EN FINIR AVEC LA FORME CANONIQUE DU TRINÔME... IL MANQUE DES DESSINS !

CHRISTOPHE BAL

Table des matières

Date: 19 Oct. 2020 - 2 Déc. 2025.

1. Critère pour la non existence d'une racine réelle

Soient $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ où $a \neq 0$ et $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f vue comme fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Graphiquement on constate vite que $\mathscr{C}_f$ possède un axe de symétrique $\mathscr{d} : x = m$ où m se calcule comme suit en considérant $(\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha \neq \beta$.

$$\begin{aligned}
f(\alpha) = f(\beta) &\iff a\,\alpha^2 + b\,\alpha + c = a\,\beta^2 + b\,\beta + c \\
&\iff a(\alpha^2 - \beta^2) + b(\alpha - \beta) = 0 \\
&\iff (\alpha - \beta)(a(\alpha + \beta) + b) = 0 \qquad \boxed{1} \\
&\iff \frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{b}{2a}
\end{aligned}$$

Nécessairement $m = -\dfrac{b}{2a}$ [1]. Il est aussi aisé de conjecturer que $f(m)$ est un extremum de f vue comme fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ceci rend naturel le calcul suivant qui part de la factorisation $\boxed{1}$ précédente.

$$\begin{aligned}
f(x) - f(m) &= (x - m)(a\,x + a\,m + b) \\
&= (x - m)(a\,x - a\,m) \\
&= a(x - m)^2
\end{aligned}$$

$$m = -\frac{b}{2a} \iff 2am = -b \iff am + b = -am$$

Ce qui précède montre aussi que si $a > 0$ alors $f(m)$ est un minimum et si $a < 0$ alors $f(m)$ est un maximum. On peut maintenant savoir quand f n'admet aucun zéro réel.

(1) **Cas 1 :** $a > 0$

f n'a pas de zéro si et seulement si $f(m) > 0$. Voyons ce que cela implique.

$$\begin{aligned}
f(m) > 0 &\iff a\,m^2 + b\,m + c > 0 \\
&\iff a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - b \cdot \frac{b}{2a} + c > 0 \\
&\iff -\frac{b^2}{4a} + c > 0 \\
&\iff -b^2 + 4ac > 0 \qquad 4a > 0
\end{aligned}$$

(2) **Cas 2 :** $a < 0$

f n'a pas de zéro si et seulement si $f(m) < 0$. Cela implique ce qui suit.

$$\begin{aligned}
f(m) < 0 &\iff -\frac{b^2}{4a} + c < 0 \\
&\iff -b^2 + 4ac > 0 \qquad 4a < 0
\end{aligned}$$

Nous retombons sur le critère classique suivant : $a\,x^2 + b\,x + c$ n'a pas de zéro réel si et seulement si $-b^2 + 4ac > 0$, soit de façon équivalente si et seulement si $b^2 - 4ac < 0$.

Notons que notre mode de raisonnement ne permet pas de privilégier le 2$^{\text{e}}$ critère, ce dernier est en fait naturel uniquement si l'on passe via la forme canonique, ou bien lorsque l'on trouvera des formules calculant les zéros de f lorsque ces derniers existent *(c'est ce que nous allons faire dans la section suivante).*

1. Nous n'avons pas prouver la propriété de symétrie car nous n'en aurons pas besoin. Ceci se fait en montrant que $\forall \delta \in \mathbb{R}$, $f(m - \delta) = f(m + \delta)$. Cette égalité est évidente dès lors que l'on a $f(x) - f(m) = a(x - m)^2$, une identité que nous allons prouver bientôt.

2. Quand au moins une racine réelle existe

Soit $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ où $a \neq 0$ tel qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ annulant f. La section précédente implique que nécessairement $b^2 - 4ac \geq 0$.

La factorisation $\boxed{1}$ de $f(\alpha) - f(\beta)$ vue dans la section précédente nous donne ici sans effort : $f(x) - f(\alpha) = (x-\alpha)(a(x+\alpha)+b)$. On en déduit l'existence d'un autre zéro $\beta \in \mathbb{R}$, éventuellement égal à α, tel que $f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$. Ceci implique, après développement, que $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ et $\alpha \cdot \beta = \dfrac{c}{a}$.

Exploitons ici aussi l'usage de $m = -\dfrac{b}{2a}$ de sorte que $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = m$ *(ceci est aussi une conséquence de l'égalité $f(\alpha) = f(\beta)$)*. On va paramétrer notre problème via une seule inconnue[2] grâce à m. Pour cela posons $\delta = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$ de sorte que $\alpha = m - \delta$ et $\beta = m + \delta$. Nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} &\iff (m-\delta)(m+\delta) = \frac{c}{a} \\
&\iff m^2 - \delta^2 = \frac{c}{a} \\
&\iff \delta^2 = m^2 - \frac{c}{a} \\
&\iff \delta^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
&\iff \delta^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \\
&\overset{b^2-4ac \geq 0}{\iff} \delta = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

Nous avons donc établi que si α et β sont deux zéros de f, éventuellement confondus, alors $b^2 - 4ac \geq 0$ et les zéros sont $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. La réciproque est immédiate.

---

2. Cette astuce permet en fait de diminuer par deux le nombre d'inconnues lorsque l'on cherche les racines d'un polynôme p, de degré pair forcément, tel que $\mathscr{C}_p$ ait un axe de symétrie.