$\text{Card}\ \mathbb{R} = \text{Card}\ \mathcal{P}(\mathbb{N})$

Injec° de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ → Simple et efficace.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on note $x_0, \underline{x}$ où $(\underline{x}_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \subseteq [\![0;9]\!]$ avec $(\underline{x}_i)_i$ non stationnaire à 9 ultérieurement.

On sait que $\text{Card}\ \mathbb{R} = \text{Card}\ [0;1[$.

$x \in [0;1[\mapsto \{\underline{x}_i \cdot 10^i,\ i \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathbb{N}$ définit une injec°.

Injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}$ → Classique.

Pour $A \subseteq \mathbb{N}$, on note $(x_i^A)_{i \in \mathbb{N}}$ définie par $x_i^A = \mathbb{1}_A(i)$.

$A \subseteq \mathbb{N} \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x_i^A}{3^i} \in [0;1[$ est une injec° (pas de dév. impropre car $3-1>1$, donc $\forall b \geq 3$ aurait été OK).

Bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Card}\ \mathbb{R} = \text{Card}\ [0;1[\\ \text{Card}\ [0;1[\leq \text{Card}\ \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ \text{Card}\ \mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq \text{Card}\ [0;1] \end{array}\right\} \underset{\text{Bernstein}}{\overset{\text{Cantor}}{\Longrightarrow}} \text{Card}\ \mathbb{R} = \text{Card}\ \mathcal{P}(\mathbb{N})$$