

BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



TABLE DES MATIÈRES

1. Les polygones	2
1.1. Au moins une solution	2
1.2. Solutions, qui êtes-vous ?	7
1.3. Théorème d’isopérimétrie polygonale	12

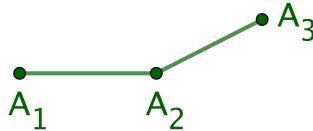
1. LES POLYGONES

1.1. Au moins une solution. Tout comme pour les quadrilatères, la convexité va jouer un rôle central pour l’isopérimétrie polygonale dans le cas général. Ceci explique que nous allons chercher à justifier l’existence d’au moins un n -gone convexe d’aire maximale parmi les n -gones convexes de longueur fixée.

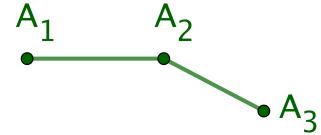
Fait 1. Pour tout n -gone convexe $\mathcal{P} = A_1 A_2 \cdots A_n$, l’une des alternatives suivantes a lieu.

- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, si $k \notin \{i ; i + 1\}$, alors $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) > 0$.
- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, si $k \notin \{i ; i + 1\}$, alors $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) < 0$.

Démonstration. Le cas $n = 3$ des triangles est immédiat. Considérons alors \mathcal{P} un n -gone convexe où $n \geq 4$. Nous savons que, relativement à \mathcal{P} , aucun triplet de sommets consécutifs alignés n’existe. Dès lors, dans le plan orienté, les trois premiers sommets sont placés suivant l’une des deux configurations suivantes.



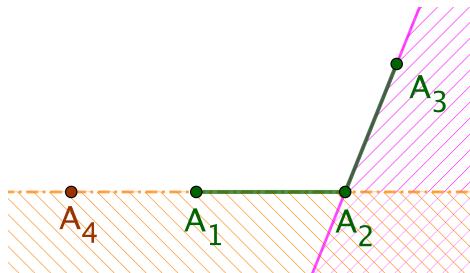
Cas positif.



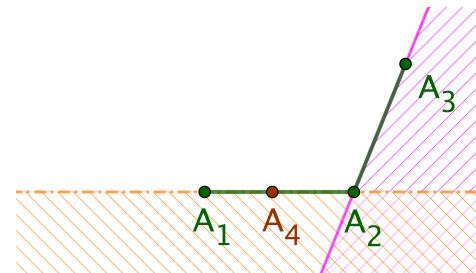
Cas négatif.

Considérons le cas positif, c'est-à-dire supposons que $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_3}) > 0$.

- $\overrightarrow{A'_1 A'_3} = \overrightarrow{A'_1 A'_2} + \overrightarrow{A'_2 A'_3}$ donne $\det(\overrightarrow{A'_2 A'_3}, \overrightarrow{A'_1 A'_2}) > 0$.
- Comme A_2, A_3 et A_4 ne sont pas alignés, et de plus A_1 et A_4 du même côté de la droite $(A_2 A_3)$, au sens large, nous obtenons $\det(\overrightarrow{A'_2 A'_3}, \overrightarrow{A'_2 A'_4}) > 0$.
- En continuant de proche en proche, nous arrivons à $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_{i+2}}) > 0$ pour $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ quelconque.
- Le point précédent et la convexité donnent $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$ pour $(i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ tel que $k \notin \{i ; i+1\}$.
- Montrons maintenant que $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_k}) > 0$ pour $k \in \llbracket 3 ; n \rrbracket$. Nous savons déjà l'inégalité vraie pour $k = 3$; passons donc à $k = 4$. Pour avoir $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_4}) > 0$, le point précédent donne qu'il faut vérifier que $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_4}) = 0$ est impossible. Supposons donc l'égalité vraie, ce qui implique d'avoir $n \geq 5$, car dans le cas contraire les sommets consécutifs A_4, A_1 et A_2 seraient alignés. Nous aboutissons aux configurations suivantes où les hachures et la droite en trait plein sont des zones interdites pour A_4 .

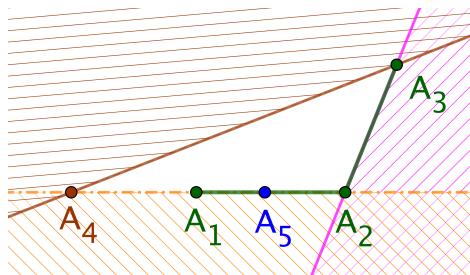


Cas 1.

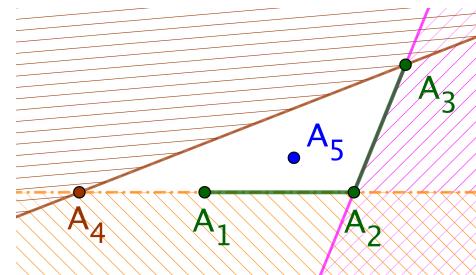


Cas 2.

Le cas 2 est impossible par raison de convexité, car A_1 et A_2 sont de part et d'autre de la droite $(A_3 A_4)$. Voyons donc ce qu'implique le 1^{er} cas pour A_5 .



Cas 1-1.



Cas 1-2.

Le cas 1-2 est impossible par raison de convexité, car $(A_4 A_5)$ sépare les points A_3 et A_2 . Notons que dans le cas 1-1, il est possible d'avoir $A_5 \in]A_4 A_1[$. Comme $A_5 \in (A_1 A_2)$, nous devons avoir $n \geq 6$, mais A_6 ne peut être ni à l'intérieur du triangle $A_2 A_3 A_4$ par convexité, ni sur la droite $(A_1 A_2)$, car A_4, A_5 et A_6 ne peuvent pas être alignés. Cette situation contradictoire montre que $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_4}) > 0$. En continuant de même, de proche en proche, nous arrivons à $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_k}) > 0$ pour $k \in \llbracket 3 ; n \rrbracket$.

- En généralisant le raisonnement précédent,¹ nous avons $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) > 0$ pour tout couple $(i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ vérifiant $k \notin \{i ; i+1\}$.

1. Se souvenir de la définition « cyclique » de la suite (A'_i) .

Le cas négatif se traite de façon similaire. \square

Nous allons établir une réciproque élargie du résultat précédent. Ce nouveau fait, le plus technique à justifier, va nous rendre un grand service par la suite.²

Fait 2. Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n -cycle vérifiant l'une des alternatives suivantes.

- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$.
- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \leq 0$.

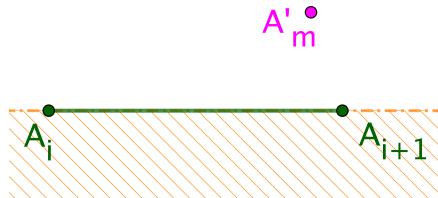
Sous l'une de ces hypothèses, l'une des assertions ci-après est validée.

i. \mathcal{L} est totalement dégénéré.

ii. Il existe un k -gone convexe \mathcal{C} tel que $k \leq n$, $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \text{Long}(\mathcal{L})$ et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{L})$. \mathcal{C} se construit en retirant, si nécessaire, des sommets de \mathcal{L} , sans modifier l'ordre de parcours pour les sommets gardés. De plus, si A'_i et A'_k sont deux sommets consécutifs de \mathcal{C} , alors les sommets A'_j , pour $j \in \llbracket i ; k \rrbracket$, sont les seuls situés sur $[A'_i A'_k]$.

Démonstration. Par symétrie des alternatives, nous pouvons nous concentrer sur le cas positif,³ c'est-à-dire supposer que $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$. Seul le cas \mathcal{L} non totalement dégénéré requiert notre attention. L'idée de la construction est simple : il s'agit de chercher des sommets extrémaux, c'est-à-dire qui « forment un angle ». Nous allons raisonner algorithmiquement en utilisant une variable i initialisée à 1, et une liste C , initialement vide, pour stocker les sommets « utiles » à la fabrication du k -gone convexe final.

- A1** Si $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_{i+2}}) > 0$, nous ajoutons A'_{i+1} à la fin de la liste C , puis nous passons directement à l'action **A3**.
- A2** Sinon, il existe $m \in \mathbb{N}_{>i+2}$ minimal tel que $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_m}) > 0$, car \mathcal{L} n'est pas totalement dégénéré.



Nous arrivons aux constatations suivantes.

- Les points A'_i , A'_{m-1} et A'_m ne sont pas alignés, et par conséquent deux à deux distincts.
- Comme $\forall j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $\det(\overrightarrow{A'_{m-1} A'_m}, \overrightarrow{A'_{m-1} A'_j}) \geq 0$, nous avons $A'_j \in (A'_i, A'_{m-1}]$, pour $j \in \llbracket i ; m-1 \rrbracket$.⁴
- L'évaluation de l'aire algébrique via le point de calcul A'_{m-1} peut se passer des sommets A'_j pour $j \in \llbracket i ; m-1 \rrbracket$, par raison d'alignement.
- Ignorer des sommets, tout en conservant l'ordre de parcours, pour former un nouveau cycle \mathcal{L}' , donne $\text{Long}(\mathcal{L}') \leq \text{Long}(\mathcal{L})$.

2. Pourquoi s'attarder sur des inégalités larges ? Parce que nous allons travailler dans un ensemble compact, et donc fermé, de n -cycles. Pour garder des n -gones, nous devrions utiliser des non-égalités, mais ceci nous ferait sortir du cadre fermé qui nous intéresse. Nous n'avons pas le choix !

3. On pourrait aussi invoquer des cycles opposés.

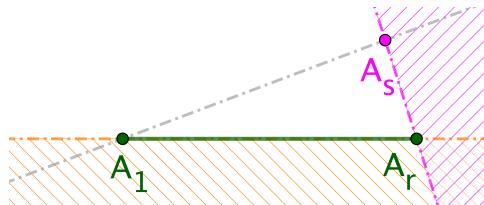
4. Le point A'_{m-1} est le plus à droite sur notre schéma.

Les constatations précédentes justifient l'ajout de A'_{m-1} à la fin de la liste C , uniquement si A'_{m-1} n'est pas dans cette liste,⁵ puis de poser $i = m - 2$, puisque nous augmentons i de 1 juste après.

A3 Ajoutons 1 à i . Si $i \geq n + 1$, nous avons fini, sinon nous retournons à l'action **A1**.

Commençons par justifier que l'algorithme s'arrête sans entrer dans une boucle infinie. Tant que l'indice m de l'étape **A2** vérifie $m \leq n$, il n'y a aucune difficulté, car i augmente, et les sommets ajoutés se placent « *avant* » l'origine A_1 du n -cycle initial \mathcal{L} sans empiéter sur les « *premiers* » sommets. Supposons avoir $m \in \llbracket n ; n + i \rrbracket$ pour un indice i , où forcément $i > 1$, et par conséquent A'_i a été stocké dans la liste C .

- Commençons par noter l'existence de A_1 , A_r et A_s non alignés avec A_r et A_s stockés dans C . En effet, A_r vient de l'application de l'algorithme à $i = 1$, puis A_s s'obtient avec $i = r$.
- Supposons que $i = s$. Pour $j \in \llbracket s + 1 ; n \rrbracket$, les points A'_j sont sur la droite $(A'_s A'_1)$, et ensuite plus généralement pour $j \in \llbracket s ; m \rrbracket$. Le schéma suivant montre sans ambiguïté qu'alors $A'_{m-1} = A'_1$.⁶ Dès lors, $m = n + 2$, d'où l'ajout de A'_1 à la fin de la liste C , puis l'arrêt de l'algorithme à l'étape suivante.



- Le raisonnement précédent fonctionne plus généralement lorsque $A'_i \notin (A'_1 A'_r)$.
- Il reste le cas où $A'_i \in (A'_1 A'_r)$. Ceci nous donne le schéma suivant, où $A'_i \in [A'_1 A'_r]$ est possible, a priori.



L'algorithme assure l'existence d'un point $A'_p \notin (A'_1, A'_r)$ stocké dans C et « *précédent* » A'_i , tel que tout point entre A'_p et A'_i soit sur $(A'_p A'_i)$. Nous arrivons au schéma plus précis ci-dessous, où $A'_1 \in [A'_i, A'_r]$ par positivité large des déterminants $\det(\overrightarrow{A'_p A'_{p+1}}, \overrightarrow{A'_p A'_k})$, avec la possibilité d'avoir $A'_p = A'_s$.



Ici, A'_r est déjà présent dans C , donc l'algorithme s'arrêtera après avoir juste modifié i en $(n + r)$. Notons que les points de A'_{i+1} à A'_{r-1} sont « *mangés* » comme attendu.

5. La justification de l'algorithme, donnée un peu plus bas, montrera la possibilité d'avoir un doublon dans la liste C .

6. $A'_{m-1} \neq A'_1$ contredirait la condition de positivité large sur les déterminants.

Il faut aussi justifier que la liste \mathcal{C} , lue de gauche à droite, donnera les sommets du k -gone convexe \mathcal{C} cherché.

- Par construction, deux sommets « consécutifs » A'_r et A'_s de \mathcal{C} , sont tels que tout point du cycle initial \mathcal{L} situé entre A'_r et A'_s se trouve sur le segment $[A'_r A'_s]$. En ignorant ces points, on fait donc diminuer, au sens large, la longueur du n -cycle, mais sans modifier la valeur de l'aire algébrique, cette dernière étant calculable depuis A'_r , ou A'_s . Donc $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \text{Long}(\mathcal{L})$ et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{L})$
- Par construction, trois sommets « consécutifs » A'_q , A'_r et A'_s de \mathcal{C} , sont tels que $\det(\overrightarrow{A'_q A'_r}, \overrightarrow{A'_q A'_s}) > 0$. En particulier, ces trois sommets « consécutifs » ne sont pas alignés. Dès lors, \mathcal{C} est un k -gone, et il est aussi convexe.

Enfin, la preuve de l'algorithme a montré que pour A'_i et A'_k deux sommets consécutifs de \mathcal{C} , les sommets A'_j , pour $j \in \llbracket i ; k \rrbracket$, sont les seuls situés sur $[A'_i A'_k]$. \square

Le résultat qui suit est juste là pour simplifier la justification du fait 4 à venir qui est la raison d'être de cette section.

Fait 3. Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan et $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des uplets de coordonnées $(x(A_1); y(A_1); \dots; x(A_n); y(A_n))$ où $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ désigne un n -cycle vérifiant les conditions suivantes.

- $\text{Long}(\mathcal{L}) = \ell$.
- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$.

Dès lors, la fonction $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, qui à un uplet de \mathcal{U} associe l'aire algébrique du n -cycle qu'il représente, est une fonction admettant au moins un maximum, qui est positif strict.

Démonstration. \mathcal{U} est fermé dans \mathbb{R}^{2n} , car les conditions le définissant le sont, et il est borné, car inclus dans la boule fermée de centre O et de rayon ℓ , donc \mathcal{U} est un compact de \mathbb{R}^{2n} . De plus, α est continue d'après le fait ???. Donc, par continuité et compacité, α admet un maximum sur \mathcal{U} , celui-ci étant positif strict pour les raisons suivantes où \mathcal{R} désigne un n -gone régulier convexe.

- Il est connu, et facile de démontrer, que pour tout n -gone régulier convexe \mathcal{R} , nous avons $\text{Perim}(\mathcal{R}) = 2n \sin(\frac{\pi}{n})\rho$ et $\text{Aire}(\mathcal{R}) = n \sin(\frac{\pi}{n}) \cos(\frac{\pi}{n})\rho^2$ où ρ désigne le rayon du cercle circonscrit à \mathcal{R} . Ceci donne un n -gone régulier convexe \mathcal{R} de longueur ℓ , et d'aire non nulle.
- Via une translation, nous pouvons supposer \mathcal{R} d'origine O .
- $\text{Aire}(\mathcal{R}) = |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R})|$ selon le fait ???, et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}^{\text{op}}) = -\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R})$ d'après le fait ???.
- $\mathcal{R} \in \mathcal{U}$, ou $\mathcal{R}^{\text{op}} \in \mathcal{U}$ selon le fait 1.
- Si $\mathcal{R} \in \mathcal{U}$, alors \mathcal{R} est orienté positivement, d'où $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}) \geq 0$, et par conséquent $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}) = \text{Aire}(\mathcal{R})$ (c'est immédiat en utilisant le centre de gravité de \mathcal{R} comme point de calcul). Nous avons une propriété similaire si $\mathcal{R}^{\text{op}} \in \mathcal{U}$. \square

Nous arrivons au résultat fondamental sur les n -gones convexes.

Fait 4. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Parmi les n -gones convexes de longueur fixée, non nulle, il en existe au moins un d'aire maximale.

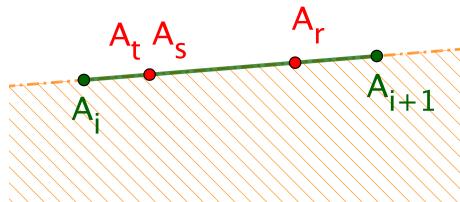
Démonstration. Notons $\ell > 0$ la longueur fixée, reprenons les notations du fait 3, et choisissons $\mathcal{M} \in \mathcal{U}$ maximisant l'aire algébrique sur \mathcal{U} . Ce n -cycle ne peut être totalement dégénéré, car $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{M}) > 0$. Dès lors, pour tout n -gone convexe \mathcal{P} vérifiant $\text{Long}(\mathcal{P}) = \ell$, nous pouvons raisonner comme suit.

- Comme pour le n -gone régulier convexe \mathcal{R} de la preuve du fait 3, via une translation, nous pouvons supposer \mathcal{P} d'origine O, puis nous avons soit $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$ et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$, soit $\mathcal{P}^{\text{op}} \in \mathcal{U}$ et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}^{\text{op}}) = \text{Aire}(\mathcal{P}^{\text{op}})$. Comme, de plus, $\text{Aire}(\mathcal{P}^{\text{op}}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$, nous pouvons supposer avoir $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$, quitte à échanger \mathcal{P} et \mathcal{P}^{op} .
- Le fait 2 donne un k -gone convexe \mathcal{C} , où $k \leq n$, tel que $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \text{Long}(\mathcal{M})$, ainsi que $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{M})$. Nous savons que pour deux sommets consécutifs A'_i et A'_k de \mathcal{C} , seuls les sommets A'_j , pour $j \in \llbracket i ; k \rrbracket$, sont situés sur $[A'_i A'_k]$. Ceci nous amène aux deux alternatives suivantes donnant un n -gone convexe \mathcal{C}' tel que $\text{Long}(\mathcal{C}') \leq \text{Long}(\mathcal{M})$ et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}') \geq \overline{\text{Aire}}(\mathcal{M}) > 0$.
 - (1) Si M est déjà un n -gone convexe, alors $\mathcal{C} = \mathcal{M}$ et donc $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$ convient.
 - (2) Sinon, forcément \mathcal{C}' possède strictement moins de sommets que \mathcal{M} , et par conséquent $\text{Long}(\mathcal{C}) < \text{Long}(\mathcal{M})$. Dans ce cas, le n -gone convexe \mathcal{C}' vient du fait 5 ci-dessous appliqué au convexe \mathcal{C} avec $s = n - k$ et $\delta = \text{Long}(\mathcal{M}) - \text{Long}(\mathcal{C})$.
- Le choix de \mathcal{M} fait que $\text{Long}(\mathcal{C}') \leq \ell$ et $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}') \geq \overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})$.
- Selon le fait ??, $\text{Aire}(\mathcal{C}') = |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}')| = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}')$, donc l'inégalité $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) \leq \overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}')$ devient $\text{Aire}(\mathcal{P}) \leq \text{Aire}(\mathcal{C}')$.
- Pour conclure, notons que $\text{Long}(\mathcal{C}') > 0$, donc une homothétie de rapport $\frac{\ell}{\text{Long}(\mathcal{C}')} \geq 1$ fournit un n -gone convexe \mathcal{C}'' tel que $\text{Long}(\mathcal{C}'') = \ell$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}) \leq \text{Aire}(\mathcal{C}'')$. \square

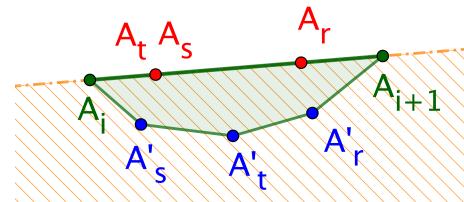
Le fait suivant, utilisé dans la preuve précédente, nous sera aussi utile pour obtenir qu'un n -gone « *maximal* » doit être convexe.

Fait 5. XXXX

Démonstration. XXXX ceci conduisant à une situation comme la suivante où nous notons la possibilité d'ajouter autant de sommets manquant que nécessaire, la zone hachurée indiquant les points M tels que $\det(\vec{A'_i A'_{i+1}}, \vec{A'_i M}) < 0$, une zone ne contenant aucun sommet de \mathcal{M} .



Un cas possible où $A'_s = A'_t$.



Déformation « convexe possible ».

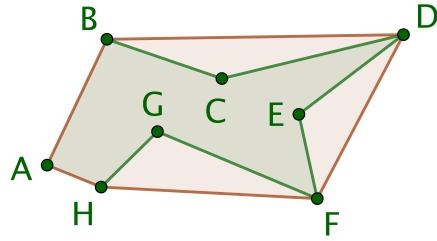
\square

1.2. Solutions, qui êtes-vous ? Cette section cherche à caractériser la nature des solutions du problème d'isopérimétrie polygonale.

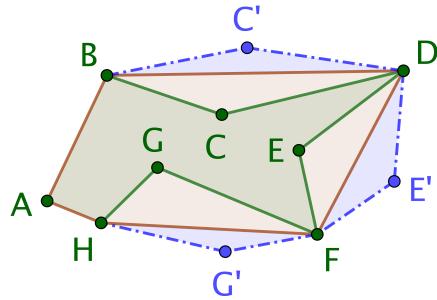
Les cas $n = 3$ et $n = 4$ étant résolus, voir les faits ?? et ??, dans toutes les preuves de cette section, nous supposerons $n \geq 5$ pour ne pas alourdir le texte.

Fait 6. Pour tout n -gone non convexe \mathcal{P} , nous pouvons construire un n -gone convexe \mathcal{C} tel que $\text{Perim}(\mathcal{C}) = \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{C}) > \text{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Soit \mathcal{E} l'enveloppe convexe d'un n -gone non convexe \mathcal{P} (voir ci-dessous).



Clairement, $\text{Perim}(\mathcal{E}) < \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{E}) > \text{Aire}(\mathcal{P})$, mais \mathcal{E} est un s -gone avec $s < n$. Pour gérer ce problème, une idée simple, formalisée après, est d'ajouter des sommets assez prêts des côtés de \mathcal{E} pour garder à la fois la convexité, un périmètre inférieur à $\text{Perim}(\mathcal{P})$, et une aire supérieure à $\text{Aire}(\mathcal{P})$. Si c'est faisable, une homothétie de rapport $r \geq 1$, où $r = \frac{\text{Perim}(\mathcal{P})}{\text{Perim}(\mathcal{E})}$, donnera le n -gone convexe \mathcal{C} cherché. La figure suivante illustre cette idée.



Notons $m = n - s$ qui compte les sommets manquants, et vérifie $m \neq 0$. Ceci permet de poser $\delta = \frac{\text{Perim}(\mathcal{P}) - \text{Perim}(\mathcal{E})}{m}$ qui est tel que $\delta > 0$.

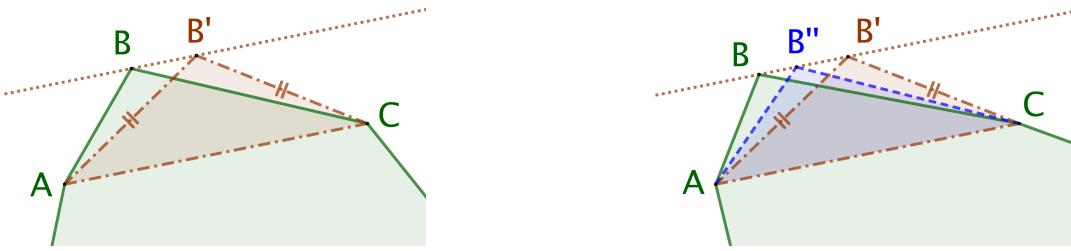
- (1) Considérons $[AB]$ un côté quelconque de \mathcal{E} . Les droites portées par les côtés « *autour* » de $[AB]$ « *dessinent* » une région contenant toujours un triangle ABC dont l'intérieur est à l'extérieur⁷ de \mathcal{E} comme dans les deux cas ci-dessous.



- (2) Clairement, le polygone \mathcal{E}_+ obtenu à partir de \mathcal{E} en remplaçant le côté $[AB]$ par les côtés $[AC]$ et $[CB]$ est un convexe avec un sommet de plus que \mathcal{E} .
- (3) Comme HC peut être rendu aussi proche de 0 que souhaité, il est aisément de voir que nous pouvons choisir cette distance de sorte que $AC + BC < AB + \delta$. Dès lors, le périmètre de \mathcal{E}_+ augmente inférieurement strictement à δ relativement à \mathcal{E} .
- (4) En répétant $(m-1)$ fois les étapes 1 à 3, avec \mathcal{E}_+ à la place de \mathcal{E} , nous obtenons un n -gone convexe \mathcal{C}' tel que $\text{Aire}(\mathcal{C}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$ et $\text{Perim}(\mathcal{C}') < \text{Perim}(\mathcal{E}) + m\delta = \text{Perim}(\mathcal{P})$. \square

Fait 7. Si un n -gone convexe \mathcal{P} n'est pas équilatéral, alors nous pouvons construire un n -gone convexe \mathcal{P}' tel que $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Considérons un n -gone convexe non équilatéral \mathcal{P} . Dans ce cas, \mathcal{P} admet un triplet de sommets consécutifs A, B et C tels que $AB \neq BC$ (sinon, on obtiendrait de proche en proche l'équilatéralité). La construction vue dans la preuve du fait ?? nous donne la solution : voir les deux dessins ci-après dans lesquels $(AC) \parallel (BB')$. Pour le 2^e cas, il n'est pas possible d'utiliser le triangle $AB'C$ isocèle en B' car $(B'C)$ porte le côté de \mathcal{P} de sommet C juste après $[BC]$, mais ce problème se contourne en considérant un point B'' du segment ouvert $]BB'[$.⁸



Dans chaque cas, nous avons construit un n -gone convexe \mathcal{P}'' tel que $\text{Perim}(\mathcal{P}'') < \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}'') = \text{Aire}(\mathcal{P})$. Une homothétie de rapport $r > 1$, où $r = \frac{\text{Perim}(\mathcal{P})}{\text{Perim}(\mathcal{E})}$, donne un n -gone convexe \mathcal{P}' vérifiant $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$. \square

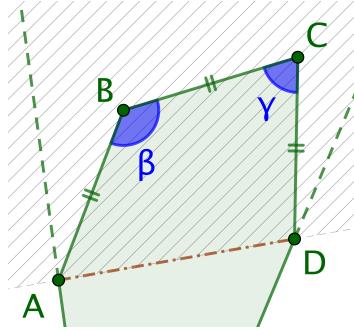
Remarque 1.1. Le fait précédent ne permet pas de toujours se ramener au cas d'un n -gone équilatéral convexe. Il nous dit juste que si un n -gone convexe maximise son aire à périmètre fixé, alors il devra être, à minima, un n -gone équilatéral. La nuance est importante, et une similaire existe pour la conclusion du fait suivant.

7. C'est ce que l'on appelle de la « *low poetry* ».

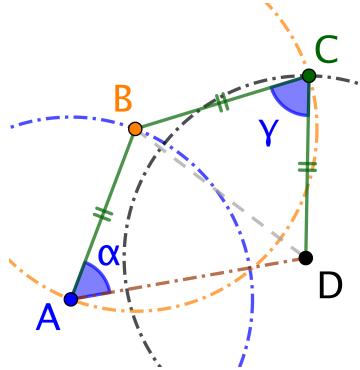
8. Si besoin, se reporter au 2^e dessin de la preuve du fait ??.

Fait 8. Si un n -gone équilatéral convexe \mathcal{P} n'est pas équiangle, alors il existe un n -gone convexe \mathcal{P}' tel que $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Considérons un n -gone équilatéral convexe non équiangle \mathcal{P} . Dans ce cas, \mathcal{P} admet un quadruplet de sommets consécutifs A, B, C et D tels que $\widehat{ABC} \neq \widehat{BCD}$ (sinon, on obtiendrait de proche en proche l'équiangularité). Quitte à changer l'ordre de parcours des sommets de \mathcal{P} , nous pouvons supposer $\widehat{ABC} > \widehat{BCD}$.



En déplaçant B et C dans la zone grise hachurée, et strictement entre les droites vertes en pointillés, nous garderons un n -gone convexe. Concentrons-nous donc sur le quadrilatère $ABCD$, et posons $c = AB$ la longueur commune des côtés de \mathcal{P} , ainsi que $d = AD$ que nous ne pouvons pas modifier. Si nous fixons la valeur de c , notre situation possède juste un degré de liberté comme le montre la construction de C ci-après qui utilise des cercles de rayon c centrés en A et D fixes, et B mobile.



Cherchons donc à exprimer $\text{Aire}(ABCD)$ en fonction de $\alpha = \widehat{DAB}$, cet angle permettant de repérer le point mobile B .

- Par convexité, nous avons $\alpha \in]0 ; \pi[$ et $\gamma \in]0 ; \pi[$.
- Le théorème d'Al-Kashi donne $BD^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \alpha$ dans le triangle ABD , ainsi que $BD^2 = 2c^2 - 2c^2 \cos \gamma$ dans le triangle BCD . Donc, $2 \cos \gamma = 1 - k^2 + 2k \cos \alpha$ où l'on a posé $k = \frac{d}{c}$. Notons que l'inégalité triangulaire donne $d < 3c$, puis $0 < k < 3$.
- La formule trigonométrique de l'aire d'un triangle donne $\text{Aire}(ABD) = 0,5cd \sin \alpha$ et $\text{Aire}(BCD) = 0,5c^2 \sin \gamma$, puis $\text{Aire}(ABCD) = 0,5c^2(k \sin \alpha + \sin \gamma)$, de sorte que $\text{Aire}(ABCD) = 0,5c^2 f(\alpha)$ en posant $f(\alpha) = k \sin \alpha + \sqrt{1 - 0,25(1 - k^2 + 2k \cos \alpha)^2}$, car $\sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma}$.
- Passons à l'étude de $f'(\alpha) = 0$, en nous souvenant que nous n'avons pas besoin d'atteindre le maximum de f , mais juste de pouvoir faire augmenter localement $f(\alpha)$. Dans les implications suivantes, nous avons posé $S = \sin \alpha$ et $C = \cos \alpha$.

$$\begin{aligned}
& f'(\alpha) = 0 \\
\stackrel{\text{d'où}}{\implies} & kC + \frac{kS(1-k^2+2kC)}{2\sqrt{1-0,25(1-k^2+2kC)^2}} = 0 \\
\stackrel{\text{d'où}}{\implies} & S(1-k^2+2kC) = -2C\sqrt{1-0,25(1-k^2+2kC)^2} \\
\stackrel{\text{d'où}}{\implies} & S^2(1-k^2+2kC)^2 = 4C^2(1-0,25(1-k^2+2kC)^2) \\
\stackrel{\text{d'où}}{\implies} & (1-k^2+2kC)^2(S^2+C^2) = 4C^2 \\
\stackrel{\text{d'où}}{\implies} & (1-k^2+2kC)^2 - 4C^2 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right) C^2 + S^2 = 1 \\
\stackrel{\text{d'où}}{\implies} & (1-k^2+2kC-2C)(1-k^2+2kC+2C) = 0 \\
\stackrel{\text{d'où}}{\implies} & (1-k)(1+k-2C)(1+k)(1-k+2C) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right) k > 0 \\
\stackrel{\text{d'où}}{\implies} & k = 1 \text{ ou } C \in \left\{ \frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2} \right\}
\end{aligned}$$

- $k = 1$ signifie que $ABCD$ est un losange, non rectangle, car $\widehat{ABC} \neq \widehat{BCD}$. Dans ce cas, en bougeant un peu le sommet B parallèlement à (AD) , tout en faisant augmenter α légèrement si $\alpha \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$, ou diminuer α légèrement si $\alpha \in]\frac{\pi}{2} ; \pi[$,⁹ nous obtenons un parallélogramme de même aire, mais de périmètre diminué.¹⁰ On obtient au final un n -gone convexe \mathcal{P}'' tel que $\text{Perim}(\mathcal{P}'') < \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}'') = \text{Aire}(\mathcal{P})$, qu'il suffit d'agrandir pour conclure.
- Pour $k \neq 1$ et $C = \frac{k-1}{2}$, nous avons $2 \cos \alpha = k-1$, puis $2 \cos \gamma = 1-k^2+k(k-1) = 1-k$, soit $\cos \gamma = -\cos \alpha$ qui fournit $\gamma = \pi - \alpha$, en se souvenant que $(\alpha, \gamma) \in]0 ; \pi[^2$. Notons que $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ et $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$, car $k \neq 1$. Nous aboutissons à la contradiction que $ABCD$ est un trapèze isocèle de bases $[AD]$ et $[BC]$, ceci impliquant $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$. L'isocélité vient des points suivants.
 - (1) Notre construction de C à base de cercles est déterministe, car B et C sont situés dans le même demi-plan délimité par (AD) .
 - (2) Si $A'B'C'D'$ est un trapèze isocèle de bases $[A'D']$ et $[B'C']$, via la somme des angles aux sommets d'un quadrilatère convexe, qui vaut $(4-2)\pi = 2\pi$, nous avons $\widehat{B'C'D'} = \pi - \widehat{D'A'B'}$.
 - (3) Comme $2 \cos \gamma = 1 - k^2 + 2k \cos \alpha$, nous avons : $\gamma = \pi - \alpha$ si, et seulement si, $\cos \alpha = \frac{k-1}{2}$.
- Pour $k \neq 1$ et $C = \frac{k+1}{2}$, comme au début du point précédent, nous avons $\cos \gamma = \cos \alpha$, puis $\gamma = \alpha$ avec $(\alpha, \gamma) \in]0 ; \pi[^2$. Notons qu'ici $0 < k < 1$, puis $(\alpha, \gamma) \in]0 ; \frac{\pi}{3}[$. Dès lors, les monotonies de \sin et \cos sur $]0 ; \frac{\pi}{3}[$, combinées à $1 - k^2 + 2k \cos \alpha \geq 0$, impliquent la stricte croissance de f sur $]0 ; \frac{\pi}{3}[$.¹¹ Il suffit donc d'augmenter légèrement la valeur de α . \square

Remarque 1.2. Ce qui précède donne envie de faire appel à la méthode des extrema liés pour plus d'élégance dans les calculs, modulo l'utilisation d'un très gros théorème. Étudions donc les extrema de $f(\alpha, \gamma) = k \sin \alpha + \sin \gamma$ sur $]0 ; \pi[^2$ sous la contrainte $g(\alpha, \gamma) = 0$ avec $g(\alpha, \gamma) = 1 - k^2 + 2k \cos \alpha - 2 \cos \gamma$. Si un extremum existe, alors nous avons $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

9. B se déplace vers la gauche dans notre cas.

10. Si besoin, se reporter à la preuve du fait ??.

11. Nous utilisons la composition de fonctions monotones, ce qui n'est pas toujours faisable.

$\partial_\alpha f = \lambda \partial_\alpha g$ et $\partial_\gamma f = \lambda \partial_\gamma g$, de sorte que $k \cos \alpha = -2k\lambda \sin \alpha$, soit $\cos \alpha = -2\lambda \sin \alpha$, et aussi $\cos \gamma = 2\lambda \sin \gamma$. Nous avons alors les deux alternatives suivantes qui rejoignent les arguments de la preuve précédente.

- (1) Si $\lambda = 0$, alors $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{2}$, puis $k = 1$.
- (2) Si $\lambda \neq 0$, alors $\cos \alpha \sin \gamma = -\cos \gamma \sin \alpha$, puis $\sin(\alpha + \gamma) = 0$, et $\alpha + \gamma = \pi$.

Remarque 1.3. Une démonstration géométrique du fait 8 est possible via un résultat attribué à Zénodore¹² sur la maximisation de l'aire totale de deux triangles isocèles de bases fixées, et de périmètre total constant : ce résultat affirme que les deux triangles doivent avoir des angles en leur sommet principal de même mesure. Malheureusement, cette preuve échoue lors de la disparition d'un sommet en choisissant la paire optimale de triangles isocèles pour construire un nouveau n -gone « plus gros ».

Fait 9. Si un n -gone \mathcal{P} n'est pas un n -gone régulier convexe, alors il existe un n -gone convexe \mathcal{P}' tel que $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser les faits 6, 7 et 8. □

1.3. Théorème d'isopérimétrie polygonale.

Fait 10. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Parmi les n -gones de périmètre fixé, non nul, le n -gone régulier convexe est le seul à maximiser l'aire.

Démonstration. Tout a été fait, il ne reste plus qu'à assembler les arguments.

- (1) Le cas $n = 3$ correspond au fait ??.
- (2) Le cas $n = 4$ a été établi dans le fait ??.
- (3) Pour $n \geq 5$, il suffit de se rappeler des faits suivants où $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.
 - D'après le fait 4, il existe, au moins, un n -gone convexe maximisant l'aire parmi les n -gones convexes de périmètre, ou de longueur, fixé.
 - Selon le fait 9, un n -gone « maximal » doit être, a minima, régulier et convexe.
 - Il reste à voir que l'on ne peut pas faire mieux qu'un n -gone régulier convexe \mathcal{R} . Ceci se fait facilement par l'absurde, car l'existence d'un « meilleur » n -gone \mathcal{P} donnerait $\text{Aire}(\mathcal{R}) < \text{Aire}(\mathcal{P}) < \text{Aire}(\mathcal{R})$, puisque tous les n -gones réguliers convexes sont isométriques. □

Ici s'achève notre joli voyage.

12. La preuve du résultat de Zénodore est un peu fastidieuse.