

BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



TABLE DES MATIÈRES

1. Pourquoi un nouveau document sur l’isopérimétrie ?	2
2. Triangles	2
2.1. Avec un côté fixé	2
2.2. Le cas général	3
2.3. Des preuves courtes non géométriques	4
3. Quadrilatères	5
3.1. Les rectangles	5
3.2. Les parallélogrammes	6
3.3. Le cas général	7

Ce document, de niveau élémentaire,¹ s'intéresse au classique problème de l'isopérimétrie plane, c'est-à-dire à la recherche d'une surface plane maximisant son aire pour un périmètre donné. Nous nous limiterons ici au cas des polygones, en privilégiant des démonstrations les plus géométriques que possible, et en ne faisant appel à l'analyse qu'en cas de nécessité.²

Afin d'alléger le texte, nous raisonnerons parfois modulo des isométries. Ainsi, nous parlerons directement du « carré de côté c », du « triangle équilatéral de côté c », etc.

1. POURQUOI UN NOUVEAU DOCUMENT SUR L'ISOPÉRIMÉTRIE ?

Voici quelques apports de ce document.

- **Pour les triangles**, l'auteur expose une démonstration ne s'appuyant pas sur le théorème des extrema d'une fonction réelle continue sur un compact. Il propose à la place une construction itérative basique qui, partant d'un triangle quelconque, converge vers le triangle équilatéral, solution du problème d'isopérimétrie pour les triangles.
- **Pour les quadrilatères**, le problème est traité sans aucune utilisation de l'analyse, en s'appuyant uniquement sur des considérations purement géométriques de niveau élémentaire.
- **Pour les polygones à 5 côtés et plus**, la notion d'aire algébrique, une fois mieux cernée, permet d'établir aisément l'existence d'une solution optimale via le théorème des extrema d'une fonction réelle continue sur un compact. De plus, l'auteur a veillé à ne laisser aucune ellipse explicative dans les démonstrations proposées.

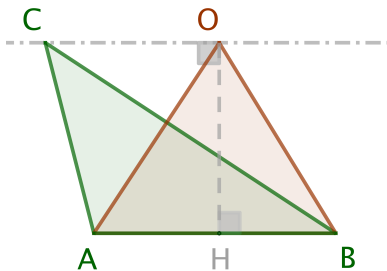
L'auteur espère ainsi fournir une perspective renouvelée sur un problème très ancien.

2. TRIANGLES

2.1. Avec un côté fixé.

Fait 1. *Considérons tous les triangles de périmètre fixé, et ayant tous un côté en commun. Parmi tous ces triangles, un seul est d'aire maximale, c'est le triangle isocèle ayant pour base le côté commun.*

Démonstration. Soit ABC un triangle de périmètre p , et fixons le côté $[AB]$. Pour tout point M sur la parallèle à (AB) passant par C , nous savons que $\text{Aire}(ABM) = \text{Aire}(ABC)$. Notons alors O le point sur cette parallèle tel que ABO soit isocèle en O .

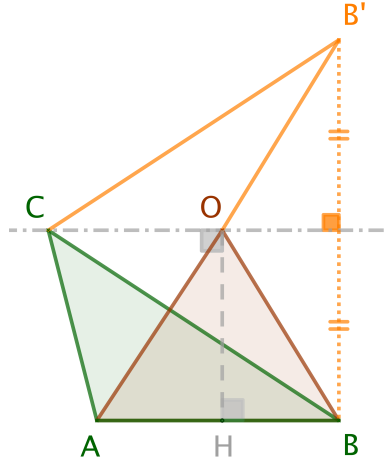


Via une symétrie axiale, voir ci-dessous, il est aisé de noter que $\text{Perim}(ABC) \geq \text{Perim}(ABO)$, avec égalité uniquement si ABC est isocèle en C .³

1. Cela nous conduira à admettre certains théorèmes qui, bien que paraissant simples, méritent une justification approfondie.

2. L'usage des nombres complexes fournit une approche très synthétique.

3. Plus précisément, en passant de C à O , le périmètre diminue.

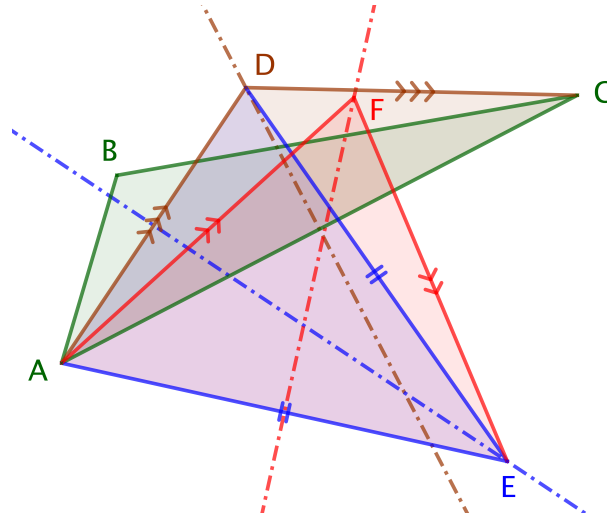


Une dilatation « *verticale* » de rapport $r = \frac{\text{Perim}(ABC)}{\text{Perim}(ABO)} \geq 1$ donne un triangle isocèle ABO' tel que $\text{Perim}(ABO') = p$ et $\text{Aire}(ABO') \geq \text{Aire}(ABC)$, avec égalité uniquement si ABC est isocèle en C . Contrat rempli!⁴ \square

2.2. Le cas général.

Fait 2. *Considérons tous les triangles de périmètre fixé p . Parmi tous ces triangles, un seul est d'aire maximale, c'est le triangle équilatéral de côté $c = \frac{1}{3}p$.*

Démonstration. Nous allons donner une démonstration constructive via une application itérative du fait 1 qui va donner à la limite le triangle équilatéral d'aire maximale, et ceci avec une vitesse de convergence exponentielle.⁵ Partons donc d'un triangle ABC quelconque, mais de périmètre p , le fait 1 nous donne successivement les triangles ACD , ADE et AEF isocèles en D , E et F respectivement, ayant tous pour périmètre p , et ceci avec des aires de plus en plus grandes. Le dessin suivant amène à conjecturer qu'en poursuivant le procédé pour avoir ensuite un triangle AFG isocèle en G ..., nous aboutirons « à la limite » à un triangle équilatéral.

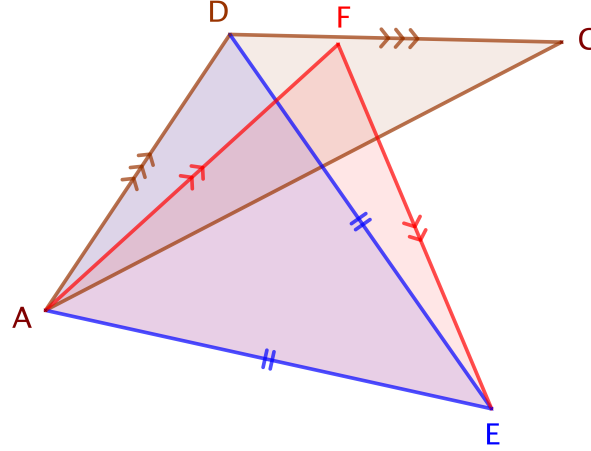


Le passage d'un triangle quelconque ABC au triangle ACD isocèle en D nous amène à nous concentrer sur ce que donne notre procédé d'agrandissement d'aire à périmètre fixé pour des

4. La remarque 2.3 explique comment employer la méthode des extrema liés. Les arguments fournis à cet endroit s'adaptent facilement au cas des triangles de base fixée.

5. Ceci ne va nécessiter que l'emploi de propriétés simples de l'ensemble des réels.

triangles isocèles. Reprenons l'exemple précédent où $AC > AD$ (le dessin ci-dessous ne garde que les triangles isocèles construits).



Voici ce que nous pouvons affirmer.

- (1) Comme $AC + 2AD = p$ et $AC > AD$, nous avons $AC > \frac{1}{3}p > AD$. À l'étape suivante, comme $AD + 2AE = p$, nous obtenons $AD < \frac{1}{3}p < AE$.
- (2) Pour AEF isocèle en F , comme $AE + 2AF = p$, nous arrivons à $AE > \frac{1}{3}p > AF$.
- (3) Tentons de quantifier les écarts à la mesure pivot $p' = \frac{1}{3}p$.
 - Dans ACD , posant $AD = p' - \epsilon$, nous avons $AC = p' + 2\epsilon$.
 - Dans ADE , posant $AE = p' + \epsilon'$, nous avons $AD = p' - 2\epsilon'$.
 - Dans AEF , posant $AF = p' - \epsilon''$, nous avons $AE = p' + 2\epsilon''$.
 - Donc $\epsilon' = \frac{1}{2}\epsilon$ et $\epsilon'' = \frac{1}{2}\epsilon'$.

Voici les enseignements de ce qui précède en partant d'un triangle ABC non équilatéral.

- Si $AC = \frac{1}{3}p$, dès la 1^{re} itération, nous avons un triangle équilatéral d'aire plus grande.
- Si $AC \neq \frac{1}{3}p$, notre procédé n'arrivera jamais en un nombre fini d'étapes à un triangle équilatéral. Dans ce cas, le point 3 ci-dessus nous donne une convergence exponentielle des longueurs des côtés vers $p' = \frac{1}{3}p$, tout en ayant des aires des plus en plus grandes.

Dans tous les cas, l'aire d'un triangle non équilatéral de périmètre p est strictement majorée par celle du triangle équilatéral de périmètre p . Et tout ceci a été obtenu via de la géométrie et de l'analyse élémentaires! \square

2.3. Des preuves courtes non géométriques.

Nous donnons ici des preuves courtes du fait 2, mais sans notion géométrique intuitive. Efficacité versus beauté, l'auteur a choisi son camp depuis longtemps!

Démonstration alternative 1. Selon la **formule de Héron**, $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ est l'aire d'un triangle de côtés a, b, c et de demi-périmètre $s = 0,5p$. La comparaison des moyennes géométrique et arithmétique⁶ donne $\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}((s-a) + (s-b) + (s-c))$, puis $s(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{1}{27}s^4$, et enfin $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{p^2}{12\sqrt{3}}$ où $\frac{p^2}{12\sqrt{3}}$ est l'aire du triangle équilatéral de périmètre p . \square

6. La formule de Héron reste un argument géométrique, mais quid de la comparaison des moyennes géométrique et arithmétique d'ordre 3, généralement justifiée via la concavité de la fonction logarithme. À l'ordre 2, l'inégalité s'obtient aisément par un argument géométrique simple : voir la remarque 3.2.

Démonstration alternative 2. Utilisons l'analyse sans le théorème des extrema liés.

- On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- Les triangles ABC tels que $\text{Perim}(ABC) = p$ sont représentés en posant $A(0;0)$, $B(AB;0)$ et $C(x_C; y_C)$ avec $y_C \geq 0$. Un triangle peut donc avoir trois représentations, mais peu importe. De plus, on accepte les triangles dégénérés pour lesquels nous avons $x_B = 0$ ou $y_C = 0$ dans notre représentation. Nous notons alors $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble des triplets $(x_B; x_C; y_C)$ ainsi obtenus.
- Il est facile de justifier que \mathcal{T} est séquentiellement fermé dans \mathbb{R}^3 . De plus, \mathcal{T} est borné car x_B , x_C et y_C le sont. En résumé, \mathcal{T} est un compact de \mathbb{R}^3 .
- La fonction $\alpha : (x_B; x_C; y_C) \in \mathcal{T} \mapsto 0,5x_By_C \in \mathbb{R}_+$ est la fonction « aire » des triangles représentés. Par continuité et compacité, on sait que α admet un maximum sur \mathcal{T} . Notons ABC un triangle maximisant α .
- ABC n'est clairement pas dégénéré. Est-il équilatéral pour autant ? Selon le fait 1, ABC doit être isocèle en C . Posant $c = AC = BC \neq 0$ et $s = \frac{p}{2}$, nous avons $x_B = 2s - 2c \neq 0$, et $y_C = \sqrt{c^2 - (s - c)^2}$, puis $\text{Aire}(ABC)^2 = (s - c)^2(c^2 - (s - c)^2) = s(s - c)^2(s - 2c)$.⁷ Or, le maximum de la fonction $\beta : c \mapsto s(s - c)^2(s - 2c)$ est forcément atteint en c annulant $\beta'(c) = -2s(s - c)(s - 2c) - 2s(s - c)^2 = 2s(c - s)(2s - 3c)$, soit pour $c = \frac{2s}{3} = \frac{p}{3}$, car $c = s$ est exclu. Ceci prouve que ABC est nécessairement équilatéral.

□

Démonstration alternative 3. Nous allons faire appel à la méthode des extrema liés et la formule de Héron. Pour cela, notons que l'aire d'un triangle étant positive ou nulle, nous pouvons chercher à maximiser son carré $f(a; b; c) = s(s - a)(s - b)(s - c)$ sous la contrainte $2s = a + b + c$ où $s = 0,5p > 0$ est constant. Notant $g(a; b; c) = a + b + c - 2s$, la contrainte s'écrit $g(a; b; c) = 0$.

- Si un extremum existe, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\partial_a f = \lambda \partial_a g$, $\partial_b f = \lambda \partial_b g$ et $\partial_c f = \lambda \partial_c g$ d'après la méthode des extrema liés.
- Donc $-s(s - b)(s - c) = -s(s - a)(s - c) = -s(s - a)(s - b)$, et par conséquent $(s - b)(s - c) = (s - a)(s - c) = (s - a)(s - b)$.
- Les cas $s = a$, $s = b$ et $s = c$ donnent $f(a; b; c) = 0$.
- Le cas $[s \neq a, s \neq b \text{ et } s \neq c]$ n'est envisageable que si $a = b = c = \frac{p}{3}$, ceci impliquant $f(a; b; c) = \frac{1}{16}p\left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{p^2}{12\sqrt{3}}\right)^2 > 0$.
- En résumé, l'existence d'un maximum implique que ce maximum corresponde au cas du triangle équilatéral.
- Il reste à démontrer qu'un tel maximum existe pour pouvoir conclure : ceci est facile à justifier en considérant l'ensemble compact $[0; 2s]^3$ de \mathbb{R}^3 , et la continuité de f .

□

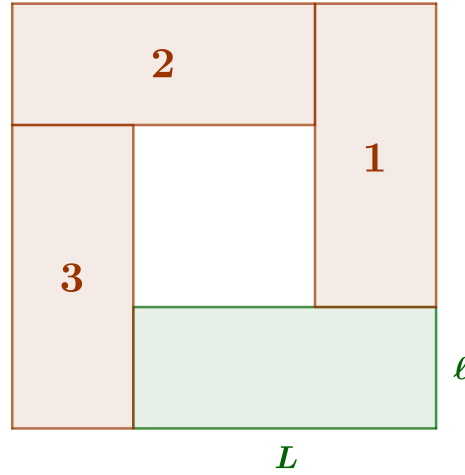
3. QUADRILTÈRES

3.1. Les rectangles.

Fait 3. *Considérons tous les rectangles de périmètre fixé p . Parmi tous ces rectangles, un seul est d'aire maximale, c'est le carré de côté $c = 0,25p$.*

7. Nous venons de démontrer la formule de Héron dans le cas particulier d'un triangle isocèle.

Démonstration. Voici une preuve géométrique élémentaire s'appuyant sur le dessin suivant où les rectangles 1, 2 et 3 sont isométriques au rectangle vert étudié de dimension $L \times \ell$.



Le raisonnement tient alors aux constatations suivantes accessibles à un collégien.

- (1) Le grand carré a une aire $(L + \ell)^2$ supérieure ou égale à $4L\ell$, et ceci strictement si le rectangle initial n'est pas un carré.
- (2) Le grand carré a un périmètre égal à $4(L + \ell)$.
- (3) Une homothétie de rapport 0,5 donne un carré de périmètre $0,5 \times 4(L + \ell) = 2(L + \ell)$, et d'aire supérieure ou égale à $0,5^2 \times 4L\ell = L\ell$, avec inégalité stricte si le rectangle initial n'est pas un carré.

Donc, parmi tous les rectangles de périmètre $p = 2(L + \ell)$ et d'aire $L\ell$, le seul qui puisse avoir une aire maximale est le carré. Joli! Non? \square

Remarque 3.1. Une preuve courante consiste à exprimer l'aire du rectangle comme polynôme du 2^e degré en L par exemple. On obtient $L\ell = L(0,5p - L)$ qui est maximale en $L_M = 0,25p$ (moyenne des racines), d'où $\ell_M = 0,25p = L_M$.

Remarque 3.2. Nous avons établi que $4L\ell \leq (L + \ell)^2$ pour $(L; \ell) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Ceci permet de comparer les moyennes arithmétique $\frac{1}{2}(L + \ell)$, géométrique $\sqrt{L\ell}$ et quadratique $\sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$.

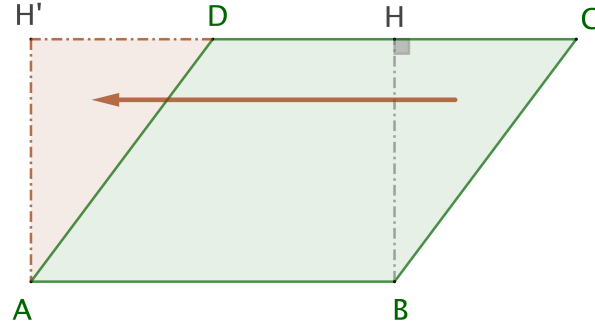
- L'application de la racine carrée donne $2\sqrt{L\ell} \leq L + \ell$, puis $\sqrt{L\ell} \leq \frac{1}{2}(L + \ell)$.
- Un simple développement fournit $2L\ell \leq L^2 + \ell^2$, puis $\sqrt{L\ell} \leq \sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$.
- On peut faire mieux en notant que $2L\ell \leq L^2 + \ell^2$ donne $L^2 + \ell^2 + 2L\ell \leq 2(L^2 + \ell^2)$, puis $\frac{1}{4}(L + \ell)^2 \leq \frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)$, et enfin $\frac{1}{2}(L + \ell) \leq \sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$.

En résumé, $\sqrt{L\ell} \leq \frac{1}{2}(L + \ell) \leq \sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$ pour $(L; \ell) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Ces inégalités se généralisent à l'ordre n grâce à l'algèbre, ou l'analyse.

3.2. Les parallélogrammes.

Fait 4. Considérons tous les parallélogrammes de périmètre fixé p . Parmi tous ces parallélogrammes, un seul est d'aire maximale, c'est le carré de côté $c = 0,25p$.

Démonstration. Le calcul de l'aire d'un parallélogramme, voir le dessin ci-dessous, nous donne $\text{Aire}(ABCD) = \text{Aire}(ABHH')$ et $\text{Perim}(ABCD) \geq \text{Perim}(ABHH')$, avec égalité uniquement si $ABCD$ est un rectangle.



Via une homothétie de rapport $k = \frac{\text{Perim}(ABCD)}{\text{Perim}(ABHH')} \geq 1$, nous obtenons un rectangle de périmètre égal à p , et d'aire supérieure ou égale à $\text{Aire}(ABCD)$, avec égalité uniquement si $ABCD$ est un rectangle. Nous revenons à la situation du fait 3 qui permet de conclure très facilement. \square

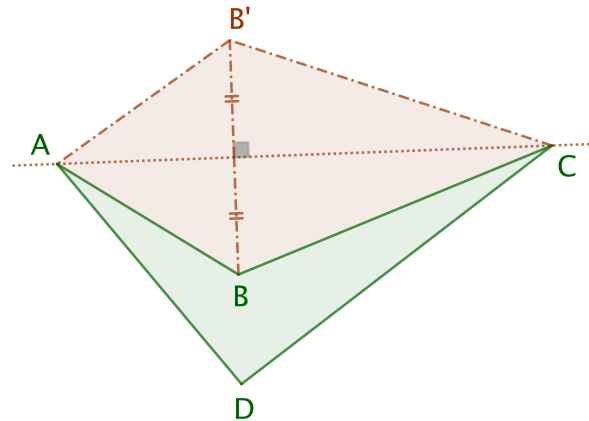
Remarque 3.3. La recherche d'un parallélogramme de périmètre minimal pour une aire fixée est le problème dual de l'isopérimétrie pour les parallélogrammes.

Remarque 3.4. Une méthode analytique devient pénible ici, car il faut par exemple prendre en compte l'angle au sommet A du parallélogramme. L'auteur préfère battre en retraite en clôturant cette remarque ici.

3.3. Le cas général.

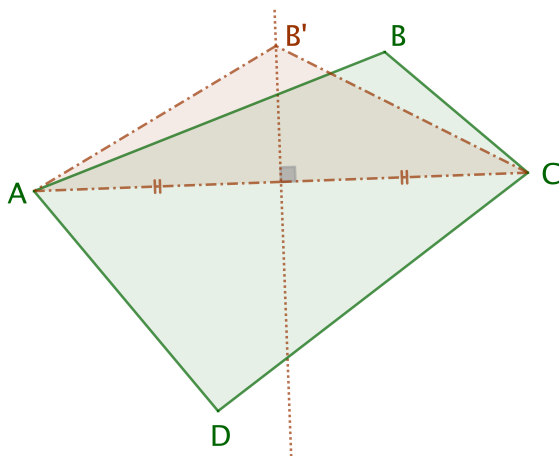
Fait 5. Considérons tous les quadrilatères de périmètre fixé p . Parmi tous ces quadrilatères, un seul est d'aire maximale, c'est le carré de côté $c = 0,25p$.

Démonstration. La figure suivante montre que pour tout quadrilatère $ABCD$ non convexe en B , et de périmètre p , il existe un quadrilatère convexe $AB'CD$ de périmètre p , et tel que $\text{Aire}(AB'CD) > \text{Aire}(ABCD)$. Notre recherche doit donc continuer dans l'ensemble des quadrilatères convexes de périmètre p . De tels quadrilatères \mathcal{Q} sont tels que pour toute paire de points M et N de la surface associée à \mathcal{Q} , le segment $[MN]$ est contenu dans cette surface (cette définition se généralise aux polygones).

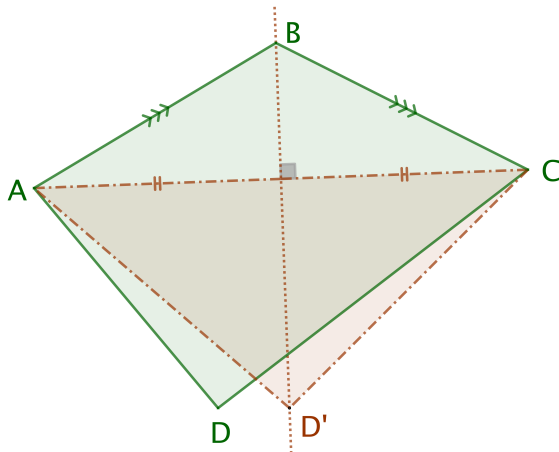


Si un quadrilatère convexe $ABCD$ de périmètre p est tel que $AB \neq BC$, le fait 1 nous donne un quadrilatère convexe $AB'CD$ de périmètre p ,⁸ et vérifiant aussi $AB' = B'C$ et $\text{Aire}(AB'CD) > \text{Aire}(ABCD)$ comme le montre la figure ci-après. On se ramène donc au cas d'un quadrilatère convexe $ABCD$ de périmètre p avec en plus $AB = BC$.

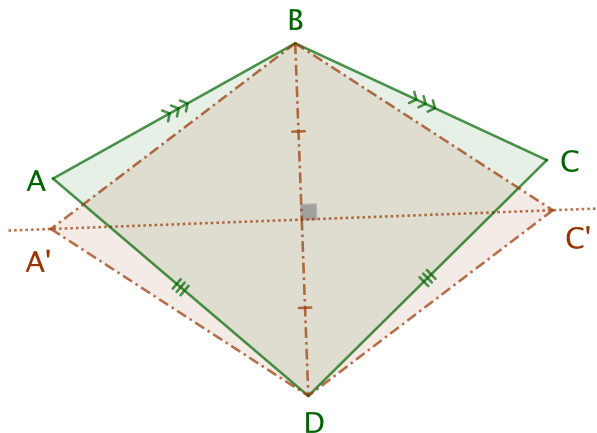
8. Noter que $\text{Perim}(AB'CD) = \text{Perim}(AB'C) + \text{Perim}(ACD) - 2AC$.



La méthode précédente appliquée au sommet D d'un quadrilatère convexe $ABCD$ de périmètre p tel que $AB = BC$ et $AD \neq DC$ permet en fait de se ramener au cas d'un cerf-volant $ABCD$ de périmètre p , avec $AB = BC$ et $AD = DC$, voir ci-dessous.



En supposant que notre cerf-volant ne soit pas un losange, le fait 1 appliqué aux sommets A et C fournit un losange $A'BC'D$ de périmètre p , et tel que $\text{Aire}(A'BC'D) > \text{Aire}(ABCD)$. En effet, nous avons $p = 2(AB + AD)$ et $\text{Perim}(A'BD) = \text{Perim}(ABD)$, donc $A'B = A'D = 0,25p$, et de même, nous obtenons $C'B = C'D = 0,25p$.



Pour conclure, il suffit d'appliquer le fait 4, puisque tout losange est un parallélogramme. Que la géométrie est belle! \square