BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts.

Mentions « légales »

Table des matières

Date: 18 Jan. 2025 – 19 Fev. 2025.

Fait 1. *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé.*
le plan d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$
$\alpha : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+$ *qui à un uplet de* $\mathcal{U}$ *associe l'aire généralisée du n-cycle qu'il représente. Cette fonction est continue d'après le fait 1.*

Démonstration. GGGGG
pour les raisons suivantes où $\mathcal{L} = A_1A_2\cdots A_n$ désigne un n-cycle.

- $\text{AireGene}(\mathcal{L}) = \sum\limits_i \text{Aire}(\mathcal{P}_i)$ où $\bigcup\limits_i \mathcal{P}_i$ est frontière de la surface impaire de $\mathcal{L}$.
- Si $\bigcup\limits_i \mathcal{P}_i = \emptyset$, alors $\text{AireGene}(\mathcal{L}) = 0$.
- Si $\bigcup\limits_i \mathcal{P}_i \neq \emptyset$, en posant $\mathcal{P}_i = A_{i,1}A_{i,2}\cdots A_{i,n_i}$, le fait **??** nous permet d'écrire, en calculant les aires algébriques via l'origine O du repère, $\text{AireGene}(\mathcal{L}) = \frac{1}{2}\sum\limits_i \Big| \sum\limits_{k=1}^{n_i} \big(x(A'_{i,k})y(A'_{i,k+1}) - y(A'_{i,k})x(A'_{i,k+1})\big) \Big|$.
- XXXXX
- XXXXX
- XXXXX
- XXXXX □

Fait 2. *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Parmi tous les n-cycles de longueur fixée, non nulle, il en existe au moins un d'aire généralisée maximale, un tel n-cycle devant être a minima un n-gone convexe.*

Démonstration. Notons ℓ la longueur fixée.

- Munissant le plan d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$, on note $\mathcal{Z}$ l'ensemble des n-cycles $\mathcal{L} = A_1A_2\cdots A_n$ tels que $\text{Long}(\mathcal{L}) = \ell$ et $A_1\,(\,0\,;0\,)$,[1] puis $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des uplets de coordonnées $\big(x(A_1)\,;y(A_1)\,;\ldots;x(A_n)\,;y(A_n)\big)$ pour $A_1A_2\cdots A_n \in \mathcal{Z}$.
- $\mathcal{U}$ est clairement fermé dans $\mathbb{R}^{2n}$.[2] De plus, il est borné, car les coordonnées des sommets des n-cycles $\mathcal{L}$ considérés le sont, d'après la contrainte $\text{Long}(\mathcal{L}) = \ell$. En résumé, $\mathcal{U}$ est un compact de $\mathbb{R}^{2n}$.
- Nous définissons la fonction $\alpha : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+$ qui à un uplet de $\mathcal{U}$ associe l'aire généralisée du n-cycle qu'il représente. Cette fonction est continue d'après le fait 1.
- Finalement, par continuité et compacité, α admet un maximum sur $\mathcal{U}$. Or, un tel maximum ne peut être atteint qu'en un n-gone convexe, au moins, selon le fait **??**. □

Fait 3. *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Parmi tous les n-gones de périmètre fixé, il en existe au moins un d'aire maximale, un tel n-gone devant être a minima convexe.*

Démonstration. Il suffit de convier les faits **??**, **??** et 2 au même banquet des idées. □

1. Le mot « *Zeile* » est une traduction possible de « *ligne* » en allemand.
2. Il est faux d'affirmer que l'ensemble des n-gones est fermé : penser par exemple à un n-gone dont tous les sommets seraient fixés sauf un que l'on ferait d'entre vers l'un de ses voisins : ceci fait passer d'un n-gone à k-gone avec $k \leq n-1$. On peut aussi penser à des n-gones que l'on ferait tendre, en les « aplatissant », vers un n-cycle totalement « plat ».