BROUILLON – CONSTRUCTION SIMPLE DU LOGARITHME ET DE L'EXPONENTIELLE

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts.

Mentions « légales »

Table des matières

Date: 18 Avril 2025.

L'objectif de ce texte est de construire la fonction exp de la manière la plus simple possible, en utilisant uniquement des notions connues d'un lycéen en 2025.

1. Au commencement était le logarithme népérien

1.1. Définition intégrale.

Définition 1. *Le* « logarithme népérien » *est la fonction* ln *définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par* $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

Fait 2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln' x = \frac{1}{x}$. *En particulier, la fonction* ln *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$, *et sa représentation graphique n'admet aucune tangente horizontale.*

1.2. Equation fonctionnelle.

Fait 3. $\forall (a\,;b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Démonstration. Par définition de ln, nous avons $\ln(ab) = \ln a + \int_a^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Concentrons-nous sur $I_{a,b} = \int_a^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, et notons Γ la représentation graphique de ln. Faisons une dilatation verticale de coefficient $a > 0$, c'est-à-dire
XXXX □

2. Puis vint l'exponentielle

2.1. Inverser le logarithme népérien.

Fait 4. $\forall c \in \mathbb{R}$, $\exists! x \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que* $\ln x = c$.

Définition 5. $\forall c \in \mathbb{R}$, *l'unique solution de* $\ln x = c$ *est noté* $\exp c$. *On définit ainsi sur* $\mathbb{R}$ *une fonction* exp *nommée* « exponentielle ».

Fait 6. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp x) = x$, *et* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exp(\ln x) = x$.

Démonstration. Nous devons juste vérifier la 2e identité. En appliquant $\ln(\exp X) = X$ à $X = \ln x$, nous obtenons $\ln\big(\exp(\ln x)\big) = \ln x$. Par injectivité de la fonction ln, nous arrivons à $\exp(\ln x) = x$ comme souhaité. □

Fait 7. *Soient* $\mathcal{L}$ *et* $\mathcal{E}$ *les représentations graphiques respectives des fonctions* ln *et* exp. *Les courbes* $\mathcal{L}$ *et* $\mathcal{E}$ *sont symétriques orthogonalement par rapport à la 1re bissectrice* $\Delta : y = x$.

Démonstration. XXXX □

2.2. Equation fonctionnelle.

Fait 8. $\forall (a\,;b) \in \left(\mathbb{R}\right)^2$, $\exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b$.

Démonstration. L'injectivité de ln et les calculs suivants permettent de conclure.

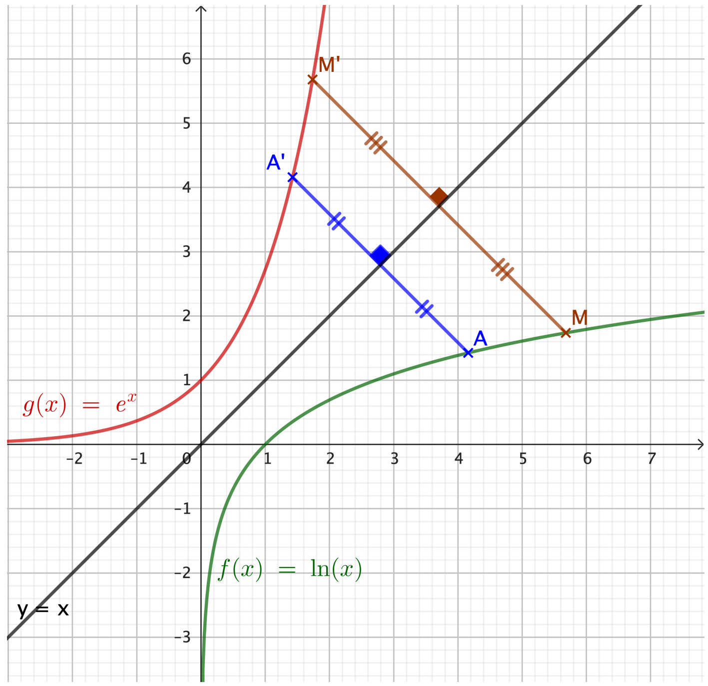
$$\begin{aligned}
&\ln\big(\exp(a+b)\big) \\
&= a + b && \text{\textit{Définition de la fonction} exp.} \\
&= \ln(\exp a) + \ln(\exp b) && \text{\textit{Définition de la fonction} exp.} \\
&= \ln(\exp a \cdot \exp b) && \text{\textit{Équation fonctionnelle validée par la fonction} ln.}
\end{aligned}$$

□

2.3. **Equation différentielle.**

Fait 9. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp' x = \exp x$.

Démonstration. XXXX



$\square$