BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts.

Mentions « légales »

Table des matières

Date: 18 Jan. 2025 – 4 Mars 2025.

1. Les polygones

1.1. **Où allons-nous ?** Pour passer au cas des polygones à n côtés pour $n \geq 5$, nous allons employer une méthode mêlant analyse, pour l'existence d'au moins une solution via la compacité et la continuité, et géométrie, pour la caractérisation de l'unique solution, l'unicité venant comme cadeau de la recherche de polygones pouvant être gagnants. Dans cette quête, comme pour les quadrilatères, la convexité va jouer un rôle essentiel.

1.2. **Quelques définitions.** Pour l'existence d'au moins une solution, nous allons devoir sortir de l'ensemble des polygones en côtoyant des objets plus souples que sont les n-cycles définis ci-dessous.

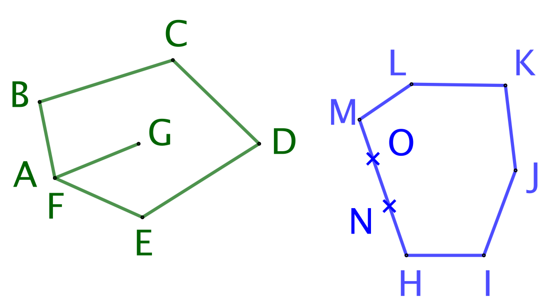
Définition 1. *Pour $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ uniquement, un « n-*cycle* » désigne une liste ordonnée de n points du plan, les répétitions étant possibles. Nous noterons $A_1 A_2 \cdots A_n$ un n-cycle, et appellerons* « sommets » *du n-cycle les points A_i pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, et A_1 sera dit* « origine » *du n-cycle.*

Définition 2. *Pour tout n-cycle $A_1 A_2 \cdots A_n$, on définit $\left(A'_i\right)_{i \in \mathbb{Z}}$ comme étant n-périodique, et vérifiant $A'_i = A_i$ sur $[\![1\,;n]\!]$.*

Définition 3. *Les* « côtés » *d'un n-cycle $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ sont les segments $[A'_i A'_{i+1}]$ pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, et la* « longueur » *de $\mathcal{L}$ est définie par $\operatorname{Long}(\mathcal{L}) = \sum_{i=1}^{n} A'_i A'_{i+1}$.*

Définition 4. *Un n-cycle $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ est dit* « convexe » *si, pour chaque côté $[A'_i A'_{i+1}]$, tous les sommets de $\mathcal{L}$ sont dans un même demi-plan fermé délimité par la droite $(A'_i A'_{i+1})$ (un sommet peut donc être sur cette droite).*

Définition 5. *Un n-cycle est* « dégénéré » *s'il a, au moins, trois sommets consécutifs alignés, et* « totalement dégénéré » *si tous ses sommets sont alignés.*



$ABCDEFG$ est un n-cycle ni dégénéré, ni convexe, et qui n'est pas un n-gone.
$HIJKLMNO$ est un n-cycle dégénéré et convexe.

Définition 6. *Un « n-*gone *» $\mathcal{P}$ est un n-cycle vérifiant les conditions suivantes qui impliquent $n \geq 3$, et que les sommets sont distincts deux à deux.*

- *Les côtés de $\mathcal{P}$ contienne tous exactement deux sommets.*
- *Des côtés non contigus de $\mathcal{P}$ ne sont jamais sécants.*

*Si certains côtés non contigus sont sécants en un point, mais tous les sommets distincts deux à deux, nous parlerons de « n-*gone croisé *».*[1]

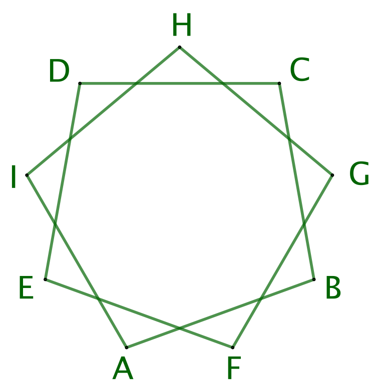
Définition 7. *Un n-gone, croisé ou non, est dit «* équilatéral *» si tous ses côtés sont de même mesure.*

Définition 8. *Un n-gone, croisé ou non, est dit «* équiangle *» si tous ses angles au sommet sont de même mesure.*

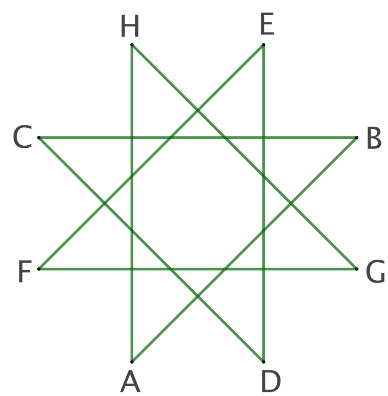
Définition 9. *Un n-gone, croisé ou non, est dit «* régulier *» s'il est à la fois équiangle et équilatéral.*

Remarque 1.1. *Un losange non carré est un n-gone équilatéral convexe non régulier, et un rectangle non carré est un n-gone équiangle convexe non régulier.*

Remarque 1.2. *Il existe des n-gones réguliers et croisés.*



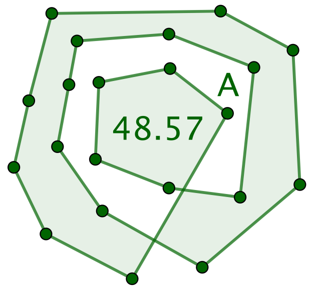
Un ennéagone régulier croisé dit étoilé.[2]

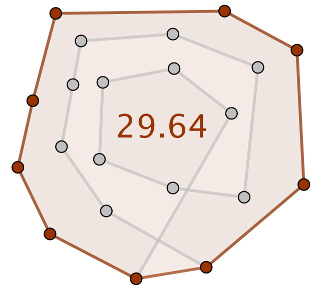


Un octogone régulier croisé dit étoilé.[3]

1.3. **Aire algébrique d'un n-cycle.** L'existence d'un n-gone solution du problème d'isopérimétrie polygonale nécessite un moyen « continu » de calculer une aire polygonale, ou plus généralement celle d'un n-cycle. Pour ce faire, nous utiliserons l'aire algébrique qui est définie pour tout n-cycle $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ par $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \det\left(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}}\right)$ indépendamment du point Ω.[4] Indiquons au passage qu'il faut être prudent avec cette notion comme le montre l'exemple suivant, obtenu avec `GeoGebra`,[5] où le n-gone croisé proposé, construit via une spirale positive depuis le point A,[6] possède une aire algébrique positive supérieure à celle de l'enveloppe convexe du n-gone. Contre-intuitif, mais normal.

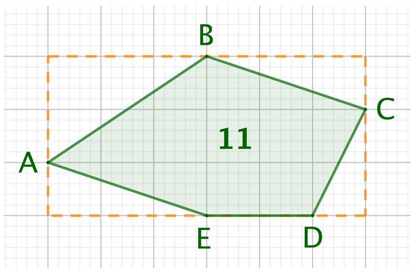
1. Bien retenir que, par définition, un n-gone n'est jamais croisé. Dès lors, la longueur d'un n-gone correspond à son périmètre.
2. La construction se fait via $AFBGCHDIE$ qui est un 9-gone régulier convexe. Elle se généralise à tout n-gone régulier tel que n soit impair.
3. La construction se fait via le 8-gone régulier convexe intérieur. Elle se généralise à tout n-gone régulier tel que n soit pair.
4. Ce fait est démontré un peu plus bas.
5. Quand `GeoGebra` associe un nombre à un n-cycle $\mathcal{L}$, il calcule la valeur absolue de son aire algébrique.
6. En calculant l'aire algébrique avec un point « au centre », les déterminants sont tous positifs.





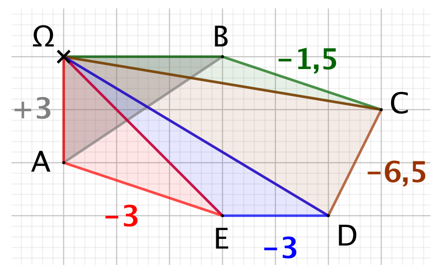
Au commencement étaient les triangles... Il est connu que ABC est d'aire $\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|$ où $\frac{1}{2}\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est appelé aire algébrique de ABC. Pour passer aux polygones, il « suffit » d'utiliser des triangles comme dans l'exemple suivant.

Calcul direct à la main.



$$11 = 3 \cdot 6 - \frac{3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{2}$$

Via le déterminant.



$$-11 = 3 - 1{,}5 - 6{,}5 - 3 - 3$$

Dans le cas précédent, le résultat pourrait dépendre du point Ω employé, mais le fait suivant nous montre que non. Bonne nouvelle ! Yapluka...

Fait 1. *Soit $\mathcal{L} = A_1A_2\cdots A_n$ un n-cycle. La quantité $\mu_1^n(\Omega\,;\mathcal{L}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\det\left(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}}\right)$ est indépendante du point Ω. Dans la suite, cette quantité indépendante de Ω sera notée $\mu_1^n(\mathcal{L})$.*

Démonstration. Soit M un autre point du plan.

$$\begin{aligned}
&\mu_1^n(\Omega\,;\mathcal{L}) \\
=& \sum_{i=1}^{n}\det\left(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}}\right) \\
=& \sum_{i=1}^{n}\det\left(\overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MA'_{i+1}}\right) \\
=& \sum_{i=1}^{n}\left[\det\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M}\right) + \det\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}\right) + \det\left(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M}\right) + \det\left(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}\right)\right] \\
=& \sum_{i=1}^{n}\det\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}\right) + \sum_{i=1}^{n}\det\left(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M}\right) + \mu_1^n(M\,;\mathcal{L}) \\
=& \mu_1^n(M\,;\mathcal{L}) + \sum_{i=2}^{n+1}\det\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_i}\right) - \sum_{i=1}^{n}\det\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_i}\right) \qquad A'_{n+1} = A'_1 \\
=& \mu_1^n(M\,;\mathcal{L})
\end{aligned}$$

□

Fait 2. *Soient $\mathcal{L} = A_1A_2\cdots A_n$ un n-cycle, et le n-cycle $\mathcal{L}_k = B_1B_2\cdots B_n$ par $B_i = A'_{i+k-1}$ où $k \in [\![1\,;n]\!]$, Nous avons $\mu_1^n(\mathcal{L}) = \mu_1^n(\mathcal{L}_k)$. Cette quantité commune sera notée $\mu(\mathcal{L})$.*

Démonstration. Il suffit de s'adonner à un petit jeu sur les indices de sommation. □

Fait 3. *Soient $\mathcal{L} = A_1A_2\cdots A_n$ un n-cycle. et son n-cycle « opposé » $\mathcal{L}^{\text{op}} = B_1B_2\cdots B_n$ où $B_i = A_{n+1-i}$. Nous avons $\mu(\mathcal{L}^{\text{op}}) = -\mu(\mathcal{L})$.*

Démonstration. Soit Ω un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned}
&\mu(\mathcal{L}^{\text{op}}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \det\left(\overrightarrow{\Omega B'_i}, \overrightarrow{\Omega B'_{i+1}}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \det\left(\overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}, \overrightarrow{\Omega A'_j}\right) \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \det\left(\overrightarrow{\Omega A'_j}, \overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}\right) \\
&= -\mu(\mathcal{L})
\end{aligned}$$

$B'_i = A'_{n+1-i}$ *et* $j = n - i$

$A'_0 = A'_n$ *et* $A'_1 = A'_{n+1}$

□

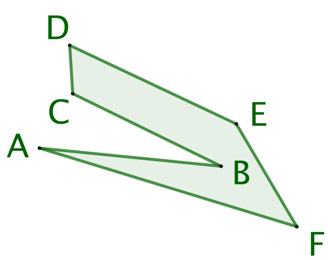
Fait 4. *Soit $\mathcal{L} = A_1A_2\cdots A_n$ un n-cycle. La quantité $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{L}) = \frac{1}{2}\mu(\mathcal{L})$ ne dépend que du sens de parcours de $\mathcal{L}$, mais pas du point de départ.*[7] *Elle sera appelée* « aire algébrique » *de $\mathcal{L}$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe des faits 2 et 3. □

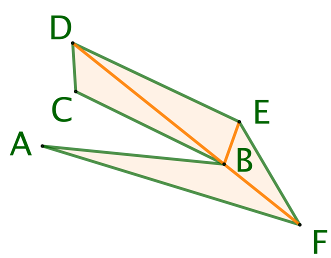
Considérons, maintenant, un n-gone convexe $\mathcal{P} = A_1A_2\cdots A_n$ où les sommets sont parcourus dans le sens anti-horaire. En choisissant l'isobarycentre G des points A_1, A_2, ..., A_n pour calculer $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})$, nous obtenons $\text{Aire}(\mathcal{P}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})$: en effet, avec ce choix, tous les déterminants $\det\left(\overrightarrow{GA'_i}, \overrightarrow{GA'_{i+1}}\right)$ sont positifs. Dans le cas non-convexe, les choses se compliquent a priori, car nous ne maîtrisons plus les signes des déterminants. Heureusement, nous avons le résultat essentiel suivant.

Fait 5. *Soit un n-gone $\mathcal{P} = A_1A_2\cdots A_n$ tel que A_1, A_2, ..., A_n soient parcourus dans le sens trigonométrique, ou anti-horaire. Un tel n-gone sera dit* « positif ».[8] *Sous cette hypothèse, nous avons $\mu(\mathcal{P}) \geq 0$,* i.e. *$\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) \geq 0$.*

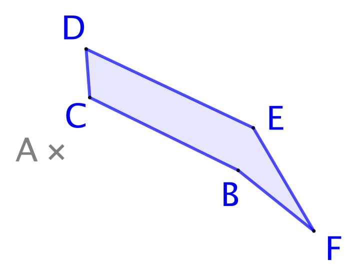
Démonstration. Le théorème de triangulation affirme que tout n-gone est triangulable comme dans l'exemple suivant : ceci laisse envisager une démonstration par récurrence en retirant l'un des triangles ayant deux côtés correspondant à deux côtés consécutifs du n-gone (pour peu qu'un tel triangle existe toujours).



Un n-gone « nu ».



Le n-gone triangulé.



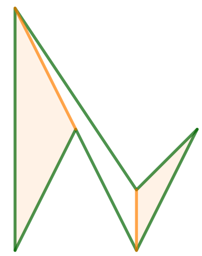
Le n-gone allégé.

Le théorème de triangulation admet une forme forte donnant une décomposition contenant un triangle formé de deux côtés consécutifs du n-gone.[9] Nous dirons qu'une telle décomposition est « *à l'écoute* ». Ce très mauvais jeu de mots fait référence à la notion sérieuse « *d'oreille* »

7. Le lecteur pardonnera les abus de langage utilisés.
8. De façon cachée, nous utilisons le célèbre théorème de Jordan, dans sa forme polygonale.
9. En pratique, cette forme forte est peu utile, car elle aboutit à un algorithme de recherche trop lent.

pour un n-gone : une oreille est un triangle inclus dans le n-gone, et formé de deux côtés consécutifs du n-gone. L'exemple suivant donne un n-gone n'ayant que deux oreilles.[10]

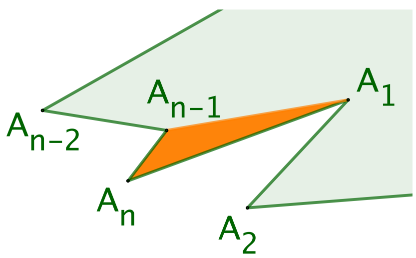
Un n-gone basique.



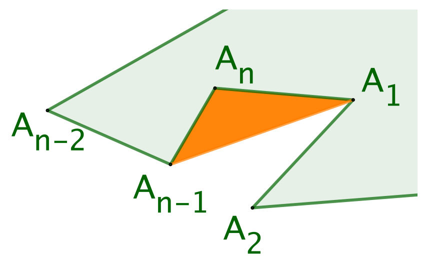
Juste deux oreilles disponibles.

Raisonnons donc par récurrence sur $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

- **Cas de base.** Soit ABC un triangle. Dire que les sommets A, B et C sont parcourus dans le sens trigonométrique, c'est savoir que $\mu(ABC) = \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) > 0$.
- **Hérédité.** Soit un n-gone positif $\mathcal{P} = A_1 A_2 \cdots A_n$ avec $n \in \mathbb{N}_{>3}$. On peut supposer que $A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille d'une triangulation à l'écoute du n-gone $\mathcal{P}$.



$A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille.



$A_{n-1}A_nA_1$ n'est pas une oreille.

Posons $\mathcal{P}' = A_1 \cdots A_{n-1}$ où $k = n-1$ vérifie $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Par hypothèse, $\mathcal{P}'$ est positif. Nous arrivons finalement aux calculs élémentaires suivants en utilisant A_1 comme point de calcul de $\mu(\mathcal{P})$.

$$
\begin{aligned}
&\mu(\mathcal{P}) \\
= &\sum_{j=1}^{n} \det\left(\overrightarrow{A_1A'_j}, \overrightarrow{A_1A'_{j+1}}\right) \\
= &\sum_{j=1}^{n-1} \det\left(\overrightarrow{A_1A_j}, \overrightarrow{A_1A_{j+1}}\right) \\
= &\sum_{j=1}^{n-2} \det\left(\overrightarrow{A_1A_j}, \overrightarrow{A_1A_{j+1}}\right) + \det\left(\overrightarrow{A_1A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A_n}\right) \\
= &\mu(\mathcal{P}') + \mu(A_{n-1}A_nA_1)
\end{aligned}
$$

$A'_{n+1} = A_1$
$A'_i = A_i$ *pour* $i \leq n$

Pour $\mu(\mathcal{P}')$, *noter que* $\det\left(\overrightarrow{A_1A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A_1}\right) = 0$.

Par hypothèse de récurrence, nous savons que $\mu(\mathcal{P}') \geq 0$, et comme $A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille de $\mathcal{P}$, la 3-ligne $A_{n-1}A_nA_1$ est forcément positive, d'où $\mu(A_{n-1}A_nA_1) \geq 0$ d'après le cas de base. Nous arrivons bien à $\mu(\mathcal{P}) \geq 0$, ce qui permet de finir aisément la démonstration par récurrence. □

Fait 6. *Pour tout n-gone $\mathcal{P}$, nous avons :* $\text{Aire}(\mathcal{P}) = \left|\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})\right|$.

Démonstration. Les deux points suivants permettent de faire une preuve par récurrence.

10. On démontre que tout n-gone admet au minimum deux oreilles.

- **Cas de base.** L'égalité est immédiate pour les triangles (c'est ce qui a motivé la définition de l'aire algébrique).
- **Hérédité.** Soit $\mathcal{P} = A_1 \cdots A_n$ un n-gone avec $n \in \mathbb{N}_{>3}$. Comme $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}^{\text{op}}) = -\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})$ selon le fait 3, nous pouvons choisir de parcourir $\mathcal{P}$ positivement, puis de nous placer dans la situation de la démonstration du fait 5 : $A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille positive d'une triangulation à l'écoute du n-gone $\mathcal{P}$, et $\mathcal{P}' = A_1 \cdots A_{n-1}$ un k-gone positif où $k = n-1$ vérifie $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Nous arrivons finalement aux calculs élémentaires suivants.

$$
\begin{aligned}
& \text{Aire}(\mathcal{P}) \\
= {} & \text{Aire}(\mathcal{P}') + \text{Aire}(A_{n-1}A_nA_1) && \textit{$A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille de $\mathcal{P}$.} \\
= {} & \tfrac{1}{2}|\mu(\mathcal{P}')| + \tfrac{1}{2}|\mu(A_{n-1}A_nA_1)| && \textit{Hypothèse de récurrence et cas de base.} \\
= {} & \tfrac{1}{2}\big(\mu(\mathcal{P}') + \mu(A_{n-1}A_nA_1)\big) && \textit{Voir le fait 5.} \\
= {} & \tfrac{1}{2}\mu(\mathcal{P}) && \textit{Comme dans la preuve du fait 5.} \\
= {} & \tfrac{1}{2}|\mu(\mathcal{P})| && \textit{Voir le fait 5.} \\
= {} & \big|\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})\big|
\end{aligned}
$$

□

Finissons par un théorème de continuité qui permettra de justifier l'existence d'au moins une solution au problème d'isopérimétrie polygonale.

Fait 7. *Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ et $(\mathrm{O}\,; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormé direct du plan. On note $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des uplets de coordonnées $\big(x(A_1)\,; y(A_1)\,; \ldots ; x(A_n)\,; y(A_n)\big)$ où $A_1A_2 \cdots A_n$ désigne un n-cycle, et $\alpha : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+$ la fonction qui à un uplet de $\mathcal{U}$ associe l'aire algébrique du n-cycle qu'il représente. Avec ces notations, la fonction $\alpha : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+$ est continue.*

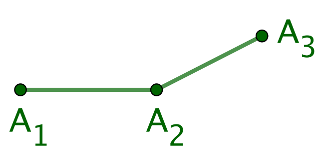
Démonstration. Immédiat, car nous avons une fonction polynomiale. □

1.4. **Au moins une solution, ou presque.** Le cas des quadrilatères a montré que la convexité était un ingrédient central. Ceci sera aussi le cas pour les n-gones, bien que moins immédiat à justifier, comme nous le verrons dans le fait **??**, dont la preuve est indépendante des résultats de cette section. Ceci explique que nous allons chercher à justifier l'existence d'au moins un n-gone convexe d'aire maximale parmi les n-gones convexes de longueur fixée. Nous allons presque y arriver...

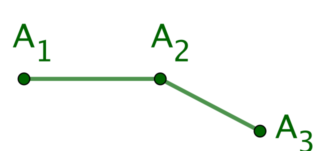
Fait 8. *Pour tout n-gone convexe $\mathcal{P} = A_1A_2 \cdots A_n$, l'une des alternatives suivantes a lieu.*

- $\forall (i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$, *si* $k \notin \{i\,; i+1\}$, *alors* $\det\big(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_k}\big) > 0$.
- $\forall (i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$, *si* $k \notin \{i\,; i+1\}$, *alors* $\det\big(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_k}\big) < 0$.

Démonstration. Le cas $n = 3$ des triangles est immédiat. Nous considérons alors $\mathcal{P}$ un n-gone convexe où $n \geq 4$. Nous savons que, relativement à $\mathcal{P}$, les sommets sont distincts deux à deux, et qu'aucun triplet de sommets consécutifs alignés n'existe. Dès lors, dans le plan orienté, les trois premiers sommets sont placés suivant l'une des deux configurations suivantes.



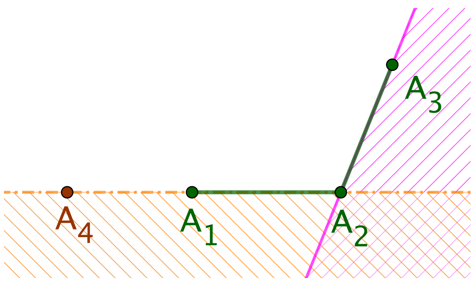
Cas positif.



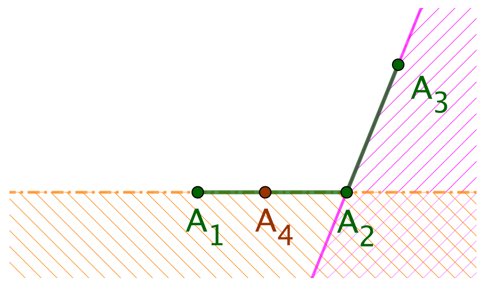
Cas négatif.

Considérons le cas positif, c'est-à-dire supposons que $\det\left(\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_1A'_3}\right) > 0$.

- $\overrightarrow{A'_1A'_3} = \overrightarrow{A'_1A'_2} + \overrightarrow{A'_2A'_3}$ donne $\det\left(\overrightarrow{A'_2A'_3}, \overrightarrow{A'_2A'_1}\right) > 0$.
- Comme A_2, A_3 et A_4 ne sont pas alignés, et de plus A_1 et A_4 du même côté, au sens large, de la droite (A_2A_3), nous obtenons $\det\left(\overrightarrow{A'_2A'_3}, \overrightarrow{A'_2A'_4}\right) > 0$.
- En continuant de proche en proche, nous arrivons à $\det\left(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_{i+2}}\right) > 0$ pour $i \in [\![1\,;n]\!]$ quelconque.
- Le point précédent et la convexité donnent $\det\left(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_k}\right) \geq 0$ pour $(i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tel que $k \notin \{i\,;i+1\}$.
- Montrons maintenant que $\det\left(\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_1A'_k}\right) > 0$ pour $k \in [\![3\,;n]\!]$. Nous savons déjà l'inégalité vraie pour $k = 3$, donc passons à $k = 4$. Pour avoir $\det\left(\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_1A'_k}\right) > 0$, le point précédent donne qu'il faut vérifier que $\det\left(\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_1A'_k}\right) = 0$ est impossible. Supposons donc l'égalité vraie, ce qui implique d'avoir $n \geq 5$, et donne les configurations suivantes où les hachures et la droite en trait plein sont des zones interdites pour A_4.

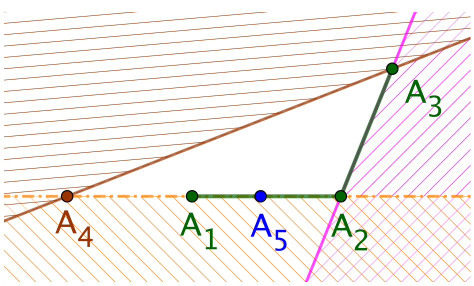


Cas 1.

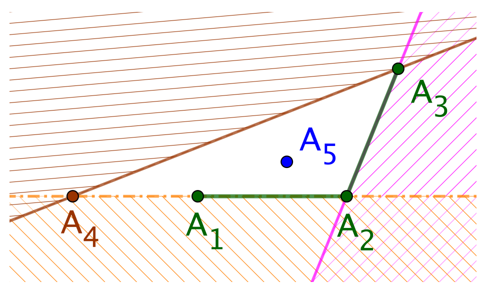


Cas 2.

Le cas 2 est impossible par raison de convexité, car A_1 et A_2 sont de part et d'autre de la droite (A_3A_4). Voyons donc ce qu'implique le 1$^{\text{er}}$ cas pour A_5.



Cas 1-1.



Cas 1-2.

Le cas 1-2 est impossible par raison de convexité à cause de (A_4A_5). Notons que dans le cas 1-1, il est possible d'avoir $A_5 \in]A_4A_1[$. Comme $A_5 \in (A_1A_2)$, nous devons avoir $n \geq 6$. Dès lors, nous avons de nouveau $A_6 \in (A_1A_2)$, mais ceci donne la contradiction $A_6 \in (A_4A_5)$. Continuons ensuite de proche en proche, nous obtenons bien $\det\left(\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_1A'_k}\right) > 0$ pour $k \in [\![3\,;n]\!]$.

- En généralisant le raisonnement précédent, [11] nous avons $\det\left(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_k}\right) > 0$ pour tout couple $(i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$ vérifiant $k \notin \{i\,;i+1\}$.

Le cas négatif se traite de façon similaire. □

11. Se souvenir de la définition de la suite (A'_i).

Nous allons établir une réciproque élargie du résultat précédent. Ce nouveau fait va nous rendre un grand service par la suite. [12]

Fait 9. *Soit $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ un n-cycle vérifiant l'une des alternatives suivantes.*

- $\forall (i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $\det\left(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_k}\right) \geq 0$.
- $\forall (i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $\det\left(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_k}\right) \leq 0$.

Ceci implique la validité de l'une des assertions ci-dessous.

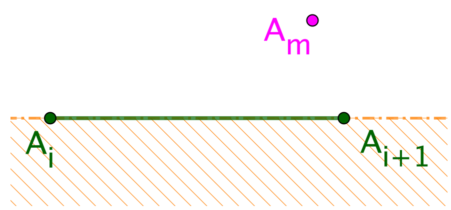
i. *$\mathcal{L}$ est totalement dégénéré.*

ii. *Il existe un k-gone convexe $\mathcal{C}$ tel que $k \leq n$, $\mathrm{Long}(\mathcal{C}) \leq \mathrm{Long}(\mathcal{L})$ et $\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{L})$, ceci se faisant en retirant, si nécessaire, des sommets de $\mathcal{L}$, sans modifier l'ordre de parcours pour les sommets gardés.*

Démonstration. Par symétrie des alternatives, nous pouvons nous concentrer sur le cas positif, c'est-à-dire supposer que $\forall (i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $\det\left(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_k}\right) \geq 0$. Seul le cas $\mathcal{L}$ non totalement dégénéré demande notre attention. Nous allons raisonner algorithmiquement en utilisant une variable i initialisée à 1, et une liste C, initialement vide, pour stocker les sommets « utiles » à la fabrication du k-gone convexe final. Notons que la non totale dégénérescence donne que $\forall i \in [\![1\,;n]\!]$, $\exists k \in [\![1\,;n]\!]$ tel que $\det\left(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_k}\right) > 0$.

A1 Si $\det\left(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}\right) > 0$, nous ajoutons i à la fin de la liste C, puis nous passons directement à l'action **A3**.

A2 Sinon, il existe $m \in \mathbb{Z}_{>i+1}$ minimal tel que $\det\left(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_m}\right) > 0$. [13]



Comme $\det\left(\overrightarrow{A'_{m-1}A'_m}, \overrightarrow{A'_{m-1}A'_{i+1}}\right) \geq 0$, forcément $A'_{m-1} \in (A'_iA'_{i+1}) - (A'_iA'_{i+1}[$ avec la possibilité d'avoir $A'_{m-1} = A'_{i+1}$. Nous pouvons alors faire les constations suivantes.

- Les points A'_i, A'_{m-1} et A'_m ne sont pas alignés.
- L'évaluation de l'aire algébrique via le point de calcul A'_{m-1} n'a pas besoin de tenir compte des sommets A'_j pour $j \in]\!]i+1\,;m-1[\![$.
- Ignorer les sommets comme ci-dessus fait diminuer la valeur de la longueur.

Ceci justifie l'ajout de $(m-1)$ à la fin de la liste C, puis de poser $i = m-1$.

A3 Ajoutons 1 à i. Si $i \geq n+1$, nous avons fini, sinon nous retournons à l'action **A1**.

La liste C, lue de gauche à droite, donne les sommets du k-gone convexe $\mathcal{C}$. □

Le résultat qui suit est juste là pour simplifier la justification du fait 11, central, à venir.

Fait 10. *Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct du plan et $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des uplets de coordonnées $\big(x(A_1)\,;y(A_1)\,;\ldots;x(A_n)\,;y(A_n)\big)$ où $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ désigne un n-cycle vérifiant les conditions suivantes.*

12. Pourquoi s'attarder sur des inégalités larges ? Parce que nous allons travailler dans un ensemble compact, et donc fermé, de n-cycles. Pour garder des n-gones, nous devrions utiliser des non-égalités, mais ceci nous ferait sortir du cadre fermé qui nous intéresse. Nous n'avons pas le choix !

13. Voir la remarque juste avant le présent algorithme.

- $\mathrm{Long}(\mathcal{L}) = \ell$.
- $\forall (i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $\det\left(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}\right) \geq 0$.

Considérons alors la fonction $\alpha : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+$ qui à un uplet de $\mathcal{U}$ associe l'aire algébrique du n-cycle qu'il représente. Avec ces notations, la fonction $\alpha : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+$ admet au moins un maximum forcément positif strict.

Démonstration. $\mathcal{U}$ est fermé dans $\mathbb{R}^{2n}$, car les conditions le définissant le sont, et il est borné, car inclus dans la boule fermée de centre O et de rayon ℓ, donc $\mathcal{U}$ est un compact de $\mathbb{R}^{2n}$. De plus, α est continue d'après le fait 7. Donc, par continuité et compacité, α admet un maximum sur $\mathcal{U}$, celui-ci étant positif strict pour les raisons suivantes où $\mathcal{R}$ désigné un n-gone régulier convexe.

- Via une translation, nous pouvons supposer $\mathcal{R}$ d'origine O.
- $\mathcal{R}$, de périmètre non nul, est d'aire non nulle.
- $\mathrm{Aire}(\mathcal{R}) = \left|\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{R})\right|$ selon le fait 6, et $\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{R}^{\mathrm{op}}) = -\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{R})$ d'après le fait 3.
- $\mathcal{R} \in \mathcal{U}$, ou $\mathcal{R}^{\mathrm{op}} \in \mathcal{U}$ selon le fait 8.
- Si $\mathcal{R} \in \mathcal{U}$, alors $\mathcal{R}$ est orienté positivement, d'où $\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{R}) \geq 0$, et par conséquent $\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{R}) = \mathrm{Aire}(\mathcal{R})$ (c'est immédiat en utilisant le centre de gravité de $\mathcal{R}$ comme point de calcul). Nous avons une propriété similaire si $\mathcal{R}^{\mathrm{op}} \in \mathcal{U}$. □

Nous arrivons, au résultat fondamental pour les n-gones convexes où la perte éventuelle de sommets est un faux problème, car nous aboutirons, plus tard, à la comparaison de k-gones réguliers convexes pour k variable, une tâche aisée, puisque le périmètre et l'aire d'un k-gone régulier convexe s'expriment en fonction de k.

Fait 11. *Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ et $\ell \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe un k-gone convexe $\mathcal{K}$ validant les assertions suivantes.*

- $k \leq n$ *et* $\mathrm{Long}(\mathcal{K}) = \ell$.
- *Si $\mathcal{P}$ est un n-gone convexe tel que* $\mathrm{Long}(\mathcal{P}) = \ell$, *alors* $\mathrm{Aire}(\mathcal{P}) \leq \mathrm{Aire}(\mathcal{K})$.

Démonstration. Reprenons les notations du fait 10, puis choisissons $\mathcal{L} \in \mathcal{U}$ maximisant l'aire algébrique sur $\mathcal{U}$. Ce n-cycle ne peut être totalement dégénéré, car $\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{L}) > 0$. Dès lors, pour tout n-gone convexe $\mathcal{P}$ vérifiant $\mathrm{Long}(\mathcal{P}) = \ell$, nous pouvons raisonner comme suit.

- Via une translation, nous nous ramenons à $\mathcal{P}$ d'origine O.
- Comme dans la preuve du fait 10, soit $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$ et $\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{P}) = \mathrm{Aire}(\mathcal{P})$, soit $\mathcal{P}^{\mathrm{op}} \in \mathcal{U}$ et $\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Aire}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}})$. Quitte à échanger $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^{\mathrm{op}}$, nous pouvons supposer que $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$.
- Le fait 9 donne un k-gone convexe $\mathcal{C}$, où $k \leq n$, tel que $\mathrm{Long}(\mathcal{C}) \leq \mathrm{Long}(\mathcal{L})$, ainsi que $\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{L})$.
- Le choix de $\mathcal{L}$ fait que $\mathrm{Long}(\mathcal{C}) \leq \ell$ et $\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{P}) \leq \overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{C})$, mais aussi que $\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{C}) > 0$.
- Comme $\mathrm{Aire}(\mathcal{C}) = \left|\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{C})\right| = \overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{C})$ via le fait 6, alors $\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{P}) \leq \overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{C})$ devient $\mathrm{Aire}(\mathcal{P}) \leq \mathrm{Aire}(\mathcal{C})$.
- Or $\mathrm{Long}(\mathcal{C}) > 0$, donc une homothétie de rapport $\frac{\ell}{\mathrm{Long}(\mathcal{C})} \geq 1$ fournit finalement un k-gone convexe $\mathcal{K}$ tel que $k \leq n$, $\mathrm{Long}(\mathcal{K}) = \ell$ et $\mathrm{Aire}(\mathcal{P}) \leq \mathrm{Aire}(\mathcal{K})$. Affaire conclue, sans arnaque logique ! □