

# IDENTITÉS PARTICULIÈRES GÉNÉRALISABLES RIGOREUSEMENT

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
[https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/visual-proof/  
polynomial-analytic-principles](https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/visual-proof/polynomial-analytic-principles).*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



## TABLE DES MATIÈRES

- |  |   |
|--|---|
| 1. Au commencement étaient les polynômes     | 2 |
| 2. Ensuite vinrent les fonctions analytiques | 5 |



**Fait 1.** Soit  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction polynomiale à  $n$  variables, où  $n \in \mathbb{N}^*$ . Si  $p$  s'annule sur  $(\mathbb{R}_+^*)^n$ , alors  $p$  s'annule sur  $\mathbb{R}^n$  tout entier.

*Démonstration.* Raisonnons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$  pour démontrer la validité de la propriété  $\mathcal{P}(n)$  définie par « Pour tout fonction polynomiale réelle  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , si  $p$  s'annule sur  $(\mathbb{R}_+^*)^n$ , alors  $p$  s'annule sur  $\mathbb{R}^n$  tout entier. ».

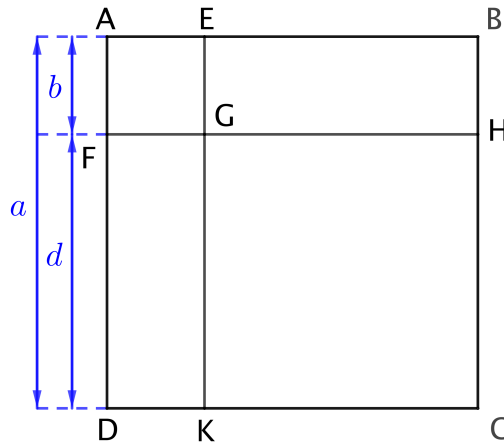
- **Cas de base.**  $\mathcal{P}(1)$  signifie qu'une fonction polynomiale réelle à une variable s'annulant sur  $\mathbb{R}_+^*$  est identiquement nulle sur  $\mathbb{R}$  tout entier. Comme un polynôme réel non nul n'a qu'un nombre fini de racines, nous avons la validité de  $\mathcal{P}(1)$ .
- **Hérédité.** Supposons  $\mathcal{P}(n)$  valide pour un naturel  $n$  quelconque. Soit une fonction polynomiale  $p$  à  $(n+1)$  variables vérifiant les conditions de la propriété  $\mathcal{P}(n+1)$ .
  - (1) Soient  $x \in \mathbb{R}_+^*$  fixé, puis la fonction polynomiale  $p_x(x_1; \dots; x_n) = p(x_1; \dots; x_n; x)$ . Comme  $p_x$  vérifie les conditions de la propriété  $\mathcal{P}(n)$ , par hypothèse de récurrence, nous avons  $p_x(x_1; \dots; x_n) = 0$ , soit  $p(x_1; \dots; x_n; x) = 0$ , pour tous réels  $x_1, \dots, x_n$ .
  - (2) Fixons maintenant des réels  $x_1, \dots, x_n$  de signes quelconques, et considérons la fonction polynomiale  $\ell(x) = p(x_1; \dots; x_n; x)$ . Le point précédent montre que  $\ell$  vérifie  $\mathcal{P}(1)$ , donc  $\ell(x) = 0$ , soit  $p(x_1; \dots; x_n; x) = 0$ , pour tout réel  $x$ , d'après le cas de base.
  - (3) Finalement,  $p(x_1; \dots; x_n; x) = 0$  pour tous réels  $x_1, \dots, x_n$  et  $x$ . Autrement dit, nous avons déduit la validité de  $\mathcal{P}(n+1)$  à partir de celle de  $\mathcal{P}(n)$ .
- **Conclusion.** Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ , la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout naturel non nul  $n$ .  $\square$

**Exemple 2.** En utilisant une approche géométrique semblable à celle présentée plus haut, il devient évident, et rigoureux maintenant, que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1; \dots; a_n) \in \mathbb{R}^n$ , nous avons :

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n (a_k)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$$

**Exemple 3.** Nous laissons le soin au lecteur de vérifier à l'aide d'un cube, le solide géométrique, la validité de l'identité  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  pour tous réels  $a$  et  $b$ .

Considérons maintenant le dessin ci-dessous avec  $d = a - b$ , et la contrainte  $a > b$ .



Le fait 1, bien que très utile, ne peut plus s'appliquer ici au calcul géométrique évident suivant.  
 $\text{Aire}(GHCK) = \text{Aire}(ABCD) - \text{Aire}(ABHF) - \text{Aire}(AEKD) + \text{Aire}(AEGF)$

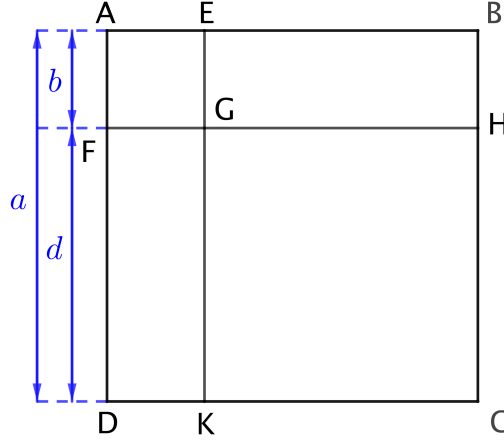
$$\iff (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Peut-on tout de même déduire du calcul géométrique précédent la validité, pour tous les réels  $a$  et  $b$ , de l'identité  $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ ? Le fait 4 suivant montre que cela est possible.

**Fait 4.** Soit  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction polynomiale à  $n$  variables, où  $n \in \mathbb{N}^*$ . Si  $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^n$  contient  $\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n$  où chaque  $\mathcal{E}_k \subseteq \mathbb{R}$  est infini, et si  $p$  s'annule sur  $\mathcal{E}$ , alors  $p$  s'annule sur  $\mathbb{R}^n$  tout entier.

*Démonstration.* La preuve du fait 1 s'adapte facilement au cadre proposé ici (se souvenir que la clé du raisonnement était le fait qu'un polynôme réel n'admet qu'un nombre fini de racines).  $\square$

**Exemple 5.** Considérons le dessin ci-dessous avec  $d = a - b$ , et la contrainte  $a > b$ .

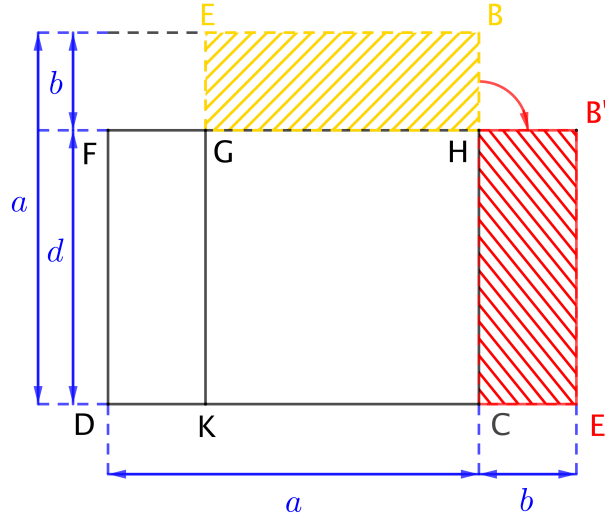


Nous avons les calculs géométriques simples suivants.

$$\text{Aire}(ABCD) - \text{Aire}(AEGF) = \text{Aire}(GHCK) + \text{Aire}(EBHG) + \text{Aire}(FGKD)$$

$$\iff a^2 - b^2 = \text{Aire}(GHCK) + \text{Aire}(EBHG) + \text{Aire}(FGKD)$$

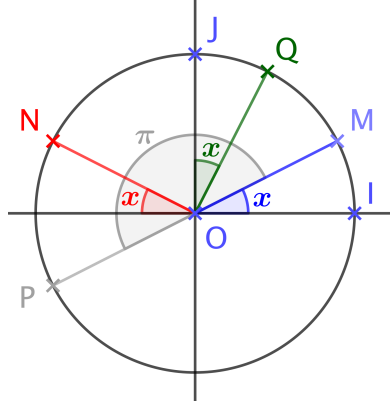
En déplaçant ensuite le rectangle  $EBHG$  comme ci-dessous, nous obtenons alors un rectangle de dimension  $(a + b) \times (a - b)$ .



Finalement, nous obtenons  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  si  $a > b$ , puis, en appliquant le fait 4 au polynôme  $p(a; b) = a^2 - b^2 - (a + b)(a - b)$ , nous avons :  $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2, a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ .

## 2. ENSUITE VINRENT LES FONCTIONS ANALYTIQUES

Considérons le dessin suivant, où les mesures des angles sont en radians.



Via les points  $M$ ,  $N$ ,  $P$  et  $Q$ , il est facile de fournir des arguments géométriques de symétrie justifiant que, sous la condition  $x \in ]0; \frac{\pi}{4}[$ , nous avons :

$$\begin{array}{lll} \bullet \cos(\pi - x) = -\cos x & \bullet \cos(x + \pi) = -\cos x & \bullet \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin(\pi - x) = \sin x & \sin(x + \pi) = -\sin x & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{array}$$

De nouveau, il serait bien de pouvoir passer, sans plus d'effort, à la validité des formules ci-dessus sur  $\mathbb{R}$  tout entier (*considérer les autres cas n'est pas compliqué, mais c'est pénible*). Nous allons voir que cela est licite grâce au fait 7 suivant qui est un peu technique, car il nécessite la notion de fonction analytique, un concept dont nous donnons la définition tout de suite.

**Définition 6.** Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert non vide. Une fonction complexe  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  est dite holomorphe en  $\omega \in \Omega$ , si la limite  $\lim_{\substack{|z-\omega| \rightarrow 0 \\ z \in \Omega - \{\omega\}}} \left( \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega} \right)$  existe dans  $\mathbb{C}$ .

Tout comme avec les fonctions réelles dérivables sur  $\mathbb{R}$ , la propriété d'holomorphie se conserve par addition, multiplication, inverse et composition. De plus, comme les fonctions polynomiales, les fonctions holomorphes vérifient des restrictions fortes sur leurs zéros éventuels, comme le montre le fait classique suivant.

**Fait 7.** Soient  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert connexe non vide, et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe non identiquement nulle. Si  $\lambda \in \Omega$  vérifie  $f(\lambda) = 0$ , alors il existe un ouvert  $V$  tel que  $\lambda \in V \subseteq \Omega$ , et  $\forall z \in V - \{\lambda\}$ ,  $f(z) \neq 0$  (c'est le principe des zéros isolés).

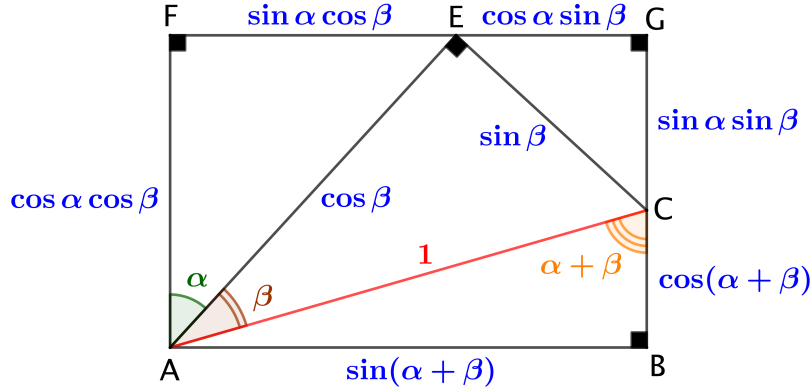
*Démonstration.* Ceci nous amènerait trop loin, donc nous admettrons ce résultat.  $\square$

Si nous revenons à nos identités trigonométriques, il suffit de savoir que les fonctions circulaires réelles ne sont en fait que les restrictions à  $\mathbb{R}$  de fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}$  tout entier, et de noter que le raisonnement géométrique au début de cette section fait clairement apparaître des zéros non isolés pour les fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}$  suivantes.<sup>1</sup>

- $f_1(z) = \cos(\pi - z) + \cos z$  et  $f_2(z) = \sin(\pi - z) - \sin z$
- $f_3(z) = \cos(z + \pi) + \cos z$  et  $f_4(z) = \sin(z + \pi) + \sin z$
- $f_5(z) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \sin z$  et  $f_6(z) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \cos z$

1. Nous admettrons ces affirmations qui ne sont pas violentes à démontrer une fois que l'on a les bases de la théorie des fonctions holomorphes.

Que faire si nous avons des formules trigonométriques impliquant deux variables ? Par exemple, le dessin suivant, par simple application des définitions géométriques du cosinus et du sinus, donne à la fois  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$  et  $\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta$  pour  $(\alpha ; \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  tel que  $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ .



Le fait 9 ci-dessous, qui généralise le fait 7, implique la validité des formules trigonométriques précédentes sur  $\mathbb{R}^2$  tout entier en faisant les choix ci-après. Nous voilà sauvés !

- $f_1(\alpha ; \beta) = \cos(\alpha + \beta) - \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
- $f_2(\alpha ; \beta) = \sin(\alpha + \beta) - \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta$

**Définition 8.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un ouvert non vide. Une fonction complexe  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  est dite holomorphe en  $\omega \in \Omega$ , si elle est  $\mathbb{C}$ -différentiable en  $\omega$ , c'est-à-dire s'il existe une application  $\mathbb{C}$ -linéaire  $Df : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant  $\lim_{\substack{\|z-\omega\|_n \rightarrow 0 \\ z \in \Omega - \{\omega\}}} \left( \frac{f(z) - f(\omega) - Df(\omega)(z - \omega)}{\|z - \omega\|_n} \right) = 0$ .

**Fait 9.** Soient  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un ouvert connexe non vide, et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe. Si  $f$  s'annule sur un ouvert de  $\Omega$ , alors  $f$  est identiquement nulle (c'est le théorème d'identité).

*Démonstration.* Ceci nous amènerait trop loin, donc nous admettrons ce résultat. Si vous avez une impression de déjà-lu, c'est normal.  $\square$