

# NEWTON, BERNOULLI, LEIBNIZ, FIBONACCI ET BELL

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/math/sequences-series/sequences/newton-bernoulli-leibniz-&-fibonacci>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



## TABLE DES MATIÈRES

1. Des identités bien connues	2
2. Notations différenciées	2
3. La loi binomiale révèle...	2
3.1. De l'utilité des arbres	2
3.2. Directement vers le binôme de Newton	3
3.3. Leibniz sans effort	4
3.4. Coefficients factoriels	5
3.5. Une escale combinatoire	6
3.6. Une petite astuce pour Fibonacci	7
3.7. Bell sonne la fin du jeu	8
3.8. Généraliser aux coefficients multimoniaux	10
4. La formule du binôme de Newton implique...	10
4.1. Un classique des identités algébriques	10
4.2. La loi binomiale est algébrique	11
4.3. Leibniz, le retour	12
4.4. Fibonacci via Newton	13
4.5. Bell en écho de Fibonacci	14
4.6. Coefficients factoriels et combinatoires	15
5. Sources utilisées	16

Dans ce document, en nous basant sur des arbres binaires complets, puis ensuite sur la formule du binôme de Newton, nous exhibons des liens naturels entre notamment la formule du binôme de Newton, celle de dérivation de Leibniz, et la loi binomiale.

## 1. DES IDENTITÉS BIEN CONNUES

Bien qu'appartenant à des domaines distincts, les égalités suivantes intriguent par leur ressemblance. À travers deux approches différentes, l'une discrète et éclairante, et l'autre algébrique et puissante, nous verrons que ces similitudes ne sont pas le fruit du hasard.

- **Formule du binôme de Newton** :  $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ .
- **Formule de dérivation de Leibniz** :  $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ .
- **Loi binomiale** :  $P(X = j) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_{jk}$ ,<sup>1</sup> même s'il est d'usage de juste écrire  $P(X = j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$ .
- **Une identité portant sur la suite de Fibonacci** :  $F_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k$ .
- **Une formule similaire pour les coefficients binomiaux** :  $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k}$ .
- **Une récurrence avec les nombres de Bell** :  $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$  où  $B_i$  est le nombre de façons de partitionner un ensemble de  $i$  éléments.<sup>2</sup>

## 2. NOTATIONS DIFFÉRENCIÉES

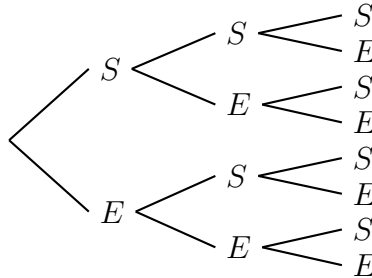
Nous utiliserons les notations suivantes sans jamais employer directement l'égalité classique  $\binom{n}{p} = \mathcal{C}_p^n = C(p, n)$ , tout en employant le vocabulaire non standard suivant.

- **Coefficients binomiaux** : pour  $(n; k) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\binom{n}{k}$  désigne le nombre de chemins avec  $k$  succès dans un arbre binaire complet de profondeur  $n$  (voir la section 3.1).
- **Coefficients factoriels** :  $\mathcal{C}_k^n$  est définie sur  $\mathbb{N}^2$  par  $\mathcal{C}_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  si  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , et  $\mathcal{C}_k^n = 0$  dans les autres cas.
- **Coefficients combinatoires** : pour  $(n; k) \in \mathbb{N}^2$ ,  $C(k, n)$  désigne le nombre de sous-ensembles à  $k$  éléments d'un ensemble de cardinal  $n$ .

Il est immédiat de voir que pour chacun de ces coefficients, lorsque  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , remplacer  $k$  par  $(n - k)$  ne changera pas sa valeur.<sup>3</sup>

## 3. LA LOI BINOMIALE RÉVÈLE...

**3.1. De l'utilité des arbres.** Lorsque l'on présente la loi binomiale, il est courant d'utiliser un arbre de probabilité comme le suivant où  $S$  désigne un succès et  $E$  un échec, un succès ayant une probabilité  $p$  de se réaliser (ici nous avons une profondeur de 3).



Notons  $X$  la variable aléatoire comptant le nombre de succès, ainsi que  $q = 1 - p$ , puis concentrons-nous sur les bifurcations lors du parcours de l'arbre de gauche à droite. La règle de calcul à gauche ci-dessous traduit qu'en allant vers un succès, la probabilité en cours est multipliée par  $p$ , et sinon c'est  $q$  qui est appliqué. Ceci nous donne des calculs intermédiaires à chaque bifurcation comme montré à droite ci-dessous où  $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ .

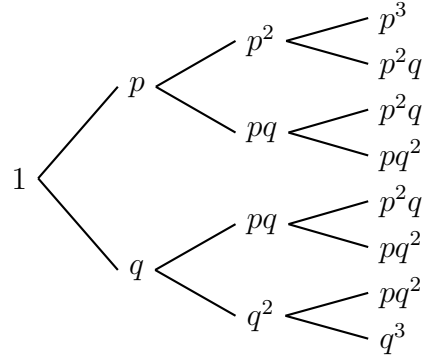
$$x \begin{cases} \nearrow px \\ \searrow qx \end{cases}$$

*Arbre de calcul.*

$$p^a q^b \begin{cases} \nearrow p^{a+1} q^b \\ \searrow p^a q^{b+1} \end{cases}$$

*Un calcul intermédiaire.*

Soit ensuite l'arbre binaire de racine 1, et de profondeur  $n$ . L'application de la règle de calcul donne  $P(X = j) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_{jk}$ , puisque pour obtenir  $p^k q^{n-k}$ , il faut bifurquer  $k$  fois vers un succès, ce qui fait  $\binom{n}{k}$  choix possibles. Voici un exemple avec  $n = 3$ .



*Un exemple de calcul.*

Nous pouvons lire différemment l'arbre en considérant que chaque bifurcation est une somme, car  $x = px + qx$ . Ce point de vue donne  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1$ , puis  $\sum_{j=0}^n P(X = j) = 1$ .

**3.2. Directement vers le binôme de Newton.** Pour développer  $(x + y)^n$  dans un anneau commutatif (forcément unitaire), la brique de base est la distribution qui donne des calculs intermédiaires comme celui montré à droite ci-dessous où  $(a; b; k) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$ .

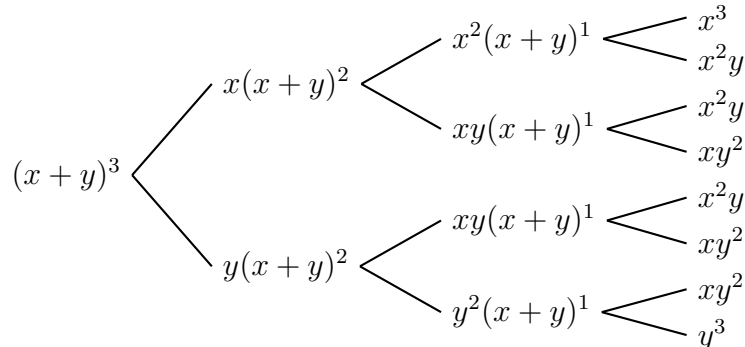
$$(x + y)f(x; y) \begin{cases} \nearrow xf(x; y) \\ \searrow yf(x; y) \end{cases}$$

*Arbre de calcul.*

$$x^a y^b (x + y)^k \begin{cases} \nearrow x^{a+1} y^b (x + y)^{k-1} \\ \searrow x^a y^{b+1} (x + y)^{k-1} \end{cases}$$

*Un calcul intermédiaire.*

Dans un arbre binaire de racine  $(x + y)^n$ , et de profondeur  $n$ , la règle de calcul donne la formule du binôme de Newton  $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ . Voici un exemple avec  $n = 3$ .



*Un exemple de calcul.*

Nous allons établir un classique de la combinatoire, à savoir la formule d'inversion de Pascal, que nous rencontrerons plusieurs fois dans la suite de ce document.

**Fait 1** (Formule d'inversion de Pascal). *Pour deux suites  $a$  et  $b$  à valeur dans un anneau commutatif,  $b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$  sur  $\mathbb{N}$  si, et seulement si,  $a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} b_k$  sur  $\mathbb{N}$ .*

*Démonstration.* Ce qui suit est très intuitif.

- Nous avons  $(X+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k$  et  $X^n = (X+1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (X+1)^k$  d'après la formule du binôme de Newton.
- Donc, la matrice de passage de  $(X^i)_{1 \leq i \leq n}$  à  $((X+1)^i)_{1 \leq i \leq n}$  est  $M = \left( \binom{j}{i} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ , et celle de  $((X+1)^i)_{1 \leq i \leq n}$  à  $(X^i)_{1 \leq i \leq n}$  est  $N = \left( (-1)^{j-i} \binom{j}{i} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ .
- Nous venons de démontrer, sans effort, que  $M$  et  $N$  sont inverses l'une de l'autre.
- Supposons maintenant avoir  $b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$  sur  $\mathbb{N}$ . Ceci donne  $(b_i)_{1 \leq i \leq n} = M (a_i)_{1 \leq i \leq n}$ , puis  $(a_i)_{1 \leq i \leq n} = M^{-1} (b_i)_{1 \leq i \leq n}$ , et en particulier  $a_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} b_i$ .
- La réciproque s'obtient de façon similaire via la matrice  $N$ . □

**Remarque 2.** *Examinons ce que donne la formule d'inversion de Pascal appliquée à la formule du binôme de Newton. Supposons  $y$  inversible, de sorte que  $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$  se réécrit  $y^{-n}(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{-k}$ . Nous obtenons alors  $x^n y^{-n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} y^{-k} (x+y)^k$ , soit  $x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-y)^{n-k} (x+y)^k$ ,<sup>4</sup> via  $a_n = x^n y^{-n}$  et  $b_n = y^{-n} (x+y)^n$ . Nous pouvons retrouver cette identité juste via un arbre. En effet, l'égalité  $(x+y)f(x;y) = xf(x;y) + yf(x;y)$  se réécrit  $xf(x;y) = (x+y)f(x;y) - yf(x;y)$ . Dès lors, la règle suivante appliquée dans un arbre binaire de racine  $x^n$ , et de profondeur  $n$ , permet de conclure.*

$$xf(x;y) \begin{array}{l} \swarrow (x+y)f(x;y) \\ \searrow -yf(x;y) \end{array}$$

*Arbre de calcul.*

$$(x+y)^a (-y)^b x^k \begin{array}{l} \swarrow (x+y)^{a+1} (-y)^b x^{k-1} \\ \searrow (x+y)^a (-y)^{b+1} x^{k-1} \end{array}$$

*Un calcul intermédiaire.*

**3.3. Leibniz sans effort.** Ici nous travaillons dans l'ensemble des fonctions réelles infiniment dérivables sur  $\mathbb{R}$ .<sup>5</sup> Dans ce contexte, la règle de Leibniz  $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$  va juste découler de la formule de dérivation d'un produit avec les calculs intermédiaires indiqués ci-dessous où  $(a;b) \in \mathbb{N}^2$  : en effet, il suffit de considérer un arbre binaire de racine la fonction produit  $fg$ , et de profondeur  $n$ .

$$uv \begin{array}{l} \swarrow u'v \\ \searrow uv' \end{array}$$

*Arbre de calcul.*

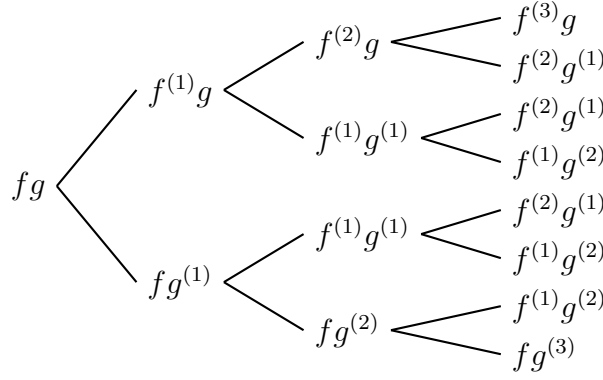
$$f^{(a)} g^{(b)} \begin{array}{l} \swarrow f^{(a+1)} g^{(b)} \\ \searrow f^{(a)} g^{(b+1)} \end{array}$$

*Un calcul intermédiaire.*

L'arbre qui suit donne les étapes de calcul lorsque  $n = 3$ .

4. Pour  $y = 1$ , nous retrouvons  $X^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (X+1)^k$  évaluée en  $x$ .

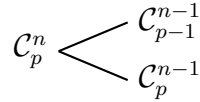
5. Plus généralement, nous pouvons considérer tout anneau différentiel comme, par exemple, l'ensemble  $\mathbb{A}[X]$  des polynômes à coefficients dans un anneau commutatif  $\mathbb{A}$ , muni de la dérivation polynomiale standard. Si  $\mathbb{A}$  est muni d'une dérivation  $\partial$ , nous pouvons munir  $\mathbb{A}[X]$  d'une autre dérivation  $D$ , prolongeant  $\partial$ , en posant  $D(\sum_{k=0}^n a_k X^k) = \sum_{k=0}^n \partial(a_k) X^k$ . Il est aisé de vérifier que  $D(PQ) = D(P)Q + PD(Q)$ . Dans ce cas, la règle de Leibniz devient  $D^n(PQ) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k(P) D^{n-k}(Q)$ .



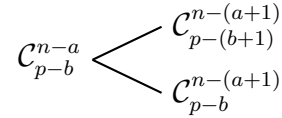
Un exemple de calcul.

**3.4. Coefficients factoriels.** Passons à la démonstration de l'identité  $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k}$  que nous obtiendrons après avoir justifié que  $\mathcal{C}_p^n = \binom{n}{p}$  si  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , nous avons  $\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!}$ , soit  $\mathcal{C}_p^n = \mathcal{C}_p^{n-1} + \mathcal{C}_{p-1}^{n-1}$ . Ensuite, si  $p > n$ , comme  $\mathcal{C}_p^n = \mathcal{C}_p^{n-1} = \mathcal{C}_{p-1}^{n-1} = 0$ , nous avons de nouveau  $\mathcal{C}_p^n = \mathcal{C}_p^{n-1} + \mathcal{C}_{p-1}^{n-1}$ . En résumé,  $\mathcal{C}_p^n = \mathcal{C}_p^{n-1} + \mathcal{C}_{p-1}^{n-1}$  pour  $(p; n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ .<sup>6</sup> Enfin, comme  $\mathcal{C}_0^n = \mathcal{C}_0^{n-1} = 1$ , nous pouvons poser  $\mathcal{C}_p^n = 0$  si  $p < 0$  pour obtenir  $\mathcal{C}_p^n = \mathcal{C}_p^{n-1} + \mathcal{C}_{p-1}^{n-1}$  sur  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ .<sup>7</sup> Ceci nous permet de considérer la situation suivante.

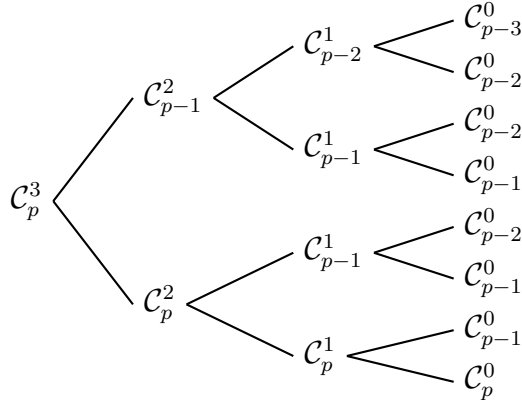


Arbre de calcul.



Un calcul intermédiaire.

Nous considérons alors l'arbre binaire de racine le terme  $\mathcal{C}_p^n$ , et de profondeur  $n$ . Par exemple, pour  $n = 3$ , nous obtenons l'arbre suivant où toutes les feuilles sont du type  $\mathcal{C}_k^0$ .



Un exemple de calcul.

Donc,  $\mathcal{C}_p^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{C}_{p-k}^0$ . Or, pour  $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , la somme se réduit à  $\binom{n}{p} \mathcal{C}_0^0$ , d'où  $\mathcal{C}_p^n = \binom{n}{p}$  comme annoncé. Avec un arbre de racine  $\mathcal{C}_n^{2n}$ , nous obtenons  $\mathcal{C}_n^{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{C}_{n-k}^{2n-n}$ , c'est-à-dire  $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k}$  via  $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} = \mathcal{C}_{n-p}^n$ .

6.  $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$  sur  $(\mathbb{N}^*)^2$  s'obtient via des arbres binaires. Une récurrence donne alors  $\mathcal{C}_p^n = \binom{n}{p}$  sur  $\mathbb{N}^2$ . Ceci étant noté, nous souhaitons raisonner uniquement via des arbres.

7. Prolonger  $\mathcal{C}_p^n = \mathcal{C}_p^{n-1} + \mathcal{C}_{p-1}^{n-1}$  sur  $\mathbb{Z}^2$  est plus problématique, car  $\mathcal{C}_0^0 = \mathcal{C}_0^{-1} + \mathcal{C}_{-1}^{-1}$  a deux degrés de liberté.

**Remarque 3.** Comme  $\mathcal{C}_p^{n-1} = \mathcal{C}_p^n - \mathcal{C}_{p-1}^{n-1}$ , soit  $\mathcal{C}_p^n = \mathcal{C}_p^{n+1} - \mathcal{C}_{p-1}^n$ , nous pouvons considérer la règle suivante.

$$\mathcal{C}_p^n \begin{cases} \mathcal{C}_p^{n+1} \\ -\mathcal{C}_{p-1}^n \end{cases}$$

Arbre de calcul.

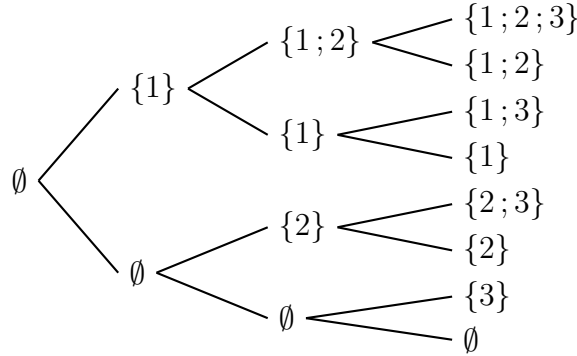
En prenant pour racine  $\mathcal{C}_n^n$ , et pour profondeur  $n$ , nous arrivons à  $\mathcal{C}_n^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \mathcal{C}_k^{n+k}$ , soit  $1 = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$ , une belle identité non immédiate à découvrir.

**3.5. Une escale combinatoire.** En distinguant les sous-ensembles contenant un élément particulier  $e$ , choisi et fixé arbitrairement, de ceux ne le contenant pas, il est immédiat de voir que  $\mathcal{C}(p, n) = \mathcal{C}(p-1, n-1) + \mathcal{C}(p, n-1)$  si  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Dès lors, comme pour  $\mathcal{C}_p^n$ , nous avons  $\mathcal{C}(p, n) = \binom{n}{p}$  si  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$ . Ceci étant indiqué, nous allons proposer une autre approche très classique pour valider  $\mathcal{C}(p, n) = \binom{n}{p}$ . Pour cela, travaillons dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$  avec  $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , puis considérons la chaîne croissante d'ensembles  $\emptyset \subset \{1\} \subset \llbracket 1; 2 \rrbracket \subset \dots \subset \llbracket 1; n \rrbracket$ . À la  $k^e$  étape, nous choisissons d'ajouter, ou non, le naturel  $k$  comme nouvel élément. Ceci nous mène à l'arbre suivant pour  $\mathcal{E} \subseteq \llbracket 1; k-1 \rrbracket$ .

$$\mathcal{E} \begin{cases} \mathcal{E} \cup \{k\} \\ \mathcal{E} \end{cases}$$

Arbre de calcul.

Considérons alors l'arbre binaire de racine l'ensemble vide  $\emptyset$ , et de profondeur  $n$ . Par exemple, pour  $n = 3$ , nous obtenons l'arbre suivant.



Un exemple de calcul.

Nous obtenons alors  $\mathcal{C}(p, n) = \binom{n}{p}$  pour  $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$ .

**Remarque 4.** Nous aurions pu adopter un point de vue dual via la chaîne décroissante d'ensembles  $\llbracket 1; n \rrbracket \supset \llbracket 1; n-1 \rrbracket \supset \dots \supset \llbracket 1; 2 \rrbracket \supset \{1\} \supset \emptyset$ , et l'arbre de calcul « inversé » suivant.

$$\mathcal{E} \begin{cases} \mathcal{E} \\ \mathcal{E} - \{k\} \end{cases}$$

Arbre de calcul.

**Remarque 5.** Il est très facile de deviner que  $\mathcal{C}(n, 2n) = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mathcal{C}(n-k, n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  en considérant deux sous-ensembles particuliers disjoints de cardinal  $n$ , choisis et fixés arbitrairement. Plus généralement, la formule de Van der Monde nous dit que  $\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}$  pour  $(m; n) \in \mathbb{N}^2$  et  $p \in \llbracket 0; \min(n; m) \rrbracket$ . Découvrir  $\mathcal{C}(p, m+n) = \sum_{k=0}^p \mathcal{C}(k, m) \mathcal{C}(p-k, n)$  est immédiat en considérant deux sous-ensembles particuliers disjoints de cardinal  $m$  et  $n$ , choisis et fixés arbitrairement.

**3.6. Une petite astuce pour Fibonacci.** Pour la suite de Fibonacci, de premiers termes  $F_0 = F_1 = 1$ , la règle de calcul est donnée par la relation de récurrence  $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ . Pour les calculs intermédiaires, nous faisons apparaître ce qui a été soustrait à l'indice.

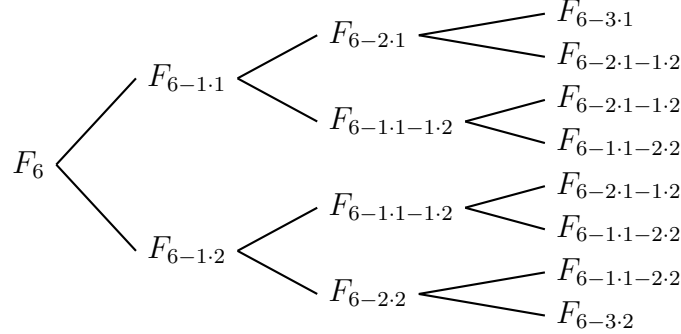
$$F_i \begin{cases} F_{i-1} \\ F_{i-2} \end{cases}$$

*Arbre de calcul.*

$$F_{i-a-1-b-2} \begin{cases} F_{i-(a+1)-1-b-2} \\ F_{i-a-1-(b+1)-2} \end{cases}$$

*Un calcul intermédiaire.*

Pour valider  $F_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k$ , nous considérons un arbre binaire de racine le terme  $F_{2n}$ , et de profondeur  $n$ . Ainsi, pour  $n = 3$ , nous obtenons l'arbre suivant.



*Un exemple de calcul.*

Comme aux feuilles de l'arbre, nous avons les termes  $F_{2n-k-1-(n-k)-2} = F_k$  pour  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , nous validons l'identité  $F_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k$ .

**Remarque 6.** Plus généralement, nous avons  $F_{m+2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{m+k}$  par simple décalage de tous les indices, puisque cette opération est compatible avec notre méthode de construction.

**Remarque 7.** Examinons ce que donne la relation de récurrence modifiée  $F_{i-2} = F_i - F_{i-1}$ , soit  $F_i = F_{i+2} - F_{i+1}$ . La règle de calcul devient la suivante.

$$F_i \begin{cases} F_{i+2} \\ -F_{i+1} \end{cases}$$

*Arbre de calcul.*

Un arbre de racine  $F_0$ , et de profondeur  $n$  donne  $F_0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} F_{2k+n-k}$ , soit la jolie formule  $1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} F_{n+k}$ . Plus généralement,  $F_m = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} F_{m+n+k}$ . Quant à l'autre modification  $F_{i-1} = F_i - F_{i-2}$ , soit  $F_i = F_{i+1} - F_{i-1}$  qui donne la règle de calcul ci-dessous.

$$F_i \begin{cases} F_{i+1} \\ -F_{i-1} \end{cases}$$

*Arbre de calcul.*

Un arbre de racine  $F_n$ , et de profondeur  $n$  donne  $F_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} F_{n+k-(n-k)}$ , soit l'identité  $F_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} F_{2k}$ . Nous retombons sur la formule d'inversion de Pascal : choisir  $a_n = F_n$  et  $b_n = F_{2n}$ .

**Remarque 8.** Considérons  $U$  une suite récurrente linéaire d'ordre 2, c'est-à-dire telle que  $U_i = pU_{i-1} + qU_{i-2}$  avec  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ . En mixant les idées pour la suite de Fibonacci avec celles utilisées pour la formule du binôme de Newton, voir les arbres ci-dessus, nous obtenons sans effort  $U_{m+2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} U_{m+k}$ , et donc  $U_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} U_k$ .

$$U_i \begin{cases} pU_{i-1} \\ qU_{i-2} \end{cases}$$

Arbre de calcul.

$$p^a q^b U_{i-a-1-b \cdot 2} \begin{cases} p^{a+1} q^b U_{i-(a+1) \cdot 1 - b \cdot 2} \\ p^a q^{b+1} U_{i-a \cdot 1 - (b+1) \cdot 2} \end{cases}$$

Un calcul intermédiaire.

Supposons  $p \neq 0$  et  $q \neq 0$ . Via  $U_{i-1} = p^{-1}(U_i - qU_{i-2})$ , soit  $U_i = p^{-1}U_{i+1} - p^{-1}qU_{i-1}$ , il est rapide d'obtenir  $U_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^{-n} (-q)^{n-k} U_{2k}$  (voir ci-dessous). Ceci est une instance de la formule d'inversion de Pascal : l'astuce est de passer via  $a_n = p^n q^{-n} U_n$  et  $b_n = q^{-n} U_{2n}$ .

$$U_i \begin{cases} p^{-1}U_{i+1} \\ -p^{-1}qU_{i-1} \end{cases}$$

Arbre de calcul.

**3.7. Bell sonne la fin du jeu.** Pour  $i \in \mathbb{N}^*$ , notons  $B_i$  le nombre de façons de partitionner un ensemble de  $i$  éléments, et posons  $B_0 = 1$  par convention. Commençons par exhiber un calcul récursif des  $B_i$  en reprenant des idées présentes dans l'article « *The largest singletons of set partitions* » de Yidong Sun et Xiaojuan Wu.<sup>8</sup>

- Pour  $(n; p) \in \mathbb{N}^2$ , notons  $\mathcal{B}_p^n$  le nombre de partitions de  $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$  contenant le singleton  $\{p+1\}$ , et aucun singleton  $\{k\}$  tel que  $k > p+1$ . De façon abusive, dans ce type de situation, nous dirons que  $\{p+1\}$  est le plus grand singleton.<sup>9</sup>
- Notons que  $\mathcal{B}_n^n = B_n$ . En effet, l'existence du singleton maximal  $\{n+1\}$  dans une partition de  $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$  permet, en ignorant  $\{n+1\}$ , d'obtenir une partition de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ . Cette construction est réversible, donc bijective.
- Le cas intéressant de  $\mathcal{B}_0^n$  est abordé dans la remarque 9 plus bas (nous n'aurons pas besoin de  $\mathcal{B}_0^n$  pour notre introduction aux nombres de Bell).
- Que pouvons-nous dire de  $\mathcal{B}_1^n$  lorsque  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ? Considérons une partition  $\pi$  de  $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$  ayant  $\{2\}$  comme singleton maximal. Deux cas se présentent à nous.
  - (1) **Cas 1 :  $\{1\}$  fait partie de  $\pi$ .** En ignorant 1 et 2, et en remplaçant chaque naturel  $k \in \llbracket 3; n+1 \rrbracket$  par  $k-2 \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ , nous obtenons une partition  $\pi'$  de  $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$  sans aucun singleton.
  - (2) **Cas 2 :  $\{1\}$  est absent de  $\pi$ .** Dans ce cas,  $\{2\}$  est l'unique singleton de  $\pi$ . En ignorant 2, en transformant l'ensemble  $\{1; k_1; \dots; k_s\}$ <sup>10</sup> de  $\pi$  en  $\{k_1\} \sqcup \dots \sqcup \{k_s\}$ , et en remplaçant chaque naturel  $k \in \llbracket 3; n+1 \rrbracket$  par  $k-2 \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ , nous obtenons une partition  $\pi'$  de  $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$  avec pour singletons  $\{k_1\}, \dots, \{k_s\}$  (on peut voir 1 comme un marqueur de singletons).

Les procédés ci-dessus étant réversibles, par bijection, nous obtenons :  $\mathcal{B}_1^n = B_{n-1}$  lorsque  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Comme  $\mathcal{B}_1^1 = 1$  et  $B_0 = 1$ , l'identité est valable sur  $\mathbb{N}^*$ .

- Plus généralement, pour  $(n; p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , considérons une partition  $\pi$  de  $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$  ayant  $\{p+1\}$  comme singleton maximal. Deux cas se présentent à nous.
  - (1) **Cas 1 :  $\{p\}$  fait partie de  $\pi$ .** En ignorant  $\{p+1\}$ , et en remplaçant chaque naturel  $k \in \llbracket p+2; n+1 \rrbracket$  par  $k-1 \in \llbracket p+1; n \rrbracket$ , nous obtenons une partition  $\pi'$  de  $\llbracket 1; n \rrbracket$  ayant  $\{p\}$  comme singleton maximal.

8. Voir <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2010.10.011> sur le site ScienceDirect.

9. L'idée consiste à s'appuyer sur l'élément le plus simple qu'une partition puisse contenir : le singleton. Pour limiter les cas à analyser, il est décidé, arbitrairement, de se focaliser sur les singletons maximaux.

10. Nécessairement,  $s \geq 1$ .



- (2) **Cas 2 :  $\{p\}$  est absent de  $\pi$ .** En échangeant  $p$  et  $(p+1)$ , nous obtenons une partition  $\pi'$  de  $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$  ayant  $\{p\}$  comme singleton maximal, puisque  $(p+1)$  se retrouve maintenant dans un ensemble d'au moins deux éléments.

Les procédés ci-dessus étant réversibles, par bijection, nous avons :  $\mathcal{B}_p^n = \mathcal{B}_{p-1}^{n-1} + \mathcal{B}_{p-1}^n$ .

En résumé,  $B_n = \mathcal{B}_n^n = \mathcal{B}_1^{n+1}$  sur  $\mathbb{N}$ , ainsi que  $\mathcal{B}_1^1 = 1$ , et  $\mathcal{B}_p^n = \mathcal{B}_{p-1}^n + \mathcal{B}_{p-1}^{n-1}$  sur  $(\mathbb{N}^*)^2$ . Comme les relations de récurrence vérifiées par  $(\mathcal{B}_p^n)$  ressemblent à celles de la suite  $(\mathcal{C}_p^n)$ , il devient évident de procéder comme suit.

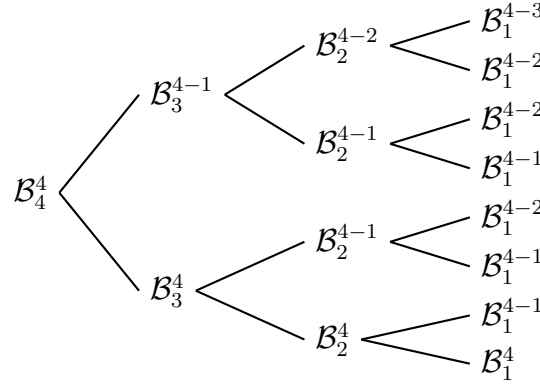
$$\mathcal{B}_p^n \begin{cases} \mathcal{B}_{p-1}^{n-1} \\ \mathcal{B}_{p-1}^n \end{cases}$$

Arbre de calcul.

$$\mathcal{B}_{k-b}^{n-a} \begin{cases} \mathcal{B}_{k-(b+1)}^{n-(a+1)} \\ \mathcal{B}_{k-(b+1)}^{n-a} \end{cases}$$

Un calcul intermédiaire.

Prenons  $\mathcal{B}_{n+1}^{n+1} = B_{n+1}$  pour racine de l'arbre binaire comme dans l'exemple suivant avec  $n = 3$ , où toutes les feuilles sont du type  $\mathcal{B}_1^k$ .



Un exemple de calcul.

Nous arrivons à  $\mathcal{B}_{n+1}^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{B}_1^{n+1-k}$ , soit  $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}$ . Comme  $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ , nous obtenons bien  $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$ .

**Remarque 9.**  $\mathcal{B}_0^n$  est le nombre de partitions de  $\llbracket 1; n \rrbracket$  sans singleton. En effet, si  $\{1\}$  est le singleton maximal d'une partition de  $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ , alors en ignorant  $\{1\}$ , et en remplaçant chaque naturel  $k \in \llbracket 2; n+1 \rrbracket$  par  $k-1 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , nous obtenons une partition de  $\llbracket 1; n \rrbracket$  sans singleton. Il ne reste plus qu'à noter que cette construction est réversible, donc bijective.

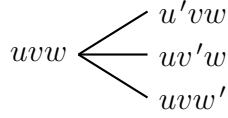
**Remarque 10.** Comme  $\mathcal{B}_{p-1}^n = \mathcal{B}_p^n - \mathcal{B}_{p-1}^{n-1}$ , soit  $\mathcal{B}_p^n = \mathcal{B}_{p+1}^n - \mathcal{B}_p^{n-1}$ , nous pouvons considérer la règle suivante.

$$\mathcal{B}_p^n \begin{cases} \mathcal{B}_{p+1}^n \\ -\mathcal{B}_p^{n-1} \end{cases}$$

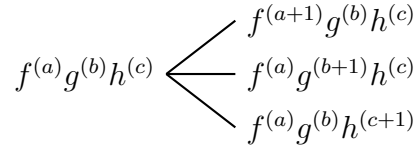
Arbre de calcul.

En prenant pour racine  $\mathcal{B}_1^{n+1}$ , et pour profondeur  $n$ , nous avons  $\mathcal{B}_1^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \mathcal{B}_{k+1}^{k+1}$  qui se réécrit  $B_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} B_{k+1}$ . Ceci est une instance de la formule d'inversion de Pascal via  $a_n = B_n$  et  $b_n = B_{n+1}$ . Avec la racine  $\mathcal{B}_0^n$ , nous arrivons à  $\mathcal{B}_0^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \mathcal{B}_k^k$ , soit  $\mathcal{B}_0^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} B_k$ , une relation liant les nombres de Bell aux nombres de partitions sans singleton.

**3.8. Généraliser aux coefficients multimoniaux.** La méthode peut s'adapter aux cas d'un arbre  $m$ -aire. Par exemple, ce qui suit nous donne la formule de Liebniz pour trois fonctions :  $(fgh)^{(n)} = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \binom{n}{k_1 k_2 k_3} f^{(k_1)} g^{(k_2)} h^{(k_3)}$  où  $\binom{n}{k_1 k_2 k_3}$  compte le nombre de chemins avec  $k_1$  déplacements vers le haut,  $k_2$  déplacements vers le milieu, et  $k_3$  déplacements vers le bas.

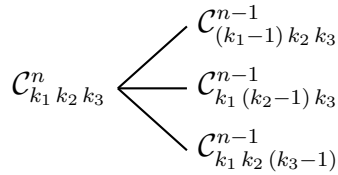


*Arbre de calcul.*

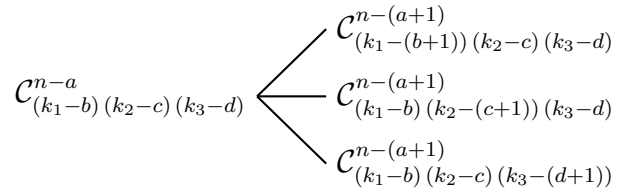


*Un calcul intermédiaire.*

Notant  $\mathcal{C}_{k_1 k_2 k_3}^n = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}$  si  $k_1 + k_2 + k_3 = n$ , nous avons  $\binom{n}{k_1 k_2 k_3} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}$  via ce qui suit.

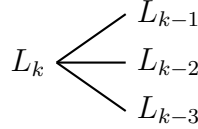


*Arbre de calcul.*

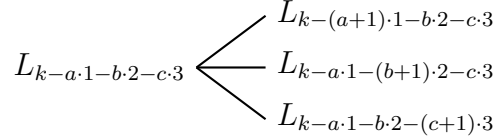


*Un calcul intermédiaire.*

Par contre, si la suite  $L$  est telle que  $L_i = L_{i-1} + L_{i-2} + L_{i-3}$ , ce qui suit ne sera pas aussi pertinent que ce que nous avons obtenu pour la suite de Fibonacci, puisqu'aboutir à  $L_{3n-k_1 \cdot 1 - k_2 \cdot 2 - k_3 \cdot 3} = L_{3n-k_1-2k_2-3(n-k_1-k_2)} = L_{2k_1-k_2}$  est moins intéressant.



*Arbre de calcul.*



*Un calcul intermédiaire.*

#### 4. LA FORMULE DU BINÔME DE NEWTON IMPLIQUE...

Dans cette section, nous repartons de zéro pour retrouver les résultats précédents via une approche algébrique.

**4.1. Un classique des identités algébriques.** Nous allons partir du fait très classique suivant pour donner un éclairage différent sur les identités exhibées dans la section 1.

**Fait 11.** Soit  $\mathbb{A}$  un anneau commutatif (forcément unitaire). Dans l'anneau des polynômes à deux variables  $\mathbb{A}[X, Y]$ , nous avons :  $\forall n \in \mathbb{N}, (X + Y)^n = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) X^k Y^{n-k}$ . Ceci est la formule générale du binôme de Newton.

*Démonstration.* Il suffit d'écrire  $(X + Y)^n = \prod_{k=1}^n (X + Y)_k$  avec des indices étiquetant les parenthèses dont les positions sont fixées dans le produit. En distribuant parenthèse par parenthèse de gauche à droite, le nombre de  $X^k Y^{n-k}$  obtenus correspond au nombre de choix de  $k$  parenthèses, pour  $X$ , parmi les  $n$  disponibles, ce qui donne  $\mathcal{C}(k, n)$  possibilités.  $\square$

Dans les applications à venir, nous allons nous appuyer sur la formule suivante appliquée dans différents anneaux bien choisis.

**Fait 12.** Soit  $\mathbb{A}$  un anneau commutatif.  $\forall (a, b) \in \mathbb{A}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) a^k b^{n-k}$ .

*Démonstration.* Il suffit d'évaluer en  $(a, b)$  la formule générique du binôme de Newton.  $\square$

**Remarque 13.** Notre preuve de la formule d'inversion de Pascal s'appuyait sur la formule du binôme de Newton (voir le fait 1). En oubliant la section sur les arbres, nous pouvons donc justifier que pour deux suites  $a$  et  $b$  à valeur dans un anneau commutatif,  $b_n = \sum_{k=0}^n \mathbf{C}(k, n) a_k$  sur  $\mathbb{N}$  si, et seulement si,  $a_n = \sum_{k=0}^n \mathbf{C}(k, n) (-1)^{n-k} b_k$  sur  $\mathbb{N}$ .

**4.2. La loi binomiale est algébrique.** Nous souhaitons établir la loi binomiale sous la forme  $P(X = j) = \sum_{k=0}^n \mathbf{C}(k, n) p^k q^{n-k} \delta_{jk}$  où  $X$  est la variable aléatoire (v.a.) comptant le nombre de succès de probabilité  $p$  ( $q = 1 - p$ ). Notons  $X_i$  la v.a. comptant le nombre de succès de la  $i^{\text{e}}$  épreuve de Bernoulli du schéma de Bernoulli associé à  $X$ . Dès lors,  $X = \sum_{s=1}^n X_s$  où  $(X_s)_{1 \leq s \leq n}$  forme une famille de v.a. indépendantes deux à deux ayant chacune pour loi de probabilité  $P(X_s = j) = p\delta_{1j} + q\delta_{0j}$ . Nous posons  $f_X : j \in \mathbb{Z} \mapsto P(X = j) \in [0; 1]$ , de sorte que  $f_{X_s} = p\delta_1 + q\delta_0$  en notant  $\delta_k(j) = \delta_{kj}$ . A-t-on un lien entre  $f_X$  et  $(f_{X_s})_{1 \leq s \leq n}$ ? La réponse est oui, mais cela va nécessiter de passer par le produit de convolution. Par exemple, avec deux épreuves, nous avons ce qui suit.

$$\begin{aligned}
 f_X(j) &= P(X_1 + X_2 = j) \\
 &= \sum_{k=0}^2 P((X_1 = k) \cap (X_2 = j - k)) \\
 &= \sum_{k=0}^2 P(X_1 = k) P(X_2 = j - k) \\
 &= \sum_{k+m=j} P(X_1 = k) P(X_2 = m) \\
 &= \sum_{k+m=j} f_{X_1}(k) f_{X_2}(m)
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont des v.a. indépendantes.} \\ \\ \text{On écrit juste } k + m = j \text{ sans } (k, m) \in \mathbb{Z}^2. \end{array}$$

Ceci motive la définition suivante.

**Définition 14.** Notons  $\mathbb{A} = \ell_m(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$  l'ensemble des suites réelles indexées sur  $\mathbb{Z}$  et à support minoré.<sup>11</sup> Pour  $(f, g) \in \mathbb{A}^2$ , nous pouvons définir  $\pi$  sur  $\mathbb{Z}$  par  $\pi(j) = \sum_{k+m=j} f(k)g(m)$  (cette somme est finie).<sup>12</sup> La suite  $\pi$  est appelée « produit de convolution » de  $f$  et  $g$ , et notée  $f * g$ .

**Fait 15.**  $\mathbb{A} = \ell_m(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$  muni de l'addition  $+$  indice par indice, et du produit de convolution  $*$  est un anneau commutatif.

*Démonstration.* Nous devons juste vérifier les propriétés portant sur le produit de convolution.

- (1) Clairement,  $\forall (f, g, h) \in \mathbb{A}^3$ , nous avons  $f * g = g * f$  et  $(f + g) * h = f * h + g * h$ .
- (2) La validation de  $(f * g) * h = f * (g * h)$  pour  $(f, g, h) \in \mathbb{A}^3$  se fait comme suit.

$$\begin{aligned}
 &((f * g) * h)(j) & \left| & (f * (g * h))(j) \right. \\
 &= \sum_{k+m=j} (f * g)(k) h(m) & & = \sum_{k+m=j} f(k) (g * h)(m) \\
 &= \sum_{k+m=j} \sum_{q+r=k} f(q) g(r) h(m) & & = \sum_{k+m=j} \sum_{q+r=m} f(q) g(r) h(k) \\
 &= \sum_{q+r+m=j} f(q) g(r) h(m) & & = \sum_{k+q+r=j} f(k) g(q) h(r)
 \end{aligned}$$

11. Ceci signifie que  $\forall f \in \mathbb{A}$ ,  $\exists m_f \in \mathbb{Z}$  tel que  $\forall j \in \mathbb{Z}_{\leq m_f}$ ,  $f(j) = 0$ .

12.  $f(k) = 0$  si  $k \leq m_f$ ,  $g(m) = 0$  si  $m \leq m_g$  et  $k + m = j$  impliquent  $f(k)g(m) \neq 0$  uniquement si  $k < j - m_g$  et  $k > m_f$ , c'est-à-dire pour un nombre fini de valeurs de  $k$ , et par conséquent de  $m$ .

- (3) L'élément neutre  $1_{\mathbb{A}}$  pour  $*$  doit vérifier :  $\forall(f, j) \in \mathbb{A} \times \mathbb{Z}, f(j) = \sum_{k+m=j} f(k)1_{\mathbb{A}}(m)$ .  
 Il est aisé de deviner que  $1_{\mathbb{A}} = \delta_0$  convient (rappelons que  $\delta_0(j) = \delta_{0j}$ ).  $\square$

L'application de la formule du binôme de Newton nous donne ce qui suit.

$$\begin{aligned}
 P(X = j) &= f_X(j) \\
 &= f_{X_1 + \dots + X_n}(j) \\
 &= (f_{X_1} * \dots * f_{X_n})(j) \quad \left. \begin{array}{l} \text{On généralise sans souci l'identité qui} \\ \text{a motivé l'introduction de la convolution.} \end{array} \right\} \\
 &= ((p\delta_1 + q\delta_0) * \dots * (p\delta_1 + q\delta_0))(j) \quad \left. \begin{array}{l} \text{La puissance est relative à } *. \end{array} \right\} \\
 &= (p\delta_1 + q\delta_0)^n(j) \\
 &= \left( \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) p^k q^{n-k} \delta_1^k * \delta_0^{n-k} \right)(j) \quad \left. \begin{array}{l} \delta_0 \text{ est l'élément neutre pour } *. \end{array} \right\} \\
 &= \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) p^k q^{n-k} \delta_1^k(j)
 \end{aligned}$$

Pour conclure, nous devons simplifier  $\delta_1^k(j)$ . Une petite récurrence fournit  $\delta_1^k = \delta_k$ . Voici les deux grandes étapes de ce raisonnement.

- **Cas de base.**  $\delta_1^0$  est l'élément neutre pour  $*$ , donc  $\delta_1^0 = \delta_0$ .
- **Hérédité.** Supposons avoir  $\delta_1^n = \delta_n$ . Nous avons alors les égalités suivantes.

$$\begin{aligned}
 \delta_1^{n+1}(j) &= (\delta_1^n * \delta_1)(j) \\
 &= (\delta_n * \delta_1)(j) \\
 &= \sum_{k+m=j} \delta_n(k) \delta_1(m)
 \end{aligned}$$

Dès lors,  $\delta_1^{n+1}(j) = 1$  si  $j = n + 1$ , et 0 sinon. Ceci donne  $\delta_1^{n+1} = \delta_{n+1}$  comme souhaité.

Finalement,  $P(X = j) = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) p^k q^{n-k} \delta_k(j)$ , soit  $P(X = j) = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) p^k q^{n-k} \delta_{jk}$ .

**4.3. Leibniz, le retour.** Notre objectif est d'obtenir  $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$ . Comme nous souhaitons dériver autant de fois que nécessaire, cette opération de dérivation étant linéaire, et comme de plus nous considérons deux fonctions, il est naturel d'introduire les objets suivants.

- $\pi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x)g(y) \in \mathbb{R}$ . Ceci permet de « singulariser » les fonctions  $f$  et  $g$ .
- $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  désigne l'ensemble des fonctions infiniment dérivables de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ .<sup>13</sup>
- $\mathbb{A} = \text{End}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$  est l'ensemble des endomorphismes linéaires de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  muni de l'addition  $+$  point par point, et de la composition  $\circ$  comme produit.
- $\frac{\partial}{\partial x} \in \mathbb{A}$  et  $\frac{\partial}{\partial y} \in \mathbb{A}$  sont les dérivations partielles relativement aux première et deuxième coordonnées respectivement.

Pour utiliser le fait 12, nous devons avoir  $\frac{\partial}{\partial x} \circ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \circ \frac{\partial}{\partial x}$ . C'est bien le cas d'après le théorème de Schwarz, valable sur  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . Nous obtenons alors  $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^n = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) \frac{\partial^k}{\partial x^k} \circ \frac{\partial^{n-k}}{\partial y^{n-k}}$  selon la formule du binôme de Newton. Il nous reste à revenir dans le monde des fonctions à une seule variable. Pour ce faire, considérons  $\Lambda \in \mathbb{A}$  qui à  $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  associe  $\Lambda(h)$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $\Lambda(h)(x, y) = h(x, x)$ . Nous avons la propriété de commutativité essentielle suivante.

<sup>13.</sup> Si besoin, il est possible de modifier cet ensemble tant que cela n'enfreint pas le théorème de Schwarz qui va être essentiel pour la suite.

15. Nous perdons les termes d'indice inférieur à  $k$ .

**Remarque 16.** En considérant  $F = \sigma_2(F) - \sigma_1(F)$ , nous pouvons conduire les calculs suivants.

$$\begin{aligned}
 (F_m)_{m \in \mathbb{N}} &= (\sigma_2 - \sigma_1)^n(F) \\
 &= \left( \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} \sigma_2^k \circ \sigma_1^{n-k} \right) (F) \\
 &= \left( \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} F_{m+n+k} \right)_{m \in \mathbb{N}}
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \text{\textit{\textcolor{blue}{\(\sigma_1 \text{ et } \sigma_2 \text{ commutent.}\)}}} \\ \text{\textit{\textcolor{blue}{\(\sigma_2^k \circ \sigma_1^{n-k} = \sigma_{n+k}\)}}} \end{array} \right\}$$

Nous obtenons sans effort  $F_m = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} F_{m+n+k}$ , d'où, via  $m = 0$ , la jolie identité

$$1 = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} F_{n+k}.$$

En partant de  $\sigma_1(F) = \sigma_2(F) - F$ , nous obtenons ce qui suit.

$$\begin{aligned}
 (F_{m+n})_{m \in \mathbb{N}} &= (\sigma_1)^n(F) \\
 &= (\sigma_2 - \text{id})^n(F) \\
 &= \left( \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} \sigma_{2k} \right) (F) \\
 &= \left( \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} F_{m+2k} \right)_{m \in \mathbb{N}}
 \end{aligned}$$

Le choix  $m = 0$  fournit ici  $F_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} F_{2k}$  qui correspond à une instance de la formule d'inversion de Pascal via  $a_n = F_n$  et  $b_n = F_{2n}$ .

**Remarque 17.** La généralisation à une suite récurrente vérifiant  $U_i = pU_{i-1} + qU_{i-2}$  ne pose pas de difficulté via  $\sigma_2(U) = p\sigma_1(U) + qU$  qui donne, sans effort,  $U_{2n} = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) p^k q^{n-k} U_k$ . Si  $p \neq 0$  et  $q \neq 0$ , alors  $\sigma_1(U) = p^{-1}(\sigma_2(U) - qU)$  donne  $U_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) p^{-n} (-q)^{n-k} U_{2k}$ , une instance de la formule d'inversion de Pascal via  $a_n = U_n$  et  $b_n = U_{2n}$ .

**4.5. Bell en écho de Fibonacci.** Démontrons que  $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) B_k$ , où  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  désigne la suite des nombres de Bell. Indépendamment de la technique spécifique à la section 3, nous savons que ceci équivaut à démontrer que  $\mathcal{B}_{n+1}^{n+1} = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) \mathcal{B}_1^{k+1}$ , où  $\mathcal{B}_n^n = \mathcal{B}_1^{n+1} = B_n$  sur  $\mathbb{N}$ , ainsi que  $\mathcal{B}_1^1 = 1$ , et  $\mathcal{B}_{p+1}^{n+1} = \mathcal{B}_p^{n+1} + \mathcal{B}_p^n$  sur  $\mathbb{N}^2$  (voir page 8). Inspiré par la suite de Fibonacci, nous introduisons les ingrédients suivants.

- $\ell(\mathbb{N}^2, \mathbb{R})$  désigne l'ensemble des suites réelles doublement indexées sur  $\mathbb{N}^2$ .<sup>16</sup>
- $\mathbb{A} = \text{End}(\ell(\mathbb{N}^2, \mathbb{R}))$  est l'ensemble des endomorphismes linéaires de  $\ell(\mathbb{N}^2, \mathbb{R})$  muni de l'addition  $+$  point par point, et de la composition  $\circ$  comme produit.
- Pour  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\mu_a^b \in \mathbb{A}$  désigne un opérateur partiel de décalage qui à la suite  $(w_p^m)_{(p, m) \in \mathbb{N}^2}$  associe la suite  $(w_{p+a}^{m+b})_{(p, m) \in \mathbb{N}^2}$ .

La formule de récurrence se réécrit  $\mu_1^1(\mathcal{B}) = \mu_0^1(\mathcal{B}) + \mathcal{B}$ , puis, via le binôme de Newton, nous obtenons ce qui suit.

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{B}_{p+n}^{m+n})_{(p, m) \in \mathbb{N}^2} &= (\mu_1^1)^n(\mathcal{B}) \\
 &= (\mu_0^1 + \text{id})^n(\mathcal{B}) \\
 &= \left( \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (\mu_0^1)^k \circ \text{id}^{n-k} \right) (\mathcal{B}) \\
 &= \left( \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) \mu_0^k \right) (\mathcal{B}) \\
 &= \left( \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) \mathcal{B}_p^{m+k} \right)_{(p, m) \in \mathbb{N}^2}
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \text{\textit{\textcolor{blue}{\(\text{id est l'application identité sur } \ell(\mathbb{N}^2, \mathbb{R}).\)}}} \\ \text{\textit{\textcolor{blue}{\(\mu_0^1 \text{ et id commutent.}\)}}} \end{array} \right\}$$

16. Ici aussi, si besoin,  $\mathbb{R}$  peut être remplacé par un anneau commutatif de son choix.

Pour conclure, le choix  $p = m = 1$  donne  $\mathcal{B}_{n+1}^{n+1} = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mathcal{B}_1^{k+1}$  comme souhaité.

**Remarque 18.** Comme pour la suite de Fibonacci, il est aisé de produire de nouvelles formules de récurrence. Partons de  $\mu_0^1(\mathcal{B}) = \mu_1^1(\mathcal{B}) - \mathcal{B}$ .

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}_p^{m+n})_{(p,m) \in \mathbb{N}^2} &= (\mu_0^1)^n(\mathcal{B}) \\ &= (\mu_1^1 - \text{id})^n(\mathcal{B}) \\ &= \left( \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (-1)^{n-k} \mu_k^k \right) (\mathcal{B}) \\ &= \left( \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (-1)^{n-k} \mathcal{B}_{p+k}^{m+k} \right)_{(p,m) \in \mathbb{N}^2} \end{aligned}$$

Nous obtenons facilement  $\mathcal{B}_p^{m+n} = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (-1)^{n-k} \mathcal{B}_{p+k}^{m+k}$ . Avec  $(p, m) = (1, 1)$ , nous arrivons à  $\mathcal{B}_1^{n+1} = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (-1)^{n-k} \mathcal{B}_{k+1}^{k+1}$ , qui correspond à  $B_n = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (-1)^{n-k} B_{k+1}$ , soit la formule d'inversion de Pascal pour  $a_n = B_n$  et  $b_n = B_{n+1}$ . Tandis que  $(p, m) = (0, 0)$  fournit  $\mathcal{B}_0^n = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (-1)^{n-k} \mathcal{B}_k^k$ , soit  $\mathcal{B}_0^n = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (-1)^{n-k} B_k$  qui lie le nombre de partitions sans singleton aux nombres de Bell (voir la section 3.7 page 8).

**4.6. Coefficients factoriels et combinatoires.** Il reste à démontrer que  $\binom{n}{p} = \mathcal{C}(p, n) = \mathcal{C}_p^n$ , et  $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k}$ . Rappelons que les coefficients factoriels vérifient  $\mathcal{C}_0^0 = 1$ ,  $\mathcal{C}_p^0 = 0$  si  $p \neq 0$  et  $\mathcal{C}_{p+1}^{n+1} = \mathcal{C}_{p+1}^n + \mathcal{C}_p^n$  sur  $\mathbb{N}^2$ . Reprenant les notations de la section précédente, la relation de récurrence se réécrit  $\mu_1^1(\mathcal{C}) = \mu_1^0(\mathcal{C}) + \mathcal{C}$ .<sup>17</sup> Nous aboutissons aux calculs suivants.

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_{p+n}^{m+n})_{(p,m) \in \mathbb{N}^2} &= (\mu_1^1)^n(\mathcal{C}) \\ &= (\mu_1^0 + \text{id})^n(\mathcal{C}) \\ &= \left( \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (\mu_1^0)^k \circ \text{id}^{n-k} \right) (\mathcal{C}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \mu_1^0 \text{ et id commutent.} \\ &= \left( \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mu_k^0 \right) (\mathcal{C}) \\ &= \left( \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mathcal{C}_{p+k}^m \right)_{(p,m) \in \mathbb{N}^2} \end{aligned}$$

En choisissant  $(p, m) = (0, n)$ , nous obtenons  $\mathcal{C}_n^{2n} = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mathcal{C}_k^n$ .

Justifions maintenant que  $\mathcal{C}_p^n = \mathcal{C}(p, n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$ .<sup>18</sup> Une première idée serait de réécrire  $\mu_1^1(\mathcal{C}) = \mu_1^0(\mathcal{C}) + \mathcal{C}$  sous la forme  $\mathcal{C} = \mu_0^{-1}(\mathcal{C}) + \mu_{-1}^{-1}(\mathcal{C})$ , mais malheureusement, travaillant avec des opérateurs partiels, nous ne pouvons pas les inverser « directement ». Nous pouvons tout de même nous en sortir à moindres frais. Dans la section 3.4 page 5, nous avons expliqué comment prolonger  $\mathcal{C}_p^n$  sur  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  en posant  $\mathcal{C}_p^n = 0$  si  $p < 0$  de sorte que  $\mathcal{C}_{p+1}^{n+1} = \mathcal{C}_{p+1}^n + \mathcal{C}_p^n$  reste valide sur  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ . Fixons alors  $q \in \mathbb{N}$ , et définissons la suite  $\mathcal{D}$  sur  $\mathbb{N}^2$  par  $\mathcal{D}_p^m = \mathcal{C}_{p-q}^m$ .<sup>19</sup> Comme  $\mu_1^1(\mathcal{D}) = \mu_1^0(\mathcal{D}) + \mathcal{D}$ , de nouveau,  $\forall (n; m; p) \in \mathbb{N}^3$ ,  $\mathcal{D}_{p+n}^{m+n} = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mathcal{D}_{p+k}^m$ , soit  $\mathcal{C}_{p+n-q}^{m+n} = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mathcal{C}_{p+k-q}^m$ . Considérant  $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , puis choisissant  $q = n$  et  $m = 0$ , nous obtenons  $\mathcal{C}_p^n = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mathcal{C}_{p+k-n}^0$ . Comme  $\mathcal{C}_{p+k-n}^0 = 1$  si  $p + k - n = 0$ , et 0 sinon, nous arrivons à  $\mathcal{C}_p^n = \mathcal{C}(n - p, n) \mathcal{C}_0^0$ , soit  $\mathcal{C}_p^n = \mathcal{C}(n - p, n)$ , puis  $\mathcal{C}_p^n = \mathcal{C}(p, n)$  comme souhaité.

17. Noter la ressemblance avec  $\mu_1^1(\mathcal{B}) = \mu_0^1(\mathcal{B}) + \mathcal{B}$ .

18. L'efficacité commande de passer via  $\mathcal{C}(0, 0) = 1$ ,  $\mathcal{C}(p, 0) = 0$  si  $p \neq 0$  et  $\mathcal{C}(p+1, n+1) = \mathcal{C}(p+1, n) + \mathcal{C}(p, n)$  sur  $\mathbb{N}^2$ , la relation de récurrence se démontrant aisément par un argument combinatoire. Nous ne le faisons pas, car nous souhaitons donner un rôle central à la formule du binôme de Newton.

19. Nous créons le décalage à la source, à défaut de l'obtenir dans le but.

Ensuite, il est aisé d'obtenir  $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$  en raisonnant juste sur un arbre binaire (considérer deux sous-arbres de racines respectives un succès et un échec). Donc, ce qui précède s'adapte pour donner  $\binom{n}{p} = C(p, n)$  via la formule du binôme de Newton.

Finalement,  $C_n^{2n} = \sum_{k=0}^n C(k, n) C_k^n$  se réécrit  $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k}$ , car  $\binom{n}{p} = C(p, n) = C_p^n$ .

**Remarque 19.** En partant de  $C = \mu_1^1(C) - \mu_1^0(C)$ , via des calculs similaires à ceux ci-dessus, nous arrivons à  $C_p^m = \sum_{k=0}^n C(k, n) (-1)^{n-k} C_{p+n}^{m+k}$  qui fournit  $C_n^{2n} = \sum_{k=0}^n C(k, n) (-1)^{n-k} C_{2n}^{2n+k}$  via  $(p, m) = (n, 2n)$ , soit  $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{2n+k}{2n}$ .<sup>20</sup> Quant au choix  $\mu_1^0(C) = \mu_1^1(C) - C$ , il donne  $C_{p+n}^m = \sum_{k=0}^n C(k, n) (-1)^{n-k} C_{p+k}^{m+k}$ , et par conséquent, via  $(p, m) = (0, n)$ , la très jolie identité, non immédiate à découvrir,  $1 = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$ .

## 5. SOURCES UTILISÉES

Voici les sources utilisées lors de la rédaction de ce document.

- « *The largest singletons of set partitions* » de Yidong Sun et Xiaojuan Wu, en ligne : <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2010.10.011> sur le site ScienceDirect.
- Les lignes sur l'utilisation de la formule du binôme de Newton dans différents anneaux doivent leur existence à la lecture du post suivant qui restait consultable en ligne le 12 avril 2025 : <https://pierreallkenbernard.wordpress.com/2011/06/26/binome-de-newton-formule-de-leibniz-loi-binomiale>.

---

20. Notons que  $(p, m) = (0, 0)$  donne la triviale identité  $1 = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{n}$ . Inutile, mais marrant !