BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts.

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons "Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International".

Table des matières

Date: 18 Jan. 2025 – 19 Fev. 2025.

Fait 1. *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé.*
le plan d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$
$\alpha : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+$ *qui à un uplet de $\mathcal{U}$ associe l'aire généralisée du n-cycle qu'il représente. Cette fonction est continue d'après le fait 1.*

Démonstration. GGGGG
pour les raisons suivantes où $\mathcal{L} = A_1A_2\cdots A_n$ désigne un n-cycle.

- $\text{AireGene}(\mathcal{L}) = \sum\limits_i \text{Aire}(\mathcal{P}_i)$ où $\bigcup\limits_i \mathcal{P}_i$ est frontière de la surface impaire de $\mathcal{L}$.
- Si $\bigcup\limits_i \mathcal{P}_i = \emptyset$, alors $\text{AireGene}(\mathcal{L}) = 0$.
- Si $\bigcup\limits_i \mathcal{P}_i \neq \emptyset$, en posant $\mathcal{P}_i = A_{i,1}A_{i,2}\cdots A_{i,n_i}$, le fait **??** nous permet d'écrire, en calculant les aires algébriques via l'origine O du repère, $\text{AireGene}(\mathcal{L}) = \frac{1}{2}\sum\limits_i \Big| \sum\limits_{k=1}^{n_i} \big(x(A'_{i,k})y(A'_{i,k+1}) - y(A'_{i,k})x(A'_{i,k+1})\big) \Big|$.
- XXXXX
- XXXXX
- XXXXX
- XXXXX □

Fait 2. *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Parmi tous les n-cycles de longueur fixée, non nulle, il en existe au moins un d'aire généralisée maximale, un tel n-cycle devant être a minima un n-gone convexe.*

Démonstration. Notons ℓ la longueur fixée.

- Munissant le plan d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$, on note $\mathcal{Z}$ l'ensemble des n-cycles $\mathcal{L} = A_1A_2\cdots A_n$ tels que $\text{Long}(\mathcal{L}) = \ell$ et $A_1\,(\,0\,;0\,)$,[1] puis $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des uplets de coordonnées $\big(x(A_1)\,;y(A_1)\,;\ldots;x(A_n)\,;y(A_n)\big)$ pour $A_1A_2\cdots A_n \in \mathcal{Z}$.
- $\mathcal{U}$ est clairement fermé dans $\mathbb{R}^{2n}$.[2] De plus, il est borné, comme le sont les coordonnées des sommets des n-cycles $\mathcal{L}$ considérés (cf. la contrainte $\text{Long}(\mathcal{L}) = \ell$). En résumé, nous savons que $\mathcal{U}$ est un compact de $\mathbb{R}^{2n}$.
- Nous définissons la fonction $\alpha : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+$ qui à un uplet de $\mathcal{U}$ associe l'aire généralisée du n-cycle qu'il représente. Cette fonction est continue d'après le fait 1.
- Finalement, par continuité et compacité, α admet un maximum sur $\mathcal{U}$. Or, un tel maximum ne peut être atteint qu'en un n-gone convexe, au moins, selon le fait **??**. □

Fait 3. *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Parmi tous les n-gones de périmètre fixé, il en existe au moins un d'aire maximale, un tel n-gone devant être a minima convexe.*

Démonstration. Il suffit de convier les faits **??**, **??** et 2 au même banquet des idées. □

1. Le mot « *Zeile* » est une traduction possible de « *ligne* » en allemand.
2. Il est faux d'affirmer que l'ensemble des n-gones est fermé : penser par exemple à un n-gone dont tous les sommets seraient fixés sauf un que l'on ferait d'entre vers l'un de ses voisins : ceci fait passer d'un n-gone à k-gone avec $k \leq n-1$. On peut aussi penser à des n-gones que l'on ferait tendre, en les « aplatissant », vers un n-cycle totalement « plat ».

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows how many pages to expect for this document.