

BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



TABLE DES MATIÈRES

1. Pourquoi un nouveau document sur l’isopérimétrie ?	2
2. Triangles	2
2.1. Avec un côté fixé	2
2.2. Le cas général	3
2.3. Des preuves courtes non géométriques	4
3. Quadrilatères	5
3.1. Les rectangles	5
3.2. Les parallélogrammes	6
3.3. Le cas général	6
4. Les polygones	8
4.1. Où allons-nous ?	8
4.2. Quelques définitions	8
4.3. Au moins une solution	8

Ce document, de niveau élémentaire,¹ s'intéresse au classique problème de l'isopérimétrie plane, c'est-à-dire à la recherche d'une surface plane maximisant son aire pour un périmètre donné. Nous nous limiterons ici au cas des polygones, en privilégiant des démonstrations les plus géométriques que possible, et en ne faisant appel à l'analyse qu'en cas de nécessité.²

Afin d'alléger le texte, nous raisonnons parfois modulo des isométries. Ainsi, nous parlerons directement du « carré de côté c », du « triangle équilatéral de côté c », etc.

1. POURQUOI UN NOUVEAU DOCUMENT SUR L'ISOPÉRIMÉTRIE ?

Voici quelques apports de ce document.

- **Pour les triangles**, l'auteur expose une démonstration ne s'appuyant pas sur le théorème des extrema d'une fonction réelle continue sur un compact. Il propose à la place une construction itérative basique qui, partant d'un triangle quelconque, converge vers le triangle équilatéral, solution du problème d'isopérimétrie pour les triangles.
- **Pour les quadrilatères**, le problème est traité sans aucune utilisation de l'analyse, en s'appuyant uniquement sur des considérations purement géométriques de niveau élémentaire.
- **Pour les polygones à 5 côtés et plus**, la notion d'aire algébrique, une fois mieux cernée, permet d'établir aisément l'existence d'une solution optimale via le théorème des extrema d'une fonction réelle continue sur un compact. De plus, l'auteur a veillé à ne laisser aucune ellipse explicative dans les démonstrations proposées.

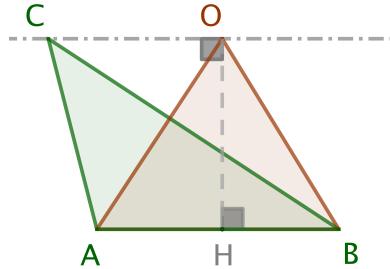
L'auteur espère ainsi fournir une perspective renouvelée sur un problème très ancien.

2. TRIANGLES

2.1. Avec un côté fixé.

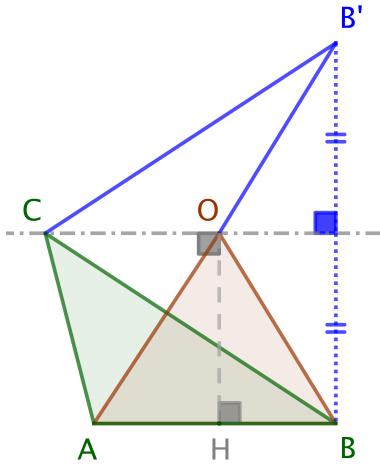
Fait 1. *Considérons tous les triangles de périmètre fixé, et ayant tous un côté en commun. Parmi tous ces triangles, un seul est d'aire maximale, c'est le triangle isocèle ayant pour base le côté commun.*

Démonstration. Soit ABC un triangle de périmètre p , et fixons le côté $[AB]$. Pour tout point M sur la parallèle à (AB) passant par C , nous savons que $\text{Aire}(ABM) = \text{Aire}(ABC)$. Notons alors O le point sur cette parallèle tel que ABO soit isocèle en O .



Via une symétrie axiale, voir ci-dessous, il est aisément de noter que $\text{Perim}(ABC) \geq \text{Perim}(ABO)$, avec égalité uniquement si ABC est isocèle en C .³

1. Cela nous conduira à admettre certains théorèmes qui, bien que paraissant simples, méritent une justification approfondie.
2. L'usage des nombres complexes fournit une approche très synthétique.
3. Plus précisément, en passant de C à O , le périmètre diminue.



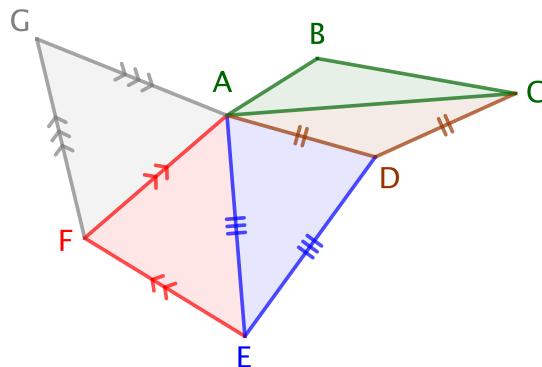
Une dilatation « *verticale* » de rapport $r = \frac{\text{Perim}(ABC)}{\text{Perim}(ABO)} \geq 1$ donne un triangle isocèle ABO' tel que $\text{Perim}(ABO') = p$ et $\text{Aire}(ABO') \geq \text{Aire}(ABC)$, avec égalité uniquement si ABC est isocèle en C . Contrat rempli!⁴ \square

Remarque 2.1. La recherche parmi les triangles avec un côté fixé de celui ayant un périmètre minimal pour une aire fixée est le problème dual de l’isopérimétrie pour ces triangles.

2.2. Le cas général.

Fait 2. Considérons tous les triangles de périmètre fixé p . Parmi tous ces triangles, un seul est d’aire maximale, c’est le triangle équilatéral de côté $c = \frac{1}{3}p$.

Démonstration. Nous allons donner une démonstration constructive via une application itérative du fait 1 qui va donner à la limite le triangle équilatéral d’aire maximale, et ceci avec une vitesse de convergence exponentielle.⁵ Partons donc d’un triangle ABC quelconque, mais de périmètre p , le fait 1 nous donne successivement les triangles ACD , ADE et AEF isocèles en D , E et F respectivement, ayant tous pour périmètre p , et ceci avec des aires de plus en plus grandes. Le dessin suivant amène à conjecturer qu’en poursuivant le procédé pour avoir ensuite un triangle AFG isocèle en G ..., nous aboutirons « à la limite » à un triangle équilatéral.



Le passage d’un triangle quelconque ABC au triangle ACD isocèle en D nous amène à nous concentrer sur ce que donne notre procédé d’agrandissement d’aire à périmètre fixé pour des

4. La remarque 2.3 explique comment employer la méthode des extrema liés. Les arguments fournis à cet endroit s’adaptent facilement au cas des triangles de base fixée.

5. Ceci ne va nécessiter que l’emploi de propriétés simples de l’ensemble des réels.

triangles isocèles. Voici ce que nous pouvons affirmer en supposant $AC > AD$, comme dans notre exemple (nous allons voir que cette hypothèse est sans conséquence).

- (1) Comme $AC + 2AD = p$ et $AC > AD$, nous avons $AC > \frac{1}{3}p > AD$. À l'étape suivante, comme $AD + 2AE = p$, nous obtenons $AD < \frac{1}{3}p < AE$.
- (2) Pour AEF isocèle en F , comme $AE + 2AF = p$, nous arrivons à $AE > \frac{1}{3}p > AF$.
- (3) Tentons de quantifier les écarts à la mesure pivot $p' = \frac{1}{3}p$.
 - Dans ACD , posant $AD = p' - \epsilon_1$, nous avons $AC = p' + 2\epsilon_1$.
 - Dans ADE , posant $AE = p' + \epsilon_2$, nous avons $AD = p' - 2\epsilon_2$.
 - Dans AEF , posant $AF = p' - \epsilon_3$, nous avons $AE = p' + 2\epsilon_3$.
 - Dans AFG , posant $AG = p' + \epsilon_4$, nous avons $AF = p' - 2\epsilon_4$.
 - Donc $\epsilon_2 = \frac{1}{2}\epsilon_1$, $\epsilon_3 = \frac{1}{2}\epsilon_2$ et $\epsilon_4 = \frac{1}{2}\epsilon_3$.

Voici les enseignements de ce qui précède en partant d'un triangle ABC non équilatéral.

- Si $AC = \frac{1}{3}p$, dès la 1^{re} itération, nous avons un triangle équilatéral d'aire plus grande.
- Si $AC \neq \frac{1}{3}p$, notre procédé n'arrivera jamais en un nombre fini d'étapes à un triangle équilatéral. Dans ce cas, le point 3 ci-dessus nous donne une convergence exponentielle des longueurs des côtés vers $p' = \frac{1}{3}p$, tout en ayant des aires des plus en plus grandes.

Dans tous les cas, l'aire d'un triangle non équilatéral de périmètre p est strictement majorée par celle du triangle équilatéral de périmètre p . Et tout ceci a été obtenu via de la géométrie et de l'analyse élémentaires ! \square

2.3. Des preuves courtes non géométriques.

Nous donnons ici des preuves courtes du fait 2, mais sans notion géométrique intuitive. Efficacité versus beauté, l'auteur a choisi son camp depuis longtemps !

Démonstration alternative 1. Selon la **formule de Héron**, $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ est l'aire d'un triangle de côtés a, b, c et de demi-périmètre $s = 0,5p$. La comparaison des moyennes géométrique et arithmétique⁶ donne $\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}((s-a) + (s-b) + (s-c))$, puis $s(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{1}{27}s^4$, et enfin $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{p^2}{12\sqrt{3}}$ où $\frac{p^2}{12\sqrt{3}}$ est l'aire du triangle équilatéral de périmètre p . \square

Démonstration alternative 2. Utilisons l'**analyse sans le théorème des extrema liés**.

- On munit le plan d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
- Les triangles ABC tels que $\text{Perim}(ABC) = p$ sont représentés en posant $A(0; 0)$, $B(AB; 0)$ et $C(x_C; y_C)$ avec $y_C \geq 0$. Un triangle peut donc avoir trois représentations, mais peu importe. De plus, on accepte les triangles dégénérés pour lesquels nous avons $x_B = 0$ ou $y_C = 0$ dans notre représentation. Nous notons alors $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble des triplets $(x_B; x_C; y_C)$ ainsi obtenus.
- Il est facile de justifier que \mathcal{T} est séquentiellement fermé dans \mathbb{R}^3 . De plus, \mathcal{T} est borné car x_B, x_C et y_C le sont. En résumé, \mathcal{T} est un compact de \mathbb{R}^3 .
- La fonction $\alpha : (x_B; x_C; y_C) \in \mathcal{T} \mapsto 0,5x_B y_C \in \mathbb{R}_+$ est la fonction « *aire* » des triangles représentés. Par continuité et compacité, on sait que α admet un maximum sur \mathcal{T} . Notons ABC un triangle maximisant α .

6. La formule de Héron reste un argument géométrique, mais quid de la comparaison des moyennes géométrique et arithmétique d'ordre 3, généralement justifiée via la concavité de la fonction logarithme. À l'ordre 2, l'inégalité s'obtient aisément par un argument géométrique simple : voir la remarque 3.2.

- ABC n'est clairement pas dégénéré. Est-il équilatéral pour autant ? Selon le fait 1, ABC doit être isocèle en C . Posant $c = AC = BC \neq 0$ et $s = \frac{p}{2}$, nous avons $x_B = 2s - 2c \neq 0$, et $y_C = \sqrt{c^2 - (s - c)^2}$, puis $\text{Aire}(ABC)^2 = (s - c)^2(c^2 - (s - c)^2) = s(s - c)^2(s - 2c)$.⁷ Or, le maximum de la fonction $\beta : c \mapsto s(s - c)^2(s - 2c)$ est forcément atteint en c annulant $\beta'(c) = -2s(s - c)(s - 2c) - 2s(s - c)^2 = 2s(c - s)(2s - 3c)$, soit pour $c = \frac{2s}{3} = \frac{p}{3}$, car $c = s$ est exclu. Ceci prouve que ABC est nécessairement équilatéral.

□

Démonstration alternative 3. Nous allons faire appel à la **méthode des extrema liés** et la **formule de Héron**. Pour cela, notons que l'aire d'un triangle étant positive ou nulle, nous pouvons chercher à maximiser son carré $f(a; b; c) = s(s - a)(s - b)(s - c)$ sous la contrainte $2s = a + b + c$ où $s = 0,5p > 0$ est constant. Notant $g(a; b; c) = a + b + c - 2s$, la contrainte s'écrit $g(a; b; c) = 0$.

- Si un extremum existe, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\partial_a f = \lambda \partial_a g$, $\partial_b f = \lambda \partial_b g$ et $\partial_c f = \lambda \partial_c g$ d'après la méthode des extrema liés.
- Donc $-s(s - b)(s - c) = -s(s - a)(s - c) = -s(s - a)(s - b)$, et par conséquent $(s - b)(s - c) = (s - a)(s - c) = (s - a)(s - b)$.
- Les cas $s = a$, $s = b$ et $s = c$ donnent $f(a; b; c) = 0$.
- Le cas $[s \neq a, s \neq b \text{ et } s \neq c]$ n'est envisageable que si $a = b = c = \frac{p}{3}$, ceci impliquant $f(a; b; c) = \frac{1}{16}p\left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{p^2}{12\sqrt{3}}\right)^2 > 0$.
- En résumé, l'existence d'un maximum implique que ce maximum corresponde au cas du triangle équilatéral.
- Il reste à démontrer qu'un tel maximum existe pour pouvoir conclure : ceci est facile à justifier en considérant l'ensemble compact $[0; 2s]^3$ de \mathbb{R}^3 , et la continuité de f .

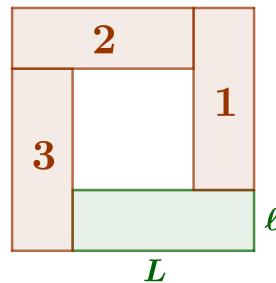
□

3. QUADRILATÈRES

3.1. Les rectangles.

Fait 3. Considérons tous les rectangles de périmètre fixé p . Parmi tous ces rectangles, un seul est d'aire maximale, c'est le carré de côté $c = 0,25p$.

Démonstration. Voici une preuve géométrique élémentaire s'appuyant sur le dessin suivant où les rectangles 1, 2 et 3 sont isométriques au rectangle vert étudié de dimension $L \times \ell$.



Le raisonnement tient alors aux constations suivantes accessibles à un collégien.

- (1) Le grand carré a une aire $(L + \ell)^2$ supérieure ou égale à $4L\ell$, et ceci strictement si le rectangle initial n'est pas un carré.

7. Nous venons de démontrer la formule de Héron dans le cas particulier d'un triangle isocèle.

- (2) Le grand carré a un périmètre égal à $4(L + \ell)$.
 (3) Une homothétie de rapport 0,5 donne un carré de périmètre $0,5 \times 4(L + \ell) = 2(L + \ell)$, et d'aire supérieure ou égale à $0,5^2 \times 4L\ell = L\ell$, avec inégalité stricte si le rectangle initial n'est pas un carré.

Donc, parmi tous les rectangles de périmètre $p = 2(L + \ell)$ et d'aire $L\ell$, le seul qui puisse avoir une aire maximale est le carré. Joli ! Non ? \square

Remarque 3.1. *Une preuve courante consiste à exprimer l'aire du rectangle comme polynôme du 2^e degré en L par exemple. On obtient $L\ell = L(0,5p - L)$ qui est maximale en $L_M = 0,25p$ (moyenne des racines), d'où $\ell_M = 0,25p = L_M$.*

Remarque 3.2. *Nous avons établi que $4L\ell \leq (L + \ell)^2$ pour $(L; \ell) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Ceci permet de comparer les moyennes arithmétique $\frac{1}{2}(L + \ell)$, géométrique $\sqrt{L\ell}$ et quadratique $\sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$.*

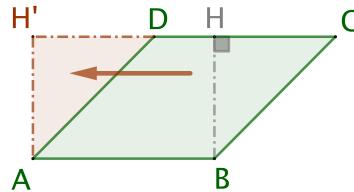
- *L'application de la racine carrée donne $2\sqrt{L\ell} \leq L + \ell$, puis $\sqrt{L\ell} \leq \frac{1}{2}(L + \ell)$.*
- *Un simple développement fournit $2L\ell \leq L^2 + \ell^2$, puis $\sqrt{L\ell} \leq \sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$.*
- *On peut faire mieux en notant que $2L\ell \leq L^2 + \ell^2$ donne $L^2 + \ell^2 + 2L\ell \leq 2(L^2 + \ell^2)$, puis $\frac{1}{4}(L + \ell)^2 \leq \frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)$, et enfin $\frac{1}{2}(L + \ell) \leq \sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$.*

En résumé, $\sqrt{L\ell} \leq \frac{1}{2}(L + \ell) \leq \sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$ pour $(L; \ell) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Ces inégalités se généralisent à l'ordre n grâce à l'algèbre, ou l'analyse.

3.2. Les parallélogrammes.

Fait 4. *Considérons tous les parallélogrammes de périmètre fixé p . Parmi tous ces parallélogrammes, un seul est d'aire maximale, c'est le carré de côté $c = 0,25p$.*

Démonstration. Le calcul de l'aire d'un parallélogramme, voir le dessin ci-dessous, nous donne $\text{Aire}(ABCD) = \text{Aire}(ABHH')$ et $\text{Perim}(ABCD) \geq \text{Perim}(ABHH')$, avec égalité uniquement si $ABCD$ est un rectangle.



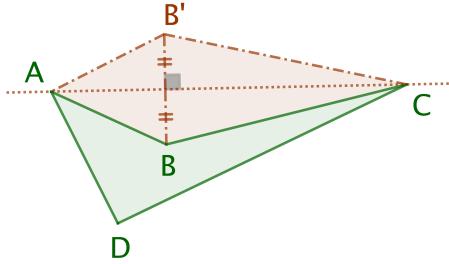
Via une homothétie de rapport $k = \frac{\text{Perim}(ABCD)}{\text{Perim}(ABHH')} \geq 1$, nous obtenons un rectangle de périmètre égal à p , et d'aire supérieure ou égale à $\text{Aire}(ABCD)$, avec égalité uniquement si $ABCD$ est un rectangle. Nous revenons à la situation du fait 3 qui permet de conclure très facilement. \square

Remarque 3.3. *Une méthode analytique devient pénible ici, car il faut par exemple prendre en compte l'angle au sommet A du parallélogramme. L'auteur préfère battre en retraite en clôturant cette remarque ici.*

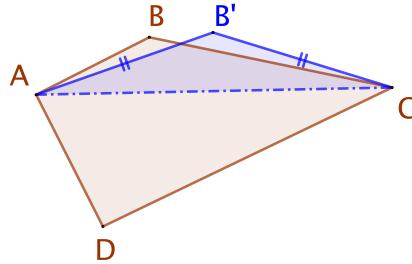
3.3. Le cas général.

Fait 5. *Considérons tous les quadrilatères de périmètre fixé p . Parmi tous ces quadrilatères, un seul est d'aire maximale, c'est le carré de côté $c = 0,25p$.*

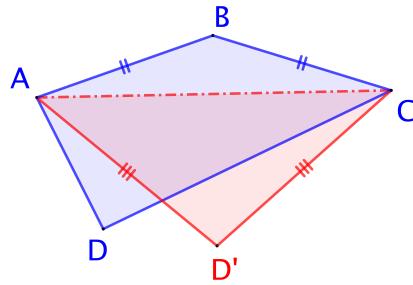
Démonstration. Rappelons, ou indiquons, qu'un quadrilatère \mathcal{Q} est convexe si pour toute paire de points M et N de la surface associée à \mathcal{Q} , le segment $[MN]$ est contenu dans cette surface (cette définition se généralise aux polygones). La figure suivante montre que pour tout quadrilatère $ABCD$ non convexe en B , et de périmètre p , il existe un quadrilatère convexe $AB'CD$ de périmètre p , et tel que $\text{Aire}(AB'CD) > \text{Aire}(ABCD)$. Notre recherche doit donc continuer dans l'ensemble des quadrilatères convexes de périmètre p .



Si un quadrilatère convexe $ABCD$ de périmètre p est tel que $AB \neq BC$, le fait 1 nous donne un quadrilatère convexe $AB'CD$ de périmètre p ,⁸ et vérifiant aussi $AB' = B'C$ et $\text{Aire}(AB'CD) > \text{Aire}(ABCD)$ comme le montre la figure ci-après. On se ramène donc au cas d'un quadrilatère convexe $ABCD$ de périmètre p avec en plus $AB = BC$.

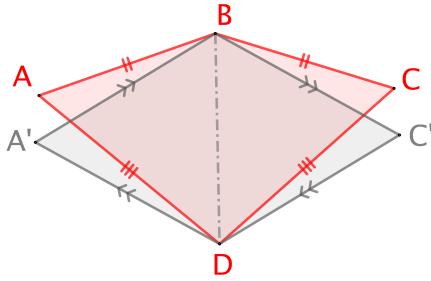


La méthode précédente appliquée au sommet D d'un quadrilatère convexe $ABCD$ de périmètre p tel que $AB = BC$ et $AD \neq DC$ permet en fait de se ramener au cas d'un cerf-volant $ABCD$ de périmètre p , avec $AB = BC$ et $AD = DC$, voir ci-dessous.



En supposant que notre cerf-volant ne soit pas un losange, le fait 1 appliqué aux sommets A et C fournit un losange $A'BC'D$ de périmètre p , et tel que $\text{Aire}(A'BC'D) > \text{Aire}(ABCD)$. En effet, nous avons $p = 2(AB + AD)$ et $\text{Perim}(A'BD) = \text{Perim}(ABD)$, donc $A'B = A'D = 0,25p$, et de même, nous obtenons $C'B = C'D = 0,25p$.

8. Noter que $\text{Perim}(AB'CD) = \text{Perim}(AB'C) + \text{Perim}(ACD) - 2AC$.



Pour conclure, il suffit d'appliquer le fait 4, puisque tout losange est un parallélogramme. Que la géométrie est belle ! \square

4. LES POLYGONES

4.1. Où allons-nous ? Pour passer au cas des polygones à n côtés pour $n \geq 5$, nous allons généraliser l'idée de la démonstration 2.3. Cela va nécessiter la manipulation d'objets plus souples que les polygones, les n -cycles, et l'emploi d'une aire signée. Nous commencerons par vérifier que le problème de l'isopérimétrie admet au moins une solution, puis nous partirons à la recherche des solutions optimales.

4.2. Quelques définitions.

Définition 1. Pour $n \geq 3$, un « n -cycle » désigne une ligne brisée fermée à n sommets et n côtés sans restriction particulière (tous les cas pathologiques sont acceptés).

Définition 2. Un « n -gone » est un n -cycle n'admettant aucun couple de sommets confondus, ni aucun couple de côtés non contigüs sécants.

Définition 3. Un n -gone est dit « équilatéral » si tous ses côtés sont de même mesure.

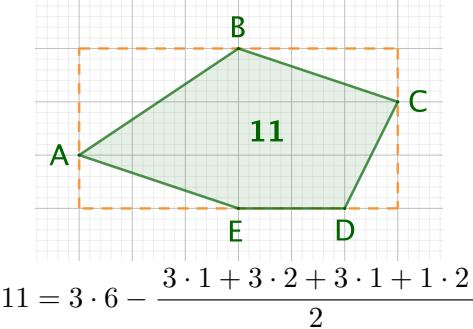
Définition 4. Un « n -isogone » est un n -gone dont tous les angles au sommet sont de même mesure.

Définition 5. Un n -gone est dit « régulier » si c'est un n -isogone équilatéral.

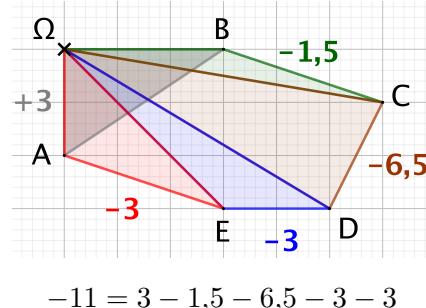
Remarque 4.1. Un losange non carré est un n -gone équilatéral convexe non régulier, et un rectangle non carré est un n -isogone convexe non régulier.

4.3. Au moins une solution. Il est connu que tout triangle ABC possède une aire donnée par $\frac{1}{2} \left| \det(\vec{AB}, \vec{AC}) \right|$ où $\frac{1}{2} \det(\vec{AB}, \vec{AC})$ est l'aire algébrique de ABC . Il devient naturel de définir l'aire algébrique d'un n -gone via celles de triangles comme dans l'exemple suivant utilisant les triangles ΩAB , ΩBC , ΩCD , ΩDE et ΩEA . A priori, le résultat pourrait dépendre du point Ω employé, mais le fait 6, donné plus bas, montrera que ce n'est pas le cas.

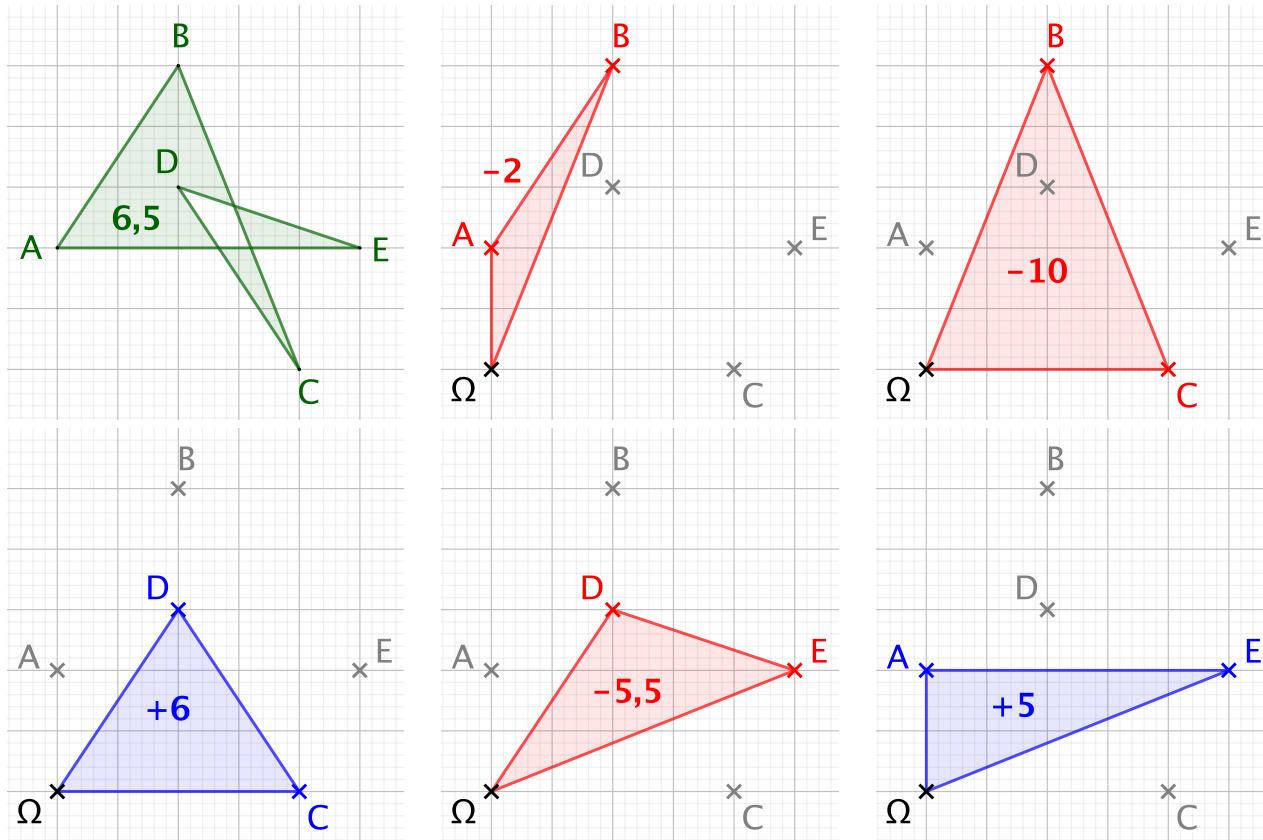
Calcul direct à la main.



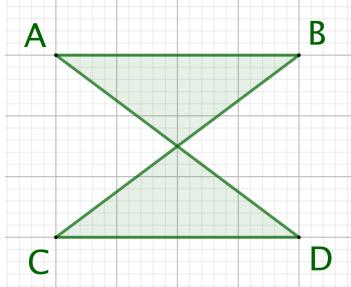
Via le déterminant.



Ce mode de calcul est celui employé par **GeoGebra** qui donne une aire de 6,5 pour le polygone croisé de la bande dessinée ci-après qui détaille les calculs faits : les aires algébriques représentées en bleu sont positives, et celles en rouge négatives.⁹ Nous obtenons un total de (-6,5), soit la valeur fournie par **GeoGebra** au signe près.



Avant de formaliser ce qui précède, il faut noter que la notion d'aire algébrique est à manier avec prudence lorsqu'on la découvre. Si c'est votre cas, que pensez-vous de l'aire algébrique du quadrilatère croisé $ABCD$ ci-dessous qui est un antiparalléléogramme très particulier ? Réponse en note de bas de page.¹⁰



9. Le triangle ΩAB est rouge, car orienté dans le sens horaire lorsqu'on le lit, tandis que ΩCD est bleu, car orienté suivant le sens anti-horaire.

10. La réponse est 0. Comme nous verrons que le choix de Ω est libre, il suffit de faire les calculs avec Ω l'intersection des segments $[AD]$ et $[BC]$. On peut donner du sens à ceci. Voici comment. Plongeons-nous dans l'espace. Imaginons une toile rectangulaire bleue sur le dessus, et rouge en dessous. Tournons de 180° verticalement l'un des côtés du rectangle. En supposant que la toile soit parfaitement tendue, nous obtenons, vue de dessus, un antiparalléléogramme dont l'un des triangles est bleu, et l'autre rouge. De façon savante, les deux faces ont deux orientations différentes. Nous reparlerons de cette notion plus tard, c'est elle qui justifie les jeux de signes dans les calculs introductifs précédents.

Définition 6. Pour tout n -cycle $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$, on définit $(A'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ comme étant n -périodique, et vérifiant $A'_i = A_i$ sur $\llbracket 1 ; n \rrbracket$.

Fait 6. Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n -cycle. La fonction qui à un point Ω du plan associe $\mu_1^n(\Omega ; \mathcal{L}) = \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}})$ est indépendante du point Ω . Dans la suite, cette quantité indépendante de Ω sera notée $\mu_1^n(\mathcal{L})$.

Démonstration. Soit M un autre point du plan.

$$\mu_1^n(\Omega ; \mathcal{L})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MA'_{i+1}}) \quad \text{() } \text{Cette bonne vieille relation de Chasles.} \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) + \det(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) + \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M}) + \mu_1^n(M ; \mathcal{L}) \\
&= \mu_1^n(M ; \mathcal{L}) + \sum_{i=2}^{n+1} \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_i}) - \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_i}) \\
&= \mu_1^n(M ; \mathcal{L}) + \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{n+1}}) - \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_1}) \quad \text{() } A'_{n+1} = A'_1 \\
&= \mu_1^n(M ; \mathcal{L})
\end{aligned}$$

□

Fait 7. Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n -cycle. Pour $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, le n -cycle $\mathcal{L}_j = B_1 B_2 \cdots B_n$, où $B_i = A'_{i+k-1}$, vérifie $\mu_1^n(\mathcal{L}) = \mu_1^n(\mathcal{L}_k)$. Dans la suite, cette quantité commune sera notée $\mu(\mathcal{L})$.

Démonstration. Il suffit de s'adonner à un petit jeu sur les indices de sommation. □

Fait 8. Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n -cycle. le n -cycle $\mathcal{L}^{\text{op}} = B_1 B_2 \cdots B_n$, où $B_i = A_{n+1-i}$, vérifie $\mu(\mathcal{L}^{\text{op}}) = -\mu(\mathcal{L})$.

Démonstration. Soit Ω un point quelconque du plan.

$$\mu(\mathcal{L}^{\text{op}})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega B'_i}, \overrightarrow{\Omega B'_{i+1}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_{n+1-i}}, \overrightarrow{\Omega A'_{n-i}}) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \det(\overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}, \overrightarrow{\Omega A'_j}) \quad \text{() } A'_0 = A'_n \text{ et } A'_1 = A'_{n+1} \\
&= \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}, \overrightarrow{\Omega A'_j}) \\
&= - \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_j}, \overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}) \\
&= -\mu(\mathcal{L})
\end{aligned}$$

□

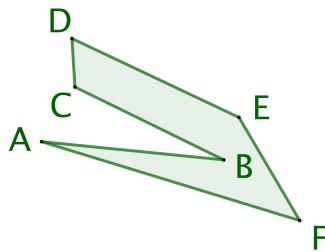
Fait 9. Soit $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ un n -cycle. La quantité $\frac{1}{2}|\mu(\mathcal{L})|$ ne dépend ni du sens de parcours de \mathcal{L} , ni du point de départ choisi.¹¹ Elle sera notée $\text{AireGene}(\mathcal{L})$, et nommée « aire généralisée » du n -cycle \mathcal{L} , tandis que $\frac{1}{2}\mu(\mathcal{L})$ sera appelé « aire algébrique » de \mathcal{L} .

Démonstration. C'est une conséquence directe des faits 7 et 8. □

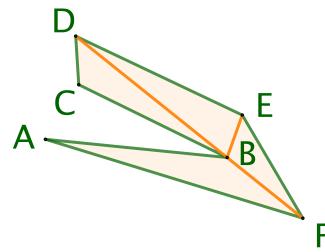
Dans la suite, nous aurons besoin de savoir que $\text{AireGene}(\mathcal{P}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$ pour tout n -gone \mathcal{P} . Ceci est évident dans le cas convexe, car il suffit de choisir l'isobarycentre G de A_1, A_2, \dots, A_n pour le calcul de $\text{AireGene}(\mathcal{P})$: en effet, avec ce choix, tous les déterminants $\det(G\vec{A_i}, G\vec{A_{i+1}})$ ont le même signe. Dans le cas non-convexe, les choses se compliquent a priori, car nous ne maîtrisons plus les signes des déterminants. Heureusement, nous avons le résultat suivant.

Fait 10. Soit un n -gone \mathcal{P} de n -cycle associé $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ tel que A_1, A_2, \dots, A_n soient parcourus dans le sens trigonométrique, ou anti-horaire. Un tel n -cycle sera dit « positif ».¹² Sous cette hypothèse, nous avons $\mu(\mathcal{L}) \geq 0$.

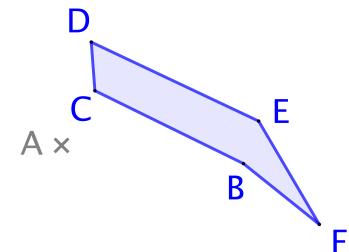
Démonstration. Le théorème de triangulation affirme que tout n -gone est triangulable comme dans l'exemple très basique suivant qui laisse envisager une démonstration par récurrence en retirant l'un des triangles ayant deux côtés correspondant à deux côtés consécutifs du n -gone (pour peu qu'un tel triangle existe toujours).



Un n -gone « nu ».



Le n -gone triangulé.



Le n -gone allégé.

Le théorème de triangulation admet une forme forte donnant une décomposition contenant un triangle formé de deux côtés consécutifs du n -gone.¹³ Nous dirons qu'une telle décomposition est « à l'écoute ». Ce très mauvais jeu de mots fait référence à la notion sérieuse « d'oreille » pour un n -gone : une oreille est un triangle inclus dans le n -gone, et formé de deux côtés consécutifs du n -gone. L'exemple suivant donne un n -gone ayant juste deux oreilles.¹⁴



Un n -gone basique.



Juste deux oreilles disponibles.

11. Le lecteur pardonnera les abus de langage utilisés.

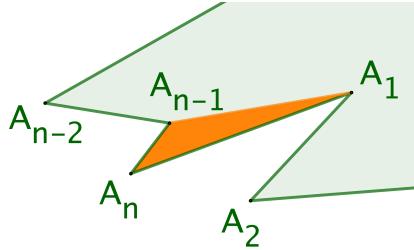
12. Bien noté que cette notion ne peut pas exister pour un polygone croisé. De façon cachée, nous utilisons le célèbre théorème de Jordan, dans sa forme polygonale.

13. En pratique, cette forme forte est peu utile, car elle aboutit à un algorithme de recherche trop lent.

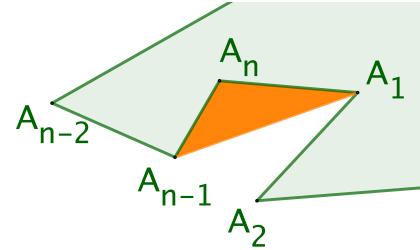
14. On démontre que tout n -gone admet au minimum deux oreilles.

Raisonnons donc par récurrence sur $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

- **Cas de base.** Soit ABC un triangle. Dire que les sommets A , B et C sont parcourus dans le sens trigonométrique, c'est savoir que $\mu(ABC) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) > 0$.
- **Héritéité.** Soient un n -gone \mathcal{P} , avec $n \in \mathbb{N}_{>3}$, et $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ un n -cycle positif qui lui est associé. On peut supposer que $A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille d'une triangulation à l'écoute du n -gone \mathcal{P} .



$A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille.



$A_{n-1}A_nA_1$ n'est pas une oreille.

Notons \mathcal{P}' le k -gone associé au k -cycle $\mathcal{L}' = A_1 \cdots A_{n-1}$ où $k = n - 1$ vérifie $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Par hypothèse, \mathcal{L}' est positive. Nous arrivons aux calculs élémentaires suivants en utilisant $\Omega = A_1$ comme point de calcul de $\mu(\mathcal{L})$.

$$\begin{aligned}
 \mu(\mathcal{L}) &= \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_1A'_j}, \overrightarrow{A_1A'_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1A'_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A'_n}) + \det(\overrightarrow{A_1A'_n}, \overrightarrow{A_1A'_{n+1}}) \\
 &= \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_1A_j}, \overrightarrow{A_1A_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A_n}) + \det(\overrightarrow{A_1A_n}, \overrightarrow{A_1A_1}) \\
 &= \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_1A_j}, \overrightarrow{A_1A_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A_n}) \\
 &= \mu(\mathcal{L}') + \mu(A_{n-1}A_nA_1)
 \end{aligned}$$

A₁ = A_{n+1}'
A_i = A_i' pour i ≤ n

Par hypothèse de récurrence, nous savons que $\mu(\mathcal{L}') \geq 0$, et comme $A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille de \mathcal{P} , la 3-ligne $A_{n-1}A_nA_1$ est forcément positive, d'où $\mu(A_{n-1}A_nA_1) \geq 0$ d'après le cas de base. Nous arrivons bien à $\mu(\mathcal{L}) \geq 0$, ce qui permet de finir aisément la démonstration par récurrence.

□

Fait 11. Pour tout n -gone \mathcal{P} , nous avons : $\text{AireGene}(\mathcal{P}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Les deux points suivants permettent de faire une preuve par récurrence.

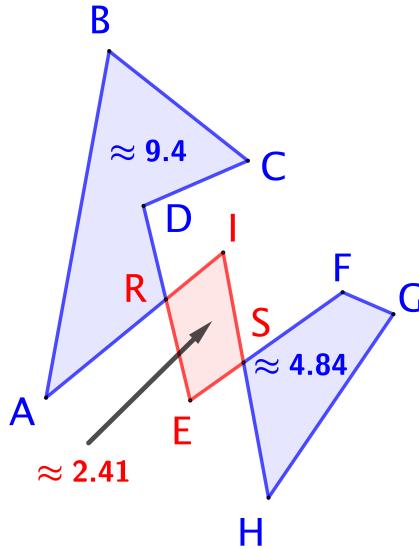
- **Cas de base.** L'égalité est immédiate pour les triangles (c'est ce qui a motivé la définition de l'aire généralisée).
- **Héritéité.** Reprenons les notations de la démonstration du fait 10 : \mathcal{P} est un n -gone, avec $n \in \mathbb{N}_{>3}$, $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ un n -cycle positif qui lui est associé, $A_{n-1}A_nA_1$ une oreille d'une triangulation à l'écoute du n -gone \mathcal{P} , \mathcal{P}' le k -gone associé au k -cycle $\mathcal{L}' = A_1 \cdots A_{n-1}$ où $k = n - 1$ vérifie $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, avec \mathcal{L}' positive. Nous arrivons aux calculs élémentaires suivants.

$$\begin{aligned}
 & \text{Aire}(\mathcal{P}) \\
 &= \text{Aire}(\mathcal{P}') + \text{Aire}(A_{n-1}A_nA_1) \\
 &= \text{AireGene}(\mathcal{P}') + \text{AireGene}(A_{n-1}A_nA_1) \\
 &= \frac{1}{2}(\mu(\mathcal{L}') + \mu(A_{n-1}A_nA_1)) \\
 &= \frac{1}{2}\mu(\mathcal{L}) \\
 &= \text{AireGene}(\mathcal{P})
 \end{aligned}$$

↘ *$A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille de \mathcal{P} .*
 ↘ *Hypothèse de récurrence et cas de base.*
 ↘ *Voir le fait 10.*
 ↘ *Comme dans la preuve du fait 10.*
 ↘ *Voir le fait 10.*

□

Avant d'avancer, nous devons mieux comprendre le calcul de $\text{AireGene}(\mathcal{L})$ pour un n -cycle \mathcal{L} correspondant à un polygone croisé. Considérons la figure suivante produite via **GeoGebra**, ce dernier donnant les valeurs indiquées sur l'image où l'on constate que $9,4 - 2,41 + 4,84 = 11,83$.



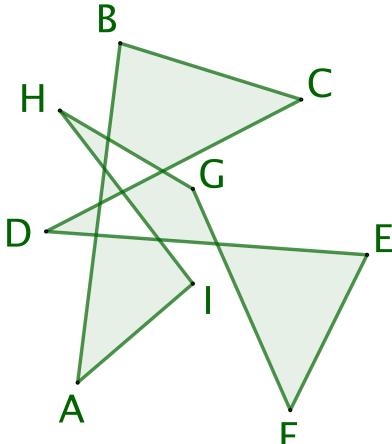
$$\text{Aire(ABCDEFGHI)} \approx 11.83$$

Pour calculer l'aire généralisée d'un polygone croisé associé au n -cycle \mathcal{L} , il suffit de procéder comme suit (cette méthode est utile pour un humain).

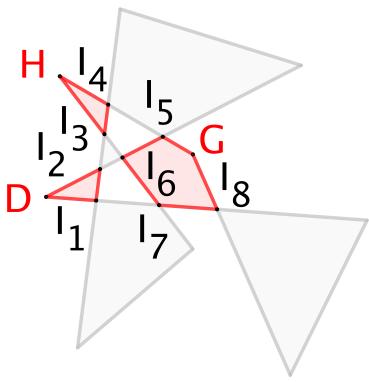
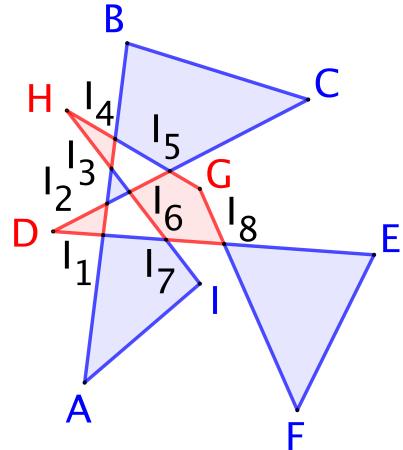
- On part d'un point, puis on parcourt le n -cycle dans un sens donné jusqu'à la première intersection croisée. Dans notre exemple, on va de A à R .
- De cette intersection, on change de direction pour choisir celle allant vers notre point de départ. Dans notre exemple, nous obtenons le k -cycle $ABCDR$.
- Le reste des points non parcourus fournit un autre k -cycle qui est $REFGHI$ dans notre cas. Formellement, nous avons scindé $ABCDEFGHI$ en $ABCDR$ et $REFGHI$.
- On répète ce processus avec les sous k -cycles obtenus jusqu'à n'avoir que des k -gones. Pour notre exemple, nous avons trois k -gones $ABCDR$, $RESI$ et $SFGH$.
- Les k -gones obtenus sont ordonnés en respectant l'ordre du n -cycle initial.
- Le calcul de l'aire généralisée se fait en ajoutant les aires des k -gones de rang impair, puis en retirant celles des k -gones de rang pair. En appliquant la valeur absolue au résultat obtenu, nous obtenons l'aire généralisée du polygone croisé initial. Dans notre exemple, nous devons calculer $|\text{Aire}(ABCDR) - \text{Aire}(RESI) + \text{Aire}(SFGH)|$.

Pourquoi cela fonctionne-t-il ? Il suffit de revenir à la définition de $\mu(\mathcal{L})$ pour constater qu'une règle de type Chasles existe, et de plus qu'en utilisant un point d'intersection de deux arêtes

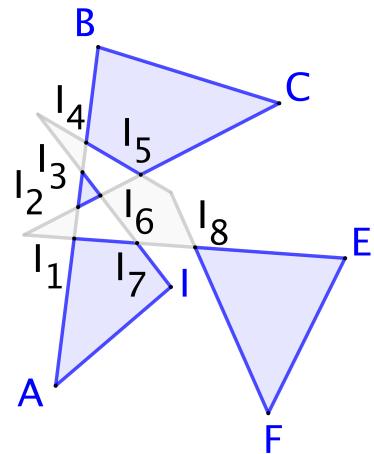
pour un calcul effectif de $\mu(\mathcal{L})$, nous avons un changement de sens de parcours du point de vue de ce point d'intersection, ceci justifiant les changements de signe de notre recette, qui n'en est plus une. Pour le cas suivant, notre approche, plus combinatoire que géométrique, donne $12,26 - 1,96 = 10,3$ comme attendu.



$$\text{Aire}(\text{ABCDEFGHI}) \approx 10.3$$



$$\begin{aligned} &\approx 0.28 + 0.27 + 1.4 \\ &\approx 1.96 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\approx 0.13 + 4.69 + 3.16 + 4.28 \\ &\approx 12.26 \end{aligned}$$

Fait 12. Si un n -cycle \mathcal{L} non dégénéré n'est pas un n -gone, donc est un polygone croisé, alors il existe un n -gone convexe \mathcal{P} tel que $\text{Perim}(\mathcal{P}) = \text{Perim}(\mathcal{L})$ et $\text{AireGene}(\mathcal{P}) > \text{AireGene}(\mathcal{L})$.

Démonstration. Notons \mathcal{C} l'enveloppe convexe de \mathcal{L} . La méthode de calcul de $\text{AireGene}(\mathcal{L})$ exposée ci-dessus donne sans ambiguïté que $\text{AireGene}(\mathcal{C}) > \text{AireGene}(\mathcal{L})$. De plus, il est clair que $\text{Perim}(\mathcal{C}) < \text{Perim}(\mathcal{L})$. Par contre, nous savons juste que \mathcal{C} est un k -gone avec $k < n$. Ceci est un faux problème comme nous l'avons vu dans la preuve du fait ??, ce qui nous permet de conclure. \square

Fait 13. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Considérons tous les n -gones de périmètre fixé. Parmi tous ces n -gones, il en existe au moins un d'aire maximale.

Démonstration. Ce qui suit nous donne plus généralement l'existence d'un n -gone, au moins, maximisant l'aire généralisée parmi tous les n -cycles de périmètre fixé p . Ce résultat plus fort convient d'après le fait 11.

- Munissant le plan d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note \mathcal{Z} l'ensemble des n -cycles $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ tels que $\text{Perim}(A_1A_2 \cdots A_n) = p$ et $A_1(0; 0)$,¹⁵ puis $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des uplets de coordonnées $(x(A_1); y(A_1); \dots; x(A_n); y(A_n))$ pour $A_1A_2 \cdots A_n \in \mathcal{Z}$.
- \mathcal{G} est clairement fermé dans \mathbb{R}^{2n} . De plus, il est borné, car les coordonnées des sommets des n -cycles considérés le sont. En résumé, \mathcal{G} est un compact de \mathbb{R}^{2n} .
- Nous définissons la fonction $s : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui à un uplet de \mathcal{G} associe l'aire généralisée du n -cycle qu'il représente. Cette fonction est continue comme valeur absolue d'une fonction polynomiale en les coordonnées.
- Finalement, par continuité et compacité, on sait que s admet un maximum sur \mathcal{G} . Or, un tel maximum ne peut pas être atteint en un n -cycle dégénéré, clairement, ni en un polygone croisé d'après le fait 12, donc un tel maximum sera obtenu en un n -gone. That's all folks !

□

15. Le mot « *Zeile* » est une traduction possible de « *ligne* » en allemand.