BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

Mentions « légales »

Table des matières

Date: 18 Jan. 2025 – 26 Jan. 2025.

1. Les polygones

Fait 1. *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Considérons tous les n-gones de périmètre fixé. Parmi tous ces n-gones, un seul est d'aire maximale, c'est le n-gone régulier.*

Démonstration. Le fait **??** permet de considérer le problème de maximisation d'aire à périmètre fixé uniquement avec des n-gones convexes. Selon les faits **??** et **??**, si parmi les n-gones convexes de périmètre fixé, il en existe un qui maximise l'aire, alors ce ne peut être que le n-gone régulier. Pour voir que cette condition nécessaire est suffisante, comme dans la remarque **??**, nous allons convier le couple continuité/compacité.

- On munit le plan d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
- XXX

  fermeture costaud, mais le côté birné ! ! ! !

  pour fermeture, besoin d'accpeter les k-gones pour $k \in [\![3\,; n]\!]$.

  Les n-gones convexes $A_1A_2 \cdots A_n$ tels que $\mathrm{Perim}(A_1A_2 \cdots A_n) = p$ sont représentés en posant $A_1\,(\,0\,;0\,)$, $A_2\,(\,A_1A_2\,;0\,)$, puis $A_k\,(\,x_k\,;y_k\,)$ avec $y_k \geq 0$ pour $k \in [\![3\,; n]\!]$. Un n-gone peut donc avoir n représentations, mais peu importe. De plus, on accepte les n-gones dégénérés pour lesquels nous avons $x_B = 0$, $y_C = 0$ dans notre représentation. Nous notons alors $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des triplets $(\,x_B\,; x_C\,; y_C\,)$ ainsi obtenus.
- XXX

  Justifier que $\mathcal{G}$ est fermé dans $\mathbb{R}^{2n}$.
- De plus, $\mathcal{G}$ est borné, car les coordonnées des sommets des k-gones considérés le sont. Finalement, $\mathcal{G}$ est un compact de $\mathbb{R}^{2n}$.
- Notons $s : \mathcal{G} \to \mathbb{R}_+$ la fonction « *aire* » des n-gones représentés. Cette fonction est continue en les coordonnées des sommets, car elle peut être calculée comme suit pour un n-gone convexe $A_1A_2 \cdots A_n$ quelconque.
  1. L'isobarycentre G de $A_1A_2 \cdots A_n$ possède des coordonnées affines en celles des points A_1, A_2, ... , et A_n.
  2. Par convexité, l'aire de $A_1A_2 \cdots A_n$ est égale à la somme de celles des triangles GA_kA_{k+1} pour $k \in [\![1\,; n-1]\!]$, et du triangle GA_nA_1.
  3. Via le déterminant, il est immédiat de voir que les aires des triangles considérés sont des fonctions continues en les coordonnées des sommets.
- Finalement, par continuité et compacité, on sait que s admet un maximum sur $\mathcal{G}$, un tel maximum ne pouvant pas être atteint sur un k-gone dégénéré. That's all folks !

□