# FORMULE BINÔME NEWTON "GÉNÉRALISÉE"

<u>Th.</u> (facile via une récu.)

$(\mathbb{A},+,\cdot)$ un anneau.

Si $ab=ba$ alors $(a+b)^n = \sum_0^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ avec des nota° évidentes.

<u>Appli. 1</u>

Binôme Newton dans $(\mathbb{R},+,\cdot)$.

<u>Appli. 2</u>

Dér. de Leibniz via:

- $\mathbb{A} = End(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}))$ ou équivalent.
- $+$ : addi° pt par pt "usuelle"
- $\cdot$ : $\circ$ la composi°

Donc si $a \in \mathbb{A}$, alors $a^n = \underbrace{a\circ a\circ \dots \circ a}_{n \text{ fois}}$.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^n = \sum_0^n \binom{n}{k} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\circ\frac{\partial^{n-k}}{\partial y^{n-k}}$$

Th. Schwarz $\frac{\partial}{\partial x}\circ\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\circ\frac{\partial}{\partial x}$

On applique à $H(x;y) = f(x)g(y)$

- $\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)(H) = f'(x)g(y) + f(x)g'(y)$

  $\hookrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)(H)(x;x) = (fg)'(x)$

- OK si diag : $H(x;y) \mapsto H(x;x)$

  commute avec $\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}$. On a bien :

  $\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\circ diag(H) = diag\circ\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)(H)$. OUF!

Appli 3

$F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k$

Suite sur $\mathbb{Z}$ et non $\mathbb{N}$ : non gênant car on pose $F_k = 0$ si $k \leq 0$

- $\mathbb{A} = \mathrm{End}(\ell(\mathbb{Z};\mathbb{R}))$
- $+$ et $\circ$ comme avant

On considère $\sigma_i : (F_m) \longrightarrow (F_{m+i})$ $\rightarrow$ décalage d'indices

$$(\sigma_0 + \sigma_1)((F_m)_m) = (F_m + F_{m+1})_m$$
$$= (F_{m+2})_m$$
$$= \sigma_2((F_m)_m)$$

$$(F_{m+2n})_m = (\sigma_2)^n ((F_m)_m)$$
$$= (\sigma_0 + \sigma_1)^n ((F_m)_m)$$
$$= \sum_0^k \binom{n}{k} \sigma_1^k \sigma_0^{n-k} ((F_m)_m)$$

$\sigma_1 \sigma_0 = \sigma_0 \sigma_1$ clairement.

$$= \sum_0^k \binom{n}{k} \sigma_k((F_m)_m)$$
$$= \sum_0^n \binom{n}{k} ((F_{m+k})_m)$$
$$= \left( \sum_0^n \binom{n}{k} F_{m+k} \right)_m$$

Appli 4

loi binômiale, et oui!

Epreuve de Bernoulli : $P(X = 0) = 1-p = q$
$P(X = 1) = p$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ var. indé. de loi

Quelle est la loi de $X_1 + X_2 + \ldots X_n$ ? Cas général $X_i : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$

- $\underline{n=2}$ $P(X_1 + X_2 = k)$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} P(X_1 = m) P(X_2 = k-m)$$ Par indé.

Notant $f_{X_1+X_2} : k \longrightarrow P(X_1 + X_2 = k) \ldots$

On écrit $f_{X_1} * f_{X_2}$ prod. convolu°

DEF!

On choisit donc :

- $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}_{\text{SuppMin}}$ (appli. de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ à support minoré)
- $+$ et $*$

↳ convolu° porte sur une somme finie.

$$f_{X_1+\dots+X_n} = f_{X_1} * \dots * f_{X_n}$$
$$= f_{X_1}^{\,n} \longleftarrow \text{Puiss. } n^{\text{ième}} \text{ de convolu}^{\circ}$$
$$= (p\delta_0 + q\delta_1)^n \longrightarrow \delta_i : \text{symbole de Kronecker}$$

A-t-on $\delta_0 * \delta_1 = \delta_1 * \delta_0$ ?

$$\delta_0 * \delta_1(k) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(m)\,\delta_1(k-m)$$
$$= \delta_0(0)\,\delta_1(k)$$

Donc $\delta_0 * \delta_1 = \delta_1$
De même, $\delta_1 * \delta_0 = \delta_1$ ) Au passage, $\delta_0$ elt neutre.

On a alors :

$$f_{X_1+\dots+X_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k \delta_0^k \, q^{n-k} \delta_1^{n-k}$$

Que vaut $\delta_0^{\,k} = \underbrace{\delta_0 * \dots * \delta_0}_{k \text{ fois}}$ ? $\delta_0^{\,k} = \delta_0$ (vu avant)

"Idem" pour $\delta_1^{\,k}$ : • $\delta_1 * \delta_1(k) = \delta_1(1)\,\delta_1(k-1)$
$= \delta_2$

... etc

$$f_{X_1+\dots+X_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k \delta_k$$

↳ Loi bino. Que c'est joli !