BROUILLON – NEWTON, BERNOULLI, LEIBNIZ, FIBONACCI ET BELL

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts.

Table des matières

Date: 2 Avril 2025 - 3 Avril 2025.

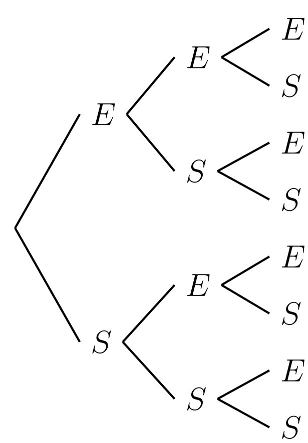
1. Des identités bien connues

Les formules suivantes intriguent par leur ressemblance. Bien qu'elles appartiennent à des domaines distincts, leur similitude n'est pas le fruit du hasard. À travers deux démonstrations adoptant des approches différentes, nous révélerons les liens combinatoires qui unissent ces objets en apparence indépendants.

- **Formule du binôme de Newton :** $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
- **Formule de dérivation de Leibniz :** $(fg)^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$.
- **Loi binomiale :** $\mathrm{P}(X=j) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_{jk}$,[1] même s'il est d'usage de juste écrire $\mathrm{P}(X=j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$.
- **Une identité portant sur la suite de Fibonacci :** $F_{2n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k$.
- **Une formule similaire avec des coefficients binomiaux :** $\binom{2n}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k}$.
- **Une équation liant les nombres de Bell :** $B_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$ où B_s est le nombre de façons de partitionner un ensemble de s éléments en sous-ensembles non vides : par exemple, $B_3 = 5$, car l'ensemble $\{a,b,c\}$ admet les partitions $\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a\} \cup \{b,c\}$, $\{b\} \cup \{a,c\}$ et $\{c\} \cup \{a,b\}$.

2. La loi binomiale révèle...

2.1. **De l'utilité des arbres.** Lorsque l'on présente la loi binomiale, il est courant d'utiliser un arbre de probabilité comme le suivant où S désigne un succès et E un échec, un succès ayant une probabilité p de se réaliser (ici nous avons un niveau de profondeur de 3).



Dans la version générale à n niveaux de cet arbre, $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins avec exactement k succès.[2] Notant X la variable aléatoire comptant le nombre de succès, ainsi que $q = p-1$, il est immédiat que $\mathrm{P}(X=j) = \binom{n}{j} p^j q^{n-j}$, soit de façon équivalente $\mathrm{P}(X=j) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_{jk}$.

---

1. δ_{jk} est le symbole de Kronecker valant 1 si $j=k$, et 0 sinon, tandis que X désigne la variable aléatoire comptant le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli de paramètre $(n\,;p)$.
2. Nous n'utiliserons pas dans ce document la formule factorielle de $\binom{n}{k}$.

Nous pouvons calculer les probabilités aux feuilles de l'arbre via le mini-arbre de calcul $\mathcal{T}_c$ suivant dans lequel un choix de chemin vers le bas, soit un déplacement vers un succès, implique de multiplier la valeur $p^i q^j$ par p, et sinon de multiplier par q.

$$x \left\langle \begin{array}{l} qx \\ px \end{array} \right.$$

$$p^a q^b \left\langle \begin{array}{l} p^{a+1} q^b \\ p^a q^{b+1} \end{array} \right.$$

Si l'on part de la racine de la valeur 1 pour construire un arbre binaire complet via les règles de calcul de $\mathcal{T}_c$, nous retrouvons $\mathrm{P}(X = j) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_{jk}$ de façon combinatoire, voir ci-dessous, mais surtout via une méthode généralisable à d'autres contextes comme nous allons le constater.

$$1 \left\langle \begin{array}{l} q \left\langle \begin{array}{l} q^2 \left\langle \begin{array}{l} q^3 \\ pq^2 \end{array} \right. \\ pq \left\langle \begin{array}{l} pq^2 \\ p^2 q \end{array} \right. \end{array} \right. \\ p \left\langle \begin{array}{l} pq \left\langle \begin{array}{l} pq^2 \\ p^2 q \end{array} \right. \\ p^2 \left\langle \begin{array}{l} p^2 q \\ p^3 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

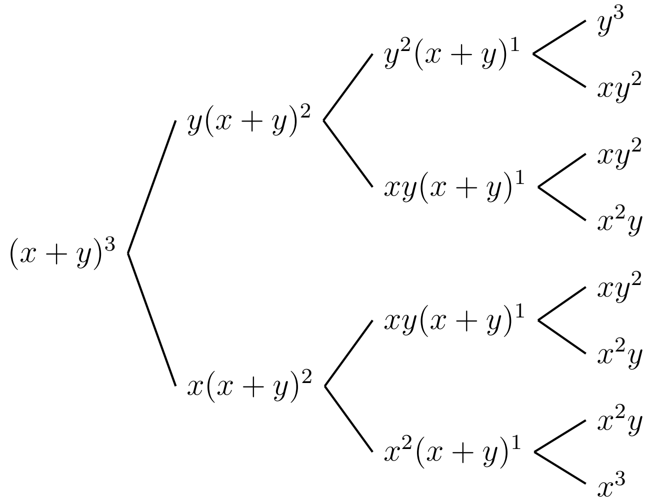
2.2. **Droit au binôme de Newton.** XXXX

$$(x+y)^k \left\langle \begin{array}{l} y(x+y)^{k-1} \\ x(x+y)^{k-1} \end{array} \right.$$

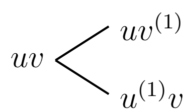
YYY

$$x^a y^b (x+y)^k \left\langle \begin{array}{l} x^{a+1} y^b (x+y)^{k-1} \\ x^a y^{b+1} (x+y)^{k-1} \end{array} \right.$$

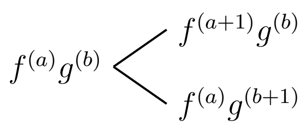
YYY



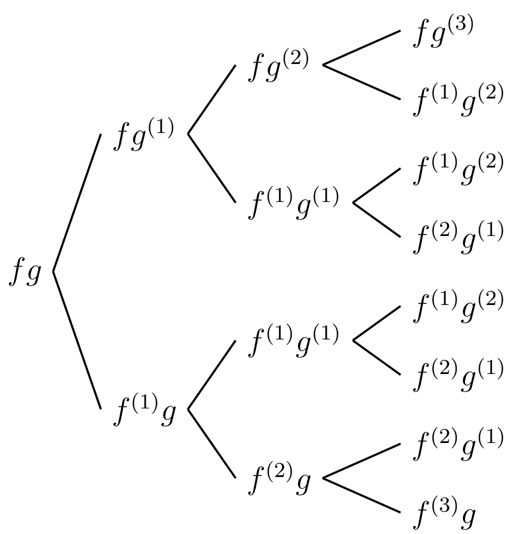
2.3. **Leibniz sans effort.** XXXX



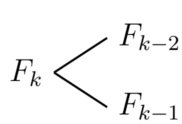
YYY



YYY



2.4. **Une petite astuce pour Fibonacci.** XXXX



YYY

$$F_{k-a\cdot1-b\cdot2} \begin{array}{l} \nearrow F_{k-(a+1)\cdot1-b\cdot2} \\ \searrow F_{k-a\cdot1-(b+1)\cdot2} \end{array}$$

YYY

$$F_6 \begin{array}{l} \nearrow F_{6-1\cdot2} \begin{array}{l} \nearrow F_{6-2\cdot2} \begin{array}{l} \nearrow F_{6-3\cdot2} \\ \searrow F_{6-1\cdot1-2\cdot2} \end{array} \\ \searrow F_{6-1\cdot1-1\cdot2} \begin{array}{l} \nearrow F_{6-1\cdot1-2\cdot2} \\ \searrow F_{6-2\cdot1-1\cdot2} \end{array} \end{array} \\ \searrow F_{6-1\cdot1} \begin{array}{l} \nearrow F_{6-1\cdot1-1\cdot2} \begin{array}{l} \nearrow F_{6-1\cdot1-2\cdot2} \\ \searrow F_{6-2\cdot1-1\cdot2} \end{array} \\ \searrow F_{6-2\cdot1} \begin{array}{l} \nearrow F_{6-2\cdot1-1\cdot2} \\ \searrow F_{6-3\cdot1} \end{array} \end{array} \end{array}$$

2.5. **Les coefficients binomiaux imitent Fibonacci.** XXXX

$$\binom{n}{k} \begin{array}{l} \nearrow \binom{n-1}{k-1} \\ \searrow \binom{n-1}{k} \end{array}$$

YYY

$$F_{k-a\cdot1-b\cdot2} \begin{array}{l} \nearrow F_{k-(a+1)\cdot1-b\cdot2} \\ \searrow F_{k-a\cdot1-(b+1)\cdot2} \end{array}$$

YYY

$$F_6 \begin{array}{l} \nearrow F_{6-1\cdot2} \begin{array}{l} \nearrow F_{6-2\cdot2} \begin{array}{l} \nearrow F_{6-3\cdot2} \\ \searrow F_{6-1\cdot1-2\cdot2} \end{array} \\ \searrow F_{6-1\cdot1-1\cdot2} \begin{array}{l} \nearrow F_{6-1\cdot1-2\cdot2} \\ \searrow F_{6-2\cdot1-1\cdot2} \end{array} \end{array} \\ \searrow F_{6-1\cdot1} \begin{array}{l} \nearrow F_{6-1\cdot1-1\cdot2} \begin{array}{l} \nearrow F_{6-1\cdot1-2\cdot2} \\ \searrow F_{6-2\cdot1-1\cdot2} \end{array} \\ \searrow F_{6-2\cdot1} \begin{array}{l} \nearrow F_{6-2\cdot1-1\cdot2} \\ \searrow F_{6-3\cdot1} \end{array} \end{array} \end{array}$$

2.6. **Bell sonne la fin du jeu.** XXXX