

BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.

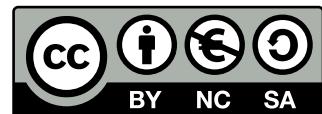


TABLE DES MATIÈRES

1. Les polygones	2
1.1. Où allons-nous ?	2
1.2. Quelques définitions	2
1.3. Aire algébrique d’un n -cycle	3
1.4. Au moins une solution, ou presque	7
1.5. Solutions, qui êtes-vous ?	12
1.6. Théorème d’isopérimétrie polygonal	16

1. LES POLYGONES

1.1. Où allons-nous ? Pour passer au cas des polygones à n côtés pour $n \geq 5$, nous allons mêler analyse, en utilisant par exemple les notions de compacité et de continuité pour l'existence d'une solution, et géométrie, la convexité jouant un rôle essentiel pour la caractérisation de l'unique solution, comme pour les quadrilatères.

1.2. Quelques définitions. Pour l'existence d'au moins une solution, nous allons devoir sortir de l'ensemble des polygones en côtoyant des objets plus souples que sont les n -cycles définis ci-dessous.

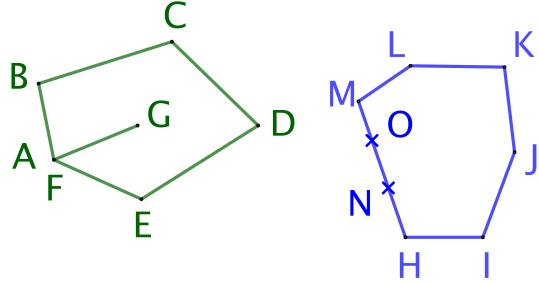
Définition 1. Pour $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ uniquement, un « n -cycle » désigne une liste ordonnée de n points du plan, les répétitions étant possibles. Nous noterons $A_1A_2 \cdots A_n$ un n -cycle, et appellerons « sommets » du n -cycle les points A_i pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, et A_1 sera dit « origine » du n -cycle.

Définition 2. Pour tout n -cycle $A_1A_2 \cdots A_n$, on définit $(A'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ comme étant n -périodique, et vérifiant $A'_i = A_i$ sur $\llbracket 1; n \rrbracket$.

Définition 3. Les « côtés » d'un n -cycle $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ sont les segments $[A'_i A'_{i+1}]$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, et la « longueur » de \mathcal{L} est définie par $\text{Long}(\mathcal{L}) = \sum_{i=1}^n A'_i A'_{i+1}$.

Définition 4. Un n -cycle $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ est dit « convexe » si, pour chaque côté $[A'_i A'_{i+1}]$, tous les sommets de \mathcal{L} sont dans un même demi-plan fermé délimité par la droite $(A'_i A'_{i+1})$ (un sommet peut donc être sur cette droite).

Définition 5. Un n -cycle est « dégénéré » si il a, au moins, trois sommets consécutifs alignés, et « totalement dégénéré » si tous ses sommets sont alignés.



ABCDEFG est un 7-cycle ni dégénéré, ni convexe, et qui n'est pas un n -gone.

HJKLMNOP est un 8-cycle dégénéré et convexe.

Définition 6. Un « n -gone » \mathcal{P} est un n -cycle vérifiant les conditions suivantes impliquant que les sommets sont distincts deux à deux.

- Les côtés de \mathcal{P} contiennent tous exactement deux sommets.
- Des côtés non contigus de \mathcal{P} ne sont jamais sécants.

Si certains côtés non contigus sont sécants en un point, mais tous les sommets distincts deux à deux, nous parlerons de « n -gone croisé ».¹

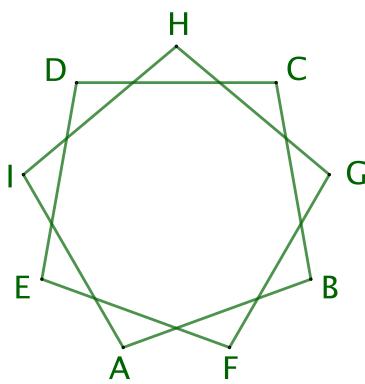
Définition 7. Un n -gone, croisé ou non, est dit « équilatéral » si tous ses côtés sont de même mesure.

Définition 8. Un n -gone, croisé ou non, est dit « équiangle » si tous ses angles au sommet sont de même mesure.

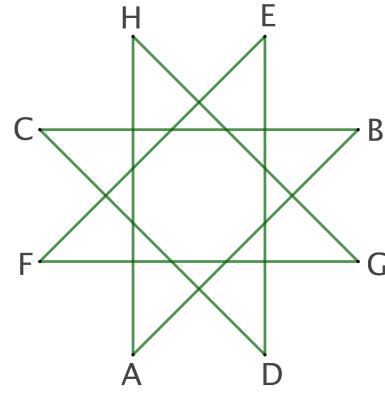
Définition 9. Un n -gone, croisé ou non, est dit « régulier » s'il est à la fois équiangle et équilatéral.

Remarque 1.1. Un losange non carré est un n -gone équilatéral convexe non régulier, et un rectangle non carré est un n -gone équiangle convexe non régulier.

Remarque 1.2. Il existe des n -gones réguliers et croisés.



Un ennégone régulier croisé dit étoilé.²



Un octogone régulier croisé dit étoilé.³

1.3. Aire algébrique d'un n -cycle. L'existence d'un n -gone solution du problème d'isopérimétrie polygonale nécessite un moyen « continu » de calculer une aire polygonale, ou plus généralement celle d'un n -cycle. Pour ce faire, nous utiliserons l'aire algébrique qui est définie pour tout n -cycle $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ par $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A_i}, \overrightarrow{\Omega A_{i+1}})$ indépendamment du point Ω .⁴

Indiquons au passage qu'il faut être prudent avec cette notion comme le montre l'exemple suivant, obtenu avec **GeoGebra**,⁵ où le n -gone croisé proposé, construit via une spirale positive depuis le point A ,⁶ possède une aire algébrique positive supérieure à celle de l'enveloppe convexe du n -gone. Contre-intuitif, mais normal.

1. Bien retenir que, par définition, un n -gone n'est jamais croisé. Dès lors, la longueur d'un n -gone correspond à son périmètre.

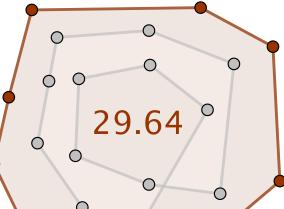
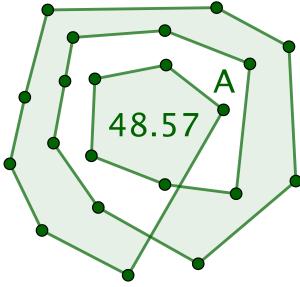
2. La construction se fait via $AFBGCHDIE$ qui est un 9-gone régulier convexe. Elle se généralise à tout n -gone régulier tel que n soit impair.

3. La construction se fait via le 8-gone régulier convexe intérieur. Elle se généralise à tout n -gone régulier tel que n soit pair.

4. Ce fait est démontré un peu plus bas.

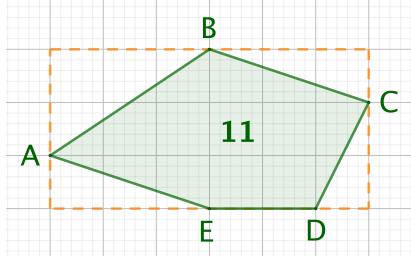
5. Quand **GeoGebra** associe un nombre à un n -gone croisé, il calcule la valeur absolue de son aire algébrique.

6. En calculant l'aire algébrique avec un point « au centre », les déterminants sont tous positifs.



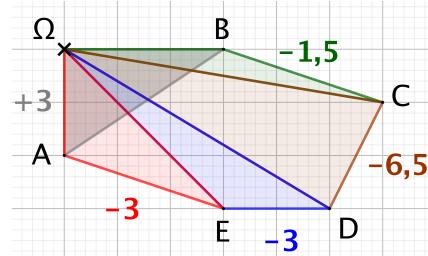
Au commencement étaient les triangles... Il est connu que ABC est d'aire $\frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right|$ où $\frac{1}{2} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est appelé aire algébrique de ABC . Pour passer aux polygones, il « suffit » d'utiliser des triangles comme dans l'exemple suivant.

Calcul direct à la main.



$$11 = 3 \cdot 6 - \frac{3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{2}$$

Via le déterminant.



$$-11 = 3 - 1,5 - 6,5 - 3 - 3$$

Dans le cas précédent, le résultat pourrait dépendre du point Ω employé, mais le fait suivant nous montre que non. Bonne nouvelle ! Yapluka...

Fait 1. Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n -cycle. La quantité $\mu_1^n(\Omega; \mathcal{L}) = \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}})$ est indépendante du point Ω . Dans la suite, cette quantité indépendante de Ω sera notée $\mu_1^n(\mathcal{L})$.

Démonstration. Soit M un autre point du plan.

$$\begin{aligned} & \mu_1^n(\Omega; \mathcal{L}) \\ &= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}}) \\ &= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{M A'_i}, \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{M A'_{i+1}}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{M A'_{i+1}}) + \det(\overrightarrow{M A'_i}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det(\overrightarrow{M A'_i}, \overrightarrow{M A'_{i+1}}) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{M A'_{i+1}}) + \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{M A'_i}, \overrightarrow{\Omega M}) + \mu_1^n(M; \mathcal{L}) \\ &= \mu_1^n(M; \mathcal{L}) + \sum_{i=2}^{n+1} \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{M A'_i}) - \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{M A'_i}) \quad \left. \right\} A'_{n+1} = A'_1 \\ &= \mu_1^n(M; \mathcal{L}) \end{aligned}$$

□

Fait 2. Soient $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n -cycle, et l'une de ses « permutés » $\mathcal{L}_k = B_1 B_2 \cdots B_n$ défini par $B_i = A'_{i+k-1}$ pour $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$. Nous avons $\mu_1^n(\mathcal{L}) = \mu_1^n(\mathcal{L}_k)$. Cette quantité commune sera notée $\mu(\mathcal{L})$.

Démonstration. Il suffit de s'adonner à un petit jeu sur les indices de sommation. \square

Fait 3. Soient $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ un n -cycle, et son n -cycle « opposé » $\mathcal{L}^{\text{op}} = B_1B_2 \cdots B_n$ où $B_i = A_{n+1-i}$. Nous avons $\mu(\mathcal{L}^{\text{op}}) = -\mu(\mathcal{L})$.

Démonstration. Soit Ω un point quelconque du plan.

$$\mu(\mathcal{L}^{\text{op}})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega B'_i}, \overrightarrow{\Omega B'_{i+1}}) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \det(\overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}, \overrightarrow{\Omega A'_j}) \\ &= - \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_j}, \overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}) \\ &= -\mu(\mathcal{L}) \end{aligned}$$

\square

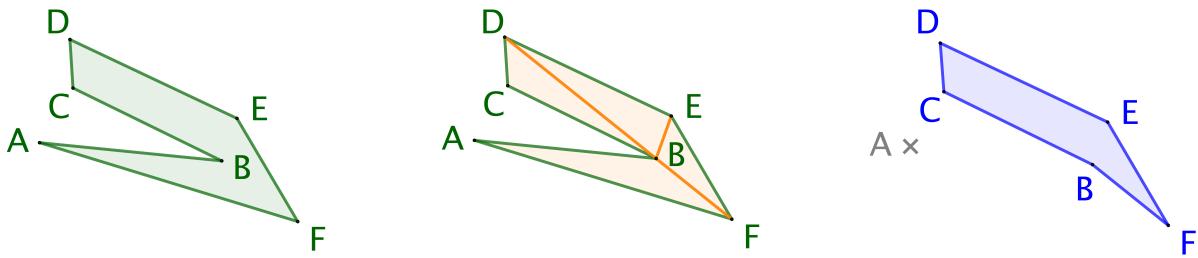
Fait 4. Soit $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ un n -cycle. La quantité $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{L}) = \frac{1}{2}\mu(\mathcal{L})$ ne dépend que du sens de parcours de \mathcal{L} , mais pas de l'origine.⁷ Elle sera appelée « aire algébrique » de \mathcal{L} .

Démonstration. C'est une conséquence directe des faits 2 et 3. \square

Considérons, maintenant, un n -gone convexe $\mathcal{P} = A_1A_2 \cdots A_n$ où les sommets sont parcourus dans le sens anti-horaire. En choisissant l'isobarycentre G des points A_1, A_2, \dots, A_n pour calculer $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})$, nous obtenons $\text{Aire}(\mathcal{P}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})$: en effet, avec ce choix, tous les déterminants $\det(\overrightarrow{GA'_i}, \overrightarrow{GA'_{i+1}})$ sont positifs. Dans le cas non-convexe, les choses se compliquent a priori, car nous ne maîtrisons plus les signes des déterminants. Heureusement, nous avons le résultat essentiel suivant.

Fait 5. Soit un n -gone $\mathcal{P} = A_1A_2 \cdots A_n$ tel que A_1, A_2, \dots, A_n soient parcourus dans le sens trigonométrique, ou anti-horaire. Un tel n -gone sera dit « positif ».⁸ Sous cette hypothèse, nous avons $\mu(\mathcal{P}) \geq 0$, i.e. $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) \geq 0$.

Démonstration. Le théorème de triangulation affirme que tout n -gone est triangulable comme dans l'exemple suivant : ceci laisse envisager une démonstration par récurrence en retirant l'un des triangles ayant deux côtés correspondant à deux côtés consécutifs du n -gone (pour peu qu'un tel triangle existe toujours).



Un n -gone « nu ».

Le n -gone triangulé.

Le n -gone allégé.

Le théorème de triangulation admet une forme forte donnant une décomposition contenant un triangle formé de deux côtés consécutifs du n -gone.⁹ Nous dirons qu'une telle décomposition

7. Le lecteur pardonnera les abus de langage utilisés.

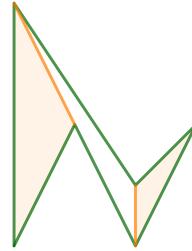
8. De façon cachée, nous utilisons le célèbre théorème de Jordan, dans sa forme polygonale.

9. En pratique, cette forme forte est peu utile, car elle aboutit à un algorithme de recherche trop lent.

est « à l'écoute ». Ce très mauvais jeu de mots fait référence à la notion sérieuse « *d'oreille* » pour un n -gone : une oreille est un triangle inclus dans le n -gone, et formé de deux côtés consécutifs du n -gone. L'exemple suivant donne un n -gone n'ayant que deux oreilles.¹⁰



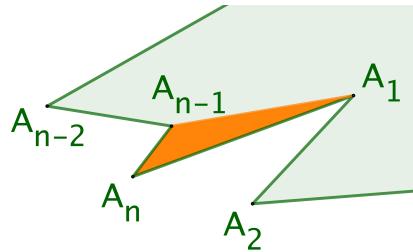
Un n -gone basique.



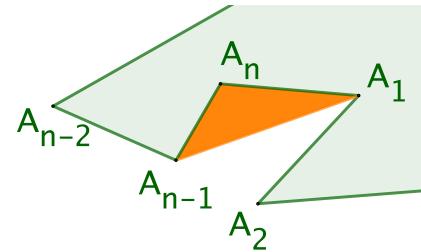
Juste deux oreilles disponibles.

Raisonnons donc par récurrence sur $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

- **Cas de base.** Soit ABC un triangle. Dire que les sommets A , B et C sont parcourus dans le sens trigonométrique, c'est savoir que $\mu(ABC) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) > 0$.
- **Hérédité.** Soit un n -gone positif $\mathcal{P} = A_1A_2 \cdots A_n$ avec $n \in \mathbb{N}_{>3}$. On peut supposer que $A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille d'une triangulation à l'écoute du n -gone \mathcal{P} .



$A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille.



$A_{n-1}A_nA_1$ n'est pas une oreille.

Posons $\mathcal{P}' = A_1 \cdots A_{n-1}$ où $k = n - 1$ vérifie $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Par hypothèse, \mathcal{P}' est positif. Nous arrivons aux calculs suivants en utilisant A_1 comme point de calcul de $\mu(\mathcal{P})$.

$$\mu(\mathcal{P})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{A_1A'_j}, \overrightarrow{A_1A'_{j+1}}) \quad \left. \begin{array}{l} A'_1 = A_1 \\ A'_i = A_i \text{ pour } i \leq n \end{array} \right. \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \det(\overrightarrow{A_1A_j}, \overrightarrow{A_1A_{j+1}}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Pour } \mu(\mathcal{P}'), \text{ noter que} \\ \det(\overrightarrow{A_1A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A_1}) = 0. \end{array} \right. \\ &= \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_1A_j}, \overrightarrow{A_1A_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A_n}) \\ &= \mu(\mathcal{P}') + \mu(A_{n-1}A_nA_1) \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, nous savons que $\mu(\mathcal{P}') \geq 0$, et comme $A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille de \mathcal{P} , la 3-ligne $A_{n-1}A_nA_1$ est forcément positive, d'où $\mu(A_{n-1}A_nA_1) \geq 0$ d'après le cas de base. Nous arrivons bien à $\mu(\mathcal{P}) \geq 0$, ce qui permet de finir aisément la démonstration par récurrence. \square

Fait 6. Pour tout n -gone \mathcal{P} , nous avons : $\text{Aire}(\mathcal{P}) = |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})|$.

Démonstration. Les deux points suivants permettent de faire une preuve par récurrence.

10. On démontre que tout n -gone admet au minimum deux oreilles.

- **Cas de base.** L'égalité est immédiate pour les triangles (c'est ce qui a motivé la définition de l'aire algébrique).

- **Hérédité.** Soit $\mathcal{P} = A_1 \cdots A_n$ un n -gone avec $n \in \mathbb{N}_{>3}$. Comme $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}^{\text{op}}) = -\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})$ selon le fait 3, nous pouvons choisir de parcourir \mathcal{P} positivement, puis de nous placer dans la situation de la démonstration du fait 5 : $A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille positive d'une triangulation à l'écoute du n -gone \mathcal{P} , et $\mathcal{P}' = A_1 \cdots A_{n-1}$ un k -gone positif où $k = n - 1$ vérifie $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Nous arrivons finalement aux calculs élémentaires suivants.

$$\begin{aligned}
 & \text{Aire}(\mathcal{P}) \\
 &= \text{Aire}(\mathcal{P}') + \text{Aire}(A_{n-1}A_nA_1) \\
 &= \frac{1}{2}|\mu(\mathcal{P}')| + \frac{1}{2}|\mu(A_{n-1}A_nA_1)| \\
 &= \frac{1}{2}(\mu(\mathcal{P}') + \mu(A_{n-1}A_nA_1)) \\
 &= \frac{1}{2}\mu(\mathcal{P}) \\
 &= \frac{1}{2}|\mu(\mathcal{P})| \\
 &= |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})|
 \end{aligned}$$

□

Finissons par un théorème de continuité qui permettra de justifier l'existence d'au moins une solution au problème d'isopérimétrie polygonale.

Fait 7. Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ et $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan. On note $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des uplets de coordonnées $(x(A_1); y(A_1); \dots; x(A_n); y(A_n))$ où $A_1A_2 \cdots A_n$ désigne un n -cycle, et $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction qui à un uplet de \mathcal{U} associe l'aire algébrique du n -cycle qu'il représente. Avec ces notations, la fonction $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue.

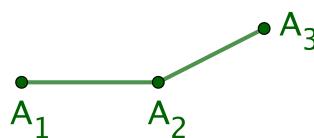
Démonstration. Immédiat, car nous avons une fonction polynomiale. □

1.4. Au moins une solution, ou presque. Le cas des quadrilatères a montré que la convexité était un ingrédient central. Ceci sera aussi le cas pour les n -gones, bien que moins immédiat à justifier, comme nous le verrons dans le fait ??, dont la preuve est indépendante des résultats de cette section. Ceci explique que nous allons chercher à justifier l'existence d'au moins un n -gone convexe d'aire maximale parmi les n -gones convexes de longueur fixée. Nous allons presque y arriver...

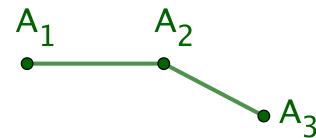
Fait 8. Pour tout n -gone convexe $\mathcal{P} = A_1A_2 \cdots A_n$, l'une des alternatives suivantes a lieu.

- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, si $k \notin \{i; i+1\}$, alors $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) > 0$.
- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, si $k \notin \{i; i+1\}$, alors $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) < 0$.

Démonstration. Le cas $n = 3$ des triangles est immédiat. Considérons alors \mathcal{P} un n -gone convexe où $n \geq 4$. Nous savons que, relativement à \mathcal{P} , aucun triplet de sommets consécutifs alignés n'existe. Dès lors, dans le plan orienté, les trois premiers sommets sont placés suivant l'une des deux configurations suivantes.



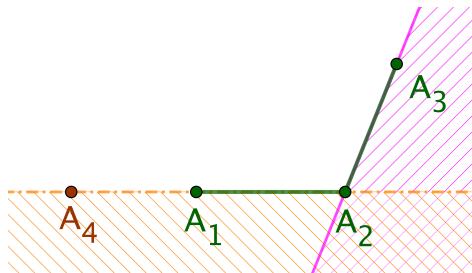
Cas positif.



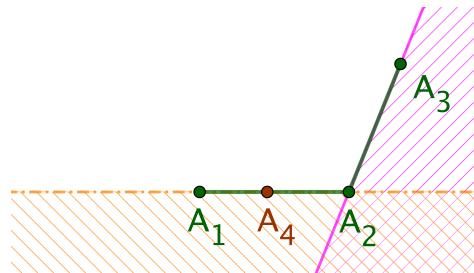
Cas négatif.

Considérons le cas positif, c'est-à-dire supposons que $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_3}) > 0$.

- $\overrightarrow{A'_1 A'_3} = \overrightarrow{A'_1 A'_2} + \overrightarrow{A'_2 A'_3}$ donne $\det(\overrightarrow{A'_2 A'_3}, \overrightarrow{A'_1 A'_2}) > 0$.
- Comme A_2, A_3 et A_4 ne sont pas alignés, et de plus A_1 et A_4 du même côté de la droite $(A_2 A_3)$, au sens large, nous obtenons $\det(\overrightarrow{A'_2 A'_3}, \overrightarrow{A'_2 A'_4}) > 0$.
- En continuant de proche en proche, nous arrivons à $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_{i+2}}) > 0$ pour $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ quelconque.
- Le point précédent et la convexité donnent $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$ pour $(i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ tel que $k \notin \{i ; i+1\}$.
- Montrons maintenant que $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_k}) > 0$ pour $k \in \llbracket 3 ; n \rrbracket$. Nous savons déjà l'inégalité vraie pour $k = 3$; passons donc à $k = 4$. Pour avoir $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_4}) > 0$, le point précédent donne qu'il faut vérifier que $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_4}) = 0$ est impossible. Supposons donc l'égalité vraie, ce qui implique d'avoir $n \geq 5$, car dans le cas contraire les sommets consécutifs A_4, A_1 et A_2 seraient alignés. Nous aboutissons aux configurations suivantes où les hachures et la droite en trait plein sont des zones interdites pour A_4 .

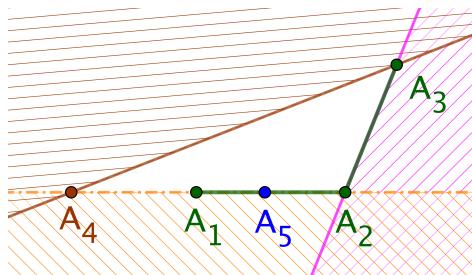


Cas 1.

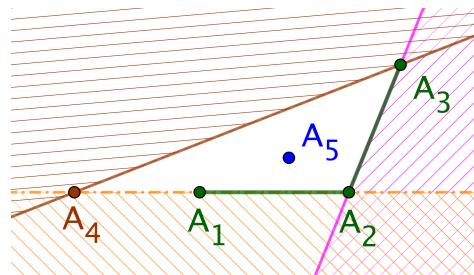


Cas 2.

Le cas 2 est impossible par raison de convexité, car A_1 et A_2 sont de part et d'autre de la droite $(A_3 A_4)$. Voyons donc ce qu'implique le 1^{er} cas pour A_5 .



Cas 1-1.



Cas 1-2.

Le cas 1-2 est impossible par raison de convexité, car $(A_4 A_5)$ sépare les points A_3 et A_2 . Notons que dans le cas 1-1, il est possible d'avoir $A_5 \in]A_4 A_1[$. Comme $A_5 \in (A_1 A_2)$, nous devons avoir $n \geq 6$, mais A_6 ne peut être ni à l'intérieur du triangle $A_2 A_3 A_4$ par convexité, ni sur la droite $(A_1 A_2)$, car A_4, A_5 et A_6 ne peuvent pas être alignés. Cette situation contradictoire montre que $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_4}) > 0$. En continuant de même, de proche en proche, nous arrivons à $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_k}) > 0$ pour $k \in \llbracket 3 ; n \rrbracket$.

- En généralisant le raisonnement précédent,¹¹ nous avons $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) > 0$ pour tout couple $(i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ vérifiant $k \notin \{i ; i+1\}$.

11. Se souvenir de la définition « cyclique » de la suite (A'_i) .

Le cas négatif se traite de façon similaire. \square

Nous allons établir une réciproque élargie du résultat précédent. Ce nouveau fait, le plus technique à justifier, va nous rendre un grand service par la suite.¹²

Fait 9. Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n -cycle vérifiant l'une des alternatives suivantes.

- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$.
- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \leq 0$.

Sous l'une de ces hypothèses, l'une des assertions ci-après est validée.

i. \mathcal{L} est totalement dégénéré.

ii. Il existe un k -gone convexe \mathcal{C} tel que $k \leq n$, $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \text{Long}(\mathcal{L})$ et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{L})$. \mathcal{C} se construit en retirant, si nécessaire, des sommets de \mathcal{L} , sans modifier l'ordre de parcours pour les sommets gardés.

Démonstration. Par symétrie des alternatives, nous pouvons nous concentrer sur le cas positif,¹³ c'est-à-dire supposer que $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$. Seul le cas \mathcal{L} non totalement dégénéré requiert notre attention. L'idée de la construction est simple : il s'agit de chercher des sommets extrémaux, c'est-à-dire qui « forment un angle ». Nous allons raisonner algorithmiquement en utilisant une variable i initialisée à 1, et une liste C , initialement vide, pour stocker les sommets « utiles » à la fabrication du k -gone convexe final.

- A1** Si $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_{i+2}}) > 0$, nous ajoutons A'_{i+1} à la fin de la liste C , puis nous passons directement à l'action **A3**.
- A2** Sinon, il existe $m \in \mathbb{N}_{>i+2}$ minimal tel que $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_m}) > 0$, car \mathcal{L} n'est pas totalement dégénéré.



Nous arrivons aux constatations suivantes.

- Les points A'_i , A'_{m-1} et A'_m ne sont pas alignés, et par conséquent deux à deux distincts.
- Comme $\forall j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $\det(\overrightarrow{A'_{m-1} A'_m}, \overrightarrow{A'_{m-1} A'_j}) \geq 0$, nous avons $A'_j \in (A'_i, A'_{m-1}]$, pour $j \in \llbracket i ; m-1 \rrbracket$.¹⁴
- L'évaluation de l'aire algébrique via le point de calcul A'_{m-1} peut se passer des sommets A'_j pour $j \in \llbracket i ; m-1 \rrbracket$, par raison d'alignement.
- Ignorer des sommets, tout en conservant l'ordre de parcours, pour former un nouveau cycle \mathcal{L}' , donne $\text{Long}(\mathcal{L}') \leq \text{Long}(\mathcal{L})$.

12. Pourquoi s'attarder sur des inégalités larges ? Parce que nous allons travailler dans un ensemble compact, et donc fermé, de n -cycles. Pour garder des n -gones, nous devrions utiliser des non-égalités, mais ceci nous ferait sortir du cadre fermé qui nous intéresse. Nous n'avons pas le choix !

13. On pourrait aussi invoquer des cycles opposés.

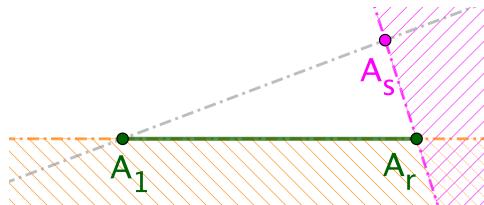
14. Le point A'_{m-1} est le plus à droite sur notre schéma.

Les constatations précédentes justifient l'ajout de A'_{m-1} à la fin de la liste C , uniquement si A'_{m-1} n'est pas dans cette liste,¹⁵ puis de poser $i = m - 2$, puisque nous augmentons i de 1 juste après.

A3 Ajoutons 1 à i . Si $i \geq n + 1$, nous avons fini, sinon nous retournons à l'action **A1**.

Commençons par justifier que l'algorithme s'arrête sans entrer dans une boucle infinie. Tant que l'indice m de l'étape **A2** vérifie $m \leq n$, il n'y a aucune difficulté, car i augmente, et les sommets ajoutés se placent « *avant* » l'origine A_1 du n -cycle initial \mathcal{L} sans empiéter sur les « *premiers* » sommets. Supposons avoir $m \in \llbracket n ; n + i \rrbracket$ pour un indice i , où forcément $i > 1$, et par conséquent A'_i a été stocké dans la liste C .

- Commençons par noter l'existence de A_1 , A_r et A_s non alignés avec A_r et A_s stockés dans C . En effet, A_r vient de l'application de l'algorithme à $i = 1$, puis A_s s'obtient avec $i = r$.
- Supposons que $i = s$. Pour $j \in \llbracket s + 1 ; n \rrbracket$, les points A'_j sont sur la droite $(A'_s A'_1)$, et ensuite plus généralement pour $j \in \llbracket s ; m \rrbracket$. Le schéma suivant montre sans ambiguïté qu'alors $A'_{m-1} = A'_1$.¹⁶ Dès lors, $m = n + 2$, d'où l'ajout de A'_1 à la fin de la liste C , puis l'arrêt de l'algorithme à l'étape suivante.



- Le raisonnement précédent fonctionne plus généralement lorsque $A'_i \notin (A'_1 A'_r)$.
- Il reste le cas où $A'_i \in (A'_1 A'_r)$. Ceci nous donne le schéma suivant, où $A'_i \in [A'_1 A'_r]$ est possible, a priori.



L'algorithme assure l'existence d'un point $A'_p \notin (A'_1, A'_r)$ stocké dans C et « *précédent* » A'_i , tel que tout point entre A'_p et A'_i soit sur $(A'_p A'_i)$. Nous arrivons au schéma plus précis ci-dessous, où $A'_1 \in [A'_i, A'_r]$ par positivité large des déterminants $\det(\overrightarrow{A'_p A'_{p+1}}, \overrightarrow{A'_p A'_k})$, avec la possibilité d'avoir $A'_p = A'_s$.



Ici, A'_r est déjà présent dans C , donc l'algorithme s'arrêtera après avoir juste modifié i en $(n + r)$. Notons que les points de A'_{i+1} à A'_{r-1} sont « *mangés* » comme attendu.

15. La justification de l'algorithme, donnée un peu plus bas, montrera la possibilité d'avoir un doublon dans la liste C .

16. $A'_{m-1} \neq A'_1$ contredirait la condition de positivité large sur les déterminants.

Il reste à justifier que la liste C qui, lue de gauche à droite, donnera les sommets du k -gone convexe \mathcal{C} cherché.

- Par construction, deux sommets « consécutifs » A'_r et A'_s de \mathcal{C} , sont tels que tout point du cycle initial \mathcal{L} situé entre A'_r et A'_s se trouve sur le segment $[A'_r A'_s]$. En ignorant ces points, on fait donc diminuer, au sens large, la longueur du n -cycle, mais sans modifier la valeur de l'aire algébrique, cette dernière étant calculable depuis A'_r , ou A'_s . Donc $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \text{Long}(\mathcal{L})$ et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{L})$
- Par construction, trois sommets « consécutifs » A'_q , A'_r et A'_s de \mathcal{C} , sont tels que $\det(\overrightarrow{A'_q A'_r}, \overrightarrow{A'_q A'_s}) > 0$. En particulier, ces trois sommets « consécutifs » ne sont pas alignés. Dès lors, \mathcal{C} est un k -gone, et il est aussi convexe. \square

Le résultat qui suit est juste là pour simplifier la justification du fait 11 à venir qui est la raison d'être de cette section.

Fait 10. Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan et $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des uplets de coordonnées $(x(A_1); y(A_1); \dots; x(A_n); y(A_n))$ où $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ désigne un n -cycle vérifiant les conditions suivantes.

- $\text{Long}(\mathcal{L}) = \ell$.
- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$.

Dès lors, la fonction $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, qui à un uplet de \mathcal{U} associe l'aire algébrique du n -cycle qu'il représente, est une fonction admettant au moins un maximum, qui est positif strict.

Démonstration. \mathcal{U} est fermé dans \mathbb{R}^{2n} , car les conditions le définissant le sont, et il est borné, car inclus dans la boule fermée de centre O et de rayon ℓ , donc \mathcal{U} est un compact de \mathbb{R}^{2n} . De plus, α est continue d'après le fait 7. Donc, par continuité et compacité, α admet un maximum sur \mathcal{U} , celui-ci étant positif strict pour les raisons suivantes où \mathcal{R} désigne un n -gone régulier convexe.

- Via une translation, nous pouvons supposer \mathcal{R} d'origine O .
- \mathcal{R} , de périmètre non nul, est d'aire non nulle.
- $\text{Aire}(\mathcal{R}) = |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R})|$ selon le fait 6, et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}^{\text{op}}) = -\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R})$ d'après le fait 3.
- $\mathcal{R} \in \mathcal{U}$, ou $\mathcal{R}^{\text{op}} \in \mathcal{U}$ selon le fait 8.
- Si $\mathcal{R} \in \mathcal{U}$, alors \mathcal{R} est orienté positivement, d'où $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}) \geq 0$, et par conséquent $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}) = \text{Aire}(\mathcal{R})$ (c'est immédiat en utilisant le centre de gravité de \mathcal{R} comme point de calcul). Nous avons une propriété similaire si $\mathcal{R}^{\text{op}} \in \mathcal{U}$. \square

Nous arrivons, au résultat fondamental pour les n -gones convexes avec une perte éventuelle de sommets : ceci est un faux problème, car nous aboutirons, plus tard, à la comparaison de k -gones réguliers convexes pour k variable, une tâche aisée, puisque le périmètre et l'aire d'un k -gone régulier convexe s'expriment en fonction de k , nous saurons alors que le k -gone convexe \mathcal{K} ci-après est en fait un n -gone régulier convexe.

Fait 11. Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ et $\ell \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe un k -gone convexe \mathcal{K} validant les assertions suivantes.

- $k \leq n$ et $\text{Long}(\mathcal{K}) = \ell$.
- Si \mathcal{P} est un n -gone convexe tel que $\text{Long}(\mathcal{P}) = \ell$, alors $\text{Aire}(\mathcal{P}) \leq \text{Aire}(\mathcal{K})$.

Démonstration. Reprenons les notations du fait 10, puis choisissons $\mathcal{L} \in \mathcal{U}$ maximisant l'aire algébrique sur \mathcal{U} . Ce n -cycle ne peut être totalement dégénéré, car $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{L}) > 0$. Dès lors, pour tout n -gone convexe \mathcal{P} vérifiant $\text{Long}(\mathcal{P}) = \ell$, nous pouvons raisonner comme suit.

- Via une translation, nous nous ramenons à \mathcal{P} d'origine O.
- Comme dans la preuve du fait 10, nous avons soit $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$ et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$, soit $\mathcal{P}^{\text{op}} \in \mathcal{U}$ et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}^{\text{op}}) = \text{Aire}(\mathcal{P}^{\text{op}})$. Comme, de plus, $\text{Aire}(\mathcal{P}^{\text{op}}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$, quitte à échanger \mathcal{P} et \mathcal{P}^{op} , nous pouvons supposer avoir $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$.
- Le fait 9 donne un k -gone convexe \mathcal{C} , où $k \leq n$, tel que $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \text{Long}(\mathcal{L})$, ainsi que $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{L})$.
- Le choix de \mathcal{L} fait que $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \ell$ et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) \leq \overline{\text{Aire}}(\mathcal{C})$, mais aussi que $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) > 0$.
- Comme $\text{Aire}(\mathcal{C}) = |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C})| = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{C})$ via le fait 6, alors $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) \leq \overline{\text{Aire}}(\mathcal{C})$ devient $\text{Aire}(\mathcal{P}) \leq \text{Aire}(\mathcal{C})$.
- Or $\text{Long}(\mathcal{C}) > 0$, donc une homothétie de rapport $\frac{\ell}{\text{Long}(\mathcal{C})} \geq 1$ fournit finalement un k -gone convexe \mathcal{K} tel que $k \leq n$, $\text{Long}(\mathcal{K}) = \ell$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}) \leq \text{Aire}(\mathcal{K})$. Affaire conclue!

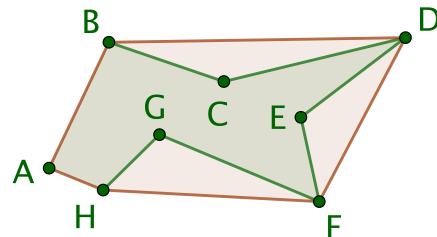
□

1.5. Solutions, qui êtes-vous ? Cette section va établir que, relativement au problème d'isopérimétrie polygonal, un n -gone solution doit être convexe, puis qu'un n -gone convexe solution doit être un n -gone régulier, et enfin que si \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sont respectivement un k_1 -gone et un k_2 -gone, tous les deux réguliers convexes, avec $k_1 < k_2$ et $\text{Perim}(\mathcal{R}_1) = \text{Perim}(\mathcal{R}_2)$, alors $\text{Aire}(\mathcal{R}_1) < \text{Aire}(\mathcal{R}_2)$. Nous pourrons alors conclure dans la section finale suivante.

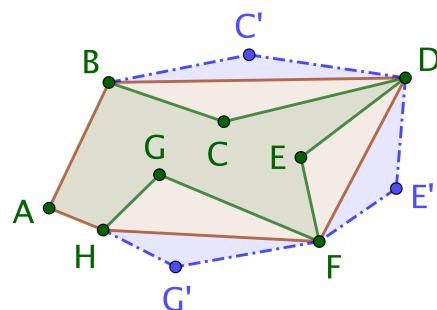
Les cas $n = 3$ et $n = 4$ étant résolus, voir les faits ?? et ??, dans toutes les preuves de cette section, nous supposerons $n \geq 5$, pour ne pas alourdir le texte.

Fait 12. Pour tout n -gone non convexe \mathcal{P} , nous pouvons construire un n -gone convexe \mathcal{C} tel que $\text{Perim}(\mathcal{C}) = \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{C}) > \text{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Soit \mathcal{E} l'enveloppe convexe d'un n -gone non convexe \mathcal{P} (voir ci-dessous).



Clairement, $\text{Perim}(\mathcal{E}) < \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{E}) > \text{Aire}(\mathcal{P})$, mais \mathcal{E} est un s -gone avec $s < n$. Pour gérer ce problème, une idée simple, formalisée après, est d'ajouter des sommets assez près des côtés de \mathcal{E} pour garder la convexité, un périmètre inférieur à $\text{Perim}(\mathcal{P})$, et une aire supérieure à $\text{Aire}(\mathcal{P})$. Si c'est faisable, une homothétie de rapport $r \geq 1$, où $r = \frac{\text{Perim}(\mathcal{P})}{\text{Perim}(\mathcal{E})}$, donnera le n -gone convexe \mathcal{C} cherché. La figure suivante illustre cette idée.



Notons $m = n - s$ qui compte les sommets manquants, puis posons $\delta = \frac{\text{Perim}(\mathcal{P}) - \text{Perim}(\mathcal{E})}{m}$.

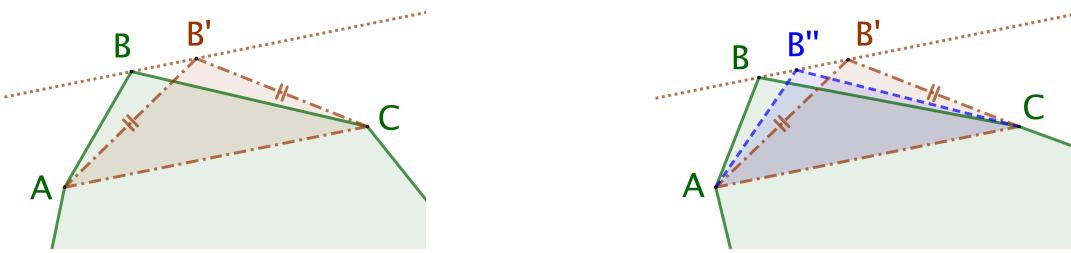
- (1) Considérons $[AB]$ un côté quelconque de \mathcal{E} . Les droites portées par les côtés « *autour* » de $[AB]$ « *dessinent* » une région contenant toujours un triangle ABC dont l'intérieur est à l'extérieur¹⁷ de \mathcal{E} comme dans les deux cas ci-dessous.



- (2) Clairement, le polygone \mathcal{E}_+ obtenu à partir de \mathcal{E} en remplaçant le côté $[AB]$ par les côtés $[AC]$ et $[CB]$ est un convexe avec un sommet de plus que \mathcal{E} .
- (3) Comme HC peut être rendu aussi proche de 0 que souhaité, il est aisément de voir que nous pouvons choisir cette distance de sorte que $AC + BC < AB + \delta$. Dès lors, le périmètre de \mathcal{E}_+ augmente inférieurement strictement à δ relativement à \mathcal{E} .
- (4) En répétant $(m - 1)$ fois les étapes 1 à 3, nous obtenons un n -gone convexe \mathcal{C} tel que $\text{Aire}(\mathcal{C}) > \text{Aire}(\mathcal{P})$ et $\text{Perim}(\mathcal{C}) < \text{Perim}(\mathcal{E}) + m\delta = \text{Perim}(\mathcal{P})$. \square

Fait 13. Si un n -gone convexe \mathcal{P} n'est pas équilatéral, alors nous pouvons construire un n -gone convexe \mathcal{P}' tel que $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Considérons un n -gone convexe non équilatéral \mathcal{P} . Dans ce cas, \mathcal{P} admet un triplet de sommets consécutifs A, B et C tels que $AB \neq BC$ (sinon, on obtiendrait de proche en proche l'équilatéralité). La construction vue dans la preuve du fait ?? nous donne la solution : voir les deux dessins ci-après dans lesquels $(AC) \parallel (BB')$. Pour le 2^e cas, il n'est pas possible d'utiliser le triangle $AB'C$ isocèle en B' car $(B'C)$ porte le côté de \mathcal{P} de sommet C juste après $[BC]$, mais ce problème se contourne en considérant un point B'' du segment ouvert $]BB'[$ (si besoin, se reporter au 2^e dessin de la preuve du fait ??).



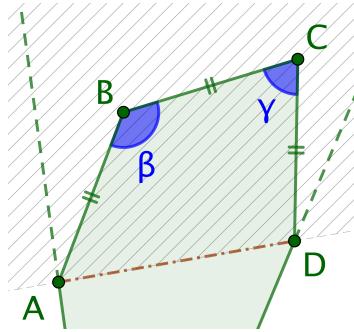
Dans chaque cas, nous avons construit un n -gone convexe \mathcal{P}'' tel que $\text{Perim}(\mathcal{P}'') < \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}'') = \text{Aire}(\mathcal{P})$. Une homothétie de rapport $r > 1$, où $r = \frac{\text{Perim}(\mathcal{P})}{\text{Perim}(\mathcal{E})}$, donne un n -gone convexe \mathcal{P}' vérifiant $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$. \square

Remarque 1.3. Le fait précédent ne permet pas de toujours se ramener au cas d'un n -gone équilatéral convexe. Il nous dit juste que si un n -gone convexe maximise son aire à périmètre fixé, alors il devra être, à minima, un n -gone équilatéral. La nuance est importante, et une similaire existe pour la conclusion du fait suivant.

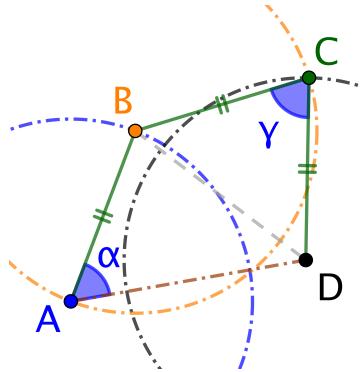
17. C'est ce que l'on appelle de la « *low poetry* »..

Fait 14. Si un n -gone équilatéral convexe \mathcal{P} n'est pas équiangle, alors il existe un n -gone convexe \mathcal{P}' tel que $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Considérons un n -gone équilatéral convexe non équiangle \mathcal{P} . Dans ce cas, \mathcal{P} admet un quadruplet de sommets consécutifs A, B, C et D tels que $\widehat{ABC} \neq \widehat{BCD}$ (sinon, on obtiendrait de proche en proche l'équiangularité). Quitte à changer l'ordre de parcours des sommets de \mathcal{P} , nous pouvons supposer $\widehat{ABC} > \widehat{BCD}$.



En déplaçant B et C dans la zone grise hachurée strictement entre les droites vertes en pointillés, nous garderons un n -gone convexe. Concentrons-nous donc sur le quadrilatère $ABCD$, et posons $c = AB$ la longueur commune des côtés de \mathcal{P} , ainsi que $d = AD$ que nous ne pouvons pas modifier. Si nous fixons la valeur de c , notre situation possède juste un degré de liberté comme le montre la construction de C ci-après qui utilise des cercles de rayon c centrés en A et D fixes, et B mobile.



Cherchons donc à exprimer $\text{Aire}(ABCD)$ en fonction de $\alpha = \widehat{DAB}$, cet angle permettant de repérer le point mobile B .

- Nous avons $\alpha \in]0 ; \pi[$ et $\gamma \in]0 ; \pi[$.
- Le théorème d'Al-Kashi donne $BD^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \alpha$ dans le triangle ABD , ainsi que $BD^2 = 2c^2 - 2c^2 \cos \gamma$ dans le triangle BCD . Donc, $2 \cos \gamma = 1 - k^2 + 2k \cos \alpha$ où l'on a posé $k = \frac{d}{c}$. Notons que l'inégalité triangulaire donne $d < 3c$, puis $0 < k < 3$.
- La formule trigonométrique de l'aire d'un triangle donne $\text{Aire}(ABD) = 0,5cd \sin \alpha$ et $\text{Aire}(BCD) = 0,5c^2 \sin \gamma$, puis $\text{Aire}(ABCD) = 0,5c^2(k \sin \alpha + \sin \gamma)$, de sorte que $\text{Aire}(ABCD) = 0,5c^2 f(\alpha)$ en posant $f(\alpha) = k \sin \alpha + \sqrt{1 - 0,25(1 - k^2 + 2k \cos \alpha)^2}$, car $\sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma}$.
- Passons à l'étude de $f'(\alpha) = 0$, en nous souvenant que nous n'avons pas besoin d'atteindre le maximum de f , mais juste de pouvoir faire augmenter localement $f(\alpha)$. Dans les implications suivantes, nous avons posé $S = \sin \alpha$ et $C = \cos \alpha$.

$$\begin{aligned}
& f'(\alpha) = 0 \\
\stackrel{\text{d'où}}{\implies} & kC + \frac{kS(1-k^2+2kC)}{2\sqrt{1-0,25(1-k^2+2kC)^2}} = 0 \\
\stackrel{\text{d'où}}{\implies} & S(1-k^2+2kC) = -2C\sqrt{1-0,25(1-k^2+2kC)^2} \\
\stackrel{\text{d'où}}{\implies} & S^2(1-k^2+2kC)^2 = 4C^2(1-0,25(1-k^2+2kC)^2) \\
\stackrel{\text{d'où}}{\implies} & (1-k^2+2kC)^2(S^2+C^2) = 4C^2 \\
\stackrel{\text{d'où}}{\implies} & (1-k^2+2kC)^2 - 4C^2 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right) C^2 + S^2 = 1 \\
\stackrel{\text{d'où}}{\implies} & (1-k^2+2kC-2C)(1-k^2+2kC+2C) = 0 \\
\stackrel{\text{d'où}}{\implies} & (1-k)(1+k-2C)(1+k)(1-k+2C) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right) k > 0 \\
\stackrel{\text{d'où}}{\implies} & k = 1 \text{ ou } C \in \left\{ \frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2} \right\}
\end{aligned}$$

• $k = 1$ signifie que $ABCD$ est un losange, non rectangle, car $\widehat{ABC} \neq \widehat{BCD}$. Dans ce cas, en bougeant un peu le sommet B parallèlement à (AD) , tout en faisant augmenter α légèrement si $\alpha \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$, ou diminuer α légèrement si $\alpha \in]\frac{\pi}{2} ; \pi[$,¹⁸ nous obtenons un parallélogramme de même aire, mais de périmètre diminué.¹⁹ On obtient au final un n -gone convexe \mathcal{P}' tel que $\text{Perim}(\mathcal{P}') < \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}') = \text{Aire}(\mathcal{P})$, qu'il suffit d'agrandir pour conclure.

• Pour $k \neq 1$ et $C = \frac{k-1}{2}$, nous avons $2 \cos \alpha = k-1$, puis $2 \cos \gamma = 1-k^2+k(k-1) = 1-k$, soit $\cos \gamma = -\cos \alpha$ qui fournit $\gamma = \pi - \alpha$, en se souvenant que $(\alpha, \gamma) \in]0 ; \pi[^2$. Notons que $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ et $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$, car $k \neq 1$. Nous aboutissons à la contradiction que $ABCD$ est un trapèze isocèle de bases $[AD]$ et $[BC]$, ceci impliquant $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$. L'isocélité vient des points suivants.

- (1) Notre construction de C à base de cercles est déterministe car B et C sont situés dans le même demi-plan délimité par (AD) .
 - (2) Si $A'B'C'D'$ est un trapèze isocèle de bases $[A'D']$ et $[B'C']$, via la somme des angles aux sommets d'un quadrilatère convexe, qui vaut $(4-2)\pi = 2\pi$, nous avons $\widehat{B'C'D'} = \pi - \widehat{D'A'B'}$.
 - (3) Comme $2 \cos \gamma = 1 - k^2 + 2k \cos \alpha$, nous avons : $\gamma = \pi - \alpha$ si, et seulement si, $\cos \alpha = \frac{k-1}{2}$.
- Pour $k \neq 1$ et $C = \frac{k+1}{2}$, comme au début du point précédent, nous avons $\cos \gamma = \cos \alpha$, puis $\gamma = \alpha$ avec $(\alpha, \gamma) \in]0 ; \pi[^2$. Notons qu'ici $0 < k < 1$, puis $(\alpha, \gamma) \in]0 ; \frac{\pi}{3}[$. Dès lors, les monotonies de sin et cos sur $]0 ; \frac{\pi}{3}[$, combinées à $1 - k^2 + 2k \cos \alpha \geq 0$, impliquent la stricte croissance de f sur $]0 ; \frac{\pi}{3}[$.²⁰ Il suffit donc d'augmenter légèrement la valeur de α . \square

Remarque 1.4. Ce qui précède donne envie de faire appel à la méthode des extrema liés pour plus d'élégance dans les calculs. Étudions donc les extrema de $f(\alpha, \gamma) = k \sin \alpha + \sin \gamma$ sur $]0 ; \pi[^2$ sous la contrainte $g(\alpha, \gamma) = 0$ avec $g(\alpha, \gamma) = 1 - k^2 + 2k \cos \alpha - 2 \cos \gamma$. Si un extremum existe, alors nous avons $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\partial_\alpha f = \lambda \partial_\alpha g$ et $\partial_\gamma f = \lambda \partial_\gamma g$, de sorte que

18. B se déplace vers la gauche dans notre cas.

19. Si besoin, se reporter à la preuve du fait ??.

20. Nous utilisons la composition de fonctions monotones, ce qui n'est pas toujours faisable.

$k \cos \alpha = -2k\lambda \sin \alpha$, soit $\cos \alpha = -2\lambda \sin \alpha$, et aussi $\cos \gamma = 2\lambda \sin \gamma$. Nous avons alors les deux alternatives suivantes qui rejoignent les arguments de la preuve précédente.

- (1) Si $\lambda = 0$, alors $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{2}$, puis $k = 1$.
- (2) Si $\lambda \neq 0$, alors $\cos \alpha \sin \gamma = -\cos \gamma \sin \alpha$, puis $\sin(\alpha + \gamma) = 0$, et $\gamma = \pi - \alpha$.

Remarque 1.5. Une démonstration géométrique du fait 14 est possible via un résultat attribué à Zénodore²¹ sur la maximisation de l'aire totale de deux triangles isocèles de bases fixées, et de périmètre total constant : ce résultat affirme que les deux triangles doivent avoir des angles en leur sommet principal de même mesure. Malheureusement, cette preuve échoue lors de la disparition d'un sommet en choisissant la paire optimale de triangles isocèles pour construire un nouveau n -gone « plus gros ».

Fait 15. Si un n -gone \mathcal{P} n'est pas un n -gone régulier convexe, alors il existe un n -gone convexe \mathcal{P}' tel que $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser les faits 12, 13 et 14. \square

Pour en finir avec le problème d'isopérimétrie polygonal, nous aurons besoin du fait suivant.

Fait 16. Si \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sont respectivement un k_1 -gone et un k_2 -gone, tous les deux réguliers convexes, avec $k_1 < k_2$ et $\text{Perim}(\mathcal{R}_1) = \text{Perim}(\mathcal{R}_2)$, alors $\text{Aire}(\mathcal{R}_1) < \text{Aire}(\mathcal{R}_2)$.

Démonstration. Il est connu, et facile à démontrer, qu'un n -gone régulier convexe \mathcal{R} vérifie $\text{Perim}(\mathcal{R}) = 2n \sin(\frac{\pi}{n})\rho$ et $\text{Aire}(\mathcal{R}) = n \sin(\frac{\pi}{n}) \cos(\frac{\pi}{n})\rho^2$ où ρ désigne le rayon du cercle circonscrit à \mathcal{R} . Ceci donne $\text{Aire}(\mathcal{R}) = \frac{\text{Perim}(\mathcal{R})^2}{4n \tan(\frac{\pi}{n})}$, puis amène à justifier que $k_1 \tan(\frac{\pi}{k_1}) > k_2 \tan(\frac{\pi}{k_2})$, c'est-à-dire que la suite $(k \tan(\frac{\pi}{k}))_{k \in \mathbb{N}_{\geq 3}}$ est strictement décroissante. Ce fait découle directement de la stricte décroissance de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_{>2}$ par $f(x) = x \tan(\frac{\pi}{x})$, ceci venant des équivalences logiques suivantes où $x > 1$, la dernière assertion étant vraie d'après la validité de $\sin X \leq X$ sur \mathbb{R}_+ .

$$f'(x) < 0$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{ssi}}{\iff} \tan(\frac{\pi}{x}) - \frac{\pi}{x \cos^2(\frac{\pi}{x})} < 0 \\ &\stackrel{\text{ssi}}{\iff} \tan(\frac{\pi}{x}) < \frac{\pi}{x \cos^2(\frac{\pi}{x})} \quad \uparrow \frac{\pi}{x} \in]0 ; \frac{\pi}{2}[\\ &\stackrel{\text{ssi}}{\iff} \cos^2(\frac{\pi}{x}) \tan(\frac{\pi}{x}) < \frac{\pi}{x} \\ &\stackrel{\text{ssi}}{\iff} \cos(\frac{\pi}{x}) \sin(\frac{\pi}{x}) < \frac{\pi}{x} \\ &\stackrel{\text{ssi}}{\iff} 2 \sin(\frac{\pi}{2x}) < \frac{\pi}{x} \\ &\stackrel{\text{ssi}}{\iff} \sin(\frac{\pi}{2x}) < \frac{\pi}{2x} \end{aligned}$$

\square

1.6. Théorème d'isopérimétrie polygonal.

Fait 17. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Considérons tous les n -gones de périmètre fixé. Parmi tous ces n -gones, un seul est d'aire maximale, c'est le n -gone régulier.

Démonstration. Les cas $n = 3$ et $n = 4$ sont donnés par les faits ?? et ??. Pour $n \geq 5$, il suffit d'invoquer les faits ?? et ??.

Ici s'achève notre joli voyage.

21. La preuve du résultat de Zénodore est un peu fastidieuse.