

BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



TABLE DES MATIÈRES

1. Triangles	2
1.1. Avec un côté fixé	2
1.2. Le cas général	3
2. Quadrilatères	5
2.1. Les rectangles	5
2.2. Les parallélogrammes	5
2.3. Le cas général	6

Ce document s'intéresse au classique problème de l'isopérimétrie plane, c'est-à-dire la recherche d'une surface plane maximisant son aire pour un périmètre fixé. Nous allons nous restreindre au cas élémentaire des polygones, tout en nous limitant à des preuves les plus géométriques possible. La restriction est donc double, voire triple une fois les différentes démonstrations lues.

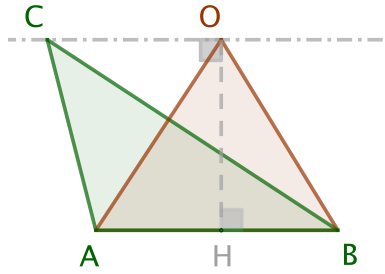
Pour ne pas alourdir le texte, on raisonnera modulo des isométries, positives ou non. Ainsi, on pourra parler « du carré de côté c », « du triangle équilatéral de côté c » ... Indiquons aussi que le niveau de lecture de ce document, hors remarques, se veut élémentaire.

1. TRIANGLES

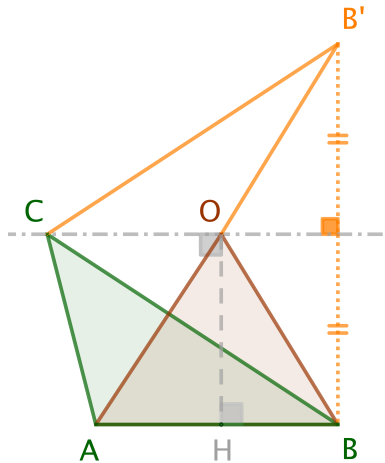
1.1. Avec un côté fixé.

Fait 1. *Considérons tous les triangles de périmètre fixé, et ayant tous un côté en commun. Parmi tous ces triangles, un seul est d'aire maximale, c'est le triangle isocèle ayant pour base le côté commun.*

Démonstration. Soit ABC un triangle de périmètre p , et fixons le côté $[AB]$. Pour tout point M sur la parallèle à (AB) passant par C , nous savons que $\text{Aire}(ABM) = \text{Aire}(ABC)$. Notons alors O le point sur cette parallèle tel que ABO soit isocèle en O .



Via une petite symétrie axiale, voir ci-dessous, il est aisé de noter que $\text{Perim}(ABC) \geq \text{Perim}(ABO)$, avec égalité uniquement si ABC est isocèle en C .



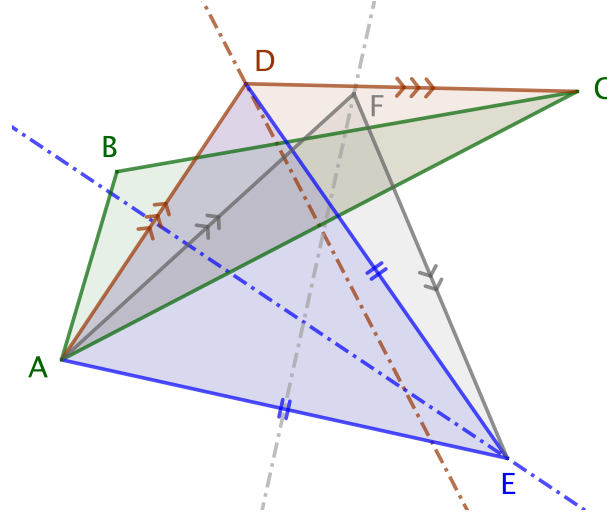
Via une dilatation « verticale » de rapport $r = \frac{\text{Perim}(ABC)}{\text{Perim}(ABO)} \geq 1$, on obtient finalement un triangle isocèle ABO' de périmètre p , et qui vérifie $\text{Aire}(ABO') \geq \text{Aire}(ABC)$, avec égalité uniquement si ABC est isocèle en C . Contrat rempli!¹ \square

1. La remarque 1.3 explique comment employer la méthode des extrema liés. Les arguments fournis à cet endroit s'adaptent facilement au cas des triangles de base fixée.

1.2. Le cas général.

Fait 2. *Considérons tous les triangles de périmètre fixé p . Parmi tous ces triangles, un seul est d'aire maximale, c'est le triangle équilatéral de côté $c = \frac{1}{3}p$.*

Démonstration. Nous allons donner une démonstration constructive via une application itérative du fait 1 qui va donner à la limite le triangle équilatéral d'aire maximale, et ceci avec une vitesse de convergence exponentielle.² Partons donc d'un triangle ABC quelconque, mais de périmètre p , le fait 1 nous donne successivement les triangles ACD , ADE et AEF isocèles en D , E et F respectivement, ayant tous pour périmètre p , et ceci avec des aires de plus en plus grandes. Le dessin suivant amène à conjecturer qu'en poursuivant le procédé pour avoir ensuite un triangle AFG isocèle en G ..., nous aboutirons « à la limite » à un triangle équilatéral.



Le passage d'un triangle quelconque ABC au triangle ACD isocèle en D nous amène à nous concentrer sur ce que donne notre procédé d'agrandissement d'aire à périmètre fixé pour des triangles isocèles. Voici ce que nous pouvons affirmer.

- (1) Considérons ACD isocèle en D tel que $AC > AD$. Comme $AC + AD + DC = p$, nous avons $AC > \frac{1}{3}p > AD$. Dès lors, on doit avoir ensuite $AD < \frac{1}{3}p < AE$, car $AD + DE + AE = p$ et $AD = AE$.
- (2) Considérons ADE isocèle en E tel que $AD < AE$ en oubliant le point précédent. Comme $AD + DE + AE = p$, nous avons $AD < \frac{1}{3}p < AE$. Dès lors, on doit avoir ensuite $AE > \frac{1}{3}p > AF$, car $AE + AF + EF = p$ et $AF = EF$.
- (3) Les points précédents démontrent que notre procédé n'arrivera jamais en un nombre fini d'étapes à un triangle équilatéral si l'on part d'un triangle isocèle non équilatéral.³
- (4) Nous devons quantifier les écarts à la mesure « limite » $p' = \frac{1}{3}p$.
 - Dans ADC , posant $AD = p' - \epsilon$, nous avons $AC = p' + 2\epsilon$.
 - Dans ADE , posant $AE = p' + \epsilon'$, nous avons $AD = p' - 2\epsilon'$.
 - Donc $\epsilon' = \frac{1}{2}\epsilon$.

Nous avons donc une convergence exponentielle des longueurs des côtés vers $p' = \frac{1}{3}p$. Et tout ceci via de la géométrie et de l'analyse élémentaires!

□

2. Ceci ne va nécessiter que l'emploi de propriétés simples de l'ensemble des réels.

3. Et plus généralement si le procédé ne commence pas avec une base de longueur $\frac{1}{3}p$.

Remarque 1.1. La preuve élémentaire classique commence par noter que si ABC n'est pas équilatéral, en particulier il n'est pas isocèle en A , donc, selon le fait 1, il existe un triangle isocèle de base $[BC]$, de même périmètre et d'aire strictement plus grande. Ceci nous prouve qu'un triangle maximisant l'aire à périmètre fixé ne peut être qu'équilatéral. Cette condition nécessaire est-elle suffisante ? Ce sera vrai si nous savons qu'au moins un triangle maximisant l'aire à périmètre fixé existe, puisque, dans ce cas, un tel triangle ne pourra être qu'équilatéral.⁴ Nous voilà obligé de faire appel aux techniques d'analyse.

- On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- Les triangles ABC tels que $\text{Perim}(ABC) = p$ sont représentés en posant $A(0;0)$, $B(AB;0)$ et $C(x_C; y_C)$ avec $y_C \geq 0$. Un triangle peut donc avoir trois représentations, mais peu importe. De plus, on accepte les triangles dégénérés pour lesquels nous avons $x_B = 0$ ou $y_C = 0$ dans notre représentation. Nous notons alors $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble des triplets $(x_B; x_C; y_C)$ ainsi obtenus.
- Il est facile de justifier que \mathcal{T} est séquentiellement fermé, donc fermé, dans \mathbb{R}^3 . De plus, \mathcal{T} est borné car x_B , x_C et y_C le sont. En résumé, \mathcal{T} est un compact de \mathbb{R}^3 .
- La fonction $s : (x_B; x_C; y_C) \in \mathcal{T} \mapsto 0,5x_By_C \in \mathbb{R}_+$ est la fonction « aire » des triangles représentés. Par continuité et compacité, on sait que s admet un maximum sur \mathcal{T} , un tel maximum ne pouvant pas être atteint pour un triangle dégénéré. Mission accomplie !

Remarque 1.2. La formule de Héron donne qu'un triangle de côtés a , b et c , et de demi-périmètre $s = 0,5p$, possède une aire égale à $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. La comparaison des moyennes géométriques et arithmétiques d'ordre 3 nous donne alors une solution algébrique efficace, puisque de $\sqrt[3]{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}((s-a) + (s-b) + (s-c))$, nous déduisons $s(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{1}{27}s^4$, puis $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{p^2}{12\sqrt{3}}$ où $\frac{p^2}{12\sqrt{3}}$ est l'aire du triangle équilatéral de périmètre p .

Remarque 1.3. L'aire d'un triangle étant positive ou nulle, nous pouvons chercher à maximiser son carré $f(a; b; c) = s(s-a)(s-b)(s-c)$, sous la contrainte $2s = a + b + c$ où $s > 0$ est constant. Notant $g(a; b; c) = a + b + c - 2s$, la contrainte s'écrit $g(a; b; c) = 0$.

- Si un extremum existe, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\partial_a f = \lambda \partial_a g$, $\partial_b f = \lambda \partial_b g$ et $\partial_c f = \lambda \partial_c g$ d'après la méthode des extrema liés.
- Donc $-s(s-b)(s-c) = -s(s-a)(s-c) = -s(s-a)(s-b)$, et par conséquent $(s-b)(s-c) = (s-a)(s-c) = (s-a)(s-b)$.
- Les cas $s = a$, $s = b$ et $s = c$ donnent $f(a; b; c) = 0$.
- Le cas $[s \neq a, s \neq b \text{ et } s \neq c]$ n'est envisageable que si $a = b = c = \frac{p}{3}$, ceci impliquant $f(a; b; c) = \frac{1}{16}p\left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{p^2}{12\sqrt{3}}\right)^2 > 0$.
- En résumé, l'existence d'un maximum implique que ce maximum corresponde au cas du triangle équilatéral.
- Il reste à démontrer qu'un tel maximum existe pour pouvoir conclure : ceci est facile à justifier en considérant l'ensemble compact $[0; 2s]^3$ de \mathbb{R}^3 .

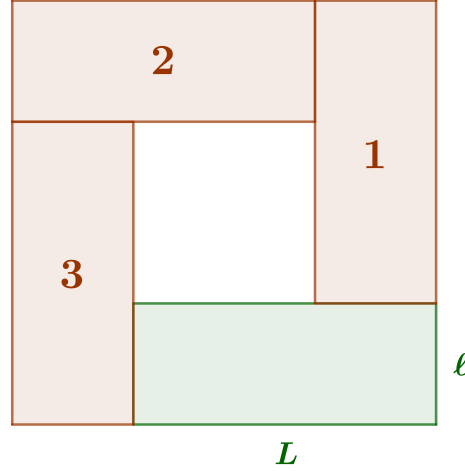
4. Sans cette existence, il se pourrait, par exemple, que le triangle équilatéral soit à part, et que les autres aient des aires augmentant indéfiniment de leur côté, sans mauvais jeu de mots, en dépassant celle du triangle équilatéral qui serait une sorte de maximum local isolé.

2. QUADRILTÈRES

2.1. Les rectangles.

Fait 3. *Considérons tous les rectangles de périmètre fixé p . Parmi tous ces rectangles, un seul est d'aire maximale, c'est le carré de côté $c = 0,25p$.*

Démonstration. Voici une preuve géométrique élémentaire s'appuyant sur le dessin suivant où les rectangles 1, 2 et 3 sont isométriques au rectangle vert étudié de dimension $L \times \ell$.



Le raisonnement tient alors aux constatations suivantes accessibles à un collégien.

- (1) Le grand carré a une aire supérieure ou égale à $4L\ell$, et même strictement si le rectangle initial n'est pas un carré.
- (2) Le grand carré a un périmètre égal à $4(L + \ell)$.
- (3) Une homothétie de rapport 0,5 donne un carré de périmètre $0,5 \times 4(L + \ell) = 2(L + \ell)$, et d'aire supérieure ou égale à $0,5^2 \times 4L\ell = L\ell$, avec inégalité stricte si le rectangle initial n'est pas un carré.

Donc, parmi tous les rectangles de périmètre $p = 2(L + \ell)$ et d'aire $L\ell$, le seul qui puisse avoir une aire maximale est le carré. Joli! Non? \square

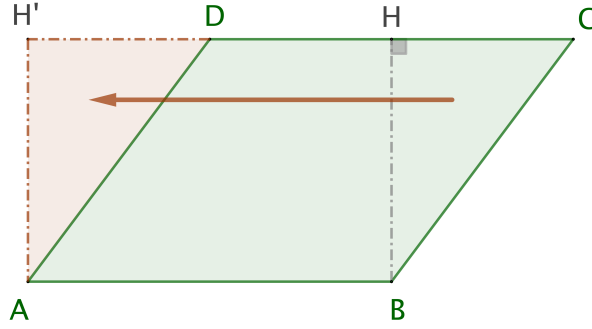
Remarque 2.1. *Une preuve courante est d'exprimer l'aire du rectangle comme un polynôme du 2^e degré en L par exemple. On obtient $L\ell = L(0,5p - L)$ qui est maximale en $L_M = 0,25p$ (moyenne des racines), d'où $\ell_M = 0,25p = L_M$.*

Remarque 2.2. *Au passage, nous avons pour $(L; \ell) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $4L\ell \leq (L + \ell)^2$, c'est-à-dire $2L\ell \leq L^2 + \ell^2$, d'où $\sqrt{L\ell} \leq \sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$, soit la comparaison des moyennes géométriques et quadratiques d'ordre 2.*

2.2. Les parallélogrammes.

Fait 4. *Considérons tous les parallélogrammes de périmètre fixé p . Parmi tous ces parallélogrammes, un seul est d'aire maximale, c'est le carré de côté $c = 0,25p$.*

Démonstration. Le calcul de l'aire d'un parallélogramme, voir le dessin ci-dessous, nous donne $\text{Aire}(ABCD) = \text{Aire}(ABHH')$ et $\text{Perim}(ABCD) \geq \text{Perim}(ABHH')$, avec égalité uniquement si $ABCD$ est un rectangle.



Via une homothétie de rapport $k = \frac{\text{Perim}(ABCD)}{\text{Perim}(ABHH')} \geq 1$, nous obtenons un rectangle de périmètre égal à p , et d'aire supérieure ou égale à $\text{Aire}(ABCD)$, avec égalité uniquement si $ABCD$ est un rectangle. Nous revenons à la situation du fait 3 qui permet de conclure très facilement. \square

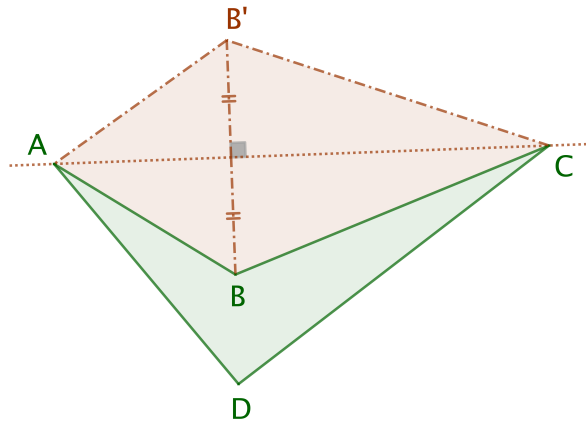
Remarque 2.3. *La recherche d'un parallélogramme de périmètre minimal pour une aire fixée est le problème dual de l'isopérimétrie pour les parallélogrammes.*

Remarque 2.4. *Une méthode analytique devient pénible ici, car il faut par exemple prendre en compte l'angle au sommet A du parallélogramme. L'auteur préfère battre en retraite en clôturant cette remarque ici.*

2.3. Le cas général.

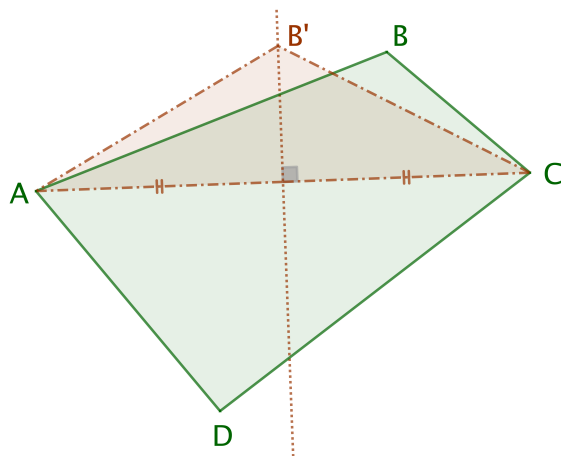
Fait 5. *Considérons tous les quadrilatères de périmètre fixé p . Parmi tous ces quadrilatères, un seul est d'aire maximale, c'est le carré de côté $c = 0,25p$.*

Démonstration. La figure suivante montre que pour tout quadrilatère $ABCD$ non convexe en B , et de périmètre p , il existe un quadrilatère convexe $AB'CD$ de périmètre p , et tel que $\text{Aire}(AB'CD) > \text{Aire}(ABCD)$. Notre recherche doit donc continuer dans l'ensemble des quadrilatères convexes de périmètre p . De tels quadrilatères \mathcal{Q} sont tels que pour toute paire de points M et N de la surface associée à \mathcal{Q} , le segment $[MN]$ est contenu dans cette surface (cette définition se généralise aux polygones).

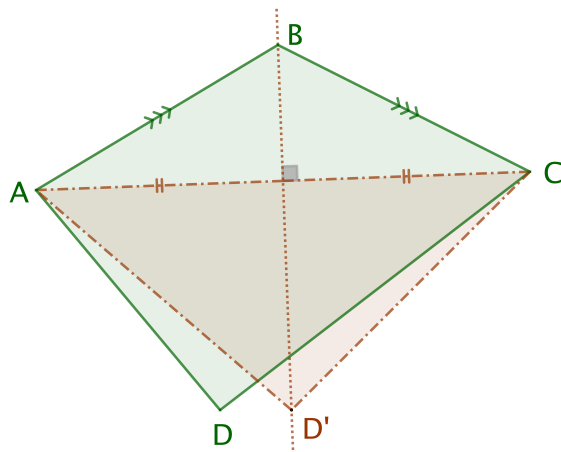


Si un quadrilatère convexe $ABCD$ de périmètre p est tel que $AB \neq BC$, le fait 1 nous donne un quadrilatère convexe $AB'CD$ de périmètre p ,⁵ et vérifiant aussi $AB' = B'C$ et $\text{Aire}(AB'CD) > \text{Aire}(ABCD)$ comme le montre la figure ci-après. On se ramène donc au cas d'un quadrilatère convexe $ABCD$ de périmètre p avec en plus $AB = BC$.

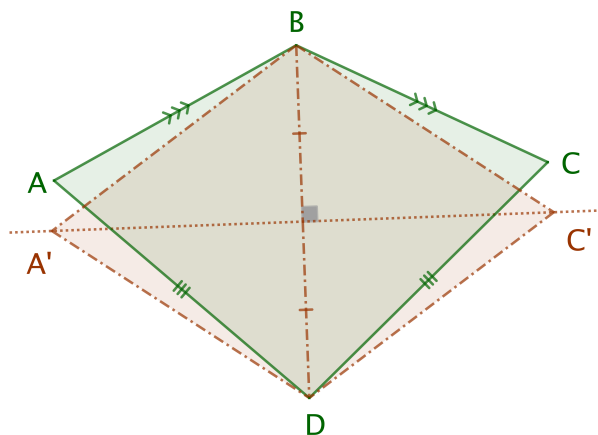
5. Noter que $\text{Perim}(AB'CD) = \text{Perim}(AB'C) + \text{Perim}(ACD) - 2AC$.



La méthode précédente appliquée au sommet D d'un quadrilatère convexe $ABCD$ de périmètre p tel que $AB = BC$ et $AD \neq DC$ permet en fait de se ramener au cas d'un cerf-volant $ABCD$ de périmètre p , avec $AB = BC$ et $AD = DC$, voir ci-dessous.



En supposant que notre cerf-volant ne soit pas un losange, le fait 1 appliqué aux sommets A et C fournit un losange $A'BC'D$ de périmètre p , et tel que $\text{Aire}(A'BC'D) > \text{Aire}(ABCD)$. En effet, nous avons $p = 2(AB + AD)$ et $\text{Perim}(A'BD) = \text{Perim}(ABD)$, donc $A'B = A'D = 0,25p$, et de même, nous obtenons $C'B = C'D = 0,25p$.



Pour conclure, il suffit d'appliquer le fait 4, puisque tout losange est un parallélogramme. Que la géométrie est belle! \square