DÉRIVATION ET VARIATIONS
UNE PREUVE COURTE(?) VIA L'INTÉGRALE

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/math/analysis/real/sign-der-var-func-via-int.

Voici un classique de l'analyse.

Fait 1. *Pour toute fonction f définie et dérivable sur un intervalle non trivial $[a\,;b]$, si $f' > 0$ sur $[a\,;b]$, alors f est strictement croissante sur $[a\,;b]$.*

La preuve standard de ce résultat passe par le célèbre théorème de Rolle appliqué à la fonction $g(x) = f(x) - \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \cdot (x-a) - f(a)$ qui peut sembler un peu magique. [1]

Il se trouve que l'on peut démontrer *« plus simplement »* le résultat plus restrictif suivant.

Fait 2. *Pour toute fonction f définie et dérivable sur un intervalle non trivial $[a\,;b]$, si f'* ***est continue*** [2] *sur $[a\,;b]$ avec $f' > 0$ sur $[a\,;b]$, alors f est strictement croissante sur l'intervalle $[a\,;b]$.*

La démonstration de ce résultat peut se faire via la stricte positivité de l'intégrale sur $\mathbb{R}$ et l'identité $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$. Argument-massue, mais efficace !

Remarque. *Il est vrai que le calcul intégral n'est pas simple à définir proprement. D'un autre côté, le théorème de Rolle s'appuie sur un résultat topologique puissant qui affirme que l'image continue d'un compact est un compact, mais aussi sur le fait que l'intervalle $[a\,;b]$ est compact. Là aussi, c'est du massif ! D'un point d'un point de vue universitaire, ce qui est affirmé dans ce document est peu pertinent. Par contre, un lycéen a accès très facilement à un ensemble de résultats intuitifs de base sur les intégrales. Dans ce contexte, l'approche ci-dessus semble tout à fait éclairante.*

Date: 16 Juillet 2019 - 24 Avril 2025.

1. Pour $x \in [a\,;b]$, $g(x)$ mesure l'écart entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la corde $(AB) : y = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \cdot (x-a) + f(a)$ où $A(a\,;f(a)) \in \mathscr{C}_f$ et $B(b\,;f(b)) \in \mathscr{C}_f$. Or cet écart est nul en a et b, donc la fonction g n'est pas si magique que cela...
2. On rencontre tout le temps cette situation en pré-bac.