IDENTITÉS PARTICULIÈRES GÉNÉRALISABLES RIGOUREUSEMENT

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/visual-proof/polynomial-analytic-principles.

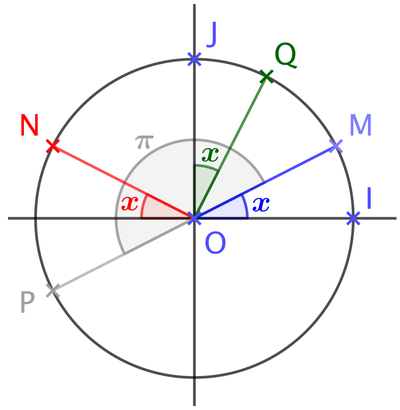
Mentions « légales »

Table des matières

Date: 16 Juillet 2019 - 24 Mars 2025.

1. Ensuite vinrent les fonctions analytiques

Considérons le dessin suivant, où les mesures des angles sont en radians.



Via les points M, N, P et Q, il est facile de fournir des arguments géométriques de symétrie justifiant que, sous la condition $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{4}\right[$, nous avons :

- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
  $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
  $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

De nouveau, il serait bien de pouvoir passer, sans plus d'effort, à la validité des formules ci-dessus sur $\mathbb{R}$ tout entier *(considérer les autres cas n'est pas compliqué, mais c'est pénible)*. Nous allons voir que cela est licite grâce au fait 2 suivant qui est un peu technique, car il nécessite la notion de fonction analytique, un concept dont nous donnons la définition ci-après.

Définition 1. *Soit $U \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert non vide. Une fonction réelle $f : U \to \mathbb{R}$ est dite analytique en x_0, s'il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $\rho_0 > 0$, et un réel $r \in \left]0\,;\rho_0\right]$ tels que $\forall x \in \left]x_0 - r\,; x_0 + r\right[\subseteq U$, on ait : $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$. Si f est analytique en tout réel de U, on dira que f est analytique sur U.*

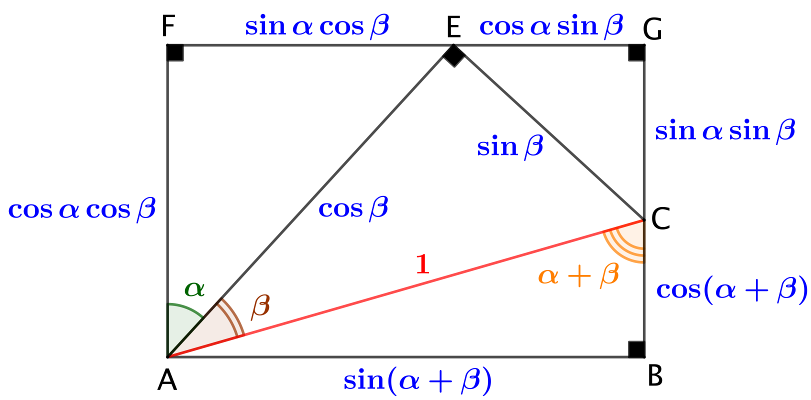
Fait 2. *Soit $U \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert connexe non vide, et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction analytique non identiquement nulle. Si $\alpha \in U$ vérifie $f(\alpha) = 0$, alors il existe un ouvert V tel que $\alpha \in V \subseteq U$, et $\forall x \in V - \{\alpha\}$, $f(x) \neq 0$* (c'est le principe des zéros isolés).

Démonstration. TODO $\square$

Si nous revenons à nos identités trigonométriques, il suffit de savoir que les fonctions circulaires réelles sont analytiques sur $\mathbb{R}$ tout entier, et de noter que le raisonnement géométrique au début de cette section fait clairement apparaître des zéros non isolés pour les fonctions analytiques sur $\mathbb{R}$ suivantes. [1]

- $f_1(z) = \cos(\pi - z) + \cos z$ et $f_2(z) = \sin(\pi - z) - \sin z$
- $f_3(z) = \cos(z + \pi) + \cos z$ et $f_4(z) = \sin(z + \pi) + \sin z$
- $f_5(z) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \sin z$ et $f_6(z) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \cos z$

Que faire si nous avons des formules trigonométriques impliquant deux variables ? Par exemple, le dessin suivant, par simple application des définitions géométriques du cosinus et du sinus, donne à la fois $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ et $\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$ pour $(\alpha\,;\beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.



Le fait 4 ci-dessous, qui généralise le fait 2, implique la validité des formules trigonométriques précédentes sur $\mathbb{R}^2$ tout entier en faisant les choix ci-après. Nous voilà sauvés !

- $f_1(\alpha\,;\beta) = \cos(\alpha + \beta) - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
- $f_2(\alpha\,;\beta) = \sin(\alpha + \beta) - \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta$

Définition 3. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide. Une fonction complexe $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite analytique en $\omega \in \Omega$, si elle est $\mathbb{R}$-différentiable en ω, c'est-à-dire s'il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire $Df : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifiant* $\lim\limits_{\substack{\|z-\omega\|_n \to 0 \\ z \in \Omega - \{\omega\}}} \left(\dfrac{f(z) - f(\omega) - Df(\omega)(z - \omega)}{\|z - \omega\|_n} \right) = 0$.

Fait 4. *Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe non vide, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction analytique. Si f s'annule sur un ouvert de Ω, alors f est identiquement nulle* (c'est le théorème d'identité).

Démonstration. Ceci nous amènerait trop loin, donc nous admettrons ce résultat. Si vous avez une impression de déjà-lu, c'est normal. □

1. Nous admettrons ces affirmations qui ne sont pas violentes à démontrer une fois que l'on a les bases de la théorie des fonctions analytiques.