BROUILLON - DÉVELOPPER FACILEMENT $(a+b)^n$ GRÂCE À PASCAL ET NEWTON

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LaTeX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts.

Mentions « légales »

Table des matières

1. Le triangle de Pascal – Une vision décalée

1.1. **Expérimenter.** Commençons par nous intéresser aux développements des expressions $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ et $(a+b)^4$.

1.1.1. *Développement de* $(a+b)^2$. Rappelons que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Ceci se démontre facilement comme suit.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

1.1.2. *Développement de* $(a+b)^3$. Pour développer $(a+b)^3$, nous allons bien entendu nous appuyer sur celui de $(a+b)^2$. Allons-y.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2) \\ &= a^3 + a\cdot 2ab + a\cdot b^2 + b\cdot a^2 + b\cdot 2ab + b^3 \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

Sans trop de peine, nous avons obtenu : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. On peut simplifier la compréhension des calculs comme suit.

Date: 5 Octobre 2021 – 8 Octobre 2021.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\ &= a(a+b)^2 \\ &\quad + b(a+b)^2 \\ &= a(a^2+2ab+b^2) \\ &\quad + b(a^2+2ab+b^2) \\ &= a^3+2a^2b+\ \ ab^2 \\ &\quad +\ \ a^2b+2ab^2+b^3 \\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

1.1.3. *Développement de* $(a+b)^4$. Pour développer $(a+b)^4$, nous allons nous inspirer de la présentation ci-dessus qui simplifie la compréhension. Une routine s'installe...

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3 \\ &= a(a+b)^3 \\ &\quad + b(a+b)^3 \\ &= a(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) \\ &\quad + b(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) \\ &= a^4+3a^3b+3a^2b^2+\ \ ab^3 \\ &\quad +\ \ a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\ &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{aligned}$$

Sans trop de peine, nous avons obtenu : $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

1.1.4. *Aller plus loin.* Au moins en théorie, pour $n \in \mathbb{N}^*$ nous avons exhibé un procédé de développement de $(a+b)^n$ via celui de $(a+b)^{n-1}$ en utilisant $(a+b)^n = (a+b)(a+b)^{n-1}$. Ceci étant indiqué, même pour $n = 5$, nous devinons qu'il va vite être pénible de rédiger à chaque fois les développements. Il devient alors naturel de se demander si par hasard il n'y aurait pas un moyen efficace de développer par exemple $(a+b)^7$. Nous allons voir que c'est bien le cas.

1.1.5. *Une notation efficace.* Retenir les trois identités remarquables suivantes n'est a priori pas simple.

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

Un moyen efficace de le faire est de noter que les écritures standardisées utilisées sont toutes avec des puissances décroissantes de a et croissantes de b . Ainsi dans $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ où l'exposant maximal est 4 nous avons en se souvenant que $x^0 \overset{\text{conv}}{=} 1$ par convention :

a^r	a^4	a^3	a^2	$a^1 = a$	$a^0 = 1$
b^s	$b^0 = 1$	$b^1 = b$	b^2	b^3	b^4
Produit	a^4	a^3b	a^2b^2	ab^3	b^4

Avec cette écriture en tête, nous pouvons retenir plus simplement les développement de $(a+b)^n$ pour $n \in [\![2\,;5]\!]$ comme suit où le cas admis pour $n = 5$ va nous permettre de vérifier la bonne compréhension de la convention utilisée.

n						
$2 \rightarrow$	1	2	1			
$3 \rightarrow$	1	3	3	1		
$4 \rightarrow$	1	4	6	4	1	
$5 \rightarrow$	1	5	10	10	5	1

Pour $(a+b)^5$, l'exposant maximal sera 5 et donc nous devons penser à ce qui suit.

a^r	a^5	a^4	a^3	a^2	a^1	a^0
b^s	b^0	b^1	b^2	b^3	b^4	b^5
Produit	a^5	a^4b	a^3b^2	a^2b^3	ab^4	b^5

Nous avons donc :

$5 \rightarrow$	1	5	10	10	5	1
	a^5	a^4b	a^3b^2	a^2b^3	ab^4	b^5

Finalement $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. Le lecteur motivé pourra le vérifier via $(a+b)^5 = (a+b)(a+b)^4$ et le développement de $(a+b)^4$ démontré plus haut.

1.2. **Généraliser si possible.** Rien ne nous assure a priori de découvrir un moyen simple de développer $(a+b)^n$ mais soyons confiant et tentons l'aventure en nous appuyant sur notre notation simplifiée. Nous verrons alors si de nouveau les mathématiques nous révèleront une belle structure cachée.

Considérons le cas de $(a+b)^3$ dont le moments importants du développement sont les suivants.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= \ldots \\
&= {\color{red} a(a^2+2ab+b^2)} \\
&\qquad {\color{green} + b(a^2+2ab+b^2)} \\
&= {\color{red} a^3 + 2a^2b + \ \ ab^2} \\
&\qquad {\color{green} + \ \ a^2b + 2ab^2 + b^3} \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

Avec notre notation, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ s'écrit :

$2 \rightarrow$	1	2	1
	a^2	ab	b^2

Tableau pour $n = 2$

Le tableau pour $n = 2$ donne par multiplication de chaque terme par a :

1	2	1
a^3	a^2b	ab^2

Distribution de a sur $(a+b)^2$

La multiplication de chaque terme par b donne de façon analogue :

1	2	1
a^2b	ab^2	b^3

Distribution de b sur $(a+b)^2$

Mis dans le tableau pour $n = 3$, nous avons ce qui suit où les deux dernières lignes redonnent $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

1	2	1	
a^3	a^2b	ab^2	
	1	2	1
	a^2b	ab^2	b^3
1	3	3	1
a^3	a^2b	ab^2	b^3

Tableau pour $n = 3$

On retrouve ce qui suit, l'une des étapes clés du développement de $(a+b)^3$.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= \dots \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ & + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= \dots\end{aligned}$$

Il est temps de faire un nouveau pas vers une belle abstraction en notant trois choses.

(1) La multiplication par a revient à garder la ligne résumé du développement de $(a+b)^2$.
(2) La multiplication par b revient à décaler d'une case vers la droite la ligne résumé du développement de $(a+b)^2$.
(3) La ligne résumé du développement de $(a+b)^3$ est la somme des deux lignes précédentes, une case vide valant zéro.

En appliquant les règles précédentes, dont il est clair qu'elles sont générales, nous retrouvons le développement $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ à partir du tableau précédent.

$\times a \rightarrow$	1	3	3	1	
$\times b \rightarrow$		1	3	3	1
	1	4	6	4	1
	a^4	a^3b	a^2b^2	ab^2	b^4

Développement de $(a+b)^4$

On reconnaît l'une des étapes importantes du développement de $(a+b)^4$.

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= \dots \\ &= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \\ & + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\ &= \dots\end{aligned}$$

Poursuivons avec $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ que nous avons admis précédemment.

$\times a \to$	1	4	6	4	1	
$\times b \to$		1	4	6	4	1
	1	5	10	10	5	1
	a^5	a^4b	a^3b^2	a^2b^3	ab^4	b^5

Développement de $(a+b)^5$

Nous voilà prêts à découvrir les développements de $(a+b)^6$ et $(a+b)^7$ sans trop nous fatiguer.

$\times a \to$	1	5	10	10	5	1	
$\times b \to$		1	5	10	10	5	1
	1	6	15	20	15	6	1
	a^6	a^5b	a^4b^2	a^3b^3	a^2b^4	ab^5	b^6

Développement de $(a+b)^6$

$\times a \to$	1	6	15	20	15	6	1	
$\times b \to$		1	6	15	20	15	6	1
	1	7	21	35	35	21	7	1
	a^7	a^6b	a^5b^2	a^4b^3	a^3b^4	a^2b^5	ab^6	b^7

Développement de $(a+b)^7$

Nous avons démontré les deux nouvelles identités remarquables suivantes.

- $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$
- $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

Auriez-vous eu le courage de trouver le dernier développement directement en calculant avec des a et des b ? L'auteur de ces lignes ne l'aura jamais !

1.3. **Une belle simplification.** On peut en fait simplifier la méthode précédente en utilisant un unique tableau comme ci-dessous avec la règle de calcul à droite pour les cases non vides de valeurs différentes de 1 (à vous de voir pourquoi). Notons que l'on a ajouté les coefficients pour les développements de $(a+b)^0 \overset{\text{conv}}{=} 1$ et $(a+b)^1 = a+b$.

n									
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

... etc.

Coefficients pour le développement de $(a+b)^n$

p	q
	$p+q$

Règle de calcul pour les cases non vides de valeurs différentes de 1 *en fonction de la ligne précédente*

Ce tableau, avec sa règle de calcul, est appelé « triangle de Pascal » .

2. Le binôme de Newton – Ouvrons des parenthèses (au lieu d'une seule)

TODO

Dans cette section, nous changeons de point de vue : nous allons partir du fait très classique suivant pour donner un éclairage différent sur les identités exhibées dans la section **??**.

Fait 1. *Soit* $\mathbb{A}$ *un anneau, forcément unitaire,*[1] *qui est commutatif. Dans l'anneau des polynômes à deux variables* $\mathbb{A}[X,Y]$*, nous avons :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{C}(k,n) X^k Y^{n-k}$.[2] *Ceci est la formule générique du binôme de Newton.*

Démonstration. Il suffit d'écrire $(X+Y)^n = \prod_{k=1}^{n} (X+Y)_k$ avec des indices étiquetant les parenthèses dont les positions sont fixées dans le produit. En distribuant parenthèse par parenthèse de gauche à droite, le nombre de $X^k Y^{n-k}$ obtenus correspond au nombre de choix de k parenthèses, pour X, parmi les n disponibles, ce qui donne $\mathsf{C}(k,n)$ possibilités. □

Démonstration. Notons $(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} c(n,k) X^k Y^{n-k}$. Comme $\mathbb{A}$ n'est pas forcément intègre, nous devons être prudent (voir la bino-id-formal-quick juste après). Voici une démarche possible (nous proposons une autre approche classique dans la bino-id-formal-combi).[3]

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+1} c(n+1,k) X^k Y^{n+1-k} \\
=\ & (X+Y)^{n+1} \\
=\ & (X+Y)\,(X+Y)^n \\
=\ & \sum_{k=0}^{n} c(n,k) X^{k+1} Y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} c(n,k) X^k Y^{n+1-k} \\
=\ & c(n,n) X^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \big(c(n,k-1) + c(n,k)\big) X^k Y^{n+1-k} + c(n,0) Y^{n+1}
\end{aligned}$$

Ceci nous donne les relations suivantes.

(1) $c(n+1,n+1) = c(n,n)$ et $c(n+1,0) = c(n,0)$.

(2) $c(n+1,k) = c(n,k) + c(n,k-1)$ pour $k \in [\![1\,;n]\!]$.

1. Il fut un temps où un anneau n'avait pas forcément un élément neutre pour le produit.
2. Rappelons que $\mathsf{C}(k,n)$ est le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble de cardinal n.
3. Rappelons que $\mathsf{C}(k,n)$ est le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble de cardinal n, et que nous avons une preuve directe de $\mathsf{C}(1,1) = 1$ et $\mathsf{C}(k,n+1) = \mathsf{C}(k,n) + \mathsf{C}(k-1,n)$ pour $k \in [\![1\,;n]\!]$.

Une récurrence permet alors d'obtenir $c(n,k) = \mathcal{C}_k^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0\,;n]\!]$ □

Remarque 1. *Dans un anneau intègre, nous pouvons aller plus vite. En effet, en notant* $P(X,Y) = (X+Y)^n$*, la dérivation formelle suivie d'une évaluation en* $(0,1)$ *nous donne* $k!\,c(n,k) = \frac{\mathrm{d}^k P}{\mathrm{d}X^k}(0,1) = \prod_{i=n+1-k}^{n} i$*, et par conséquent* $c(n,k) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} = \mathcal{C}_k^n$ *dans le corps des fractions de* $\mathbb{A}$*, puis dans* $\mathbb{A}$ *lui-même.*

Dans les applications à venir, nous allons nous appuyer sur la formule suivante appliquée dans différents anneaux bien choisis.

Fait 2. *Si* $\mathbb{A}$ *est un anneau commutatif, alors* $\forall (a,b) \in \mathbb{A}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_k^n a^k b^{n-k}$.

Démonstration. Il suffit d'évaluer en (a,b) la formule générique du binôme de Newton. □