

BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES

CHRISTOPHE BAL

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



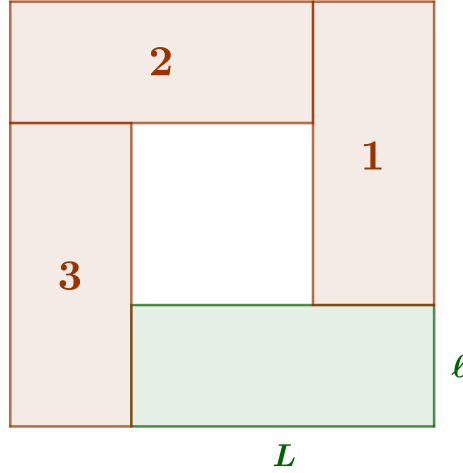
TABLE DES MATIÈRES

- | | |
|------------------------|---|
| 1. Le cas du rectangle | 2 |
|------------------------|---|

1. LE CAS DU RECTANGLE

Fait 1. *Considérons tous les rectangles de périmètre fixé p . Parmi tous ces rectangles, celui d'aire maximale est le carré de côté $c = 0,25p$.*

Démonstration. Une preuve courante est d'exprimer l'aire du rectangle comme un polynôme du 2^e degré en ℓ par exemple.¹ On peut en fait faire plus simplement grâce au dessin suivant où les rectangles 1, 2 et 3 sont isométriques au rectangle vert étudié de dimension $L \times \ell$.



Le raisonnement tient alors aux constations suivantes accessibles à un collégien.

- (1) Le grand carré a un aire supérieure ou égale à $4L\ell$.
- (2) Le grand carré a un périmètre égal à $4(L + \ell)$.
- (3) Via une homothétie de rapport 0,5, nous obtenons un carré d'aire supérieure ou égale à $0,5^2 \times 4L\ell = L\ell$, et de périmètre égal à $0,5 \times 4(L + \ell) = 2(L + \ell)$.

Donc pour tout rectangle de périmètre $p = 2(L + \ell)$ et d'aire $\mathcal{A} = L\ell$, nous pouvons construire un carré de périmètre identique, mais avec une aire supérieure ou égale à \mathcal{A} . Joli ! Non ? \square

Remarque 1.1. *Au passage, nous avons pour $(L; \ell) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $4L\ell \leq (L + \ell)^2$, c'est-à-dire $2L\ell \leq L^2 + \ell^2$, d'où $\sqrt{L\ell} \leq \sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$, soit la comparaison des moyennes géométriques et quadratiques. Ceci donne une 3^e preuve en s'appuyant sur cette comparaison.*

1. L'aire est donnée par $L\ell = L(0,5p - L)$ qui est maximale en $L = 0,25p$ (moyenne des racines), d'où $\ell = 0,25p = L$.