BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES

CHRISTOPHE BAL

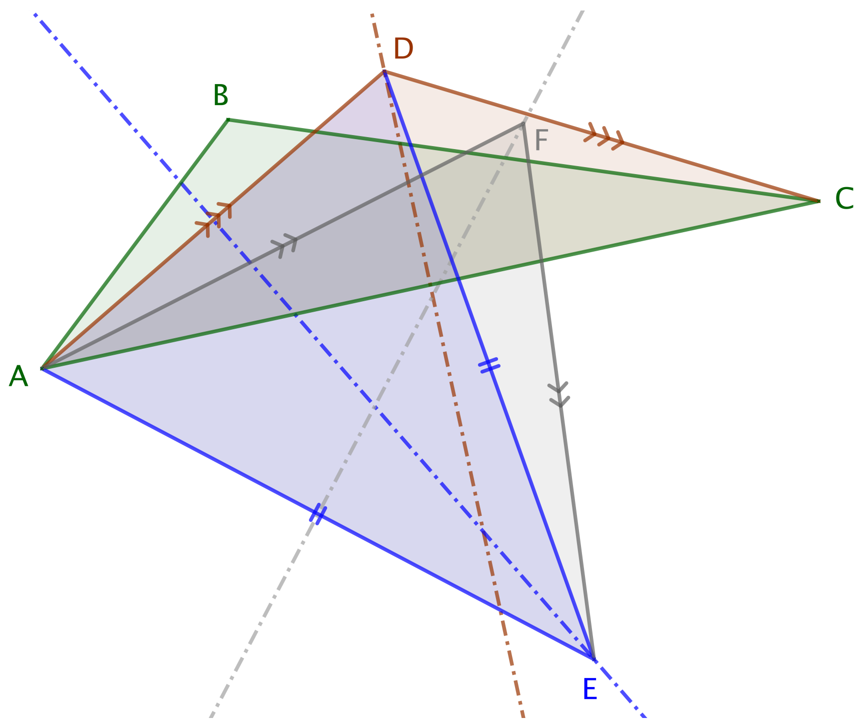
Table des matières

Date: 18 Jan. 2025 – 19 Jan. 2025.

1. Les triangles sans contrainte

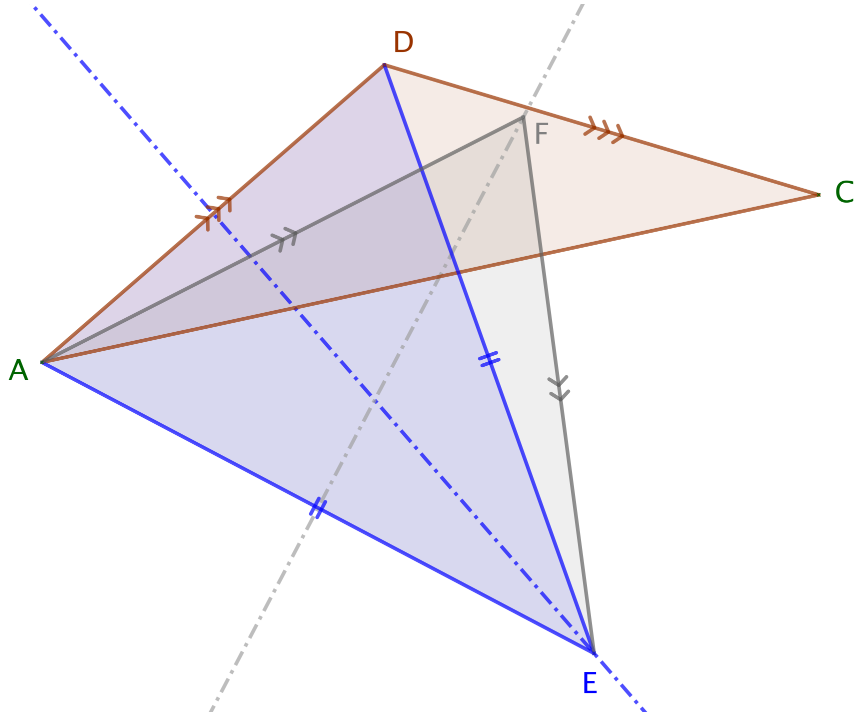
Fait 1. *Considérons tous les triangles de périmètre fixé p. Parmi tous ces triangles, celui d'aire maximale est le triangle équilatéral de côté $c = \dfrac{1}{3}p$.*

Démonstration. Une première idée, calculatoire, est de passer via la classique formule de Héron $Aire = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ où $s = 0{,}5p$ désigne le demi-périmètre, et les variables a, b et c les mesures des côtés du triangle.[1] Nous allons raisonner plus géométriquement. Partant d'un triangle ABC quelconque de périmètre p, le fait 1 nous donne successivement les triangles ACD, ADE et AEF isocèles en D, E et F respectivement, ayant tous pour périmètre p, et ceci avec des aires de plus en plus grandes. Le dessin suivant amène à conjecturer qu'en poursuivant le procédé pour avoir ensuite un triangle AFG isocèle en G…, nous aboutirons « *à la limite* » à un triangle équilatéral.



Le passage d'un triangle quelconque ABC au triangle ACD isocèle en D nous amène à nous concentrer sur ce que donne notre procédé d'agrandissement d'aire à périmètre fixé pour des triangles isocèles. Dans la suite, nous allons nous appuyer sur le schéma suivant.

1. L'aire étant positive ou nulle, nous devons chercher les maxima de $f(a\,;b\,;c) = Aire^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, c'est-à-dire de $f(a\,;b\,;c) = \frac{1}{16}(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$, sous la contrainte $2s = a+b+c$ où $s > 0$ est constant. Notant $g(a\,;b\,;c) = a+b+c-2s$, la contrainte s'écrit $g(a\,;b\,;c) = 0$. Selon la méthode des extrema liés, un éventuel maximum doit vérifier $\partial_a f = \lambda \partial_a g$, $\partial_b f = \lambda \partial_b g$ et $\partial_c f = \lambda \partial_c g$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc, $-s(s-b)(s-c) = -s(s-a)(s-c) = -s(s-a)(s-b) = \lambda$, puis $(s-b)(s-c) = (s-a)(s-c) = (s-a)(s-b)$. Les cas $s = a$, $s = b$ et $s = c$ donnent $f(a\,;b\,;c) = 0$. Quant au cas $\left[s \neq a, s \neq b \text{ et } s \neq c\right]$, il n'est envisageable que si $a = b = c = \frac{p}{3}$ qui implique $f(a\,;b\,;c) = \frac{1}{16}p\left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{p^2}{12\sqrt{3}}\right)^2 > 0$. En résumé, l'existence d'un maximum implique que ce maximum corresponde au cas du triangle équilatéral. Il reste à démontrer qu'un tel maximum existe pour pouvoir conclure : ceci est facile à justifier en considérant l'ensemble compact $[0\,;s]^3$ de $\mathbb{R}^3$.



Voici ce que nous pouvons affirmer.

(1) Considérons ACD isocèle en D tel que $AC > AD$. Comme $AC + AD + DC = p$, nous avons $AC > \frac{1}{3}p > AD$. Dès lors, on doit avoir ensuite $AD < \frac{1}{3}p < AE$, car $AD + DE + AE = p$ et $AD = AE$.

(2) Considérons ADE isocèle en E tel que $AD < AE$ en oubliant le point précédent. Comme $AD + DE + AE = p$, nous avons $AD < \frac{1}{3}p < AE$. Dès lors, on doit avoir ensuite $AE > \frac{1}{3}p > AF$, car $AE + AF + EF = p$ et $AF = EF$.

(3) Les deux points précédents démontrent que notre procédé n'arrivera jamais en un nombre fini d'étapes à un triangle équilatéral si l'on part d'un triangle isocèle non équilatéral. [2]

(4) Nous devons quantifier les écarts à la mesure idéale « *limite* » $\frac{1}{3}p$.

XXXXX

(5) XXXX

(6) XXXX

(7) XXXX

(8) XXXX

(9) XXXX

□

Remarque 1.1. *La comparaison des moyennes géométriques et arithmétiques d'ordre* 3 *nous donne une solution algébrique efficace, car* $\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}\big((s-a)+(s-b)+(s-c)\big)$ *nous donne* $s(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{1}{27}s^4$, *puis* $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{p^2}{12\sqrt{3}}$ *où* $\frac{p^2}{12\sqrt{3}}$ *est l'aire du triangle équilatéral de périmètre* p.

2. Et plus généralement si le procédé ne commence pas avec une base de longueur $\frac{1}{3}p$.