BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

Mentions « légales »

Table des matières

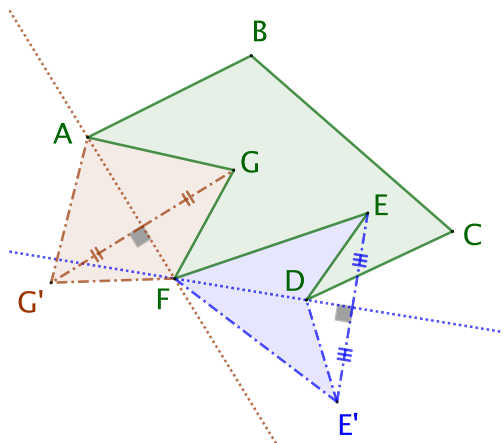
Date: 18 Jan. 2025 – 12 Fev. 2025.

Nous allons établir le fait **??** affirmant qu'un n-gone maximisant son aire à périmètre fixé doit être, a minima, régulier.

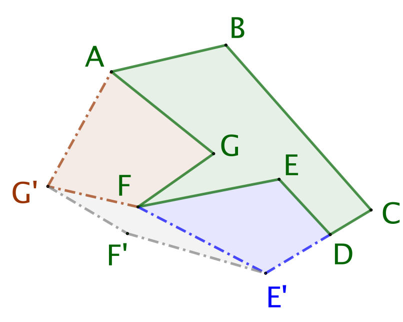
> *Les cas $n = 3$ et $n = 4$ étant résolus, voir les faits **??** et **??**, dans toutes les preuves de cette section, nous supposerons $n \geq 5$.*

Fait 1. *Si un n-gone $\mathcal{P}$ n'est pas convexe, alors on peut construire un n-gone convexe $\mathcal{P}'$ tel que* $\operatorname{Perim}(\mathcal{P}') = \operatorname{Perim}(\mathcal{P})$ *et* $\operatorname{Aire}(\mathcal{P}') > \operatorname{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Ici, il ne faut pas être expéditif en indiquant que la preuve du fait **??** se généralise sans aucun souci. En effet, comme $n \geq 5$, nous pouvons avoir plusieurs points de non-convexité, et les éliminer comme nous l'avons fait pour le quadrilatère n'est pas immédiat : dans la figure suivante, l'élimination des deux points de non convexité G et E de l'heptagone $ABCDEFG$ nous amène à un nouvel heptagone $ABCDE'FG'$ ayant lui aussi deux points de non-convexité F et D ! Donc, rien n'empêche, a priori, d'avoir une suite de constructions n'aboutissant jamais à un heptagone convexe de même périmètre que celui de $ABCDEFG$, et d'aire strictement supérieure à celle de $ABCDEFG$.[1]

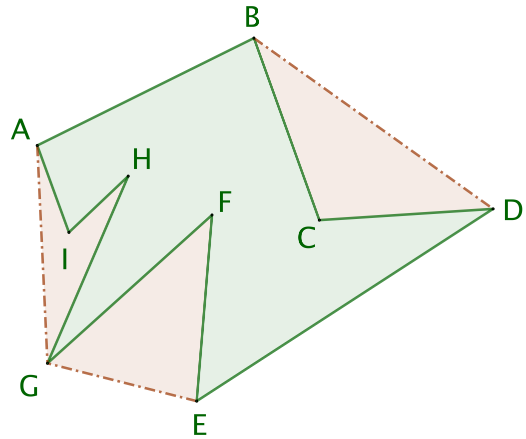


On peut aussi perdre des côtés lors de la construction comme dans l'exemple suivant où C, D et E' sont alignés.[2]

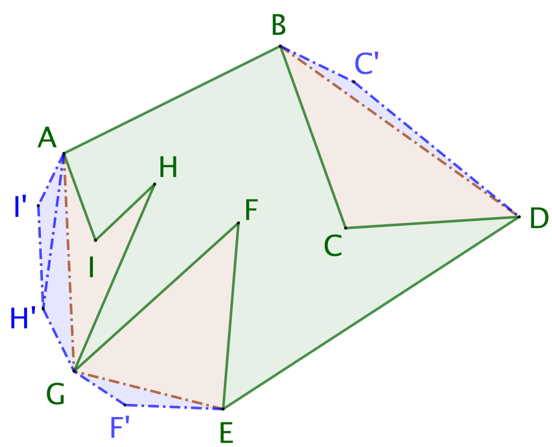


1. L'auteur est convaincu que le procédé aboutira en un nombre fini d'étapes à un polygone convexe, mais il ne l'a pas démontré pour le moment (un raisonnement sur les angles aux sommets devraient permettre de valider une telle conjecture).
2. Ce problème n'en est pas un. Une petite adaptation des arguments à venir permet de vérifier cela.

Laissons de côté la construction précédente pour nous concentrer sur la classique enveloppe convexe[3] du n-gone de départ. Par exemple, l'ennéagone $ABCDEFGHI$ non convexe ci-dessous admet le pentagone $ABDEG$ pour enveloppe convexe : le périmètre diminue et l'aire augmentent strictement, c'est très utile, mais il reste à avoir le bon nombre de côtés.



Une idée simple, que nous allons formaliser rigoureusement après, consiste à ajouter les sommets manquants suffisamment prêts des côtés de l'enveloppe convexe pour ne pas perdre la convexité, tout en gardant un périmètre inférieur strictement au périmètre initial, et une aire strictement plus grande que l'aire initiale. Si nous arrivons à faire ceci, alors une homothétie de rapport $r > 1$ nous ramènera au bon périmètre avec une aire strictement plus grande que l'aire initiale. La figure suivante illustre cette idée.

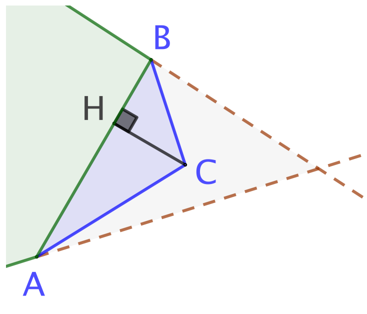


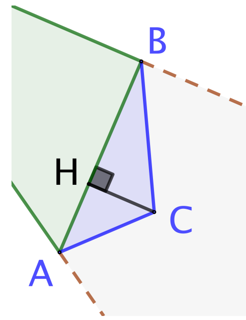
Considérons donc un n-gone non convexe $\mathcal{P}$. Son enveloppe convexe $\mathcal{C}$ vérifie, par construction, $\text{Perim}(\mathcal{C}) < \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{C}) > \text{Aire}(\mathcal{P})$. Notons m le nombre de sommets en moins dans $\mathcal{C}$ relativement à $\mathcal{P}$. Si $m = 0$, il n'y a rien à faire. Sinon, posons $\delta = \frac{\text{Perim}(\mathcal{P}) - \text{Perim}(\mathcal{C})}{m}$.

(1) Considérons $[AB]$ un côté quelconque de $\mathcal{C}$. Les droites portées par les côtés « *autour* » de $[AB]$ « *dessinent* » une région contenant toujours un triangle ABC dont l'intérieur est à l'extérieur[4] de $\mathcal{C}$ comme dans les deux cas ci-dessous.

---

3. C'est le plus petit polygone convexe « *contenant* » le n-gone considéré, où « *petit* » est relatif à l'inclusion.
4. C'est ce que l'on appelle de la « *low poetry* » .





(2) Clairement, le polygone $\mathcal{C}'$ obtenu à partir de $\mathcal{C}$ en remplaçant le côté $[AB]$ par les côtés $[AC]$ et $[CB]$ est un convexe avec un sommet de plus que $\mathcal{C}$.

(3) Comme HC peut être rendu aussi proche de 0 que souhaité, il est aisé de voir que l'on peut choisir cette distance de sorte que $AC + BC < AB + \delta$. Dès lors, le périmètre de $\mathcal{C}'$ augmente inférieurement à δ relativement à $\mathcal{C}$.

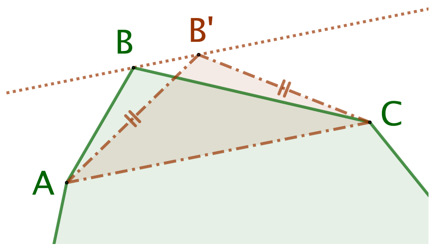
(4) En répétant $(m-1)$ fois les étapes **??** à **??**, nous obtenons un n-gone convexe $\mathcal{P}'$ tel que $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$ et $\text{Perim}(\mathcal{P}') < \text{Perim}(\mathcal{C}) + m\delta = \text{Perim}(\mathcal{P})$.

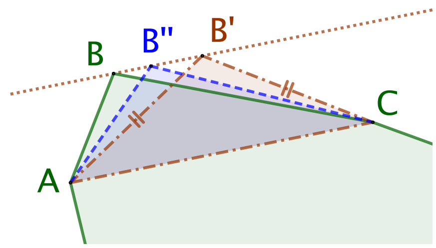
□

Remarque 0.1. *Le fait précédent permet de toujours se ramener au cas d'un n-gone convexe.*

Fait 2. *Si un n-gone convexe $\mathcal{P}$ n'est pas un n-gone équilatéral, alors on peut construire un n-gone convexe $\mathcal{P}'$ tel que* $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$ *et* $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Considérons un n-gone convexe $\mathcal{P}$ qui ne soit pas un n-gone équilatéral. Dans ce cas, $\mathcal{P}$ admet un triplet de sommets consécutifs A, B et C tels que $AB \neq BC$ (sinon, on obtiendrait de proche en proche un n-gone équilatéral). La construction vue dans la preuve du fait **??** nous donne la solution : voir les deux dessins ci-après dans lesquels $(AC) \mathbin{/\!/} (BB')$. Pour le 2ᵉ cas, il n'est pas possible d'utiliser le triangle $AB'C$ isocèle en B' car $(B'C)$ porte le côté de $\mathcal{P}$ de sommet C juste après $[BC]$, mais ce problème se contourne en considérant un point B'' du segment ouvert $]BB'[$ (si besoin, se reporter au 2ᵉ dessin de la preuve du fait **??**).



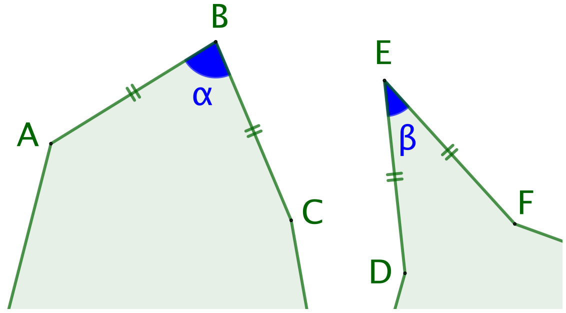


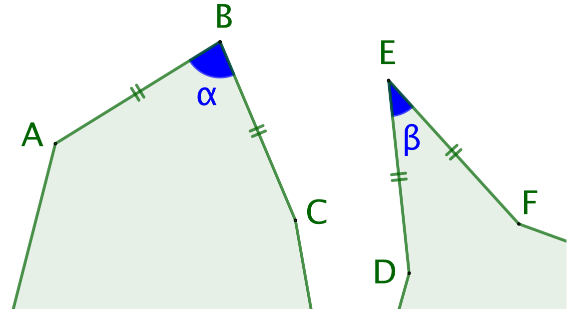
Dans chaque cas, nous avons construit un n-gone convexe $\mathcal{P}''$ tel que $\text{Perim}(\mathcal{P}'') < \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}'') = \text{Aire}(\mathcal{P})$. Un simple agrandissement donne un n-gone convexe $\mathcal{P}'$ vérifiant $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$. □

Remarque 0.2. *Le fait précédent ne permet pas de se ramener toujours au cas d'un n-gone équilatéral convexe. Il nous dit juste que si un n-gone convexe maximise son aire à périmètre fixé, alors il devra être, a minima, un n-gone équilatéral. La nuance est importante, et une similaire existe pour la conclusion du fait suivant.*

Fait 3. *Si un n-gone équilatéral convexe $\mathcal{P}$ n'est pas un n-isogone, alors il existe un n-gone convexe $\mathcal{P}'$ tel que* $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$ *et* $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Par hypothèse, nous avons deux paires de côtés $\big([AB],[BC]\big)$ et $\big([DE],[EF]\big)$ telles que $\widehat{BAC} > \widehat{DEF}$ comme ci-dessous, sans savoir si un côté lie les sommets C et D, et de même pour F et A. Par contre, il est possible que C et D soient confondus.





Dans nos manipulations à venir, nous fixons A, C, E et G, tout en cherchant à bouger B et F de sorte à toujours avoir des triangles isocèles « *pointant* » vers l'extérieur du convexe $\mathcal{P}$. Posons $\ell = AB$, $d_1 = AC$ et $d_2 = EG$. Comme nous ne touchons pas aux points A, C, E et G, les nombres d_1 et d_2 sont constants.

- ????
- ????

□