BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts.

Mentions « légales »

Table des matières

Date: 18 Jan. 2025 – 15 Fev. 2025.

Fait 1. *Tout n-cycle $\mathcal{L}$ non dégénéré admet une décomposition $\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2 \cdot \ldots \cdot \mathcal{L}_s$ vérifiant les conditions suivantes où $s \in \mathbb{N}^*$.*

(1) $\forall i \in [\![1\,;s]\!]$, *$\mathcal{L}_i$ est un k_i-gone.*

(2) $\forall i \in [\![1\,;s-1]\!]$, *$\mathcal{L}_i$ et $\mathcal{L}_{i+1}$ sont mariables.*

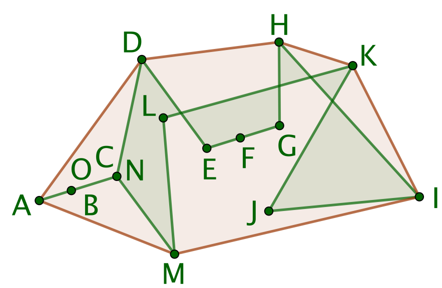
(3) Les surfaces intérieures des k_i-gones $\mathcal{L}_i$ sont disjointes deux à deux.

Pour une telle décomposition, $\mathrm{AireGene}(\mathcal{L}) = \dfrac{1}{2} \left| \sum_j \mathrm{Aire}(\mathcal{L}_{2j+1}) - \sum_j \mathrm{Aire}(\mathcal{L}_{2j}) \right|$.

Démonstration. XXX
ptruvr viz ntersection la plus proche, puis arg de type induction comme dans lexemples ! □

Fait 2. *Si un n-cycle $\mathcal{L}$, éventuellement dégénéré, n'est pas un n-gone convexe, alors il existe un n-gone convexe $\mathcal{P}$ tel que* $\mathrm{Long}(\mathcal{P}) = \mathrm{Long}(\mathcal{L})$ *et* $\mathrm{AireGene}(\mathcal{P}) > \mathrm{AireGene}(\mathcal{L})$.

Démonstration. Commençons par le cas « hyper-dégénéré » : si tous les sommets de $\mathcal{L}$ sont alignés, son aire généralisée est nulle. Le triangle équilatéral de côté $\frac{1}{3}\mathrm{Long}(\mathcal{L})$ permet de conclure. Supposons maintenant qu'au moins trois sommets non alignés existent. Notons $\mathcal{C}$ l'enveloppe convexe de $\mathcal{L}$ (nous savons que $\mathcal{C}$ contient au moins un triangle).



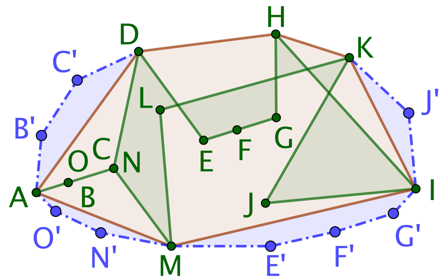
Exemple où $N = C$ et $O = B$.

Clairement, $\mathrm{Long}(\mathcal{C}) < \mathrm{Long}(\mathcal{L})$. Justifions que $\mathrm{AireGene}(\mathcal{C}) > \mathrm{AireGene}(\mathcal{L})$ en reprenant les notations du fait 1 précédent.

$$
\begin{aligned}
&2\mathrm{AireGene}(\mathcal{L}) \\
= &\left| \sum_j \mathrm{Aire}(\mathcal{L}_{2j+1}) - \sum_j \mathrm{Aire}(\mathcal{L}_{2j}) \right| \\
< &\sum_j \mathrm{Aire}(\mathcal{L}_{2j+1}) + \sum_j \mathrm{Aire}(\mathcal{L}_{2j}) \\
= &\,2\mathrm{Aire}(\mathcal{C}) \\
= &\,2\mathrm{AireGene}(\mathcal{C})
\end{aligned}
$$

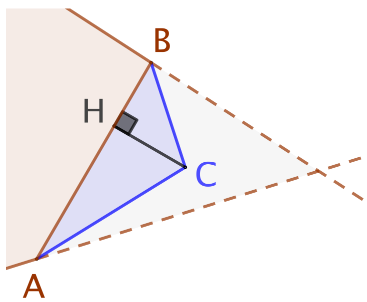
Deux k_i-gones, au moins, sont d'orientations différentes.

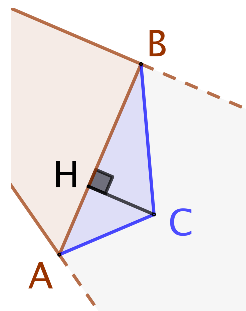
Il reste un problème à gérer : $\mathcal{C}$ est un k-gone avec $k < n$. Une idée simple, formalisée après, est d'ajouter des sommets assez prêts des côtés de $\mathcal{C}$ pour garder la convexité, une longueur strictement supérieure à $\mathrm{Long}(\mathcal{L})$, et une aire généralisée strictement plus grande que $\mathrm{AireGene}(\mathcal{L})$. Si c'est faisable, un agrandissement de rapport $r > 1$ ramène à la longueur $\mathrm{Long}(\mathcal{L})$ avec une aire supérieure strictement à $\mathrm{AireGene}(\mathcal{L})$. La figure suivante illustre cette idée.



Notons s le nombre de sommets dans $\mathcal{C}$, de sorte que $m = n - s$ compte les sommets manquants. Si $m = 0$, il n'y a rien à faire. Sinon, posons $\delta = \frac{\text{Long}(\mathcal{L}) - \text{Long}(\mathcal{C})}{m}$.

(1) Considérons $[AB]$ un côté quelconque de $\mathcal{C}$. Les droites portées par les côtés « *autour* » de $[AB]$ « *dessinent* » une région contenant toujours un triangle ABC dont l'intérieur est à l'extérieur [1] de $\mathcal{C}$ comme dans les deux cas ci-dessous.





(2) Clairement, le polygone $\mathcal{C}_+$ obtenu à partir de $\mathcal{C}$ en remplaçant le côté $[AB]$ par les côtés $[AC]$ et $[CB]$ est un convexe avec un sommet de plus que $\mathcal{C}$.

(3) Comme HC peut être rendu aussi proche de 0 que souhaité, il est aisé de voir que l'on peut choisir cette distance de sorte que $AC + BC < AB + \delta$. Dès lors, le périmètre de $\mathcal{C}_+$ augmente inférieurement strictement à δ relativement à $\mathcal{C}$.

(4) En répétant $(m-1)$ fois les étapes 1 à 3, nous obtenons un n-gone convexe $\mathcal{C}'$ tel que $\text{Aire}(\mathcal{C}') > \text{Aire}(\mathcal{L})$ et $\text{Long}(\mathcal{C}') < \text{Long}(\mathcal{C}) + m\delta = \text{Long}(\mathcal{L})$.

□

Fait 3. *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Parmi tous les n-cycles de périmètre fixé, il en existe au moins un d'aire généralisée maximale, un tel n-cycle devant être a minima un n-gone convexe.*

Démonstration. Notons p le périmètre fixé..

- Munissant le plan d'un repère orthonormé direct $(\text{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on note $\mathcal{Z}$ l'ensemble des n-cycles $\mathcal{L} = A_1A_2\cdots A_n$ tels que $\text{Long}(A_1A_2\cdots A_n) = p$ et $A_1\,(0\,;0)$,[2] puis $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des uplets de coordonnées $\big(x(A_1)\,;y(A_1)\,;\ldots;x(A_n)\,;y(A_n)\big)$ pour $A_1A_2\cdots A_n \in \mathcal{Z}$.
- $\mathcal{G}$ est clairement fermé dans $\mathbb{R}^{2n}$. De plus, il est borné, car les coordonnées des sommets des n-cycles considérés le sont. En résumé, $\mathcal{G}$ est un compact de $\mathbb{R}^{2n}$.
- Nous définissons la fonction $\alpha : \mathcal{G} \to \mathbb{R}_+$ qui à un uplet de $\mathcal{G}$ associe l'aire généralisée du n-cycle qu'il représente. Cette fonction est continue comme valeur absolue d'une fonction polynomiale en les coordonnées.

1. C'est ce que l'on appelle de la « *low poetry* » .
2. Le mot « *Zeile* » est une traduction possible de « *ligne* » en allemand.

- Finalement, par continuité et compacité, α admet un maximum sur $\mathcal{G}$. Or, un tel maximum ne peut pas être atteint qu'en un n-gone convexe, au moins, selon le fait 2.

$\square$