

# CANDIDAT - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



## TABLE DES MATIÈRES

1. Pourquoi un nouveau document sur l’isopérimétrie ?	2
2. Triangles	2
2.1. Avec un côté fixé	2
2.2. Le cas général	3
2.3. Des preuves courtes non géométriques	4
3. Quadrilatères	5
3.1. Les rectangles	5
3.2. Les parallélogrammes	6
3.3. Le cas général	7
4. Les polygones	8
4.1. Où allons-nous ?	8
4.2. Quelques définitions	8
4.3. Aire algébrique d’un $n$ -cycle	9
4.4. Au moins une solution	13
4.5. Solutions, qui êtes-vous ?	19
4.6. Théorème d’isopérimétrie polygonale	23

Ce document, de niveau élémentaire,<sup>1</sup> s'intéresse au classique problème de l'isopérimétrie plane, c'est-à-dire à la recherche d'une surface plane maximisant son aire pour un périmètre donné. Nous nous limiterons ici au cas des polygones, en privilégiant des démonstrations les plus géométriques possible, et en ne faisant appel à l'analyse qu'en cas de nécessité.<sup>2</sup>

*Afin d'alléger le texte, nous raisonnons parfois modulo des isométries. Ainsi, nous parlerons directement du « carré de côté  $c$  », du « triangle équilatéral de côté  $c$  », etc.*

## 1. POURQUOI UN NOUVEAU DOCUMENT SUR L'ISOPÉRIMÉTRIE ?

Voici quelques apports de ce document.

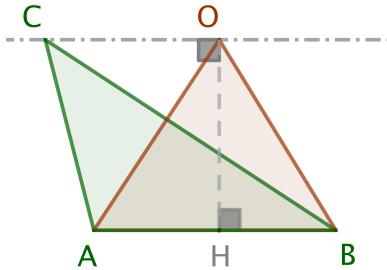
- **Pour les triangles**, l'auteur expose une démonstration ne s'appuyant pas sur le théorème des extrema d'une fonction réelle continue sur un compact. Il propose à la place une construction itérative basique qui, partant d'un triangle quelconque, converge vers le triangle équilatéral, solution du problème d'isopérimétrie pour les triangles.
- **Pour les quadrilatères**, le problème est traité sans aucune utilisation de l'analyse, en s'appuyant uniquement sur des considérations purement géométriques de niveau élémentaire.
- **Pour les polygones à 5 côtés et plus**, l'existence se fera via le basique théorème des extrema d'une fonction réelle continue sur un compact. La caractérisation des solutions optimales sera ensuite faite de façon élémentaires. L'auteur a veillé à ne laisser aucune ellipse explicative dans les démonstrations proposées.

## 2. TRIANGLES

### 2.1. Avec un côté fixé.

**Fait 1.** *Considérons tous les triangles de périmètre fixé, et ayant tous un côté en commun. Parmi tous ces triangles, un seul est d'aire maximale, c'est le triangle isocèle ayant pour base le côté commun.*

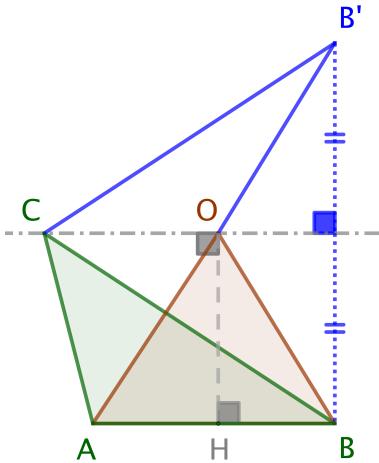
*Démonstration.* Soit  $ABC$  un triangle de périmètre  $p$ , et fixons le côté  $[AB]$ . Pour tout point  $M$  sur la parallèle à  $(AB)$  passant par  $C$ , nous savons que  $\text{Aire}(ABM) = \text{Aire}(ABC)$ . Notons alors  $O$  le point sur cette parallèle tel que  $ABO$  soit isocèle en  $O$ .



Via une symétrie axiale, voir ci-dessous, il est aisément de noter que  $\text{Perim}(ABC) \geq \text{Perim}(ABO)$ , avec égalité uniquement si  $ABC$  est isocèle en  $C$ .<sup>3</sup>

---

1. Cela nous conduira à admettre certains théorèmes qui, bien que paraissant simples, méritent une justification approfondie.  
 2. Un autre point d'attaque est l'usage du plan complexe. Ceci fournit une approche très synthétique.  
 3. Plus précisément, en passant de  $C$  à  $O$ , le périmètre diminue.



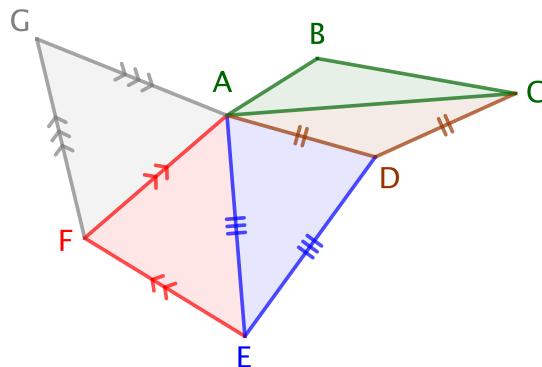
Une dilatation « *verticale* » de rapport  $r = \frac{\text{Perim}(ABC)}{\text{Perim}(ABO)} \geq 1$  donne un triangle isocèle  $ABO'$  tel que  $\text{Perim}(ABO') = p$  et  $\text{Aire}(ABO') \geq \text{Aire}(ABC)$ , avec égalité uniquement si  $ABC$  est isocèle en  $C$ . Contrat rempli!<sup>4</sup>  $\square$

**Remarque 2.1.** La recherche parmi les triangles avec un côté fixé de celui ayant un périmètre minimal pour une aire fixée est le problème dual de l’isopérimétrie pour ces triangles.

## 2.2. Le cas général.

**Fait 2.** Considérons tous les triangles de périmètre fixé  $p$ . Parmi tous ces triangles, un seul est d’aire maximale, c’est le triangle équilatéral de côté  $c = \frac{1}{3}p$ .

*Démonstration.* Nous allons donner une démonstration constructive via une application itérative du fait 1 qui va donner à la limite le triangle équilatéral d’aire maximale, et ceci avec une vitesse de convergence exponentielle.<sup>5</sup> Partons donc d’un triangle  $ABC$  quelconque, mais de périmètre  $p$ , le fait 1 nous donne successivement les triangles  $ACD$ ,  $ADE$  et  $AEF$  isocèles en  $D$ ,  $E$  et  $F$  respectivement, ayant tous pour périmètre  $p$ , et ceci avec des aires de plus en plus grandes. Le dessin suivant amène à conjecturer qu’en poursuivant le procédé pour avoir ensuite un triangle  $AFG$  isocèle en  $G$ ..., nous aboutirons « à la limite » à un triangle équilatéral.



Le passage d’un triangle quelconque  $ABC$  au triangle  $ACD$  isocèle en  $D$  nous amène à nous concentrer sur ce que donne notre procédé d’agrandissement d’aire à périmètre fixé pour des

4. La remarque 2.3 explique comment employer la méthode des extrema liés. Les arguments fournis à cet endroit s’adaptent facilement au cas des triangles de base fixée.

5. Ceci ne va nécessiter que l’emploi de propriétés simples de l’ensemble des réels.

triangles isocèles. Voici ce que nous pouvons affirmer en supposant  $AC > AD$ , comme dans notre exemple (nous allons voir que cette hypothèse est sans conséquence).

- (1) Comme  $AC + 2AD = p$  et  $AC > AD$ , nous avons  $AC > \frac{1}{3}p > AD$ . À l'étape suivante, comme  $AD + 2AE = p$ , nous obtenons  $AD < \frac{1}{3}p < AE$ .
- (2) Pour  $AEF$  isocèle en  $F$ , comme  $AE + 2AF = p$ , nous arrivons à  $AE > \frac{1}{3}p > AF$ .
- (3) Tentons de quantifier les écarts à la mesure pivot  $p' = \frac{1}{3}p$ .
  - Dans  $ACD$ , posant  $AD = p' - \epsilon_1$ , nous avons  $AC = p' + 2\epsilon_1$ .
  - Dans  $ADE$ , posant  $AE = p' + \epsilon_2$ , nous avons  $AD = p' - 2\epsilon_2$ .
  - Dans  $AEF$ , posant  $AF = p' - \epsilon_3$ , nous avons  $AE = p' + 2\epsilon_3$ .
  - Dans  $AFG$ , posant  $AG = p' + \epsilon_4$ , nous avons  $AF = p' - 2\epsilon_4$ .
  - Donc  $\epsilon_2 = \frac{1}{2}\epsilon_1$ ,  $\epsilon_3 = \frac{1}{2}\epsilon_2$  et  $\epsilon_4 = \frac{1}{2}\epsilon_3$ .

Voici les enseignements de ce qui précède en partant d'un triangle  $ABC$  non équilatéral.

- Si  $AC = \frac{1}{3}p$ , dès la 1<sup>re</sup> itération, nous avons un triangle équilatéral d'aire plus grande.
- Si  $AC \neq \frac{1}{3}p$ , notre procédé n'arrivera jamais en un nombre fini d'étapes à un triangle équilatéral. Dans ce cas, le point 3 ci-dessus nous donne une convergence exponentielle des longueurs des côtés vers  $p' = \frac{1}{3}p$ , tout en ayant des aires des plus en plus grandes.

Dans tous les cas, l'aire d'un triangle non équilatéral de périmètre  $p$  est strictement majorée par celle du triangle équilatéral de périmètre  $p$ . Et tout ceci a été obtenu via de la géométrie et de l'analyse élémentaires !  $\square$

### 2.3. Des preuves courtes non géométriques.

Nous donnons ici des preuves courtes du fait 2, mais sans notion géométrique intuitive. Efficacité versus beauté, l'auteur a choisi son camp depuis longtemps !

*Démonstration alternative 1.* Selon la **formule de Héron**,  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  est l'aire d'un triangle de côtés  $a, b, c$  et de demi-périmètre  $s = 0,5p$ . La comparaison des moyennes géométrique et arithmétique<sup>6</sup> donne  $\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}((s-a) + (s-b) + (s-c))$ , puis  $s(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{1}{27}s^4$ , et enfin  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{p^2}{12\sqrt{3}}$  où  $\frac{p^2}{12\sqrt{3}}$  est l'aire du triangle équilatéral de périmètre  $p$ .  $\square$

*Démonstration alternative 2.* Faisons appel à l'**analyse élémentaire aidée du fait 1**. Ce fait permet de se concentrer sur  $ABC$  isocèle en  $C$ . Choisissons un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $A(0; 0)$ ,  $B(AB; 0)$  et  $C(x_C; y_C)$  avec  $y_C \geq 0$ , et posons  $c = AC = BC \neq 0$  et  $s = \frac{p}{2}$ . Donc  $x_B = 2s - 2c \neq 0$ , et  $y_C = \sqrt{c^2 - (s-c)^2}$ , puis  $\text{Aire}(ABC)^2 = (s-c)^2(c^2 - (s-c)^2)$ , soit  $\text{Aire}(ABC)^2 = s(s-c)^2(s-2c)$ .<sup>7</sup> Or, le maximum de la fonction  $\alpha : c \mapsto s(s-c)^2(s-2c)$  est forcément atteint en  $c$  annulant  $\alpha'(c) = -2s(s-c)(s-2c) - 2s(s-c)^2 = 2s(c-s)(2s-3c)$ , soit pour  $c = \frac{2s}{3} = \frac{p}{3}$ , car  $c = s$  est exclu, donc  $ABC$  équilatéral est la solution « optimale ».  $\square$

*Démonstration alternative 3.* Utilisons **juste la continuité et la compacité**.

- On munit le plan d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

---

6. La formule de Héron reste un argument géométrique, mais quid de la comparaison des moyennes géométrique et arithmétique d'ordre 3, généralement justifiée via la concavité de la fonction logarithme. À l'ordre 2, l'inégalité s'obtient aisément par un argument géométrique simple : voir la remarque 3.2.

7. Nous venons de démontrer la formule de Héron dans le cas particulier d'un triangle isocèle.

- Les triangles  $ABC$  tels que  $\text{Perim}(ABC) = p$  sont représentés en posant  $A(0;0)$ ,  $B(AB;0)$  et  $C(x_C;y_C)$  avec  $y_C \geq 0$ . Un triangle peut donc avoir trois représentations, mais peu importe. De plus, on accepte les triangles dégénérés pour lesquels nous avons  $x_B = 0$  ou  $y_C = 0$  dans notre représentation. Nous notons alors  $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$  l'ensemble des triplets  $(x_B; x_C; y_C)$  ainsi obtenus.
- Il est facile de justifier que  $\mathcal{T}$  est séquentiellement fermé dans  $\mathbb{R}^3$ . De plus,  $\mathcal{T}$  est borné car  $x_B$ ,  $x_C$  et  $y_C$  le sont. En résumé,  $\mathcal{T}$  est un compact de  $\mathbb{R}^3$ .
- La fonction  $\alpha : (x_B; x_C; y_C) \in \mathcal{T} \mapsto 0,5x_BY_C \in \mathbb{R}_+$  est la fonction « aire » des triangles représentés. Par continuité et compacité,  $\alpha$  admet un maximum sur  $\mathcal{T}$ .
- Notons  $ABC$  un triangle maximisant  $\alpha$ . Forcément,  $ABC$  n'est pas dégénéré. Le fait 1 implique que  $ABC$  est équilatéral. En effet, dans le cas contraire, il existe un sommet  $X$  en lequel  $ABC$  n'est pas isocèle, mais la « maximalité » de  $ABC$  contredit le fait 1 en considérant comme fixé le côté opposé au sommet  $X$ .  $\square$

*Démonstration alternative 4.* Nous allons faire appel à **la méthode des extrema liés et la formule de Héron**. Pour cela, notons que l'aire d'un triangle étant positive ou nulle, nous pouvons chercher à maximiser son carré  $f(a; b; c) = s(s-a)(s-b)(s-c)$  sous la contrainte  $2s = a + b + c$  où  $s = 0,5p > 0$  est constant. Notant  $g(a; b; c) = a + b + c - 2s$ , la contrainte s'écrit  $g(a; b; c) = 0$ .

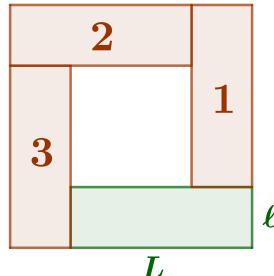
- Si un extremum existe,  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\partial_a f = \lambda \partial_a g$ ,  $\partial_b f = \lambda \partial_b g$  et  $\partial_c f = \lambda \partial_c g$  d'après la méthode des extrema liés.
- Donc  $-s(s-b)(s-c) = -s(s-a)(s-c) = -s(s-a)(s-b)$ , et par conséquent  $(s-b)(s-c) = (s-a)(s-c) = (s-a)(s-b)$ .
- Les cas  $s = a$ ,  $s = b$  et  $s = c$  donnent  $f(a; b; c) = 0$ .
- Le cas  $[s \neq a, s \neq b \text{ et } s \neq c]$  n'est envisageable que si  $a = b = c = \frac{p}{3}$ , ceci impliquant  $f(a; b; c) = \frac{1}{16}p\left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{p^2}{12\sqrt{3}}\right)^2 > 0$ .
- En résumé, l'existence d'un maximum implique que ce maximum corresponde au cas du triangle équilatéral.
- Il reste à démontrer qu'un tel maximum existe pour pouvoir conclure : ceci est facile à justifier en considérant l'ensemble compact  $[0; 2s]^3$  de  $\mathbb{R}^3$ , et la continuité de  $f$ .  $\square$

### 3. QUADRILATÈRES

#### 3.1. Les rectangles.

**Fait 3.** Considérons tous les rectangles de périmètre fixé  $p$ . Parmi tous ces rectangles, un seul est d'aire maximale, c'est le carré de côté  $c = 0,25p$ .

*Démonstration.* Voici une preuve géométrique élémentaire s'appuyant sur le dessin suivant où les rectangles 1, 2 et 3 sont isométriques au rectangle vert étudié de dimension  $L \times \ell$ .



Le raisonnement tient alors aux constatations suivantes accessibles à un collégien.

- (1) Le grand carré a une aire  $(L + \ell)^2$  supérieure ou égale à  $4L\ell$ , et ceci strictement si le rectangle initial n'est pas un carré.
- (2) Le grand carré a un périmètre égal à  $4(L + \ell)$ .
- (3) Une homothétie de rapport 0,5 donne un carré de périmètre  $0,5 \times 4(L + \ell) = 2(L + \ell)$ , et d'aire supérieure ou égale à  $0,5^2 \times 4L\ell = L\ell$ , avec inégalité stricte si le rectangle initial n'est pas un carré.

Donc, parmi tous les rectangles de périmètre  $p = 2(L + \ell)$  et d'aire  $L\ell$ , le seul qui puisse avoir une aire maximale est le carré. Joli ! Non ?  $\square$

**Remarque 3.1.** *Une preuve courante consiste à exprimer l'aire du rectangle comme polynôme du 2<sup>e</sup> degré en  $L$  par exemple. On obtient  $L\ell = L(0,5p - L)$  qui est maximale en  $L_M = 0,25p$  (moyenne des racines), d'où  $\ell_M = 0,25p = L_M$ .*

**Remarque 3.2.** *Nous avons établi que  $4L\ell \leq (L + \ell)^2$  pour  $(L; \ell) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ . Ceci permet de comparer les moyennes arithmétique  $\frac{1}{2}(L + \ell)$ , géométrique  $\sqrt{L\ell}$  et quadratique  $\sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$ .*

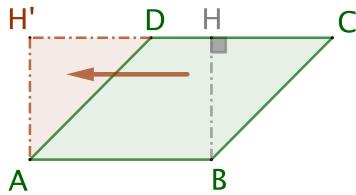
- *L'application de la racine carrée donne  $2\sqrt{L\ell} \leq L + \ell$ , puis  $\sqrt{L\ell} \leq \frac{1}{2}(L + \ell)$ .*
- *Un simple développement fournit  $2L\ell \leq L^2 + \ell^2$ , puis  $\sqrt{L\ell} \leq \sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$ .*
- *On peut faire mieux en notant que  $2L\ell \leq L^2 + \ell^2$  donne  $L^2 + \ell^2 + 2L\ell \leq 2(L^2 + \ell^2)$ , puis  $\frac{1}{4}(L + \ell)^2 \leq \frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)$ , et enfin  $\frac{1}{2}(L + \ell) \leq \sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$ .*

En résumé,  $\sqrt{L\ell} \leq \frac{1}{2}(L + \ell) \leq \sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$  pour  $(L; \ell) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ . Ces inégalités se généralisent à l'ordre  $n$  grâce à l'algèbre, ou l'analyse.

### 3.2. Les parallélogrammes.

**Fait 4.** *Considérons tous les parallélogrammes de périmètre fixé  $p$ . Parmi tous ces parallélogrammes, un seul est d'aire maximale, c'est le carré de côté  $c = 0,25p$ .*

*Démonstration.* Le calcul de l'aire d'un parallélogramme, voir le dessin ci-dessous, nous donne  $\text{Aire}(ABCD) = \text{Aire}(ABHH')$  et  $\text{Perim}(ABCD) \geq \text{Perim}(ABHH')$ , avec égalité uniquement si  $ABCD$  est un rectangle.



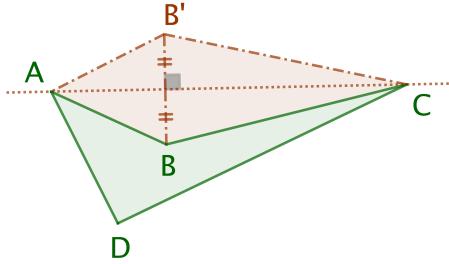
Via une homothétie de rapport  $k = \frac{\text{Perim}(ABCD)}{\text{Perim}(ABHH'')} \geq 1$ , nous obtenons un rectangle de périmètre égal à  $p$ , et d'aire supérieure ou égale à  $\text{Aire}(ABCD)$ , avec égalité uniquement si  $ABCD$  est un rectangle. Nous revenons à la situation du fait 3 qui permet de conclure très facilement.  $\square$

**Remarque 3.3.** *Une méthode analytique devient pénible ici, car il faut par exemple prendre en compte l'angle au sommet A du parallélogramme. L'auteur préfère battre en retraite en clôturant cette remarque ici.*

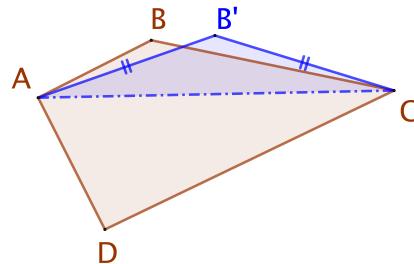
### 3.3. Le cas général.

**Fait 5.** Considérons tous les quadrilatères de périmètre fixé  $p$ . Parmi tous ces quadrilatères, un seul est d'aire maximale, c'est le carré de côté  $c = 0,25p$ .

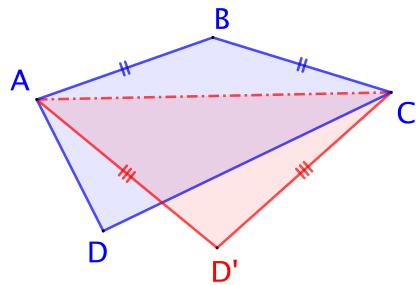
*Démonstration.* Rappelons, ou indiquons, qu'un quadrilatère  $\mathcal{Q}$  est convexe si pour toute paire de points  $M$  et  $N$  de la surface associée à  $\mathcal{Q}$ , le segment  $[MN]$  est contenu dans cette surface (cette définition se généralise aux polygones). La figure suivante montre que pour tout quadrilatère  $ABCD$  non convexe en  $B$ , et de périmètre  $p$ , il existe un quadrilatère convexe  $AB'CD$  de périmètre  $p$ , et tel que  $\text{Aire}(AB'CD) > \text{Aire}(ABCD)$ . Notre recherche doit donc continuer dans l'ensemble des quadrilatères convexes de périmètre  $p$ .



Si un quadrilatère convexe  $ABCD$  de périmètre  $p$  est tel que  $AB \neq BC$ , le fait 1 nous donne un quadrilatère convexe  $AB'CD$  de périmètre  $p$ ,<sup>8</sup> et vérifiant aussi  $AB' = B'C$  et  $\text{Aire}(AB'CD) > \text{Aire}(ABCD)$  comme le montre la figure ci-après. On se ramène donc au cas d'un quadrilatère convexe  $ABCD$  de périmètre  $p$  avec en plus  $AB = BC$ .

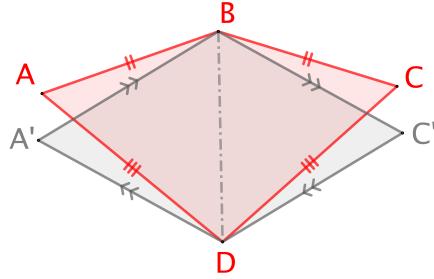


La méthode précédente appliquée au sommet  $D$  d'un quadrilatère convexe  $ABCD$  de périmètre  $p$  tel que  $AB = BC$  et  $AD \neq DC$  permet en fait de se ramener au cas d'un cerf-volant  $ABCD$  de périmètre  $p$ , avec  $AB = BC$  et  $AD = DC$ , voir ci-dessous.



En supposant que notre cerf-volant ne soit pas un losange, le fait 1 appliqué aux sommets  $A$  et  $C$  fournit un losange  $A'BC'D$  de périmètre  $p$ , et tel que  $\text{Aire}(A'BC'D) > \text{Aire}(ABCD)$ . En effet, nous avons  $p = 2(AB+AD)$  et  $\text{Perim}(A'BD) = \text{Perim}(ABD)$ , donc  $A'B = A'D = 0,25p$ , et de même, nous obtenons  $C'B = C'D = 0,25p$ .

8. Noter que  $\text{Perim}(AB'CD) = \text{Perim}(AB'C) + \text{Perim}(ACD) - 2AC$ .



Pour conclure, il suffit d'appliquer le fait 4, puisque tout losange est un parallélogramme. Que la géométrie est belle!  $\square$

#### 4. LES POLYGONES

**4.1. Où allons-nous?** Pour passer au cas des polygones à  $n$  côtés pour  $n \geq 5$ , nous allons mêler analyse, en utilisant par exemple les notions de compacité et de continuité pour l'existence d'une solution, et géométrie, la convexité jouant un rôle essentiel pour la caractérisation de l'unique solution, comme pour les quadrilatères.

**4.2. Quelques définitions.** Pour l'existence d'au moins une solution, nous allons devoir sortir de l'ensemble des polygones en côtoyant des objets plus souples que sont les  $n$ -cycles définis ci-dessous.

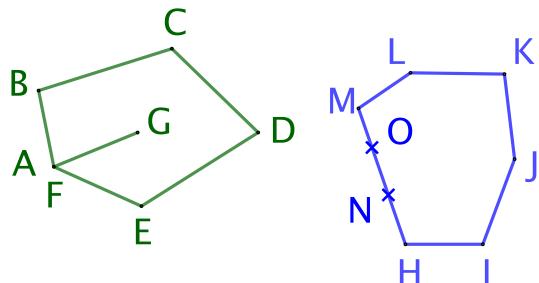
**Définition 1.** Pour  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  uniquement, un «  $n$ -cycle » désigne une liste ordonnée de  $n$  points du plan, les répétitions étant possibles. Nous noterons  $A_1A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle, et appellerons « sommets » du  $n$ -cycle les points  $A_i$  pour  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , et  $A_1$  sera dit « origine » du  $n$ -cycle.

**Définition 2.** Pour tout  $n$ -cycle  $A_1A_2 \cdots A_n$ , on définit  $(A'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  comme étant  $n$ -périodique, et vérifiant  $A'_i = A_i$  sur  $\llbracket 1; n \rrbracket$ .

**Définition 3.** Les « côtés » d'un  $n$ -cycle  $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$  sont les segments  $[A'_i A'_{i+1}]$  pour  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , et la « longueur » de  $\mathcal{L}$  est définie par  $\text{Long}(\mathcal{L}) = \sum_{i=1}^n A'_i A'_{i+1}$ .

**Définition 4.** Un  $n$ -cycle  $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$  est dit « convexe » si, pour chaque côté  $[A'_i A'_{i+1}]$ , tous les sommets de  $\mathcal{L}$  sont dans un même demi-plan fermé délimité par la droite  $(A'_i A'_{i+1})$  (un sommet peut donc être sur cette droite).

**Définition 5.** Un  $n$ -cycle est « dégénéré » s'il a, au moins, trois sommets consécutifs alignés, et « totalement dégénéré » si tous ses sommets sont alignés.



*ABCDEFG* est un 7-cycle ni dégénéré, ni convexe, et qui n'est pas un  $n$ -gone.

*HJKLMNOP* est un 8-cycle dégénéré et convexe.

**Définition 6.** Un «  $n$ -gone »  $\mathcal{P}$  est un  $n$ -cycle vérifiant les conditions suivantes impliquant que les sommets sont distincts deux à deux.

- Les côtés de  $\mathcal{P}$  contiennent tous exactement deux sommets.
- Des côtés non contigus de  $\mathcal{P}$  ne sont jamais sécants.

Si certains côtés non contigus sont sécants en un point, mais tous les sommets distincts deux à deux, nous parlerons de «  $n$ -gone croisé ».<sup>9</sup>

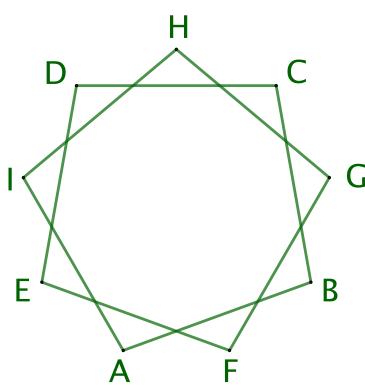
**Définition 7.** Un  $n$ -gone, croisé ou non, est dit « équilatéral » si tous ses côtés sont de même mesure.

**Définition 8.** Un  $n$ -gone, croisé ou non, est dit « équiangle » si tous ses angles au sommet sont de même mesure.

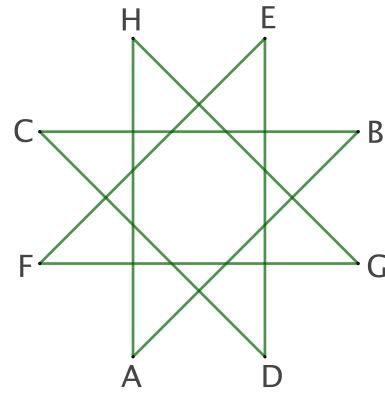
**Définition 9.** Un  $n$ -gone, croisé ou non, est dit « régulier » s'il est à la fois équiangle et équilatéral.

**Remarque 4.1.** Un losange non carré est un  $n$ -gone équilatéral convexe non régulier, et un rectangle non carré est un  $n$ -gone équiangle convexe non régulier.

**Remarque 4.2.** Il existe des  $n$ -gones réguliers et croisés.



Un ennégone régulier croisé dit étoilé.<sup>10</sup>



Un octogone régulier croisé dit étoilé.<sup>11</sup>

**4.3. Aire algébrique d'un  $n$ -cycle.** L'existence d'un  $n$ -gone solution du problème d'isopérimétrie polygonale nécessite un moyen « continu » de calculer une aire polygonale, ou plus généralement celle d'un  $n$ -cycle. Pour ce faire, nous utiliserons l'aire algébrique qui est définie pour tout  $n$ -cycle  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  par  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A_i}, \overrightarrow{\Omega A_{i+1}})$  indépendamment du point  $\Omega$ .<sup>12</sup>

Indiquons au passage qu'il faut être prudent avec cette notion comme le montre l'exemple suivant, obtenu avec **GeoGebra**,<sup>13</sup> où le  $n$ -gone croisé proposé, construit via une spirale positive depuis le point  $A$ ,<sup>14</sup> possède une aire algébrique positive supérieure à celle de l'enveloppe convexe du  $n$ -gone. Contre-intuitif, mais normal.

9. Bien retenir que, par définition, un  $n$ -gone n'est jamais croisé. Dès lors, la longueur d'un  $n$ -gone correspond à son périmètre.

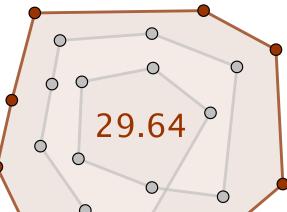
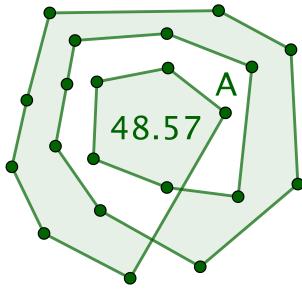
10. La construction se fait via  $AFBGCHDIE$  qui est un 9-gone régulier convexe. Elle se généralise à tout  $n$ -gone régulier tel que  $n$  soit impair.

11. La construction se fait via le 8-gone régulier convexe intérieur. Elle se généralise à tout  $n$ -gone régulier tel que  $n$  soit pair.

12. Ce fait est démontré un peu plus bas.

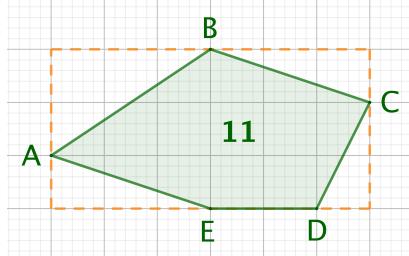
13. Quand **GeoGebra** associe un nombre à un  $n$ -gone croisé, il calcule la valeur absolue de son aire algébrique.

14. En calculant l'aire algébrique avec un point « au centre », les déterminants sont tous positifs.



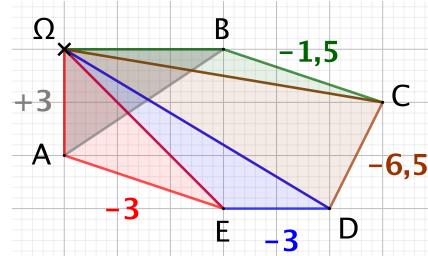
Au commencement étaient les triangles... Il est connu que  $ABC$  est d'aire  $\frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right|$  où  $\frac{1}{2} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  est appelé aire algébrique de  $ABC$ . Pour passer aux polygones, il « suffit » d'utiliser des triangles comme dans l'exemple suivant.

*Calcul direct à la main.*



$$11 = 3 \cdot 6 - \frac{3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{2}$$

*Via le déterminant.*



$$-11 = 3 - 1,5 - 6,5 - 3 - 3$$

Dans le cas précédent, le résultat pourrait dépendre du point  $\Omega$  employé, mais le fait suivant nous montre que non. Bonne nouvelle ! Yapluka...

**Fait 6.** Soit  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle. La quantité  $\mu_1^n(\Omega; \mathcal{L}) = \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}})$  est indépendante du point  $\Omega$ . Dans la suite, cette quantité indépendante de  $\Omega$  sera notée  $\mu_1^n(\mathcal{L})$ .

*Démonstration.* Soit  $M$  un autre point du plan.

$$\mu_1^n(\Omega; \mathcal{L})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{M A'_i}, \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{M A'_{i+1}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \left[ \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{M A'_{i+1}}) + \det(\overrightarrow{M A'_i}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det(\overrightarrow{M A'_i}, \overrightarrow{M A'_{i+1}}) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{M A'_{i+1}}) + \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{M A'_i}, \overrightarrow{\Omega M}) + \mu_1^n(M; \mathcal{L}) \\
&= \mu_1^n(M; \mathcal{L}) + \sum_{i=2}^{n+1} \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{M A'_i}) - \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{M A'_i}) \quad \left. \right) A'_{n+1} = A'_1 \\
&= \mu_1^n(M; \mathcal{L})
\end{aligned}$$

□

**Fait 7.** Soient  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle, et l'une de ses « permutés »  $\mathcal{L}_k = B_1 B_2 \cdots B_n$  défini par  $B_i = A'_{i+k-1}$  pour  $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ . Nous avons  $\mu_1^n(\mathcal{L}) = \mu_1^n(\mathcal{L}_k)$ . Cette quantité commune sera notée  $\mu(\mathcal{L})$ .

*Démonstration.* Il suffit de s'adonner à un petit jeu sur les indices de sommation.  $\square$

**Fait 8.** Soient  $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle, et son  $n$ -cycle « opposé »  $\mathcal{L}^{\text{op}} = B_1B_2 \cdots B_n$  où  $B_i = A_{n+1-i}$ . Nous avons  $\mu(\mathcal{L}^{\text{op}}) = -\mu(\mathcal{L})$ .

*Démonstration.* Soit  $\Omega$  un point quelconque du plan.

$$\mu(\mathcal{L}^{\text{op}})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega B'_i}, \overrightarrow{\Omega B'_{i+1}}) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \det(\overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}, \overrightarrow{\Omega A'_j}) \\ &= - \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_j}, \overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}) \\ &= -\mu(\mathcal{L}) \end{aligned}$$

 $\square$ 

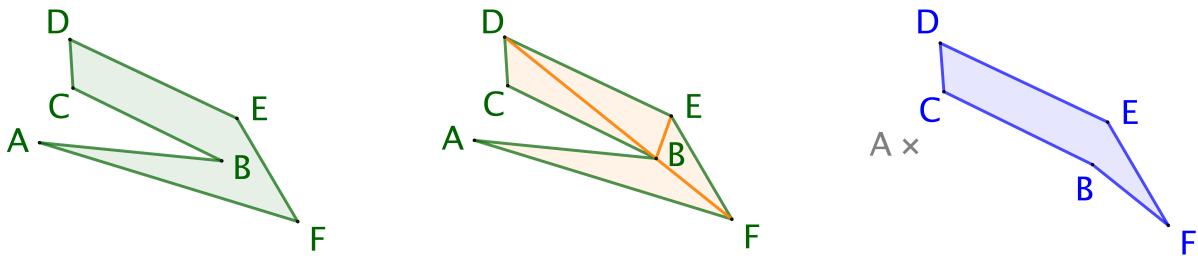
**Fait 9.** Soit  $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle. La quantité  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{L}) = \frac{1}{2}\mu(\mathcal{L})$  ne dépend que du sens de parcours de  $\mathcal{L}$ , mais pas de l'origine.<sup>15</sup> Elle sera appelée « aire algébrique » de  $\mathcal{L}$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence directe des faits 7 et 8.  $\square$

Considérons, maintenant, un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P} = A_1A_2 \cdots A_n$  où les sommets sont parcourus dans le sens anti-horaire. En choisissant l'isobarycentre  $G$  des points  $A_1, A_2, \dots, A_n$  pour calculer  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})$ , nous obtenons  $\text{Aire}(\mathcal{P}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})$  : en effet, avec ce choix, tous les déterminants  $\det(\overrightarrow{GA'_i}, \overrightarrow{GA'_{i+1}})$  sont positifs. Dans le cas non-convexe, les choses se compliquent a priori, car nous ne maîtrisons plus les signes des déterminants. Heureusement, nous avons le résultat essentiel suivant.

**Fait 10.** Soit un  $n$ -gone  $\mathcal{P} = A_1A_2 \cdots A_n$  tel que  $A_1, A_2, \dots, A_n$  soient parcourus dans le sens trigonométrique, ou anti-horaire. Un tel  $n$ -gone sera dit « positif ».<sup>16</sup> Sous cette hypothèse, nous avons  $\mu(\mathcal{P}) \geq 0$ , i.e.  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) \geq 0$ .

*Démonstration.* Le théorème de triangulation affirme que tout  $n$ -gone est triangulable comme dans l'exemple suivant : ceci laisse envisager une démonstration par récurrence en retirant l'un des triangles ayant deux côtés correspondant à deux côtés consécutifs du  $n$ -gone (pour peu qu'un tel triangle existe toujours).



Un  $n$ -gone « nu ».

Le  $n$ -gone triangulé.

Le  $n$ -gone allégé.

Le théorème de triangulation admet une forme forte donnant une décomposition contenant un triangle formé de deux côtés consécutifs du  $n$ -gone.<sup>17</sup> Nous dirons qu'une telle décomposition

15. Le lecteur pardonnera les abus de langage utilisés.

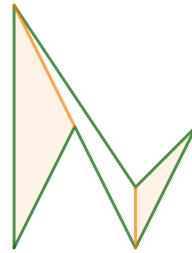
16. De façon cachée, nous utilisons le célèbre théorème de Jordan, dans sa forme polygonale.

17. En pratique, cette forme forte est peu utile, car elle aboutit à un algorithme de recherche trop lent.

est « à l'écoute ». Ce très mauvais jeu de mots fait référence à la notion sérieuse « *d'oreille* » pour un  $n$ -gone : une oreille est un triangle inclus dans le  $n$ -gone, et formé de deux côtés consécutifs du  $n$ -gone. L'exemple suivant donne un  $n$ -gone n'ayant que deux oreilles.<sup>18</sup>



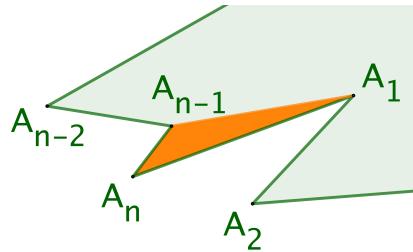
Un  $n$ -gone basique.



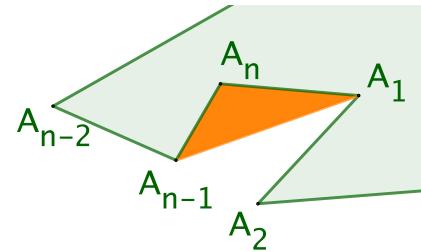
Juste deux oreilles disponibles.

Raisonnons donc par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ .

- **Cas de base.** Soit  $ABC$  un triangle. Dire que les sommets  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont parcourus dans le sens trigonométrique, c'est savoir que  $\mu(ABC) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) > 0$ .
- **Hérédité.** Soit un  $n$ -gone positif  $\mathcal{P} = A_1A_2 \cdots A_n$  avec  $n \in \mathbb{N}_{>3}$ . On peut supposer que  $A_{n-1}A_nA_1$  est une oreille d'une triangulation à l'écoute du  $n$ -gone  $\mathcal{P}$ .



$A_{n-1}A_nA_1$  est une oreille.



$A_{n-1}A_nA_1$  n'est pas une oreille.

Posons  $\mathcal{P}' = A_1 \cdots A_{n-1}$  où  $k = n - 1$  vérifie  $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ . Par hypothèse,  $\mathcal{P}'$  est positif. Nous arrivons aux calculs suivants en utilisant  $A_1$  comme point de calcul de  $\mu(\mathcal{P})$ .

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{P}) &= \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{A_1A'_j}, \overrightarrow{A_1A'_{j+1}}) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \det(\overrightarrow{A_1A_j}, \overrightarrow{A_1A_{j+1}}) \quad \left. \begin{array}{l} A'_{n+1} = A_1 \\ A'_i = A_i \text{ pour } i \leq n \end{array} \right. \\ &= \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_1A_j}, \overrightarrow{A_1A_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A_n}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Pour } \mu(\mathcal{P}'), \text{ noter que} \\ \det(\overrightarrow{A_1A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A_1}) = 0. \end{array} \right. \\ &= \mu(\mathcal{P}') + \mu(A_{n-1}A_nA_1) \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, nous savons que  $\mu(\mathcal{P}') \geq 0$ , et comme  $A_{n-1}A_nA_1$  est une oreille de  $\mathcal{P}$ , la 3-ligne  $A_{n-1}A_nA_1$  est forcément positive, d'où  $\mu(A_{n-1}A_nA_1) \geq 0$  d'après le cas de base. Nous arrivons bien à  $\mu(\mathcal{P}) \geq 0$ , ce qui permet de finir aisément la démonstration par récurrence.  $\square$

**Fait 11.** Pour tout  $n$ -gone  $\mathcal{P}$ , nous avons :  $\text{Aire}(\mathcal{P}) = |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})|$ .

*Démonstration.* Les deux points suivants permettent de faire une preuve par récurrence.

18. On démontre que tout  $n$ -gone admet au minimum deux oreilles.

- **Cas de base.** L'égalité est immédiate pour les triangles (c'est ce qui a motivé la définition de l'aire algébrique).

- **Hérédité.** Soit  $\mathcal{P} = A_1 \cdots A_n$  un  $n$ -gone avec  $n \in \mathbb{N}_{>3}$ . Comme  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}^{\text{op}}) = -\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})$  selon le fait 8, nous pouvons choisir de parcourir  $\mathcal{P}$  positivement, puis de nous placer dans la situation de la démonstration du fait 10 :  $A_{n-1}A_nA_1$  est une oreille positive d'une triangulation à l'écoute du  $n$ -gone  $\mathcal{P}$ , et  $\mathcal{P}' = A_1 \cdots A_{n-1}$  un  $k$ -gone positif où  $k = n - 1$  vérifie  $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ . Nous arrivons finalement aux calculs élémentaires suivants.

$$\begin{aligned}
 & \text{Aire}(\mathcal{P}) \\
 &= \text{Aire}(\mathcal{P}') + \text{Aire}(A_{n-1}A_nA_1) \\
 &= \frac{1}{2}|\mu(\mathcal{P}')| + \frac{1}{2}|\mu(A_{n-1}A_nA_1)| \\
 &= \frac{1}{2}(\mu(\mathcal{P}') + \mu(A_{n-1}A_nA_1)) \\
 &= \frac{1}{2}\mu(\mathcal{P}) \\
 &= \frac{1}{2}|\mu(\mathcal{P})| \\
 &= |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})|
 \end{aligned}$$

□

Finissons par un théorème de continuité qui permettra de justifier l'existence d'au moins une solution au problème d'isopérimétrie polygonale.

**Fait 12.** Soient  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  et  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé direct du plan. On note  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$  l'ensemble des uplets de coordonnées  $(x(A_1); y(A_1); \dots; x(A_n); y(A_n))$  où  $A_1A_2 \cdots A_n$  désigne un  $n$ -cycle, et  $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction qui à un uplet de  $\mathcal{U}$  associe l'aire algébrique du  $n$ -cycle qu'il représente. Avec ces notations, la fonction  $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est continue.

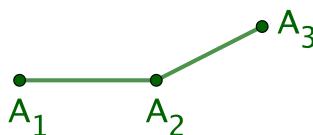
*Démonstration.* Immédiat, car nous avons une fonction polynomiale. □

**4.4. Au moins une solution.** Tout comme pour les quadrilatères, la convexité va jouer un rôle central pour l'isopérimétrie polygonale dans le cas général. Ceci explique que nous allons chercher à justifier l'existence d'au moins un  $n$ -gone convexe d'aire maximale parmi les  $n$ -gones convexes de longueur fixée.

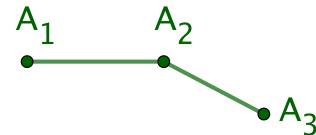
**Fait 13.** Pour tout  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P} = A_1A_2 \cdots A_n$ , l'une des alternatives suivantes a lieu.

- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ , si  $k \notin \{i; i+1\}$ , alors  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) > 0$ .
- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ , si  $k \notin \{i; i+1\}$ , alors  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) < 0$ .

*Démonstration.* Le cas  $n = 3$  des triangles est immédiat. Considérons alors  $\mathcal{P}$  un  $n$ -gone convexe où  $n \geq 4$ . Nous savons que, relativement à  $\mathcal{P}$ , aucun triplet de sommets consécutifs alignés n'existe. Dès lors, dans le plan orienté, les trois premiers sommets sont placés suivant l'une des deux configurations suivantes.



Cas positif.

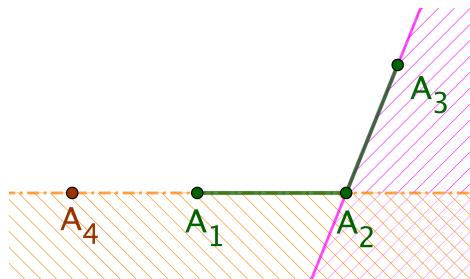


Cas négatif.

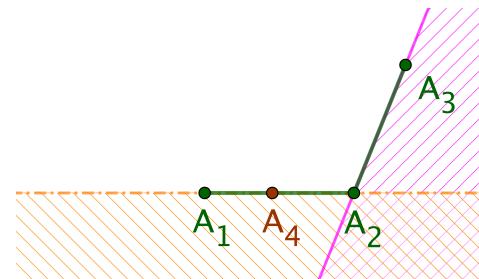
Considérons le cas positif, c'est-à-dire supposons que  $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_3}) > 0$ .

- $\overrightarrow{A'_1 A'_3} = \overrightarrow{A'_1 A'_2} + \overrightarrow{A'_2 A'_3}$  donne  $\det(\overrightarrow{A'_2 A'_3}, \overrightarrow{A'_2 A'_1}) > 0$ .

- Comme  $A_2, A_3$  et  $A_4$  ne sont pas alignés, et de plus  $A_1$  et  $A_4$  du même côté de la droite  $(A_2A_3)$ , au sens large, nous obtenons  $\det(\overrightarrow{A'_2A'_3}, \overrightarrow{A'_2A'_4}) > 0$ .
- En continuant de proche en proche, nous arrivons à  $\det(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_{i+2}}) > 0$  pour  $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$  quelconque.
- Le point précédent et la convexité donnent  $\det(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_k}) \geq 0$  pour  $(i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$  tel que  $k \notin \{i ; i + 1\}$ .
- Montrons maintenant que  $\det(\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_1A'_k}) > 0$  pour  $k \in \llbracket 3 ; n \rrbracket$ . Nous savons déjà l'inégalité vraie pour  $k = 3$ ; passons donc à  $k = 4$ . Pour avoir  $\det(\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_1A'_4}) > 0$ , le point précédent donne qu'il faut vérifier que  $\det(\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_1A'_4}) = 0$  est impossible. Supposons donc l'égalité vraie, ce qui implique d'avoir  $n \geq 5$ , car dans le cas contraire les sommets consécutifs  $A_4, A_1$  et  $A_2$  seraient alignés. Nous aboutissons aux configurations suivantes où les hachures et la droite en trait plein sont des zones interdites pour  $A_4$ .

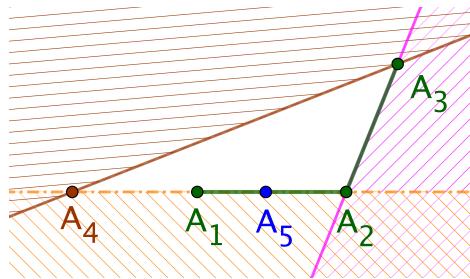


Cas 1.

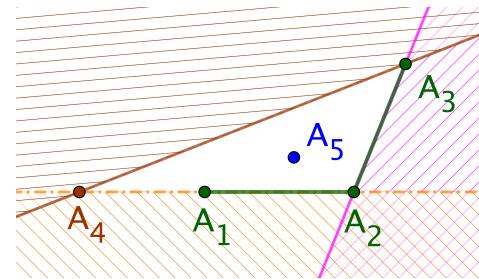


Cas 2.

Le cas 2 est impossible par raison de convexité, car  $A_1$  et  $A_2$  sont de part et d'autre de la droite  $(A_3A_4)$ . Voyons donc ce qu'implique le 1<sup>er</sup> cas pour  $A_5$ .



Cas 1-1.



Cas 1-2.

Le cas 1-2 est impossible par raison de convexité, car  $(A_4A_5)$  sépare les points  $A_3$  et  $A_2$ . Notons que dans le cas 1-1, il est possible d'avoir  $A_5 \in ]A_4A_1[$ . Comme  $A_5 \in (A_1A_2)$ , nous devons avoir  $n \geq 6$ , mais  $A_6$  ne peut être ni à l'intérieur du triangle  $A_2A_3A_4$  par convexité, ni sur la droite  $(A_1A_2)$ , car  $A_4, A_5$  et  $A_6$  ne peuvent pas être alignés. Cette situation contradictoire montre que  $\det(\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_1A'_4}) > 0$ . En continuant de même, de proche en proche, nous arrivons à  $\det(\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_1A'_k}) > 0$  pour  $k \in \llbracket 3 ; n \rrbracket$ .

- En généralisant le raisonnement précédent,<sup>19</sup> nous avons  $\det(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_k}) > 0$  pour tout couple  $(i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$  vérifiant  $k \notin \{i ; i + 1\}$ .

Le cas négatif se traite de façon similaire. □

19. Se souvenir de la définition « cyclique » de la suite  $(A'_i)$ .

Nous allons établir une réciproque élargie du résultat précédent. Ce nouveau fait, le plus technique à justifier, va nous rendre un grand service par la suite.<sup>20</sup>

**Fait 14.** Soit  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle vérifiant l'une des alternatives suivantes.

- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, \det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0.$
- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, \det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \leq 0.$

Sous l'une de ces hypothèses, l'une des assertions ci-après est validée.

i.  $\mathcal{L}$  est totalement dégénéré.

ii. Il existe un  $k$ -gone convexe  $\mathcal{C}$  tel que  $k \leq n$ ,  $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \text{Long}(\mathcal{L})$  et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{L})$ .  $\mathcal{C}$  se construit en retirant, si nécessaire, des sommets de  $\mathcal{L}$ , sans modifier l'ordre de parcours pour les sommets gardés. De plus, si  $A'_i$  et  $A'_k$  sont deux sommets consécutifs de  $\mathcal{C}$ , alors les sommets  $A'_j$ , pour  $j \in \llbracket i ; k \rrbracket$ , sont les seuls situés sur  $[A'_i A'_k]$ .

*Démonstration.* Par symétrie des alternatives, nous pouvons nous concentrer sur le cas positif,<sup>21</sup> c'est-à-dire supposer que  $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, \det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$ . Seul le cas  $\mathcal{L}$  non totalement dégénéré requiert notre attention. L'idée de la construction est simple : il s'agit de chercher des sommets extrémaux, c'est-à-dire qui « forment un angle ». Nous allons raisonner algorithmiquement en utilisant une variable  $i$  initialisée à 1, et une liste  $C$ , initialement vide, pour stocker les sommets « utiles » à la fabrication du  $k$ -gone convexe final.

- A1** Si  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_{i+2}}) > 0$ , nous ajoutons  $A'_{i+1}$  à la fin de la liste  $C$ , puis nous passons directement à l'action **A3**.
- A2** Sinon, il existe  $m \in \mathbb{N}_{>i+2}$  minimal tel que  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_m}) > 0$ , car  $\mathcal{L}$  n'est pas totalement dégénéré.



Nous arrivons aux constatations suivantes.

- Les points  $A'_i$ ,  $A'_{m-1}$  et  $A'_m$  ne sont pas alignés, et par conséquent deux à deux distincts.
- Comme  $\forall j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \det(\overrightarrow{A'_{m-1} A'_m}, \overrightarrow{A'_{m-1} A'_j}) \geq 0$ , nous avons  $A'_j \in (A'_i, A'_{m-1}]$ , pour  $j \in \llbracket i ; m-1 \rrbracket$ .<sup>22</sup>
- L'évaluation de l'aire algébrique via le point de calcul  $A'_{m-1}$  peut se passer des sommets  $A'_j$  pour  $j \in \llbracket i ; m-1 \rrbracket$ , par raison d'alignement.
- Ignorer des sommets, tout en conservant l'ordre de parcours, pour former un nouveau cycle  $\mathcal{L}'$ , donne  $\text{Long}(\mathcal{L}') \leq \text{Long}(\mathcal{L})$ .

20. Pourquoi s'attarder sur des inégalités larges ? Parce que nous allons travailler dans un ensemble compact, et donc fermé, de  $n$ -cycles. Pour garder des  $n$ -gones, nous devrions utiliser des non-égalités, mais ceci nous ferait sortir du cadre fermé qui nous intéresse. Nous n'avons pas le choix !

21. On pourrait aussi invoquer des cycles opposés.

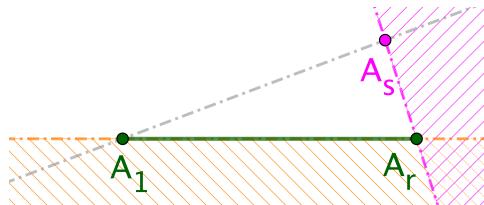
22. Le point  $A'_{m-1}$  est le plus à droite sur notre schéma.

Les constatations précédentes justifient l'ajout de  $A'_{m-1}$  à la fin de la liste  $C$ , uniquement si  $A'_{m-1}$  n'est pas dans cette liste,<sup>23</sup> puis de poser  $i = m - 2$ , puisque nous augmentons  $i$  de 1 juste après.

**A3** Ajoutons 1 à  $i$ . Si  $i \geq n + 1$ , nous avons fini, sinon nous retournons à l'action **A1**.

Commençons par justifier que l'algorithme s'arrête sans entrer dans une boucle infinie. Tant que l'indice  $m$  de l'étape **A2** vérifie  $m \leq n$ , il n'y a aucune difficulté, car  $i$  augmente, et les sommets ajoutés se placent « *avant* » l'origine  $A_1$  du  $n$ -cycle initial  $\mathcal{L}$  sans empiéter sur les « *premiers* » sommets. Supposons avoir  $m \in \llbracket n ; n + i \rrbracket$  pour un indice  $i$ , où forcément  $i > 1$ , et par conséquent  $A'_i$  a été stocké dans la liste  $C$ .

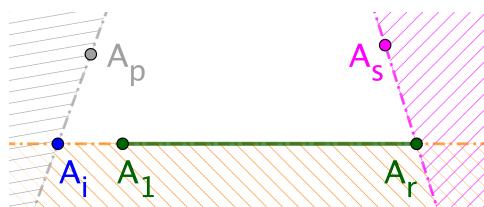
- Commençons par noter l'existence de  $A_1$ ,  $A_r$  et  $A_s$  non alignés avec  $A_r$  et  $A_s$  stockés dans  $C$ . En effet,  $A_r$  vient de l'application de l'algorithme à  $i = 1$ , puis  $A_s$  s'obtient avec  $i = r$ .
- Supposons que  $i = s$ . Pour  $j \in \llbracket s + 1 ; n \rrbracket$ , les points  $A'_j$  sont sur la droite  $(A'_s A'_1)$ , et ensuite plus généralement pour  $j \in \llbracket s ; m \rrbracket$ . Le schéma suivant montre sans ambiguïté qu'alors  $A'_{m-1} = A'_1$ .<sup>24</sup> Dès lors,  $m = n + 2$ , d'où l'ajout de  $A'_1$  à la fin de la liste  $C$ , puis l'arrêt de l'algorithme à l'étape suivante.



- Le raisonnement précédent fonctionne plus généralement lorsque  $A'_i \notin (A'_1 A'_r)$ .
- Il reste le cas où  $A'_i \in (A'_1 A'_r)$ . Ceci nous donne le schéma suivant, où  $A'_i \in [A'_1 A'_r]$  est possible, a priori.



L'algorithme assure l'existence d'un point  $A'_p \notin (A'_1, A'_r)$  stocké dans  $C$  et « *précédent* »  $A'_i$ , tel que tout point entre  $A'_p$  et  $A'_i$  soit sur  $(A'_p A'_i)$ . Nous arrivons au schéma plus précis ci-dessous, où  $A'_1 \in [A'_i, A'_r]$  par positivité large des déterminants  $\det(\overrightarrow{A'_p A'_{p+1}}, \overrightarrow{A'_p A'_k})$ , avec la possibilité d'avoir  $A'_p = A'_s$ .



Ici,  $A'_r$  est déjà présent dans  $C$ , donc l'algorithme s'arrêtera après avoir juste modifié  $i$  en  $(n + r)$ . Notons que les points de  $A'_{i+1}$  à  $A'_{r-1}$  sont « *mangés* » comme attendu.

23. La justification de l'algorithme, donnée un peu plus bas, montrera la possibilité d'avoir un doublon dans la liste  $C$ .

24.  $A'_{m-1} \neq A'_1$  contredirait la condition de positivité large sur les déterminants.

Il faut aussi justifier que la liste  $\mathcal{C}$ , lue de gauche à droite, donnera les sommets du  $k$ -gone convexe  $\mathcal{C}$  cherché.

- Par construction, deux sommets « consécutifs »  $A'_r$  et  $A'_s$  de  $\mathcal{C}$ , sont tels que tout point du cycle initial  $\mathcal{L}$  situé entre  $A'_r$  et  $A'_s$  se trouve sur le segment  $[A'_r A'_s]$ . En ignorant ces points, on fait donc diminuer, au sens large, la longueur du  $n$ -cycle, mais sans modifier la valeur de l'aire algébrique, cette dernière étant calculable depuis  $A'_r$ , ou  $A'_s$ . Donc  $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \text{Long}(\mathcal{L})$  et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{L})$
- Par construction, trois sommets « consécutifs »  $A'_q$ ,  $A'_r$  et  $A'_s$  de  $\mathcal{C}$ , sont tels que  $\det(\overrightarrow{A'_q A'_r}, \overrightarrow{A'_q A'_s}) > 0$ . En particulier, ces trois sommets « consécutifs » ne sont pas alignés. Dès lors,  $\mathcal{C}$  est un  $k$ -gone, et il est aussi convexe.

Pour finir, la preuve ci-dessus de l'algorithme montre que pour  $A'_i$  et  $A'_k$  deux sommets consécutifs de  $\mathcal{C}$ , les sommets  $(A'_j)_{j \in \llbracket i;k \rrbracket}$  sont les seuls situés sur  $[A'_i A'_k]$ .  $\square$

**Remarque 4.3.** La propriété sur les sommets donne un algorithme très simple de construction de  $\mathcal{C}$  lorsque  $\mathcal{L}$  n'est pas totalement dégénéré.

- A1** On pose  $i = 1$ , et on considère une liste vide  $\mathcal{C}$ .
- A2** On pose  $j = i + 1$ , puis tant que  $A'_j = A'_i$ , on augmente  $j$  de 1.
- A3** On pose  $k = j + 1$ , puis tant que  $A'_k \in (A'_i A'_j)$ , on augmente  $k$  de 1.
- A4** Si  $A'_k$  n'est pas dans  $\mathcal{C}$ , on ajoute ce sommet à droite de la liste, on pose  $i = k$ , et on retourne à l'action **A2**.

Le résultat qui suit est juste là pour simplifier la démonstration du fait 16 à venir qui est la raison d'être de cette section.

**Fait 15.** Soient  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ ,  $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé direct du plan et  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$  l'ensemble des uplets de coordonnées  $(x(A_1); y(A_1); \dots; x(A_n); y(A_n))$  où  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  désigne un  $n$ -cycle vérifiant les conditions suivantes.

- $\text{Long}(\mathcal{L}) = \ell$ .
- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ ,  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$ .

Dès lors, la fonction  $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ , qui à un uplet de  $\mathcal{U}$  associe l'aire algébrique du  $n$ -cycle qu'il représente, est une fonction admettant au moins un maximum, qui est positif strict. De plus, un  $n$ -cycle maximisant  $\alpha$  est forcément un  $n$ -gone convexe.

*Démonstration.*  $\mathcal{U}$  est fermé dans  $\mathbb{R}^{2n}$ , car les conditions le définissant le sont, et il est borné, car inclus dans la boule fermée de centre  $O$  et de rayon  $\ell$ , donc  $\mathcal{U}$  est un compact de  $\mathbb{R}^{2n}$ . De plus,  $\alpha$  est continue d'après le fait 12. Donc, par continuité et compacité,  $\alpha$  admet un maximum sur  $\mathcal{U}$ , celui-ci étant positif strict pour les raisons suivantes où  $\mathcal{R}$  désigne un  $n$ -gone régulier convexe.

- Via une translation, nous pouvons supposer  $\mathcal{R}$  d'origine  $O$ .
- $\text{Aire}(\mathcal{R}) = |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R})|$  selon le fait 11, et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}^{\text{op}}) = -\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R})$  d'après le fait 8.
- $\mathcal{R} \in \mathcal{U}$ , ou  $\mathcal{R}^{\text{op}} \in \mathcal{U}$  selon le fait 13.
- Si  $\mathcal{R} \in \mathcal{U}$ , alors  $\mathcal{R}$  est orienté positivement, d'où  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}) \geq 0$ , et par conséquent  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}) = \text{Aire}(\mathcal{R})$  (ceci se démontre aisément en utilisant le centre de gravité de  $\mathcal{R}$  comme point de calcul). Nous avons une propriété similaire si  $\mathcal{R}^{\text{op}} \in \mathcal{U}$ .

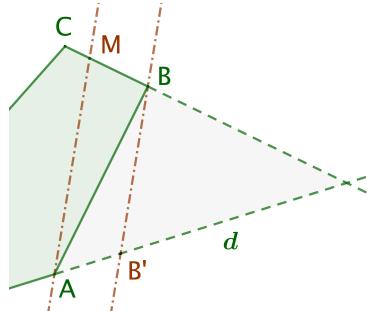
- Enfin, il est connu, et très facile de démontrer, que tout  $n$ -gone régulier convexe  $\mathcal{R}$  vérifie  $\text{Long}(\mathcal{R}) = 2n \sin(\frac{\pi}{n})\rho$  et  $\text{Aire}(\mathcal{R}) = n \sin(\frac{\pi}{n}) \cos(\frac{\pi}{n})\rho^2$  où  $\rho$  est le rayon du cercle circonscrit à  $\mathcal{R}$ . Il existe donc un  $n$ -gone régulier convexe  $\mathcal{R}$  de longueur  $\ell$ , et forcément d'aire non nulle.

Pour finir, justifions que si  $\mathcal{M} \in \mathcal{U}$  maximise  $\alpha$ , alors  $\mathcal{M}$  est forcément un  $n$ -gone convexe. Comme  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{M}) > 0$ ,  $\mathcal{M}$  n'est pas totalement dégénéré, donc nous pouvons considérer le  $k$ -gone convexe  $\mathcal{C}$  donné par le fait 14. Via des arguments similaires à ceux utilisés pour  $\mathcal{R}$ , nous avons  $\text{Aire}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{M})$ . De plus,  $0 < \text{Long}(\mathcal{C}) \leq \text{Long}(\mathcal{M})$ .

- Supposons d'abord  $k = n$ . Si  $\text{Long}(\mathcal{C}) = \text{Long}(\mathcal{M})$ , nous n'avons rien à faire. En fait, il se trouve que  $\text{Long}(\mathcal{C}) < \text{Long}(\mathcal{M})$  est impossible, car une homothétie de rapport  $r > 1$ , où  $r = \frac{\text{Long}(\mathcal{M})}{\text{Long}(\mathcal{C})}$ , donnerait un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{C}'$  vérifiant  $\text{Long}(\mathcal{C}') = \text{Long}(\mathcal{M})$  et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}') > \overline{\text{Aire}}(\mathcal{M})$ , ceci contredisant la maximalité de  $\mathcal{M}$ .
- Pour la suite, nous supposons  $k < n$ , et considérons  $A$ ,  $B$  et  $C$ , trois sommets consécutifs, forcément distincts, du  $k$ -gone  $\mathcal{C}$ .
- Par convexité de  $\mathcal{C}$ , nous avons l'une des deux configurations génériques suivantes où les demi-droites vertes en pointillés, portées par les côtés contigus à  $[AB]$ , « dessinent » avec  $[AB]$  une région grisée qui est ouverte et à l'extérieur de  $\mathcal{C}$ . Sans perte de généralité, nous allons travailler avec la 1<sup>re</sup> configuration.



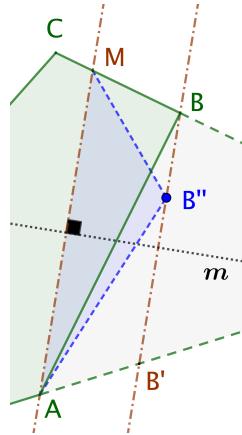
- Considérons alors  $M \in ]BC[$  quelconque pour le moment. Définissons ensuite le point  $B'$  par les contraintes  $(BB') \parallel (AM)$  et  $B' \in d$ , où  $d$  est la droite portant le côté contenant  $A$  et contigu à  $[AB]$ . Par convexité,  $]BB'[$  est inclus dans la zone grisée. La figure suivante représente notre situation.



- Avec la preuve du fait 1 en tête, nous allons imposer d'avoir  $BM < AB$ , ce qui est toujours possible. Dès lors, nommant  $m$  la médiatrice du segment  $[AM]$ , en prenant  $B'' \in ]BB'[$  plus proche de  $m$  que  $B$ ,<sup>25</sup> les conditions suivantes sont validées (voir la figure « zoomée » juste après).

25. Le choix d'avoir  $BM < AB$  donne l'existence de  $B''$ . Par contre, rien n'interdit à  $m$  et  $]BB'[$  de ne jamais se croiser.

- (1)  $AB + MB < AB'' + MB''$  par diminution du périmètre.
- (2)  $\text{Aire}(AMB) = \text{Aire}(AMB'')$  par conservation de l'aire.
- (3) En « remplaçant » dans  $\mathcal{C}$  le sommet  $B$  par  $B''$  et  $M$ , nous avons un  $(k+1)$ -gone convexe  $\mathcal{C}'$ .



- $\mathcal{C}'$  vérifie  $\text{Long}(\mathcal{C}') < \text{Long}(\mathcal{C}) \leq \text{Long}(\mathcal{M})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{C}') = \text{Aire}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{M})$ .
- En répétant  $(n-k-1)$  fois de plus les étapes précédentes, avec  $\mathcal{C}'$  à la place de  $\mathcal{C}$  à chaque fois, nous obtenons un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{C}''$  tel que  $\text{Long}(\mathcal{C}'') < \text{Long}(\mathcal{M})$  et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}'') = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{M})$ . Or, nous savons ceci impossible, donc  $k < n$  ne se peut pas.  $\square$

Nous arrivons au résultat fondamental sur les  $n$ -gones convexes.

**Fait 16.** Soit  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  un naturel fixé. Parmi les  $n$ -gones convexes de longueur fixée, non nulle, il en existe au moins un d'aire maximale.

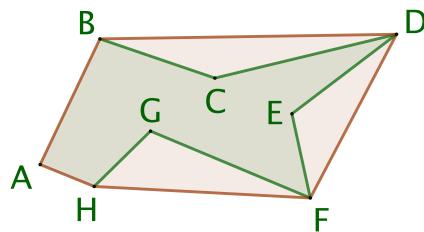
*Démonstration.* Soit un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}$  ayant la longueur fixée. Pour les mêmes raisons que le  $n$ -gone régulier  $\mathcal{R}$  utilisé dans la preuve du fait 15, nous pouvons supposer avoir soit  $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$  et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$ , soit  $\mathcal{P}^{\text{op}} \in \mathcal{U}$  et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}^{\text{op}}) = \text{Aire}(\mathcal{P}^{\text{op}})$ . Comme, de plus,  $\text{Aire}(\mathcal{P}^{\text{op}}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$ , nous pouvons supposer que  $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$ , quitte à échanger  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^{\text{op}}$ . Dès lors, il suffit de faire appel au fait 15 pour conclure.  $\square$

**4.5. Solutions, qui êtes-vous ?** Cette section cherche à caractériser la nature des solutions du problème d'isopérimétrie polygonale.

Les cas  $n = 3$  et  $n = 4$  étant résolus, voir les faits 2 et 5, dans toutes les preuves de cette section, nous supposerons  $n \geq 5$  pour ne pas alourdir le texte.

**Fait 17.** Pour tout  $n$ -gone non convexe  $\mathcal{P}$ , nous pouvons construire un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{C}$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{C}) = \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{C}) > \text{Aire}(\mathcal{P})$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{E}$  l'enveloppe convexe d'un  $n$ -gone non convexe  $\mathcal{P}$  (voir ci-dessous).

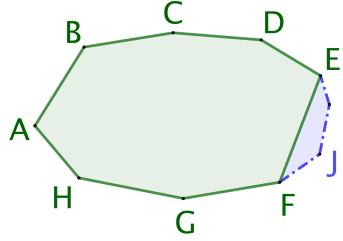


Clairement,  $\text{Perim}(\mathcal{E}) < \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{E}) > \text{Aire}(\mathcal{P})$ , mais  $\mathcal{E}$  est un  $k$ -gone avec  $k < n$ . Pour avoir le bon nombre de sommets, il suffit d'appliquer le fait 18 ci-dessous au convexe  $\mathcal{E}$  avec  $s = n - k$  et  $L = \text{Perim}(\mathcal{P})$ . Ceci nous donne un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{C}'$  vérifiant à la fois  $\text{Aire}(\mathcal{P}) < \text{Aire}(\mathcal{E}) < \text{Aire}(\mathcal{C}')$  et  $\text{Perim}(\mathcal{E}) < \text{Perim}(\mathcal{C}') < \text{Perim}(\mathcal{P})$ . Finalement, une homothétie de rapport  $r > 1$ , où  $r = \frac{\text{Perim}(\mathcal{P})}{\text{Perim}(\mathcal{C}')}$ , donne le  $n$ -gone convexe  $\mathcal{C}$  cherché.  $\square$

Le fait suivant, utilisé dans la preuve précédente, mérite d'être mis en valeur.

**Fait 18.** Si  $\mathcal{P}$  est un  $n$ -gone convexe,  $s \in \mathbb{N}^*$  et  $L \in \mathbb{R}_{>\text{Long}(\mathcal{P})}$ , alors il existe un  $(n + s)$ -gone convexe  $\mathcal{K}$  tel que  $\text{Long}(\mathcal{P}) < \text{Long}(\mathcal{K}) < L$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}) < \text{Aire}(\mathcal{K})$ .

*Démonstration.* Intuitivement, il suffit d'ajouter des points suffisamment proches d'un côté, et à l'extérieur, comme l'illustre la figure suivante.



Pour formaliser proprement notre idée, posons  $\delta = \frac{L - \text{Long}(\mathcal{P})}{s}$  qui est tel que  $\delta > 0$ .

- (1) Considérons  $[AB]$  un côté quelconque de  $\mathcal{P}$ . Les droites portées par les côtés contigus à  $[AB]$  « dessinent » une région contenant toujours un triangle  $ABC$  dont l'intérieur est à l'extérieur<sup>26</sup> de  $\mathcal{P}$  comme dans les deux cas ci-dessous.

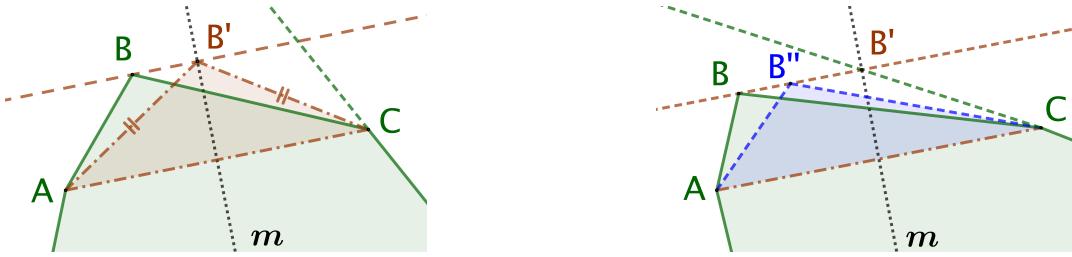


- (2) Clairement, le polygone  $\mathcal{P}_+$  obtenu à partir de  $\mathcal{P}$  en remplaçant le côté  $[AB]$  par les côtés  $[AC]$  et  $[CB]$  est un convexe avec un sommet de plus que  $\mathcal{P}$ .
- (3) Comme  $HC$  peut être rendu aussi proche de 0 que souhaité, il est aisément de voir que nous pouvons choisir cette distance de sorte que  $AC + BC < AB + \delta$ . Dès lors, le périmètre de  $\mathcal{P}_+$  augmente inférieurement strictement à  $\delta$  relativement à  $\mathcal{P}$ .
- (4) En répétant  $(s - 1)$  fois de plus les étapes 1 à 3, avec  $\mathcal{P}_+$  à la place de  $\mathcal{P}$  à chaque fois, nous obtenons un  $(n + s)$ -gone convexe  $\mathcal{K}$  vérifiant à la fois  $\text{Aire}(\mathcal{P}) < \text{Aire}(\mathcal{K})$  et  $\text{Long}(\mathcal{P}) < \text{Long}(\mathcal{K}) < \text{Long}(\mathcal{P}) + s\delta = L$ .  $\square$

**Fait 19.** Si un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}$  n'est pas équilatéral, alors nous pouvons construire un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}'$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$ .

26. C'est ce que l'on appelle de la « low poetry »,.

*Démonstration.* Considérons un  $n$ -gone convexe non équilatéral  $\mathcal{P}$ , de sorte que  $\mathcal{P}$  admet un triplet de sommets consécutifs  $A, B$  et  $C$  tels que  $AB \neq BC$  (sinon, on obtiendrait, de proche en proche, l'équilatéralité). La construction vue dans la preuve du fait 1 nous donne la solution : voir les dessins ci-après dans lesquels  $m$  est la médiatrice du segment  $[AC]$ , et  $(AC) \parallel (BB')$ . Pour le 2<sup>e</sup> cas, il n'est pas possible d'utiliser le triangle  $AB'C$  isocèle en  $B'$ , sinon nous n'aurions plus un  $n$ -gone. Pour ces situations problématiques, il suffit de se « déplacer » un peu sur le segment ouvert  $]BB'[$  en direction de  $m$ .<sup>27</sup>

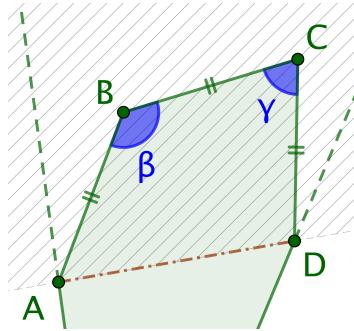


Dans chaque cas, nous avons construit un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}''$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{P}'') < \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}'') = \text{Aire}(\mathcal{P})$ . Une homothétie de rapport  $r > 1$ , où  $r = \frac{\text{Perim}(\mathcal{P})}{\text{Perim}(\mathcal{E})}$ , donne un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}'$  vérifiant  $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$ .  $\square$

**Remarque 4.4.** *Le fait précédent ne permet pas de toujours se ramener au cas d'un  $n$ -gone équilatéral convexe. Il nous dit juste que si un  $n$ -gone convexe maximise son aire à périmètre fixé, alors il devra être, a minima, un  $n$ -gone équilatéral. La nuance est importante, et une similaire existe pour la conclusion du fait suivant.*

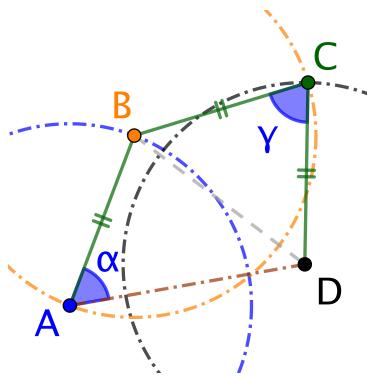
**Fait 20.** *Si un  $n$ -gone équilatéral convexe  $\mathcal{P}$  n'est pas équiangle, alors il existe un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}'$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$ .*

*Démonstration.* Considérons un  $n$ -gone équilatéral convexe non équiangle  $\mathcal{P}$ , de sorte que  $\mathcal{P}$  admet un quadruplet de sommets consécutifs  $A, B, C$  et  $D$  tels que  $\widehat{ABC} \neq \widehat{BCD}$  (sinon, on obtiendrait, de proche en proche, l'équiangularité). Quitte à changer l'ordre de parcours des sommets de  $\mathcal{P}$ , nous pouvons supposer  $\widehat{ABC} > \widehat{BCD}$ .



En déplaçant  $B$  et  $C$  dans la zone grise hachurée, et strictement entre les droites vertes en pointillés, nous garderons un  $n$ -gone convexe. Concentrons-nous donc sur le quadrilatère  $ABCD$ , et posons  $c = AB$  la longueur commune des côtés de  $\mathcal{P}$ , ainsi que  $d = AD$  que nous ne pouvons pas modifier. Si nous fixons la valeur de  $c$ , notre situation possède juste un degré de liberté comme le montre la construction de  $C$  ci-après qui utilise des cercles de rayon  $c$  centrés en  $A$  et  $D$  fixes, et  $B$  mobile.

27. Si besoin, se reporter au 2<sup>e</sup> dessin de la preuve du fait 1.



Cherchons donc à exprimer  $\text{Aire}(ABCD)$  en fonction de  $\alpha = \widehat{DAB}$ , cet angle permettant de repérer le point mobile  $B$ .

- Par convexité, nous avons  $\alpha \in ]0 ; \pi[$  et  $\gamma \in ]0 ; \pi[$ .
- Le théorème d'Al-Kashi donne  $BD^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \alpha$  dans le triangle  $ABD$ , ainsi que  $BD^2 = 2c^2 - 2c^2 \cos \gamma$  dans le triangle  $BCD$ . Donc,  $2 \cos \gamma = 1 - k^2 + 2k \cos \alpha$  où l'on a posé  $k = \frac{d}{c}$ . Notons que l'inégalité triangulaire donne  $d < 3c$ , puis  $0 < k < 3$ .
- La formule trigonométrique de l'aire d'un triangle donne  $\text{Aire}(ABD) = 0,5cd \sin \alpha$  et  $\text{Aire}(BCD) = 0,5c^2 \sin \gamma$ , puis  $\text{Aire}(ABCD) = 0,5c^2(k \sin \alpha + \sin \gamma)$ , de sorte que  $\text{Aire}(ABCD) = 0,5c^2 f(\alpha)$  en posant  $f(\alpha) = k \sin \alpha + \sqrt{1 - 0,25(1 - k^2 + 2k \cos \alpha)^2}$ , car  $\sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma}$ .
- Passons à l'étude de  $f'(\alpha) = 0$ , en nous souvenant que nous n'avons pas besoin d'atteindre le maximum de  $f$ , mais juste de pouvoir faire augmenter localement  $f(\alpha)$ . Dans les implications suivantes, nous avons posé  $S = \sin \alpha$  et  $C = \cos \alpha$ .

$$\begin{aligned}
 f'(\alpha) &= 0 \\
 \xrightarrow{\text{d'où}} \quad kC + \frac{kS(1-k^2+2kC)}{2\sqrt{1-0,25(1-k^2+2kC)^2}} &= 0 \\
 \xrightarrow{\text{d'où}} \quad S(1-k^2+2kC) &= -2C\sqrt{1-0,25(1-k^2+2kC)^2} \\
 \xrightarrow{\text{d'où}} \quad S^2(1-k^2+2kC)^2 &= 4C^2(1-0,25(1-k^2+2kC)^2) \\
 \xrightarrow{\text{d'où}} \quad (1-k^2+2kC)^2(S^2+C^2) &= 4C^2 \\
 \xrightarrow{\text{d'où}} \quad (1-k^2+2kC)^2 - 4C^2 &= 0 \qquad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} C^2 + S^2 = 1 \\
 \xrightarrow{\text{d'où}} \quad (1-k^2+2kC-2C)(1-k^2+2kC+2C) &= 0 \\
 \xrightarrow{\text{d'où}} \quad (1-k)(1+k-2C)(1+k)(1-k+2C) &= 0 \qquad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} k > 0 \\
 \xrightarrow{\text{d'où}} \quad k = 1 \text{ ou } C \in \left\{ \frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2} \right\} &
 \end{aligned}$$

- $k = 1$  signifie que  $ABCD$  est un losange, non rectangle, car  $\widehat{ABC} \neq \widehat{BCD}$ . Dans ce cas, en bougeant un peu le sommet  $B$  parallèlement à  $(AD)$ , tout en faisant augmenter  $\alpha$  légèrement si  $\alpha \in ]0 ; \frac{\pi}{2}[$ , ou diminuer  $\alpha$  légèrement si  $\alpha \in ]\frac{\pi}{2} ; \pi[$ ,<sup>28</sup> nous obtenons un parallélogramme de même aire, mais de périmètre diminué.<sup>29</sup> On obtient au final un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}''$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{P}'') < \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}'') = \text{Aire}(\mathcal{P})$ , qu'il suffit d'agrandir pour conclure.

28.  $B$  se déplace vers la gauche dans notre cas.

29. Si besoin, se reporter à la preuve du fait 4.

- Pour  $k \neq 1$  et  $C = \frac{k-1}{2}$ , nous avons  $2 \cos \alpha = k-1$ , puis  $2 \cos \gamma = 1-k^2+k(k-1) = 1-k$ , soit  $\cos \gamma = -\cos \alpha$  qui fournit  $\gamma = \pi - \alpha$ , en se souvenant que  $(\alpha, \gamma) \in ]0; \pi[^2$ . Notons que  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$  et  $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$ , car  $k \neq 1$ . Nous aboutissons à la contradiction que  $ABCD$  est un trapèze isocèle de bases  $[AD]$  et  $[BC]$ , ceci impliquant  $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$ . L'isocélité vient des points suivants.
  - (1) Notre construction de  $C$  à base de cercles est déterministe, car  $B$  et  $C$  sont situés dans le même demi-plan délimité par  $(AD)$ .
  - (2) Si  $A'B'C'D'$  est un trapèze isocèle de bases  $[A'D']$  et  $[B'C']$ , via la somme des angles aux sommets d'un quadrilatère convexe, qui vaut  $(4-2)\pi = 2\pi$ , nous avons  $\widehat{B'C'D'} = \pi - \widehat{D'A'B'}$ .
  - (3) Comme  $2 \cos \gamma = 1 - k^2 + 2k \cos \alpha$ , nous avons :  $\gamma = \pi - \alpha$  si, et seulement si,  $\cos \alpha = \frac{k-1}{2}$ .
- Pour  $k \neq 1$  et  $C = \frac{k+1}{2}$ , comme au début du point précédent, nous avons  $\cos \gamma = \cos \alpha$ , puis  $\gamma = \alpha$  avec  $(\alpha, \gamma) \in ]0; \pi[^2$ . Notons qu'ici  $0 < k < 1$ , puis  $(\alpha, \gamma) \in ]0; \frac{\pi}{3}[$ . Dès lors, les monotonies de sin et cos sur  $]0; \frac{\pi}{3}[$ , combinées à  $1 - k^2 + 2k \cos \alpha \geq 0$ , impliquent la stricte croissance de  $f$  sur  $]0; \frac{\pi}{3}[$ .<sup>30</sup> Il suffit donc d'augmenter légèrement la valeur de  $\alpha$ .  $\square$

**Remarque 4.5.** Ce qui précède donne envie de faire appel à la méthode des extrema liés pour plus d'élégance, et d'efficacité, dans les calculs, modulo l'utilisation d'un gros théorème. Étudions donc les extrema de  $f(\alpha, \gamma) = k \sin \alpha + \sin \gamma$  sur  $]0; \pi[^2$  sous la contrainte  $g(\alpha, \gamma) = 0$  avec  $g(\alpha, \gamma) = 1 - k^2 + 2k \cos \alpha - 2 \cos \gamma$ . Si un extremum existe, alors nous avons  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\partial_\alpha f = \lambda \partial_\alpha g$  et  $\partial_\gamma f = \lambda \partial_\gamma g$ , de sorte que  $k \cos \alpha = -2k\lambda \sin \alpha$ , soit  $\cos \alpha = -2\lambda \sin \alpha$ , et aussi  $\cos \gamma = 2\lambda \sin \gamma$ . Nous avons alors les deux alternatives suivantes qui rejoignent les arguments de la preuve précédente.

- (1) Si  $\lambda = 0$ , alors  $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{2}$ , puis  $k = 1$ .
- (2) Si  $\lambda \neq 0$ , alors  $\cos \alpha \sin \gamma = -\sin \alpha \cos \gamma$ , puis  $\sin(\alpha + \gamma) = 0$ , et  $\alpha + \gamma = \pi$ .

**Remarque 4.6.** Une démonstration géométrique du fait 20 est possible via un résultat attribué à Zénodore<sup>31</sup> sur la maximisation de l'aire totale de deux triangles isocèles de bases fixées, et de périmètre total constant : ce résultat affirme que les deux triangles doivent avoir des angles en leur sommet principal de même mesure. Malheureusement, cette preuve échoue lors de la disparition d'un sommet en choisissant la paire optimale de triangles isocèles pour construire un nouveau  $n$ -gone « plus gros ».

**Fait 21.** Si  $\mathcal{P}$  est un  $n$ -gone maximisant l'aire parmi les  $n$ -gones de périmètre fixé, alors  $\mathcal{P}$  ne peut être que régulier et convexe.

*Démonstration.* Si  $\mathcal{P}$  n'était pas régulier et convexe, alors soit il ne serait pas convexe, soit il serait convexe, mais pas équilatéral, soit il serait convexe et équilatéral, mais pas équiangle. Or, aucune de ces alternatives n'est possible d'après les faits 17, 19 et 20.  $\square$

#### 4.6. Théorème d'isopérimétrie polygonale.

**Fait 22.** Soit  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  un naturel fixé. Parmi les  $n$ -gones de périmètre fixé, non nul, le  $n$ -gone régulier convexe est le seul à maximiser l'aire.

*Démonstration.* Tout a été dit, il ne reste plus qu'à révéler la vérité.

30. Nous utilisons la composition de fonctions monotones, ce qui n'est pas toujours faisable.

31. La preuve du résultat de Zénodore est un peu fastidieuse.

- (1) Le cas  $n = 3$  correspond au fait 2.
- (2) Le cas  $n = 4$  a été établi dans le fait 5.
- (3) Pour  $n \geq 5$ , il suffit de se rappeler des faits suivants.
  - D'après le fait 16, il existe, au moins, un  $n$ -gone convexe maximisant l'aire parmi les  $n$ -gones convexes de périmètre (longueur) fixé.
  - Selon le fait 21, un  $n$ -gone « *maximal* » ne peut que être régulier et convexe.  $\square$

*Ici s'achève notre joli voyage.*