IDENTITÉS PARTICULIÈRES GÉNÉRALISABLES RIGOUREUSEMENT

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LaTeX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/visual-proof/polynomial-analytic-principles.

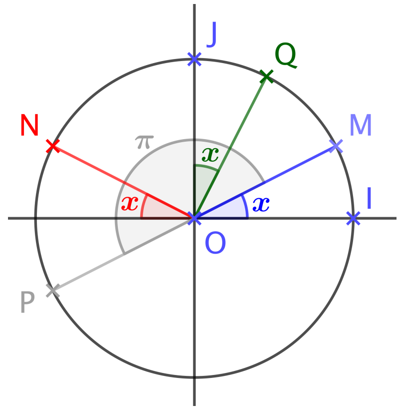
Mentions « légales »

Table des matières

Date: 16 Juillet 2019 - 26 Mars 2025.

1. … PUIS VINRENT LES FONCTIONS ANALYTIQUES

Considérons le dessin suivant, où les mesures des angles sont en radians.



Via les points M, N, P et Q, il est facile de fournir des arguments géométriques de symétrie justifiant que, sous la condition $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{4}\right[$, nous avons :

- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
  $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
  $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

De nouveau, il serait bien de pouvoir passer, sans plus d'effort, à la validité des formules ci-dessus sur $\mathbb{R}$ tout entier *(considérer les autres cas n'est pas compliqué, mais c'est pénible)*. Nous allons voir que cela est licite grâce au fait 7, donné plus bas, qui est un peu technique, car il nécessite la notion de fonction analytique.

Préliminaire 1. *Le rayon de convergence R de la série entière complexe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est défini par la formule de Hadamard*[1] $\dfrac{1}{R} = \limsup\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ *avec les conventions* $0 = \dfrac{1}{+\infty}$ *et* $+\infty = \dfrac{1}{0}$.
Ce nombre R s'interprète comme suit.

(1) Si $R = 0$, la série ne converge que pour $z = 0$, et sinon elle diverge grossièrement.
(2) Si $R = +\infty$, la série converge sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, la série converge normalement sur tout disque ouvert $\mathcal{D}(0\,;r[$ tel que $r \in \mathbb{R}_+^*$.
(3) Si $0 < R < +\infty$, la série converge normalement sur tout disque ouvert $\mathcal{D}(0\,;r[$ tel que $0 < r < R$, donc elle converge sur $\mathcal{D}(0\,;R[$. Par contre, elle diverge grossièrement sur $\mathbb{C} - \mathcal{D}(0\,;R]$, et le comportement sur le cercle $\mathcal{C}(0\,;R)$ doit être traité au cas par cas.

Démonstration. Notons $\ell = \limsup\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$, soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sup\left\{\sqrt[k]{|a_k|}\ ,\ k \in \mathbb{N}_{\geq n}\right\}\right)$, de sorte que $\ell \in [0\,;+\infty]$. Commençons par le cas $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire $R \in \mathbb{R}_+^*$.

- Soit $r \in \left]0\,;R\right[$. Considérons $\rho \in \left]r\,;R\right[$ de sorte que $\frac{1}{r} > \frac{1}{\rho} > \frac{1}{R}$. Par définition de $\ell = \frac{1}{R}$, nous avons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sup\left\{\sqrt[k]{|a_k|}\ ,\ k \in \mathbb{N}_{\geq n_0}\right\} < \frac{1}{\rho}$. Donc pour $z \in \mathcal{D}(0\,;r[$ et $k \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$, nous obtenons $\left|a_k z^k\right| < \left(\frac{r}{\rho}\right)^k$ pour $k \geq n_0$. Comme $0 < \frac{r}{\rho} < 1$, la convergence normale devient évidente.
- Soit $z \in \mathbb{C} - \mathcal{D}(0\,;R]$. Comme $\frac{1}{|z|} < \frac{1}{R}$, nous avons ici $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$, $\sup\left\{\sqrt[k]{|a_k|}\ ,\ k \in \mathbb{N}_{\geq n}\right\} > \frac{1}{|z|}$. En particulier, nous pouvons construire une suite strictement croissante d'indices (k_i) telle que $\left|a_{k_i} z^{k_i}\right| > 1$. Ceci donne la divergence grossière.

1. La démonstration va révéler le côté « *naturel* » de la formule de Hadamard.

- La justification du comportement pathologique sur le cercle $\mathcal{C}(0\,;R)$ se fait via des contre-exemples. Nous pouvons citer les exemples classiques suivants.
  (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, de rayon de convergence 1, diverge grossièrement sur $\mathcal{C}(0\,;1)$.
  (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$, de rayon de convergence 1, puisque $\ln\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}\right) = -\frac{2\ln n}{n}$. De plus, cette série entière converge normalement sur $\mathcal{C}(0\,;1)$.
  (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$, de rayon de convergence 1, puisque $\ln\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right) = -\frac{\ln n}{n}$. De plus, cette série entière converge sur $\mathcal{C}(0\,;1)-\{1\}$, mais pas en 1. Le comportement sur $\mathcal{C}(0\,;1)-\{1\}$ est plus délicat à démontrer, car il se base sur le test de Abel-Dirichlet.

Les cas $\ell = 0$, c'est-à-dire $R = +\infty$, et $\ell = +\infty$, c'est-à-dire $R = 0$, s'obtiennent via des adaptations immédiates de ce qui a été fait ci-dessus. □

Exemple 2. *La série entière complexe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ *admet un rayon de convergence infini ; la fonction associée est l'exponentielle complexe* exp. *En effet, notant* Ent *la fonction partie entière, nous avons* $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\mathrm{Ent}\left(\frac{n}{2}\right)} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}$, *puis* $\ln\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}\right) \leq \frac{2-n}{2n} \ln\left(\frac{n}{2}\right)$.

Préliminaire 3. *Soit une série entière complexe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *de rayon de convergence* R *non nul. La fonction* $f : z \in \mathcal{D}(0\,;R[\mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}$ *vérifie les propriétés suivantes.*

(1) f *est infiniment* $\mathbb{C}$*-dérivable.*

(2) $\forall k \in \mathbb{N}$, *la série entière* $\sum\limits_{n=k}^{\infty} \dfrac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$ *admet* R *pour rayon de convergence.*

(3) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathcal{D}(0\,;R[$, $f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} \dfrac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$.

(4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Démonstration. La propriété 4 étant aisée à déduire, une récurrence immédiate à faire montre que nous avons juste à démontrer que $\forall z \in \mathcal{D}(0\,;R[$, $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \mathcal{D}(0\,;R[}} \left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

- $\ln\left(\sqrt[n]{|na_n|}\right) = \frac{\ln n}{n} + \ln\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ donne que R est le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

  On peut donc définir la fonction $g : z \in \mathcal{D}(0\,;R[\mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \in \mathbb{C}$.

- Pour $(z, z_0) \in \mathcal{D}(0\,;R[^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$, nous introduisons les notations suivantes.
  (a) $f_k(z) = \sum\limits_{n=0}^{k} a_n z^n$.
  (b) $g_k(z) = \sum\limits_{n=1}^{k} n a_n z^{n-1}$, cette fonction étant clairement la $\mathbb{C}$-dérivée de $f_k(z)$.
  (c) $T_k(z) = \begin{cases} \frac{f_k(z)-f_k(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \in \mathcal{D}(0\,;R[- \{z_0\} \\ g_k(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$

(d) $T(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \in \mathcal{D}(0\,;R[- \{z_0\} \\ g(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$

- Soit ensuite $r \in]0\,;R[$ tel que $z_0 \in \mathcal{D}(0\,;r[$. Par convergence normale sur $\mathcal{D}(0\,;r]$ de (f_k) et (g_k) vers f et g respectivement, nous avons la convergence uniforme sur $\mathcal{D}(0\,;r]$ de (T_k) vers T. Or chaque fonction T_k est continue en z_0 par $\mathbb{C}$-dérivablité de f_k, donc, par raison de convergence uniforme, T est continue en z_0. Ceci donne que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 avec $f^{(1)}(z_0) = g(z_0)$. Comme $z_0 \in \mathcal{D}(0\,;R[$ est quelconque, ceci achève la preuve.

$\square$

Remarque 4. *Les preuves des résultats préliminaires 1 et 3 montrent que, plus généralement, pour toute série entière complexe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *de rayon de convergence* R *non nul, et tout nombre complexe* z_0*, la fonction* $f : z \in \mathcal{D}(z_0\,;R[\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \in \mathbb{C}$ *vérifie les propriétés suivantes.*

(1) f *est infiniment* $\mathbb{C}$*-dérivable.*

(2) $\forall k \in \mathbb{N}$*, la série* $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(z-z_0)^{n-k}$ *converge normalement sur* $\mathcal{D}(z_0\,;R[$*,*

(3) $\forall k \in \mathbb{N}$*,* $\forall z \in \mathcal{D}(z_0\,;R[$*,* $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(z-z_0)^{n-k}$.

(4) $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Nous allons voir que les fonctions développables en série entière autour de 0 ont le bon ton de l'être aussi localement autour de nombres complexes z_0 assez proches de 0.

Définition 5. *Soit* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *un ouvert non vide. Une fonction* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *est dite analytique en* $z_0 \in \Omega$*, s'il existe une série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *de rayon de convergence* $R > 0$*, et un réel* $r \in]0\,;R]$ *tels que dans le disque ouvert* $\mathcal{D}(z_0\,;r[\subseteq \Omega$*, on ait* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$.
Si f *est analytique en tout nombre complexe de* Ω*, la fonction* f *est dite analytique sur* Ω*.*

Fait 6. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ où $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ est un ouvert non vide. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$, et une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence infini telle que $\forall z \in \Omega$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, alors f est analytique sur Ω.*

Démonstration. TODO □

Fait 7. *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe non vide, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Si f s'annule sur un ouvert $V \subseteq \Omega$, alors f est nulle* (c'est le théorème de l'identité).

Démonstration. TODO □

Si nous revenons à nos identités trigonométriques, il suffit de savoir que les fonctions circulaires complexes sont analytiques sur $\mathbb{C}$ tout entier, et de noter que le raisonnement géométrique au début de cette section fait clairement apparaître des zéros non isolés pour les fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$ suivantes.

- $f_1(z) = \cos(\pi - z) + \cos z$ et $f_2(z) = \sin(\pi - z) - \sin z$
- $f_3(z) = \cos(z + \pi) + \cos z$ et $f_4(z) = \sin(z + \pi) + \sin z$
- $f_5(z) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \sin z$ et $f_6(z) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \cos z$