

# BROUILLON – CONSTRUCTION SIMPLE DU LOGARITHME ET DE L'EXPONENTIELLE

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



## TABLE DES MATIÈRES

1. Ingrédients utilisés	2
1.1. Une once d’analyse réelle	2
1.2. Un iota de calcul intégral	2
2. Au commencement était le logarithme népérien	2
2.1. Définition intégrale	2
2.2. Equation fonctionnelle	3
3. Puis vint l’exponentielle	5
3.1. Inverser le logarithme népérien	5
3.2. Equation fonctionnelle	6
3.3. Equation différentielle	6

Ce texte construit les fonctions  $\ln$ , logarithme népérien, et  $\exp$ , exponentielle, le plus simplement possible en utilisant juste des notions connues d'un lycéen scientifique en 2025.

## 1. INGRÉDIENTS UTILISÉS

Dans ce document, nous supposons connues les notions de fonctions monotones, de dérivabilité, de continuité, et d'intégrale d'une fonction réelle continue. Dans les sous-sections suivantes, où  $I \subseteq \mathbb{R}$  désignera toujours un intervalle, nous donnons des faits que nous utiliserons sans les redémontrer.

### 1.1. Une once d'analyse réelle.

**Fait 1** (Théorème des gendarmes, ou du sandwich). *Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  trois fonctions telles que  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  sur  $I$ , ainsi que  $a \in I$ . Nous avons l'implication logique suivante.*

$$\left[ \begin{array}{c} \exists \ell \in \mathbb{R} \text{ tel que } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} f(x) = \ell, \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} h(x) = \ell \end{array} \right] \implies \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} g(x) = \ell$$

**Fait 2** (TVI, ou théorème des valeurs intermédiaires). *Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. L'ensemble  $f[I] = \{f(x) \text{ pour } x \in I\}$  est un intervalle ( $f[I]$  est l'ensemble des images par  $f$  des réels appartenant à  $I$ ).*

### 1.2. Un iota de calcul intégral.

**Fait 3** (Sens d'intégration). *Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.  $\forall (a; b) \in I^2$ , nous avons :  $\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$ .*

**Fait 4** (Relation de Chasles intégrale). *Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.  $\forall (a; b; c) \in I^3$ , nous avons :  $\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt$ .*

**Fait 5** (Stricte positivité de l'intégrale). *Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  une fonction continue, et strictement positive.  $\forall (a; b) \in I^2$  tel que  $a < b$ , nous avons :  $\int_a^b f(t) dt > 0$ .*

**Fait 6** (Croissance de l'intégrale). *Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues. Si  $\forall x \in I$ ,  $f(x) \leq g(x)$ , alors  $\forall (a; b) \in I^2$  tel que  $a \leq b$ , nous avons :  $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$ .*

## 2. AU COMMENCEMENT ÉTAIT LE LOGARITHME NÉPÉRIEN

### 2.1. Définition intégrale.

**Définition 7.** *Le « logarithme népérien » est la fonction  $\ln$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ .*

**Fait 8.** *La fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .*

*Démonstration.* Soit  $(a; b) \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $b > a$ . Ce qui suit permet de conclure.

$$\begin{aligned} \ln b - \ln a &= \int_1^b \frac{1}{t} dt - \int_1^a \frac{1}{t} dt \\ &= \int_a^1 \frac{1}{t} dt + \int_1^b \frac{1}{t} dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{t} dt \\ &> 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \text{Voir le fait 3.} \\ \text{Voir le fait 4.} \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \text{Voir le fait 5.} \end{array} \right\} \end{array}$$

□

**Fait 9.**  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\ln' x = \frac{1}{x}$ . *En particulier, la représentation graphique  $\mathcal{L}$  de la fonction  $\ln$  n'admet aucune tangente horizontale.*

*Démonstration.* Seule l'identité  $\ln' x = \frac{1}{x}$  demande à être justifiée. Bien que cela soit une instance du théorème fondamental de l'analyse, nous allons le démontrer à la main, car ici cela ne pose aucune difficulté.<sup>1</sup> Considérons donc le taux d'accroissement  $T(h) = \frac{\ln(a+h) - \ln a}{h}$  où  $a > 0$  est fixé, et  $h \in ]-a; a[ - \{0\}$  variable. Commençons par le petit calcul suivant.

$$\begin{aligned} T(h) &= \frac{1}{h} \left( \int_1^{a+h} \frac{1}{t} dt - \int_1^a \frac{1}{t} dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_a^{a+h} \frac{1}{t} dt \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\int_a^{a+h}} \right\} \text{ Voir les faits 3 et 4.}$$

Nous avons ensuite les implications logiques suivantes lorsque  $h > 0$ .

$$\begin{aligned} &[x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^* \text{ est strictement décroissance}] \\ \Rightarrow &\forall x \in [a; a+h], \frac{1}{a+h} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a} \\ \Rightarrow &\int_a^{a+h} \frac{1}{a+h} dt \leq \int_a^{a+h} \frac{1}{t} dt \leq \int_a^{a+h} \frac{1}{a} dt \quad \left. \vphantom{\int_a^{a+h}} \right\} \text{ Voir le fait 6 } (a+h > a, \text{ car } h > 0). \\ \Rightarrow &\frac{h}{a+h} \leq hT(h) \leq \frac{h}{a} \\ \Rightarrow &\frac{1}{a+h} \leq T(h) \leq \frac{1}{a} \quad \left. \vphantom{\frac{1}{a+h}} \right\} h > 0 \end{aligned}$$

Via le théorème des gendarmes, voir le fait 1, nous obtenons :  $\lim_{h \rightarrow 0^+} T(h) = \frac{1}{a}$ .

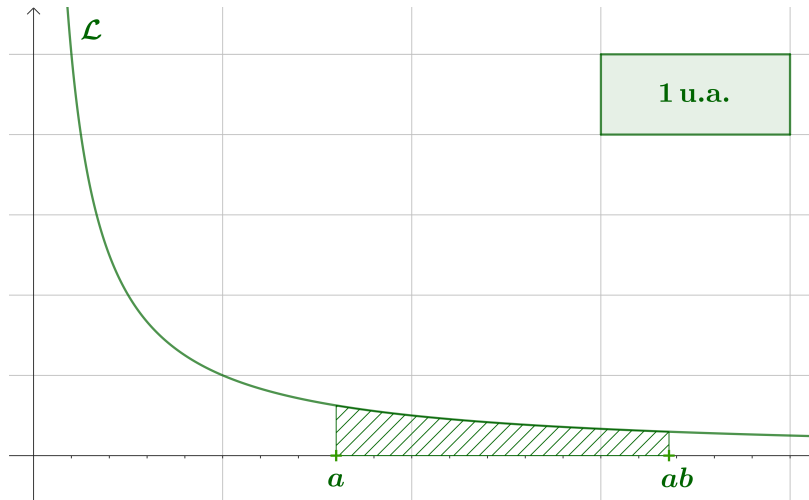
Lorsque  $h < 0$ , nous obtenons :  $\frac{1}{a} \leq T(h) \leq \frac{1}{a+h}$ , puis  $\lim_{h \rightarrow 0^-} T(h) = \frac{1}{a}$ .

Finalement,  $\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \frac{1}{a}$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

## 2.2. Equation fonctionnelle.

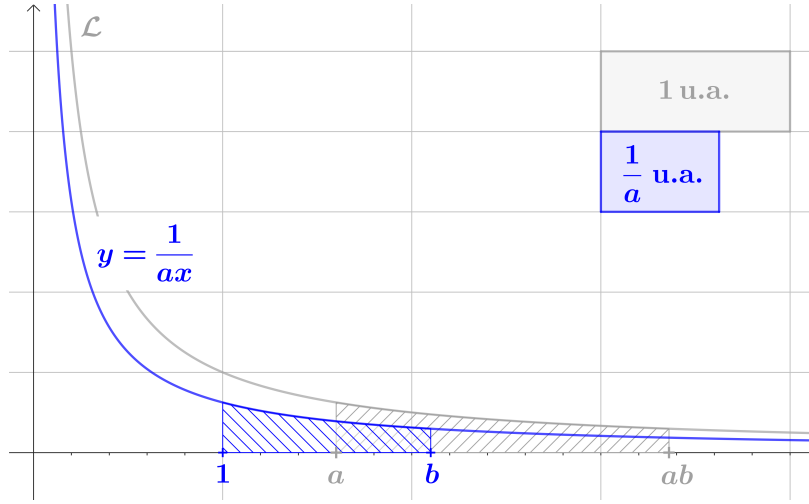
**Fait 10.**  $\forall (a; b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ ,  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ .

*Démonstration.* Par définition de  $\ln$ , nous avons  $\ln(ab) = \ln a + \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt$  (voir le fait 4). Analysons  $\mathcal{I}_a^{ab} = \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt$ . Pour cela, notons  $\mathcal{L}$  la représentation graphique de  $\ln$ .

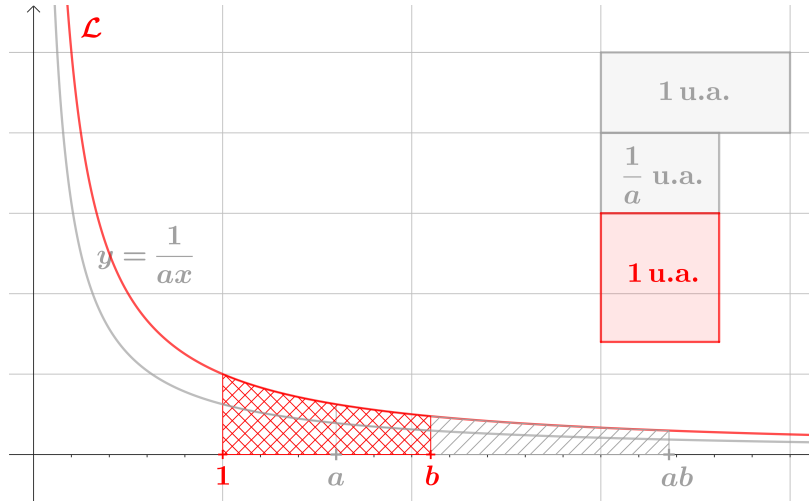


1. Ce qui suit s'adapte sans effort à toute fonction monotone.

Une dilatation horizontale  $\phi$  de coefficient  $\frac{1}{a}$  transforme  $M(x_M; y_M)$  en  $M'(\frac{x_M}{a}; y_M)$ . Appliquons  $\phi$  à la surface associée à l'intégrale  $\mathcal{I}_a^{ab}$ , ainsi qu'à la fonction inverse<sup>2</sup> qui devient  $f : x \mapsto \frac{1}{ax}$ , puisque nous devons avoir  $f(\frac{x}{a}) = \frac{1}{x}$ . Il est important de noter qu'un rectangle d'une unité d'aire est transformé par  $\phi$  en un rectangle de  $\frac{1}{a}$  unité d'aire.



Une dilatation verticale  $\psi$  de coefficient  $a$  transforme  $M(x_M; y_M)$  en  $M'(x_M; ay_M)$ . Appliquons  $\psi$  à la surface associée à l'intégrale  $\int_1^b \frac{1}{at} dt$ , ainsi qu'à la fonction  $f$  qui devient la fonction inverse. Notons qu'un rectangle de  $\frac{1}{a}$  unité d'aire est transformé par  $\psi$  en un rectangle d'une unité d'aire.



Nous venons de justifier que  $\mathcal{I}_a^{ab} = \int_1^b \frac{1}{t} dt$ , d'où  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$  comme annoncé.  $\square$

**Remarque 11** (Aux bourbakistes). *Ce qui a été dit ci-dessus se rédige rigoureusement, sans aucun souci, via des sommes de Riemann, par exemple.<sup>3</sup> La démonstration suivante ne souffre d'aucun doute, mais la donner sans plus d'explication serait bien dommage (la première approche évite toute association mystique quant à l'équation fonctionnelle  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ ).*

*Démonstration alternative* Nous allons justifier que  $\forall (a; b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ ,  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$  uniquement via l'analyse réelle. Comme les propriétés de la fonction  $\ln$  nécessitent d'avoir une

2. Noter l'abus de langage consistant à ne pas rappeler que nous travaillons juste sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

3. N'oublions pas que nous disposons d'au moins trois jolies théories de l'intégration : celle de Riemann, celle de Lebesgues, et la merveilleuse théorie de Kurzweil et Henstock.

seule variable, il devient naturel de fixer  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , puis de considérer la fonction  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \ln(ax) - \ln a - \ln x$ . Nous n'avons pas d'autres choix que de dériver :  $f'(x) = a \times \frac{1}{ax} - \frac{1}{x} = 0$ . Or, une fonction de dérivée nulle sur un intervalle  $I$  est forcément constante sur  $I$ . Nous savons donc que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x) = f(1)$ , soit  $f(x) = 0$ . Mission accomplie!  $\square$

### 3. PUIS VINT L'EXPONENTIELLE

#### 3.1. Inverser le logarithme népérien.

**Fait 12.**  $\forall q \in \mathbb{R}, \exists ! p \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $\ln p = q$ .

*Démonstration.* L'unicité découlant de la stricte croissance de la fonction  $\ln$ , voir le fait 8, il reste à établir l'existence d'une solution de  $\ln x = q$  pour  $q \in \mathbb{R}$  fixé.

XXXX

le TVI, voir le fait 2.  $\square$

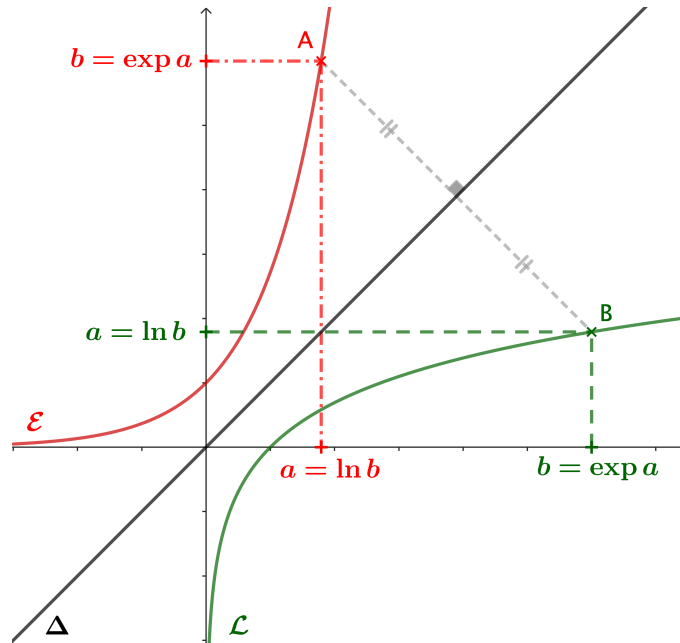
**Définition 13.**  $\forall q \in \mathbb{R}$ , l'unique solution de  $\ln x = q$  est notée  $\exp q$ . On définit ainsi sur  $\mathbb{R}$  une fonction  $\exp$  nommée « exponentielle ».

**Fait 14.**  $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp x) = x$ , et  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exp(\ln x) = x$ .

*Démonstration.* Nous devons juste vérifier la 2<sup>e</sup> identité. En appliquant  $\ln(\exp X) = X$  à  $X = \ln x$ , nous obtenons  $\ln(\exp(\ln x)) = \ln x$ . Par injectivité de la fonction  $\ln$ , nous arrivons à  $\exp(\ln x) = x$  comme souhaité.  $\square$

**Fait 15.** Soient  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{E}$  les représentations graphiques respectives des fonctions  $\ln$  et  $\exp$ . Les courbes  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{E}$  sont symétriques par rapport à la 1<sup>re</sup> bissectrice  $\Delta : y = x$ .

*Démonstration.* Considérons  $A(a; \exp a) \in \mathcal{E}$ . Notons  $b = \exp a$ , nous savons que  $a = \ln b$ . Ceci amène à considérer  $B(b; \ln b) \in \mathcal{L}$ , c'est-à-dire  $B(\exp a; a)$ . Or,  $A(x_A; y_A)$  et  $B(y_A; x_A)$  sont symétriques par rapport à  $\Delta$  (coordonnées d'un milieu, et critère d'orthogonalité).<sup>4</sup> Réciproquement, il faut considérer  $B(b; \ln b) \in \mathcal{L}$ . Ceci se traite de façon similaire.



$\square$

4. De façon plus élémentaire, nous pourrions raisonner via les triangles visibles sur le graphique en justifiant qu'ils sont tous carrés.

### 3.2. Equation fonctionnelle.

**Fait 16.**  $\forall (a; b) \in (\mathbb{R})^2$ ,  $\exp(a + b) = \exp a \cdot \exp b$ .

*Démonstration.* L'injectivité de  $\ln$  et les calculs suivants permettent de conclure. □

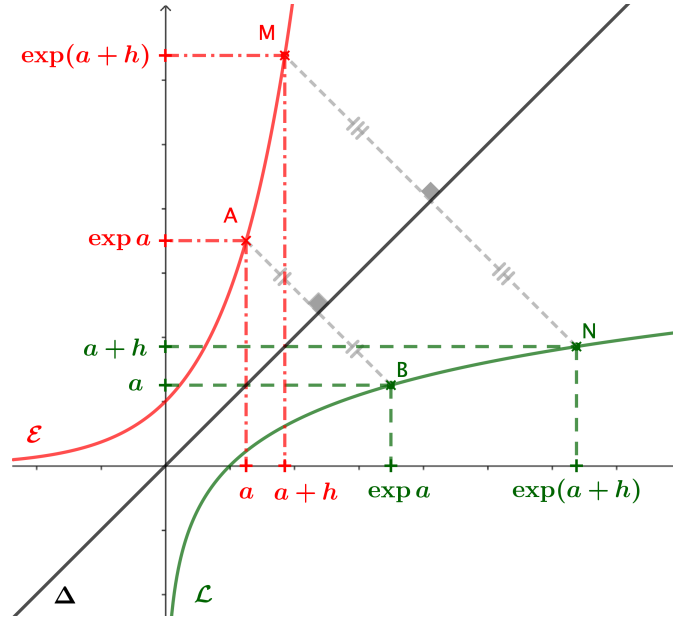
$$\begin{aligned}
 & \ln(\exp(a + b)) \\
 = & a + b \\
 = & \ln(\exp a) + \ln(\exp b) \\
 = & \ln(\exp a \cdot \exp b)
 \end{aligned}
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Définition de la fonction exp.} \\
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Définition de la fonction exp.} \\
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Équation fonctionnelle validée par la fonction ln.}
 \end{array}$$

### 3.3. Equation différentielle.

**Fait 17.**  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\exp' x = \exp x$ .

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{E}$  les représentations graphiques respectives des fonctions  $\ln$  et  $\exp$ . Nous savons que  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{E}$  sont symétriques par rapport à la droite  $\Delta : y = x$ . Pour  $h \neq 0$ , considérons  $A(a; \exp a) \in \mathcal{E}$  et  $M(a + h; \exp(a + h)) \in \mathcal{E}$ . Par symétrie, nous avons  $B(\exp a; a) \in \mathcal{L}$  et  $N(\exp(a + h); a + h) \in \mathcal{L}$ .

Examinons si le taux d'accroissement  $\frac{\exp(a+h) - \exp a}{h}$  admet une limite en 0. Ce quotient est la pente  $m(AM)$  de la droite  $(AM)$ , or  $m(AM) = \frac{1}{m(BN)}$ . En raisonnant sur  $\mathcal{L}$ , faire tendre  $h$  vers 0 n'est possible que si  $x(N)$  tend vers  $x(B)$ . Comme  $\ln$  est dérivable en  $x(B)$ , nous obtenons  $\lim_{h \rightarrow 0} (m(BN)) = \ln'(x(B)) = \frac{1}{\exp a}$ . Finalement,  $\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\exp(a+h) - \exp a}{h} \right) = \exp a$  comme souhaité.



□