

BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



TABLE DES MATIÈRES

1. Triangles	2
1.1. Avec un côté fixé	2
1.2. Le cas général	3
2. Quadrilatères	5
2.1. Les rectangles	5
2.2. Les parallélogrammes	5
2.3. Le cas général	6
3. Les polygones	8
3.1. Où allons-nous ?	8
3.2. Condition nécessaire	8
3.3. Condition suffisante	12

Ce document, qui se veut de niveau élémentaire,¹ s'intéresse au classique problème de l'isopérimétrie plane, c'est-à-dire la recherche d'une surface plane maximisant son aire pour un périmètre fixé. Nous allons juste considérer le cas des polygones, tout en nous limitant à des preuves les plus géométriques possible.

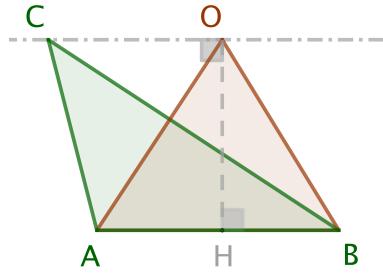
Pour ne pas alourdir le texte, on raisonnera parfois modulo des isométries : on pourra parler « du carré de côté c », « du triangle équilatéral de côté c » ...

1. TRIANGLES

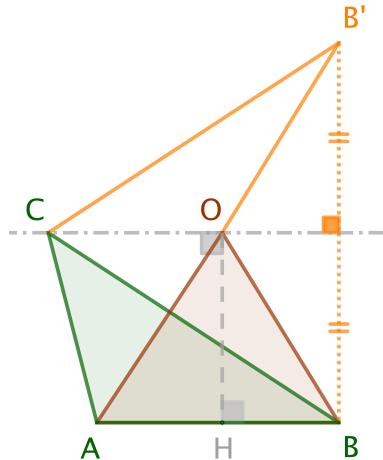
1.1. Avec un côté fixé.

Fait 1. *Considérons tous les triangles de périmètre fixé, et ayant tous un côté en commun. Parmi tous ces triangles, un seul est d'aire maximale, c'est le triangle isocèle ayant pour base le côté commun.*

Démonstration. Soit ABC un triangle de périmètre p , et fixons le côté $[AB]$. Pour tout point M sur la parallèle à (AB) passant par C , nous savons que $\text{Aire}(ABM) = \text{Aire}(ABC)$. Notons alors O le point sur cette parallèle tel que ABO soit isocèle en O .



Via une symétrie axiale, voir ci-dessous, il est aisément de noter que $\text{Perim}(ABC) \geq \text{Perim}(ABO)$, avec égalité uniquement si ABC est isocèle en C .



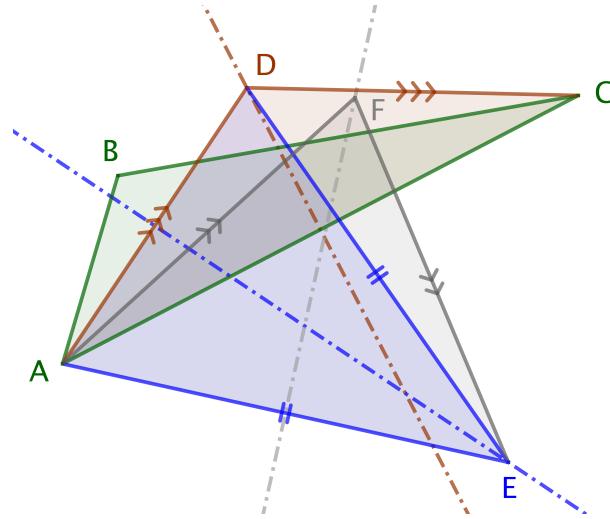
Une dilatation « verticale » de rapport $r = \frac{\text{Perim}(ABC)}{\text{Perim}(ABO)} \geq 1$ donne un triangle isocèle ABO' tel que $\text{Perim}(ABO') = p$ et $\text{Aire}(ABO') \geq \text{Aire}(ABC)$, avec égalité uniquement si ABC est isocèle en C . Contrat rempli!² \square

1. Ceci nous amènera à admettre certains théorèmes faussement simples.
2. La remarque 1.3 explique comment employer la méthode des extrema liés. Les arguments fournis à cet endroit s'adaptent facilement au cas des triangles de base fixée.

1.2. Le cas général.

Fait 2. Considérons tous les triangles de périmètre fixé p . Parmi tous ces triangles, un seul est d'aire maximale, c'est le triangle équilatéral de côté $c = \frac{1}{3}p$.

Démonstration. Nous allons donner une démonstration constructive via une application itérative du fait 1 qui va donner à la limite le triangle équilatéral d'aire maximale, et ceci avec une vitesse de convergence exponentielle.³ Partons donc d'un triangle ABC quelconque, mais de périmètre p , le fait 1 nous donne successivement les triangles ACD , ADE et AEF isocèles en D , E et F respectivement, ayant tous pour périmètre p , et ceci avec des aires de plus en plus grandes. Le dessin suivant amène à conjecturer qu'en poursuivant le procédé pour avoir ensuite un triangle AFG isocèle en G ..., nous aboutirons « à la limite » à un triangle équilatéral.



Le passage d'un triangle quelconque ABC au triangle ACD isocèle en D nous amène à nous concentrer sur ce que donne notre procédé d'agrandissement d'aire à périmètre fixé pour des triangles isocèles. Voici ce que nous pouvons affirmer.

- (1) Considérons ACD isocèle en D tel que $AC > AD$. Comme $AC + AD + DC = p$, nous avons $AC > \frac{1}{3}p > AD$. Dès lors, on doit avoir ensuite $AD < \frac{1}{3}p < AE$, car $AD + DE + AE = p$ et $AD = AE$.
- (2) Considérons ADE isocèle en E tel que $AD < AE$ en oubliant le point précédent. Comme $AD + DE + AE = p$, nous avons $AD < \frac{1}{3}p < AE$. Dès lors, on doit avoir ensuite $AE > \frac{1}{3}p > AF$, car $AE + AF + EF = p$ et $AF = EF$.
- (3) Les points précédents démontrent que notre procédé n'arrivera jamais en un nombre fini d'étapes à un triangle équilatéral si l'on part d'un triangle isocèle non équilatéral.⁴
- (4) Nous devons quantifier les écarts à la mesure « limite » $p' = \frac{1}{3}p$.
 - Dans ADC , posant $AD = p' - \epsilon$, nous avons $AC = p' + 2\epsilon$.
 - Dans ADE , posant $AE = p' + \epsilon'$, nous avons $AD = p' - 2\epsilon'$.
 - Donc $\epsilon' = \frac{1}{2}\epsilon$.

Nous avons donc une convergence exponentielle des longueurs des côtés vers $p' = \frac{1}{3}p$. Et tout ceci via de la géométrie et de l'analyse élémentaires !

□

3. Ceci ne va nécessiter que l'emploi de propriétés simples de l'ensemble des réels.

4. Et plus généralement si le procédé ne commence pas avec une base de longueur $\frac{1}{3}p$.

Remarque 1.1. La preuve élémentaire classique commence par noter que si ABC n'est pas équilatéral, en particulier il n'est pas isocèle en A , donc, selon le fait 1, il existe un triangle isocèle de base $[BC]$, de même périmètre et d'aire strictement plus grande. Ceci nous prouve qu'un triangle maximisant l'aire à périmètre fixé ne peut être qu'équilatéral. Cette condition nécessaire est-elle suffisante ? Ce sera vrai si nous savons qu'au moins un triangle maximisant l'aire à périmètre fixé existe, puisque, dans ce cas, un tel triangle ne pourra être qu'équilatéral.⁵ Nous voilà obligé de faire appel aux techniques d'analyse.

- On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- Les triangles ABC tels que $\text{Perim}(ABC) = p$ sont représentés en posant $A(0; 0)$, $B(AB; 0)$ et $C(x_C; y_C)$ avec $y_C \geq 0$. Un triangle peut donc avoir trois représentations, mais peu importe. De plus, on accepte les triangles dégénérés pour lesquels nous avons $x_B = 0$ ou $y_C = 0$ dans notre représentation. Nous notons alors $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble des triplets $(x_B; x_C; y_C)$ ainsi obtenus.
- Il est facile de justifier que \mathcal{T} est séquentiellement fermé, donc fermé, dans \mathbb{R}^3 . De plus, \mathcal{T} est borné car x_B , x_C et y_C le sont. En résumé, \mathcal{T} est un compact de \mathbb{R}^3 .
- La fonction $s : (x_B; x_C; y_C) \in \mathcal{T} \mapsto 0,5x_B y_C \in \mathbb{R}_+$ est la fonction « aire » des triangles représentés. Par continuité et compacité, on sait que s admet un maximum sur \mathcal{T} , un tel maximum ne pouvant pas être atteint pour un triangle dégénéré. Mission accomplie !

Remarque 1.2. La formule de Héron donne qu'un triangle de côtés a , b et c , et de demi-périmètre $s = 0,5p$, possède une aire égale à $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. La comparaison des moyennes géométriques et arithmétiques d'ordre 3 nous donne alors une solution algébrique efficace, puisque de $\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}((s-a) + (s-b) + (s-c))$, nous déduisons $s(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{1}{27}s^4$, puis $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{p^2}{12\sqrt{3}}$ où $\frac{p^2}{12\sqrt{3}}$ est l'aire du triangle équilatéral de périmètre p .

Remarque 1.3. L'aire d'un triangle étant positive ou nulle, nous pouvons chercher à maximiser son carré $f(a; b; c) = s(s-a)(s-b)(s-c)$, sous la contrainte $2s = a+b+c$ où $s > 0$ est constant. Notant $g(a; b; c) = a+b+c-2s$, la contrainte s'écrit $g(a; b; c) = 0$.

- Si un extremum existe, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\partial_a f = \lambda \partial_a g$, $\partial_b f = \lambda \partial_b g$ et $\partial_c f = \lambda \partial_c g$ d'après la méthode des extrema liés.
- Donc $-s(s-b)(s-c) = -s(s-a)(s-c) = -s(s-a)(s-b)$, et par conséquent $(s-b)(s-c) = (s-a)(s-c) = (s-a)(s-b)$.
- Les cas $s = a$, $s = b$ et $s = c$ donnent $f(a; b; c) = 0$.
- Le cas $[s \neq a, s \neq b \text{ et } s \neq c]$ n'est envisageable que si $a = b = c = \frac{p}{3}$, ceci impliquant $f(a; b; c) = \frac{1}{16}p\left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{p^2}{12\sqrt{3}}\right)^2 > 0$.
- En résumé, l'existence d'un maximum implique que ce maximum corresponde au cas du triangle équilatéral.
- Il reste à démontrer qu'un tel maximum existe pour pouvoir conclure : ceci est facile à justifier en considérant l'ensemble compact $[0; 2s]^3$ de \mathbb{R}^3 .

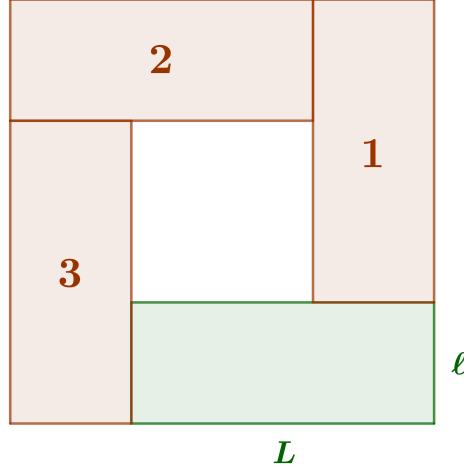
5. Sans cette existence, il se pourrait, par exemple, que le triangle équilatéral soit à part, et que les autres aient des aires augmentant indéfiniment de leur côté, sans mauvais jeu de mots, en dépassant celle du triangle équilatéral qui serait une sorte de maximum local isolé.

2. QUADRILATÈRES

2.1. Les rectangles.

Fait 3. Considérons tous les rectangles de périmètre fixé p . Parmi tous ces rectangles, un seul est d'aire maximale, c'est le carré de côté $c = 0,25p$.

Démonstration. Voici une preuve géométrique élémentaire s'appuyant sur le dessin suivant où les rectangles 1, 2 et 3 sont isométriques au rectangle vert étudié de dimension $L \times \ell$.



Le raisonnement tient alors aux constatations suivantes accessibles à un collégien.

- (1) Le grand carré a une aire supérieure ou égale à $4L\ell$, et même strictement si le rectangle initial n'est pas un carré.
- (2) Le grand carré a un périmètre égal à $4(L + \ell)$.
- (3) Une homothétie de rapport 0,5 donne un carré de périmètre $0,5 \times 4(L + \ell) = 2(L + \ell)$, et d'aire supérieure ou égale à $0,5^2 \times 4L\ell = L\ell$, avec inégalité stricte si le rectangle initial n'est pas un carré.

Donc, parmi tous les rectangles de périmètre $p = 2(L + \ell)$ et d'aire $L\ell$, le seul qui puisse avoir une aire maximale est le carré. Joli ! Non ? \square

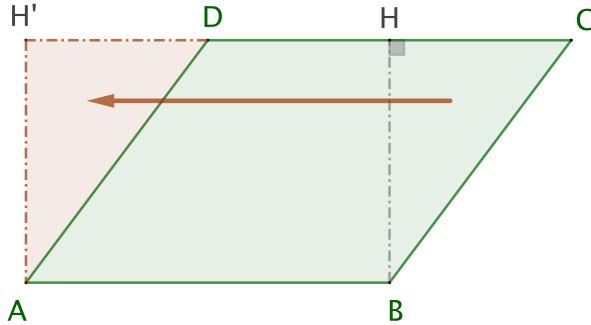
Remarque 2.1. Une preuve courante est d'exprimer l'aire du rectangle comme un polynôme du 2^e degré en L par exemple. On obtient $L\ell = L(0,5p - L)$ qui est maximale en $L_M = 0,25p$ (moyenne des racines), d'où $\ell_M = 0,25p = L_M$.

Remarque 2.2. Au passage, nous avons pour $(L; \ell) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $4L\ell \leq (L + \ell)^2$, c'est-à-dire $2L\ell \leq L^2 + \ell^2$, d'où $\sqrt{L\ell} \leq \sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$, soit la comparaison des moyennes géométriques et quadratiques d'ordre 2.

2.2. Les parallélogrammes.

Fait 4. Considérons tous les parallélogrammes de périmètre fixé p . Parmi tous ces parallélogrammes, un seul est d'aire maximale, c'est le carré de côté $c = 0,25p$.

Démonstration. Le calcul de l'aire d'un parallélogramme, voir le dessin ci-dessous, nous donne $\text{Aire}(ABCD) = \text{Aire}(ABHH')$ et $\text{Perim}(ABCD) \geq \text{Perim}(ABHH')$, avec égalité uniquement si $ABCD$ est un rectangle.



Via une homothétie de rapport $k = \frac{\text{Perim}(ABCD)}{\text{Perim}(ABH'H')} \geq 1$, nous obtenons un rectangle de périmètre égal à p , et d'aire supérieure ou égale à $\text{Aire}(ABCD)$, avec égalité uniquement si $ABCD$ est un rectangle. Nous revenons à la situation du fait 3 qui permet de conclure très facilement. \square

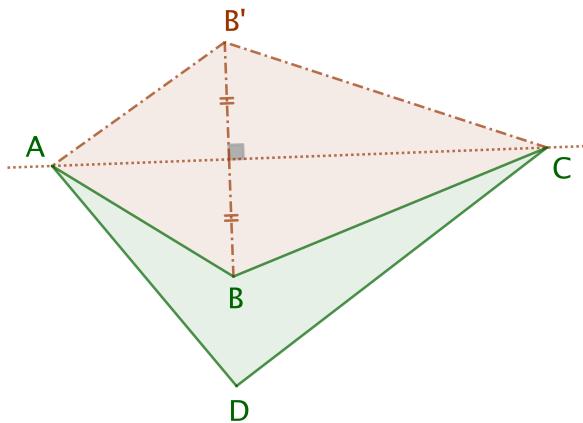
Remarque 2.3. La recherche d'un parallélogramme de périmètre minimal pour une aire fixée est le problème dual de l'isopérimétrie pour les parallélogrammes.

Remarque 2.4. Une méthode analytique devient pénible ici, car il faut par exemple prendre en compte l'angle au sommet A du parallélogramme. L'auteur préfère battre en retraite en clôturant cette remarque ici.

2.3. Le cas général.

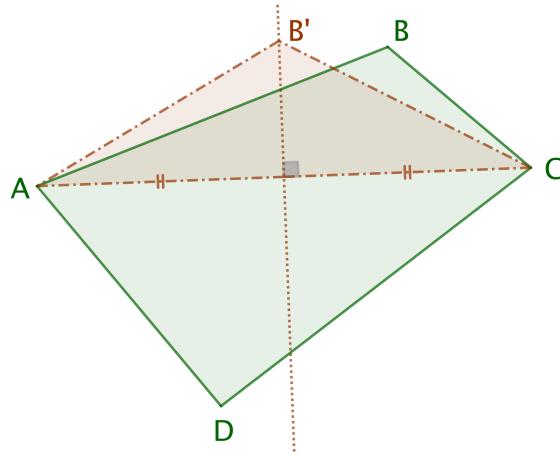
Fait 5. Considérons tous les quadrilatères de périmètre fixé p . Parmi tous ces quadrilatères, un seul est d'aire maximale, c'est le carré de côté $c = 0,25p$.

Démonstration. La figure suivante montre que pour tout quadrilatère $ABCD$ non convexe en B , et de périmètre p , il existe un quadrilatère convexe $AB'CD$ de périmètre p , et tel que $\text{Aire}(AB'CD) > \text{Aire}(ABCD)$. Notre recherche doit donc continuer dans l'ensemble des quadrilatères convexes de périmètre p . De tels quadrilatères \mathcal{Q} sont tels que pour toute paire de points M et N de la surface associée à \mathcal{Q} , le segment $[MN]$ est contenu dans cette surface (cette définition se généralise aux polygones).

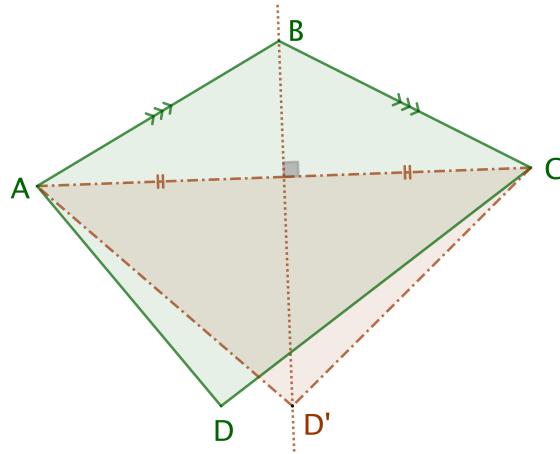


Si un quadrilatère convexe $ABCD$ de périmètre p est tel que $AB \neq BC$, le fait 1 nous donne un quadrilatère convexe $AB'CD$ de périmètre p ,⁶ et vérifiant aussi $AB' = B'C$ et $\text{Aire}(AB'CD) > \text{Aire}(ABCD)$ comme le montre la figure ci-après. On se ramène donc au cas d'un quadrilatère convexe $ABCD$ de périmètre p avec en plus $AB = BC$.

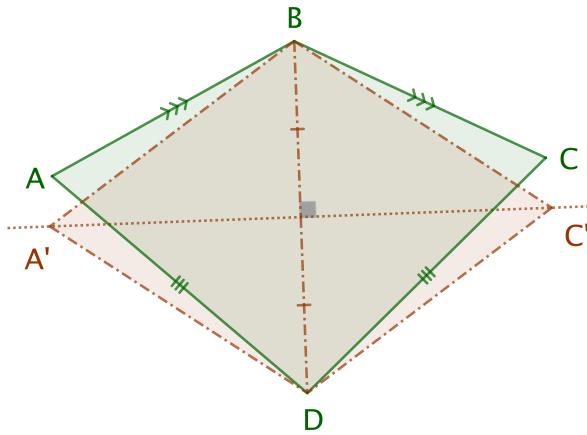
6. Noter que $\text{Perim}(AB'CD) = \text{Perim}(AB'C) + \text{Perim}(ACD) - 2AC$.



La méthode précédente appliquée au sommet D d'un quadrilatère convexe $ABCD$ de périmètre p tel que $AB = BC$ et $AD \neq DC$ permet en fait de se ramener au cas d'un cerf-volant $ABCD$ de périmètre p , avec $AB = BC$ et $AD = DC$, voir ci-dessous.



En supposant que notre cerf-volant ne soit pas un losange, le fait 1 appliqué aux sommets A et C fournit un losange $A'BC'D$ de périmètre p , et tel que $\text{Aire}(A'BC'D) > \text{Aire}(ABCD)$. En effet, nous avons $p = 2(AB+AD)$ et $\text{Perim}(A'BD) = \text{Perim}(ABD)$, donc $A'B = A'D = 0,25p$, et de même, nous obtenons $C'B = C'D = 0,25p$.



Pour conclure, il suffit d'appliquer le fait 4, puisque tout losange est un parallélogramme. Que la géométrie est belle ! \square

3. LES POLYGONES

3.1. Où allons-nous ? Nous allons commencer par obtenir une condition nécessaire, puis nous verrons que cette condition suffit via des arguments d'analyse. Ce qui va suivre nécessite un peu plus de technicité ; pour ce faire, nous utiliserons le vocabulaire suivant.

Définition 1. Pour $n \geq 3$, nous appellerons « n -ligne » tout ligne brisée fermée à n sommets et n côtés.

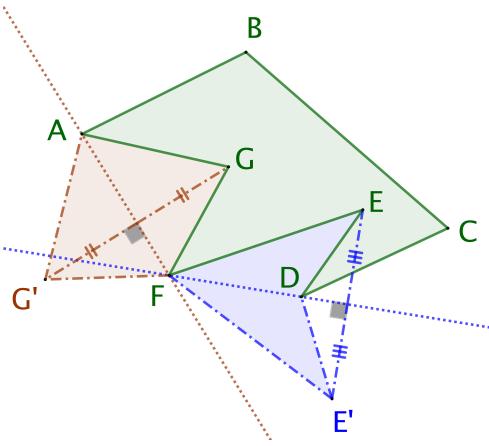
Définition 2. Nous appellerons « n -gone » toute n -ligne qui n'admet aucun triplet de sommets alignés, et aucun couple de côtés se croisant.

Définition 3. Un « n -isogone » désigne un n -gone dont tous les côtés sont de mesure égale.⁷

3.2. Condition nécessaire. Le fait important que nous allons établir, le fait 9, impliquera que si un n -gone maximise son aire à périmètre fixé, alors il doit être régulier.

Fait 6. Si un n -gone \mathcal{P} n'est pas convexe, alors on peut construire un n -gone convexe \mathcal{P}' tel que $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$.

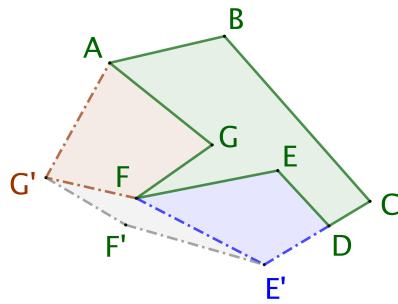
Démonstration. Ici, il ne faut pas être expéditif en indiquant que la preuve du fait 5 se généralise sans aucun souci. En effet, avec $n > 4$, nous pouvons avoir plusieurs points de non-convexité, et les éliminer comme nous l'avons fait pour le quadrilatère n'est pas immédiat : dans la figure suivante, l'élimination des deux points de non convexité G et E de l'heptagone $ABCDEFG$ nous amène à un nouvel heptagone $ABCDEF'G'$ ayant lui aussi deux points de non-convexité F et D ! Donc, rien n'empêche, a priori, d'avoir une suite de constructions n'aboutissant jamais à un heptagone convexe de même périmètre que celui de $ABCDEFG$, et d'aire strictement supérieure à celle de $ABCDEFG$.⁸



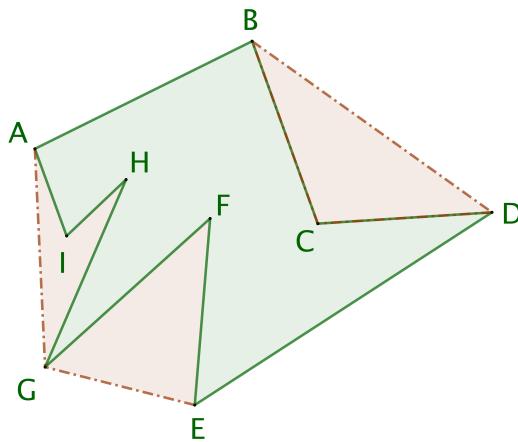
On peut aussi perdre des côtés lors de la construction comme dans l'exemple suivant où C , D et E' sont alignés. Nous allons voir juste après que ce problème n'en est pas un.

7. Il existe des n -isogones convexes qui ne sont pas des polygones réguliers. Par exemple, penser à la frontière d'une maison formée d'un carré surmonté d'un triangle équilatéral de mêmes dimensions.

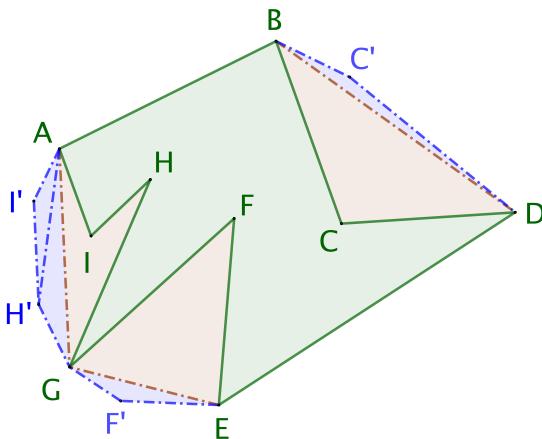
8. L'auteur est convaincu que le procédé aboutira en un nombre fini d'étapes à un polygone convexe, mais il ne l'a pas démontré pour le moment (un raisonnement sur les angles aux sommets devraient permettre de valider une telle conjecture).



Laissons de côté la construction précédente pour nous concentrer sur la classique enveloppe convexe⁹ du n -gone de départ. Par exemple, l'ennéagone $ABCDEFGHI$ non convexe ci-dessous admet le pentagone $ABDEG$ pour enveloppe convexe : le périmètre diminue et l'aire augmentent strictement, c'est très utile, mais il reste à avoir le bon nombre de côtés.



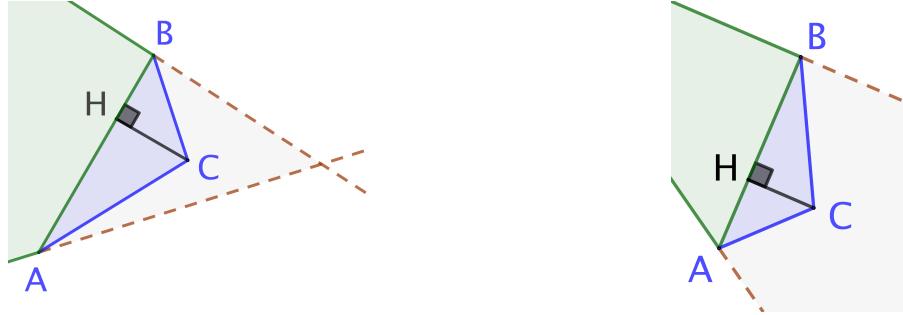
Une idée simple, que nous allons formaliser rigoureusement après, consiste à ajouter les sommets manquants suffisamment prêts des côtés de l'enveloppe convexe pour ne pas perdre la convexité, tout en gardant un périmètre inférieur strictement au périmètre initial, et une aire strictement plus grande que l'aire initiale. Si nous arrivons à faire ceci, alors une homothétie de rapport $r > 1$ nous ramènera au bon périmètre avec une aire strictement plus grande que l'aire initiale. La figure suivante illustre cette idée.



9. C'est le plus petit polygone convexe « *contenant* » le n -gone considéré, où « *petit* » est relatif à l'inclusion.

Considérons donc un n -gone non convexe \mathcal{P} , donc \mathcal{P} possède au moins 4 sommets. Son enveloppe convexe \mathcal{C} vérifie, par construction, $\text{Perim}(\mathcal{C}) < \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{C}) > \text{Aire}(\mathcal{P})$. Notons m le nombre de sommets en moins dans \mathcal{C} relativement à \mathcal{P} et $\delta = \text{Perim}(\mathcal{P}) - \text{Perim}(\mathcal{C})$.

- (1) Si $m = 0$, il n'y a rien à faire.
- (2) Sinon, considérons $[AB]$ un côté quelconque de \mathcal{C} . Les droites portées par les côtés « *autour* » de $[AB]$ « *dessinent* » une région contenant toujours un triangle ABC dont l'intérieur est à l'extérieur¹⁰ de \mathcal{C} comme dans les deux cas ci-dessous.



- (3) Clairement, le polygone \mathcal{C}' obtenu à partir de \mathcal{C} en remplaçant le côté $[AB]$ par les côtés $[AC]$ et $[CB]$ est un convexe avec un sommet de plus que \mathcal{C} .
- (4) Comme HC peut être rendu aussi proche de 0 que souhaité, il est aisément de voir que l'on peut choisir cette distance de sorte que $AC + BC < AB + \frac{\delta}{m}$. Dès lors, le périmètre de \mathcal{C}' augmente de $\frac{\delta}{m}$ relativement à \mathcal{C} .
- (5) En répétant $(m - 1)$ fois les étapes 1 à 4 avec les nouveaux n -gones convexes \mathcal{C}' sans changer la valeur de m , nous obtenons un n -gone convexe \mathcal{P}' tel que $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$ et $\text{Perim}(\mathcal{P}') < \text{Perim}(\mathcal{C}) + \delta = \text{Perim}(\mathcal{P})$.

□

Remarque 3.1. Le fait précédent permet de toujours se ramener au cas d'un n -gone convexe.

Fait 7. Si un n -gone convexe \mathcal{P} n'est pas un n -isogone, alors on peut construire un n -gone convexe \mathcal{P}' tel que $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Considérons un n -gone convexe \mathcal{P} qui ne soit pas un n -isogone. Dans ce cas, \mathcal{P} admet un triplet de sommets consécutifs A , B et C tels que $AB \neq BC$ (sinon, on obtiendrait de proche en proche un n -isogone). La construction vue dans la preuve du fait 1 nous donne la solution : voir les deux dessins ci-après dans lesquels $(AC) \parallel (BB')$. Pour le 2^e cas, il n'est pas possible d'utiliser le triangle $AB'C$ isocèle en B' car $(B'C)$ porte le côté de \mathcal{P} de sommet C juste après $[BC]$, mais ce problème se contourne en considérant un point B'' de $]BB'[$.



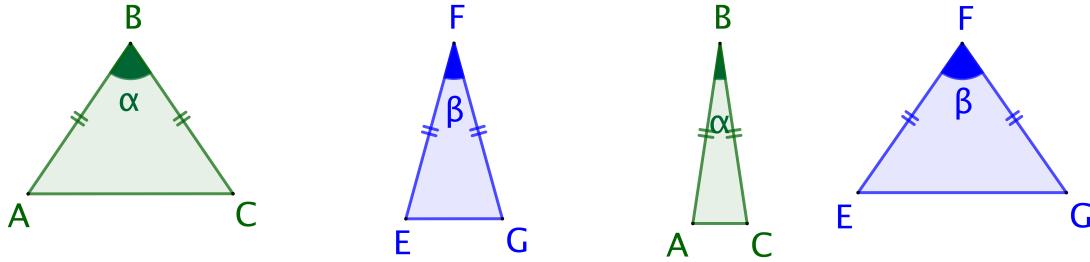
10. C'est ce que l'on appelle de la « *low poetry* » .

Dans chaque cas, nous avons construit un n -gone convexe \mathcal{P}'' tel que $\text{Perim}(\mathcal{P}'') < \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}'') = \text{Aire}(\mathcal{P})$. Un simple agrandissement donne un n -gone convexe \mathcal{P}' vérifiant $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$. \square

Remarque 3.2. *Le fait précédent ne permet pas de toujours se ramener au cas d'un n -isogone convexe. Il nous dit juste que si un n -gone convexe maximise son aire à périmètre fixé, alors il devra être un n -isogone. La nuance est importante, et une similaire existe pour le fait suivant.*

Fait 8. *Si un n -isogone convexe \mathcal{P} possède deux angles de mesures différentes, alors il existe un n -gone convexe \mathcal{P}' tel que $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$.*

Démonstration. Par hypothèse, nous avons deux paires de côtés $([AB], [BC])$ et $([EF], [FG])$ tels que $\widehat{ABC} > \widehat{EFG}$. Par convexité de \mathcal{P} , nous avons juste à augmenter la somme des aires des triangles ABC et EFG . Nous allons le faire en modifiant les angles \widehat{ABC} et \widehat{EFG} tout en gardant $AB = BC = EF = FG$.



Les deux exemples ci-dessus nous permettent de noter que si $\alpha = \widehat{ABC}$ diminue, et $\beta = \widehat{EFG}$ augmente, alors la somme des aires se rapprochent de 0. Par raison de symétrie, si on fixe $\widehat{ABC} + \widehat{EFG}$, on devine que la somme des aires est maximisée quand $\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$. Nous allons établir ceci de façon élémentaire en commençant par les calculs suivants où $\ell = AB$, $\mu = \frac{\alpha+\beta}{2}$ et $\delta = \mu - \beta > 0$ (rappelons que nous avons supposé $\alpha > \beta$).

$$\begin{aligned}
 & \text{Aire}(ABC) + \text{Aire}(EFG) \\
 &= \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin(\widehat{ABC}) + \frac{1}{2} FE \cdot FG \cdot \sin(\widehat{EFG}) \quad \text{Formule dite des sinus.} \\
 &= \frac{1}{2} \ell^2 (\sin \alpha + \sin \beta) \\
 &= \frac{1}{2} \ell^2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad \text{Formules de Simpson.} \\
 &= \frac{1}{2} \ell^2 \sin \mu \cos \delta
 \end{aligned}$$

Comme $(\delta; \mu) \in]0; \pi[^2$, nous avons $\sin \mu \cos \delta > \sin \mu$. Remplaçons alors α et β respectivement par α' et β' de telle sorte que $\alpha' = \beta' = \frac{\alpha+\beta}{2} = \mu$. Notons que $0 < \beta < \mu < \alpha < \pi$ (diminution de α et augmentation de β). Deux situations se présentent à nous.

- Le n -gone obtenu ne perd aucun côté. Comme la convexité est gardée, c'est gagné.
- Le n -gone obtenu perd au moins un côté. La solution consiste à choisir $\alpha'' = \mu + \frac{\delta}{2}$ et $\beta'' = \mu - \frac{\delta}{2}$ au lieu de $\alpha' = \beta' = \mu$, puisque nous avons $\cos \delta < \cos(\frac{\delta}{2})$ et $0 < \beta < \beta'' < \mu < \alpha'' < \alpha < \pi$.

 \square

Remarque 3.3. La méthode des extrema liés, rappelée dans la remarque 1.3, donne une autre justification de la conjecture faite dans la démonstration précédente. Voici comment faire.

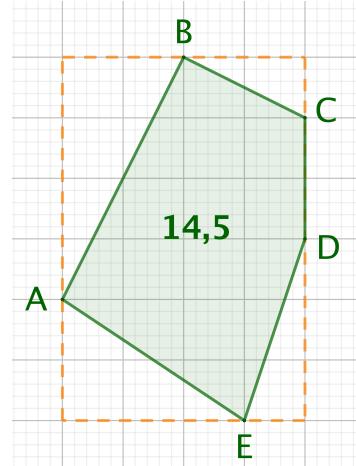
- Pour $(\alpha; \beta) \in]0; \pi[^2$, on veut maximiser $f(\alpha; \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$ sous la contrainte $g(\alpha; \beta) = 0$ où $g(\alpha; \beta) = \alpha + \beta - 2\mu$.
- $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\partial_\alpha f = \lambda \partial_\alpha g$ et $\partial_\beta f = \lambda \partial_\beta g$ d'après la méthode des extrema liés.
- Donc $\cos \alpha = \cos \beta$, et par conséquent $\alpha = \beta = \mu$.

Fait 9. Si un n -gone \mathcal{P} n'est pas régulier, alors il existe un n -gone convexe \mathcal{P}' tel que $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Le fait 6 permet de considérer le problème de maximisation d'aire à périmètre fixé juste pour des n -gones convexes. Selon les faits 7 et 8, si parmi les n -gones convexes de périmètre fixé, il en existe un d'aire maximale, alors ce ne peut être que le n -gone régulier. \square

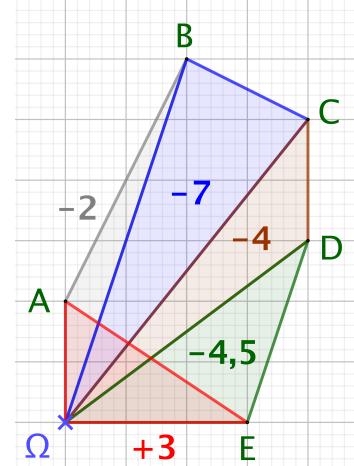
3.3. Condition suffisante. Selon le fait 9, si parmi les n -gones de périmètre fixé, il en existe un qui maximise l'aire, alors ce ne peut être que le n -gone régulier. Nous allons établir que cette condition nécessaire est suffisante. Pour cela, nous avons juste besoin de savoir qu'il existe au moins un n -gone d'aire maximale. Comme dans la remarque 1.1, nous allons convier le couple continuité/compacité, mais ici les choses se compliquent, car nous allons devoir accepter de travailler avec des polygones croisés, et par conséquent il nous faut un moyen de mesurer la surface de tels polygones (le vrai point délicat est ici). Plaçons-nous d'un point de vue informatique : comme on sait calculer l'aire d'un triangle via le calcul d'un déterminant,¹¹ il est naturel de chercher à calculer l'aire d'un n -gone en utilisant des triangles. Voici une méthode possible où l'usage du déterminant pour calculer les aires des triangles à partir de coordonnées de vecteurs fait apparaître des signes moins. On obtient alors l'aire géométrique à un signe près. A priori, le résultat dépend du point Ω employé, mais le fait 10, donné plus bas, montrera que ce n'est pas le cas.

Calcul direct à la main.



$$14,5 = 4 \cdot 6 - \frac{2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{2}$$

Via le déterminant.

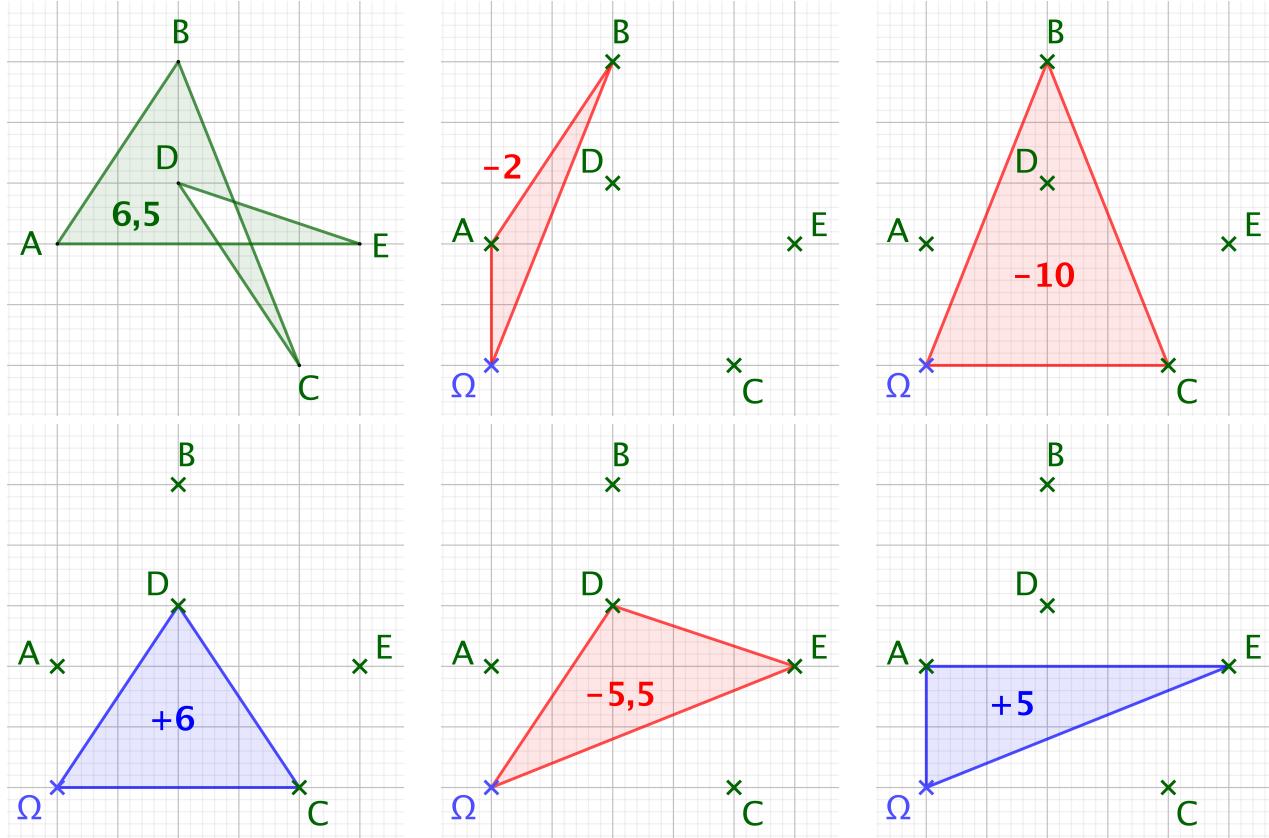


$$-14,5 = -2 - 7 - 4 - 4,5 + 3$$

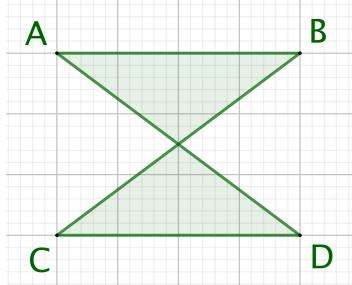
Ce mode de calcul est celui employé par **GeoGebra** qui donne une aire de 6,5 pour le polygone croisé de la bande dessinée ci-après qui détaille les calculs faits : les aires algébriques représentées en bleu sont positives, et celles en rouge négatives. Nous obtenons un total de (-6,5), soit,

11. Il est connu que $\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right|$.

de nouveau, la valeur fournie par GeoGebra au signe près. L'apparition du signe moins dans ce cas et le précédent vient en fait du sens horaire de parcours des polygones comme nous le montrera le fait 14.



Avant de formaliser ce qui précède, il faut noter que la notion d'aire algébrique est à manier avec prudence lorsqu'on la découvre. Si c'est votre cas, que pensez-vous de l'aire algébrique du quadrilatère croisé $ABCD$ ci-dessous qui est un antiparallélogramme très particulier ? Réponse en note de bas de page.¹²



Définition 4. Pour toute n -ligne $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$, on définit $(A'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ comme étant n -périodique, et vérifiant $A'_i = A_i$ sur $\llbracket 1 ; n \rrbracket$.

12. La réponse est 0. Comme nous verrons que le choix de Ω est libre, il suffit de faire les calculs avec Ω l'intersection des segments $[AD]$ et $[BC]$. On peut tout de même donner du sens à ceci. Voici comment. Plongeons-nous dans l'espace. Imaginons une toile rectangulaire rouge sur le dessus, et verte en dessous. Tournons de 180° verticalement l'un des côtés du rectangle. En supposant que la toile soit parfaitement tendue, nous obtenons, vue de dessus, un antiparallélogramme dont l'un des triangles est vert, et l'autre rouge. De façon savante, les deux faces ont deux orientations différentes. Nous reparlerons de cette notion par la suite.

Fait 10. Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ une n -ligne. La fonction qui à un point Ω du plan associe $\mu_1^n(\Omega; \mathcal{L}) = \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}})$ est indépendante du point Ω . Dans la suite, cette quantité indépendante de Ω sera notée $\mu_1^n(\mathcal{L})$.

Démonstration. Soit M un autre point du plan.

$$\begin{aligned}
& \mu_1^n(\Omega; \mathcal{L}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MA'_{i+1}}) \quad \text{Cette bonne vieille relation de Chasles.} \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) + \det(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) + \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M}) + \mu_1^n(M; \mathcal{L}) \\
&= \mu_1^n(M; \mathcal{L}) + \sum_{i=2}^{n+1} \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_i}) - \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_i}) \\
&= \mu_1^n(M; \mathcal{L}) + \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{n+1}}) - \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_1}) \quad A'_{n+1} = A'_1 \\
&= \mu_1^n(M; \mathcal{L})
\end{aligned}$$

Fait 11. Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ une n -ligne. Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la n -ligne $\mathcal{L}_j = B_1 B_2 \cdots B_n$, où $B_i = A'_{k+i-1}$, vérifie $\mu_1^n(\mathcal{L}) = \mu_1^n(\mathcal{L}_k)$. Dans la suite, cette quantité commune sera notée $\mu(\mathcal{L})$.

Démonstration. Il suffit de s'adonner à un petit jeu sur les indices de sommation. \square

Fait 12. Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ une n -ligne. La n -ligne $\mathcal{L}^{\text{op}} = B_1 B_2 \cdots B_n$, où $B_i = A_{n+1-i}$, vérifie $\mu(\mathcal{L}^{\text{op}}) = -\mu(\mathcal{L})$.

Démonstration. Soit Ω un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned}
& \mu(\mathcal{L}^{\text{op}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega B'_i}, \overrightarrow{\Omega B'_{i+1}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_{n+1-i}}, \overrightarrow{\Omega A'_{n-i}}) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \det(\overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}, \overrightarrow{\Omega A'_j}) \quad A'_0 = A'_n \text{ et } A'_1 = A'_{n+1} \\
&= \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}, \overrightarrow{\Omega A'_j}) \\
&= - \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_j}, \overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}) \\
&= -\mu(\mathcal{L})
\end{aligned}$$

Fait 13. Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ une n -ligne. La quantité $\frac{1}{2}|\mu(\mathcal{L})|$ ne dépend ni du sens de parcours de \mathcal{L} , ni du point de départ choisi.¹³ Elle sera notée $\text{AireGe}(\mathcal{L})$, et nommée « aire généralisée » de la n -ligne \mathcal{L} .

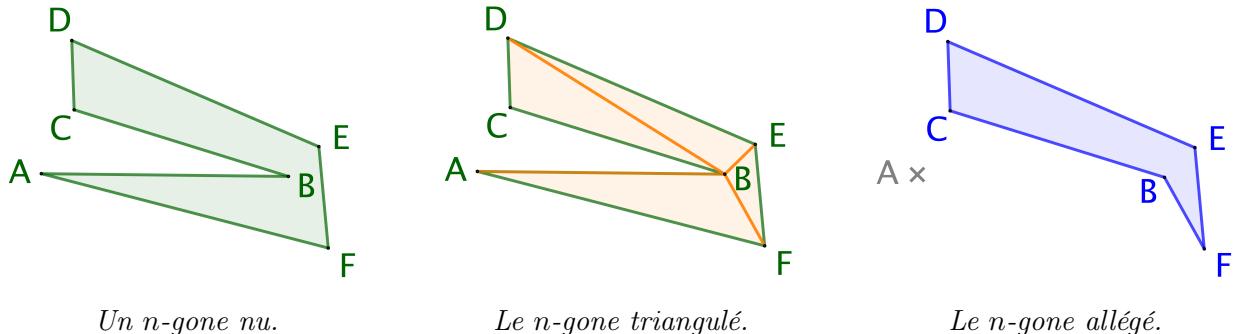
Démonstration. C'est une conséquence directe des faits 11 et 12. \square

13. Le lecteur pardonnera les abus de langage utilisés.

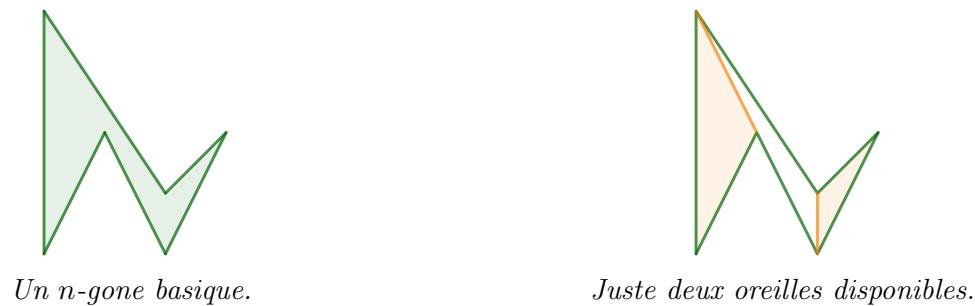
Pour notre démonstration finale, nous aurons besoin de savoir que $\text{AireGe}(\mathcal{P}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$ pour tout n -gone \mathcal{P} .¹⁴ Ceci est évident dans le cas convexe, car il suffit de choisir l'isobarycentre G de A_1, A_2, \dots, A_n pour le calcul de $\text{AireGe}(\mathcal{P})$: en effet, avec ce choix, tous les déterminants $\det(\overrightarrow{GA'_i}, \overrightarrow{GA'_{i+1}})$ ont le même signe. Dans le cas non-convexe, les choses se compliquent a priori, car nous ne maîtrisons plus les signes des déterminants. Heureusement nous avons le résultat fort suivant qui est un pas important pour atteindre notre but.

Fait 14. Soit un n -gone \mathcal{P} . On suppose la n -ligne $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ associée à \mathcal{P} telle que les points A_1, A_2, \dots, A_n soient parcourus dans le sens trigonométrique, ou anti-horaire. Une telle n -ligne sera dite « positive ».¹⁵ Sous cette hypothèse, nous avons $\mu(\mathcal{L}) \geq 0$.

Démonstration. Le théorème de triangulation affirme que tout n -gone est triangulable comme dans l'exemple très basique suivant qui laisse envisager une démonstration par récurrence en retirant l'un des triangles ayant deux côtés correspondant à deux côtés consécutifs du n -gone (pour peu qu'un tel triangle existe toujours).



Le théorème de triangulation admet une forme forte donnant une décomposition contenant un triangle formé de deux côtés consécutifs du n -gone.¹⁶ Nous dirons qu'une telle décomposition est « à l'écoute ». Ce très mauvais jeu de mots fait référence à la notion sérieuse « d'oreille » pour un n -gone : une oreille est un triangle inclus dans le n -gone, et formé de deux côtés consécutifs du n -gone. L'exemple suivant donne un n -gone n'ayant que deux oreilles : ceci montre que l'existence d'une oreille ne va pas de soi.¹⁷



Nous allons raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

- **Cas de base.** Soit ABC un triangle. Dire que les sommets A, B et C sont parcourus dans le sens trigonométrique, c'est savoir que $\mu(ABC) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) > 0$.

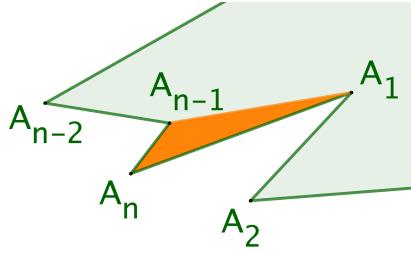
14. Nous obtenons ainsi la généralisation de l'aire géométrique usuelle au cas des polygones croisés.

15. Bien noté que cette notion ne peut exister lorsqu'on considère un polygone croisé. De façon cachée, nous utilisons le célèbre théorème de Jordan, dans sa forme polygonale.

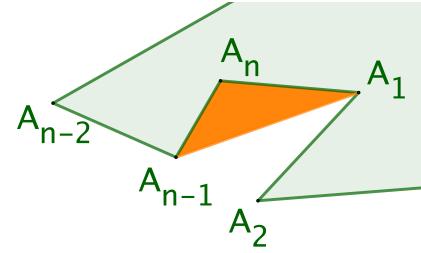
16. En pratique, cette forme forte est peu utile, car elle aboutit à un algorithme de recherche trop lent.

17. On démontre que tout n -gone admet au minimum deux oreilles.

- **Héritéité.** Soient un n -gone \mathcal{P} , avec $n \in \mathbb{N}_{>3}$, et $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ une n -ligne positive qui lui est associée. On peut supposer que $A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille du n -gone \mathcal{P} .



$A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille.



$A_{n-1}A_nA_1$ n'est pas une oreille.

Notons \mathcal{P}' le k -gone associé à la k -ligne $\mathcal{L}' = A_1 \cdots A_{n-1}$ où $k = n - 1$ vérifie $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Par hypothèse, \mathcal{L}' est positive. Nous arrivons aux calculs élémentaires suivants en utilisant $\Omega = A_1$ comme point de calcul de $\mu(\mathcal{L})$.

$$\begin{aligned}
 & \mu(\mathcal{L}) \\
 &= \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_1A'_j}, \overrightarrow{A_1A'_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1A'_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A'_n}) + \det(\overrightarrow{A_1A'_n}, \overrightarrow{A_1A'_{n+1}}) \\
 &= \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_1A_j}, \overrightarrow{A_1A_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A_n}) + \det(\overrightarrow{A_1A_n}, \overrightarrow{A_1A_1}) \\
 &= \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_1A_j}, \overrightarrow{A_1A_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A_n}) \quad \left. \begin{array}{l} \det(\overrightarrow{A_1A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A_1}) = 0 \\ A_1 = A'_{n+1} \\ A_i = A'_i \end{array} \right\} \text{pour } i \leq n \\
 &= \mu(\mathcal{L}') + \mu(A_{n-1}A_nA_1)
 \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, nous savons que $\mu(\mathcal{L}') \geq 0$, et comme $A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille de \mathcal{P} , la 3-ligne $A_{n-1}A_nA_1$ est forcément positive, d'où $\mu(A_{n-1}A_nA_1) \geq 0$ d'après le cas de base. Nous arrivons bien à $\mu(\mathcal{L}) \geq 0$, ce qui permet de finir aisément la démonstration par récurrence.

□

Fait 15. Pour tout n -gone \mathcal{P} , nous avons : $\text{AireGe}(\mathcal{P}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Nous donnons juste les deux clés pour une preuve par récurrence.

- **Cas de base.** L'égalité est immédiate pour les triangles.
- **Héritéité.** Reprenons les notations de la démonstration du fait 14 : \mathcal{P} est un n -gone, avec $n \in \mathbb{N}_{>3}$, $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ une n -ligne positive qui lui est associée, $A_{n-1}A_nA_1$ une oreille du n -gone \mathcal{P} , \mathcal{P}' le k -gone associé à la k -ligne $\mathcal{L}' = A_1 \cdots A_{n-1}$ où $k = n - 1$ vérifie $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, avec \mathcal{L}' positive. Nous arrivons aux calculs élémentaires suivants.

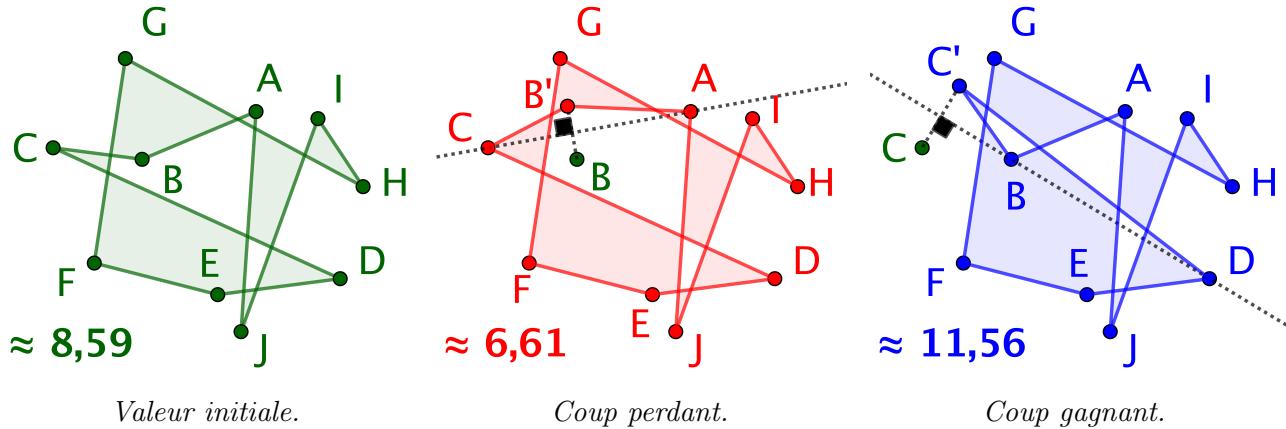
$$\begin{aligned}
 & \text{Aire}(\mathcal{P}) \\
 &= \text{Aire}(\mathcal{P}') + \text{Aire}(A_{n-1}A_nA_1) \\
 &= \text{AireGe}(\mathcal{P}') + \text{AireGe}(A_{n-1}A_nA_1) \\
 &= \frac{1}{2}(\mu(\mathcal{L}') + \mu(A_{n-1}A_nA_1)) \\
 &= \frac{1}{2}\mu(\mathcal{L}) \\
 &= \text{AireGe}(\mathcal{P})
 \end{aligned}$$

) $A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille de \mathcal{P} .
) Hypothèse de récurrence et cas de base.
) Voir le fait 14.
) Comme dans la preuve du fait 14.
) Voir le fait 14.

□

Fait 16. Si une n -ligne \mathcal{L} non dégénérée n'est pas un n -gone, donc est un polygone croisé, alors on peut construire une n -ligne \mathcal{L}' telle que $\text{Perim}(\mathcal{L}') = \text{Perim}(\mathcal{L})$ et $\text{AireGe}(\mathcal{L}') > \text{AireGe}(\mathcal{L})$.

Démonstration. L'idée est simple : comme nous savons que les triangles $A'_i A'_{i+1} A'_{i+2}$ ne sont pas tous orientés de la même façon, il suffit de remplacer l'un de ces triangles par son symétrique relativement à la droite $(A'_i A'_{i+2})$ pour diminuer ou augmenter $\mu(\mathcal{L})$ suivant le signe initial de $\mu(\mathcal{L})$. Les figures suivantes illustrent cette idée que nous formalisons juste après (les nombres indiquées sont les aires calculées par GeoGebra).



Supposons pour commencer que $\mu(\mathcal{L}) \leq 0$. Dans ce cas, considérons $A'_i A'_{i+1} A'_{i+2}$ orienté positivement, autrement tel que $\delta = \det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_{i+2}}) > 0$. En calculant $\mu(\mathcal{L})$ via $\Omega = A'_i$, la somme des déterminants de la définition contient δ . En remplaçant $A'_i A'_{i+1} A'_{i+2}$ par son symétrique relativement à la droite $(A'_i A'_{i+2})$, nous obtenons une nouvelle n -ligne \mathcal{L}' telle que le calcul de $\mu(\mathcal{L}')$ se fait en remplaçant δ par $(-\delta)$ dans la définition de $\mu(\mathcal{L})$. Nous avons alors $\mu(\mathcal{L}') < \mu(\mathcal{L}) \leq 0$, et donc $\text{AireGe}(\mathcal{L}') > \text{AireGe}(\mathcal{L})$ en appliquant la valeur absolue. Comme $\text{Perim}(\mathcal{L}') = \text{Perim}(\mathcal{L})$, clairement, le contrat est rempli dès que $\mu(\mathcal{L}) \leq 0$.

Si $\mu(\mathcal{L}) > 0$, la démarche est similaire, mais via un triangle orienté négativement. \square

Fait 17. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Considérons tous les n -gones de périmètre fixé. Parmi tous ces n -gones, il en existe au moins un d'aire maximale.

Démonstration. Ce qui suit nous donne plus généralement l'existence d'un n -gone, au moins, maximisant l'aire généralisée parmi toutes les n -lignes de périmètre fixé p . Ce résultat plus fort convient d'après le fait 15.

- On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
- On note \mathcal{Z} l'ensemble des n -lignes $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ telles que $\text{Perim}(A_1 A_2 \cdots A_n) = p$ et $A_1(0; 0)$.¹⁸
- Considérons alors $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des uplets $(x(A_1); y(A_1); \dots; x(A_n); y(A_n))$ correspondant aux coordonnées des sommets A_i de n -lignes appartenant à \mathcal{Z} .
- \mathcal{G} est clairement fermé dans \mathbb{R}^{2n} . De plus, il est borné, car les coordonnées des sommets des n -lignes considérées le sont. En résumé, \mathcal{G} est un compact de \mathbb{R}^{2n} .
- Nous définissons la fonction $s : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui à un uplet de \mathcal{G} associe l'aire généralisée de la n -ligne qu'il représente. Cette fonction est continue comme valeur absolue d'une fonction polynomiale en les coordonnées.

18. Le mot « *Zeile* » est une traduction possible de « *ligne* » en allemand.

- Finalement, par continuité et compacité, on sait que s admet un maximum sur \mathcal{G} . Or, un tel maximum ne peut être atteint en une n -ligne dégénérée, clairement, ni en un polygone croisé d'après le fait 16, donc un tel maximum sera obtenu en un n -gone. That's all folks !

□

Fait 18. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Considérons tous les n -gones de périmètre fixé. Parmi tous ces n -gones, un seul est d'aire maximale, c'est le n -gone régulier.

Démonstration. Ceci découle directement des faits 9 et 17. Ici s'achève notre joli voyage. □