

COMBINATOIRE GÉNÉRATRICE

Re des classiques, combien de façons d'obtenir une somme égale à n ?

↳ Analyse

Prenons $k=4$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|----------|-----------|
| 1 | 1 | 1 | 1 | | $1+1+1+1$ |
| 2 | 2 | 2 | 2 | | $1+1+1+2$ |
| 3 | 3 | 3 | 3 | | ... etc |
| 4 | 4 | 4 | 4 | \oplus | |
| 5 | 5 | 5 | 5 | | |
| 6 | 6 | 6 | 6 | | |

On va modéliser ceci via des poly. en x car on note le parallèle suivant (et surtout, on a en tête les séries génératrices).

$$\begin{aligned}
 1+1+1+1 &\rightarrow x^1 x^1 x^1 x^1 = x^{1+1+1+1} \\
 5+1+3+4 &\rightarrow x^5 x^1 x^3 x^4 = x^{5+1+3+4} \\
 &\dots \text{etc}
 \end{aligned}$$

Il suffit de considérer $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4$ et de compter le nombre de monômes de degrés 4, 5, 6, ... après développement. Fastidieux mais bien plus efficace que la méthode directe!

↳ Cas général

A-t-on accès au dev. de $(x + x^2 + \dots + x^6)^k$, soit de $P_k(x) = x^k (1 + x + \dots + x^5)^k$?

Notant $\Delta(k; n)$ la quantité cherchée, on a d'autre

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta(k; n) x^n$$

Mais on a aussi:

$$\begin{aligned}
 P_k(x) &= x^k \left(\frac{1-x^6}{1-x} \right)^k \\
 &= x^k (1-x^6)^k (1-x)^{-k}
 \end{aligned}$$

$$P_k(x) = x^k \cdot \sum_{n \geq 0} \binom{k}{n} (-x^6)^n \cdot \underbrace{\sum_{n \geq 0} \frac{[k]_n}{n!} x^n}_{\text{Vie derivative = Bernoulli en utilisant}}$$

Vie derivative = Bernoulli en utilisant
 $[k]_n = k(k+1) \dots (k+n-1)$

$$= x^k \cdot \sum_{n \geq 0} \sum_{i+j=n} \binom{k}{i} (-1)^i \times \frac{[k]_j}{j!} \cdot x^n$$