BROUILLON - À LA RECHERCHE DE RACINES N-IÈMES

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts.

Mentions « légales »

Table des matières

Date: 10 Jan. 2025.

1. Racine carré d'un petit naturel

Fait 1.1. *Étant donné connue la valeur de n^2 où $n \in [\![0\,;99]\!]$, il est humainement assez facile de retrouver n .*

Démonstration. Commençons par les carrés des petits naturels, c'est-à-dire ceux dans $[\![0\,;9]\!]$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Il semble évident que la connaissance du tableau précédent soit un passage obligé. Intéressons-nous maintenant aux chiffres des unités des carrés précédents.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dernier chiffre de n^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

En oubliant la colonne évidente de zéros, nous constatons une « symétrie » relativement à la colonne des 5 .

Continuons notre analyse pour $n \in [\![10\,;99]\!]$ en notant d le chiffre des unités de n , et u celui des unités, de sorte que $n = 10d + u$. Comme le cas $u = 0$ se résume par le tableau évident ci-dessous, nous allons finir la preuve avec $d \neq 0$ et $u \neq 0$.

n	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
n^2	0	100	400	900	1600	2500	3600	4900	6400	8100

Nous avons les calculs suivants de niveau seconde.

$$\begin{aligned} n^2 &= (10d+u)^2 \\ &= 100d^2 + 20du + u^2 \end{aligned} \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Comme $u \in [\![1\,;9]\!]$, nous savons que $u \geq 1$ et $u^2 \geq 1$. Nous avons des minorations similaires pour d . Ceci nous donne les implications logiques suivantes.

$$\begin{aligned} & d \in [\![1\,;9]\!] \quad \text{et} \quad u \in [\![1\,;9]\!] \\ \overset{\text{donc}}{\Longrightarrow} \; & d^2 \geq 1 \quad \text{et} \quad du \geq 1 \\ \overset{\text{donc}}{\Longrightarrow} \; & 100d^2 \geq 100 \quad \text{et} \quad 20du \geq 20 \end{aligned}$$

Le chiffre des unités de $n^2 = 100d^2 + 20du + u^2$ est donc celui de u^2 .

Passons à d le chiffre des dizaines. Considérerons par exemple $78^2 = 6084$. Le précédent tableau nous donne l'encadrement $4900 < 6084 < 6400$, c'est-à-dire $70^2 < 6084 < 80^2$. Par stricte croissance de la fonction carré, nous constatons que le nombre de centaines nous permet de trouver la valeur de d sans aucune ambiguïté.

Donc, si nous savons juste que $n^2 = 6084$ avec $n \in [\![0\,;99]\!]$, nous pouvons affirmer que $n = 7\bullet$, puis, en nous aidant du premier tableau de cette preuve, comme 4 est le chiffre des unités de 6084 , nous devinons que $n = 72$ ou $n = 78$. Il nous reste à faire le bon choix. L'idée est simple : il suffit de calculer 75^2 , ce qui est facile à faire via l'astuce suivante que nous admettrons.

- On calcule $7 \times 8 = 56$ où $8 = 7 + 1$.
- 75^2 s'obtient en collant 25 à la suite de 56 , d'où $75^2 = 5625$.

Finalement comme $72^2 < 75^2 < 6084$, le seul cas possible est de choisir $n = 78$ pour obtenir $n^2 = 6084$.

Vérifions que nous avons compris en devinant la valeur de $n \in [\![0\,;99]\!]$ telle que $n^2 = 8649$.

- Le nombre de centaines de 8649 est 86 qui est compris entre $81 = 9^2$ et $100 = 10^2$, d'où $n = 9\bullet$.
- 8649 se finit par 9 donc nous devons choisir entre $n = 93$ et $n = 97$.
- $95^2 = 9025$ via $9 \times 10 = 90$.
- Comme $8649 < 95^2$, forcément $n = 93$.

$\square$

2. Racine cubique d'un petit naturel

Fait 2.1. *Étant donné connue la valeur de n^3 où $n \in [\![0\,;99]\!]$, il est humainement très facile de retrouver n .*

Démonstration. Commençons par les cubes des petits naturels, c'est-à-dire ceux dans $[\![0\,;9]\!]$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^3	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Il semble évident que la connaissance du tableau précédent soit un passage obligé. Intéressons-nous maintenant aux chiffres des unités des cubes précédents.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dernier chiffre de n^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9

Nous constatons quelque chose de fort sympathique : le chiffre des unités de n^3 est celui de n , exception faite pour les deux associations suivantes $2 \longleftrightarrow 8$ et $3 \longleftrightarrow 7$. Il n'y a aucune répétition dans la deuxième ligne du tableau !

Nous voilà prêt à analyser le cas restant de $n \in [\![10\,;99]\!]$ en notant d le chiffre des unités de n , et u celui des unités, de sorte que $n = 10d + u$. Comme le cas $u = 0$ se résume par le tableau évident ci-dessous, nous allons finir la preuve avec $d \neq 0$ et $u \neq 0$.

n	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
n^3	0	1000	8000	27 000	64 000	125 000	216 000	343 000	512 000	729 000

Nous avons les calculs suivants rédigés pour un niveau seconde.

$$
\begin{aligned}
n^3 &= (10d+u)^3 \\
&= (10d+u)\,(10d+u)^2 && P^3 = P \times P \times P = P \times P^2 \\
&= (\,10d + u\,)\,(100d^2+20du+u^2) && (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \\
&= 1000d^3+200d^2u+10du^2 + 100d^2u+20du^2+u^3 \\
&= 1000d^3+300d^2u+30du^2+u^3
\end{aligned}
$$

Comme $u \in [\![1\,;9]\!]$, nous savons que $u \geq 1$, $u^2 \geq 1$ et $u^3 \geq 1$. Nous avons des minorations similaires pour d . Ceci nous donne les implications logiques suivantes.

$$
\begin{aligned}
& d \in [\![1\,;9]\!] \quad \text{et} \quad u \in [\![1\,;9]\!] \\
\overset{\text{donc}}{\Longrightarrow}\ & d^3 \geq 1 \quad , \quad d^2u \geq 1 \quad \text{et} \quad du^2 \geq 1 \\
\overset{\text{donc}}{\Longrightarrow}\ & 1000d^3 \geq 1000 \quad , \quad 300d^2u \geq 300 \quad \text{et} \quad 30du^2 \geq 30
\end{aligned}
$$

Le chiffre des unités de $n^3 = 1000d^3 + 300d^2u + 30du^2 + u^3$ est donc celui de u^3 , un chiffre facile à retrouver grâce au deuxième tableau au début de cette preuve.

Il reste à trouver d le chiffre des dizaines. Ceci est bien plus simple. Pour comprendre l'astuce, nous allons considérer $78^3 = 474\,552$. Le précédent tableau nous donne l'encadrement $343\,000 < 474\,552 < 512\,000$, c'est-à-dire $70^3 < 474\,552 < 80^3$. Par stricte croissance de la fonction cube, nous constatons que le nombre de cent-milliers nous permet de trouver la valeur de d sans aucune ambiguïté.

Vérifions que nous avons compris en devinant la valeur de $n \in [\![0\,;99]\!]$ telle que $n^3 = 300\,763$.

- $300\,763$ se finit par 3 donc, via $3 \longleftrightarrow 7$, nous savons que $n = \bullet 7$.
- Le nombre de cent-milliers de $300\,763$ est 300 qui est compris entre $216 = 6^3$ et $343 = 7^3$, d'où $n = 67$.

$\square$

3. AFFAIRE À SUIVRE...