BROUILLON – NEWTON, BERNOULLI, LEIBNIZ, FIBONACCI ET BELL

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts.

Mentions « légales »

Table des matières

Date: 2 Avril 2025 - 3 Avril 2025.

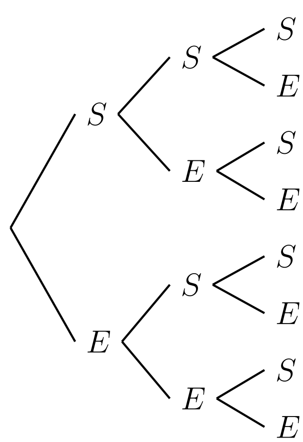
1. Des identités bien connues

Les formules suivantes intriguent par leur ressemblance. Bien qu'elles appartiennent à des domaines distincts, leur similitude n'est pas le fruit du hasard. À travers deux démonstrations adoptant des approches différentes, nous révélerons les liens combinatoires qui unissent ces objets en apparence indépendants.

- **Formule du binôme de Newton :** $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
- **Formule de dérivation de Leibniz :** $(fg)^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$.
- **Loi binomiale :** $\mathrm{P}(X=j) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_{jk}$, [1] même s'il est d'usage de juste écrire $\mathrm{P}(X=j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$.
- **Une identité portant sur la suite de Fibonacci :** $F_{2n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k$.
- **Une formule similaire avec des coefficients binomiaux :** $\binom{2n}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k}$.
- **Une équation liant les nombres de Bell :** $B_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$ où B_s est le nombre de façons de partitionner un ensemble de s éléments en sous-ensembles non vides : par exemple, $B_3 = 5$, car l'ensemble $\{a,b,c\}$ admet les partitions $\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a\} \cup \{b,c\}$, $\{b\} \cup \{a,c\}$ et $\{c\} \cup \{a,b\}$.

2. La loi binomiale révèle...

2.1. **De l'utilité des arbres.** Lorsque l'on présente la loi binomiale, il est courant d'utiliser un arbre de probabilité comme le suivant où S désigne un succès et E un échec, un succès ayant une probabilité p de se réaliser (ici nous avons un niveau de profondeur de 3).



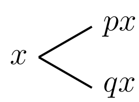
Définition 1. *$\binom{n}{k}$ désigne le nombre de chemins avec exactement k succès dans la version générale à n niveaux de l'arbre précédent. Dans cette section, nous n'utiliserons ni la définition combinatoire de $\binom{n}{k}$ via les sous-ensembles à k éléments, ni la formule factorielle de $\binom{n}{k}$.*

---

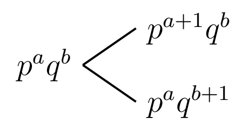
1. δ_{jk} est le symbole de Kronecker valant 1 si $j = k$, et 0 sinon, tandis que X désigne la variable aléatoire comptant le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli de paramètre $(n\,;p)$.

Notant X la variable aléatoire comptant le nombre de succès, ainsi que $q = 1-p$, il est immédiat que nous avons $\mathrm{P}(X=j) = \binom{n}{j} p^j q^{n-j}$, soit de façon équivalente $\mathrm{P}(X=j) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_{jk}$.

Nous pouvons calculer les probabilités aux feuilles de l'arbre via le mini-arbre de calcul $\mathcal{T}_c$ suivant dans lequel un choix de chemin vers le bas, soit un déplacement vers un succès, implique de multiplier la valeur $p^i q^j$ par p, et sinon de multiplier par q.

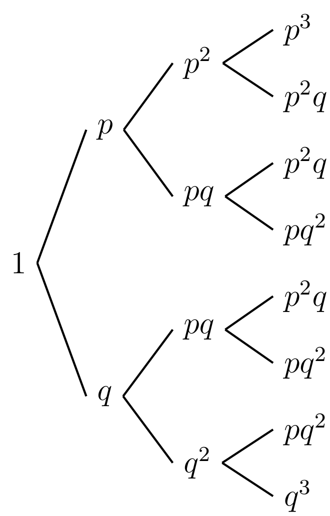


Arbre de calcul.

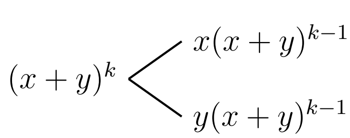


Un calcul intermédiaire.

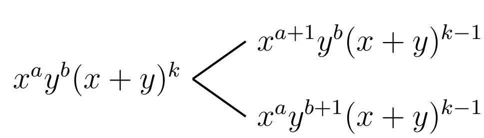
Si l'on part de la racine de la valeur 1 pour construire un arbre binaire complet via les règles de calcul de $\mathcal{T}_c$, nous retrouvons $\mathrm{P}(X=j) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_{jk}$ de façon combinatoire, voir ci-dessous, mais surtout via une méthode généralisable à d'autres contextes comme nous allons le constater.



2.2. **En route directement vers le binôme de Newton.** XXXX

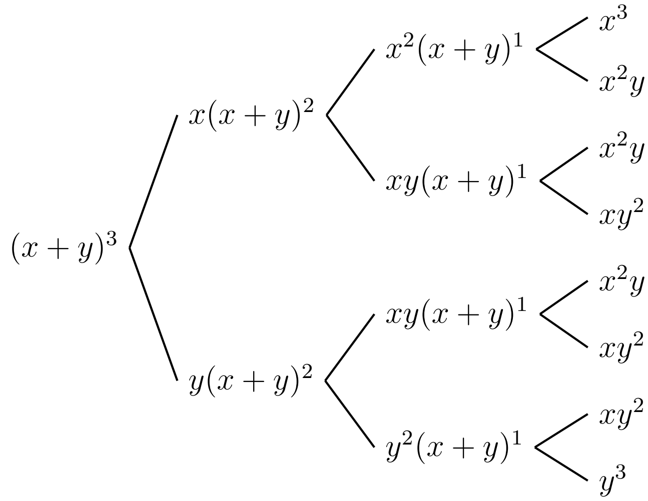


Arbre de calcul.

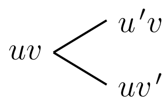


Un calcul intermédiaire.

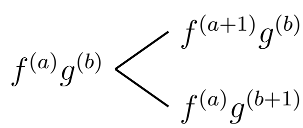
YYY



2.3. **Leibniz sans effort.** XXXX

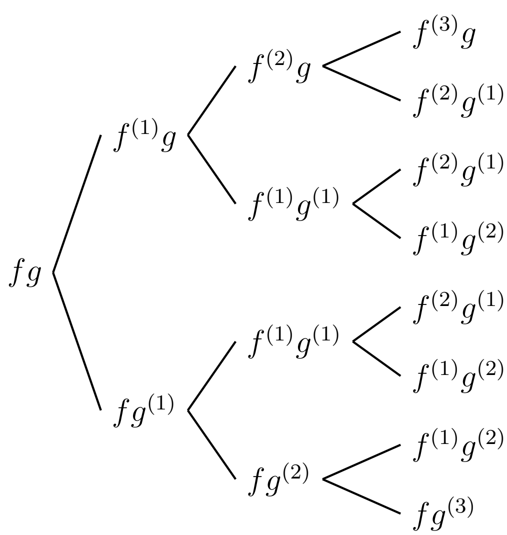


Arbre de calcul.

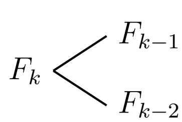


Un calcul intermédiaire.

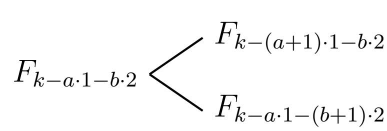
YYY



2.4. **Une petite astuce pour Fibonacci.** XXXX

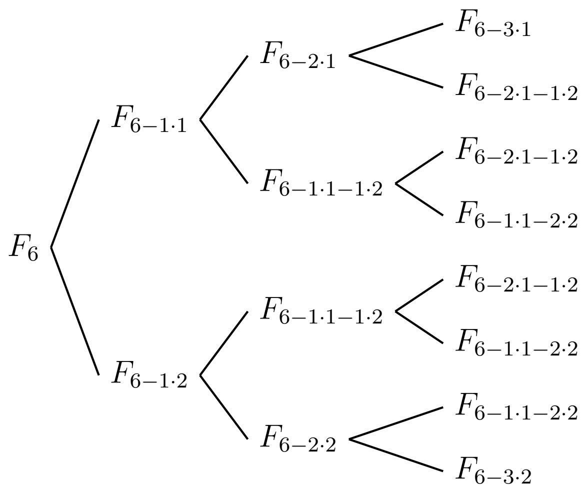


Arbre de calcul.

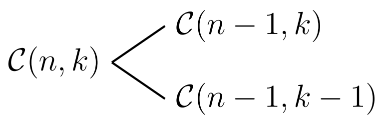


Un calcul intermédiaire.

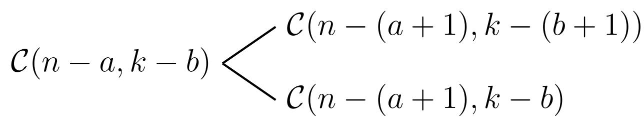
YYY



2.5. **Avec des coefficients binomiaux.** Notant $\mathcal{C}(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ si et $\mathcal{C}(n,k) = 0$ sinon, nous allons démontrer que $\mathcal{C}(n,k) = \binom{n}{k}$.
XXXX

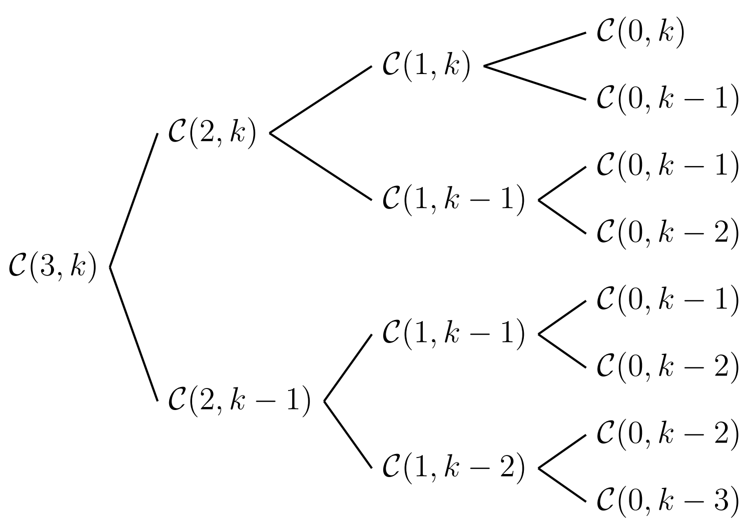


Arbre de calcul.

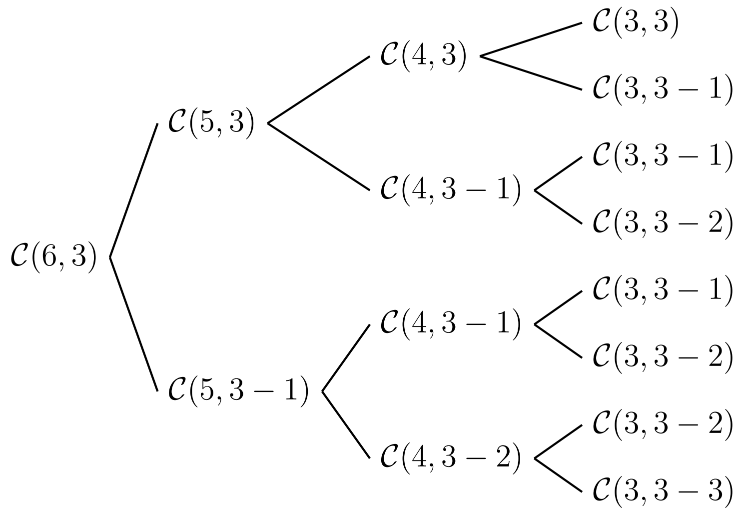


Un calcul intermédiaire.

YYY

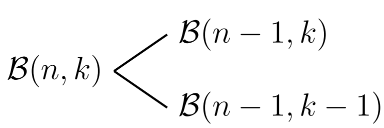


Passons à l'identité $\binom{2n}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k}$ que nous allons démontrer sous la forme équivalente $\mathcal{C}(2n,n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\mathcal{C}(n,n-k)$.
YYY



Remarque 2. *Notant* C_n^k *le nombre de sous-ensembles à ....*
la dernière identité devient éévidente.

2.6. **Bell sonne la fin du jeu.** XXXX
$B_n = \mathcal{B}(n,0) = \mathcal{B}(n-1,n-1)$ si $\mathcal{B}(n,k) = \mathcal{B}(n-1,k) + \mathcal{B}(n-1,k-1)$ avec $\mathcal{B}(0,0) = 1$ et $\mathcal{B}(n,k) = 0$ si ? ? ?.
situtaion similaire aux coefficients binomiaux
XXXX



Arbre de calcul.

n

Un calcul intermédiaire.

YYY
3

2.7. **Généraliser aux coefficients multimoniaux.** XXX