

DES PREUVES SANS MOT AUX PREUVES SANS DOUTE

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/math/visual-proof/polynomial-analytic-principles>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.

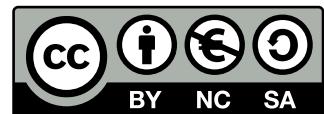


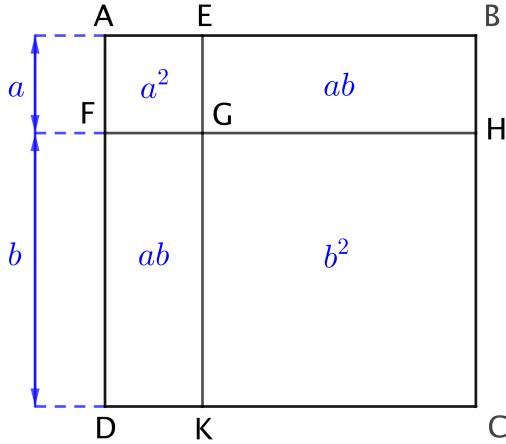
TABLE DES MATIÈRES

1. Au commencement étaient les polynômes	2
2. Puis vinrent les fonctions analytiques d'une seule variable	5
3. Et suivirent les fonctions séparablement analytiques	10

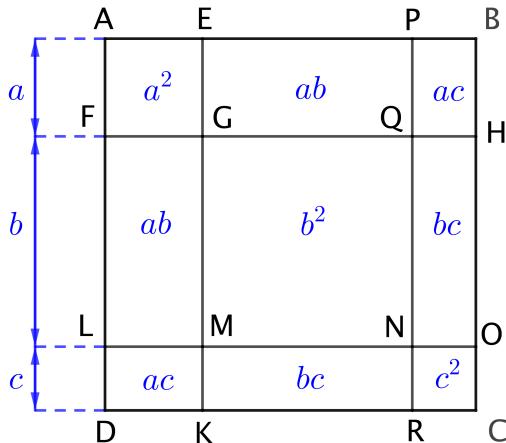
Ce document donne un cadre rigoureux pour justifier la généralisation de certaines identités obtenues via des cas « *particuliers évidents* » comme, par exemple, dans les preuves sans mot.

1. AU COMMENCEMENT ÉTAIENT LES POLYNÔMES

Via de simples calculs d'aires, il est très facile de découvrir les classiques identités remarquables $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ et $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Par exemple, en considérant le dessin ci-dessous où $ABCD$, $AEGF$ et $GHCK$ sont des carrés, il est évident que $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Malheureusement, cette démonstration n'est valable que pour $a > 0$ et $b > 0$ (*ce sont des contraintes géométriques concrètes*).



Comment passer à $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ pour a et b deux complexes de signes quelconques ? Classiquement, une vérification est faite via un calcul algébrique. En résumé, nous conjecturons géométriquement, puis nous validons algébriquement. Bien que rigoureuse, la démarche précédente est peu satisfaisante, car elle balaye d'un revers de main l'approche géométrique, dont le rôle est réduit à la découverte d'une formule. Si nous considérons le dessin ci-après, il est dommage de devoir faire du calcul algébrique pour valider $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ pour a , b et c des complexes de signes quelconques. Ce serait bien de pouvoir passer directement à l'identité pour a , b et c de signes quelconques. Nous allons voir que cela est possible



Préliminaire 1. Si $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, il existe une fonction polynomiale $q(x)$ de degré $(n-1)$ vérifiant $p(x) - p(\lambda) = (x - \lambda)q(x)$. Ceci implique que p ne peut pas avoir plus de n zéros.

Démonstration. Posant $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$ par hypothèse, nous avons :

$$\begin{aligned} p(x) - p(\lambda) &= \sum_{k=0}^n a_k (x^k - \lambda^k) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k (x - \lambda) \left(\sum_{i=0}^{k-1} x^i \lambda^{k-1-i} \right) \\ &= (x - \lambda) \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} a_k x^i \lambda^{k-1-i} \end{aligned}$$

La factorisation conjointe à la diminution du degré ne permet pas d'avoir plus de n zéros. \square

Fait 2. Soit $p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction polynomiale, où $n \in \mathbb{N}^*$. Si p s'annule sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$, alors p s'annule sur \mathbb{C}^n tout entier.

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour démontrer la validité de la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie par « Pour toute fonction polynomiale $p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, si p s'annule sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$, alors p s'annule sur \mathbb{C}^n tout entier. ».

- **Cas de base.** $\mathcal{P}(1)$ signifie qu'une fonction polynomiale à une variable s'annulant sur \mathbb{R}_+^* est identiquement nulle sur \mathbb{C} tout entier. Or, selon le résultat préliminaire 1, un polynôme complexe non nul n'a qu'un nombre fini de racines, donc $\mathcal{P}(1)$ est validée.
- **Hérédité.** Supposons $\mathcal{P}(n)$ valide pour $n \in \mathbb{N}^*$. Soit p une fonction polynomiale à $(n+1)$ variables vérifiant les conditions de la propriété $\mathcal{P}(n+1)$.
 - (1) Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, posons $p_\alpha(x_1; \dots; x_n) = p(x_1; \dots; x_n; \alpha)$. Nous savons que p_α vérifie les conditions de la propriété $\mathcal{P}(n)$, donc par hypothèse de récurrence, nous avons : $\forall (x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{C}^n$, $p_\alpha(x_1; \dots; x_n) = 0$, soit $p(x_1; \dots; x_n; \alpha) = 0$.
 - (2) Pour x_1, \dots, x_n des complexes quelconques, posons $\ell(x) = p(x_1; \dots; x_n; x)$. Le point précédent montre que ℓ vérifie $\mathcal{P}(1)$, donc, d'après le cas de base, $\forall x \in \mathbb{C}$, $\ell(x) = 0$, soit $p(x_1; \dots; x_n; x) = 0$.
 - (3) Finalement, $\forall (x_1; \dots; x_n; x) \in \mathbb{C}^{n+1}$, $p(x_1; \dots; x_n; x) = 0$. Autrement dit, nous avons déduit la validité de $\mathcal{P}(n+1)$ à partir de celle de $\mathcal{P}(n)$.
- **Conclusion.** Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout naturel non nul n . \square

Exemple 3. Si nous reprenons les deux dessins initiaux, le fait 2 précédent rend licite le passage des formules géométriques contraintes au cas général en faisant les choix suivants de fonctions polynomiales.

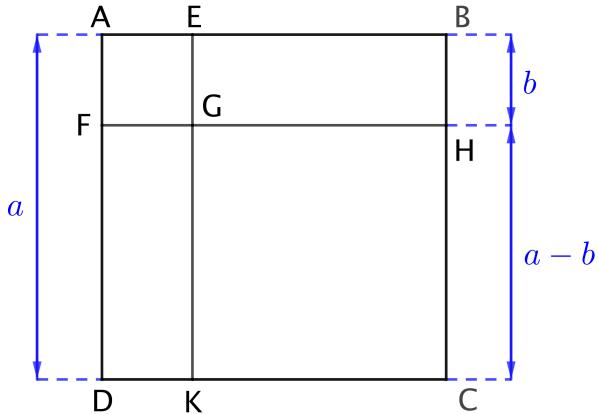
- $p_1(a; b) = (a + b)^2 - a^2 - b^2 - 2ab$
- $p_2(a; b; c) = (a + b + c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$

Exemple 4. En utilisant une approche géométrique semblable à celle présentée plus haut avec une diagonale de carrés, il devient évident, et rigoureux maintenant, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (a_1; \dots; a_n) \in \mathbb{C}^n$, nous avons :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n (a_k)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$$

Exemple 5. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier à l'aide d'un cube, le solide géométrique, la validité de l'identité $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ sur \mathbb{C}^2 .

Considérons maintenant le dessin ci-dessous avec la contrainte $a > b$.



Le fait 2 ne peut pas s'appliquer au calcul géométrique évident suivant.

$$\begin{aligned} \text{Aire}(GHCK) &= \text{Aire}(ABCD) - \text{Aire}(ABHF) - \text{Aire}(AEKD) + \text{Aire}(AEGF) \\ \iff (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

Peut-on tout de même déduire du calcul géométrique précédent la validité sur \mathbb{C}^2 de l'identité $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$? Cela est rendu possible par le fait 6 suivant.

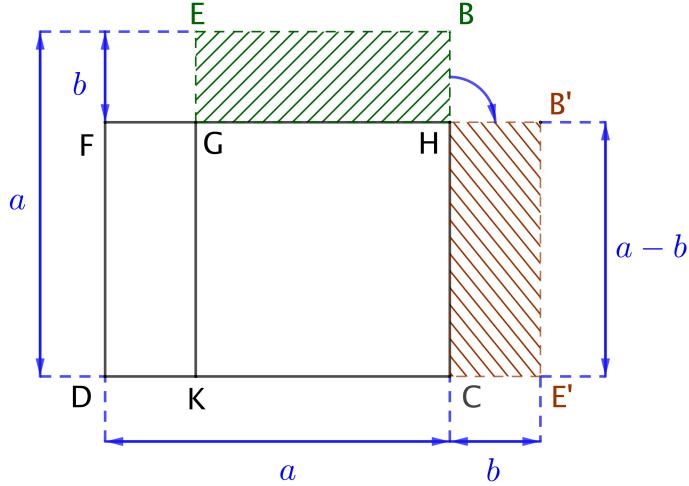
Fait 6. Soit $p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction polynomiale, où $n \in \mathbb{N}^*$. Si p s'annule sur $\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n$ où chaque $\mathcal{E}_k \subseteq \mathbb{C}$ est infini, alors p s'annule sur \mathbb{C}^n tout entier.

Démonstration. Il suffit d'adapter la preuve du fait 2 (se souvenir que la clé du raisonnement était l'impossibilité, pour une fonction polynomiale, d'avoir une infinité de racines). \square

Exemple 7. En reprenant le dessin précédent, nous avons les calculs géométriques simples suivants, toujours avec la contrainte $a > b$.

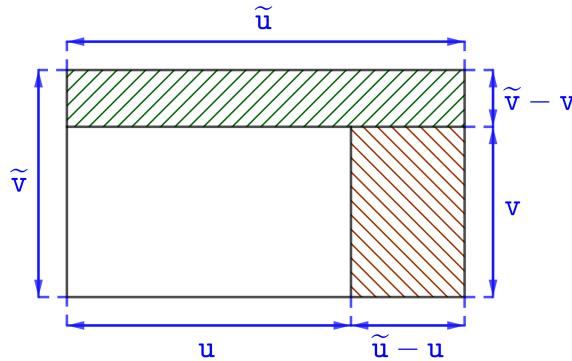
$$\begin{aligned} \text{Aire}(ABCD) - \text{Aire}(AEGF) &= \text{Aire}(GHCK) + \text{Aire}(EBHG) + \text{Aire}(FGKD) \\ \iff a^2 - b^2 &= \text{Aire}(GHCK) + \text{Aire}(EBHG) + \text{Aire}(FGKD) \end{aligned}$$

En déplaçant ensuite le rectangle EBHG comme ci-dessous, nous obtenons alors un rectangle de dimension $(a+b) \times (a-b)$.



Finalement, nous obtenons $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ si $a > b$, puis, en appliquant le fait 6 au polynôme $p(a; b) = a^2 - b^2 - (a+b)(a-b)$, nous avons : $\forall (a; b) \in \mathbb{C}^2$, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Exemple 8. Via le dessin suivant, sous les contraintes géométriques $\tilde{u} > u$ et $\tilde{v} > v$, nous obtenons sans effort l'identité polynomiale $\tilde{u}\tilde{v} - uv = v(\tilde{u} - u) + \tilde{u}(\tilde{v} - v)$ sur \mathbb{C}^2 tout entier.

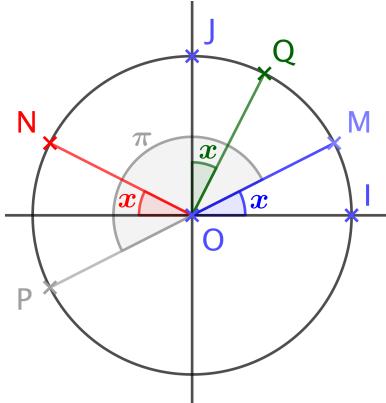


L'identité précédente rend naturelle la démonstration de la dérivabilité du produit de deux fonctions via l'égalité ci-dessous.

$$\frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} = \frac{v(a)(u(a+h) - u(a))}{h} + \frac{u(a+h)(v(a+h) - v(a))}{h}$$

2. PUIS VINRENT LES FONCTIONS ANALYTIQUES D'UNE SEULE VARIABLE

Considérons le dessin suivant, où les mesures des angles sont en radians.



Via les points M , N , P et Q , il est facile de fournir des arguments géométriques de symétrie justifiant que, sous la condition $x \in]0; \frac{\pi}{4}[$, nous avons :

$$\begin{array}{lll} \bullet \cos(\pi - x) = -\cos x & \bullet \cos(x + \pi) = -\cos x & \bullet \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin(\pi - x) = \sin x & \sin(x + \pi) = -\sin x & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{array}$$

De nouveau, il serait bien de pouvoir passer, sans plus d'effort, à la validité des formules ci-dessus sur \mathbb{R} tout entier (*considérer les autres cas n'est pas compliqué, mais c'est pénible*). Nous allons voir que cela est licite grâce au fait 16, voir la page 9. Ce résultat technique nécessite la notion de fonction analytique.

Préliminaire 9. Le rayon de convergence R de la série entière complexe $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est défini par la formule de Hadamard¹ $\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right)$ avec les conventions $0 = \frac{1}{+\infty}$ et $+\infty = \frac{1}{0}$.

Ce nombre R s'interprète comme suit.

(1) Si $R = 0$, la série converge juste en 0, et sinon elle diverge grossièrement.

1. La démonstration va révéler le côté « naturel » de la formule de Hadamard.

- (2) Si $R = +\infty$, la série converge sur \mathbb{C} . Plus précisément, la série converge normalement sur tout disque fermé $\mathcal{D}(0; r]$ tel que $r \in \mathbb{R}_+^*$.
- (3) Si $0 < R < +\infty$, la série converge normalement sur tout disque fermé $\mathcal{D}(0; r]$ tel que $0 < r < R$, donc absolument sur $\mathcal{D}(0; R]$, mais sur $\mathbb{C} - \mathcal{D}(0; R]$, elle diverge grossièrement, et le comportement sur le cercle $\mathcal{C}(0; R)$ doit être traité au cas par cas.

Démonstration. Notons $\ell = \limsup_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{|a_n|})$, soit $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sup \{\sqrt[k]{|a_k|}, k \in \mathbb{N}_{\geq n}\})$, de sorte que $\ell \in [0; +\infty]$. Commençons par le cas $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire $R \in \mathbb{R}_+^*$.

- Soit $r \in]0; R[$. Considérons $\rho \in]r; R[$ de sorte que $\frac{1}{r} > \frac{1}{\rho} > \frac{1}{R}$. Par définition de $\ell = \frac{1}{R}$, nous avons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sup \{\sqrt[k]{|a_k|}, k \in \mathbb{N}_{\geq n_0}\} < \frac{1}{\rho}$. Donc pour $z \in \mathcal{D}(0; r[$ et $k \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$, nous obtenons $|a_k z^k| < \left(\frac{r}{\rho}\right)^k$ pour $k \geq n_0$. Comme $0 < \frac{r}{\rho} < 1$, la convergence normale devient évidente.
- Soit $z \in \mathbb{C} - \mathcal{D}(0; R]$. Comme $\frac{1}{|z|} < \frac{1}{R}$, nous avons ici $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$, $\sup \{\sqrt[k]{|a_k|}, k \in \mathbb{N}_{\geq n}\} > \frac{1}{|z|}$. Ceci permet de construire une suite strictement croissante d'indices $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall i \in \mathbb{N}$, $|a_{k_i} z^{k_i}| > 1$, d'où la divergence grossière.
- La justification du comportement pathologique sur le cercle $\mathcal{C}(0; R)$ se fait via des contre-exemples. Nous pouvons citer les exemples classiques suivants.
 - (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, de rayon de convergence 1, diverge grossièrement sur $\mathcal{C}(0; 1)$.
 - (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} z^n$, de rayon de convergence 1, puisque $\ln(\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}) = -\frac{2 \ln n}{n}$ nous donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}) = 1$. Cette série entière converge normalement sur $\mathcal{C}(0; 1)$.
 - (c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} z^n$, de rayon de convergence 1, puisque $\ln(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}) = -\frac{\ln n}{n}$. Cette série entière converge sur $\mathcal{C}(0; 1) - \{1\}$, mais pas en 1. Le comportement sur $\mathcal{C}(0; 1) - \{1\}$ est plus délicat à démontrer, car il se base sur le test de Abel-Dirichlet.

Les cas $\ell = 0$ et $\ell = +\infty$, c'est-à-dire $R = +\infty$ et $R = 0$ respectivement, s'obtiennent via des adaptations immédiates de ce qui a été fait ci-dessus. \square

Exemple 10. La fonction exponentielle complexe \exp est celle associée à la série entière complexe $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$ qui admet un rayon de convergence infini. En effet, notant Ent la fonction partie entière, nous avons $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\text{Ent}(\frac{n}{2})+1} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$, puis $\ln(\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}) \leq -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{n}{2}\right)$.²

Remarque 11. On peut démontrer que $\exp : (\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ est un morphisme de groupes, et que son noyau est du type $r i\mathbb{Z}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$.³ Posant $\pi = \frac{r}{2}$, le noyau s'écrit $2\pi i\mathbb{Z}$. C'est un moyen, comme un autre, de définir et construire le nombre réel π .

Exemple 12. Les fonctions circulaires sont définissables sur \mathbb{C} via $\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$ et $\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$, c'est-à-dire via $\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ et $\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$. La remarque précédente donne la 2π -périodicité des fonctions complexes \cos et \sin .

2. Si $n = 2k$, alors $n! \geq k^{n-k+1}$ avec $n - k + 1 = k + 1 = \text{Ent}(\frac{n}{2}) + 1$.

Si $n = 2k + 1$, alors $n! \geq (k + 1)^{n-k} \geq (k + 0,5)^{n-k}$ avec $n - k = k + 1 = \text{Ent}(\frac{n}{2}) + 1$.

3. Entre autres choses, ceci nécessite de savoir que $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est une surjection continue ouverte, et que les sous-groupes de \mathbb{R} sont soit denses, soit discrets, ces derniers étant du type $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}_+$.

Préliminaire 13. Soit une série entière complexe $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R \neq 0$. La fonction $f : z \in \mathcal{D}(0; R[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}$ vérifie les propriétés suivantes.

- (1) f est infiniment \mathbb{C} -dérivable.⁴
- (2) $\forall k \in \mathbb{N}$, la série entière $\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$ admet R pour rayon de convergence.
- (3) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathcal{D}(0; R[, f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$.
- (4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Démonstration. Le résultat 4 étant aisée à déduire, une récurrence immédiate à faire montre qu'il suffit de démontrer que $\forall z \in \mathcal{D}(0; R[, nous avons :$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \mathcal{D}(0; R[}} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

- $\ln(\sqrt[n]{|na_n|}) = \frac{\ln n}{n} + \ln(\sqrt[n]{|a_n|})$ donne que R est le rayon de convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$. On peut donc définir la fonction $g : z \in \mathcal{D}(0; R[\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} \in \mathbb{C}$.
- Pour $(z, z_0) \in \mathcal{D}(0; R[^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$, nous introduisons les notations suivantes.
 - (a) $f_k(z) = \sum_{n=0}^k a_n z^n$ et $g_k(z) = \sum_{n=1}^k n a_n z^{n-1}$ la \mathbb{C} -dérivée de $f_k(z)$.
 - (b) $T_k(z) = \begin{cases} \frac{f_k(z) - f_k(z_0)}{z - z_0} & \text{si } z \in \mathcal{D}(0; R[- \{z_0\} \\ g_k(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$
 - (c) $T(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si } z \in \mathcal{D}(0; R[- \{z_0\} \\ g(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$
- Considérons alors $r \in]0; R[$ tel que $z_0 \in \mathcal{D}(0; r]$. Par convergence normale sur $\mathcal{D}(0; r]$ de $(f_k)_k$ et $(g_k)_k$ vers f et g respectivement, nous avons la convergence uniforme sur $\mathcal{D}(0; r]$ de $(T_k)_k$ vers T . Or chaque fonction T_k est continue en z_0 par \mathbb{C} -dérivabilité de f_k , donc T est continue en z_0 , d'où la \mathbb{C} -dérivabilité de f en z_0 avec $f'(z_0) = g(z_0)$. Ceci achève la preuve, car $z_0 \in \mathcal{D}(0; R[$ est quelconque. \square

Remarque 14. Une relecture des preuves des résultats préliminaires 8 et 12 donnent que pour toute série entière complexe $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R non nul, et tout nombre complexe z_0 , la fonction $f : z \in \mathcal{D}(z_0; R[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \in \mathbb{C}$ vérifie les propriétés suivantes.

- (1) f est infiniment \mathbb{C} -dérivable.
- (2) $\forall k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k}$ admet R pour rayon de convergence.
- (3) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathcal{D}(z_0; R[, f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k}$.
- (4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Nous allons voir que les fonctions développables en série entière autour d'un nombre complexe z_0 le sont aussi localement, c'est-à-dire en chaque complexe dans un voisinage de z_0 .

Définition 15. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert non vide. Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dite analytique en $z_0 \in \Omega$, s'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et un réel $r \in]0; R[$ tels qu'on ait $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ dans le disque ouvert $\mathcal{D}(z_0; r[\subseteq \Omega$.

Si f est analytique en tout nombre complexe de Ω , la fonction f est dite analytique sur Ω .

4. L'analyse complexe étudie les fonctions \mathbb{C} -dérivables en les nommant « fonctions holomorphes ». Cette théorie est ludique, riche, et puissante.

Fait 16. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ où $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ est un ouvert non vide. Si f est analytique en z_0 , alors il existe un réel $r > 0$ tel que f soit analytique sur $\mathcal{D}(z_0 ; r[$ tout entier.

Démonstration. Nous allons montrer que le réel r de la définition 14 convient. Pour cela, reprenons les notations de cette définition, puis considérons $\omega \in \mathcal{D}(z_0 ; r[$ et un disque ouvert non vide $\mathcal{D}(\omega ; \rho[\subseteq \mathcal{D}(z_0 ; r[$ où ρ va être caractérisé plus bas.

- Formellement, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\omega)}{n!} (z - \omega)^n$ et $f^{(n)}(\omega) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k \omega^{k-n}$ conduisent à étudier $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{n!(k-n)!} a_k \omega^{k-n} (z - \omega)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} a_{n+q} \omega^q (z - \omega)^n$.
- Soit $F \subset \mathbb{N}^2$ un ensemble fini. Introduisons les notations suivantes.
 - (1) $\sigma_F(z ; \omega) = \sum_{(n,q) \in F} \alpha_{n,q}(z ; \omega)$ où $\alpha_{n,q}(z ; \omega) = \frac{(n+q)!}{n!q!} a_{n+q} \omega^q (z - \omega)^n$.
 - (2) $\mu(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| z^n$ admet R pour rayon de convergence.
 - (3) $N = \max \{n + q, (n, q) \in F\}$.

Pour $z \in \mathcal{D}(\omega ; \rho[$, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{(n,q) \in F} |\alpha_{n,q}(z ; \omega)| &\leq \sum_{s=0}^N \sum_{n+q=s} |\alpha_{n,q}(z ; \omega)| \\ &\leq \sum_{s=0}^N \sum_{n+q=s} \binom{n+q}{q} |a_{n+q}| r^q \rho^n \\ &\leq \sum_{s=0}^N |a_s| \left(\sum_{n+q=s} \binom{n+q}{q} r^q \rho^n \right) \\ &\leq \sum_{s=0}^N |a_s| (r + \rho)^s \\ &\leq \sum_{s=0}^{+\infty} |a_s| (r + \rho)^s \end{aligned}$$

En imposant $r + \rho < R$, c'est-à-dire $\rho < R - r$, ce qui est possible, pour tout sous-ensemble fini F de \mathbb{N}^2 , nous avons $\sum_{(n,q) \in F} |\alpha_{n,q}(z ; \omega)| \leq \mu(r + \rho) < +\infty$.

Ainsi, $\sum_{(n,q) \in \mathbb{N}^2} \alpha_{n,q}(z ; \omega)$ est absolument, donc commutativement, convergente.

- Pour $z \in \mathcal{D}(\omega ; \rho[\subseteq \mathcal{D}(z_0 ; r[$, où $0 < \rho < R - r$, ce qui suit nous donne, comme souhaité, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\omega)}{n!} (z - \omega)^n$.

$\begin{aligned} (1) \quad &\sum_{(n,q) \in \mathbb{N}^2} \alpha_{n,q}(z ; \omega) \\ &= \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{n+q=s} \alpha_{n,q}(z ; \omega) \\ &= \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{n+q=s} \binom{n+q}{q} a_{n+q} \omega^q (z - \omega)^n \\ &= \sum_{s=0}^{+\infty} a_s \left(\sum_{n+q=s} \binom{n+q}{q} \omega^q (z - \omega)^n \right) \\ &= \sum_{s=0}^{+\infty} a_s (\omega + z - \omega)^s \\ &= f(z) \end{aligned}$	$\begin{aligned} (2) \quad &\sum_{(n,q) \in \mathbb{N}^2} \alpha_{n,q}(z ; \omega) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} \alpha_{n,q}(z ; \omega) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} \binom{n+q}{q} a_{n+q} \omega^q (z - \omega)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{k-n} a_k \omega^{k-n} (z - \omega)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (z - \omega)^n \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k \omega^{k-n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\omega)}{n!} (z - \omega)^n \end{aligned}$
---	---

Passons au résultat essentiel de cette section qui va permettre de valider nos identités trigonométriques obtenues partiellement via la géométrie en début de section.

Fait 17. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe non vide,⁵ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique sur Ω , et non identiquement nulle. Pour tout zéro α de f , il existe un disque ouvert non vide $\mathcal{D}(\alpha ; r[\subseteq \Omega$ tel que $\forall z \in \mathcal{D}(\alpha ; r[- \{\alpha\}, f(z) \neq 0$ (c'est le principe des zéros isolés).

Démonstration. Nous allons voir que la connexité est essentielle. Rappelons que ceci signifie que \emptyset et Ω sont les seules sous-ensembles de Ω qui sont à la fois ouverts et fermés dans Ω .

Par hypothèse, $\forall \omega \in \Omega$, il existe un disque ouvert non vide $\mathcal{D}(\omega ; r[\subseteq \Omega$ tel que $\forall z \in \mathcal{D}(\omega ; r[, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\omega)}{n!} (z - \omega)^n$. Ceci implique l'égalité des deux ensembles suivants.

$$(1) V = \{\omega \in \Omega \mid f \text{ s'annule sur un voisinage de } \omega\}$$

$$(2) D = \{\omega \in \Omega \mid \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(\omega) = 0\}$$

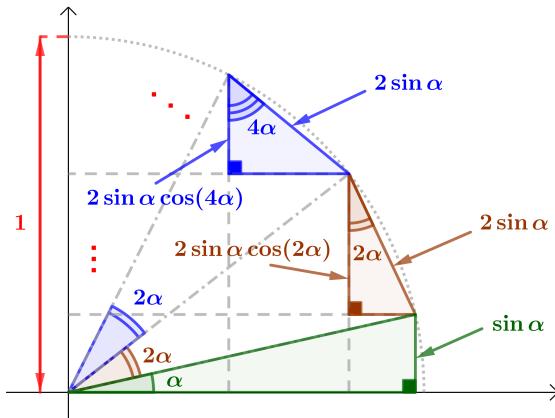
Clairement, V est ouvert, et D fermé, donc, par raison de connexité, $V = D$ est soit vide, soit égal à Ω . Comme f n'est pas identiquement nulle sur Ω , seule l'alternative $D = \emptyset$ est possible.

Supposons alors avoir un zéro α de f . Comme $D = \emptyset$, $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \llbracket 0 ; p \rrbracket, f^{(n)}(\alpha) = 0$, et $f^{(p)}(\alpha) \neq 0$. Ceci permet d'écrire $f(z) = (z - \alpha)^p \sum_{n=p}^{+\infty} a_n (z - \alpha)^{n-p}$ sur un disque ouvert non vide $\mathcal{D}(\alpha ; r[\subseteq \Omega$, avec $a_p = \frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!} \neq 0$. Posant $g(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n (z - \alpha)^{n-p}$, nous obtenons une fonction continue sur $\mathcal{D}(\alpha ; r[$, et vérifiant $g(\alpha) \neq 0$. Comme $f(z) = (z - \alpha)^p g(z)$, il devient clair qu'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{D}(\alpha ; r[\subseteq \mathcal{D}(\alpha ; r[$ et $\forall z \in \mathcal{D}(\alpha ; r[- \{\alpha\}, f(z) \neq 0$. \square

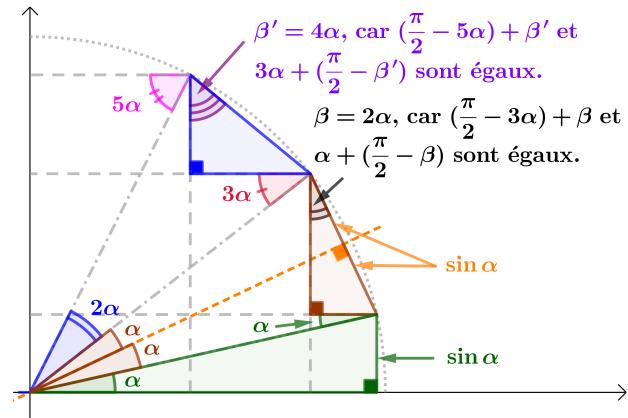
Exemple 18. Notre raisonnement géométrique de début de section fait clairement apparaître des zéros non isolés pour les fonctions suivantes qui sont analytiques sur \mathbb{C} , comme le sont les fonctions cos et sin (voir l'exemple 11).

- $f_1(z) = \cos(\pi - z) + \cos z$ et $f_2(z) = \sin(\pi - z) - \sin z$
- $f_3(z) = \cos(z + \pi) + \cos z$ et $f_4(z) = \sin(z + \pi) + \sin z$
- $f_5(z) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \sin z$ et $f_6(z) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \cos z$

Exemple 19. L'identité sympathique $\sin((2n+1)\alpha) = \sin \alpha + 2 \sin \alpha \sum_{k=1}^n \cos(2k\alpha)$, valable pour $(n ; \alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$, est obtenue, relativement naturellement, via les dessins suivants avec la contrainte géométrique $0 < (2n+1)\alpha \leq \frac{\pi}{2}$.



Début de la construction.



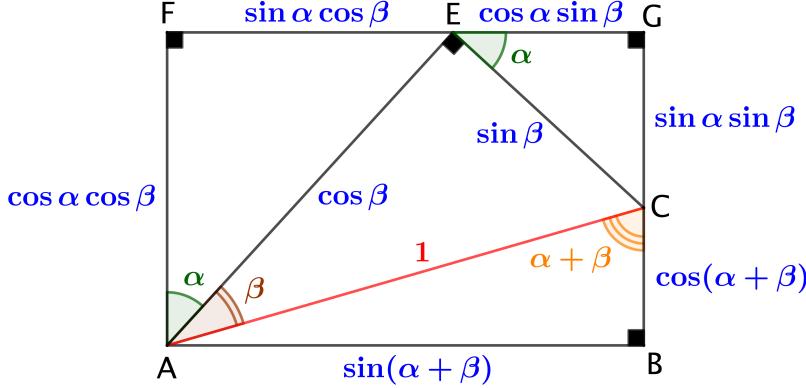
Pourquoi de telles valeurs à gauche ?⁶

5. On parle aussi de « domaine complexe ».

6. Aucune polysémie ici...

3. ET SUIVRENT LES FONCTIONS SÉPARABLEMENT ANALYTIQUES

Que faire si nous avons des formules trigonométriques impliquant deux variables, ou plus ? Par exemple, pour $(\alpha; \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, le dessin suivant nous donne $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ et $\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta$.⁷ Nous allons voir comment passer à $(\alpha; \beta) \in \mathbb{C}^2$.



Définition 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute fonction $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ et $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, nous nommerons « k^e restriction de f » relativement à $(z_1; \dots; z_{k-1}; z_{k+1}; \dots; z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ la fonction f_{k,z_\bullet} définie sur \mathbb{C} par $f_{k,z_\bullet}(z) = f(z_1; \dots; z_{k-1}; z; z_{k+1}; \dots; z_n)$.

Définition 21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une fonction $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ sera dite « séparablement analytique » sur \mathbb{C}^n , si $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, toutes ses k^{es} restrictions f_{k,z_\bullet} sont analytiques.

Définition 22. L'ensemble $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{C}$ sera dit « discriminant » s'il existe $\omega \in \mathcal{E}$ non isolé, c'est-à-dire que pour tout réel $r > 0$, $\mathcal{D}(\omega; r) \cap \mathcal{E}$ possède au moins deux éléments. Plus généralement, si $\prod_{k=1}^n \mathcal{E}_k$ où chaque $\mathcal{E}_k \subseteq \mathbb{C}$ est discriminant, nous dirons que $\prod_{k=1}^n \mathcal{E}_k$ est discriminant.

Fait 23. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction séparablement analytique. Si f s'annule sur $\prod_{k=1}^n \mathcal{E}_k$ discriminant, alors f s'annule sur \mathbb{C}^n tout entier.

Démonstration. Comme le schéma de démonstration est similaire à celui de la preuve du fait 2, nous donnons juste les grandes étapes permettant de raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour cela, considérons $\mathcal{P}(n)$ définie par « Pour toute fonction séparablement analytique $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, si f s'annule sur $\prod_{k=1}^n \mathcal{E}_k$ où chaque $\mathcal{E}_k \subseteq \mathbb{C}$ est discriminant, alors f s'annule sur \mathbb{C}^n . ».

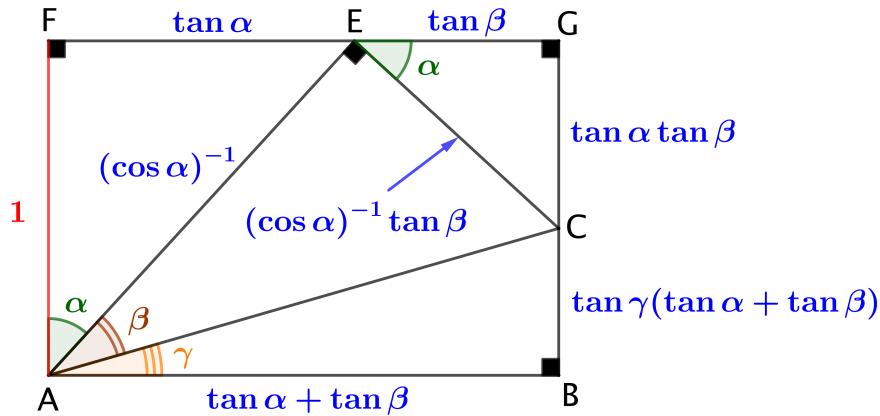
- **Cas de base.** $\mathcal{P}(1)$ découle directement du fait 16.
- **Hérédité.** Soit f une fonction séparablement analytique à $(n + 1)$ variables vérifiant les conditions de la propriété $\mathcal{P}(n + 1)$ avec $\prod_{k=1}^{n+1} \mathcal{E}_k$ l'ensemble sur lequel f est nulle. Pour $\omega \in \mathcal{E}_{n+1}$, en posant $f_\omega : (z_1; \dots; z_n) \in \mathbb{C}^n \mapsto f(z_1; \dots; z_n; \omega) \in \mathbb{C}$, nous avons f_ω validant $\mathcal{P}(n)$. Donc, $\forall (z_1; \dots; z_n) \in \mathbb{C}^n$, posant $\ell(z) = f(z_1; \dots; z_n; z)$, nous obtenons ℓ vérifiant $\mathcal{P}(1)$. Finalement, $f(z_1; \dots; z_n; z)$ est nulle sur \mathbb{C}^{n+1} . \square

Exemple 24. Le fait 22 implique la validité des formules trigonométriques d'addition sur \mathbb{C}^2 tout entier en considérant les fonctions $f_1(\alpha; \beta) = \cos(\alpha + \beta) - \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ et $f_2(\alpha; \beta) = \sin(\alpha + \beta) - \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta$ qui s'annulent sur $]0; \frac{\pi}{4}[^2$.

Exemple 25. L'implication $[\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \implies \tan \alpha \tan \beta + \tan \beta \tan \gamma + \tan \gamma \tan \alpha = 1]$ est vraie pour $(\alpha; \beta; \gamma) \in]0; \frac{\pi}{2}[^3$, comme le montre le dessin suivant. Il est naturel de se

7. Cette démonstration est très utile pour un cours pré universitaire.

demander s'il est possible de partir, plus généralement, de $(\alpha; \beta; \gamma) \in (\mathbb{C} - \frac{\pi}{2}\mathbb{Z})^3$. Nous allons voir que c'est bien le cas.⁸



Voici comment arriver à une généralisation pour $(\alpha; \beta; \gamma) \in (\mathbb{C} - \frac{\pi}{2}\mathbb{Z})^3$.

- Pour $(\alpha; \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, en posant $\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$, le dessin donne $\tan \alpha \tan \beta + \tan \beta \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta) + \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta) \tan \alpha - 1 = 0$.
- En multipliant l'égalité précédente par $\cos \alpha \cos \beta \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta)$, nous obtenons la nullité sur $]0; \frac{\pi}{4}[^2$ d'une fonction $f(\alpha; \beta)$ séparablement analytique.
- Comme $]0; \frac{\pi}{4}[^2$ est discriminant, le fait 22 donne la nullité de $f(\alpha; \beta)$ sur \mathbb{C}^2 .
- Si $(\alpha; \beta) \in (\mathbb{C} - \frac{\pi}{2}\mathbb{Z})^2$ et $\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta \in \mathbb{C} - \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, en divisant par $\cos \alpha \cos \beta \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta)$, et en posant $\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$, nous obtenons la généralisation à $(\alpha; \beta; \gamma) \in (\mathbb{C} - \frac{\pi}{2}\mathbb{Z})^3$ de l'implication initiale.

8. Ici, il est aisé de faire une vérification directe, mais cela sort de l'esprit de ce document, et est non généralisable. En effet, en multipliant l'égalité souhaitée par $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$, nous devons démontrer que $\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 0$. Dans le terme de gauche, les formules d'addition se cachent de façon ostentatoire. Nous obtenons $\sin \alpha \sin(\beta + \gamma) - \cos \alpha \cos(\beta + \gamma)$, puis $-\cos(\alpha + \beta + \gamma)$, soit $-\cos(\frac{\pi}{2})$ qui est bien nul.