BROUILLON – NEWTON, BERNOULLI, LEIBNIZ, FIBONACCI ET BELL

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts.

Mentions « légales »

Table des matières

Date: 2 Avril 2025 - 11 Avril 2025.

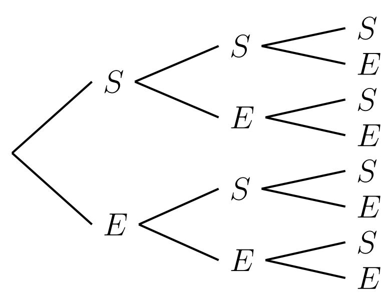
1. Des identités bien connues

Les formules suivantes intriguent par leur ressemblance. Bien qu'elles appartiennent à des domaines distincts, leur similitude n'est pas le fruit du hasard. À travers deux approches différentes, l'une discrète, et l'autre algébrique, nous révélerons les liens combinatoires unissant ces divers objets.

- **Formule du binôme de Newton :** $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.
- **Formule de dérivation de Leibniz :** $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.
- **Loi binomiale :** $\mathrm{P}(X=j) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_{jk}$, [1] même s'il est d'usage de juste écrire $\mathrm{P}(X=j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$.
- **Une identité portant sur la suite de Fibonacci :** $F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k$.
- **Une formule similaire pour les coefficients binomiaux :** $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k}$.
- **Une équation liant les nombres de Bell :** $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$ où B_i est le nombre de façons de partitionner un ensemble de i éléments. [2]

2. La loi binomiale révèle...

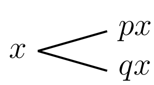
2.1. **De l'utilité des arbres.** Lorsque l'on présente la loi binomiale, il est courant d'utiliser un arbre de probabilité comme le suivant où S désigne un succès et E un échec, un succès ayant une probabilité p de se réaliser (ici nous avons 3 niveaux de profondeur).



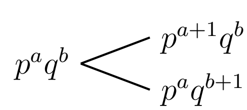
Définition 1. $\binom{n}{k}$ *désigne le nombre de chemins avec exactement k succès dans la version générale à n niveaux de profondeur de l'arbre précédent.*

Remarque 2. *Dans le début de ce document, nous n'utiliserons ni la définition combinatoire de $\binom{n}{k}$ via les sous-ensembles à k éléments, ni la formule factorielle de $\binom{n}{k}$.*

Notons X la variable aléatoire comptant le nombre de succès, ainsi que $q = 1-p$. Pour justifier que $\mathrm{P}(X=j) = \binom{n}{j} p^j q^{n-j}$, soit $\mathrm{P}(X=j) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_{jk}$, nous allons nous concentrer sur les bifurcations lors du parcours de l'arbre de gauche à droite. L'arbre de calcul ci-dessous à gauche traduit que si l'on va vers un succès, la probabilité en cours est multipliée par p, et sinon c'est q qui est appliqué. Ceci nous donne des calculs intermédiaires à chaque bifurcation comme montré ci-dessous à droite.



Arbre de calcul.



Un calcul intermédiaire.

---

1. δ_{jk} est le symbole de Kronecker valant 1 si $j = k$, et 0 sinon, tandis que X désigne la variable aléatoire comptant le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli de paramètre $(n\,;p)$.

2. Par exemple, $B_3 = 5$, car l'ensemble $\{a,b,c\}$ admet les partitions $\{a,b,c\}$, $\{a\} \cup \{b,c\}$, $\{b\} \cup \{a,c\}$, $\{c\} \cup \{a,b\}$ et $\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$.

Considérons maintenant un arbre binaire de niveau de profondeur n. En partant de la racine, à gauche, avec la valeur 1, l'application de la règle de calcul donne $\mathrm{P}(X=j)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\delta_{jk}$. Voici un exemple de calcul avec $n=3$.

$$1 \left\langle \begin{array}{l} p \left\langle \begin{array}{l} p^2 \left\langle \begin{array}{l} p^3 \\ p^2q \end{array}\right. \\ pq \left\langle \begin{array}{l} p^2q \\ pq^2 \end{array}\right. \end{array}\right. \\ q \left\langle \begin{array}{l} pq \left\langle \begin{array}{l} p^2q \\ pq^2 \end{array}\right. \\ q^2 \left\langle \begin{array}{l} pq^2 \\ q^3 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Un exemple de calcul.

La méthode que nous venons de présenter est généralisable à d'autres contextes comme nous allons le constater dans la suite de ce document.

2.2. **Directement vers le binôme de Newton.** Pour développer $(x+y)^n$, la brique de base est la distribution indiquée dans l'arbre de calcul ci-dessous à gauche, ceci nous donnant des calculs intermédiaires comme celui montré ci-dessous à droite.

$$(x+y)f(x\,;y) \left\langle \begin{array}{l} xf(x\,;y) \\ yf(x\,;y) \end{array}\right.$$

Arbre de calcul.

$$x^a y^b (x+y)^k \left\langle \begin{array}{l} x^{a+1}y^b(x+y)^{k-1} \\ x^a y^{b+1}(x+y)^{k-1} \end{array}\right.$$

Un calcul intermédiaire.

En considérant un arbre binaire de niveau de profondeur n, et avec pour racine l'expression $(x+y)^n$, l'application répétée de la règle de calcul donne la formule du binôme de Newton $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$. Voici un exemple de calcul avec $n=3$.

$$(x+y)^3 \left\langle \begin{array}{l} x(x+y)^2 \left\langle \begin{array}{l} x^2(x+y)^1 \left\langle \begin{array}{l} x^3 \\ x^2y \end{array}\right. \\ xy(x+y)^1 \left\langle \begin{array}{l} x^2y \\ xy^2 \end{array}\right. \end{array}\right. \\ y(x+y)^2 \left\langle \begin{array}{l} xy(x+y)^1 \left\langle \begin{array}{l} x^2y \\ xy^2 \end{array}\right. \\ y^2(x+y)^1 \left\langle \begin{array}{l} xy^2 \\ y^3 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Un exemple de calcul.

2.3. **Leibniz sans effort.** Pour la formule de dérivation de Liebniz, comme la dérivation est une fonctionnelle linéaire, la brique de base est la classique formule de dérivation d'un produit, voir ci-dessous à gauche. Les calculs intermédiaires sont de la forme indiquée ci-dessous à droite.

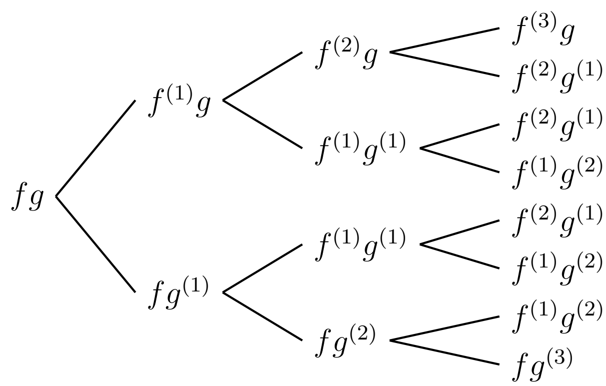
$$uv \left\langle \begin{array}{l} u'v \\ uv' \end{array}\right.$$

Arbre de calcul.

$$f^{(a)}g^{(b)} \left\langle \begin{array}{l} f^{(a+1)}g^{(b)} \\ f^{(a)}g^{(b+1)} \end{array}\right.$$

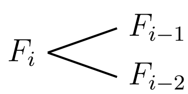
Un calcul intermédiaire.

En considérant un arbre binaire de niveau de profondeur n, et avec pour racine la fonction produit fg, l'application répétée de la règle de calcul donne la formule de dérivation de Liebniz $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$. Voici un exemple de calcul avec $n = 3$.

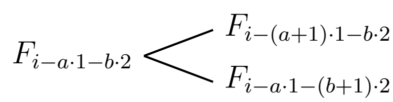


Un exemple de calcul.

2.4. **Une petite astuce pour Fibonacci.** Pour la suite de Fibonacci, la règle de calcul est évidemment donnée par la relation de récurrence $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$, et pour les calculs intermédiaires, nous faisons apparaître ce qui a été soustrait à l'indice.

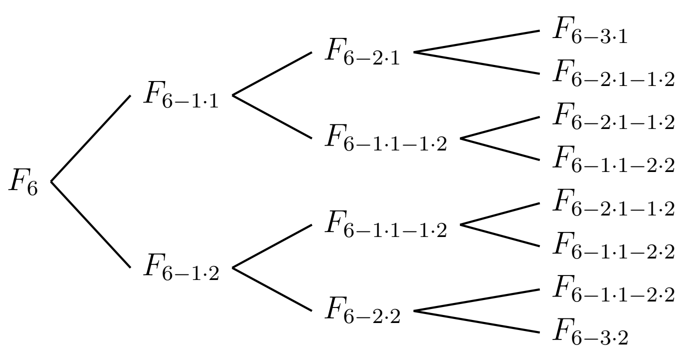


Arbre de calcul.



Un calcul intermédiaire.

Pour valider $F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k$, nous considérons un arbre binaire de niveau de profondeur n, et avec pour racine le terme F_{2n}. Ainsi, pour $n = 3$, nous obtenons l'arbre suivant.

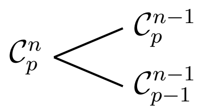


Un exemple de calcul.

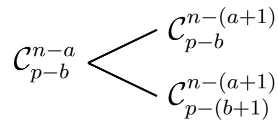
Aux feuilles de l'arbre, tout à droite, nous avons les termes $F_{2n-k\cdot 1-(n-k)\cdot 2} = F_k$ pour $k \in [\![0\,;n]\!]$, donc $F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k$ est validée.

Remarque 3. *Plus généralement, nous avons $F_{m+2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{m+k}$ par simple décalage de tous les indices, puisque cette opération est compatible avec notre méthode de construction.*

2.5. **Avec des coefficients binomiaux.** Définissons $\mathcal{C}_p^n$ sur $\mathbb{Z}^2$ par $\mathcal{C}_p^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0\,;n]\!]$, et $\mathcal{C}_p^n = 0$ dans les autres cas. Nous allons démontrer que $\mathcal{C}_p^n = \binom{n}{p}$ si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0\,;n]\!]$. Pour cela, notons que $\mathcal{C}_p^n = \mathcal{C}_p^{n-1} + \mathcal{C}_{p-1}^{n-1}$: c'est facile à vérifier pour les valeurs non nulles de $\mathcal{C}_p^n$, et ensuite à généraliser aux cas restants. Ceci nous amène à considérer la situation suivante.

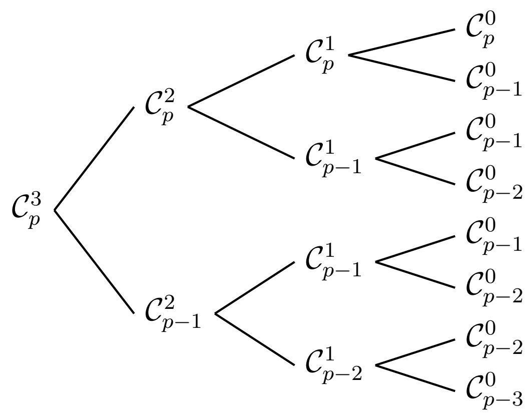


Arbre de calcul.



Un calcul intermédiaire.

Nous considérons alors l'arbre binaire de niveau de profondeur n avec pour racine le terme $\mathcal{C}_p^n$ doublement indexé par n et k. Ainsi, pour $n = 3$ et $p \in [\![0\,;3]\!]$, nous obtenons l'arbre suivant où les feuilles sont toutes du type $\mathcal{C}_p^0$.



Un exemple de calcul.

Nous obtenons donc $\mathcal{C}_p^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\mathcal{C}_{p-k}^0$. Or, pour $p \in [\![0\,;n]\!]$, la somme de droite se réduit à $\binom{n}{p}\mathcal{C}_0^0$, d'où $\mathcal{C}_p^n = \binom{n}{p}$ comme annoncé. Dès lors, l'identité $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\binom{n}{k}$, soit de façon équivalente $\mathcal{C}_n^{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\mathcal{C}_{n-k}^n$, se démontre en considérant un arbre de racine $\mathcal{C}_n^{2n}$ qui donne $\mathcal{C}_n^{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\mathcal{C}_{n-k}^{2n-n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\mathcal{C}_{n-k}^n$ comme souhaité.

Remarque 4. *Notant $\mathsf{C}(n\,;p)$ le nombre de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble $\mathscr{E}$ de cardinal n, il est immédiat de voir que $\mathsf{C}(n\,;p) = \mathsf{C}(n-1\,;p) + \mathsf{C}(n-1\,;p-1)$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1\,;n]\!]$.*[3] *Comme pour $\mathcal{C}_p^n$, nous avons alors $\mathsf{C}(n\,;p) = \binom{n}{p}$ si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0\,;n]\!]$. Une fois ceci démontré, il est très facile de deviner que $\mathsf{C}(2n\,;n) = \sum_{k=0}^n \mathsf{C}(n\,;k)\mathsf{C}(n\,;n-k)$ en partageant $\mathscr{E}$ en deux sous-ensembles particuliers disjoints de cardinal n, choisis et fixés arbitrairement.*

Remarque 5. *L'identité $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ est un cas particulier de la formule de Van der Monde, à savoir de $\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$ pour $(m\,;n) \in \mathbb{N}^2$ et $p \in [\![0\,;\min(n\,;m)]\!]$. Comme à la fin de la remarque précédente, la découverte de $\mathsf{C}(m+n\,;p) = \sum_{k=0}^p \mathsf{C}(m\,;k)\mathsf{C}(n\,;p-k)$ est aisée.*

2.6. **Bell sonne la fin du jeu.** Pour $i \in \mathbb{N}^*$, notons B_i le nombre de façons de partitionner un ensemble de i éléments, et posons $B_0 = 1$ par convention. Pour calculer récursivement B_i, nous allons reprendre des idées présentes dans l'article « *The largest singletons of set partitions* » de Yidong Sun et Xiaojuan Wu.[4]

- Pour $(n\,;p) \in \mathbb{N}^2$, notons $\mathcal{B}_p^n$ le nombre de partitions de $[\![1\,;n+1]\!]$ contenant le singleton $\{p+1\}$, et aucun singleton $\{k\}$ tel que $k > p+1$. De façon abusive, dans ce type de situation, nous dirons que $\{p+1\}$ est le plus grand singleton.[5]

3. Il suffit de distinguer les sous-ensembles contenant un élément particulier $e \in \mathscr{E}$, choisi et fixé arbitrairement, de ceux ne le contenant pas.

4. Voir `https://doi.org/10.1016/j.ejc.2010.10.011` sur le site ScienceDirect.

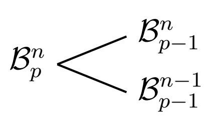
5. L'idée consiste à s'appuyer sur l'élément le plus simple qu'une partition puisse contenir : le singleton. Pour restreindre le nombre de cas à analyser, on choisit, arbitrairement, de se focaliser sur les singletons maximaux.

- Notons que $\mathcal{B}_n^n = B_n$. En effet, l'existence du singleton maximal $\{n+1\}$ dans une partition de $[\![1\,;n+1]\!]$ permet, en ignorant $\{n+1\}$, d'obtenir une partition de $[\![1\,;n]\!]$. Cette construction est réversible, donc bijective.
- Le cas intéressant de $\mathcal{B}_0^n$ est abordé dans la remarque 6 plus bas (nous n'aurons pas besoin de $\mathcal{B}_0^n$ pour notre introduction aux nombres de Bell).
- Que pouvons-nous dire de $\mathcal{B}_1^n$ lorsque $n \in \mathbb{N}_{>2}$? Considérons une partition π de $[\![1\,;n+1]\!]$ ayant $\{2\}$ comme singleton maximal. Deux cas se présentent à nous.
  (1) **Cas 1 : $\{1\}$ fait partie de $\boldsymbol{\pi}$.** En ignorant 1 et 2, et en remplaçant chaque naturel $k \in [\![3\,;n+1]\!]$ par $k-2 \in [\![1\,;n-1]\!]$, nous obtenons une partition π' de $[\![1\,;n-1]\!]$ sans aucun singleton.
  (2) **Cas 2 : $\{1\}$ est absent de $\boldsymbol{\pi}$.** Dans ce cas, $\{2\}$ est l'unique singleton de π. En ignorant 2, en transformant l'ensemble $\{1\,;k_1\,;\ldots;k_s\}$ de π en $\{k_1\}\sqcup\cdots\sqcup\{k_s\}$, et en remplaçant chaque naturel $k \in [\![3\,;n+1]\!]$ par $k-2 \in [\![1\,;n-1]\!]$, nous obtenons une partition π' de $[\![1\,;n-1]\!]$ avec pour singletons $\{k_1\}$, ... , $\{k_s\}$ (on peut voir 1 comme un marqueur de singletons).

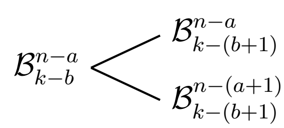
  Les procédés ci-dessus étant réversibles, par bijection, nous obtenons : $\mathcal{B}_1^n = B_{n-1}$ lorsque $n \in \mathbb{N}_{>2}$. Comme $\mathcal{B}_1^1 = 1$ et $B_0 = 1$, l'identité est valable sur $\mathbb{N}^*$.
- Plus généralement, considérons une partition π de $[\![1\,;n+1]\!]$ ayant $\{p+1\}$ comme singleton maximal. Deux cas se présentent à nous.
  (1) **Cas 1 : $\{p\}$ fait partie de $\boldsymbol{\pi}$.** En ignorant $\{p+1\}$, et en remplaçant chaque naturel $k \in [\![p+2\,;n+1]\!]$ par $k-1 \in [\![p+1\,;n]\!]$, nous obtenons une partition π' de $[\![1\,;n]\!]$ ayant $\{p\}$ comme singleton maximal.
  (2) **Cas 2 : $\{p\}$ est absent de $\boldsymbol{\pi}$.** En échangeant p et $(p+1)$, nous obtenons une partition π' de $[\![1\,;n+1]\!]$ ayant $\{p\}$ comme singleton maximal.

  Les procédés ci-dessus étant réversibles, par bijection, nous avons : $\mathcal{B}_p^n = \mathcal{B}_{p-1}^{n-1} + \mathcal{B}_{p-1}^n$.

En résumé, $B_n = \mathcal{B}_n^n = \mathcal{B}_1^{n+1}$ avec $\mathcal{B}_p^n = \mathcal{B}_{p-1}^n + \mathcal{B}_{p-1}^{n-1}$ et $\mathcal{B}_1^1 = 1$. Comme les relations de récurrence vérifiées par $(\mathcal{B}_p^n)$ ressemblent à celles de la suite $(\mathcal{C}_p^n)$, il devient évident de procéder comme suit.

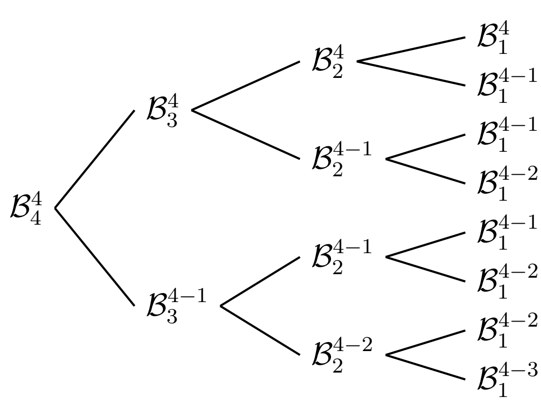


Arbre de calcul.



Un calcul intermédiaire.

Prenons $\mathcal{B}_{n+1}^{n+1} = B_{n+1}$ pour racine de l'arbre binaire comme dans l'exemple suivant où $n = 3$.



Un exemple de calcul.

Nous arrivons à $\mathcal{B}_{n+1}^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{B}_1^{n+1-k}$ qui équivaut à $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$. Comme $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, nous avons bien $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

Remarque 6. *$\mathcal{B}_0^n$ est le nombre de partitions de $[\![1\,;n]\!]$ sans singleton. En effet, si $\{1\}$ est le singleton maximal d'une partition de $[\![1\,;n+1]\!]$, alors en ignorant $\{1\}$, et en remplaçant chaque naturel $k \in [\![2\,;n+1]\!]$ par $k-1 \in [\![1\,;n]\!]$, nous obtenons une partition de $[\![1\,;n]\!]$ sans singleton. Cette construction est réversible, donc bijective.*

2.7. **Généraliser aux coefficients multimoniaux.** La méthode peut s'adapter aux cas d'un arbre n-aire. Par exemple, ce qui suit nous donne la formule de Liebniz pour trois fonctions : $(fgh)^{(n)} = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \binom{n}{k_1\,k_2\,k_3} f^{(k_1)} g^{(k_2)} h^{(k_3)}$ où $\binom{n}{k_1\,k_2\,k_3}$ compte le nombre de chemins avec k_1 déplacements vers le haut, k_2 déplacements vers le milieu, et k_3 déplacements vers le bas.

$$uvw \;\begin{array}{l} \nearrow\; u'vw \\ \rightarrow\; uv'w \\ \searrow\; uvw' \end{array} \qquad\qquad f^{(a)}g^{(b)}h^{(c)} \;\begin{array}{l} \nearrow\; f^{(a+1)}g^{(b)}h^{(c)} \\ \rightarrow\; f^{(a)}g^{(b+1)}h^{(c)} \\ \searrow\; f^{(a)}g^{(b)}h^{(c+1)} \end{array}$$

Arbre de calcul. *Un calcul intermédiaire.*

Notant $\mathcal{C}_{k_1\,k_2\,k_3}^{n} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}$ où $k_1+k_2+k_3 = n$, nous avons $\binom{n}{k_1\,k_2\,k_3} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}$ via ce qui suit.

$$\mathcal{C}_{k_1\,k_2\,k_3}^{n} \;\begin{array}{l} \nearrow\; \mathcal{C}_{(k_1-1)\,k_2\,k_3}^{n-1} \\ \rightarrow\; \mathcal{C}_{k_1\,(k_2-1)\,k_3}^{n-1} \\ \searrow\; \mathcal{C}_{k_1\,k_2\,(k_3-1)}^{n-1} \end{array} \qquad \mathcal{C}_{(k_1-b)\,(k_2-c)\,(k_3-d)}^{n-a} \;\begin{array}{l} \nearrow\; \mathcal{C}_{(k_1-(b+1))\,(k_2-c)\,(k_3-d)}^{n-(a+1)} \\ \rightarrow\; \mathcal{C}_{(k_1-b)\,(k_2-(c+1))\,(k_3-d)}^{n-(a+1)} \\ \searrow\; \mathcal{C}_{(k_1-b)\,(k_2-c)\,(k_3-(d+1))}^{n-(a+1)} \end{array}$$

Arbre de calcul. *Un calcul intermédiaire.*

Par contre, si la suite L est telle que $L_i = L_{i-1} + L_{i-2} + L_{i-3}$, ce qui suit ne sera pas aussi pertinent que ce que nous avions obtenu pour la suite de Fibonacci : le problème ici est qu'aboutir à $L_{3n-k_1\cdot 1-k_2\cdot 2-k_3\cdot 3} = L_{3n-k_1-2k_2-3(n-k_1-k_2)} = L_{2k_1-k_2}$ est peu intéressant.

$$L_k \;\begin{array}{l} \nearrow\; L_{k-1} \\ \rightarrow\; L_{k-2} \\ \searrow\; L_{k-3} \end{array} \qquad\qquad L_{k-a\cdot 1-b\cdot 2-c\cdot 3} \;\begin{array}{l} \nearrow\; L_{k-(a+1)\cdot 1-b\cdot 2-c\cdot 3} \\ \rightarrow\; L_{k-a\cdot 1-(b+1)\cdot 2-c\cdot 3} \\ \searrow\; L_{k-a\cdot 1-b\cdot 2-(c+1)\cdot 3} \end{array}$$

Arbre de calcul. *Un calcul intermédiaire.*

3. La formule du binôme de Newton implique...

3.1. **Un classique des identités algébriques.** Dans cette section, nous changeons de point de vue : nous allons partir du fait très classique suivant pour obtenir les identités mises en lumière au début de ce document.

Fait 7. *Soit $\mathbb{A}$ un anneau, forcément unitaire,*[6] *qui est commutatif. Dans l'anneau des polynômes à deux variables $\mathbb{A}[X,Y]$, nous avons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_k^n X^k Y^{n-k}$.*[7] *Ceci est la formule générique du binôme de Newton.*

6. Il fut un temps où un anneau n'avait pas forcément un élément neutre pour le produit.

7. Rappelons que $\mathcal{C}_k^n$ est défini sur $\mathbb{Z}^2$ par $\mathcal{C}_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0\,;n]\!]$, et $\mathcal{C}_k^n = 0$ sinon. Nous savons aussi que $\mathcal{C}_k^n = \mathcal{C}_k^{n-1} + \mathcal{C}_{k-1}^{n-1}$.

Démonstration. Notons $(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} c(n,k) X^k Y^{n-k}$. Comme $\mathbb{A}$ n'est pas forcément intègre, nous devons être prudent (voir la remarque 8 juste après). Voici une démarche possible (nous proposons une autre approche classique dans la remarque 9).

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+1} c(n+1,k) X^k Y^{n+1-k} \\
&= (X+Y)^{n+1} \\
&= (X+Y)\,(X+Y)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} c(n,k) X^{k+1} Y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} c(n,k) X^k Y^{n+1-k} \\
&= c(n,n) X^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \big(c(n,k-1) + c(n,k)\big) X^k Y^{n+1-k} + c(n,0) Y^{n+1}
\end{aligned}$$

Ceci nous donne les relations suivantes.

(1) $c(n+1,n+1) = c(n,n)$ et $c(n+1,0) = c(n,0)$.

(2) $c(n+1,k) = c(n,k) + c(n,k-1)$ pour $k \in [\![1\,;n]\!]$.

Une récurrence permet alors d'obtenir $c(n,k) = \mathcal{C}_k^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0\,;n]\!]$ □

Remarque 8. *Dans un anneau intègre, nous pouvons aller plus vite. En effet, en notant $P(X,Y) = (X+Y)^n$, la dérivation formelle suivie d'une évaluation en $(0,1)$ nous donne $k!\,c(n,k) = \frac{\mathrm{d}^k P}{\mathrm{d}X^k}(0,1) = \prod_{i=n+1-k}^{n} i$, et par conséquent $c(n,k) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} = \mathcal{C}_k^n$ dans le corps des fractions de $\mathbb{A}$, puis dans $\mathbb{A}$ lui-même.*

Remarque 9. *Une autre approche pour obtenir la formule du fait 7 consiste à démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{C}(n\,;k) X^k Y^{n-k}$.[8] En effet, écrivons $(X+Y)^n = \prod_{k=1}^{n} (X+Y)_k$ avec des indices étiquetant les parenthèses. En distribuant, le nombre de $X^k Y^{n-k}$ obtenus correspond au nombre de choix de k parenthèses pour X parmi les n disponibles, c'est-à-dire $\mathsf{C}(n\,;k)$ fois.*

Dans les applications à venir, nous allons nous appuyer sur la formule suivante considérée dans différents anneaux bien choisis.

Fait 10. *Si $\mathbb{A}$ est un anneau commutatif, alors $\forall (a,b) \in \mathbb{A}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_k^n a^k b^{n-k}$.*

Démonstration. Il suffit d'évaluer en (a,b) la formule générique du binôme de Newton. □

3.2. **Leibniz, le retour.** XXXX

3.3. **Fibonacci via Newton.** XXXX

3.4. **Bell en écho de Fibonacci.** XXXX

3.5. **La loi binomiale est algébrique.** XXXX

8. Rappelons que $\mathsf{C}(n\,;k)$ le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble de cardinal n.