BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts.

Mentions « légales »

Table des matières

0.1. Des preuves courtes non géométriques 2
0.2. Solutions, qui êtes-vous ? 3

Date: 18 Jan. 2025 – 6 Mars 2025.

0.1. **Des preuves courtes non géométriques.**

Nous donnons ici des preuves courtes du fait **??**, mais sans notion géométrique intuitive. Efficacité versus beauté, l'auteur a choisi son camp depuis longtemps !

Démonstration alternative 1. Selon **la formule de Héron**, $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ est l'aire d'un triangle de côtés a, b, c et de demi-périmètre $s = 0{,}5p$. La comparaison des moyennes géométrique et arithmétique[1] donne $\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}\big((s-a)+(s-b)+(s-c)\big)$, puis $s(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{1}{27}s^4$, et enfin $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{p^2}{12\sqrt{3}}$ où $\frac{p^2}{12\sqrt{3}}$ est l'aire du triangle équilatéral de périmètre p. □

Démonstration alternative 2. Faisons appel à **l'analyse élémentaire aidée du fait ??**. Ce fait permet de se concentrer sur ABC isocèle en C. Choisissons un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tel que $A\,(\,0\,;0\,)$, $B\,(\,AB\,;0\,)$ et $C\,(\,x_C\,;y_C\,)$ avec $y_C \geq 0$, et posons $c = AC = BC \neq 0$ et $s = \frac{p}{2}$. Donc $x_B = 2s-2c \neq 0$, et $y_C = \sqrt{c^2-(s-c)^2}$, puis $\mathrm{Aire}(ABC)^2 = (s-c)^2(c^2-(s-c)^2)$, soit $\mathrm{Aire}(ABC)^2 = s(s-c)^2(s-2c)$.[2] Or, le maximum de la fonction $\alpha : c \mapsto s(s-c)^2(s-2c)$ est forcément atteint en c annulant $\alpha'(c) = -2s(s-c)(s-2c)-2s(s-c)^2 = 2s(c-s)(2s-3c)$, soit pour $c = \frac{2s}{3} = \frac{p}{3}$, car $c = s$ est exclu, donc ABC équilatéral est la solution « optimale ». □

Démonstration alternative 3. Utilisons **juste la continuité et la compacité**.

- On munit le plan d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
- Les triangles ABC tels que $\mathrm{Perim}(ABC) = p$ sont représentés en posant $A\,(\,0\,;0\,)$, $B\,(\,AB\,;0\,)$ et $C\,(\,x_C\,;y_C\,)$ avec $y_C \geq 0$. Un triangle peut donc avoir trois représentations, mais peu importe. De plus, on accepte les triangles dégénérés pour lesquels nous avons $x_B = 0$ ou $y_C = 0$ dans notre représentation. Nous notons alors $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble des triplets $(\,x_B\,;x_C\,;y_C\,)$ ainsi obtenus.
- Il est facile de justifier que $\mathcal{T}$ est séquentiellement fermé dans $\mathbb{R}^3$. De plus, $\mathcal{T}$ est borné car x_B, x_C et y_C le sont. En résumé, $\mathcal{T}$ est un compact de $\mathbb{R}^3$.
- La fonction $\alpha : (\,x_B\,;x_C\,;y_C\,) \in \mathcal{T} \mapsto 0{,}5x_By_C \in \mathbb{R}_+$ est la fonction *« aire »* des triangles représentés. Par continuité et compacité, α admet un maximum sur $\mathcal{T}$.
- Notons ABC un triangle maximisant α. Forcément, ABC n'est pas dégénéré. Le fait **??** implique que ABC est équilatéral. En effet, dans le cas contraire, il existe un sommet X en lequel ABC n'est pas isocèle, mais la « maximalité » de ABC contredit le fait **??** en considérant comme fixé le côté opposé au sommet X. □

Démonstration alternative 4. Nous allons faire appel à **la méthode des extrema liés et la formule de Héron**. Pour cela, notons que l'aire d'un triangle étant positive ou nulle, nous pouvons chercher à maximiser son carré $f(a\,;b\,;c) = s(s-a)(s-b)(s-c)$ sous la contrainte $2s = a+b+c$ où $s = 0{,}5p > 0$ est constant. Notant $g(a\,;b\,;c) = a+b+c-2s$, la contrainte s'écrit $g(a\,;b\,;c) = 0$.

- Si un extremum existe, $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\partial_a f = \lambda\partial_a g$, $\partial_b f = \lambda\partial_b g$ et $\partial_c f = \lambda\partial_c g$ d'après la méthode des extrema liés.
- Donc $-s(s-b)(s-c) = -s(s-a)(s-c) = -s(s-a)(s-b)$, et par conséquent $(s-b)(s-c) = (s-a)(s-c) = (s-a)(s-b)$.
- Les cas $s = a$, $s = b$ et $s = c$ donnent $f(a\,;b\,;c) = 0$.

1. La formule de Héron reste un argument géométrique, mais quid de la comparaison des moyennes géométrique et arithmétique d'ordre 3, généralement justifiée via la concavité de la fonction logarithme. À l'ordre 2, l'inégalité s'obtient aisément par un argument géométrique simple : voir la remarque **??**.
2. Nous venons de démontrer la formule de Héron dans le cas particulier d'un triangle isocèle.

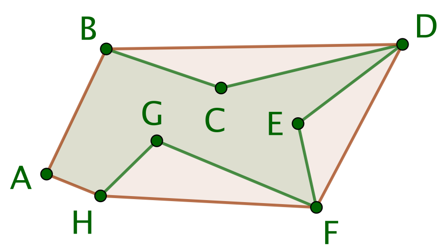
- Le cas $\left[s \neq a, s \neq b \text{ et } s \neq c\right]$ n'est envisageable que si $a = b = c = \frac{p}{3}$, ceci impliquant $f(a\,;b\,;c) = \frac{1}{16}p\left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{p^2}{12\sqrt{3}}\right)^2 > 0$.
- En résumé, l'existence d'un maximum implique que ce maximum corresponde au cas du triangle équilatéral.
- Il reste à démontrer qu'un tel maximum existe pour pouvoir conclure : ceci est facile à justifier en considérant l'ensemble compact $[0\,;2s]^3$ de $\mathbb{R}^3$, et la continuité de f. □

0.2. **Solutions, qui êtes-vous ?** Cette section va établir que, relativement au problème d'isopérimétrie polygonal, un n-gone solution doit être convexe, puis qu'un n-gone convexe solution doit être un n-gone régulier, et enfin que si $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont respectivement un k_1-gone et un k_2-gone, tous les deux réguliers convexes, avec $k_1 < k_2$ et $\mathrm{Perim}(\mathcal{R}_1) = \mathrm{Perim}(\mathcal{R}_2)$, alors $\mathrm{Aire}(\mathcal{R}_1) < \mathrm{Aire}(\mathcal{R}_2)$. Nous pourrons alors conclure dans la section finale suivante.

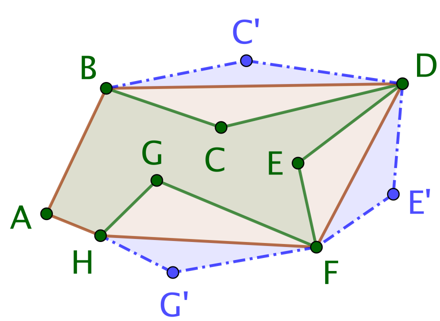
Les cas $n = 3$ et $n = 4$ étant résolus, voir les faits **??** *et* **??***, dans toutes les preuves de cette section, nous supposerons $n \geq 5$, pour ne pas alourdir le texte.*

Fait 1. *Pour tout n-gone non convexe $\mathcal{P}$, alors on peut construire un n-gone convexe $\mathcal{C}$ tel que* $\mathrm{Perim}(\mathcal{C}) = \mathrm{Perim}(\mathcal{P})$ *et* $\mathrm{Aire}(\mathcal{C}) > \mathrm{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ l'enveloppe convexe d'un n-gone non convexe $\mathcal{P}$ (voir ci-dessous).

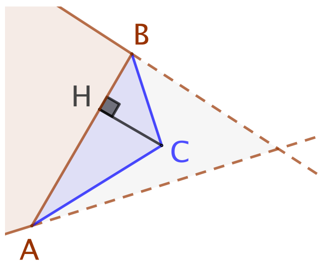


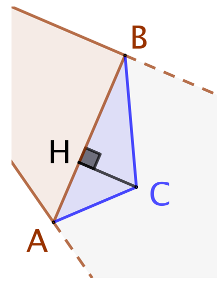
Clairement, $\mathrm{Perim}(\mathcal{E}) < \mathrm{Perim}(\mathcal{P})$ et $\mathrm{Aire}(\mathcal{E}) > \mathrm{Aire}(\mathcal{P})$, mais $\mathcal{E}$ est un s-gone avec $s < n$. Pour gérer ce problème, une idée simple, formalisée après, est d'ajouter des sommets assez prêts des côtés de $\mathcal{E}$ pour garder la convexité, un périmètre inférieur à $\mathrm{Perim}(\mathcal{P})$, et une aire supérieure à $\mathrm{Aire}(\mathcal{P})$. Si c'est faisable, une homothétie de rapport $r \geq 1$, où $r = \frac{\mathrm{Perim}(\mathcal{P})}{\mathrm{Perim}(\mathcal{E})}$, donnera le n-gone convexe $\mathcal{C}$ cherché. La figure suivante illustre cette idée.



Notons $m = n - s$ qui compte les sommets manquants, puis posons $\delta = \frac{\text{Perim}(\mathcal{P}) - \text{Perim}(\mathcal{E})}{m}$.

(1) Considérons $[AB]$ un côté quelconque de $\mathcal{E}$. Les droites portées par les côtés *« autour »* de $[AB]$ *« dessinent »* une région contenant toujours un triangle ABC dont l'intérieur est à l'extérieur [3] de $\mathcal{E}$ comme dans les deux cas ci-dessous.





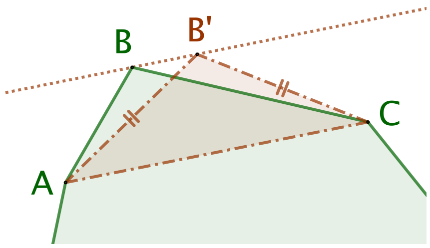
(2) Clairement, le polygone $\mathcal{E}_+$ obtenu à partir de $\mathcal{E}$ en remplaçant le côté $[AB]$ par les côtés $[AC]$ et $[CB]$ est un convexe avec un sommet de plus que $\mathcal{E}$.

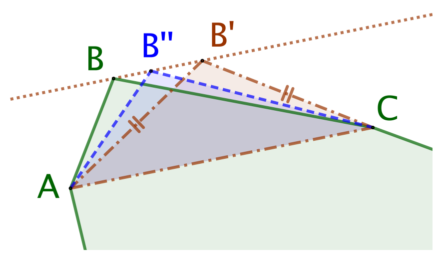
(3) Comme HC peut être rendu aussi proche de 0 que souhaité, il est aisé de voir que l'on peut choisir cette distance de sorte que $AC + BC < AB + \delta$. Dès lors, le périmètre de $\mathcal{E}_+$ augmente inférieurement strictement à δ relativement à $\mathcal{E}$.

(4) En répétant $(m-1)$ fois les étapes 1 à 3, nous obtenons un n-gone convexe $\mathcal{C}$ tel que $\text{Aire}(\mathcal{C}) > \text{Aire}(\mathcal{P})$ et $\text{Perim}(\mathcal{C}) < \text{Perim}(\mathcal{E}) + m\delta = \text{Perim}(\mathcal{P})$. □

Fait 2. *Si un n-gone convexe $\mathcal{P}$ n'est pas équilatéral, alors on peut construire un n-gone convexe $\mathcal{P}'$ tel que* $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$ *et* $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Considérons un n-gone convexe non équilatéral $\mathcal{P}$. Dans ce cas, $\mathcal{P}$ admet un triplet de sommets consécutifs A, B et C tels que $AB \neq BC$ (sinon, on obtiendrait de proche en proche l'équilatéralité). La construction vue dans la preuve du fait **??** nous donne la solution : voir les deux dessins ci-après dans lesquels $(AC) \mathbin{/\!/} (BB')$. Pour le 2^e^ cas, il n'est pas possible d'utiliser le triangle $AB'C$ isocèle en B' car $(B'C)$ porte le côté de $\mathcal{P}$ de sommet C juste après $[BC]$, mais ce problème se contourne en considérant un point B'' du segment ouvert $]BB'[$ (si besoin, se reporter au 2^e^ dessin de la preuve du fait **??**).





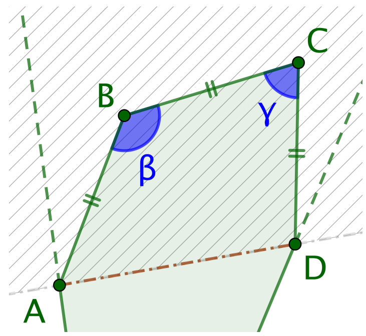
Dans chaque cas, nous avons construit un n-gone convexe $\mathcal{P}''$ tel que $\text{Perim}(\mathcal{P}'') < \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}'') = \text{Aire}(\mathcal{P})$. Une homothétie de rapport $r > 1$, où $r = \frac{\text{Perim}(\mathcal{P})}{\text{Perim}(\mathcal{E})}$, donne un n-gone convexe $\mathcal{P}'$ vérifiant $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$ et $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$. □

Remarque 0.1. *Le fait précédent ne permet pas de se ramener toujours au cas d'un n-gone équilatéral convexe. Il nous dit juste que si un n-gone convexe maximise son aire à périmètre fixé, alors il devra être, a minima, un n-gone équilatéral. La nuance est importante, et une similaire existe pour la conclusion du fait suivant.*

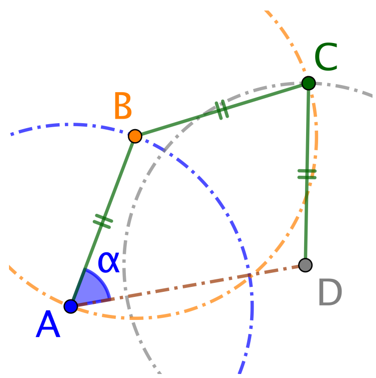
3. C'est ce que l'on appelle de la *« low poetry »*,.

Fait 3. *Si un n-gone équilatéral convexe $\mathcal{P}$ n'est pas équiangle, alors il existe un n-gone $\mathcal{P}'$ tel que* $\operatorname{Perim}(\mathcal{P}') = \operatorname{Perim}(\mathcal{P})$ *et* $\operatorname{Aire}(\mathcal{P}') > \operatorname{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Considérons un n-gone équilatéral convexe non équiangle $\mathcal{P}$. Dans ce cas, $\mathcal{P}$ admet un quadruplet de sommets consécutifs A, B, C et D tels que $\widehat{ABC} \neq \widehat{BCD}$ (sinon, on obtiendrait de proche en proche l'équiangularité). Quitte à changer l'ordre de parcours des sommets de $\mathcal{P}$, nous pouvons supposer $\widehat{ABC} > \widehat{BCD}$.



Les seuls degré de liberté que nous avons sont de bouger les points B et C. Nous décidons de nous limiter à la zone grise hachurée en excluant les droites vertes en pointillés, afin de garder un n-gone. Concentrons-nous donc sur le quadrilatère $ABCD$, et posons $c = AB$ la longueur commune des côtés de $\mathcal{P}$, ainsi que $d = AD$ que nous ne pouvons pas modifier. Si nous fixons la valeur de c, notre situation possède juste un degré de liberté comme le montre, ci-après, la construction de C à partir de cercles de rayon c centrés en A et D fixes, et B mobile.



Cherchons donc à exprimer $\operatorname{Aire}(ABCD)$ en fonction de $\alpha = \widehat{DAB}$, cet angle permettant de repérer le point mobile B.

- Le théorème d'Al-Kashi donne $BD^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\alpha$ dans le triangle ABD, ainsi que $BD^2 = 2c^2 - 2c^2\cos\gamma$ dans le triangle BCD. Donc, $\cos\gamma = 1 - k^2 + 2k\cos\alpha$ où l'on a posé $k = \frac{d}{c}$. [4]
- La formule des sinus donne $\operatorname{Aire}(ABD) = 0{,}5cd\sin\alpha$ et $\operatorname{Aire}(BCD) = 0{,}5c^2\sin\gamma$, donc $\operatorname{Aire}(ABCD) = 0{,}5c^2(k\sin\alpha + \sin\gamma)$. [5]
- XXXX
- Par choix, nous considérons juste $\alpha \in \,]0\,;\pi[$. Un nombre fini de valeurs de α ne seront pas acceptées : ce sont celles amenant B, ou C, sur les droites vertes en pointillés de la 1[re] figure.

4. Notons que l'inégalité triangulaire donne $d \leq 3c$, puis $k \leq 3$.
5. Notons que $\operatorname{Aire}(ABCD) = 0{,}5c^2 f(\alpha)$ en posant $f(\alpha) = k\sin\alpha + \sqrt{1 - (1 - k^2 + 2k\cos\alpha)^2}$, puisque $\sin\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\gamma}$. Malheureusement, la fonction f est peu sympathique, donc nous allons être moins brutaux.

□

Remarque 0.2. *Constrcution ?*

Remarque 0.3. *Une démonstration géométrique courante du fait précédent, que l'on retrouve souvent reproduite, s'appuie sur un résultat attribué à Zénodore sur la maximisation de l'aire totale de deux triangles isocèles de bases fixées, et de périmètre total constant : ce résultat affirme que les deux triangles doivent avoir des angles en leur sommet principal de même mesure. Malheureusement, cette preuve échoue lors de la disparition d'un sommet en choisissant les deux triangles isocèles optimaux pour construire un nouveau n-gone* « plus gros »*, sauf à affiner la recherche comme dans notre approche analytique. Indiquons, au passage, que la preuve du résultat de Zénodore est un peu fastidieuse, sans être ingrate.*

Fait 4. *Si un n-gone $\mathcal{P}$ n'est pas un n-gone régulier convexe, alors il existe un n-gone convexe $\mathcal{P}'$ tel que* $\mathrm{Perim}(\mathcal{P}') = \mathrm{Perim}(\mathcal{P})$ *et* $\mathrm{Aire}(\mathcal{P}') > \mathrm{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser les faits 1, 2 et 3. □

Afin d'en finir avec le problème d'isopérimétrie polygonal, nous aurons besoin du fait suivant.

Fait 5. *Si $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont respectivement un k_1-gone et un k_2-gone, tous les deux réguliers convexes, avec $k_1 < k_2$ et* $\mathrm{Perim}(\mathcal{R}_1) = \mathrm{Perim}(\mathcal{R}_2)$*, alors* $\mathrm{Aire}(\mathcal{R}_1) < \mathrm{Aire}(\mathcal{R}_2)$.

Démonstration. Il est connu, et facile à démontrer, qu'un n-gone régulier convexe $\mathcal{R}$ vérifie $\mathrm{Perim}(\mathcal{R}) = 2n\sin(\frac{\pi}{n})\rho$ et $\mathrm{Aire}(\mathcal{R}) = n\sin(\frac{\pi}{n})\cos(\frac{\pi}{n})\rho^2$ où ρ désigne le rayon du cercle circonscrit à $\mathcal{R}$. Ceci donne $\mathrm{Aire}(\mathcal{R}) = \frac{\mathrm{Perim}(\mathcal{R})^2}{4n\tan(\frac{\pi}{n})}$, puis amène à justifier que $k_1\tan(\frac{\pi}{k_1}) > k_2\tan(\frac{\pi}{k_2})$, c'est-à-dire que la suite $\left(k\tan(\frac{\pi}{k})\right)_{k\in\mathbb{N}_{\geq 3}}$ est strictement décroissante.
XXXX □