Choix, Zorn & Zermelo

Source: "Théo. des Ens. et Logique Math."
Jacques PATARIN chez ellipses

AC (Axiome du Choix)

Pour tt ens. E, $\exists f : \underbrace{\mathcal{P}(E)^*}_{\mathcal{P}(E)-\{\varnothing\}} \to E$ tq $\forall A \subseteq E$, $A \neq \varnothing$, $f(A) \in A$.

ⓘ On a deux variantes plus "réalistes".

↪ **DEN** (Axiome du Choix Dénombrable)
Pour tte famille dénombrable $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'ens. non vides, $\exists f : \mathbb{N} \to \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ tq $\forall i$, $f(i) \in A_i$.

↪ **DEP** (Axiome du Choix Dépendant)
A un ens. non vide, R une relaᵒ sur A tq $\forall x \in A$, $\exists y \in A$ tq $x R y$.
$\forall x_0 \in A$, $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tq $\forall i \in \mathbb{N}$, $x_i R x_{i+1}$.

Pages 53 et suivantes est démontrée l'équivalence de AC avec les axiomes suivants.

↪ **AC_1** : pour tte famille $(A_i)_i$ d'ens. non vides, $i \in I \neq \varnothing$, $\exists f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ tq $\forall i$, $f(i) \in A_i$.

↪ **AC_2** : pour tte famille $(A_i)_i$ d'ens. non vides, $i \in I \neq \varnothing$, $\prod_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.

↪ **AC_3** : pour tte famille $(A_i)_i$ d'ens. non vides, $i \in I \neq \varnothing$, avec $A_i \cap A_j \neq 0$ si $i \neq j$, il existe un ens. C tq $\forall i$, $\exists ! x \in C$ tq $x \in A_i$, ie $\#(A_i \cap C) = 1$.

AZo (Axiome de Zorn)

Pour tt ens. inductif E, $\exists c \in E$ tq $\forall x \in E$, $c \leq x \Rightarrow c = x$,
ie E admet un elt maxi.

(i) **Ens. inductif** : ens. ordonné dont ttes les chaînes sont majorées.

Chaîne : C ss.ens. de E ordonné qui est totalt ordonné via la restric° à C de l'ordre de E.

AZe (Axiome de Zermelo)

Tt ens. non vide peut être bien ordonné.

$$\boxed{AC \iff AZo \iff AZe}$$

AZe ⇒ AC

Soit $E \neq \emptyset$ un ens.

↪ AZe donne $(E, \leq)$ bien ordonné.

↪ $f : \mathcal{P}(E)^* \longrightarrow E$, $A \longmapsto \min_{\leq} A$ convient.

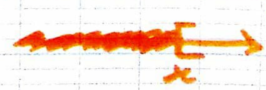
On a obtenu AC.

AC ⇒ AZe

Soit $f : \mathcal{P}(E)^* \rightarrow E$ une fonc. de choix sur E un ens. non vide.

↪ T ss-ens. supposé muni d'un bon ordre $\leq_T$.

↪ T est une f-chaîne si $\forall x \in T$, $x = f(E - \underline{\{y \in T / y <_T x\}})$



↪ B est un segment initial de T, $B \subseteq T$, si $\{y \in T \,/\, y <_T x\} \subseteq B$.

Mq si $(T, \leq_T)$ et $(U, \leq_U)$ sont deux f-chaînes, alors l'un des ens. est un segment initial de l'autre, et son bon ordre est la restric° de celui de l'autre.

↪ $P = \{x \in T \cap U \,/\, \forall \mu \in U, [\mu <_U x \Rightarrow \mu \in T \wedge \mu <_T x]$
et $\forall \sigma \in T, [\sigma <_T x \Rightarrow \sigma \in U \wedge \sigma <_U x]\}$

↪ Supposons $P \neq U$ et $P \neq T$.
$\alpha_0 = \min_{\leq_T}(T - P)$ et $\mu_0 = \min_{\leq_U}(U - P)$ existent.
On pose : $I = \{\alpha \in T \,/\, \alpha <_T \alpha_0\}$
$J = \{\mu \in U \,/\, \mu <_U \mu_0\}$

↪ Supposons avoir $\alpha \in I \subseteq T$.
Comme $\alpha <_T \alpha_0$, $\alpha \in P \subseteq T \cap U \subseteq U$.

Par déf. de P, si on avait $\mu_0 <_U \alpha$, alors $\mu_0 \in T$ et $\mu_0 <_T \alpha$,
on aurait donc $[\mu_0 \leq_U \alpha \Rightarrow \mu_0 \in T \wedge \mu_0 <_T \alpha_0]$,
d'où $\mu_0 \in I \in P$, d'où une contradic°.

Donc nécessairement, $\mu_0 >_U \alpha$, puis $\underbrace{I \subseteq J}_{\text{Donc } J \notin 0.}$, puis $I = J$ par sym. des rôles.

↪ Ensuite, $\alpha_0 = f(E - I)$ et $\mu_0 = f(E - J)$ donnent $\alpha_0 = \mu_0$ (on travaille avec deux f-chaînes).

Donc $\forall \mu \in U$, on a :

$$\begin{aligned}
\mu <_U \mu_0 &\Rightarrow \mu \in J \\
&\Rightarrow \mu \in I \\
&\Rightarrow \mu \in T \wedge \mu <_T \alpha_0 \\
&\Rightarrow \mu \in T \wedge \mu <_T \mu_0
\end{aligned}$$

Par sym., $\forall v \in T$, $[v <_T d_0 \Rightarrow v \in U \wedge v <_U d_0]$

ie $[v <_T \mu_0 \Rightarrow v \in U$ et $v <_U \mu_0]$.

Donc $\mu_0 \in P$ contredit $\mu_0 \in T - P$.

↳ Donc si $I \neq \overbrace{\emptyset,}^{\text{ou } J \neq \emptyset}$ on a une contradic° rendant $P \neq T$ et $P \neq U$ impossible.

↳ Peut-on avoir $I = \emptyset$ et $J = \emptyset$?

$I = \emptyset$ signifie que $d_0 = \min_{\leq_T} T$.

$J = \emptyset$ signifie que $\mu_0 = \min_{\leq_U} U$.

T et U étant des f-chaînes, on a :

$d_0 = f(E) = \mu_0$.

On conclut comme avant car "les implicat° sont vides", ie du type $\bot \Rightarrow \dots$.

↳ En résumé, $P = U$

ou $P = T$. CQFD!

⚠ Nous ne savons pas si une f-chaîne existe.

Z = union des f-chaînes de E ($Z = \emptyset$ possible).

↳ $Z \neq \emptyset$ car $\{a\} = f(E)$ est une f-chaîne.

↳ $(Z, \leq)$ déf. via :

$$x \leq y \iff \left[\begin{array}{l} \exists T \text{ une f-chaîne tq } (x;y) \in T^2 \\ \text{et } x \leq_T y \end{array}\right.$$

↳ le résultat précédent sur $(T, \leq_T)$ et $(U, \leq_U)$ donne que $\leq$ déf. bien un ordre sur Z.

↳ Mq $\leq$ est un bon ordre.

Soit $P \subseteq Z$ avec $P \neq \emptyset$.
Soit $x \in P$ et $(T_x, \leq_{T_x})$ une f-chaîne contenant x.

$P \cap T \Rightarrow x_0 = \min_{\leq_{T_x}} (P \cap T)$ existe.

Soit $y \in P$ qcq et $(T_y, \leq_{T_y})$ une f-chaîne contenant y.

- Cas 1 : $y \notin T_x$
  On sait que T_x est un seg. initial de T_y, d'où $x_0 \leq_{T_y} y$.
- Cas 2 : $y \in T_x$
  Donc $y \in P \cap T$ et forcé^t $x_0 \leq_{T_x} y$

Dans ces 2 cas, par déf. de $\leq$, on a : $x_0 \leq y$, ie $x_0 = \min_{\leq} P$.

↳ $(Z, \leq)$ est une f-chaîne.

Soit $x \in Z$, et $(T_x, \leq_x)$ une f-chaîne contenant x.

On sait que $\{y \in Z / y < x\} \overset{\text{prop. du seg. initial}}{=} \{y \in T_x / y <_{T_x} x\}$
d'où $f(E - \{y \in Z / y < x\})$
$= f(E - \{y \in T_x / y <_{T_x} x\})$
$= x$.

↳ Supposons enfin que $Z \neq E$.

$x_0 = f(E - Z)$ puis $Z_0 = Z \cup \{x_0\}$.

On prolonge $\leq$ à Z_0 via $x \leq x_0$ pour $x \in Z_0$ qcq.
- Z_0 est une f-chaîne comme Z et par choix de x_0.
- Donc $Z_0 \subseteq Z$ d'où $x_0 \in Z$ nécessaire^t, puis
  ↳ Impossible car f est une fonc$^\circ$ de choix !

Finale^t, $E = Z$ permet de conclure.

$AZ_e \sim AC \Rightarrow AZ_\sigma$

$f : A \to A$ croissante sur $(A, \leq_A)$ un ens. inductif.
f admet alors au moins un pt fixe.

↳ Sinon $\{a \in A \,/\, a <_A f(a)\} = A$.

↳ Soit $P = \mathcal{P}(A)$ que l'ordonne bien via $\leq_P$.) On utilise AZ_e ici.

On sait que card $P >$ card A.

↳ μ est une applica$^\circ$ qui à tte chaîne C associe un maj. de C. → Besoin de AC car on ne sait rien de la card. de l'ens. des majos.

On pose alors $g(\beta) = f(\mu(\{g(\alpha), \alpha < \beta\}))$ car c'est faisable.

En effet,

Prop. $\mathcal{P}(\beta)$ [montrons par induc$^\circ$ que $\overbrace{\quad}^{g(\beta)}$ est bien déf. avec en m̂ tps $\forall \alpha \in P$, $\alpha < \beta \Rightarrow g(\alpha) <_A g(\beta)$.

Il s'agit de montrer que $\mathcal{P}(\beta)$ est vraie pour tt $\beta < \alpha$, alors on a aussi $\mathcal{P}(\alpha)$ validée.

Soit $\alpha_1 < \alpha$ et $\alpha_2 < \alpha$, $g(\alpha_1) \leq_A g(\alpha_2)$ dès que $\alpha_1 < \alpha_2$.

Avec l'existence !

Comme $\{g(\alpha) \,/\, \alpha <_A \alpha\}$ est totale^t ordonné, il admet un maj. et donc $g(\alpha)$ existe.

Pour $\alpha < \beta$, on a : $g(\alpha) \leq \mu(\{g(\alpha), \alpha < \beta\})$
$$\Rightarrow g(\alpha) <_A f(g(\alpha)) \leq g(\beta)$$

↳ g étant injective, on a card $P \leq$ card $A <$ card P.
Contradic$^\circ$!

Soit enfin A un ens. inductif "qcq".
On doit trouver $m \in A$ un majorant de A.
On considère $f : A \longrightarrow A$ Besoin de AC.

$$x \longmapsto \begin{cases} a_x \text{ si } \exists a_x \text{ tq } a_x >_A x & \rightarrow \text{"Petites" vals} \\ x \text{ sinon} & \rightarrow \text{"Gdes" vals} \end{cases}$$

Clairem^t $f(x) \geq_A x$ d'où $m \in A$ tq $f(m) = m$, mais dans ce cas $\neg(\exists a \in A \,/\, a >_A m)$ par déf. de f, d'où $\forall a \in A,\ a \leq_A m$.

(i) Si Zorn ok, et $f : A \rightarrow A$ avec A inductif et $x \leq_A f(x)$, alors le pt fixe m de f s'obtient via le maxi. de A !

(AC&) AZo ⟹ AZe

Soit $A \neq \emptyset$ un ens., il s'agit de bien l'ordonner.

$\mathcal{B} = \{ (B, \leq_B) \text{ bien ordonné avec } B \subseteq A \}$

↳ $\mathcal{B} \neq \emptyset$ via les singletons.

↳ $\mathcal{B}$ munissable d'un ordre $\leq$ comme suit.
$(B, \leq_B) \leq (C, \leq_C)$ uniquem^t si :
- $B \subseteq C$
- $\forall b \in B,\ \forall c \in C - B,\ b \leq_C c$
- Sur B^2, $b \leq_B b' \iff b \leq_C b'$

↳ $(\mathcal{B}, \leq)$ est inductif ?
Soit $\mathcal{F}$ une chaîne de $\mathcal{B}$. On pose $M = \bigcup_{(B, \leq_B) \in \mathcal{F}} B$.

On munit M d'un ordre $\leq_M$ comme suit.
$a \leq_M b \iff \exists (B, \leq_B) \in \mathcal{F} \text{ tq } a \leq_B b$.

$(M, \leq_M)$ est bien ordonné :
- $P \subseteq M$ et $p \in P$ fixés.
- Soit $(B, \leq_B) \in \mathcal{F}$ tq $p \in B$.

- $P \cap B \neq \varnothing$ donc $P \cap B$ admet un plus petit élt e pour $\leq_B$ (qui est un bon ordre).
- Soit $m \in P$ qcq, il faut mq $e \leq_\pi m$.
  - i) $\underline{m \in B}$: $e \leq_B m$, "ie" $e \leq_\pi m$.
  - ii) $\underline{m \notin B}$: on sait que $\exists (C, \leq_C) \in \mathcal{F}$ tq $m \in C$.

    $\mathcal{F}$ étant une chaîne, on a ou bien $(B, \leq_B) \leq (C, \leq_C)$ ou bien $(C, \leq_C) \leq (B, \leq_B)$.

    Comme $m \in C - B$, on ne peut avoir que $(B, \leq_B) \leq (C, \leq_C)$.

    Par déf. de l'ordre $\leq_C$, comme $e \in B$ et $m \in C - B$, on a : $e \leq_C m$, puis $e \leq_\pi m$.

Comme $(\pi, \leq_\pi)$ est bien ordo., c'est un max. de $\mathcal{F}$, et donc $(\mathcal{B}, \leq)$ est inductif.

↳ Zorn donne $(Z, \leq_Z)$ un max. de $\mathcal{B}$.
Supposons par l'absurde que $Z \subset A$, ie $Z \neq A$.
AC (Prenant $a \in A - Z$, on construit $(S, \leq_S)$ avec $S = Z \cup \{a\}$ et $\leq_S$ étendant $\leq_Z$ via $x \leq_S a$ pour $x \in S$.
Dès lors, $Z < S$ contredirait la déf. de Z.
Nécessairement $A = Z$ est bien ordonné via $\leq_Z$.

?

Tout ce qui précède est "naturel" mais affreuse^t technique.
A-t-on des équivalents à la DEN qui seraient moins violents à démontrer ?