BROUILLON – OPTIMISATION BASIQUE SANS DÉRIVER... QUOIQUE !

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LaTeX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts.

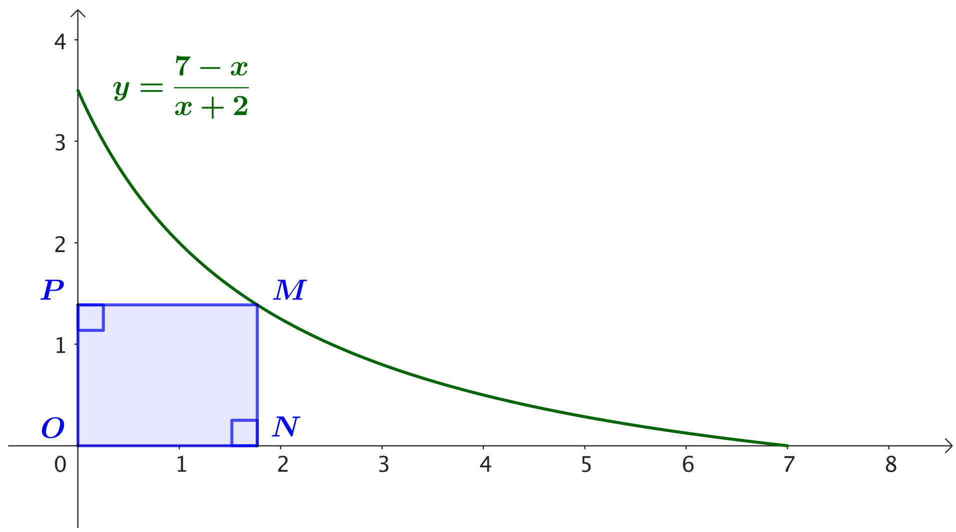
Mentions « légales »

Table des matières

Date: 28 Avril 2025 - 29 Avril 2025.

1. Un problème d'optimisation de niveau pré-bac

Soit la fonction f définie sur $[0\,;7]$ par $f(x) = \frac{7-x}{x+2}$. Considérons M un point sur $\mathscr{C}_f : y = f(x)$, et le rectangle $MNOP$ comme ci-dessous. Est-il possible de placer M tel que Aire$(MNOP)$ soit maximale ?



2. La classique méthode via la dérivation

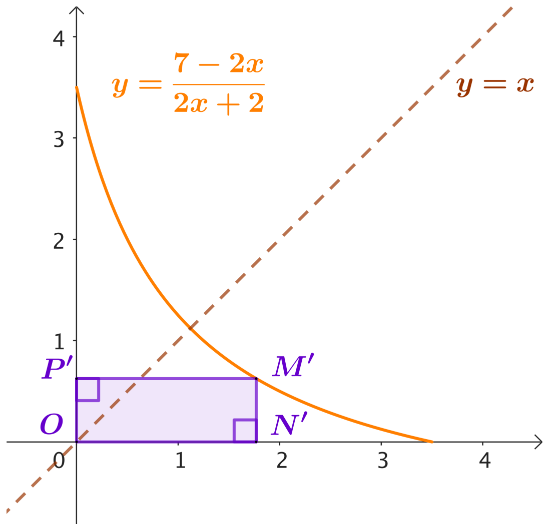
Traditionnellement, nous étudions les variations de la fonction $A(x) = xf(x) = \frac{7x-x^2}{x+2}$, via sa dérivée $A'(x) = \frac{-x^2-4x+14}{(x+2)^2}$. Le signe du trinôme $T(x) = -x^2 - 4x + 14$ ne pose aucune difficulté, et amène au tableau de variations suivant.

x	0		$3\sqrt{2}-2$		7
$T(x)$		$+$	0	$-$	
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Finalement, $A(x)$ est maximale uniquement lorsque $x_M = 3\sqrt{2} - 2$.

3. Sans dériver, c'est possible !

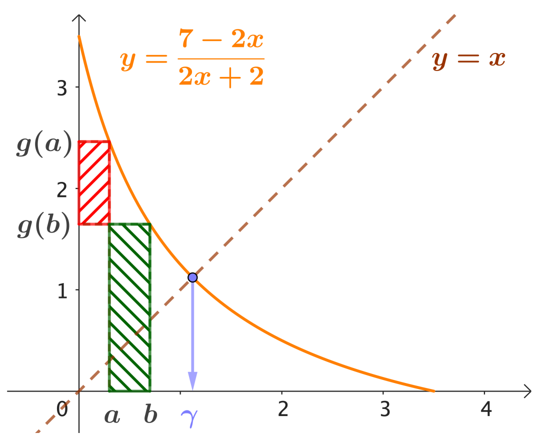
Nous proposons ici une méthode géométrico-algébrique sans user de la notion de dérivée. Pour ce faire, commençons par symétriser le problème en obtenant une hyperbole symétrique par rapport à la 1[re] bissectrice $\Delta : y = x$. Il suffit de considérer la fonction g définie sur $[0\,;3{,}5]$ par $g(x) = f(2x) = \frac{7-2x}{2x+2}$. Cette opération algébrique correspond à appliquer une dilatation horizontale de coefficient 0,5.



La calcul suivant démontre que $\mathscr{C}_g : y = g(x)$ est bien symétrique rapport à Δ.

$$
\begin{aligned}
g\big(g(x)\big) &= \left(7 - 2\cdot\frac{7-2x}{2x+2}\right) \div \left(2\cdot\frac{7-2x}{2x+2} + 2\right) \\
&= \frac{7(2x+2) - 2(7-2x)}{2(7-2x) + 2(2x+2)} \\
&= \frac{18x}{18} \\
&= x
\end{aligned}
$$

Cette propriété de symétrie nous permet de deviner le rôle essentiel de $\gamma = 1{,}5\sqrt{2} - 1$, l'unique solution sur $[0\,;3{,}5]$ de $g(x) = x$, c'est-à-dire de $\frac{7-2x}{2x+2} = x$, soit $2x^2 + 4x - 7 = 0$. Notons alors $\mathscr{A}(x) = xg(x)$ pour $x \in [0\,;3{,}5]$ Nous allons démontrer, sans dériver, la croissance stricte de $\mathscr{A}$ sur $[0\,;\gamma]$, et par conséquent sa décroissance stricte sur $[\gamma\,;3{,}5]$ par raison de symétrie. Considérons donc a et b deux réels tels que $0 \leq a < b \leq \gamma$, puis observons le schéma suivant.



Nous avons $\mathscr{A}(a) < \mathscr{A}(b)$ si, et seulement si, $a\big(g(a) - g(b)\big) < (b-a)g(b)$. Nous voilà partis pour un peu de calcul...

- $$
\begin{aligned}
2\big(g(a) - g(b)\big) &= \frac{7-2a}{a+1} - \frac{7-2b}{b+1} \\
&= \frac{(7-2a)(b+1) - (7-2b)(a+1)}{(a+1)(b+1)} \\
&= \frac{9(b-a)}{(a+1)(b+1)}
\end{aligned}
$$

- Le point précédent donne $\frac{2a(g(a)-g(b))}{b-a} = \frac{9a}{(a+1)(b+1)}$, d'où les calculs suivants.

$$\begin{aligned}
&\frac{2(a+1)(b+1)}{b-a}\Big(a\big(g(a)-g(b)\big)-(b-a)g(b)\Big) \\
&= 9a-(7-2b)(a+1) \\
&= 2a+2ab+2b-7
\end{aligned}$$

- En nous souvenant de $0 \leq a < b \leq \gamma$, nous avons $2a+2ab+2b-7 < 2b^2+4b-7$. Or, les racines de $2x^2+4x-7$ sont γ et $\overline{\gamma} = -1{,}5\sqrt{2}-1$, donc $b \in \,]\overline{\gamma}\,;\gamma[$ donne $2b^2+4b-7<0$, puis $a\big(g(a)-g(b)\big) < (b-a)g(b)$.

Nous arrivons au tableau de variations suivant.

x	0	γ	$3{,}5$
$\mathscr{A}(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Finalement, pour revenir à $A(x)$ maximale, il suffit d'inverser la dilatation horizontale qui a permis de passer de $f(x)$ à $g(x)$, soit prendre $2\gamma = 3\sqrt{2}-2$, au lieu de γ.