WIKIVERSITÉ

Exercice : Suites de fonctions

Suites et séries de fonctions/Exercices/Suites de fonctions

Exercice 1-1

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x)=\frac{\sin nx}{n\sqrt{x}} \text{ si } x>0 \text{ et } f_n(0)=0.$$

Solution [Dérouler]

Exercice 1-2

Construction de la fonction exponentielle comme solution d'une équation différentielle par la méthode d'Euler (version rectifiée et rédigée de celle du 15/01/2010 dans la leçon « Fonction exponentielle »).

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

1. Démontrer que si $h>-1$ et $x>-n$, alors $u_{n+1}(x+h)\geq(1+h)\,u_n(x)$.
2. En déduire que la suite (u_n) est simplement convergente.
3. Notons $\exp$ sa limite. Vérifier que $\exp(0)=1$.
4. Montrer que si $|h|<1$, alors
$$\forall x\in\mathbb{R}\quad h\exp(x)\leq\exp(x+h)-\exp(x)\leq\frac{h}{1-h}\exp(x).$$
5. En déduire que $\exp$ est dérivable et égale à sa dérivée.

Solution [Enrouler]

1. En fixant $h > -1$ et en dérivant la fonction $]-n,+\infty[\to\mathbb{R} \quad x\mapsto\frac{u_{n+1}(x+h)}{u_n(x)}$, on trouve qu'elle atteint son minimum pour $x = nh$, or sa valeur en ce point est $1 + h$.
2. Soit un entier $N > |x|$. D'après la question précédente (appliquée à $h = 0$), les suites $(u_n(x))_{n\ge N}$ et $(u_n(-x))_{n\ge N}$ sont croissantes, or elles sont strictement positives et leur produit est majoré par 1. Cela prouve que la suite $(u_n(x))_{n\ge N}$ est croissante et majorée (par $1/u_N(-x)$), donc convergente.
3. $u_n(0) = 1$.
4. La première inégalité se déduit de la question 1, et la seconde se déduit de la première en remplaçant h par $-h$ et x par $x + h$.
5. Immédiat.

Exercice 1-3

Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant les hypothèses suivantes :

- $g(0) = 0$;
- $\lim_{t\to+\infty} tg(t) = 0$;
- l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge vers une valeur non nulle.

1. Montrer qu'il existe de telles fonctions.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $u_n(x) = ng(nx)$ est simplement convergente.
3. Cette convergence est-elle uniforme au voisinage de 0 ?

Solution [Dérouler]