BROUILLON – CONSTRUCTION SIMPLE DU LOGARITHME ET DE L'EXPONENTIELLE

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts.

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons "Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International".

Table des matières

Date: 18 Avril 2025 - 21 Avril 2025.

Ce texte construit les fonctions ln, logarithme népérien, et exp, exponentielle, le plus simplement possible en utilisant juste des notions connues d'un lycéen scientifique en 2025.

1. Ingrédients utilisés

Dans ce document, nous supposons connues les notions de fonctions monotones, de dérivabilité, de continuité, et d'intégrale d'une fonction réelle continue. Dans les sous-sections suivantes, où $I \subseteq \mathbb{R}$ désignera toujours un intervalle, nous donnons des faits que nous utiliserons sans les redémontrer.

1.1. Une once d'analyse réelle.

Fait 1 (Théorème des gendarmes, ou du sandwich)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$, et $h : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions telles que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sur I, ainsi que $a \in I$. Nous avons l'implication logique suivante.*

$$\left[\, \exists \ell \in \mathbb{R} \textit{ tel que } \lim_{\substack{x \to a \\ x \in I}} f(x) = \ell, \textit{ et } \lim_{\substack{x \to a \\ x \in I}} h(x) = \ell \,\right] \implies \lim_{\substack{x \to a \\ x \in I}} g(x) = \ell$$

Fait 2 (TVI, ou théorème des valeurs intérmédiaires)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. L'ensemble $f[I] = \{f(x) \textit{ pour } x \in I\}$ est un intervalle ($f[I]$ est l'ensemble des images par f des réels appartenant à I).*

1.2. Un iota de calcul intégral.

Fait 3 (Sens d'intégration)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. $\forall (a\,;b) \in I^2$, nous avons : $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.*

Fait 4 (Relation de Chasles intégrale)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. $\forall (a\,;b\,;c) \in I^3$, nous avons : $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$.*

Fait 5 (Stricte positivité de l'intégrale)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue, et strictement positive. $\forall (a\,;b) \in I^2$ tel que $a < b$, nous avons : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.*

Fait 6 (Croissance de l'intégrale)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Si $\forall x \in I$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\forall (a\,;b) \in I^2$ tel que $a \leq b$, nous avons : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.*

2. Au commencement était le logarithme népérien

2.1. Définition intégrale.

Définition 7. *Le* « logarithme népérien » *est la fonction* ln *définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Notons que $\ln 1 = 0$.*

Fait 8. *La fonction* ln *est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Démonstration. Soit $(a\,;b) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $b > a$. Ce qui suit permet de conclure.

$$\begin{aligned}
\ln b - \ln a &= \int_1^b \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^a \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t && \textit{Voir le fait 3.} \\
&= \int_a^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^b \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t && \textit{Voir le fait 4.} \\
&= \int_a^b \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t && \textit{Voir le fait 5.} \\
&> 0
\end{aligned}$$

□

Fait 9. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln' x = \frac{1}{x}$. *En particulier, la représentation graphique $\mathcal{L}$ de la fonction* ln *n'admet aucune tangente horizontale.*

Démonstration. Seule l'identité $\ln' x = \frac{1}{x}$ demande à être justifiée. Bien que cela soit une instance du théorème fondamental de l'analyse, nous allons le démontrer à la main, car ici cela ne pose aucune difficulté.[1] Considérons donc le taux d'accroissement $T(h) = \frac{\ln(a+h)-\ln a}{h}$ où $a > 0$ est fixé, et $h \in \,]-a\,;a[\, - \{0\}$ variable. Commençons par le petit calcul suivant.

$$\begin{aligned} T(h) &= \frac{1}{h}\Big(\int_1^{a+h} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{a} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\Big) \\ &= \frac{1}{h}\int_a^{a+h} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Voir les faits 3 et 4.

Nous avons ensuite les implications logiques suivantes lorsque $h > 0$.

$$\begin{aligned} & \Big[x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^* \text{ est strictement décroissance}\Big] \\ \Longrightarrow\ & \forall x \in [a\,;a+h]\,, \frac{1}{a+h} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a} \\ \Longrightarrow\ & \int_a^{a+h} \frac{1}{a+h}\,\mathrm{d}t \leq \int_a^{a+h} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \int_a^{a+h} \frac{1}{a}\,\mathrm{d}t \\ \Longrightarrow\ & \frac{h}{a+h} \leq hT(h) \leq \frac{h}{a} \\ \Longrightarrow\ & \frac{1}{a+h} \leq T(h) \leq \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Voir le fait 6 ($a+h > a$, car $h > 0$).

$h > 0$

Via le théorème des gendarmes, voir le fait 1, nous obtenons : $\lim\limits_{h \to 0^+} T(h) = \frac{1}{a}$.

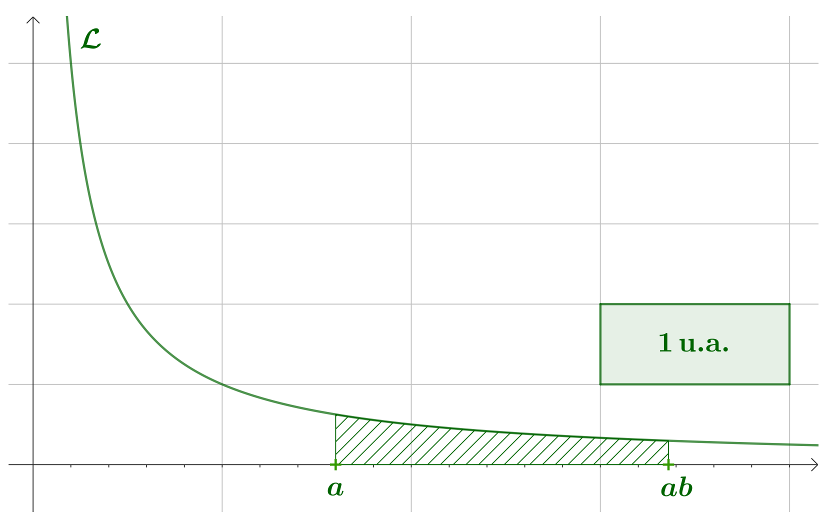
Lorsque $h < 0$, nous obtenons : $\dfrac{1}{a} \leq T(h) \leq \dfrac{1}{a+h}$, puis $\lim\limits_{h \to 0^-} T(h) = \frac{1}{a}$.

Finalement, $\lim\limits_{h \to 0} T(h) = \frac{1}{a}$, ce qui achève la démonstration. □

2.2. **Equation fonctionnelle.**

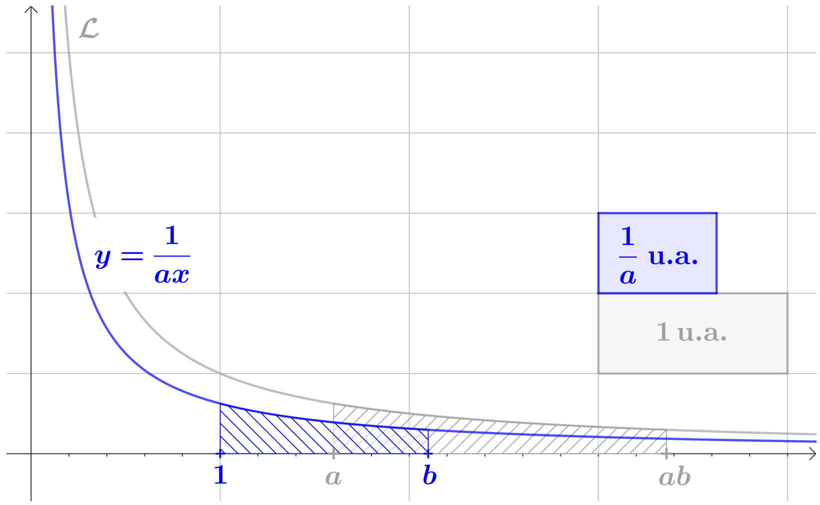
Fait 10. $\forall (a\,;b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Démonstration. Par définition de ln, nous avons $\ln(ab) = \ln a + \int_a^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ (voit le fait 4). Analysons $\mathcal{I}_a^{ab} = \int_a^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Pour cela, notons $\mathcal{L}$ la représentation graphique de ln.

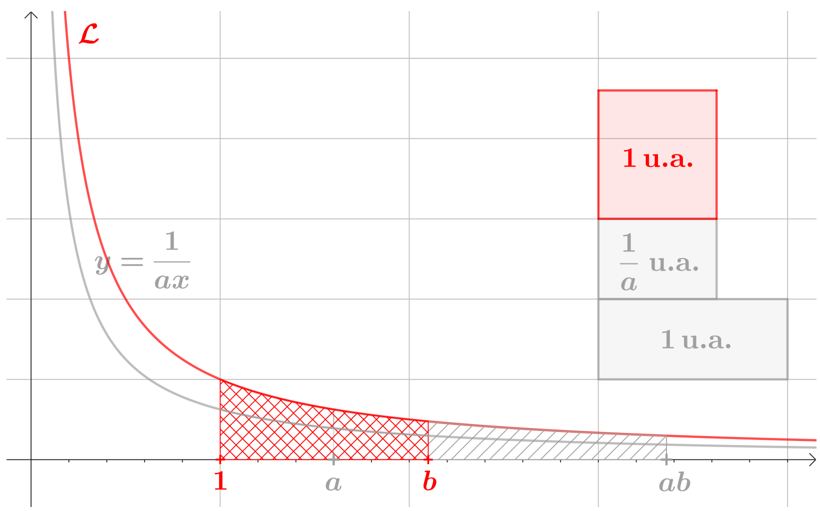


1. Ce qui suit s'adapte sans effeort à toute fonction monotone.

Une dilatation horizontale ϕ de coefficient $\frac{1}{a}$ transforme $M(x_M\,;y_M)$ en $M'\left(\frac{x_M}{a}\,;y_M\right)$. Appliquons ϕ à la surface associée à l'intégrale $\mathcal{I}_a^{ab}$, ainsi qu'à la fonction inverse [2] qui devient $f : x \mapsto \frac{1}{ax}$, puisque nous devons avoir $f\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{x}$. Il est important de noter qu'un rectangle d'une unité d'aire est transformé par ϕ en un rectangle de $\frac{1}{a}$ unité d'aire.



Une dilatation verticale ψ de coefficient a transforme $M(x_M\,;y_M)$ en $M'\big(x_M\,;ay_M\big)$. Appliquons ψ à la surface associée à l'intégrale $\int_1^b \frac{1}{at}\,\mathrm{d}t$, ainsi qu'à la fonction f qui devient la fonction inverse. Notons qu'un rectangle de $\frac{1}{a}$ unité d'aire est transformé par ψ en un rectangle d'une unité d'aire.



Nous venons de justifier que $\mathcal{I}_a^{ab} = \int_1^b \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, d'où $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ comme annoncé. □

Remarque 11 (Aux bourbakistes)**.** *Ce qui a été dit ci-dessus se rédige rigoureusement, sans aucun souci, via des sommes de Riemann, par exemple.* [3] *La démonstration suivante ne souffre d'aucun doute, mais la donner sans plus d'explication serait bien dommage (la première approche évite toute interprétation mystique de l'équation fonctionnelle* $\ln(ab) = \ln a + \ln b$*).*

Démonstration alternative Nous allons justifier que $\forall (a\,;b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ uniquement via l'analyse réelle. Comme les propriétés de la fonction ln nécessitent d'avoir une

2. Noter l'abus de langage consistant à ne pas rappeler que nous travaillons juste sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. N'oublions pas que nous disposons d'au moins trois jolies théories de l'intégration : celle de Riemann, celle de Lebesgues, et la merveilleuse théorie de Kurzweil et Henstock.

seule variable, il devient naturel de fixer $a \in \mathbb{R}_+^*$, puis de considérer la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(ax) - \ln a - \ln x$. La seule possibilité qui s'offre à nous est de dériver : $f'(x) = a \times \frac{1}{ax} - \frac{1}{x} = 0$. Or, une fonction de dérivée nulle sur un intervalle I est forcément constante sur I, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = f(1)$, soit $f(x) = 0$. Mission accomplie ! $\square$

2.3. **Variations.**

Fait 12. *La fonction* $\ln$ *admet le tableau de variations suivant.*

x	0		$+\infty$
$\ln x$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Démonstration. Grâce au fait fait 8, il nous reste juste à calculer les limites. $\square$

3. Puis vint l'exponentielle

3.1. **Inverser le logarithme népérien.**

Fait 13. $\forall q \in \mathbb{R}$, $\exists! p \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que* $\ln p = q$.

Démonstration. Il suffit de combiner les faits 12 et 2. $\square$

Définition 14. $\forall q \in \mathbb{R}$, *l'unique solution de* $\ln x = q$ *est notée* $\exp q$. *On définit ainsi sur* $\mathbb{R}$ *une fonction* exp *nommée* « exponentielle ».

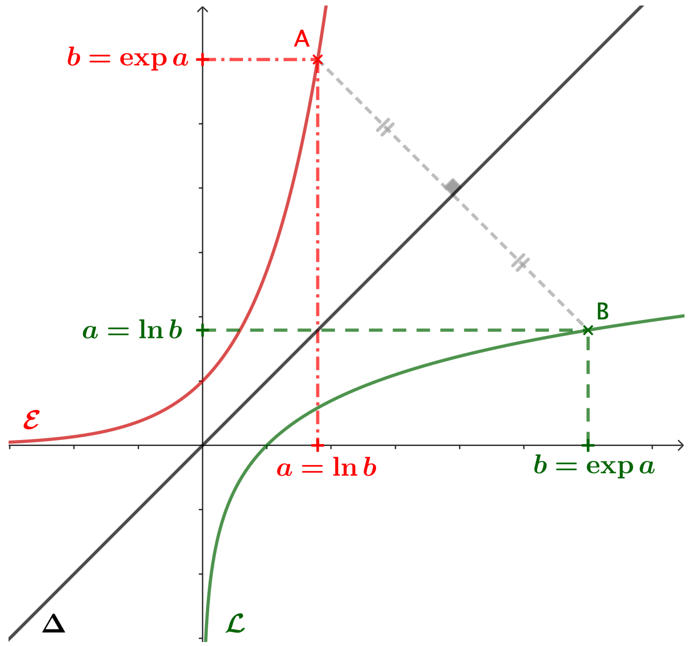
Fait 15. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp x) = x$, *et* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exp(\ln x) = x$.

Démonstration. Nous devons juste vérifier la 2e identité. En appliquant $\ln(\exp X) = X$ à $X = \ln x$, nous obtenons $\ln\big(\exp(\ln x)\big) = \ln x$. Par injectivité de la fonction ln, nous arrivons à $\exp(\ln x) = x$ comme souhaité. $\square$

Fait 16. *Soient* $\mathcal{L}$ *et* $\mathcal{E}$ *les représentations graphiques respectives des fonctions* ln *et* exp. *Les courbes* $\mathcal{L}$ *et* $\mathcal{E}$ *sont symétriques par rapport à la 1re bissectrice* $\Delta : y = x$.

Démonstration. Considérons $A(a\,; \exp a) \in \mathcal{E}$. Notons $b = \exp a$, nous savons que $a = \ln b$. Ceci amène à considérer $B(b\,; \ln b) \in \mathcal{L}$, c'est-à-dire $B(\exp a\,; a)$. Or, $A(x_A\,; y_A)$ et $B(y_A\,; x_A)$ sont symétriques par rapport à Δ (coordonnées d'un milieu, et critère d'orthogonalité).[4] Réciproquement, il faut considérer $B(b\,; \ln b) \in \mathcal{L}$. Ceci se traite de façon similaire.

4. De façon plus élémentaire, nous pourrions raisonner via les triangles visibles sur le graphique en justifiant qu'ils sont tous carrés.



□

3.2. Equation fonctionnelle.

Fait 17. $\forall (a\,;b) \in \big(\mathbb{R}\big)^2$, $\exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b$.

Démonstration. L'injectivité de ln et les calculs suivants permettent de conclure. □

$$\begin{aligned} & \ln\big(\exp(a+b)\big) \\ &= a+b && \text{\textit{Définition de la fonction} exp.} \\ &= \ln(\exp a) + \ln(\exp b) && \text{\textit{Définition de la fonction} exp.} \\ &= \ln(\exp a \cdot \exp b) && \text{\textit{Équation fonctionnelle validée par la fonction} ln.} \end{aligned}$$

3.3. Variations.

Fait 18. *La fonction* exp *admet le tableau de variations suivant.*

x	0	$+\infty$
$\exp x$	0 ↗	$+\infty$

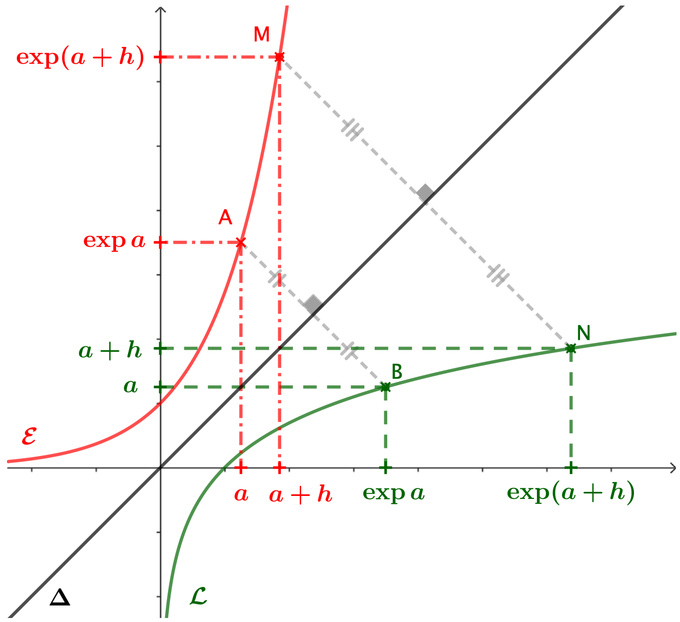
Démonstration. Il suffit de combiner les faits 16 et 18. □

3.4. Equation différentielle.

Fait 19. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp' x = \exp x$.

Démonstration. Notons $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}$ les représentations graphiques respectives des fonctions ln et exp. Nous savons que $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}$ sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$. Pour $h \neq 0$, considérons $A(a\,;\exp a) \in \mathcal{E}$ et $M(a+h\,;\exp(a+h)) \in \mathcal{E}$. Par symétrie, nous avons $B(\exp a\,;a) \in \mathcal{L}$ et $N(\exp(a+h)\,;a+h) \in \mathcal{L}$.
Examinons si le taux d'accroissement $\frac{\exp(a+h)-\exp a}{h}$ admet une limite en 0. Ce quotient est la pente $m(AM)$ de la droite (AM), or $m(AM) = \frac{1}{m(BN)}$. En raisonnant sur $\mathcal{L}$, faire tendre h vers

0 n'est possible que si $x(N)$ tend vers $x(B)$. Comme ln est dérivable en $x(B)$, nous obtenons $\lim_{h\to 0}(m(BN)) = \ln'(x(B)) = \frac{1}{\exp a}$. Finalement, $\lim_{h\to 0}(\frac{\exp(a+h)-\exp a}{h}) = \exp a$ comme souhaité.



$\square$