

IDENTITÉS PARTICULIÈRES GÉNÉRALISABLES RIGOREUSEMENT

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
[https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/visual-proof/
polynomial-analytic-principles](https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/visual-proof/polynomial-analytic-principles).*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.

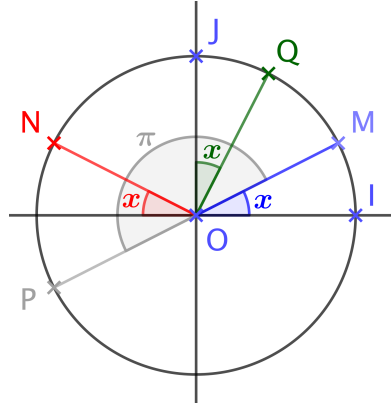


TABLE DES MATIÈRES

- | | |
|--|---|
| 1. Puis vinrent les fonctions analytiques d’une seule variable | 2 |
|--|---|

1. PUIS VINRENT LES FONCTIONS ANALYTIQUES D'UNE SEULE VARIABLE

Considérons le dessin suivant, où les mesures des angles sont en radians.



Via les points M , N , P et Q , il est facile de fournir des arguments géométriques de symétrie justifiant que, sous la condition $x \in]0; \frac{\pi}{4}[$, nous avons :

$$\begin{array}{lll} \bullet \cos(\pi - x) = -\cos x & \bullet \cos(x + \pi) = -\cos x & \bullet \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin(\pi - x) = \sin x & \sin(x + \pi) = -\sin x & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{array}$$

De nouveau, il serait bien de pouvoir passer, sans plus d'effort, à la validité des formules ci-dessus sur \mathbb{R} tout entier (*considérer les autres cas n'est pas compliqué, mais c'est pénible*). Nous allons voir que cela est licite grâce au fait ??, donné plus bas, qui est un peu technique, car il nécessite la notion de fonction analytique.

Préliminaire 1. Le rayon de convergence R de la série entière complexe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est défini par la formule de Hadamard¹ $\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{|a_n|})$ avec les conventions $0 = \frac{1}{+\infty}$ et $+\infty = \frac{1}{0}$.

Ce nombre R s'interprète comme suit.

- (1) Si $R = 0$, la série ne converge que pour $z = 0$, et sinon elle diverge grossièrement.
- (2) Si $R = +\infty$, la série converge sur \mathbb{C} . Plus précisément, la série converge normalement sur tout disque ouvert $\mathcal{D}(0; r[$ tel que $r \in \mathbb{R}_+^*$.
- (3) Si $0 < R < +\infty$, la série converge normalement sur tout disque ouvert $\mathcal{D}(0; r[$ tel que $0 < r < R$, donc elle converge sur $\mathcal{D}(0; R[$. Par contre, elle diverge grossièrement sur $\mathbb{C} - \mathcal{D}(0; R]$, et le comportement sur le cercle $\mathcal{C}(0; R)$ doit être traité au cas par cas.

Démonstration. Notons $\ell = \limsup_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{|a_n|})$, soit $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sup \{ \sqrt[k]{|a_k|}, k \in \mathbb{N}_{\geq n} \})$, de sorte que $\ell \in [0; +\infty]$. Commençons par le cas $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire $R \in \mathbb{R}_+^*$.

- Soit $r \in]0; R[$. Considérons $\rho \in]r; R[$ de sorte que $\frac{1}{r} > \frac{1}{\rho} > \frac{1}{R}$. Par définition de $\ell = \frac{1}{R}$, nous avons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sup \{ \sqrt[k]{|a_k|}, k \in \mathbb{N}_{\geq n_0} \} < \frac{1}{\rho}$. Donc pour $z \in \mathcal{D}(0; r[$ et $k \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$, nous obtenons $|a_k z^k| < \left(\frac{r}{\rho}\right)^k$ pour $k \geq n_0$. Comme $0 < \frac{r}{\rho} < 1$, la convergence normale devient évidente.
- Soit $z \in \mathbb{C} - \mathcal{D}(0; R]$. Comme $\frac{1}{|z|} < \frac{1}{R}$, nous avons ici $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$, $\sup \{ \sqrt[k]{|a_k|}, k \in \mathbb{N}_{\geq n} \} > \frac{1}{|z|}$. En particulier, nous pouvons construire une suite strictement croissante d'indices (k_i) telle que $|a_{k_i} z^{k_i}| > 1$. Ceci donne la divergence grossière.

1. La démonstration va révéler le côté « naturel » de la formule de Hadamard.

- La justification du comportement pathologique sur le cercle $\mathcal{C}(0; R)$ se fait via des contre-exemples. Nous pouvons citer les exemples classiques suivants.

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, de rayon de convergence 1, diverge grossièrement sur $\mathcal{C}(0; 1)$.
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$, de rayon de convergence 1, puisque $\ln \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \right) = -\frac{2 \ln n}{n}$. De plus, cette série entière converge normalement sur $\mathcal{C}(0; 1)$.
- (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$, de rayon de convergence 1, puisque $\ln \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \right) = -\frac{\ln n}{n}$. De plus, cette série entière converge sur $\mathcal{C}(0; 1) - \{1\}$, mais pas en 1. Le comportement sur $\mathcal{C}(0; 1) - \{1\}$ est plus délicat à démontrer, car il se base sur le test de Abel-Dirichlet.

Les cas $\ell = 0$, c'est-à-dire $R = +\infty$, et $\ell = +\infty$, c'est-à-dire $R = 0$, s'obtiennent via des adaptations immédiates de ce qui a été fait ci-dessus. \square

Exemple 2. La série entière complexe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ admet un rayon de convergence infini ; la fonction associée est l'exponentielle complexe \exp . En effet, notant Ent la fonction partie entière, nous avons $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\text{Ent}(\frac{n}{2})} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}$, puis $\ln \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \right) \leq \frac{2-n}{2n} \ln \left(\frac{n}{2} \right)$.

Exemple 3. fonction trigo en expliquant rapidement construction de π .

Préliminaire 4. Soit une série entière complexe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R non nul.

La fonction $f : z \in \mathcal{D}(0; R[\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}$ vérifie les propriétés suivantes.

- (1) f est infiniment \mathbb{C} -dérivable.²
- (2) $\forall k \in \mathbb{N}$, la série entière $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$ admet R pour rayon de convergence.
- (3) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathcal{D}(0; R[$, $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$.
- (4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Démonstration. La propriété 4 étant aisée à déduire, une récurrence immédiate à faire montre qu'il suffit de démontrer que $\forall z \in \mathcal{D}(0; R[$, $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \mathcal{D}(0; R[}} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

- $\ln \left(\sqrt[n]{|n a_n|} \right) = \frac{\ln n}{n} + \ln \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right)$ donne que R est le rayon de convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

On peut donc définir la fonction $g : z \in \mathcal{D}(0; R[\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \in \mathbb{C}$.

- Pour $(z, z_0) \in \mathcal{D}(0; R[$ ² et $k \in \mathbb{N}^*$, nous introduisons les notations suivantes.

- (a) $f_k(z) = \sum_{n=0}^k a_n z^n$.
- (b) $g_k(z) = \sum_{n=1}^k n a_n z^{n-1}$, cette fonction étant clairement la \mathbb{C} -dérivée de $f_k(z)$.

2. L'analyse complexe étudie les fonctions \mathbb{C} -dérivables en les nommant « fonctions holomorphes ». Cette théorie est très riche, et très utile.

$$(c) \quad T_k(z) = \begin{cases} \frac{f_k(z) - f_k(z_0)}{z - z_0} & \text{si } z \in \mathcal{D}(0; R[- \{z_0\} \\ g_k(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

$$(d) \quad T(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si } z \in \mathcal{D}(0; R[- \{z_0\} \\ g(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

- Considérons alors $r \in]0; R[$ tel que $z_0 \in \mathcal{D}(0; r[$. Par convergence normale sur $\mathcal{D}(0; r[$ de $(f_k)_k$ et $(g_k)_k$ vers f et g respectivement, nous avons la convergence uniforme sur $\mathcal{D}(0; r[$ de $(T_k)_k$ vers T . Or chaque fonction T_k est continue en z_0 par \mathbb{C} -dérivabilité de f_k , donc T est continue en z_0 , d'où la \mathbb{C} -dérivabilité de f en z_0 avec $f'(z_0) = g(z_0)$. Ceci achève la preuve, car $z_0 \in \mathcal{D}(0; R[$ est quelconque. \square

Remarque 5. Une relecture de preuves des résultats préliminaires 1 et 4 donnent que pour toute série entière complexe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R non nul, et tout nombre complexe z_0 , la fonction $f : z \in \mathcal{D}(z_0; R[\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \in \mathbb{C}$ vérifie les propriétés suivantes.

(1) f est infiniment \mathbb{C} -dérivable.

(2) $\forall k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k}$ converge normalement sur $\mathcal{D}(z_0; R[$,

(3) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathcal{D}(z_0; R[$, $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k}$.

(4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Nous allons voir que les fonctions développables en série entière autour d'un nombre complexe z_0 ont le bon ton de l'être aussi dans un voisinage de z_0 .

Définition 6. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert non vide. Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dite analytique en $z_0 \in \Omega$, s'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et un réel $r \in]0; R[$ tels qu'on ait $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ dans le disque ouvert $\mathcal{D}(z_0; r[\subseteq \Omega$.

Si f est analytique en tout nombre complexe de Ω , la fonction f est dite analytique sur Ω .

Fait 7. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ où $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ est un ouvert non vide. Si f est analytique en z_0 , alors il existe un réel $r > 0$ tel que f soit analytique sur $\mathcal{D}(z_0; r[$ tout entier.

Démonstration. Reprenons les notations de la définition 6. Nous allons montrer que le réel r convient. Pour cela, considérons $\omega \in \mathcal{D}(z_0; r[$ et un disque ouvert non vide $\mathcal{D}(\omega; \rho[\subseteq \mathcal{D}(z_0; r[$. Notons que $0 < \rho < r$.

- Formellement, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\omega)}{n!} (z - \omega)^n$ et $f^{(n)}(\omega) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k \omega^{k-n}$ conduisent à

$$\text{étudier } \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{n!(k-n)!} a_k \omega^{k-n} (z - \omega)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} a_{n+q} \omega^q (z - \omega)^n.$$

- Soit $F \subset \mathbb{N}^2$ un ensemble fini. Introduisons les notations suivantes.

$$(1) \quad \sigma_F(z; \omega) = \sum_{(n,q) \in F} \alpha_{n,q}(z; \omega) \quad \text{où } \alpha_{n,q}(z; \omega) = \frac{(n+q)!}{n!q!} a_{n+q} \omega^q (z - \omega)^n.$$

$$(2) \quad \mu(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| z^n \quad \text{qui est de rayon de convergence } R.$$

$$(3) \quad N = \max \{n + q, (n, q) \in F\}.$$

Pour $z \in \mathcal{D}(\omega; \rho[$, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{(n,q) \in F} |\alpha_{n,q}(z; \omega)| &\leq \sum_{s=0}^N \sum_{n+q=s} |\alpha_{n,q}(z; \omega)| \\ &\leq \sum_{s=0}^N \sum_{n+q=s} \binom{n+q}{q} |a_{n+q}| r^q \rho^n \\ &\leq \sum_{s=0}^N |a_s| \left(\sum_{n+q=s} \binom{n+q}{q} r^q \rho^n \right) \\ &\leq \sum_{s=0}^N |a_s| (r + \rho)^s \\ &\leq \sum_{s=0}^{+\infty} |a_s| (r + \rho)^s \end{aligned}$$

En imposant aussi $r + \rho < R$, c'est-à-dire $\rho < R - r$, pour tout sous-ensemble fini F de \mathbb{N}^2 , nous avons $\sum_{(n,q) \in F} |\alpha_{n,q}(z; \omega)| \leq \mu(r + \rho) < +\infty$.

Donc $\sum_{(n,q) \in \mathbb{N}^2} \alpha_{n,q}(z; \omega)$ est absolument convergente, et commutativement convergente.

- Pour $z \in \mathcal{D}(\omega; \rho[$, ce qui suit nous donne $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\omega)}{n!} (z - \omega)^n$ comme souhaité.

$$\begin{aligned} (1) \quad &\sum_{(n,q) \in \mathbb{N}^2} \alpha_{n,q}(z; \omega) \\ &= \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{n+q=s} \alpha_{n,q}(z; \omega) \\ &= \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{n+q=s} \binom{n+q}{q} a_{n+q} \omega^q (z - \omega)^n \\ &= \sum_{s=0}^{+\infty} a_s \left(\sum_{n+q=s} \binom{n+q}{q} \omega^q (z - \omega)^n \right) \\ &= \sum_{s=0}^{+\infty} a_s (\omega + z - \omega)^s \\ &= f(z) \end{aligned} \quad \begin{aligned} (2) \quad &\sum_{(n,q) \in \mathbb{N}^2} \alpha_{n,q}(z; \omega) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \alpha_{n,q}(z; \omega) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \binom{n+q}{q} a_{n+q} \omega^q (z - \omega)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{k-n} a_k \omega^{k-n} (z - \omega)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z - \omega)^n \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k \omega^{k-n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\omega)}{n!} (z - \omega)^n \end{aligned}$$

□

Passons, enfin, au résultat essentiel de cette section qui va permettre de valider nos identités trigonométriques obtenues partiellement via la géométrie.

Fait 8. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe non vide,³ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique non identiquement nulle. Pour tout zéro α de f , il existe un disque ouvert non vide $\mathcal{D}(\alpha; r[\subseteq \Omega$ tel que $\forall z \in \mathcal{D}(\alpha; r[- \{\alpha\}$, $f(z) \neq 0$ (c'est le principe des zéros isolés).

Démonstration. TODO

□

3. On parle aussi de « domaine complexe ».