BROUILLON – OPTIMISATION BASIQUE SANS DÉRIVER... QUOIQUE !

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LaTeX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/math/optimization/real-func/hyperbola-rectangle-hidden-symmetry.

Mentions « légales »

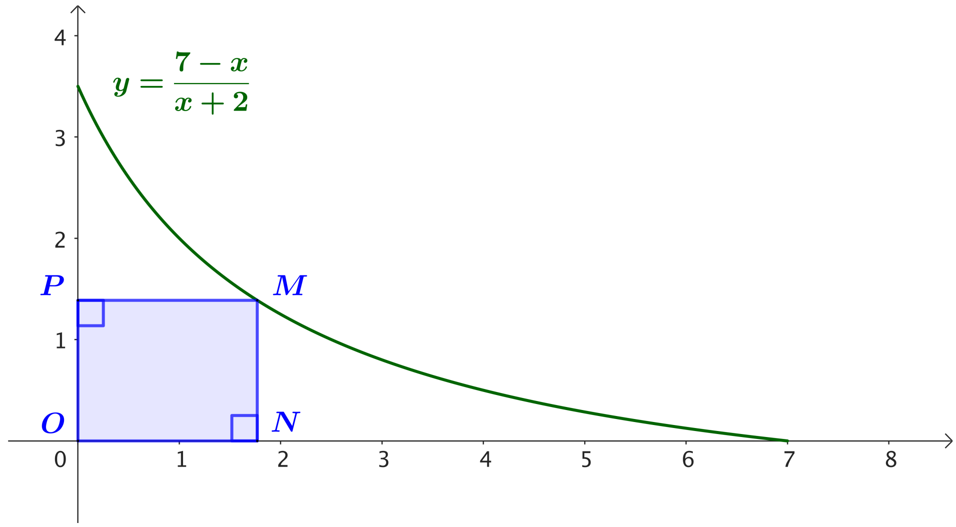
Table des matières

Date: 28 Avril 2025 - 30 Avril 2025.

Ce document propose deux visions élémentaires différentes d'un même problème très simple d'optimisation d'aire relativement à une hyperbole. Vient ensuite la généralisation du résultat en limitant au maximum la brutalité.

1. Un problème d'optimisation de niveau pré-universitaire

Soit la fonction f définie sur $[0\,;7]$ par $f(x) = \frac{7-x}{x+2}$. Considérons M un point sur $\mathscr{C}_f : y = f(x)$, et le rectangle $MNOP$ comme ci-dessous. Est-il possible de placer M tel que Aire$(MNOP)$ soit maximale ?



2. La classique méthode via la dérivation

Traditionnellement, nous étudions les variations de la fonction $A(x) = xf(x) = \frac{7x-x^2}{x+2}$, via sa dérivée $A'(x) = \frac{-x^2-4x+14}{(x+2)^2}$, dont le signe dépend de celui du trinôme $T(x) = -x^2 - 4x + 14$ qui s'annule en $\left(-2 \pm 3\sqrt{2}\right)$. Nous obtenons aisément le tableau de variations suivant.

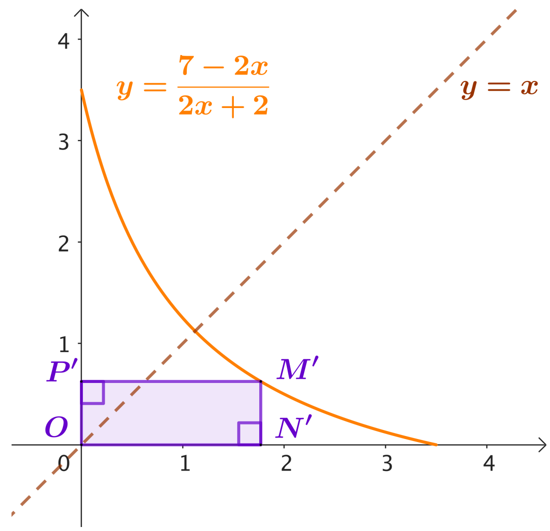
x	0		$3\sqrt{2}-2$		7
$T(x)$		$+$	0	$-$	
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Finalement, Aire$(MNOP)$ est maximale uniquement lorsque $x_M = 3\sqrt{2} - 2$.

Remarque 1. *Comme $A''(x) = -\frac{36}{(2+x)^3}$, la fonction A est concave.*

3. Sans dériver, c'est possible !

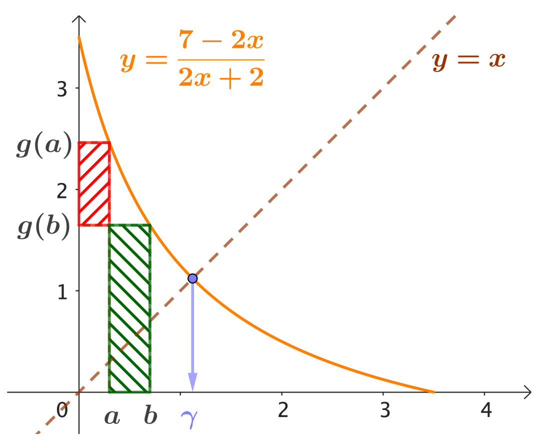
Nous proposons ici une méthode géométrico-algébrique sans user de la notion de dérivée. Pour ce faire, commençons par symétriser le problème en obtenant une hyperbole symétrique par rapport à la 1[re] bissectrice $\mathscr{D} : y = x$. Il suffit de considérer la fonction g définie sur $[0\,;3{,}5]$ par $g(x) = f(2x) = \frac{7-2x}{2x+2}$. Cette opération algébrique correspond à appliquer une dilatation horizontale de coefficient 0,5.



Le calcul suivant démontre que $\mathscr{C}_g : y = g(x)$ est bien symétrique rapport à $\mathscr{D}$.

$$\begin{aligned} g\big(g(x)\big) &= \left(7 - 2 \cdot \frac{7-2x}{2x+2}\right) \div \left(2 \cdot \frac{7-2x}{2x+2} + 2\right) \\ &= \frac{7(2x+2) - 2(7-2x)}{2(7-2x) + 2(2x+2)} \\ &= \frac{18x}{18} \\ &= x \end{aligned}$$

Cette propriété de symétrie nous permet de deviner le rôle essentiel de $\gamma = 1{,}5\sqrt{2} - 1$, l'unique solution sur $[0\,;3{,}5]$ de $g(x) = x$, c'est-à-dire de $\frac{7-2x}{2x+2} = x$, soit $2x^2 + 4x - 7 = 0$. Notons alors $\mathscr{A}(x) = xg(x)$ pour $x \in [0\,;3{,}5]$. Nous allons démontrer, sans dériver, la croissance stricte de $\mathscr{A}$ sur $[0\,;\gamma]$, et par conséquent sa décroissance stricte sur $[\gamma\,;3{,}5]$ par raison de symétrie. Considérons donc a et b deux réels tels que $0 \leq a < b \leq \gamma$, puis observons le schéma suivant.



Nous avons $\mathscr{A}(a) < \mathscr{A}(b)$ si, et seulement si, $a\big(g(a) - g(b)\big) < (b-a)g(b)$. Nous voilà partis pour un peu de calcul...

- $$\begin{aligned} 2\big(g(a) - g(b)\big) &= \frac{7-2a}{a+1} - \frac{7-2b}{b+1} \\ &= \frac{(7-2a)(b+1) - (7-2b)(a+1)}{(a+1)(b+1)} \\ &= \frac{9(b-a)}{(a+1)(b+1)} \end{aligned}$$

- Le point précédent nous amène aux calculs suivants.

$$\begin{aligned}&\frac{2(a+1)(b+1)}{b-a}\Big(a\big(g(a)-g(b)\big)-(b-a)g(b)\Big)\\ =\ &9a-(7-2b)(a+1)\\ =\ &2a+2ab+2b-7\end{aligned}$$

- En nous souvenant de $0 \leq a < b \leq \gamma$, nous avons $2a+2ab+2b-7 < 2b^2+4b-7$. Or, les racines de $2x^2+4x-7$ sont γ et $\overline{\gamma} = -1{,}5\sqrt{2}-1$, donc $b \in \left]\overline{\gamma}\,;\gamma\right[$ donne $2b^2+4b-7<0$, puis $a\big(g(a)-g(b)\big) < (b-a)g(b)$.

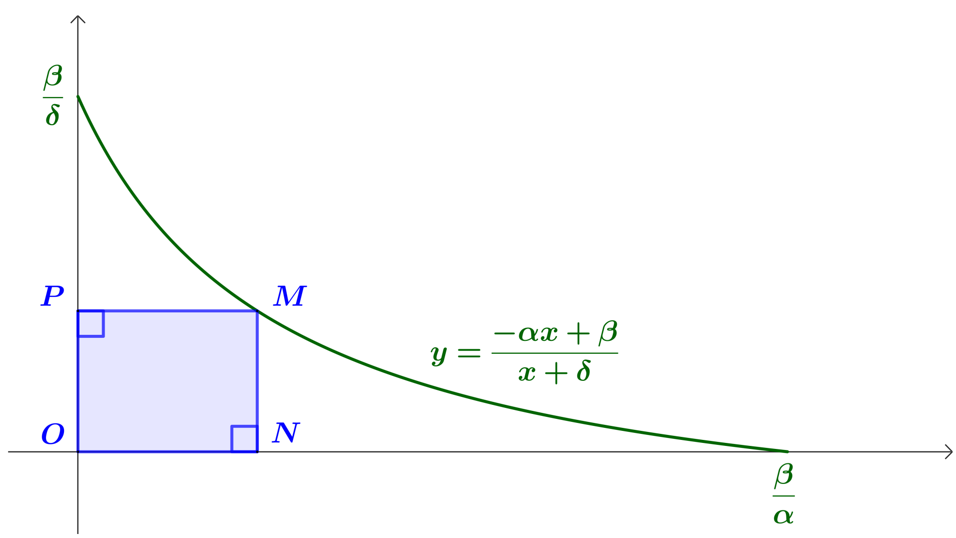
Nous arrivons au tableau de variations suivant.

x	0	γ	$3{,}5$
$\mathscr{A}(x)$		$\nearrow$ $\searrow$	

Finalement, pour revenir à $A(x)$ maximale, il suffit d'inverser la dilatation horizontale qui a permis de passer de $f(x)$ à $g(x)$, soit prendre $2\gamma = 3\sqrt{2}-2$, au lieu de γ. Finalement, Aire$(MNOP)$ est maximale uniquement lorsque $x_M = 3\sqrt{2}-2$.

4. Et si on généralisait...

Considérons la fonction homographique f définie sur $\left[0\,;\frac{\beta}{\alpha}\right]$ par $f(x) = \frac{-\alpha x+\beta}{x+\delta}$ où l'on suppose $(\alpha\,;\beta\,;\delta) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ en utilisant des paramètres positifs comme en Physique.[1] Considérons M un point sur $\mathscr{C}_f : y = f(x)$, et le rectangle $MNOP$ comme ci-dessous. Est-il possible de placer M tel que Aire$(MNOP)$ soit maximale ?



Pour minimiser le nombre de paramètres utilisés, commençons par appliquer une dilatation horizontale de coefficient $\frac{\alpha}{\beta}$, ce qui donne $g(x) = f(\frac{\beta}{\alpha}x) = \frac{\beta(1-x)}{\delta+\frac{\beta}{\alpha}x} = \alpha \cdot \frac{1-x}{\mu+x}$ en notant $\mu = \frac{\alpha\delta}{\beta}$. Par confort, appliquons ensuite une dilatation verticale de coefficient $\frac{1}{\alpha} > 0$, ce qui fournit $h(x) = \frac{1-x}{\mu+x}$. Nous arrivons au problème de maximisation de $\mathscr{A}(x) = xh(x) = \frac{x-x^2}{x+\mu}$ sur $[0\,;1]$.

1. Ces contraintes permettent d'obtenir la situation graphique proposée juste après.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}'(x) &= \frac{(1-2x)(x+\mu)-(x-x^2)}{(x+\mu)^2}\\ &= \frac{-x^2-2\mu x+\mu}{(x+\mu)^2}\end{aligned}$$

Nous sommes amener à étudier le signe du trinôme $T(x) = -x^2 - 2\mu x + \mu$.

$$\begin{aligned}\Delta &= 4\mu^2 + 4\mu\\ &= 4\mu(\mu+1)\end{aligned}$$

Comme $\mu > 0$, nous avons deux racines $r_1 = -\mu - \sqrt{\mu(\mu+1)}$ et $r_2 = -\mu + \sqrt{\mu(\mu+1)}$. Or, $0 < \mu < \mu + 1$ donne $0 < r_2 < 1$, puis le tableau de variations suivant.

x	0		r_2		1
$T(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathscr{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathscr{A}(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Finalement, Aire$(MNOP)$ est maximale uniquement lorsque $x_M = \frac{\beta}{\alpha} r_2$, c'est-à-dire pour $x_M = \sqrt{\delta(\delta + \frac{\beta}{\alpha})} - \delta$ en revenant aux données initiales, car $\frac{\beta}{\alpha}\mu = \delta$.

Remarque 2. *Les calculs suivants montrent la concavité de $\mathscr{A}$, et donc de l'aire du rectangle initialement étudié.*

$$\begin{aligned}\mathscr{A}''(x) &= \frac{-2(x+\mu)\cdot(x+\mu)^2 - (-x^2-2\mu x+\mu)\cdot 2(x+\mu)}{(x+\mu)^4}\\ &= \frac{-2x^2-4\mu x-2\mu^2+2x^2+4\mu x-2\mu}{(x+\mu)^3}\\ &= \frac{-2\mu(\mu+1)}{(x+\mu)^3}\end{aligned}$$

Remarque 3. *Juste par amusement, reprenons l'idée de symétrisation du problème pour ne pas employer de dérivée.*

- *Travaillons avec $k(x) = \mu h(x) = \mu \cdot \frac{1-x}{x+\mu}$ sur $[0\,;1]$.*
- *Le calcul suivant démontre que $\mathscr{C}_k : y = k(x)$ est bien symétrique rapport à $\mathscr{D} : y = x$.*

$$\begin{aligned}k\big(k(x)\big) &= \mu\Big(1 - \mu\cdot\frac{1-x}{x+\mu}\Big) \div \Big(\mu\cdot\frac{1-x}{x+\mu} + \mu\Big)\\ &= \frac{x+\mu-\mu(1-x)}{1-x+x+\mu}\\ &= \frac{(1+\mu)x}{1+\mu}\\ &= x\end{aligned}$$

- *L'intersection de $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{D}$ se fait en $\gamma = -\mu + \sqrt{\mu(\mu+1)}$ l'unique solution sur $[0\,;1]$ de $k(x) = x$, c'est-à-dire de $\mu(1-x) = x^2 + \mu x$, soit $-x^2 - 2\mu x + \mu = 0$.*

- *Comme dans la section 3, nous devons démontrer que* $a\big(k(a)-k(b)\big) < (b-a)k(b)$ *si* $0 \leq a < b \leq \gamma$.
- $$\begin{aligned} \frac{1}{\mu}\big(k(a)-k(b)\big) &= \frac{1-a}{a+\mu} - \frac{1-b}{b+\mu} \\ &= \frac{(1+\mu)(b-a)}{(a+\mu)(b+\mu)} \end{aligned}$$
- $$\frac{(a+\mu)(b+\mu)}{\mu(b-a)}\Big(a\big(k(a)-k(b)\big)-(b-a)k(b)\Big)$$

$= (1+\mu)a - (1-b)(a+\mu)$

$= \mu a + ab + \mu b - \mu$

- *Nous arrivons à* $\mu a + ab + \mu b - \mu < b^2 + 2\mu b - \mu$ *qui permet de conclure.*