

BROUILLON – OPTIMISATION BASIQUE SANS DÉRIVER... QUOIQUÉ!

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
[https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/math/optimization/](https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/math/optimization/area/hyperbola-rectangle-hidden-symmetry)
[area/hyperbola-rectangle-hidden-symmetry](https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/math/optimization/area/hyperbola-rectangle-hidden-symmetry).

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



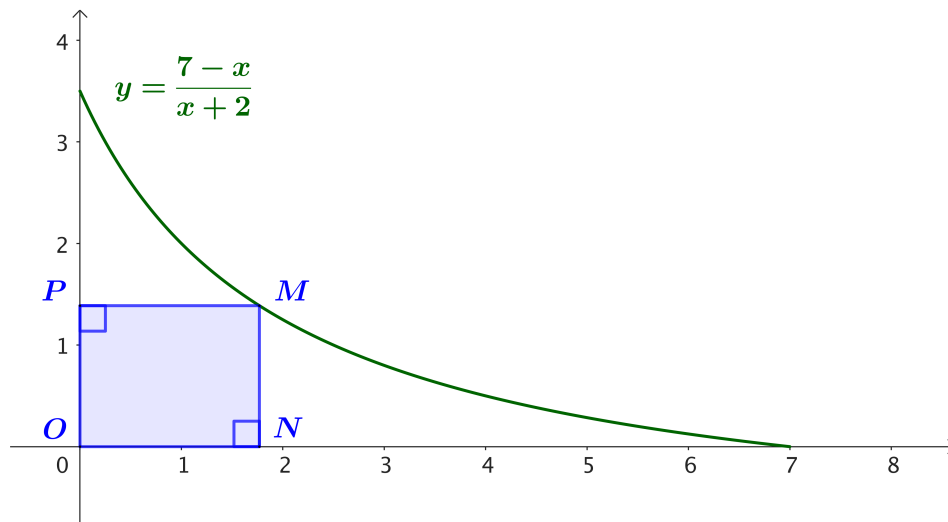
TABLE DES MATIÈRES

1. Un problème d’optimisation de niveau pré-universitaire	2
2. La classique méthode via la dérivation	2
3. Sans dériver, c’est possible!	2
4. Et si on généralisait...	4

XXXXX

1. UN PROBLÈME D'OPTIMISATION DE NIVEAU PRÉ-UNIVERSITAIRE

Soit la fonction f définie sur $[0; 7]$ par $f(x) = \frac{7-x}{x+2}$. Considérons M un point sur $\mathcal{C}_f : y = f(x)$, et le rectangle $MNOP$ comme ci-dessous. Est-il possible de placer M tel que $\text{Aire}(MNOP)$ soit maximale ?



2. LA CLASSIQUE MÉTHODE VIA LA DÉRIVATION

Traditionnellement, nous étudions les variations de la fonction $A(x) = xf(x) = \frac{7x-x^2}{x+2}$, via sa dérivée $A'(x) = \frac{-x^2-4x+14}{(x+2)^2}$, dont le signe dépend de celui du trinôme $T(x) = -x^2 - 4x + 14$ qui s'annule en $(-2 \pm 3\sqrt{2})$. Nous obtenons aisément le tableau de variations suivant.

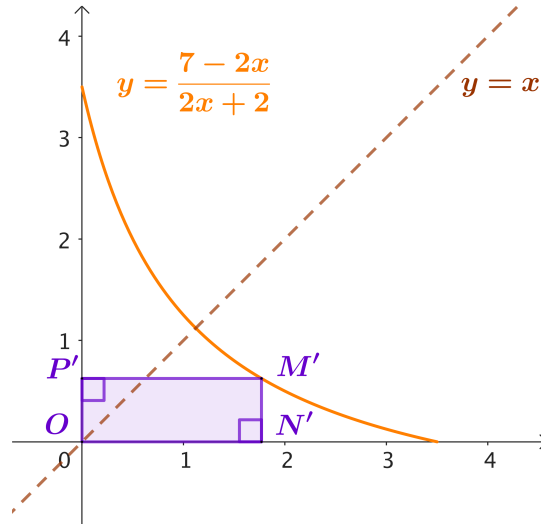
x	0	$3\sqrt{2} - 2$	7	
$T(x)$		+	0	−
$A'(x)$		+	0	−
$A(x)$				

Finalement, $\text{Aire}(MNOP)$ est maximale uniquement lorsque $x_M = 3\sqrt{2} - 2$.

Remarque 1. Comme $A''(x) = -\frac{36}{(2+x)^3}$, la fonction A est concave.

3. SANS DÉRIVER, C'EST POSSIBLE !

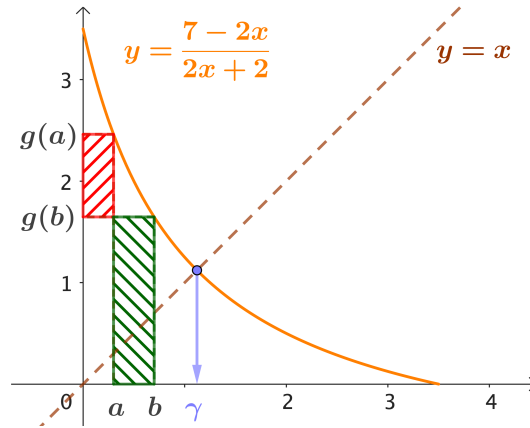
Nous proposons ici une méthode géométrico-algébrique sans user de la notion de dérivée. Pour ce faire, commençons par symétriser le problème en obtenant une hyperbole symétrique par rapport à la 1^{re} bissectrice $\mathcal{D} : y = x$. Il suffit de considérer la fonction g définie sur $[0; 3,5]$ par $g(x) = f(2x) = \frac{7-2x}{2x+2}$. Cette opération algébrique correspond à appliquer une dilatation horizontale de coefficient 0,5.



La calcul suivant démontre que $\mathcal{C}_g : y = g(x)$ est bien symétrique rapport à \mathcal{D} .

$$\begin{aligned}
 g(g(x)) &= \left(7 - 2 \cdot \frac{7-2x}{2x+2}\right) \div \left(2 \cdot \frac{7-2x}{2x+2} + 2\right) \\
 &= \frac{7(2x+2) - 2(7-2x)}{2(7-2x) + 2(2x+2)} \\
 &= \frac{18x}{18} \\
 &= x
 \end{aligned}$$

Cette propriété de symétrie nous permet de deviner le rôle essentiel de $\gamma = 1,5\sqrt{2} - 1$, l'unique solution sur $[0; 3,5]$ de $g(x) = x$, c'est-à-dire de $\frac{7-2x}{2x+2} = x$, soit $2x^2 + 4x - 7 = 0$. Notons alors $\mathcal{A}(x) = xg(x)$ pour $x \in [0; 3,5]$. Nous allons démontrer, sans dériver, la croissance stricte de \mathcal{A} sur $[0; \gamma]$, et par conséquent sa décroissance stricte sur $[\gamma; 3,5]$ par raison de symétrie. Considérons donc a et b deux réels tels que $0 \leq a < b \leq \gamma$, puis observons le schéma suivant.



Nous avons $\mathcal{A}(a) < \mathcal{A}(b)$ si, et seulement si, $a(g(a) - g(b)) < (b - a)g(b)$. Nous voilà partis pour un peu de calcul...

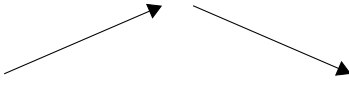
$$\begin{aligned}
 \bullet \quad 2(g(a) - g(b)) &= \frac{7-2a}{a+1} - \frac{7-2b}{b+1} \\
 &= \frac{(7-2a)(b+1) - (7-2b)(a+1)}{(a+1)(b+1)} \\
 &= \frac{9(b-a)}{(a+1)(b+1)}
 \end{aligned}$$

- Le point précédent nous amène aux calculs suivants.

$$\begin{aligned} & \frac{2(a+1)(b+1)}{b-a} (a(g(a) - g(b)) - (b-a)g(b)) \\ &= 9a - (7-2b)(a+1) \\ &= 2a + 2ab + 2b - 7 \end{aligned}$$

- En nous souvenant de $0 \leq a < b \leq \gamma$, nous avons $2a + 2ab + 2b - 7 < 2b^2 + 4b - 7$. Or, les racines de $2x^2 + 4x - 7$ sont γ et $\bar{\gamma} = -1,5\sqrt{2} - 1$, donc $b \in]\bar{\gamma}; \gamma[$ donne $2b^2 + 4b - 7 < 0$, puis $a(g(a) - g(b)) < (b-a)g(b)$.

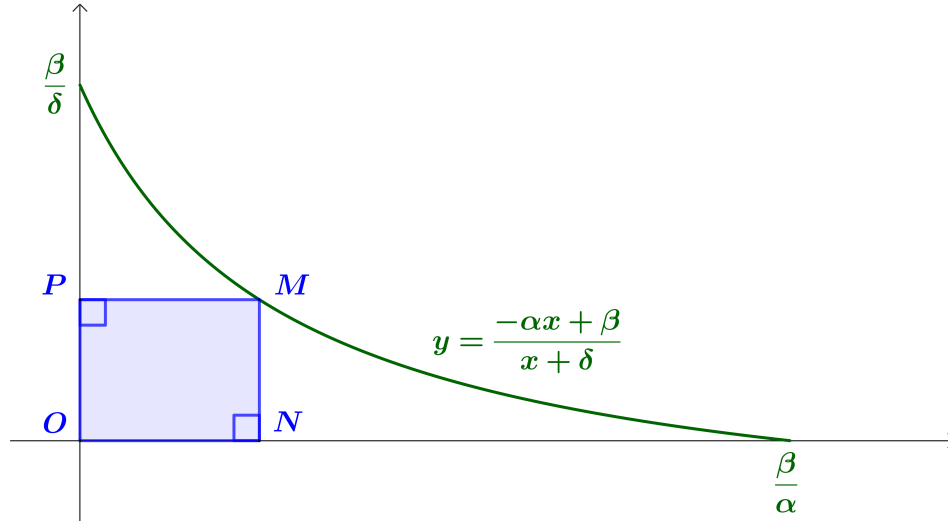
Nous arrivons au tableau de variations suivant.

x	0	γ	3,5
$\mathcal{A}(x)$			

Finalement, pour revenir à $A(x)$ maximale, il suffit d'inverser la dilatation horizontale qui a permis de passer de $f(x)$ à $g(x)$, soit prendre $2\gamma = 3\sqrt{2} - 2$, au lieu de γ . Finalement, $\text{Aire}(MNOP)$ est maximale uniquement lorsque $x_M = 3\sqrt{2} - 2$.

4. ET SI ON GÉNÉRALISAIT...

Considérons la fonction homographique f définie sur $[0; \frac{\beta}{\alpha}]$ par $f(x) = \frac{-\alpha x + \beta}{x + \delta}$ où l'on suppose $(\alpha; \beta; \delta) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ en utilisant des paramètres positifs comme en Physique.¹ Considérons M un point sur $\mathcal{C}_f : y = f(x)$, et le rectangle $MNOP$ comme ci-dessous. Est-il possible de placer M tel que $\text{Aire}(MNOP)$ soit maximale ?



Pour minimiser le nombre de paramètres utilisés, commençons par appliquer une dilatation horizontale de coefficient $\frac{\alpha}{\beta}$, ce qui donne $g(x) = f(\frac{\beta}{\alpha}x) = \frac{\beta(1-x)}{\delta + \frac{\beta}{\alpha}x} = \alpha \cdot \frac{1-x}{\mu+x}$ en notant $\mu = \frac{\alpha\delta}{\beta}$. Par confort, appliquons ensuite une dilatation verticale de coefficient $\frac{1}{\alpha} > 0$, ce qui fournit $h(x) = \frac{1-x}{\mu+x}$. Nous arrivons au problème de maximisation de $\mathcal{A}(x) = xh(x) = \frac{x-x^2}{x+\mu}$ sur $[0; 1]$.

1. Ces contraintes permettent d'obtenir la situation graphique proposée juste après.

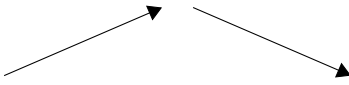
$$\begin{aligned}\mathcal{A}'(x) &= \frac{(1-2x)(x+\mu) - (x-x^2)}{(x+\mu)^2} \\ &= \frac{-x^2 - 2\mu x + \mu}{(x+\mu)^2}\end{aligned}$$

Nous sommes amenés à étudier le signe du trinôme $T(x) = -x^2 - 2\mu x + \mu$.

$$\Delta = 4\mu^2 + 4\mu$$

$$= 4\mu(\mu + 1)$$

Comme $\mu > 0$, nous avons deux racines $r_1 = -\mu - \sqrt{\mu(\mu + 1)}$ et $r_2 = -\mu + \sqrt{\mu(\mu + 1)}$. Or, $0 < \mu < \mu + 1$ donne $0 < r_2 < 1$, puis le tableau de variations suivant.

x	0	r_2	1
$T(x)$	+	0	-
$\mathcal{A}'(x)$	+	0	-
$\mathcal{A}(x)$			

Finalement, Aire($MNOP$) est maximale uniquement lorsque $x_M = \frac{\beta}{\alpha}r_2$, c'est-à-dire pour $x_M = \sqrt{\delta(\delta + \frac{\beta}{\alpha})} - \delta$ en revenant aux données initiales, car $\frac{\beta}{\alpha}\mu = \delta$.

Remarque 2. Les calculs suivants montrent la concavité de \mathcal{A} , et donc de l'aire du rectangle initialement étudié.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}''(x) &= \frac{-2(x+\mu) \cdot (x+\mu)^2 - (-x^2 - 2\mu x + \mu) \cdot 2(x+\mu)}{(x+\mu)^4} \\ &= \frac{-2x^2 - 4\mu x - 2\mu^2 + 2x^2 + 4\mu x - 2\mu}{(x+\mu)^3} \\ &= \frac{-2\mu(\mu + 1)}{(x+\mu)^3}\end{aligned}$$