

# BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



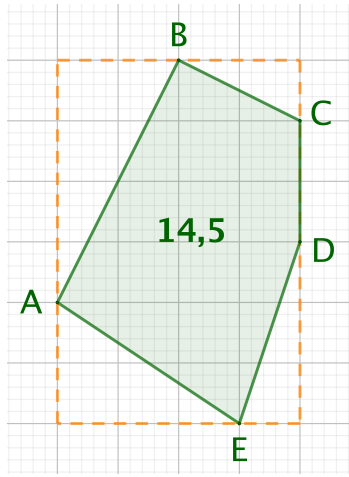
---

## TABLE DES MATIÈRES

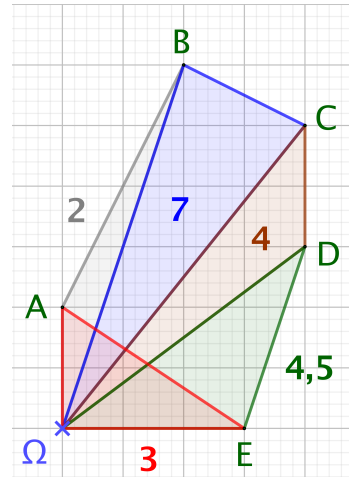
0.1. Condition suffisante

2

**0.1. Condition suffisante.** Selon le fait ??, si parmi les  $n$ -gones de périmètre fixé, il en existe un qui maximise l'aire, alors ce ne peut être que le  $n$ -gone régulier. Nous allons établir que cette condition nécessaire est suffisante. Pour cela, nous avons juste besoin de savoir qu'il existe au moins un  $n$ -gone d'aire maximale. Comme dans la remarque ??, nous allons convier le couple continuité/compacité, mais ici les choses se compliquent, car nous allons devoir accepter de travailler avec des polygones croisés, et par conséquent il nous faut un moyen de mesurer la surface de tels polygones (le vrai point délicat est ici). Plaçons-nous d'un point de vue informatique : comme on sait calculer l'aire d'un triangle via le calcul d'un déterminant,<sup>1</sup> il est naturel de chercher à calculer l'aire d'un  $n$ -gone en utilisant des triangles. Voici une méthode possible qui a priori pourrait dépendre du point  $\Omega$  employé (le fait 1, donné plus bas, justifiera le bien fondé de cette méthode).



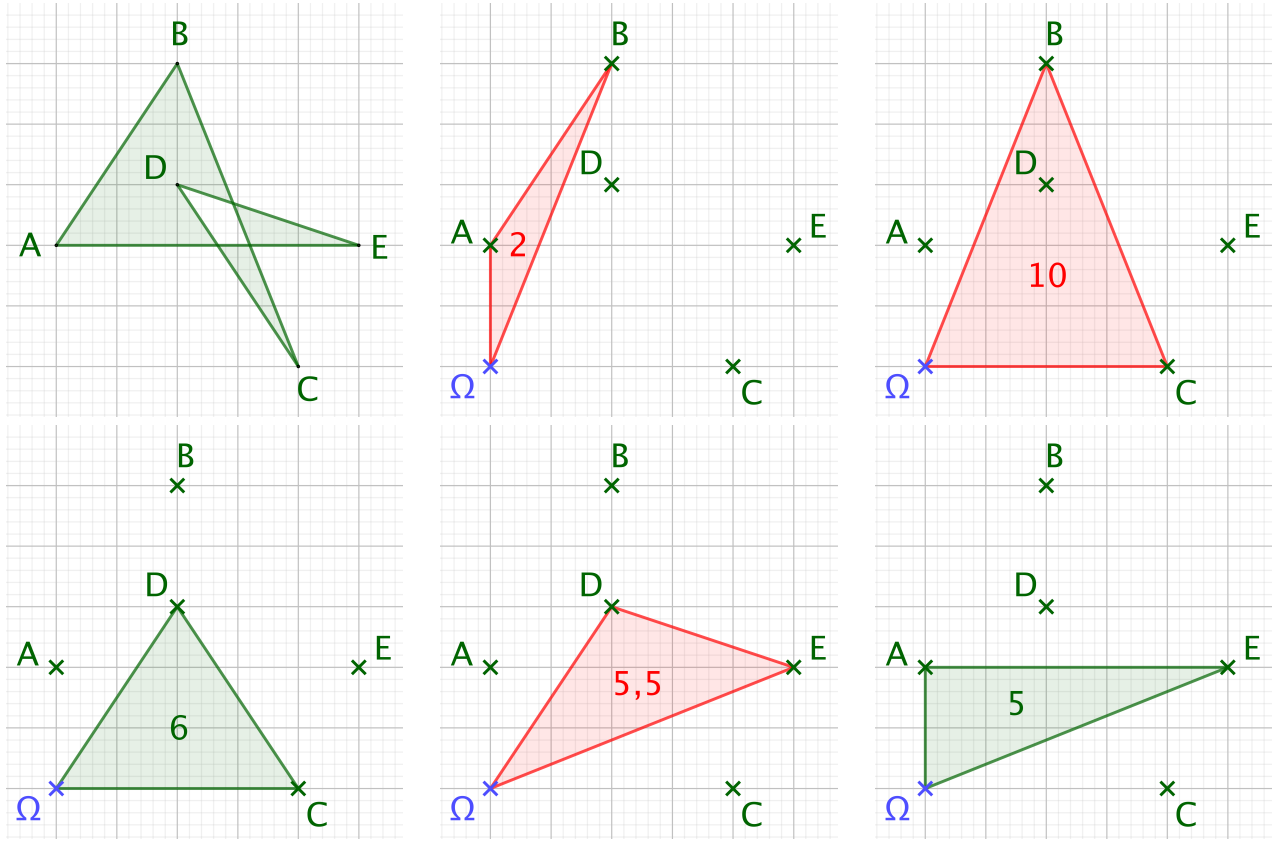
$$14,5 = 4 \cdot 6 - \frac{2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{2}$$



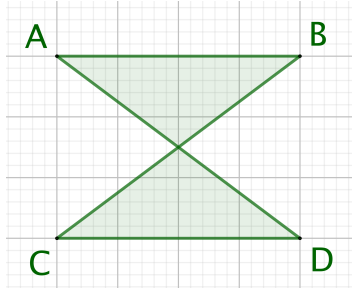
$$14,5 = 2 + 7 + 4 + 4,5 - 4$$

Ce mode de calcul est celui employé par **GeoGebra** qui donne une aire de 6,5 pour le polygone croisé de la bande dessinée ci-après qui détaille les calculs faits : les aires algébriques représentées en vert sont positives, et celles en rouge négatives. Nous obtenons un total de  $(-6,5)$ , soit la valeur fournie par **GeoGebra** au signe près.

1. Il est connu que  $\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right|$ .



Avant de formaliser ce qui précède, il faut noter que la notion d'aire algébrique est à manier avec prudence lorsqu'on la découvre. Si c'est votre cas, que pensez-vous de l'aire algébrique du quadrilatère croisé  $ABCD$  ci-dessous qui est un antiparallélogramme très particulier ? Réponse en note de bas de page.<sup>2</sup>



**Définition 1.** Pour toute  $n$ -ligne  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ , on définit  $(A'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  comme étant  $n$ -périodique, et vérifiant  $A'_i = A_i$  sur  $\llbracket 1; n \rrbracket$ .

**Fait 1.** Soit  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  une  $n$ -ligne. La fonction qui à un point  $\Omega$  du plan associe  $\mu_{1 \rightarrow n}^\Omega(\mathcal{L}) = \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}})$  est indépendante du point  $\Omega$ . Dans la suite, cette quantité indépendante de  $\Omega$  sera notée  $\mu_{1 \rightarrow n}(\mathcal{L})$ .

2. La réponse est 0. Comme nous verrons que le choix de  $\Omega$  est libre, il suffit de faire les calculs avec  $\Omega$  l'intersection des segments  $[AD]$  et  $[BC]$ . On peut tout de même donner du sens à ceci. Voici comment. Plongeons-nous dans l'espace. Imaginons une toile rectangulaire rouge sur le dessus, et verte en dessous. Tour-nous de  $180^\circ$  verticalement l'un des côtés du rectangle. En supposant que la toile soit parfaitement tendue, nous obtenons, vue de dessus, un antiparallélogramme dont l'un des triangles est vert, et l'autre rouge. De façon savante, les deux faces ont deux orientations différentes. Nous reparlerons de cette notion par la suite.

*Démonstration.* Soit  $M$  un autre point du plan.

$$\begin{aligned}
& \mu_{1 \rightarrow n}^{\Omega}(\mathcal{L}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MA'_{i+1}}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Cette bonne vieille relation de Chasles.} \end{array} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \left[ \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) + \det(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) + \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M}) + \mu_{1 \rightarrow n}^M(\mathcal{L}) \\
&= \mu_{1 \rightarrow n}^M(\mathcal{L}) + \sum_{i=2}^{n+1} \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_i}) - \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_i}) \\
&= \mu_{1 \rightarrow n}^M(\mathcal{L}) + \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{n+1}}) - \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_1}) \quad \left. \begin{array}{l} A'_{n+1} = A'_1 \end{array} \right\} \\
&= \mu_{1 \rightarrow n}^M(\mathcal{L}) \quad \square
\end{aligned}$$

**Fait 2.** Soit  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  une  $n$ -ligne. Pour  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , nous avons  $\mu_{1 \rightarrow n}(\mathcal{L}) = \mu_{j \rightarrow n+j-1}(\mathcal{L})$ . Dans la suite, cette quantité commune sera notée  $\mu(\mathcal{L})$ .

*Démonstration.* Il suffit de s'adonner à un petit jeu sur les indices de sommation.  $\square$

**Fait 3.** Soient  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  une  $n$ -ligne, et  $\mathcal{L}^{\text{op}} = A_n A_{n-1} \cdots A_1$  la  $n$ -ligne obtenue via un parcours inversé à partir de  $A_n$ . Posant  $B_i = A_{n+1-i}$ , nous obtenons  $\mathcal{L}^{\text{op}} = B_1 B_2 \cdots B_n$  qui permet de considérer  $\mu(\mathcal{L}^{\text{op}})$ . Dès lors, nous avons  $\mu(\mathcal{L}^{\text{op}}) = -\mu(\mathcal{L})$ .

*Démonstration.* Soit  $\Omega$  un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned}
& \mu(\mathcal{L}^{\text{op}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega B'_i}, \overrightarrow{\Omega B'_{i+1}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_{n+1-i}}, \overrightarrow{\Omega A'_{n-i}}) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \det(\overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}, \overrightarrow{\Omega A'_j}) \quad \left. \begin{array}{l} A'_0 = A'_n \text{ et } A'_1 = A'_{n+1} \end{array} \right\} \\
&= \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}, \overrightarrow{\Omega A'_j}) \\
&= - \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_j}, \overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}) \\
&= -\mu(\mathcal{L}) \quad \square
\end{aligned}$$

**Fait 4.** Soit  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  une  $n$ -ligne. La quantité  $\frac{1}{2}|\mu(\mathcal{L})|$  ne dépend ni du sens de parcours de  $\mathcal{L}$ , ni du point de départ choisi.<sup>3</sup> Elle sera notée  $\text{AireGe}(\mathcal{L})$ , et nommée « aire généralisée » de la  $n$ -ligne  $\mathcal{L}$ .

*Démonstration.* C'est une synthèse des faits 2 et 3.  $\square$

Pour notre démonstration finale, nous aurons besoin de savoir que  $\text{AireGe}(\mathcal{P}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$  pour tout  $n$ -gone  $\mathcal{P}$ .<sup>4</sup> Ceci est évident dans le cas convexe, car il suffit de choisir l'isobarycentre  $G$

3. Le lecteur pardonnera les abus de langage utilisés.

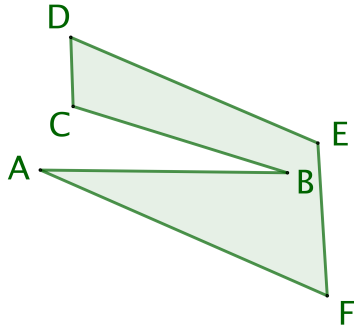
4. Nous obtiendrons alors la généralisation de l'aire géométrique usuelle au cas des polygones croisés.

de  $A_1, A_2, \dots, A_n$  pour le calcul de  $\text{AireGe}(\mathcal{P})$  : en effet, avec ce choix, tous les déterminants  $\det(\overrightarrow{GA'_i}, \overrightarrow{GA'_{i+1}})$  ont le même signe. Dans le cas non-convexe, les choses se compliquent, car nous ne maîtrisons plus les signes des déterminants.

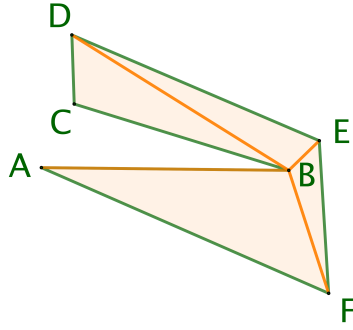
??? La présence de la valeur absolue nous demande de connaître mieux le signe

**Fait 5.** Pour tout  $n$ -gone  $\mathcal{P}$ , nous avons :  $\text{AireGe}(\mathcal{P}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$ .

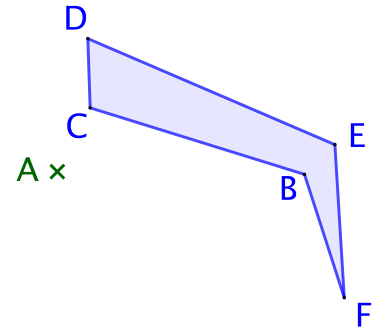
*Démonstration.* Le théorème de triangulation affirme que tout  $n$ -gone est triangulable comme dans l'exemple très basique suivant qui laisse envisager une démonstration par récurrence en retirant l'un des triangles ayant deux côtés correspondant à deux côtés consécutifs du  $n$ -gone (pour peu qu'un tel triangle existe toujours).



Un  $n$ -gone nu.



Le  $n$ -gone triangulé.



Le  $n$ -gone allégé.

Le théorème de triangulation admet une forme forte donnant une décomposition contenant un triangle formé de deux côtés consécutifs du  $n$ -gone.<sup>5</sup> Nous dirons qu'une telle décomposition est « à l'écoute ». Ce très mauvais jeu de mots fait référence à la notion sérieuse « d'oreille » pour un  $n$ -gone : une oreille est un triangle inclus dans le  $n$ -gone, et formé de deux côtés consécutifs du  $n$ -gone. L'exemple suivant donne un  $n$ -gone n'ayant que deux oreilles : ceci montre que l'existence d'une oreille ne va pas de soi.<sup>6</sup>



Un  $n$ -gone basique.

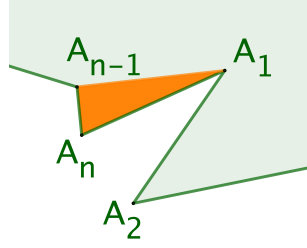


Juste deux oreilles disponibles.

Soit  $\mathcal{P}$  un  $n$ -gone avec  $n \geq 4$ , et  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \dots A_n$  la  $n$ -ligne obtenue en parcourant la frontière de  $\mathcal{P}$  à partir d'un sommet  $A_1$  tel que  $A_1 A_{n-1} A_n$  soit une oreille de  $\mathcal{P}$ .

5. En pratique, cette forme forte est peu utile, car elle aboutit à un algorithme de recherche trop lent.

6. On démontre que tout  $n$ -gone admet au minimum deux oreilles.



Nous voilà prêt à raisonner par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ . Le cas  $n = 3$  ne posant aucune difficulté, nous allons juste considérer l'étape de récurrence en reprenant les notations précédentes. Soit ensuite  $\mathcal{P}'$  le  $k$ -gone associé à la  $k$ -ligne  $\mathcal{L}' = A_2 \cdots A_n$  où  $k = n - 1$  vérifie  $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ .

- $\text{Aire}(\mathcal{P}) = \text{Aire}(A_1 A_{n-1} A_n) + \text{Aire}(\mathcal{P}')$ , car  $A_1 A_{n-1} A_n$  est une oreille de  $\mathcal{P}$ .
- $\text{Aire}(A_1 A_{n-1} A_n) = \text{AireGe}(A_1 A_{n-1} A_n)$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}') = \text{AireGe}(\mathcal{P}')$  par récurrence.
- Il n'est pas certain que  $\text{AireGe}(A_1 A_{n-1} A_n) + \text{AireGe}(\mathcal{P}') = \text{AireGe}(\mathcal{P})$ , du fait de l'utilisation de la valeur absolue pour définir une aire généralisée. Nous allons voir que c'est malgré tout le cas. Quitte à changer de sens parcours de la frontière de  $\mathcal{P}$ , et à renommer les sommets, tout en utilisant  $\Omega = A_n$  comme point de calcul, nous pouvons supposer que  $2\text{AireGe}(\mathcal{P}') = \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_n A_j}, \overrightarrow{A_n A_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_n A_{n-1}}, \overrightarrow{A_n A_1})$ .

Nous effectuons alors les calculs suivants.

$$\begin{aligned}
& \pm 2\text{AireGe}(\mathcal{P}) \\
&= \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{A_n A'_j}, \overrightarrow{A_n A'_{j+1}}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Nous ne connaissons pas encore} \\ \text{le signe de la somme des déterminants.} \end{array} \right. \\
&= \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_n A'_j}, \overrightarrow{A_n A'_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_n A'_{n-1}}, \overrightarrow{A_n A'_n}) + \det(\overrightarrow{A_n A'_n}, \overrightarrow{A_n A'_{n+1}}) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = A'_{n+1} \\ A_i = A'_i \\ \text{pour } i \leq n \end{array} \right. \\
&= 2\text{AireGe}(\mathcal{P}') - \det(\overrightarrow{A_n A_{n-1}}, \overrightarrow{A_n A_1}) \\
&= 2\text{AireGe}(\mathcal{P}') + \det(\overrightarrow{A_n A_1}, \overrightarrow{A_n A_{n-1}})
\end{aligned}$$

Il faut donc justifier que nécessairement  $2\text{AireGe}(A_1 A_{n-1} A_n) = \det(\overrightarrow{A_n A_1}, \overrightarrow{A_n A_{n-1}})$ , car ceci donnera la positivité de la dernière somme qui sera donc égale à  $2\text{AireGe}(\mathcal{P})$ , puis nous aurons  $2\text{AireGe}(\mathcal{P}) = 2\text{AireGe}(\mathcal{P}') + 2\text{AireGe}(A_1 A_{n-1} A_n)$  comme souhaité.

XXXXX

- Les points précédents donnent bien  $\text{Aire}(\mathcal{P}) = \text{AireGe}(\mathcal{P})$ , ce qui achève notre démonstration par récurrence.

□

**Fait 6.** Soit  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  un naturel fixé. Considérons tous les  $n$ -gones de périmètre fixé. Parmi tous ces  $n$ -gones, il en existe au moins un d'aire maximale.

*Démonstration.* Le fait ?? permet de considérer le problème de maximisation d'aire à périmètre fixé uniquement avec des  $n$ -gones convexes. Selon les faits ?? et ??, si parmi les  $n$ -gones convexes de périmètre fixé, il en existe un qui maximise l'aire, alors ce ne peut être que le  $n$ -gone régulier. Pour voir que cette condition nécessaire est suffisante, c

- On munit le plan d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
- XXX

fermeture costaud, mais le côté birné!!!!

pour fermeture, besoin d'accepter les  $k$ -gones pour  $k \in \llbracket 3; n \rrbracket$ .

Les  $n$ -gones convexes  $A_n A_2 \cdots A_n$  tels que  $\text{Perim}(A_n A_2 \cdots A_n) = p$  sont représentés en posant  $A_1(0; 0)$ ,  $A_2(A_n A_2; 0)$ , puis  $A_k(x_k; y_k)$  avec  $y_k \geq 0$  pour  $k \in \llbracket 3; n \rrbracket$ . Un  $n$ -gone peut donc avoir  $n$  représentations, mais peu importe. De plus, on accepte les  $n$ -gones dégénérés pour lesquels nous avons  $x_B = 0$ ,  $y_C = 0$  dans notre représentation. Nous notons alors  $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{2n}$  l'ensemble des triplets  $(x_B; x_C; y_C)$  ainsi obtenus.

• XXX

Justifier que  $\mathcal{G}$  est fermé dans  $\mathbb{R}^{2n}$ .

- De plus,  $\mathcal{G}$  est borné, car les coordonnées des sommets des  $k$ -gones considérés le sont. Finalement,  $\mathcal{G}$  est un compact de  $\mathbb{R}^{2n}$ .
- Notons  $s : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction « aire » des  $n$ -gones représentés. Cette fonction est continue en les coordonnées des sommets, car elle peut être calculée comme suit pour un  $n$ -gone convexe  $A_n A_2 \cdots A_n$  quelconque.
  - (1) L'isobarycentre  $G$  de  $A_n A_2 \cdots A_n$  possède des coordonnées affines en celles des points  $A_1, A_2, \dots$ , et  $A_n$ .
  - (2) Par convexité, l'aire de  $A_n A_2 \cdots A_n$  est égale à la somme de celles des triangles  $GA_k A_{k+1}$  pour  $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ , et du triangle  $GA_n A_1$ .
  - (3) Via le déterminant, il est immédiat de voir que les aires des triangles considérés sont des fonctions continues en les coordonnées des sommets.
- Finalement, par continuité et compacité, on sait que  $s$  admet un maximum sur  $\mathcal{G}$ , un tel maximum ne pouvant pas être atteint sur un  $k$ -gone dégénéré. That's all folks!

□

**Fait 7.** Soit  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  un naturel fixé. Considérons tous les  $n$ -gones de périmètre fixé. Parmi tous ces  $n$ -gones, un seul est d'aire maximale, c'est le  $n$ -gone régulier.

*Démonstration.* C'est une conséquence directe des faits ?? et 6.

□