proche de 0 que souhaité, il est aisément de voir que l'on peut choisir cette distance de sorte que $AC + BC < AB + \delta$. Dès lors, le périmètre de \mathcal{C}_+ augmente inférieurement strictement à δ relativement à \mathcal{C} .
- (4) En répétant $(m - 1)$ fois les étapes ?? à ??, nous obtenons un n -gone convexe \mathcal{C}' tel que $\text{Aire}(\mathcal{C}') > \text{Aire}(\mathcal{L})$ et $\text{Perim}(\mathcal{C}') < \text{Perim}(\mathcal{C}) + m\delta = \text{Perim}(\mathcal{L})$.

□

Fait 4. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Parmi tous les n -cycles de périmètre fixé, il en existe au moins un d'aire généralisée maximale, un tel n -cycle devant être forcément un n -gone.

Démonstration. Notons p le périmètre fixé..

- Munissant le plan d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note \mathcal{Z} l'ensemble des n -cycles $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ tels que $\text{Perim}(A_1A_2 \cdots A_n) = p$ et $A_1(0; 0)$,⁴ puis $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des uplets de coordonnées $(x(A_1); y(A_1); \dots; x(A_n); y(A_n))$ pour $A_1A_2 \cdots A_n \in \mathcal{Z}$.
- \mathcal{G} est clairement fermé dans \mathbb{R}^{2n} . De plus, il est borné, car les coordonnées des sommets des n -cycles considérés le sont. En résumé, \mathcal{G} est un compact de \mathbb{R}^{2n} .
- Nous définissons la fonction $\alpha : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui à un uplet de \mathcal{G} associe l'aire généralisée du n -cycle qu'il représente. Cette fonction est continue comme valeur absolue d'une fonction polynomiale en les coordonnées.
- Finalement, par continuité et compacité, on sait que α admet un maximum sur \mathcal{G} . Or, un tel maximum ne peut pas être atteint en un n -cycle dégénéré, clairement, ni en un polygone croisé d'après le fait ??, donc un tel maximum sera obtenu en un n -gone. That's all folks!

□

4. Le mot « *Zeile* » est une traduction possible de « *ligne* » en allemand.

Temporary page!

L^AT_EX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because L^AT_EX now knows how many pages to expect for this document.