

# BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES

CHRISTOPHE BAL

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



---

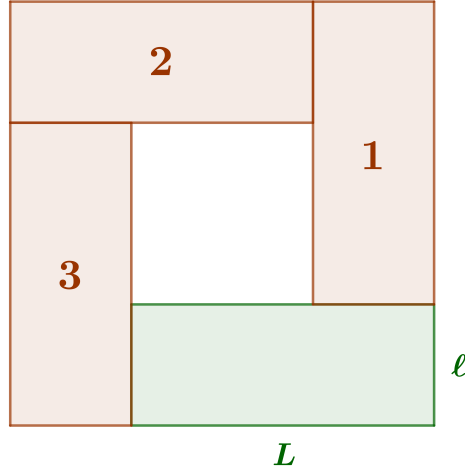
## TABLE DES MATIÈRES

1. Les rectangles	2
2. Les parallélogrammes	2
3. Les triangles avec un côté fixé	3
4. Les triangles sans contrainte	4
5. Les quadrilatères	6

## 1. LES RECTANGLES

**Fait 1.** *Considérons tous les rectangles de périmètre fixé  $p$ . Parmi tous ces rectangles, celui d'aire maximale est le carré de côté  $c = 0,25p$ .*

*Démonstration.* Une preuve courante est d'exprimer l'aire du rectangle comme un polynôme du 2<sup>e</sup> degré en  $L$  par exemple.<sup>1</sup> On peut en fait faire plus simplement grâce au dessin suivant où les rectangles 1, 2 et 3 sont isométriques au rectangle vert étudié de dimension  $L \times \ell$ .



Le raisonnement tient alors aux constatations suivantes accessibles à un collégien.

- (1) Le grand carré a une aire supérieure ou égale à  $4L\ell$ .
- (2) Le grand carré a un périmètre égal à  $4(L + \ell)$ .
- (3) Via une homothétie de rapport 0,5, nous obtenons un carré d'aire supérieure ou égale à  $0,5^2 \times 4L\ell = L\ell$ , et de périmètre égal à  $0,5 \times 4(L + \ell) = 2(L + \ell)$ .

Donc pour tout rectangle de périmètre  $p = 2(L + \ell)$  et d'aire  $L\ell$ , nous pouvons construire un carré de périmètre identique, mais avec une aire supérieure ou égale à  $L\ell$ . Joli! Non?  $\square$

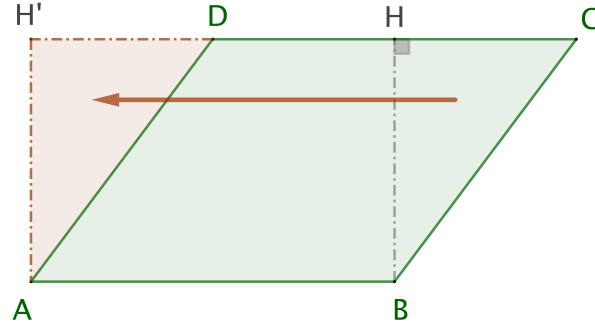
**Remarque 1.1.** *Au passage, nous avons pour  $(L; \ell) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ ,  $4L\ell \leq (L + \ell)^2$ , c'est-à-dire  $2L\ell \leq L^2 + \ell^2$ , d'où  $\sqrt{L\ell} \leq \sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$ , soit la comparaison des moyennes géométriques et quadratiques d'ordre 2.*

## 2. LES PARALLÉLOGRAMMES

**Fait 2.** *Considérons tous les parallélogrammes de périmètre fixé  $p$ . Parmi tous ces parallélogrammes, celui d'aire maximale est le carré de côté  $c = 0,25p$ .*

*Démonstration.* Le calcul de l'aire d'un parallélogramme, voir le dessin ci-dessous, nous donne  $\text{Aire}(ABCD) = \text{Aire}(ABHH')$  et  $\text{Perim}(ABCD) \geq \text{Perim}(ABHH')$ .

<sup>1</sup>. L'aire est donnée par  $L\ell = L(0,5p - L)$  qui est maximale en  $L_M = 0,25p$  (moyenne des racines), d'où  $\ell_M = 0,25p = L_M$ .



Via une homothétie de rapport  $k = \frac{\text{Perim}(ABCD)}{\text{Perim}(ABHH')} \geq 1$ , nous obtenons un rectangle d'aire supérieure ou égale à  $\text{Aire}(ABCD)$ , et de périmètre égal à  $p$ . Nous revenons à la situation du fait 1 qui permet de conclure très facilement.  $\square$

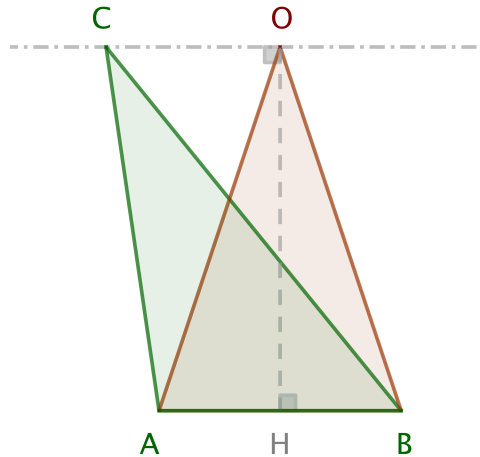
**Remarque 2.1.** *La recherche d'un parallélogramme de périmètre minimal pour une aire fixée est le problème dual de l'isopérimétrie pour les parallélogrammes.*

**Remarque 2.2.** *Une méthode analytique devient pénible ici, car il faut par exemple prendre en compte l'angle au sommet A du parallélogramme. L'auteur préfère battre en retraite en clôturant cette remarque ici.*

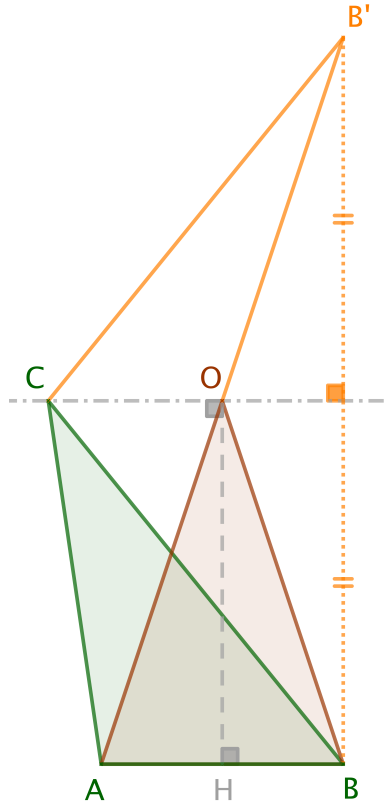
### 3. LES TRIANGLES AVEC UN CÔTÉ FIXÉ

**Fait 3.** *Considérons tous les triangles de périmètre fixé  $p$ , et ayant tous au moins un côté de même mesure  $c$  (on suppose que nous avons au moins un tel triangle). Parmi tous ces triangles, celui qui a une aire maximale est le triangle isocèle ayant une base de mesure  $c$ .*

*Démonstration.* Soit  $ABC$  un triangle de périmètre  $p$ , et vérifiant  $AB = c$ . Les points  $M$  sur la parallèle à  $(AB)$  passant par  $C$  sont tels que  $\text{Aire}(ABM) = \text{Aire}(ABC)$ . On note  $O$  le point sur cette parallèle tel que  $ABO$  soit isocèle en  $O$ .



Via une petite symétrie axiale, voir ci-dessous, il est aisé de noter que  $\text{Perim}(ABC) \geq \text{Perim}(ABO)$ .



Via une dilatation « verticale » de rapport  $r = \frac{\text{Perim}(ABC)}{\text{Perim}(ABO)} \geq 1$ , on obtient finalement un triangle isocèle  $ABO'$  de périmètre  $p$ , et qui vérifie  $\text{Aire}(ABO') \geq \text{Aire}(ABC)$ .<sup>2</sup> Contrat rempli !  $\square$

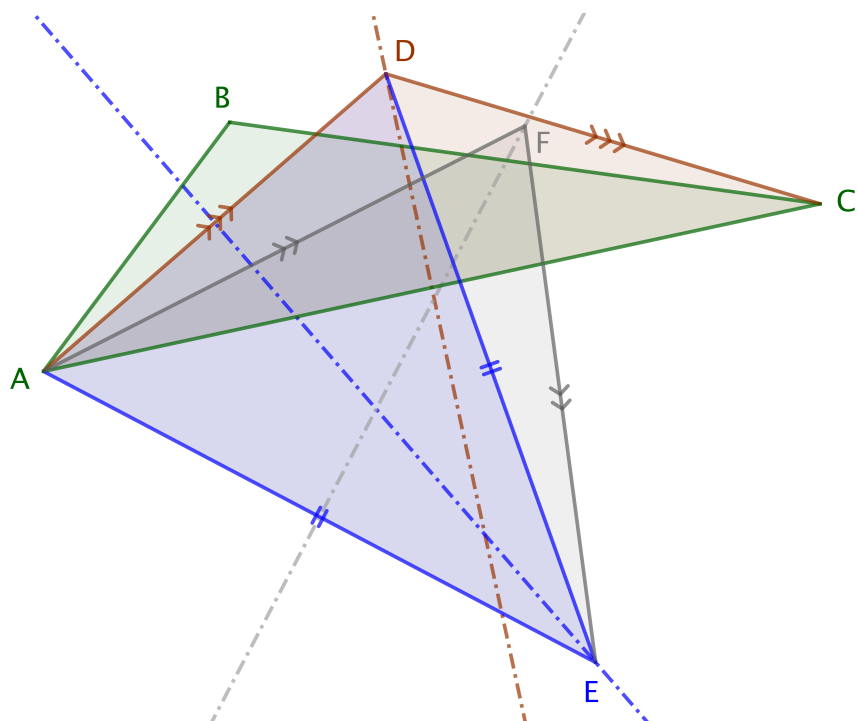
#### 4. LES TRIANGLES SANS CONTRAINTE

**Fait 4.** *Considérons tous les triangles de périmètre fixé  $p$ . Parmi tous ces triangles, celui d'aire maximale est le triangle équilatéral de côté  $c = \frac{1}{3}p$ .*

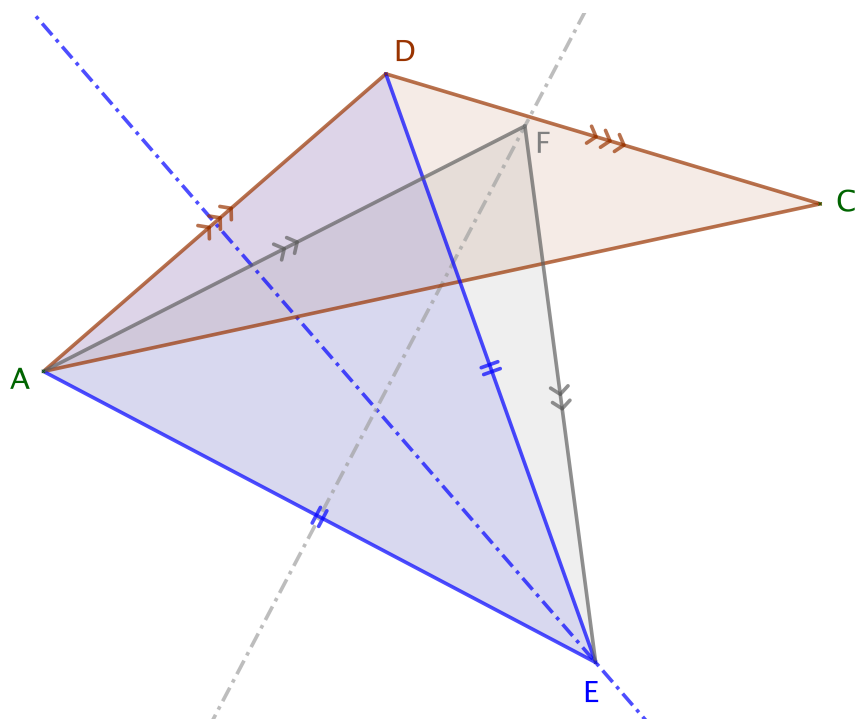
*Démonstration.* Une première idée, calculatoire, est de passer via la classique formule de Héron  $\text{Aire} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  où  $s = 0,5p$  désigne le demi-périmètre, et les variables  $a$ ,  $b$  et  $c$  les mesures des côtés du triangle,<sup>3</sup> mais nous allons raisonner plus géométriquement. Partant d'un triangle  $ABC$  quelconque de périmètre  $p$ , le fait 4 nous donne successivement les triangles  $ACD$ ,  $ADE$  et  $AEF$  isocèles en  $D$ ,  $E$  et  $F$  respectivement, ayant tous pour périmètre  $p$ , et ceci avec des aires de plus en plus grandes. Le dessin suivant amène à conjecturer qu'en poursuivant le procédé pour avoir ensuite un triangle  $AFG$  isocèle en  $G$ ..., nous aboutirons « à la limite » à un triangle équilatéral.

2. Dans la démonstration du fait 4, une note explique comment employer la méthode des extrema liés. Ces arguments s'adaptent facilement au cas des triangles isocèles de base fixée.

3. L'aire étant positive ou nulle, nous devons chercher les maxima de  $f(a; b; c) = \text{Aire}^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ , c'est-à-dire de  $f(a; b; c) = \frac{1}{16}(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$ , sous la contrainte  $2s = a+b+c$  où  $s > 0$  est constant. Notant  $g(a; b; c) = a+b+c-2s$ , la contrainte s'écrit  $g(a; b; c) = 0$ . Selon la méthode des extrema liés, un éventuel extremum doit vérifier  $\partial_a f = \lambda \partial_a g$ ,  $\partial_b f = \lambda \partial_b g$  et  $\partial_c f = \lambda \partial_c g$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Donc,  $-s(s-b)(s-c) = -s(s-a)(s-c) = -s(s-a)(s-b) = \lambda$ , puis  $(s-b)(s-c) = (s-a)(s-c) = (s-a)(s-b)$ . Les cas  $s = a$ ,  $s = b$  et  $s = c$  donnent  $f(a; b; c) = 0$ . Quant au cas  $[s \neq a, s \neq b \text{ et } s \neq c]$ , il n'est envisageable que si  $a = b = c = \frac{p}{3}$  qui implique  $f(a; b; c) = \frac{1}{16}p(\frac{p}{3})^3 = (\frac{p^2}{12\sqrt{3}})^2 > 0$ . En résumé, l'existence d'un maximum implique que ce maximum corresponde au cas du triangle équilatéral. Il reste à démontrer qu'un tel maximum existe pour pouvoir conclure : ceci est facile à justifier en considérant l'ensemble compact  $[0; s]^3$  de  $\mathbb{R}^3$ .



Le passage d'un triangle quelconque  $ABC$  au triangle  $ACD$  isocèle en  $D$  nous amène à nous concentrer sur ce que donne notre procédé d'agrandissement d'aire à périmètre fixé pour des triangles isocèles. Dans la suite, nous allons nous appuyer sur le schéma suivant.



Voici ce que nous pouvons affirmer.

- (1) Considérons  $ACD$  isocèle en  $D$  tel que  $AC > AD$ . Comme  $AC + AD + DC = p$ , nous avons  $AC > \frac{1}{3}p > AD$ . Dès lors, on doit avoir ensuite  $AD < \frac{1}{3}p < AE$ , car  $AD + DE + AE = p$  et  $AD = AE$ .

- (2) Considérons  $ADE$  isocèle en  $E$  tel que  $AD < AE$  en oubliant le point précédent. Comme  $AD + DE + AE = p$ , nous avons  $AD < \frac{1}{3}p < AE$ . Dès lors, on doit avoir ensuite  $AE > \frac{1}{3}p > AF$ , car  $AE + AF + EF = p$  et  $AF = EF$ .
- (3) Les deux points précédents démontrent que notre procédé n'arrivera jamais en un nombre fini d'étapes à un triangle équilatéral si l'on part d'un triangle isocèle non équilatéral.<sup>4</sup>
- (4) Nous devons quantifier les écarts à la mesure « limite »  $p' = \frac{1}{3}p$ .
- Dans  $ADC$ , posant  $AD = p' - \epsilon$ , nous avons  $AC = p' + 2\epsilon$ .
  - Dans  $ADE$ , posant  $AE = p' + \epsilon'$ , nous avons  $AD = p' - 2\epsilon'$ .
  - Donc  $\epsilon' = \frac{1}{2}\epsilon$ .

Nous avons donc une convergence exponentielle des longueurs des côtés vers  $p' = \frac{1}{3}p$ . Et tout ceci via de la géométrie et de l'analyse élémentaires !

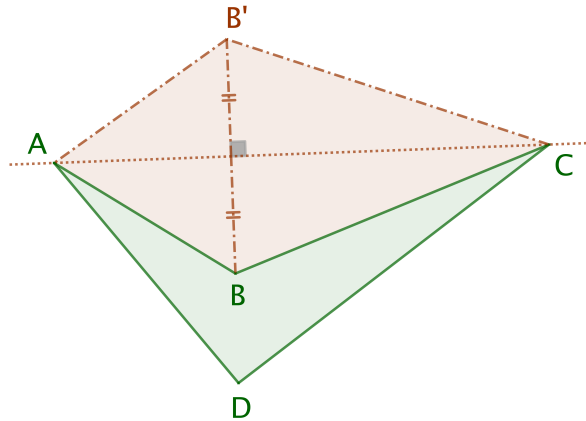
□

**Remarque 4.1.** La comparaison des moyennes géométriques et arithmétiques d'ordre 3 nous donne une solution algébrique efficace, car  $\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}((s-a)+(s-b)+(s-c))$  nous donne  $s(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{1}{27}s^4$ , puis  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{p^2}{12\sqrt{3}}$  où  $\frac{p^2}{12\sqrt{3}}$  est l'aire du triangle équilatéral de périmètre  $p$ .

## 5. LES QUADRILATÈRES

**Fait 5.** Considérons tous les quadrilatères de périmètre fixé  $p$ . Parmi tous ces quadrilatères, celui d'aire maximale est le carré de côté  $c = 0,25p$ .

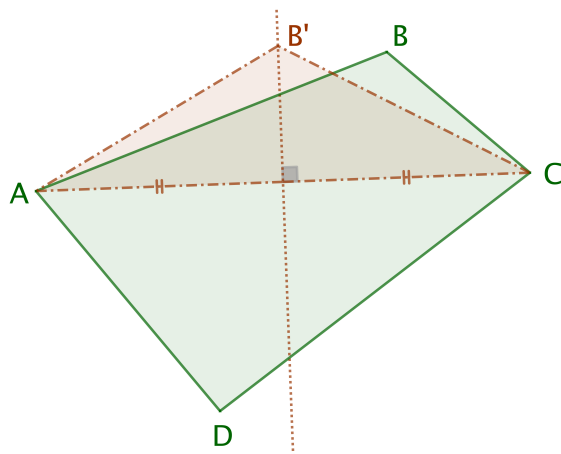
*Démonstration.* La figure suivante montre que pour tout quadrilatère  $ABCD$  non convexe en  $B$ , et de périmètre  $p$ , il existe un quadrilatère convexe  $AB'CD$  de périmètre  $p$ , et tel que  $\text{Aire}(AB'CD) \geq \text{Aire}(ABCD)$ . Notre recherche doit donc continuer dans l'ensemble des quadrilatères convexes de périmètre  $p$ .



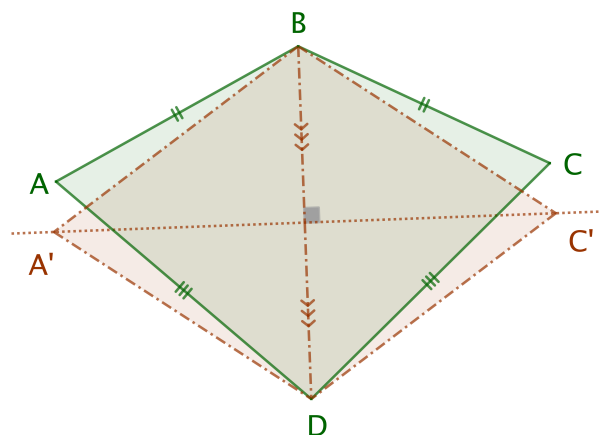
Comme dans la preuve du fait 3, à partir d'un quadrilatère convexe  $ABCD$  de périmètre  $p$ , nous obtenons un quadrilatère convexe  $AB'CD$  de périmètre  $p$ ,<sup>5</sup> et tel que  $AB' = B'C$  et  $\text{Aire}(AB'CD) \geq \text{Aire}(ABCD)$  comme le montre la figure ci-après.

4. Et plus généralement si le procédé ne commence pas avec une base de longueur  $\frac{1}{3}p$ .

5. Noter que  $\text{Perim}(AB'CD) = \text{Perim}(AB'C) + \text{Perim}(ACD) - 2AC$ .



En appliquant la méthode précédente au sommet  $D$ , nous arrivons au cas d'un cerf-volant  $ABCD$  de périmètre  $p$ , et tel que  $AB = BC$  et  $AD = DC$ , voir ci-dessous. Cette même méthode appliquée cette fois-ci aux sommets  $A$  et  $C$  nous fournit un losange  $A'BC'D$  de périmètre  $p$ , et tel que  $\text{Aire}(A'BC'D) \geq \text{Aire}(ABCD)$ . En effet, nous avons  $p = 2(AB + AD)$  et  $\text{Perim}(A'BD) = \text{Perim}(ABD)$ , donc  $A'B = A'D = 0,25p$ , et de même nous obtenons  $C'B = C'D = 0,25p$ .



Pour conclure, il suffit d'appliquer le fait 2, puisque tout losange est un parallélogramme. Que la géométrie est belle !  $\square$