## BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons "Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International".



Table des matières

Date: 18 Jan. 2025 - 2 Fev. 2025.

Fait 1. Soit  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  une n-ligne. La fonction qui à un point  $\Omega$  du plan associe  $\mu_1^n(\Omega; \mathcal{L}) = \sum_{i=1}^n \det \left( \overrightarrow{\Omega A_i'}, \overrightarrow{\Omega A_{i+1}'} \right)$  est indépendante du point  $\Omega$ . Dans la suite, cette quantité indépendante de  $\Omega$  sera notée  $\mu_1^n(\mathcal{L})$ .

 $D\acute{e}monstration$ . Soit M un autre point du plan.  $\mu_1^n(\Omega;\mathcal{L})$ 

$$= \sum_{i=1}^{n} \det \left( \overrightarrow{\Omega A_{i}'}, \overrightarrow{\Omega A_{i+1}'} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \det \left( \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{M A_{i}'}, \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{M A_{i+1}'} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \det \left( \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M} \right) + \det \left( \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{M A_{i+1}'} \right) + \det \left( \overrightarrow{M A_{i}'}, \overrightarrow{\Omega M} \right) + \det \left( \overrightarrow{M A_{i}'}, \overrightarrow{M A_{i+1}'} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \det \left( \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{M A_{i+1}'} \right) + \sum_{i=1}^{n} \det \left( \overrightarrow{M A_{i}'}, \overrightarrow{\Omega M} \right) + \mu_{1}^{n}(M; \mathcal{L})$$

$$= \mu_{1}^{n}(M; \mathcal{L}) + \sum_{i=2}^{n+1} \det \left( \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{M A_{i+1}'} \right) - \det \left( \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{M A_{i}'} \right)$$

$$= \mu_{1}^{n}(M; \mathcal{L}) + \det \left( \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{M A_{n+1}'} \right) - \det \left( \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{M A_{1}'} \right)$$

$$= \mu_{1}^{n}(M; \mathcal{L})$$

Fait 2. Soit  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  une n-ligne. Pour  $k \in [1; n]$ , la n-ligne  $\mathcal{L}_j = B_1 B_2 \cdots B_n$ , où  $B_i = A'_{k+i-1}$ , vérifie  $\mu_1^n(\mathcal{L}) = \mu_1^n(\mathcal{L}_k)$ . Dans la suite, cette quantité commune sera notée  $\mu(\mathcal{L})$ .

 $D\acute{e}monstration$ . Il suffit de s'adonner à un petit jeu sur les indices de sommation.

Fait 3. Soit  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  une n-ligne. La n-ligne  $\mathcal{L}^{op} = B_1 B_2 \cdots B_n$ , où  $B_i = A_{n+1-i}$ , vérifie  $\mu(\mathcal{L}^{op}) = -\mu(\mathcal{L})$ .

 $D\acute{e}monstration$ . Soit  $\Omega$  un point quelconque du plan.  $\mu(\mathcal{L}^{op})$ 

$$= \sum_{i=1}^{n} \det \left( \overrightarrow{\Omega B_{i}'}, \overrightarrow{\Omega B_{i+1}'} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \det \left( \overrightarrow{\Omega A_{n+1-i}'}, \overrightarrow{\Omega A_{n-i}'} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \det \left( \overrightarrow{\Omega A_{j+1}'}, \overrightarrow{\Omega A_{j}'} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \det \left( \overrightarrow{\Omega A_{j+1}'}, \overrightarrow{\Omega A_{j}'} \right)$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \det \left( \overrightarrow{\Omega A_{j+1}'}, \overrightarrow{\Omega A_{j+1}'} \right)$$

$$= - \mu(\mathcal{L})$$

Fait 4. Soit  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  une n-ligne. La quantité  $\frac{1}{2} |\mu(\mathcal{L})|$  ne dépend ni du sens de parcours de  $\mathcal{L}$ , ni du point de départ choisi. Le lle sera notée AireGe( $\mathcal{L}$ ), et nommée « aire généralisée » de la n-ligne  $\mathcal{L}$ .

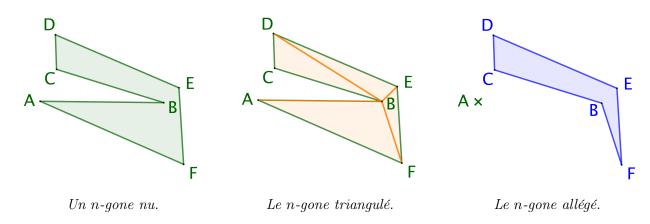
Démonstration. C'est une conséquence directe des faits 2 et 3.

<sup>1.</sup> Le lecteur pardonnera les abus de langage utilisés.

Pour notre démonstration finale, nous aurons besoin de savoir que AireGe( $\mathcal{P}$ ) = Aire( $\mathcal{P}$ ) pour tout n-gone  $\mathcal{P}$ .  $^2$  Ceci est évident dans le cas convexe, car il suffit de choisir l'isobarycentre G de  $A_1, A_2, ..., A_n$  pour le calcul de AireGe( $\mathcal{P}$ ) : en effet, avec ce choix, tous les déterminants det  $(\overline{GA'_i}, \overline{GA'_{i+1}})$  ont le même signe. Dans le cas non-convexe, les choses se compliquent a priori, car nous ne maîtrisons plus les signes des déterminants. Heureusement nous avons le résultat fort suivant qui est un pas important pour atteindre notre but.

Fait 5. Soit un n-gone  $\mathcal{P}$ . On suppose la n-ligne  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  associée à  $\mathcal{P}$  telle que les points  $A_1, A_2, ..., A_n$  soient parcourus dans le sens trigonométrique, ou anti-horaire. Une telle n-ligne sera dite « positive ». <sup>3</sup> Sous cette hypothèse, nous avons  $\mu(\mathcal{L}) \geq 0$ .

Démonstration. Le théorème de triangulation affirme que tout n-gone est triangulable comme dans l'exemple très basique suivant qui laisse envisager une démonstration par récurrence en retirant l'un des triangles ayant deux côtés correspondant à deux côtés consécutifs du n-gone (pour peu qu'un tel triangle existe toujours).



Le théorème de triangulation admet une forme forte donnant une décomposition contenant un triangle formé de deux côtés consécutifs du n-gone.  $^4$  Nous dirons qu'une telle décomposition est « à l'écoute ». Ce très mauvais jeu de mots fait référence à la notion sérieuse « d'oreille » pour un n-gone : une oreille est un triangle inclus dans le n-gone, et formé de deux côtés consécutifs du n-gone. L'exemple suivant donne un n-gone n'ayant que deux oreilles : ceci montre que l'existence d'une oreille ne va pas de soi.  $^5$ 



Nous allons raisonner par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}_{>3}$ .

<sup>2.</sup> Nous obtenons ainsi la généralisation de l'aire géométrique usuelle au cas des polygones croisés.

<sup>3.</sup> Bien noté que cette notion ne peut exister lorsqu'on considère un polygone croisé. De façon cachée, nous utilisons le célèbre théorème de Jordan, dans sa forme polygonale.

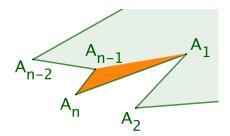
<sup>4.</sup> En pratique, cette forme forte est peu utile, car elle aboutit à un algorithme de recherche trop lent.

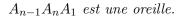
<sup>5.</sup> On démontre que tout n-gone admet au minimum deux oreilles.

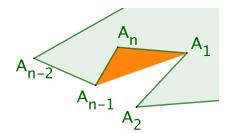
• Cas de base. Soit ABC un triangle où les sommets A, B et C sont parcourus dans le sens trigonométrique.

Si l'on connait le lien entre déterminant et produit vectoriel, il n'y a rien à faire. Pour les autres, il existe une méthode élégamment brutale : par une rotation directe, qui ne change pas le signe du déterminant, ni le sens de parcours de ABC, on se ramène au cas où A(0;0), B(AB;0) et  $C(x_C;y_C)$ , de sorte que  $\mu(ABC) = \det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = AB \cdot y_C$  avec  $y_C \geq 0$  par hypothèse.

• **Hérédité.** Soient un n-gone  $\mathcal{P}$ , avec  $n \in \mathbb{N}_{>3}$ , et  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  une n-ligne positive qui lui est associée. On peut supposer que  $A_{n-1}A_nA_1$  est une oreille du n-gone  $\mathcal{P}$ .







 $A_{n-1}A_nA_1$  n'est pas une oreille.

Notons  $\mathcal{P}'$  le k-gone associé à la k-ligne  $\mathcal{L}' = A_1 \cdots A_{n-1}$  où k = n-1 vérifie  $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ . Par hypothèse,  $\mathcal{L}'$  est positive. Nous arrivons aux calculs élémentaires suivants en utilisant  $\Omega = A_1$  comme point de calcul de  $\mu(\mathcal{L})$ .

$$\mu(\mathcal{L})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \det \left( \overrightarrow{A_1 A_j'}, \overrightarrow{A_1 A_{j+1}'} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n-2} \det \left( \overrightarrow{A_1 A_j'}, \overrightarrow{A_1 A_{j+1}'} \right) + \det \left( \overrightarrow{A_1 A_{n-1}'}, \overrightarrow{A_1 A_n'} \right) + \det \left( \overrightarrow{A_1 A_n'}, \overrightarrow{A_1 A_{n+1}'} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n-2} \det \left( \overrightarrow{A_1 A_j}, \overrightarrow{A_1 A_{j+1}} \right) + \det \left( \overrightarrow{A_1 A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1 A_n} \right) + \det \left( \overrightarrow{A_1 A_n}, \overrightarrow{A_1 A_1} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n-2} \det \left( \overrightarrow{A_1 A_j}, \overrightarrow{A_1 A_{j+1}} \right) + \det \left( \overrightarrow{A_1 A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1 A_n} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n-2} \det \left( \overrightarrow{A_1 A_j}, \overrightarrow{A_1 A_{j+1}} \right) + \det \left( \overrightarrow{A_1 A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1 A_n} \right)$$

$$= \mu(\mathcal{L}') + \mu(A_{n-1} A_n A_1)$$

$$\det \left( \overrightarrow{A_1 A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1 A_1} \right) = 0$$

Par hypothèse de récurrence, nous savons que  $\mu(\mathcal{L}') \geq 0$ , et comme  $A_{n-1}A_nA_1$  est une oreille de  $\mathcal{P}$ , la 3-ligne  $A_{n-1}A_nA_1$  est forcément positive, d'où  $\mu(A_{n-1}A_nA_1) \geq 0$  d'après le cas de base. Nous arrivons bien à  $\mu(\mathcal{L}) \geq 0$ , ce qui permet de finir aisément la démonstration par récurrence.

Fait 6. Pour tout n-gone  $\mathcal{P}$ , nous avons : AireGe( $\mathcal{P}$ ) = Aire( $\mathcal{P}$ ).

Démonstration. Faisons une preuve par récurrence.

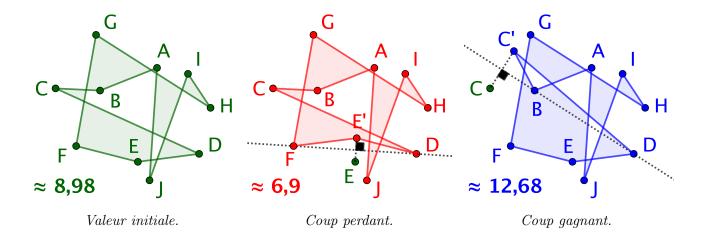
- Cas de base. C'est immédiat.
- **Hérédité.** Reprenons les notations de la démonstration du fait  $5: \mathcal{P}$  est un n-gone , avec  $n \in \mathbb{N}_{>3}$ ,  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  une n-ligne positive qui lui est associée,  $A_{n-1} A_n A_1$  une oreille du n-gone  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}'$  le k-gone associé à la k-ligne  $\mathcal{L}' = A_1 \cdots A_{n-1}$  où k = n-1 vérifie  $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ , avec  $\mathcal{L}'$  positive. Nous arrivons aux calculs élémentaires suivants.

Fait 7. Si une n-ligne  $\mathcal{L}$  non dégénérée n'est pas un n-gone, donc est un polygone croisé, alors on peut construire une n-ligne non dégénérée  $\mathcal{L}'$  telle que  $\operatorname{Perim}(\mathcal{L}') = \operatorname{Perim}(\mathcal{L})$  et  $\operatorname{AireGe}(\mathcal{L}') > \operatorname{AireGe}(\mathcal{L})$ .

## Démonstration. XXX

YYYY

idée d'user de symétrie axiale avec point de calciul sur l'axe comme cela on modifie le signe d'un det, pour savoir ou agir, on doi connaître le signe initiale de  $\mu(\mathcal{L})$  on doit faire gaffe a ce qui impose le signe comme montre exemle suivant om l'on dveni quel esl moins sont les plus forts ici d'oùù coup gagnta pour triangle horaire crée besoin axe symétrie qui ne soit pas un côté pour conserver le périmètre donc on vire cas 2!!!! L'idée est simple. Considérons, par exemple, le polygone croisé ABCDEFGHIJ s (les nombres sont les aires calculées par GeoGebra). YYY



Fait 8. Soit  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  un naturel fixé. Considérons tous les n-gones de périmètre fixé. Parmi tous ces n-gones, il en existe au moins un d'aire maximale.

 $D\'{e}monstration$ . Ce qui suit nous donne plus généralement l'existence d'un n-gone, au moins, maximisant l'aire généralisée parmi toutes les n-lignes de périmètre fixé p. Ce résultat plus fort convient d'après le fait 6.

- On munit le plan d'un repère orthonormé direct  $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ .
- On note  $\mathcal{Z}$  l'ensemble des n-lignes  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  telles que  $\operatorname{Perim}(A_1 A_2 \cdots A_n) = p$  et  $A_1 (0; 0)$ .

<sup>6.</sup> Le mot « Zeile » est une traduction possible de « ligne » en allemand.

- Considérons alors  $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{2n}$  l'ensemble des uplets  $(x(A_1); y(A_1); \ldots; x(A_n); y(A_n))$  correspondant aux coordonnées des sommets  $A_i$  de n-lignes appartenant à  $\mathcal{Z}$ .
- $\mathcal{G}$  est clairement fermé dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . De plus, il est borné, car les coordonnées des sommets des n-lignes considérées le sont. En résumé,  $\mathcal{G}$  est un compact de  $\mathbb{R}^{2n}$ .
- Nous définissons la fonction  $s:\mathcal{G}\to\mathbb{R}_+$  qui à un uplet de  $\mathcal{G}$  associe l'aire généralisée de la n-ligne qu'il représente. Cette fonction est continue comme valeur absolue d'une fonction polynomiale en les coordonnées.
- Finalement, par continuité et compacité, on sait que s admet un maximum sur  $\mathcal{G}$ . Or, un tel maximum ne peut être atteint en une n-ligne dégénérée, clairement, ni en un polygone croisé d'après le fait 7, donc un tel maximum sera obtenu en un n-gone. That's all folks!

Fait 9. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Considérons tous les n-gones de périmètre fixé. Par	mi
tous ces n-gones, un seul est d'aire maximale, c'est le n-gone régulier.	
Démonstration. Ceci découle directement des faits ?? et 8. Ici s'achève notre ioli voyage.	П