DE L'INTÉGRALE AU LOGARITHME, PUIS À L'EXPONENTIELLE

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/math/analysis/real/exp-via-ln-via-int.

Mentions « légales »

Table des matières

Date: 18 Avril 2025 - 30 Avril 2025.

Ce texte construit les fonctions ln, logarithme népérien, et exp, exponentielle, le plus simplement possible en utilisant des notions élémentaires de l'analyse réelle.

1. Ingrédients utilisés

Dans ce document, nous supposons connues les notions de limite, de fonctions monotones, de dérivabilité, de continuité, et d'intégrale d'une fonction réelle continue, via l'approche de Riemann. Dans les sous-sections suivantes, où $I \subseteq \mathbb{R}$ désignera toujours un intervalle, nous donnons des faits que nous utiliserons sans les redémontrer.

1.1. Une once d'analyse réelle.

Fait 1 (Théorème des gendarmes, ou du sandwich)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$, et $h : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions telles que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sur I, ainsi que $a \in I$. Nous avons l'implication logique suivante (les limites étant calculées dans I).*

$$\left[\, \exists \ell \in \mathbb{R} \text{ tel que } \lim_{x \to a} f(x) = \ell, \text{ et } \lim_{x \to a} h(x) = \ell \,\right] \implies \lim_{x \to a} g(x) = \ell$$

Fait 2 (TVI, ou théorème des valeurs intérmédiaires)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. L'ensemble $f[I] = \{f(x) \text{ pour } x \in I\}$ est un intervalle ($f[I]$ est l'ensemble des images par f des réels appartenant à I).*

1.2. Un iota de calcul intégral.

Fait 3 (Sens d'intégration)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. $\forall (a\,;b) \in I^2$, nous avons : $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.*

Fait 4 (Relation de Chasles intégrale)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. $\forall (a\,;b\,;c) \in I^3$, nous avons : $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$.*

Fait 5 (Stricte positivité de l'intégrale)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue, et strictement positive. $\forall (a\,;b) \in I^2$ tel que $a < b$, nous avons : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.*

Fait 6 (Croissance de l'intégrale)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Si $\forall x \in I$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\forall (a\,;b) \in I^2$ tel que $a \leq b$, nous avons : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.*

2. Au commencement était le logarithme népérien

2.1. Définition intégrale.

Définition 7. *Le* « logarithme népérien » *est la fonction* ln *définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Notons que $\ln 1 = 0$.*

Fait 8 (Monotonie sans dérivée)**.** *La fonction* ln *est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Démonstration. Soit $(a\,;b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $b > a$. Ce qui suit permet de conclure.

$$\begin{aligned}
\ln b - \ln a &= \int_1^b \tfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^a \tfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t && \\
&&& \textit{Voir le fait 3.}\\
&= \int_a^1 \tfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^b \tfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t && \\
&&& \textit{Voir le fait 4.}\\
&= \int_a^b \tfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t && \\
&&& \textit{Voir le fait 5.}\\
&> 0
\end{aligned}$$

□

Fait 9. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln' x = \frac{1}{x}$ *(ceci redonne la stricte croissance de* ln*).*

Démonstration. Un argument massif est l'emploi du théorème fondamental de l'analyse. Il se trouve que nous pouvons démontrer $\ln' x = \frac{1}{x}$ à la main.[1] Pour cela, considérons le taux d'accroissement $T(h) = \frac{\ln(a+h) - \ln a}{h}$ où $a > 0$ est fixé, et $h \in \left]-a\,;a\right[- \{0\}$ variable, puis faisons le petit calcul suivant.

$$\begin{aligned} T(h) &= \frac{1}{h}\Big(\int_1^{a+h} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{a} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\Big) \\ &= \frac{1}{h}\int_a^{a+h} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Voir les faits 3 et 4.

Nous avons ensuite les implications logiques suivantes lorsque $h > 0$.

$$\begin{aligned} & \Big[\, x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^* \text{ est strictement décroissante} \Big] \\ \Longrightarrow\ & \forall x \in [a\,;a+h]\,,\ \frac{1}{a+h} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a} \\ \Longrightarrow\ & \int_a^{a+h} \frac{1}{a+h}\,\mathrm{d}t \leq \int_a^{a+h} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \int_a^{a+h} \frac{1}{a}\,\mathrm{d}t \\ \Longrightarrow\ & \frac{h}{a+h} \leq hT(h) \leq \frac{h}{a} \\ \Longrightarrow\ & \frac{1}{a+h} \leq T(h) \leq \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Voir le fait 6 ($a + h > a$, car $h > 0$).

$h > 0$

Via le théorème des gendarmes, voir le fait 1, nous obtenons : $\lim\limits_{h \to 0^+} T(h) = \frac{1}{a}$.

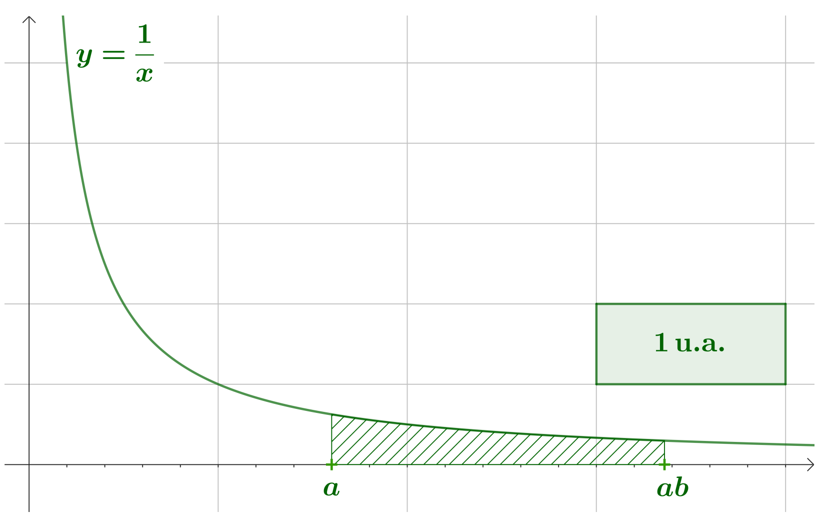
Lorsque $h < 0$, nous obtenons : $\frac{1}{a} \leq T(h) \leq \frac{1}{a+h}$, puis $\lim\limits_{h \to 0^-} T(h) = \frac{1}{a}$.

Finalement, $\lim\limits_{h \to 0} T(h) = \frac{1}{a}$, ce qui achève la démonstration. □

2.2. **Equation fonctionnelle.**

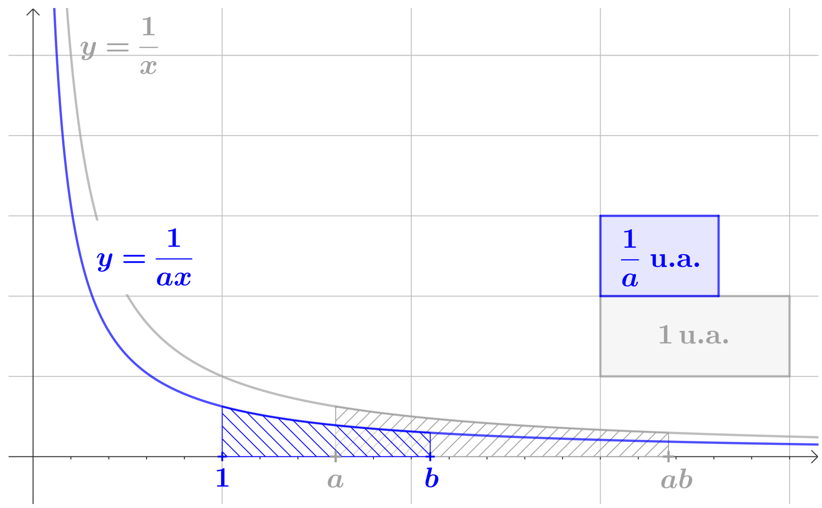
Fait 10. *$\forall (a\,;b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.*

Démonstration. Par définition de ln, nous avons $\ln(ab) = \ln a + \int_a^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ (voit le fait 4). Analysons $\mathcal{I}_a^{ab} = \int_a^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Pour cela, considérons la situation graphique suivante où $1 < a < b$.

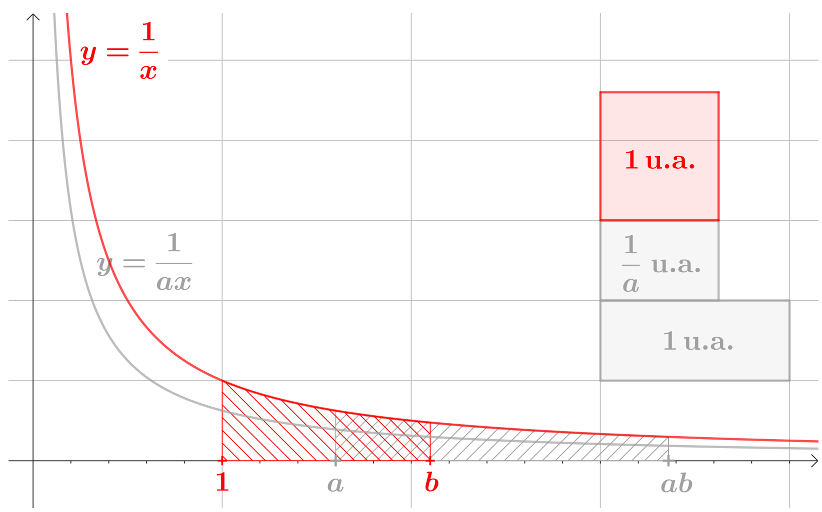


1. Ce qui suit s'adapte sans effort à toute fonction monotone, et s'élargit ensuite en une preuve du théorème fondamental de l'analyse.

Une dilatation horizontale ϕ de coefficient $\frac{1}{a}$ transforme $M(x_M\,;y_M)$ en $M'\big(\frac{x_M}{a}\,;y_M\big)$. Appliquons ϕ à la surface associée à l'intégrale $\mathcal{I}_a^{ab}$, ainsi qu'à la fonction inverse [2] qui devient $f : x \mapsto \frac{1}{ax}$, puisque nous devons avoir $f\big(\frac{x}{a}\big) = \frac{1}{x}$. Il est important de noter qu'un rectangle d'une unité d'aire est transformé par ϕ en un rectangle de $\frac{1}{a}$ unité d'aire.



Une dilatation verticale ψ de coefficient a transforme $M(x_M\,;y_M)$ en $M'\big(x_M\,;ay_M\big)$. Appliquons ψ à la surface associée à l'intégrale $\int_1^b \frac{1}{at}\,\mathrm{d}t$, ainsi qu'à la fonction f qui devient la fonction inverse. Notons qu'un rectangle de $\frac{1}{a}$ unité d'aire est transformé par ψ en un rectangle d'une unité d'aire.



Nous venons de justifier que $\mathcal{I}_a^{ab} = \int_1^b \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, soit $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, lorsque $1 < a < b$. La généralisation à $0 < a \leq b$ ne pose aucune difficulté. $\square$

Remarque 11 (Aux bourbakistes)**.** *Ce qui a été dit ci-dessus se rédige rigoureusement, sans aucun souci, via des sommes de Riemann, par exemple.* [3] *La démonstration suivante ne souffre d'aucun doute, mais la donner sans plus d'explication serait bien dommage (la première approche évite toute interprétation mystique de l'équation fonctionnelle* $\ln(ab) = \ln a + \ln b$*).*

2. Noter l'abus de langage consistant à ne pas rappeler que nous travaillons juste sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. N'oublions pas que nous disposons d'au moins trois jolies théories de l'intégration : celle de Riemann, celle de Lebesgues, et la merveilleuse théorie de Kurzweil et Henstock.

Démonstration alternative Nous allons justifier que $\forall(a\,;b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $\ln(ab)=\ln a+\ln b$ uniquement via l'analyse réelle. Comme les propriétés de la fonction ln nécessitent d'avoir une seule variable, il devient naturel de fixer $a\in\mathbb{R}_+^*$, puis de considérer la fonction $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\ln(ax)-\ln a-\ln x$. La seule possibilité qui s'offre à nous est de dériver : $f'(x)=a\cdot\frac{1}{ax}-\frac{1}{x}=0$. Or, une fonction de dérivée nulle sur un intervalle I est forcément constante sur I, donc $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=f(1)$, soit $f(x)=0$. Mission accomplie ! $\square$

Fait 12. $\forall(a\,;n)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{Z}$, *nous avons* $\ln(a^n)=n\ln a$, *et* $\ln(\frac{1}{a})=-\ln a$.

Démonstration. De $\ln(a\cdot\frac{1}{a})=\ln a+\ln(\frac{1}{a})$, nous déduisons $\ln(\frac{1}{a})=-\ln a$. Quant à l'identité $\ln(a^n)=n\ln a$, une récurrence donne le résultat sur $\mathbb{N}$, puis $\ln(a^{-n})=-\ln(a^n)$ permet d'élargir à $\mathbb{Z}_-^*$. $\square$

2.3. Tableau de variations.

Fait 13. *La fonction* ln *admet le tableau de variations suivant.*

x	0	$+\infty$
$\ln x$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

Démonstration. La monotonie est donnée par le fait 8 ou 9. Le calcul des limites se fait à la main sans souci, en notant au préalable que, par stricte croissance, $\ln 10>\ln 1$ donne $\ln 10>0$.

- Soit $A\in\mathbb{R}$. Il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\ln 10>A$. Or, pour $x>10^n$, nous avons $\ln x>\ln(10^n)$, puis $\ln x>A$, via $\ln(10^n)=n\ln 10$. En résumé, $\forall A\in\mathbb{R}$, $\exists x_0\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $x>x_0$ implique $\ln x>A$. Ceci est la définition de $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.
- Pour la limite en 0^+, le plus efficace est de passer via $\ln(\frac{1}{x})=-\ln x$ qui donne $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$. On peut aussi le faire à la main via 10^{-n}. $\square$

3. Puis vint l'exponentielle

3.1. Inverser le logarithme népérien.

Fait 14. $\forall q\in\mathbb{R}$, $\exists!p\in\mathbb{R}_+^*$ *tel que* $\ln p=q$.

Démonstration. Nous connaissons le tableau de variations de ln, voir le fait 13. De plus, ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, car dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ selon le fait 9. Pour conclure, il suffit d'appliquer le TVI, voir le fait 2. $\square$

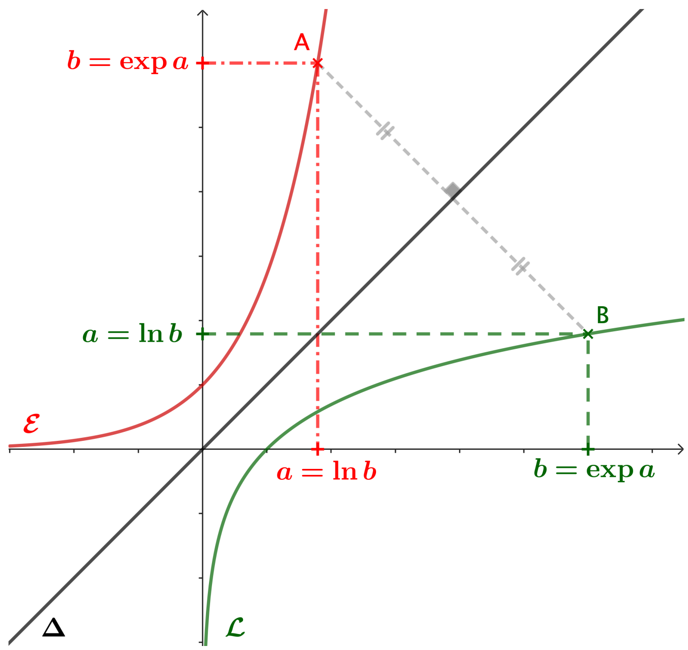
Définition 15. $\forall q\in\mathbb{R}$, *l'unique solution de* $\ln x=q$ *est notée* $\exp q$. *Ceci définit une fonction* $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ *nommée* « exponentielle ». *Notons que* $\exp 0=1$.

Fait 16. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\ln(\exp x)=x$, *et* $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\exp(\ln x)=x$.

Démonstration. Nous devons juste vérifier la 2e identité. En appliquant $\ln(\exp X)=X$ à $X=\ln x$, nous obtenons $\ln\big(\exp(\ln x)\big)=\ln x$. Par injectivité de la fonction ln, nous arrivons à $\exp(\ln x)=x$ comme souhaité. $\square$

Fait 17. *Soient* $\mathcal{L}$ *et* $\mathcal{E}$ *les représentations graphiques respectives des fonctions* ln *et* exp. *Les courbes* $\mathcal{L}$ *et* $\mathcal{E}$ *sont symétriques par rapport à la 1re bissectrice* $\Delta:y=x$.

Démonstration. Considérons $A(a\,;\exp a) \in \mathcal{E}$. Notant $b = \exp a$, nous savons que $a = \ln b$. Ceci amène à considérer $B(b\,;\ln b) \in \mathcal{L}$, c'est-à-dire $B(\exp a\,;a)$. Or, $A(x_A\,;y_A)$ et $B(y_A\,;x_A)$ sont symétriques par rapport à Δ : voir le graphique ci-dessous (coordonnées d'un milieu, et critère d'orthogonalité). Réciproquement, il faut considérer $B(b\,;\ln b) \in \mathcal{L}$. Ce cas se traite de façon similaire.



□

3.2. **Equation fonctionnelle.**

Fait 18. $\forall (a\,;b) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b$.

Démonstration. L'injectivité de ln et les calculs suivants permettent de conclure.

$$\begin{aligned}
&\ln\big(\exp(a+b)\big) && \text{\textit{Définition de la fonction} exp.}\\
=\ &a+b && \text{\textit{Idem.}}\\
=\ &\ln(\exp a) + \ln(\exp b) && \text{\textit{Équation fonctionnelle de la fonction} ln.}\\
=\ &\ln(\exp a \cdot \exp b)
\end{aligned}$$

□

Fait 19. $\forall (a\,;n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{Z}$, *nous avons* $(\exp a)^n = \exp(na)$, *et* $\frac{1}{\exp a} = \exp(-a)$.

Démonstration. Deux méthodes s'offrent à nous.

Méthode 1. En utilisant le fait 12 (identités vérifiées par ln).

- $\ln(\alpha^n) = n \ln \alpha$ appliquée à $\alpha = \exp a$ donne $\ln(\,(\exp a)^n\,) = n\ln(\exp a) = na$. Ensuite, une application de exp donne $\exp\big(\ln(\,(\exp a)^n\,)\big) = \exp(na)$, soit $(\exp a)^n = \exp(na)$.
- $\ln(\frac{1}{\alpha}) = -\ln \alpha$ appliquée à $\alpha = \exp a$ donne $\ln(\frac{1}{\exp a}) = -\ln(\exp a) = -a$. Ensuite, une application de exp donne $\exp\big(\ln(\frac{1}{\exp a})\big) = \exp(-a)$, soit $\frac{1}{\exp a} = \exp(-a)$.

Méthode 2. Sans passer via le fait 12.

- De $\exp(a-a) = \exp a \cdot \exp(-a)$, nous déduisons $\frac{1}{\exp a} = \exp(-a)$.
- Pour l'identité $(\exp a)^n = \exp(na)$, une récurrence donne le résultat sur $\mathbb{N}$, puis le passage à $\mathbb{Z}_-$ se fait via $(\exp a)^{-n} = \frac{1}{(\exp a)^n}$.

□

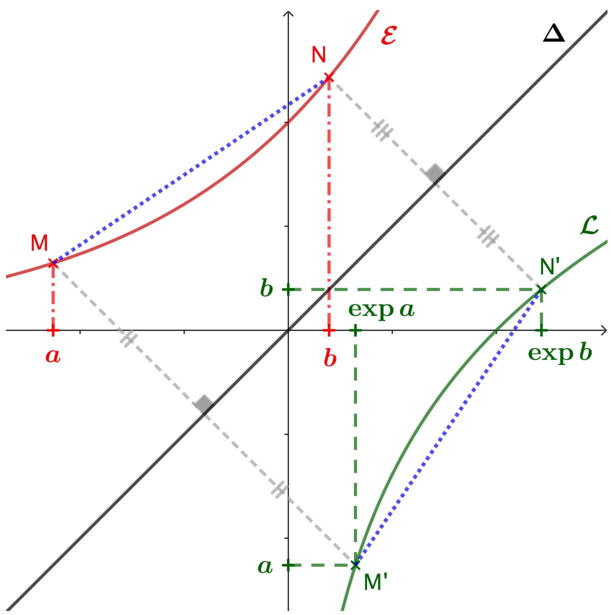
3.3. **Tableau de variations (sans dérivée).**

Fait 20. *La fonction* exp *admet le tableau de variations suivant.*

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$\exp x$	$0 \nearrow +\infty$

Démonstration. Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}$ les représentations graphiques respectives des fonctions ln et exp, ainsi que $\Delta : y = x$.

- La monotonie de exp découle de celle de ln, et de la symétrie révélée dans le fait 17. En effet, dans la figure suivante, nous partons de $a < b$. Comme $x(M) < x(N)$, nous avons $y(M') < y(N')$ par symétrie. Il est immédiat de conclure.



- La limite en $+\infty$ découle rapidement de $\exp(\ln(10^n)) = 10^n$, et de la stricte croissance de exp qui donne $\exp x > 10^n$ dès que $x > \ln(10^n)$.
- Pour la limite en $-\infty$, le plus efficace est de passer via $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$ pour aboutir à $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\exp x}\right)$. On peut aussi le faire à la main via $\ln(10^{-n})$. $\square$

3.4. **Continuité, puis dérivabilité.**

Fait 21. exp *est continue sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$, et considérons $\epsilon \in \left]0\,;\exp(x_0)\right[$ quelconque. Nous devons trouver $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x_0 - \eta < x < x_0 + \eta$ implique $\exp(x_0) - \epsilon < \exp x < \exp(x_0) + \epsilon$. Voici comment faire.

- Par stricte croissance de ln et exp, nous avons l'équivalence logique ci-dessous qui permet de comprendre ce qui va suivre.
  $0 < \exp(x_0) - \epsilon < \exp x < \exp(x_0) + \epsilon \iff \ln\big(\exp(x_0) - \epsilon\big) < x < \ln\big(\exp(x_0) + \epsilon\big)$
- $\ln\big(\left]\exp(x_0) - \epsilon\,;\exp(x_0) + \epsilon\right[\big) = \left]\ln\big(\exp(x_0) - \epsilon\big)\,;\ln\big(\exp(x_0) + \epsilon\big)\right[$, car ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa continuité permet de faire appel au TVI, voir le fait 2. Nous noterons I_ϵ cet intervalle non vide.

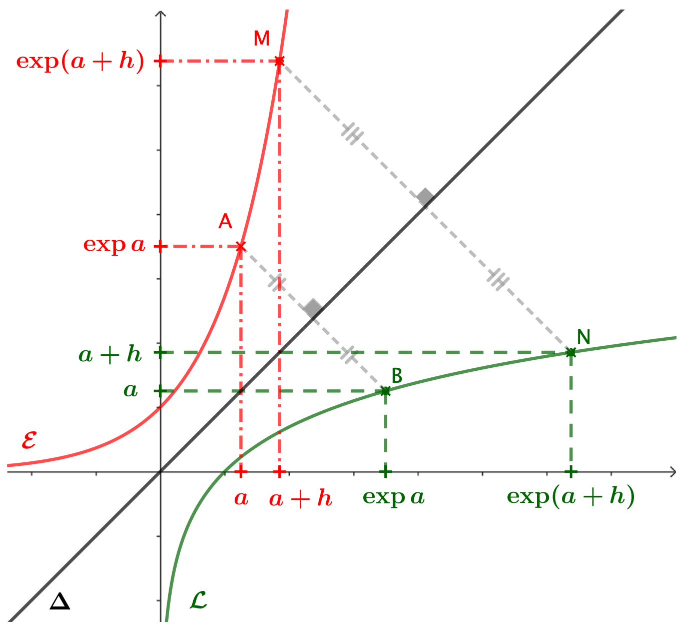
- De $x_0 = \ln(\exp x_0)$, nous déduisons que $x_0 \in I_\epsilon$, puis le point précédent donne $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0 - \eta\,; x_0 + \eta[\subseteq I_\epsilon$.
- Les implications logiques suivantes permettent de conclure.

$$\begin{aligned}
& x_0 - \eta < x < x_0 + \eta && \\
\Longrightarrow\ & x \in I_\epsilon &&]x_0 - \eta\,; x_0 + \eta[\subseteq I_\epsilon \\
\Longrightarrow\ & \ln\big(\exp(x_0) - \epsilon\big) < x < \ln\big(\exp(x_0) + \epsilon\big) && \\
\Longrightarrow\ & \ln\big(\exp(x_0) - \epsilon\big) < \ln\big(\exp(x)\big) < \ln\big(\exp(x_0) + \epsilon\big) && \\
\Longrightarrow\ & \exp(x_0) - \epsilon < \exp x < \exp(x_0) + \epsilon && \textit{Stricte croissante de } \ln.
\end{aligned}$$

□

Fait 22. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp' x = \exp x$ *(ceci redonne la stricte croissance de* $\exp$*).*[4]

Démonstration. Notons $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}$ les représentations graphiques respectives des fonctions ln et exp. Nous savons que $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}$ sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$. Pour $h \neq 0$, considérons $A(a\,; \exp a) \in \mathcal{E}$ et $M(a + h\,; \exp(a + h)) \in \mathcal{E}$. Par symétrie, nous avons $B(\exp a\,; a) \in \mathcal{L}$ et $N(\exp(a+h)\,; a+h) \in \mathcal{L}$. Nous arrivons à la situation graphique suivante.



Le taux d'accroissement $T(h) = \frac{\exp(a+h) - \exp a}{h}$ est la pente $m(AM)$ de la droite (AM), or $m(AM) = \frac{1}{m(BN)}$ par raison de symétrie. En raisonnant sur $\mathcal{L}$, si h tend vers 0, nous avons $x(N)$ qui tend vers $x(B)$ par continuité de exp, voir le fait 21. Comme ln est dérivable en $x(B)$, nous avons $\lim\limits_{h \to 0} m(BN) = \ln'(x(B)) = \frac{1}{\exp a}$, puis $\lim\limits_{h \to 0} T(h) = \exp a$ comme souhaité. □

4. Bien noter que nous n'avons pas utilisé la stricte croissance de exp dans la preuve du fait 21 qui va servir à calculer $\exp'$.