

BROUILLON – NEWTON, BERNOULLI, LEIBNIZ, FIBONACCI ET BELL

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



TABLE DES MATIÈRES

1.	Des identités bien connues	2
2.	La loi binomiale révèle...	2
2.1.	De l'utilité des arbres	2
2.2.	En route directement vers le binôme de Newton	3
2.3.	Leibniz sans effort	4
2.4.	Une petite astuce pour Fibonacci	4
2.5.	Avec des coefficients binomiaux	5
2.6.	Bell sonne la fin du jeu	6

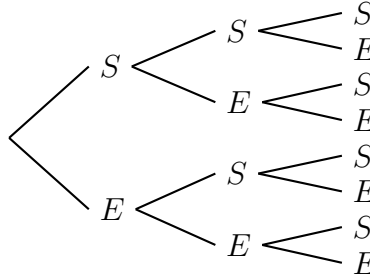
1. DES IDENTITÉS BIEN CONNUES

Les formules suivantes intriguent par leur ressemblance. Bien qu'elles appartiennent à des domaines distincts, leur similitude n'est pas le fruit du hasard. À travers deux démonstrations adoptant des approches différentes, nous révélerons les liens combinatoires qui unissent ces objets en apparence indépendants.

- **Formule du binôme de Newton** : $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.
- **Formule de dérivation de Leibniz** : $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$.
- **Loi binomiale** : $P(X = j) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_{jk}$,¹ même s'il est d'usage de juste écrire $P(X = j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$.
- **Une identité portant sur la suite de Fibonacci** : $F_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k$.
- **Une formule similaire pour les coefficients binomiaux** : $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k}$.
- **Une équation liant les nombres de Bell** : $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$ où B_s est le nombre de façons de partitionner un ensemble de s .²

2. LA LOI BINOMIALE RÉVÈLE...

2.1. De l'utilité des arbres. Lorsque l'on présente la loi binomiale, il est courant d'utiliser un arbre de probabilité comme le suivant où S désigne un succès et E un échec, un succès ayant une probabilité p de se réaliser (ici nous avons 3 niveaux de profondeur).



Définition 1. $\binom{n}{k}$ désigne le nombre de chemins avec exactement k succès dans la version générale à n niveaux de profondeur de l'arbre précédent.

Remarque 2. Dans le début de ce document, nous n'utiliserons ni la définition combinatoire de $\binom{n}{k}$ via les sous-ensembles à k éléments, ni la formule factorielle de $\binom{n}{k}$.

Notons X la variable aléatoire comptant le nombre de succès, ainsi que $q = 1 - p$. Pour justifier que $P(X = j) = \binom{n}{j} p^j q^{n-j}$, soit $P(X = j) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_{jk}$, nous allons nous concentrer sur les bifurcations lors du parcours de l'arbre de gauche à droite. L'arbre de calcul ci-dessous à

1. δ_{jk} est le symbole de Kronecker valant 1 si $j = k$, et 0 sinon, tandis que X désigne la variable aléatoire comptant le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli de paramètre $(n; p)$.

2. Par exemple, $B_3 = 5$, car l'ensemble $\{a, b, c\}$ admet les partitions $\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a\} \cup \{b, c\}$, $\{b\} \cup \{a, c\}$ et $\{c\} \cup \{a, b\}$.

gauche traduit que si l'on va vers un succès, la probabilité en cours est multipliée par p , et sinon c'est q qui est appliqué. Ceci nous donne des calculs intermédiaires à chaque bifurcation comme montré ci-dessous à droite.

$$x \begin{cases} px \\ qx \end{cases}$$

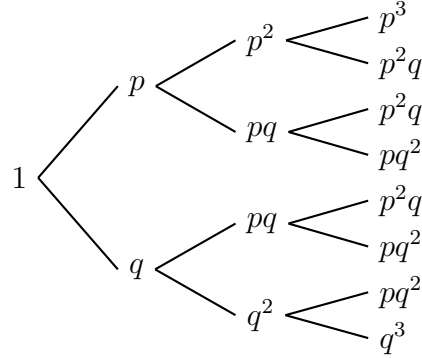
Arbre de calcul.

$$p^a q^b \begin{cases} p^{a+1} q^b \\ p^a q^{b+1} \end{cases}$$

Un calcul intermédiaire.

Considérons maintenant un arbre binaire de niveau de profondeur n . En partant de la racine, à gauche, avec la valeur 1, l'application de la règle de calcul donne $P(X = j) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_{jk}$.

Voici un exemple de calcul avec $n = 3$.



Un exemple de calcul.

La méthode que nous venons de présenter est généralisable à d'autres contextes comme nous allons le constater dans la suite de ce document.

2.2. En route directement vers le binôme de Newton. Pour développer $(x + y)^n$, la brique de base est la distribution indiquée dans l'arbre de calcul ci-dessous à gauche, ceci nous donnant des calculs intermédiaires comme celui montré ci-dessous à droite.

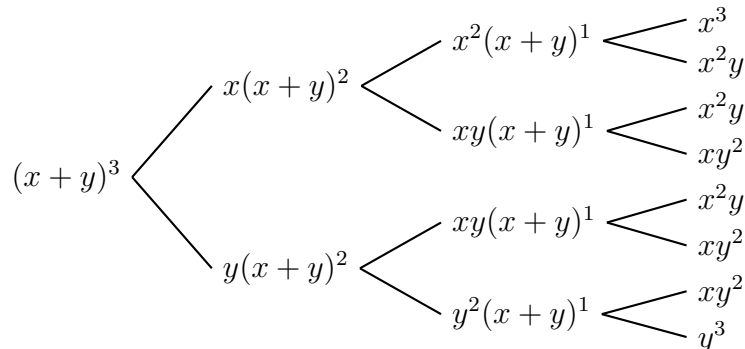
$$(x + y)f(x; y) \begin{cases} xf(x; y) \\ yf(x; y) \end{cases}$$

Arbre de calcul.

$$x^a y^b (x + y)^k \begin{cases} x^{a+1} y^b (x + y)^{k-1} \\ x^a y^{b+1} (x + y)^{k-1} \end{cases}$$

Un calcul intermédiaire.

En considérant un arbre binaire de niveau de profondeur n , et avec pour racine l'expression $(x + y)^n$, l'application répétée de la règle de calcul donne la formule du binôme de Newton $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. Voici un exemple de calcul avec $n = 3$.



Un exemple de calcul.

2.3. Leibniz sans effort. Pour la formule de dérivation de Leibniz, comme la dérivation est une fonctionnelle linéaire, la brique de base est la classique formule de dérivation d'un produit, voir ci-dessous à gauche. Les calculs intermédiaires sont de la forme indiquée ci-dessous à droite.

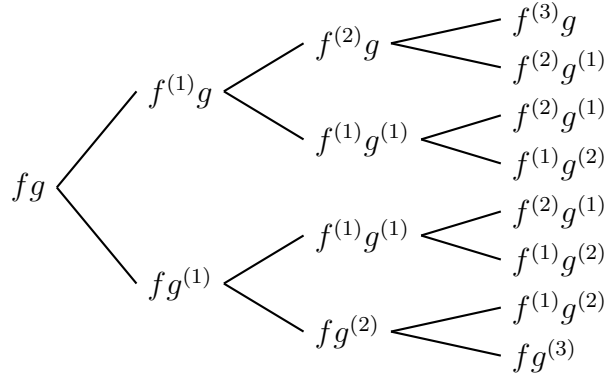
$$uv \begin{array}{l} \swarrow u'v \\ \searrow uv' \end{array}$$

Arbre de calcul.

$$f^{(a)}g^{(b)} \begin{array}{l} \swarrow f^{(a+1)}g^{(b)} \\ \searrow f^{(a)}g^{(b+1)} \end{array}$$

Un calcul intermédiaire.

En considérant un arbre binaire de niveau de profondeur n , et avec pour racine la fonction produit fg , l'application répétée de la règle de calcul donne la formule de dérivation de Leibniz $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$. Voici un exemple de calcul avec $n = 3$.



Un exemple de calcul.

2.4. Une petite astuce pour Fibonacci. Pour la suite de Fibonacci, la règle de calcul est évidemment donnée par la relation de récurrence $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$, et pour les calculs intermédiaires, nous faisons apparaître ce qui a été soustrait à l'indice.

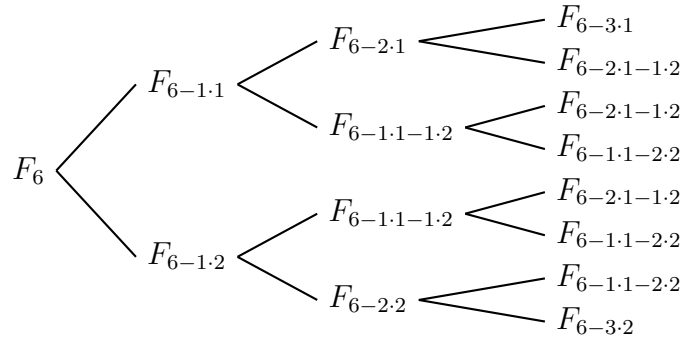
$$F_i \begin{array}{l} \swarrow F_{i-1} \\ \searrow F_{i-2} \end{array}$$

Arbre de calcul.

$$F_{i-a-1-b-2} \begin{array}{l} \swarrow F_{i-(a+1)-1-b-2} \\ \searrow F_{i-a-1-(b+1)-2} \end{array}$$

Un calcul intermédiaire.

Pour valider $F_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k$, nous considérons un arbre binaire de niveau de profondeur n , et avec pour racine le terme F_{2n} . Ainsi, pour $n = 3$, nous obtenons l'arbre suivant.



Un exemple de calcul.

Aux feuilles de l'arbre, tout à droite, nous avons les termes $F_{2n-k-1-(n-k)-2} = F_k$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, donc $F_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k$ est validée.

Remarque 3. Plus généralement, nous avons $F_{m+2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{m+k}$ par simple décalage de tous les indices, cette opération étant compatible avec notre méthode de construction.

2.5. Avec des coefficients binomiaux. Définissons \mathcal{C}_p^n sur \mathbb{Z}^2 par $\mathcal{C}_p^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, et $\mathcal{C}_p^n = 0$ dans les autres cas. Nous allons démontrer que $\mathcal{C}_p^n = \binom{n}{p}$ si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Pour cela, notons que $\mathcal{C}_p^n = \mathcal{C}_p^{n-1} + \mathcal{C}_{p-1}^{n-1}$: c'est facile à vérifier pour les valeurs non nulles de \mathcal{C}_p^n , et ensuite à généraliser aux cas restants. Ceci nous amène à considérer la situation suivante.

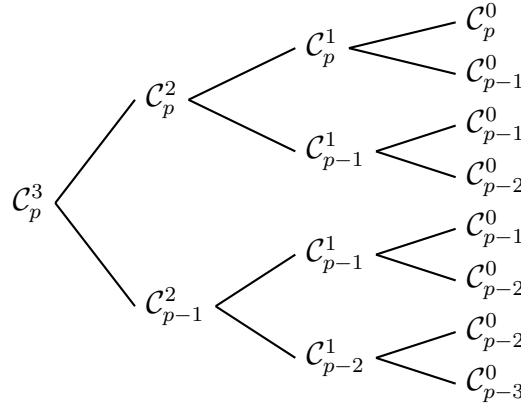
$$\mathcal{C}_p^n \begin{cases} \mathcal{C}_p^{n-1} \\ \mathcal{C}_{p-1}^{n-1} \end{cases}$$

Arbre de calcul.

$$\mathcal{C}_{p-b}^{n-a} \begin{cases} \mathcal{C}_{p-b}^{n-(a+1)} \\ \mathcal{C}_{p-(b+1)}^{n-(a+1)} \end{cases}$$

Un calcul intermédiaire.

Nous considérons alors l'arbre binaire de niveau de profondeur n avec pour racine le terme \mathcal{C}_p^n doublement indexé par n et k . Ainsi, pour $n = 3$ et $p \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, nous obtenons l'arbre suivant où les feuilles sont toutes du type \mathcal{C}_p^0 .



Un exemple de calcul.

Nous obtenons donc $\mathcal{C}_p^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{C}_{p-k}^0$. Or, pour $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, la somme de droite se réduit à $\binom{n}{p} \mathcal{C}_0^0$, d'où $\mathcal{C}_p^n = \binom{n}{p}$ comme annoncé.

Nous pouvons maintenant passer à l'identité $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k}$ que nous allons démontrer sous

la forme équivalente $\mathcal{C}_n^{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{C}_{n-k}^n$. L'idée consiste simplement à considérer une arbre avec

pour racine le terme \mathcal{C}_n^{2n} pour obtenir $\mathcal{C}_n^{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{C}_{n-k}^{2n-n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{C}_{n-k}^n$ comme souhaité.

Remarque 4. Notant $\mathbf{C}(n; p)$ le nombre de sous-ensembles à p élément d'un ensemble \mathcal{E} de cardinal n , il est immédiat de voir que $\mathbf{C}(n; p) = \mathbf{C}(n-1; p) + \mathbf{C}(n-1; p-1)$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$: en effet, il suffit de distinguer les sous-ensembles contenant un élément particulier e , choisi et fixé arbitrairement, de ceux ne le contenant pas. Comme pour \mathcal{C}_p^n , nous avons alors $\mathbf{C}(n; p) = \binom{n}{p}$ si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Une fois ceci démontré, il est très facile de deviner que $\mathbf{C}(2n; n) = \sum_{k=0}^n \mathbf{C}(n; k) \mathbf{C}(n; n-k)$ en partageant \mathcal{E} en deux sous-ensembles particuliers disjoints de cardinal n , choisis et fixés arbitrairement.

Remarque 5. L'identité $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$ est un cas particulier de la formule de Van der Monde qui est $\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}$ pour $(m; n) \in \mathbb{N}^2$ et $p \in \llbracket 0; \min(n; m) \rrbracket$. Comme à la fin de la remarque précédente, il est aisé de découvrir que $\mathcal{C}(m+n; p) = \sum_{k=0}^p \mathcal{C}(m; k) \mathcal{C}(n; p-k)$.

2.6. Bell sonne la fin du jeu. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, notons B_i le nombre de façons de partitionner un ensemble de i éléments, et posons $B_0 = 1$ par convention.

XXXX

????

Pour finir notre liste de cas d'application, nous allons expliquer pourquoi $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$ où B_p désigne le nombre de façons de partitionner un ensemble de p éléments en sous-ensembles non vides.

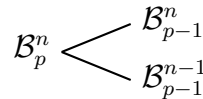
$B_n = \mathcal{B}_0^n = \mathcal{B}_{n-1}^{n-1}$ si $\mathcal{B}_p^n = \mathcal{B}_{p-1}^n + \mathcal{B}_{p-1}^{n-1}$ avec $\mathcal{B}_0^0 = 1$ et $\mathcal{B}_p^n = 0$ si ???.

situaion similaire aux coefficients binomiaux

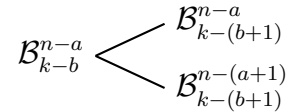
????

XXXX

Comme les relations de récurrence vérifiées par (\mathcal{B}_p^n) ressemblent à celles de la suite (\mathcal{C}_p^n) , il devient évident de procéder comme suit.

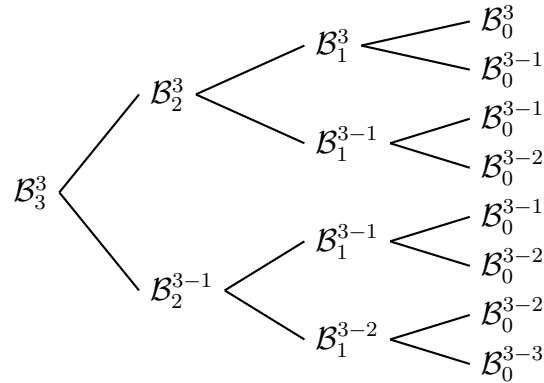


Arbre de calcul.



Un calcul intermédiaire.

L'arbre binaire à considérer doit avoir \mathcal{B}_n^n pour racine comme dans l'exemple suivant où $n = 3$.



Un exemple de calcul.

Nous arrivons à $\mathcal{B}_n^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{B}_0^{n-k}$ qui équivaut à $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}$. Or, $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, donc nous avons bien $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$.