

# BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES À LA GÉOMÉTRIE

CHRISTOPHE BAL

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



---

## TABLE DES MATIÈRES

1. Les polygones

2

## 1. LES POLYGONES

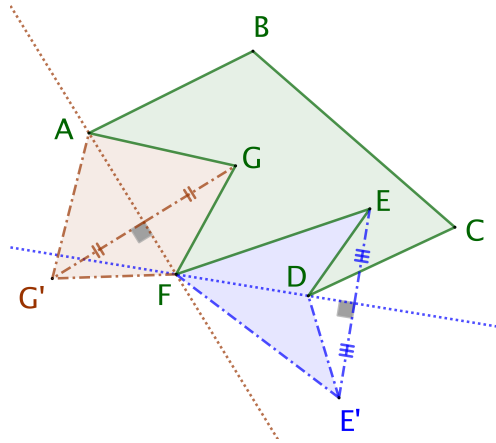
La technique ne change pas : nous allons restreindre la recherche à des polygones de plus en plus particuliers. Cette dernière section nous poussera à un peu plus de technicité.

**Définition 1.** Un «  $n$ -gone » désigne un polygone à  $n$  côtés avec  $n \geq 3$ .

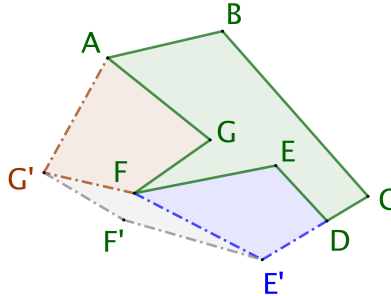
**Définition 2.** Un «  $n$ -isogone » désigne un  $n$ -gone dont tous les côtés sont de mesure égale.

**Fait 1.** Si un  $n$ -gone  $\mathcal{P}$ , de périmètre fixé  $p$ , n'est pas convexe, alors on peut construire à partir de  $\mathcal{P}$  un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}'$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{P}') = p$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$ .

*Démonstration.* Ici, il ne faut pas être expéditif en indiquant que la preuve du fait ?? se généralise sans aucun souci. En effet, avec  $n > 4$ , nous pouvons avoir plusieurs points de non-convexité, et les éliminer comme nous l'avons fait pour le quadrilatère n'est pas immédiat : dans la figure suivante, l'élimination des deux points de non-convexité  $G$  et  $E$  de l'heptagone  $ABCDEFG$  nous amène à un nouvel heptagone  $ABCDE'FG'$  ayant lui aussi deux points de non-convexité  $F$  et  $D$  ! Donc, rien n'empêche, a priori, d'avoir une suite de constructions n'aboutissant jamais à un heptagone convexe<sup>1</sup> de même périmètre que celui de  $ABCDEFG$ , et d'aire strictement supérieure à celle de  $ABCDEFG$ .



Pire, on peut perdre des côtés lors de la construction comme dans l'exemple suivant où  $C$ ,  $D$  et  $E'$  sont alignés.

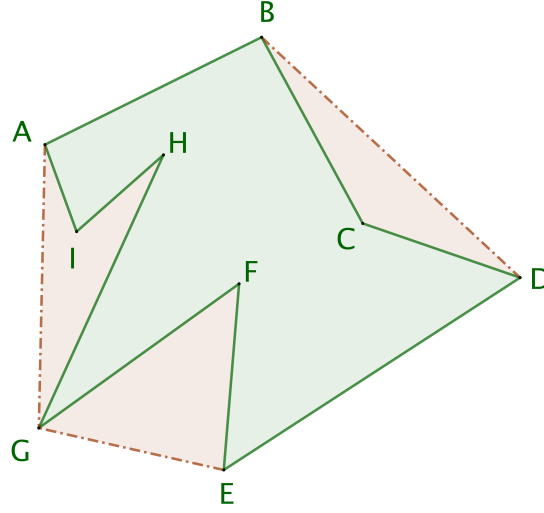


Laissons de côté cette construction pour nous concentrer sur la classique enveloppe convexe<sup>2</sup> du  $n$ -gone de départ dont les dimensions sont maîtrisées par les sommets du  $n$ -gone. Par exemple,

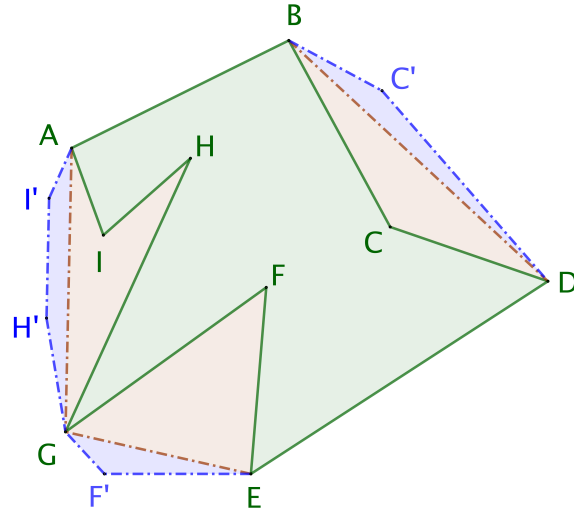
1. L'auteur est convaincu que le procédé aboutira en un nombre fini d'étapes à un polygone convexe, mais il ne l'a pas démontré pour le moment.

2. C'est le plus petit polygone convexe « contenant » le  $n$ -gone considéré, où « petit » est relatif à l'inclusion.

l'ennéagone  $ABCDEFGHI$  non convexe ci-dessous admet le pentagone  $ABDEG$  pour enveloppe convexe : le périmètre diminue et l'aire augmente, ce qui est utile, mais malheureusement le nombre de côtés change.



Une idée simple, que nous allons formaliser rigoureusement juste après, consiste à ajouter les sommets manquants suffisamment près des côtés de l'enveloppe convexe afin de ne pas trop augmenter le périmètre afin qu'il ne dépasse pas celui du  $n$ -gone non convexe initial. Le dessin suivant illustre cette idée.



XXX

- XXX
- XXX
- XXX
- XXX

□

**Fait 2.** Si un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}$ , de périmètre fixé  $p$ , n'est pas un  $n$ -isogone, alors on peut construire à partir de  $\mathcal{P}$  un  $n$ -isogone convexe  $\mathcal{P}'$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{P}') = p$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$ .

Démonstration. XXX

□

Les faits 1 et 2 précédents permettent de se restreindre au cas des  $n$ -isogones convexes. Ceci nous amène au beau résultat suivant.

**Fait 3.** *Si un  $n$ -isgone convexe  $\mathcal{P}$  de périmètre fixé  $p$  possède au moins deux angles de mesures différentes, alors on peut construire à partir de  $\mathcal{P}$  un  $n$ -gone régulier  $\mathcal{P}'$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{P}') = p$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$ .*

*Démonstration.* XXX □

**Fait 4.** *Soit  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  un naturel fixé. Considérons tous les  $n$ -gones de périmètre fixé  $p$ . Parmi tous ces  $n$ -gones, un seul est d'aire maximale, c'est le  $n$ -gone régulier.*

*Démonstration.* Tout a déjà été dit, car d'après les faits ci-dessus, un  $n$ -gone  $\mathcal{P}$  non régulier ne peut pas maximiser son aire à périmètre fixé, et par conséquent seul le  $n$ -gone régulier maximise l'aire à périmètre fixé. Chapeau bas, géométrie... □