

BROUILLON – NEWTON, BERNOULLI, LEIBNIZ, FIBONACCI ET BELL

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



TABLE DES MATIÈRES

1.	Des identités bien connues	2
2.	Notations différenciées	2
3.	La loi binomiale révèle...	2
3.1.	De l'utilité des arbres	2
3.2.	Directement vers le binôme de Newton	3
3.3.	Leibniz sans effort	4
3.4.	Une petite astuce pour Fibonacci	4
3.5.	Coefficients factoriels et binomiaux	5
3.6.	Bell sonne la fin du jeu	5
3.7.	Généraliser aux coefficients multimoniaux	7
4.	La formule du binôme de Newton implique...	8
4.1.	Un classique des identités algébriques	8
4.2.	La loi binomiale est algébrique	8
4.3.	Leibniz, le retour	8
4.4.	Fibonacci via Newton	9
4.5.	Bell en écho de Fibonacci	10
4.6.	Coefficients factoriels et binomiaux	11
5.	Sources utilisées	13

1. DES IDENTITÉS BIEN CONNUES

Les formules suivantes intriguent par leur ressemblance. Bien qu'elles appartiennent à des domaines distincts, leur similitude n'est pas le fruit du hasard. À travers deux approches différentes, l'une discrète, et l'autre algébrique, nous révélerons les liens combinatoires unissant ces divers objets.

- **Formule du binôme de Newton** : $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.
- **Formule de dérivation de Leibniz** : $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.
- **Loi binomiale** : $P(X = j) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_{jk}$,¹ même s'il est d'usage de juste écrire $P(X = j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$.
- **Une identité portant sur la suite de Fibonacci** : $F_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k$.
- **Une formule similaire pour les coefficients binomiaux** : $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k}$.
- **Une équation liant les nombres de Bell** : $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$ où B_i est le nombre de façons de partitionner un ensemble de i éléments.²

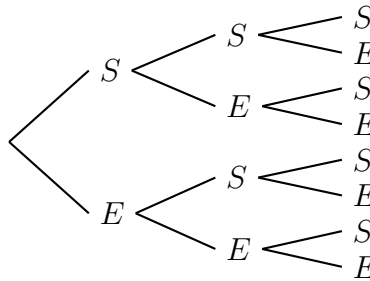
2. NOTATIONS DIFFÉRENCIÉES

Nous utiliserons les notations suivantes sans jamais employer directement l'égalité classique $\binom{n}{p} = \mathcal{C}_p^n = \mathcal{C}(p, n)$, et nous emploierons un vocabulaire non standard propre à ce document.

- **Coefficients binomiaux** : $\binom{n}{k}$ désigne le nombre de chemins avec exactement k succès dans un arbre binaire complet de profondeur n : voir la section 3.1.
- **Coefficients factoriels** : \mathcal{C}_k^n est définie sur \mathbb{N}^2 par $\mathcal{C}_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ si $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, et $\mathcal{C}_k^n = 0$ dans les autres cas.
- **Coefficients combinatoires** : $\mathcal{C}(k, n)$ désigne le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble de cardinal n .

3. LA LOI BINOMIALE RÉVÈLE...

3.1. De l'utilité des arbres. Lorsque l'on présente la loi binomiale, il est courant d'utiliser un arbre de probabilité comme le suivant où S désigne un succès et E un échec, un succès ayant une probabilité p de se réaliser (ici nous avons 3 niveaux de profondeur).



sinon c'est q qui est appliqué. Ceci nous donne des calculs intermédiaires à chaque bifurcation comme montré ci-dessous à droite.

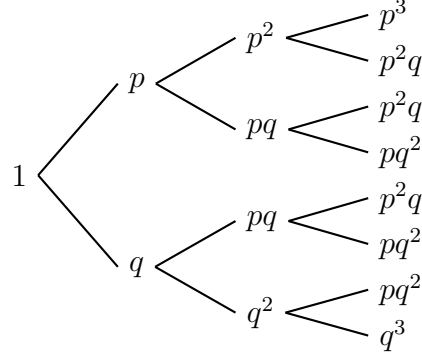
$$x \begin{cases} px \\ qx \end{cases}$$

Arbre de calcul.

$$p^a q^b \begin{cases} p^{a+1} q^b \\ p^a q^{b+1} \end{cases}$$

Un calcul intermédiaire.

Considérons maintenant un arbre binaire de niveau de profondeur n . En partant de la racine, à gauche, avec la valeur 1, l'application de la règle de calcul donne $P(X = j) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_{jk}$. Voici un exemple de calcul avec $n = 3$.



Un exemple de calcul.

La méthode que nous venons de présenter est généralisable à d'autres contextes comme nous allons le constater dans la suite de ce document.

3.2. Directement vers le binôme de Newton. Pour développer $(x+y)^n$, la brique de base est la distribution indiquée dans l'arbre de calcul ci-dessous à gauche, ceci nous donnant des calculs intermédiaires comme celui montré ci-dessous à droite.

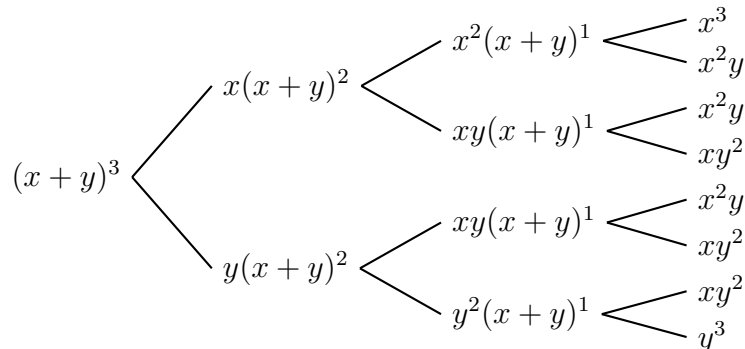
$$(x+y)f(x;y) \begin{cases} xf(x;y) \\ yf(x;y) \end{cases}$$

Arbre de calcul.

$$x^a y^b (x+y)^k \begin{cases} x^{a+1} y^b (x+y)^{k-1} \\ x^a y^{b+1} (x+y)^{k-1} \end{cases}$$

Un calcul intermédiaire.

En considérant un arbre binaire de niveau de profondeur n , et avec pour racine l'expression $(x+y)^n$, l'application répétée de la règle de calcul donne la formule du binôme de Newton $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. Voici un exemple de calcul avec $n = 3$.



Un exemple de calcul.

3.3. Leibniz sans effort. Pour la formule de dérivation de Leibniz, comme la dérivation est une fonctionnelle linéaire, la brique de base est la classique formule de dérivation d'un produit, voir ci-dessous à gauche. Les calculs intermédiaires sont de la forme indiquée ci-dessous à droite.

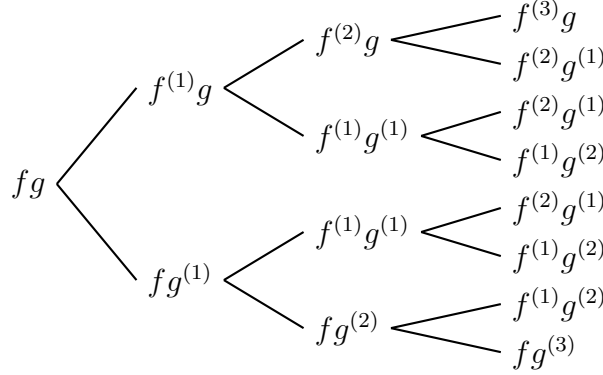
$$uv \begin{array}{l} \swarrow u'v \\ \searrow uv' \end{array}$$

Arbre de calcul.

$$f^{(a)}g^{(b)} \begin{array}{l} \swarrow f^{(a+1)}g^{(b)} \\ \searrow f^{(a)}g^{(b+1)} \end{array}$$

Un calcul intermédiaire.

En considérant un arbre binaire de niveau de profondeur n , et avec pour racine la fonction produit fg , l'application répétée de la règle de calcul donne la formule de dérivation de Leibniz $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n-k)}$. Voici un exemple de calcul avec $n = 3$.



Un exemple de calcul.

3.4. Une petite astuce pour Fibonacci. Pour la suite de Fibonacci, la règle de calcul est évidemment donnée par la relation de récurrence $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$, et pour les calculs intermédiaires, nous faisons apparaître ce qui a été soustrait à l'indice.

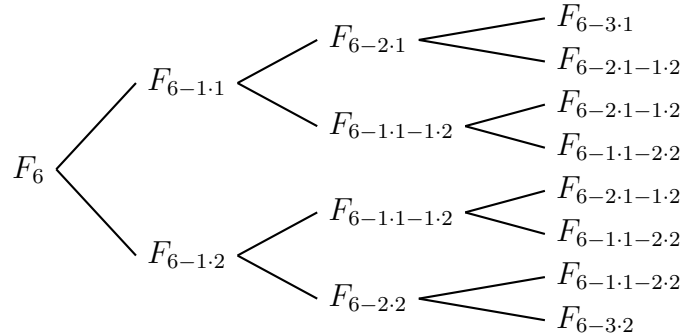
$$F_i \begin{array}{l} \swarrow F_{i-1} \\ \searrow F_{i-2} \end{array}$$

Arbre de calcul.

$$F_{i-a-1-b-2} \begin{array}{l} \swarrow F_{i-(a+1)-1-b-2} \\ \searrow F_{i-a-1-(b+1)-2} \end{array}$$

Un calcul intermédiaire.

Pour valider $F_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k$, nous considérons un arbre binaire de niveau de profondeur n , et avec pour racine le terme F_{2n} . Ainsi, pour $n = 3$, nous obtenons l'arbre suivant.



Un exemple de calcul.

Aux feuilles de l'arbre, tout à droite, nous avons les termes $F_{2n-k-1-(n-k)-2} = F_k$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, donc $F_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k$ est validée.

Remarque 1. Plus généralement, nous avons $F_{m+2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{m+k}$ par simple décalage de tous les indices, puisque cette opération est compatible avec notre méthode de construction.

3.5. Coefficients factoriels et binomiaux. Nous allons démontrer que $\mathcal{C}_p^n = \binom{n}{p}$ si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Pour cela, notons que $\mathcal{C}_p^n = \mathcal{C}_p^{n-1} + \mathcal{C}_{p-1}^{n-1}$: c'est facile à vérifier pour les valeurs non nulles de \mathcal{C}_p^n , et ensuite à généraliser aux cas restants. Ceci nous amène à considérer la situation suivante.

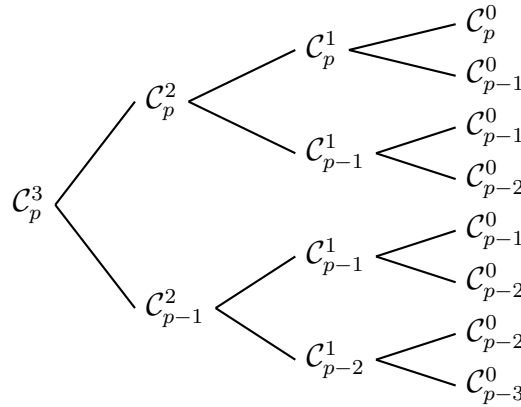
$$\mathcal{C}_p^n \begin{cases} \mathcal{C}_p^{n-1} \\ \mathcal{C}_{p-1}^{n-1} \end{cases}$$

Arbre de calcul.

$$\mathcal{C}_{p-b}^{n-a} \begin{cases} \mathcal{C}_{p-b}^{n-(a+1)} \\ \mathcal{C}_{p-(b+1)}^{n-(a+1)} \end{cases}$$

Un calcul intermédiaire.

Nous considérons alors l'arbre binaire de niveau de profondeur n avec pour racine le terme \mathcal{C}_p^n doublement indexé par n et k . Ainsi, pour $n = 3$ et $p \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, nous obtenons l'arbre suivant où les feuilles sont toutes du type \mathcal{C}_p^0 .



Un exemple de calcul.

Nous obtenons donc $\mathcal{C}_p^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{C}_{p-k}^0$. Or, pour $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, la somme de droite se réduit à $\binom{n}{p} \mathcal{C}_0^0$, d'où $\mathcal{C}_p^n = \binom{n}{p}$ comme annoncé. Dès lors, l'identité $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$, soit de façon équivalente $\mathcal{C}_n^{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{C}_{n-k}^n$, se démontre en considérant un arbre de racine \mathcal{C}_n^{2n} qui donne $\mathcal{C}_n^{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{C}_{n-k}^{2n-n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{C}_{n-k}^n$ comme souhaité.

Remarque 2. Il est immédiat de voir que $\mathcal{C}(p, n) = \mathcal{C}(p, n-1) + \mathcal{C}(p-1, n-1)$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$.³ Comme pour \mathcal{C}_p^n , nous avons alors $\mathcal{C}(p, n) = \binom{n}{p}$ si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Une fois ceci démontré, il est très facile de deviner que $\mathcal{C}(n, 2n) = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mathcal{C}(n-k, n)$ en considérant deux sous-ensembles particuliers disjoints de cardinal n , choisis et fixés arbitrairement.

Remarque 3. L'identité $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$ est un cas particulier de la formule de Van der Monde, à savoir de $\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}$ pour $(m; n) \in \mathbb{N}^2$ et $p \in \llbracket 0; \min(n; m) \rrbracket$. Comme à la fin de la remarque précédente, découvrir $\mathcal{C}(p, m+n) = \sum_{k=0}^p \mathcal{C}(k, m) \mathcal{C}(p-k, n)$ est aisé.

3.6. Bell sonne la fin du jeu. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, notons B_i le nombre de façons de partitionner un ensemble de i éléments, et posons $B_0 = 1$ par convention. Pour calculer récursivement B_i , nous allons juste détailler des idées présentes dans l'article « *The largest singletons of set partitions* » de Yidong Sun et Xiaojuan Wu.⁴

3. Il suffit de distinguer les sous-ensembles contenant un élément particulier e , choisi et fixé arbitrairement, de ceux ne le contenant pas.

4. Voir <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2010.10.011> sur le site ScienceDirect.

- Pour $(n; p) \in \mathbb{N}^2$, notons \mathcal{B}_p^n le nombre de partitions de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ contenant le singleton $\{p+1\}$, et aucun singleton $\{k\}$ tel que $k > p+1$. De façon abusive, dans ce type de situation, nous dirons que $\{p+1\}$ est le plus grand singleton.⁵
- Notons que $\mathcal{B}_n^n = B_n$. En effet, l'existence du singleton maximal $\{n+1\}$ dans une partition de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ permet, en ignorant $\{n+1\}$, d'obtenir une partition de $\llbracket 1; n \rrbracket$. Cette construction est réversible, donc bijective.
- Le cas intéressant de \mathcal{B}_0^n est abordé dans la remarque 4 plus bas (nous n'aurons pas besoin de \mathcal{B}_0^n pour notre introduction aux nombres de Bell).
- Que pouvons-nous dire de \mathcal{B}_1^n lorsque $n \in \mathbb{N}_{>2}$? Considérons une partition π de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ ayant $\{2\}$ comme singleton maximal. Deux cas se présentent à nous.
 - (1) **Cas 1 : $\{1\}$ fait partie de π .** En ignorant 1 et 2, et en remplaçant chaque naturel $k \in \llbracket 3; n+1 \rrbracket$ par $k-2 \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, nous obtenons une partition π' de $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$ sans aucun singleton.
 - (2) **Cas 2 : $\{1\}$ est absent de π .** Dans ce cas, $\{2\}$ est l'unique singleton de π . En ignorant 2, en transformant l'ensemble $\{1; k_1; \dots; k_s\}$ de π en $\{k_1\} \sqcup \dots \sqcup \{k_s\}$, et en remplaçant chaque naturel $k \in \llbracket 3; n+1 \rrbracket$ par $k-2 \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, nous obtenons une partition π' de $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$ avec pour singletons $\{k_1\}, \dots, \{k_s\}$ (on peut voir 1 comme un marqueur de singletons).

Les procédés ci-dessus étant réversibles, par bijection, nous obtenons : $\mathcal{B}_1^n = B_{n-1}$ lorsque $n \in \mathbb{N}_{>2}$. Comme $\mathcal{B}_1^1 = 1$ et $B_0 = 1$, l'identité est valable sur \mathbb{N}^* .

- Plus généralement, considérons une partition π de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ ayant $\{p+1\}$ comme singleton maximal. Deux cas se présentent à nous.
 - (1) **Cas 1 : $\{p\}$ fait partie de π .** En ignorant $\{p+1\}$, et en remplaçant chaque naturel $k \in \llbracket p+2; n+1 \rrbracket$ par $k-1 \in \llbracket p+1; n \rrbracket$, nous obtenons une partition π' de $\llbracket 1; n \rrbracket$ ayant $\{p\}$ comme singleton maximal.
 - (2) **Cas 2 : $\{p\}$ est absent de π .** En échangeant p et $(p+1)$, nous obtenons une partition π' de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ ayant $\{p\}$ comme singleton maximal.

Les procédés ci-dessus étant réversibles, par bijection, nous avons : $\mathcal{B}_p^n = \mathcal{B}_{p-1}^{n-1} + \mathcal{B}_{p-1}^n$.

En résumé, $B_n = \mathcal{B}_n^n = \mathcal{B}_1^{n+1}$ avec $\mathcal{B}_p^n = \mathcal{B}_{p-1}^n + \mathcal{B}_{p-1}^{n-1}$ et $\mathcal{B}_1^1 = 1$. Comme les relations de récurrence vérifiées par (\mathcal{B}_p^n) ressemblent à celles de la suite (C_p^n) , il devient évident de procéder comme suit.

$$\mathcal{B}_p^n \begin{cases} \mathcal{B}_{p-1}^n \\ \mathcal{B}_{p-1}^{n-1} \end{cases}$$

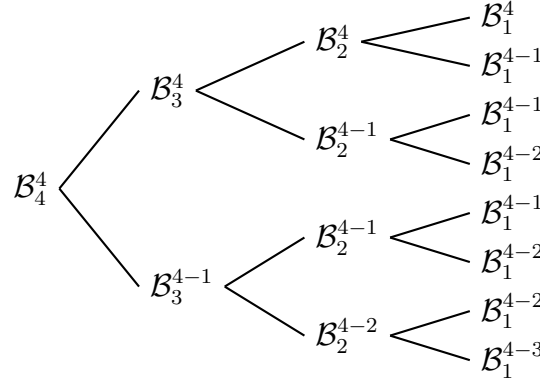
Arbre de calcul.

$$\mathcal{B}_{k-b}^{n-a} \begin{cases} \mathcal{B}_{k-(b+1)}^{n-a} \\ \mathcal{B}_{k-(b+1)}^{n-(a+1)} \end{cases}$$

Un calcul intermédiaire.

Prenons $\mathcal{B}_{n+1}^{n+1} = B_{n+1}$ pour racine de l'arbre binaire comme dans l'exemple suivant où $n = 3$.

5. L'idée consiste à s'appuyer sur l'élément le plus simple qu'une partition puisse contenir : le singleton. Pour restreindre le nombre de cas à analyser, on choisit, arbitrairement, de se focaliser sur les singletons maximaux.

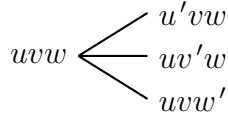


Un exemple de calcul.

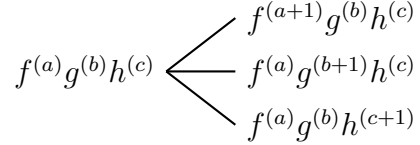
Nous arrivons à $\mathcal{B}_{n+1}^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{B}_1^{n+1-k}$ qui équivaut à $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}$. Comme $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, nous avons bien $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$.

Remarque 4. \mathcal{B}_0^n est le nombre de partitions de $\llbracket 1; n \rrbracket$ sans singleton. En effet, si $\{1\}$ est le singleton maximal d'une partition de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$, alors en ignorant $\{1\}$, et en remplaçant chaque naturel $k \in \llbracket 2; n+1 \rrbracket$ par $k-1 \in \llbracket 1; n \rrbracket$, nous obtenons une partition de $\llbracket 1; n \rrbracket$ sans singleton. Cette construction est réversible, donc bijective.

3.7. Généraliser aux coefficients multimoniaux. La méthode peut s'adapter aux cas d'un arbre n -aire. Par exemple, ce qui suit nous donne la formule de Liebniz pour trois fonctions : $(fgh)^{(n)} = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \binom{n}{k_1 k_2 k_3} f^{(k_1)} g^{(k_2)} h^{(k_3)}$ où $\binom{n}{k_1 k_2 k_3}$ compte le nombre de chemins avec k_1 déplacements vers le haut, k_2 déplacements vers le milieu, et k_3 déplacements vers le bas.

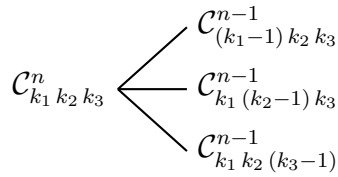


Arbre de calcul.

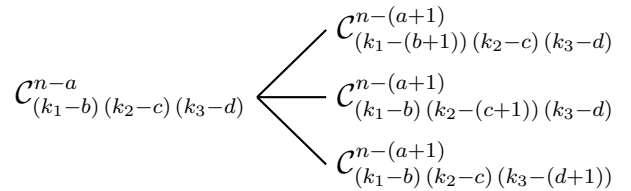


Un calcul intermédiaire.

Notant $\mathcal{C}_{k_1 k_2 k_3}^n = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}$ où $k_1 + k_2 + k_3 = n$, nous avons $\binom{n}{k_1 k_2 k_3} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}$ via ce qui suit.

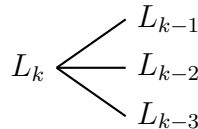


Arbre de calcul.

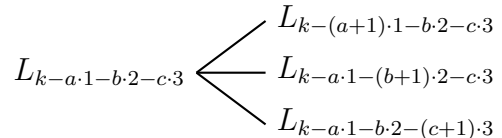


Un calcul intermédiaire.

Par contre, si la suite L est telle que $L_i = L_{i-1} + L_{i-2} + L_{i-3}$, ce qui suit ne sera pas aussi pertinent que ce que nous avons obtenu pour la suite de Fibonacci : le problème ici est qu'aboutir à $L_{3n-k_1-1-k_2-2-k_3-3} = L_{3n-k_1-2k_2-3(n-k_1-k_2)} = L_{2k_1-k_2}$ est peu intéressant.



Arbre de calcul.



Un calcul intermédiaire.

4. LA FORMULE DU BINÔME DE NEWTON IMPLIQUE...

4.1. Un classique des identités algébriques. Dans cette section, nous changeons de point de vue : nous allons partir du fait très classique suivant pour donner un éclairage différent sur les identités exhibées dans la section 1.

Fait 5. Soit \mathbb{A} un anneau, forcément unitaire,⁶ qui est commutatif. Dans l'anneau des polynômes à deux variables $\mathbb{A}[X, Y]$, nous avons : $\forall n \in \mathbb{N}, (X + Y)^n = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) X^k Y^{n-k}$. Ceci est la formule générique du binôme de Newton.

Démonstration. Il suffit d'écrire $(X + Y)^n = \prod_{k=1}^n (X + Y)_k$ avec des indices étiquetant les parenthèses dont les positions sont fixées dans le produit. En distribuant parenthèse par parenthèse de gauche à droite, le nombre de $X^k Y^{n-k}$ obtenus correspond au nombre de choix de k parenthèses, pour X , parmi les n disponibles, ce qui donne $\mathbb{C}(k, n)$ possibilités. \square

Dans les applications à venir, nous allons nous appuyer sur la formule suivante appliquée dans différents anneaux bien choisis.

Fait 6. Soit \mathbb{A} un anneau commutatif. $\forall (a, b) \in \mathbb{A}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) a^k b^{n-k}$.

Démonstration. Il suffit d'évaluer en (a, b) la formule générique du binôme de Newton. \square

4.2. La loi binomiale est algébrique. XXXX

4.3. Leibniz, le retour. Notre objectif est d'obtenir $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$. Comme nous souhaitons dériver autant de fois que nécessaire, cette opération de dérivation étant linéaire, et comme de plus nous considérons deux fonctions, il est naturel d'introduire les objets suivants.

- $\pi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x)g(y) \in \mathbb{R}$. Ceci permet de distinguer les fonctions f et g .
- $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions infiniment dérivables de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .⁷
- $\mathbb{A} = \text{End}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$ est l'ensemble des endomorphismes linéaires de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ muni de l'addition $+$ point par point, et de la composition \circ comme produit.
- $\frac{\partial}{\partial x} \in \mathbb{A}$ et $\frac{\partial}{\partial y} \in \mathbb{A}$ sont les dérivations partielles relativement aux première et deuxième coordonnées respectivement.

Pour utiliser le fait 6, nous devons avoir $\frac{\partial}{\partial x} \circ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \circ \frac{\partial}{\partial x}$. Le théorème de Schwarz nous dit que c'est bien le cas sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Nous obtenons alors $(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})^n = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) \frac{\partial^k}{\partial x^k} \circ \frac{\partial^{n-k}}{\partial y^{n-k}}$ selon la formule du binôme de Newton. Il nous reste à revenir dans le monde des fonctions à une seule variable. Pour ce faire, notons $P \in \mathbb{A}$ qui à $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ associe $P(h)$ définie sur \mathbb{R}^2 par $P(h)(x, y) = h(x, y)$. Nous avons la propriété de commutativité essentielle suivante.

- $(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}) \circ P(\pi)(x, y) = (\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})(f(x)g(x))$
 $= (fg)'(x)$
 $= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $P \circ (\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})(\pi)(x, y) = P \circ (\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})(f(x)g(y))$
 $= P(f'(x)g(y) + f(x)g'(y))$
 $= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

6. Il fut un temps où un anneau n'avait pas forcément un élément neutre pour le produit.

7. Si besoin, il est possible de modifier cet ensemble tant que cela n'enfreint pas le théorème de Schwarz qui va être essentiel pour la suite.

La conclusion se fait alors via les calculs ci-dessous.

$$\begin{aligned}
& (fg)^{(n)}(x) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^n (f(x)g(y)) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \circ P(\pi)(x, y) \quad \left. \begin{array}{l} \text{P et } \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \text{ appliquées à } \pi \text{ commutent.} \\ \text{↙} \end{array} \right. \\
&= P \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^n (\pi)(x, y) \\
&= P \circ \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) \frac{\partial^k}{\partial x^k} \circ \frac{\partial^{n-k}}{\partial y^{n-k}} \right) (f(x)g(y)) \\
&= P \circ \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) f^k(x) g^{n-k}(y) \right) \\
&= \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) f^k(x) g^{n-k}(x)
\end{aligned}$$

4.4. Fibonacci via Newton. Notre objectif est d'obtenir $F_{m+2n} = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) F_{m+k}$ où la suite de Fibonacci F vérifie la relation de récurrence $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$. Comme pour l'identité de Leibniz, nous allons raisonner en terme d'opérateurs linéaires via les ingrédients naturels suivants.

- $\ell(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des suites réelles indexées sur \mathbb{Z} .⁸
- $\mathbb{A} = \text{End}(\ell(\mathbb{Z}, \mathbb{R}))$ est l'ensemble des endomorphismes linéaires de $\ell(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ muni de l'addition $+$ point par point, et de la composition \circ comme produit.
- $\sigma_k \in \mathbb{A}$ désigne pour $k \in \mathbb{Z}$ un opérateur de décalage d'indice qui à la suite $(u_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ associe la suite $(u_{m+k})_{m \in \mathbb{Z}}$.⁹

Prolongeons F sur \mathbb{Z}_- en posant $F_i = 0$, de sorte que $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ reste valable sur \mathbb{Z} , et se réécrit $\sigma_2(F) = \sigma_1(F) + F$. Dès lors, la conclusion se fait comme suit sans souci.

$$\begin{aligned}
& (F_{m+2n})_{m \in \mathbb{Z}} \\
&= \sigma_2^n(F) \\
&= (\sigma_1 + \text{id})^n(F) \quad \left. \begin{array}{l} \text{id est l'application identité sur } \ell(\mathbb{Z}, \mathbb{R}). \\ \text{↙} \end{array} \right. \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) \sigma_1^k \circ \text{id}^{n-k} \right) (F) \quad \left. \begin{array}{l} \text{↙} \\ \text{\sigma_1 et id commutent.} \end{array} \right. \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) \sigma_k \right) (F) \\
&= \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) \sigma_k(F) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) F_{m+k} \right)_{m \in \mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

Remarque 7. Un classique de la combinatoire, la formule d'inversion de Pascal,¹⁰ nous dit que si deux suites a et b vérifient $b_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) a_k$, alors $a_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} b_k$. En choisissant $a_n = F_n$ et $b_n = F_{2n}$, nous obtenons $F_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} F_{2k}$. Nous allons

8. Si besoin, \mathbb{R} peut être remplacé par un anneau commutatif de son choix.

9. En considérant $\ell(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, nous aurions eu un problème ici.

10. Il existe différentes démonstrations à la fois éclairantes et élégantes de ce résultat que l'on trouve aisément sur internet.

essayer de retrouver ce résultat autrement. Une première idée est d'utiliser $F = \sigma_2(F) - \sigma_1(F)$ pour conduire les calculs suivants.

$$\begin{aligned}
& (F_m)_{m \in \mathbb{Z}} \\
&= (\sigma_2 - \sigma_1)^n(F) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} \sigma_2^k \circ \sigma_1^{n-k} \right) (F) \quad \left. \vphantom{\sum_{k=0}^n} \right\} \sigma_1 \text{ et } \sigma_2 \text{ commutent.} \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} \sigma_{n+k} \right) (F) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} F_{m+n+k} \right)_{m \in \mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

Via $m = n$, nous obtenons sans effort $F_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} F_{2n+k}$. C'est une jolie formule, mais ce n'est pas l'inversion souhaitée. Partons plutôt de $\sigma_1(F) = \sigma_2(F) - F$ pour effectuer les manipulations ci-dessous.

$$\begin{aligned}
& (F_{m+n})_{m \in \mathbb{Z}} \\
&= (\sigma_1)^n(F) \\
&= (\sigma_2 - \text{id})^n(F) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} \sigma_{2k} \right) (F) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} F_{m+2k} \right)_{m \in \mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

Le choix $m = 0$ fournit $F_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} F_{2k}$ qui correspond à l'utilisation de la formule d'inversion de Pascal. N'est-ce pas joli ? Dans ce genre de situation, nous ne pouvons que tirer notre révérence devant la beauté des mathématiques.

4.5. Bell en écho de Fibonacci. Notre objectif est d'obtenir $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) B_k$, où $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne la suite des nombres de Bell. Indépendamment de la technique spécifique à la section 3, nous savons que ceci équivaut à démontrer que $\mathcal{B}_{n+1}^{n+1} = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) \mathcal{B}_1^{k+1}$, où $\mathcal{B}_n^n = \mathcal{B}_1^{n+1} = B_n$, $\mathcal{B}_p^n = \mathcal{B}_{p-1}^n + \mathcal{B}_{p-1}^{n-1}$ et $\mathcal{B}_1^1 = 1$, avec \mathcal{B} une suite doublement indexée sur \mathbb{N}^2 . Inspiré par la suite de Fibonacci, nous introduisons les ingrédients suivants.

- $\ell(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des suites réelles doublement indexées sur \mathbb{Z}^2 .¹¹
- $\mathbb{A} = \text{End}(\ell(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R}))$ est l'ensemble des endomorphismes linéaires de $\ell(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R})$ muni de l'addition $+$ point par point, et de la composition \circ comme produit.
- $\mu_a^b \in \mathbb{A}$ désigne pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ un opérateur de décalage qui à la suite $(w_p^m)_{(p,m) \in \mathbb{Z}^2}$ associe la suite $(w_{p+a}^{m+b})_{(p,m) \in \mathbb{Z}^2}$.

Prolongeons \mathcal{B} sur $\mathbb{Z}^2 - \mathbb{N}^2$ en posant $\mathcal{B}_p^n = 0$, de sorte que $\mathcal{B}_p^n = \mathcal{B}_{p-1}^n + \mathcal{B}_{p-1}^{n-1}$ reste valable sur \mathbb{Z}^2 , et se réécrit $\mu_1^1(\mathcal{B}) = \mu_0^1(\mathcal{B}) + \mathcal{B}$. La formule du binôme de Newton nous donne ce qui suit.

11. Ici aussi, si besoin, \mathbb{R} peut être remplacé par un anneau commutatif de son choix.

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{B}_{p+n}^{m+n})_{(p,m) \in \mathbb{Z}^2} \\
&= (\mu_1^1)^n(\mathcal{B}) \\
&= (\mu_0^1 + \text{id})^n(\mathcal{B}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{id est l'application identité sur } \ell(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R}). \\ \mu_0^1 \text{ et id commutent.} \end{array} \right\} \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (\mu_0^1)^k \circ \text{id}^{n-k} \right)(\mathcal{B}) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mu_0^k \right)(\mathcal{B}) \\
&= \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mu_0^k(\mathcal{B}) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mathcal{B}_{p+k}^m \right)_{(p,m) \in \mathbb{Z}^2}
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de choisir $p = m = 1$.

Remarque 8. Comme pour la suite de Fibonacci, il est aisé de produire deux nouvelles formules de récurrence. Partant de $\mathcal{B} = \mu_1^1(\mathcal{B}) - \mu_0^1(\mathcal{B})$, nous menons les calculs ci-après.

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{B}_p^m)_{(p,m) \in \mathbb{Z}^2} \\
&= (\mu_1^1 - \mu_0^1)^n(\mathcal{B}) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (-1)^{n-k} \mu_k^n \right)(\mathcal{B}) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (-1)^{n-k} \mathcal{B}_{p+k}^{m+n} \right)_{(p,m) \in \mathbb{Z}^2}
\end{aligned}$$

Nous avons obtenu sans effort $\mathcal{B}_p^m = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (-1)^{n-k} \mathcal{B}_{p+k}^{m+n}$ qui nous donne par exemple $\mathcal{B}_0^n = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (-1)^{n-k} \mathcal{B}_k^{2n}$ via $(m, p) = (n, 0)$. Nous pouvons partir de $\mu_0^1(\mathcal{B}) = \mu_1^1(\mathcal{B}) - \mathcal{B}$ comme ci-dessous.

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{B}_p^{m+n})_{(p,m) \in \mathbb{Z}^2} \\
&= (\mu_0^1)^n(\mathcal{B}) \\
&= (\mu_1^1 - \text{id})^n(\mathcal{B}) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (-1)^{n-k} \mu_k^k \right)(\mathcal{B}) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (-1)^{n-k} \mathcal{B}_{p+k}^{m+k} \right)_{(p,m) \in \mathbb{Z}^2}
\end{aligned}$$

Cette fois, $\mathcal{B}_p^{m+n} = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (-1)^{n-k} \mathcal{B}_{p+k}^{m+k}$, nous donne $\mathcal{B}_0^n = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (-1)^{n-k} \mathcal{B}_k^k$ via $(m, p) = (0, 0)$, c'est-à-dire $\mathcal{B}_0^n = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (-1)^{n-k} B_k$.

Un cas intéressant d'utilisation de la formule précédente est celui pour lequel $(m, p) = (1, 1)$, car ceci fait apparaître $\mathcal{B}_1^{n+1} = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (-1)^{n-k} \mathcal{B}_{k+1}^{k+1}$, soit $B_n = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (-1)^{n-k} B_{k+1}$ qui est une application de la formule d'inversion de Pascal.

4.6. Coefficients factoriels et binomiaux. Nos objectifs ici sont $\binom{n}{p} = \mathcal{C}(p, n) = \mathcal{C}_p^n$, puis $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k}$. Pour les atteindre, nous allons commencer avec les coefficients factoriels qui vérifient $\mathcal{C}_0^0 = 1$, $\mathcal{C}_p^0 = 0$ si $p \neq 0$ et $\mathcal{C}_p^n = \mathcal{C}_p^{n-1} + \mathcal{C}_{p-1}^{n-1}$ sur \mathbb{Z}^2 . Reprenant les notations de la section précédente, la relation de récurrence se réécrit $\mu_1^1(\mathcal{C}) = \mu_1^0(\mathcal{C}) + \mathcal{C}$.¹² Nous aboutissons aux calculs suivants.

¹². Noter la ressemblance avec $\mu_1^1(\mathcal{C}) = \mu_1^0(\mathcal{C}) + \mathcal{C}$.

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{C}_{p+n}^{m+n})_{(p,m) \in \mathbb{Z}^2} \\
&= (\mu_1^1)^n(\mathcal{C}) \\
&= (\mu_1^0 + \text{id})^n(\mathcal{C}) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (\mu_1^0)^k \circ \text{id}^{n-k} \right)(\mathcal{C}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} \mu_1^0 \text{ et id commutent.} \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mu_k^0 \right)(\mathcal{C}) \\
&= \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mu_k^0(\mathcal{C}) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mathcal{C}_{p+k}^m \right)_{(p,m) \in \mathbb{Z}^2}
\end{aligned}$$

En choisissant $(p, m) = (0, n)$, nous obtenons $\mathcal{C}_n^{2n} = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mathcal{C}_k^n$. Justifions maintenant que $\mathcal{C}_p^n = \mathcal{C}(p, n)$. Pour ce faire, réécrivons $\mu_1^1(\mathcal{C}) = \mu_1^0(\mathcal{C}) + \mathcal{C}$ sous la forme $\mathcal{C} = \mu_0^{-1}(\mathcal{C}) + \mu_{-1}^{-1}(\mathcal{C})$ afin de mener les calculs suivants.

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{C}_p^m)_{(p,m) \in \mathbb{Z}^2} \\
&= \mathcal{C} \\
&= (\mu_0^{-1} + \mu_{-1}^{-1})^n(\mathcal{C}) \\
&= (\mu_{-1}^{-1} + \mu_0^{-1})^n(\mathcal{C}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Cette petite modification va permettre} \\ \text{d'arriver directement à notre but.} \end{array} \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (\mu_{-1}^{-1})^k \circ (\mu_0^{-1})^{n-k} \right)(\mathcal{C}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} \mu_0^{-1} \text{ et } \mu_{-1}^{-1} \text{ commutent.} \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mu_{-k}^{-k} \circ \mu_0^{-n+k} \right)(\mathcal{C}) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mu_{-k}^{-n} \right)(\mathcal{C}) \\
&= \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mu_{-k}^{-n}(\mathcal{C}) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mathcal{C}_{p-k}^{m-n} \right)_{(p,m) \in \mathbb{Z}^2}
\end{aligned}$$

En considérant $m = n$ et $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, nous obtenons $\mathcal{C}_p^n = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mathcal{C}_{p-k}^0 = \mathcal{C}(p, n)$. Ensuite, il est aisé d'obtenir $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ en raisonnant juste sur des arbres binaires. Nous pouvons donc reprendre ce qui précède pour obtenir $\binom{n}{p} = \mathcal{C}(p, n)$ via la formule du binôme de Newton. Finalement, $\binom{n}{p} = \mathcal{C}(p, n) = \mathcal{C}_p^n$ permet de réécrire $\mathcal{C}_n^{2n} = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mathcal{C}_k^n$ sous la forme $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k}$.

Remarque 9. En partant de $\mathcal{C} = \mu_1^1(\mathcal{C}) - \mu_1^0(\mathcal{C})$, via des calculs similaires à ceux menés pour la suite \mathcal{B} , nous arrivons à $\mathcal{C}_p^m = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (-1)^{n-k} \mathcal{C}_{p+n}^{m+k}$ qui fournit la triviale identité $1 = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{n}$ via $(m, p) = (0, 0)$.¹³ Quant au choix $\mu_1^0(\mathcal{C}) = \mu_1^1(\mathcal{C}) - \mathcal{C}$, il nous donne $\mathcal{C}_{p+n}^m = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (-1)^{n-k} \mathcal{C}_{p+k}^{m+k}$, puis, par exemple, l'identité non immédiate $1 = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$ via $(m, p) = (n, 0)$.

13. L'auteur craque, mais il assume son double zéro pointé.

5. SOURCES UTILISÉES

Voici les sources utilisées lors de la rédaction de ce document.

- « *The largest singletons of set partitions* » de Yidong Sun et Xiaojuan Wu, en ligne : <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2010.10.011> sur le site ScienceDirect.
- Les lignes sur l'utilisation de la formule du binôme de Newton pour celle de Leibniz et la loi binomiale ont été motivées par la lecture du post suivant qui restait consultable en ligne le 12 avril 2025 : <https://pierreallkenbernard.wordpress.com/2011/06/26/binome-de-newton-formule-de-leibniz-loi-binomiale>.