# IDENTITÉS PARTICULIÈRES GÉNÉRALISABLES RIGOUREUSEMENT

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source LATEX, disponible sur la page*
***https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/visual-proof/polynomial-analytic-principles.***

## Mentions « légales »



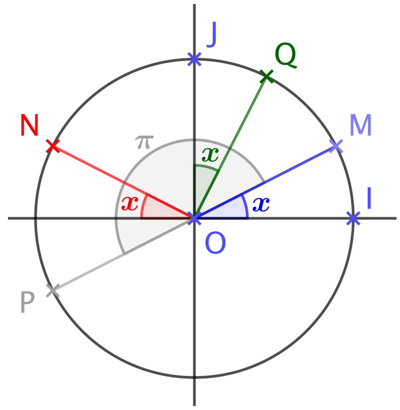
Table des matières



*Date*: 16 Juillet 2019 - 26 Mars 2025.

## 1. Puis vinrent les fonctions analytiques d'une seule variable

Considérons le dessin suivant, où les mesures des angles sont en radians.




Via les points $M$, $N$, $P$ et $Q$, il est facile de fournir des arguments géométriques de symétrie justifiant que, sous la condition $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{4}\right[$, nous avons :

- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
  $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
  $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

De nouveau, il serait bien de pouvoir passer, sans plus d'effort, à la validité des formules ci-dessus sur $\mathbb{R}$ tout entier *(considérer les autres cas n'est pas compliqué, mais c'est pénible)*. Nous allons voir que cela est licite grâce au fait **??**, donné plus bas, qui est un peu technique, car il nécessite la notion de fonction analytique.

**Préliminaire 1.** *Le rayon de convergence $R$ de la série entière complexe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est défini par la formule de Hadamard*[1] $\dfrac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ *avec les conventions* $0 = \dfrac{1}{+\infty}$ *et* $+\infty = \dfrac{1}{0}$.
*Ce nombre $R$ s'interprète comme suit.*

1. *(1) Si $R = 0$, la série ne converge que pour $z = 0$, et sinon elle diverge grossièrement.*
2. *(2) Si $R = +\infty$, la série converge sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, la série converge normalement sur tout disque ouvert $\mathcal{D}(0\,;r[$ tel que $r \in \mathbb{R}_+^*$.*
3. *(3) Si $0 < R < +\infty$, la série converge normalement sur tout disque ouvert $\mathcal{D}(0\,;r[$ tel que $0 < r < R$, donc elle converge sur $\mathcal{D}(0\,;R[$. Par contre, elle diverge grossièrement sur $\mathbb{C} - \mathcal{D}(0\,;R]$, et le comportement sur le cercle $\mathcal{C}(0\,;R)$ doit être traité au cas par cas.*

*Démonstration.* Notons $\ell = \limsup_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$, soit $\ell = \lim_{n\to+\infty} \left(\sup\left\{\sqrt[k]{|a_k|}\ ,\ k \in \mathbb{N}_{\geq n}\right\}\right)$, de sorte que $\ell \in [0\,;+\infty]$. Commençons par le cas $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire $R \in \mathbb{R}_+^*$.

- Soit $r \in ]0\,;R[$. Considérons $\rho \in ]r\,;R[$ de sorte que $\frac{1}{r} > \frac{1}{\rho} > \frac{1}{R}$. Par définition de $\ell = \frac{1}{R}$, nous avons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sup\left\{\sqrt[k]{|a_k|}\ ,\ k \in \mathbb{N}_{\geq n_0}\right\} < \frac{1}{\rho}$. Donc pour $z \in \mathcal{D}(0\,;r[$ et $k \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$, nous obtenons $\left|a_k z^k\right| < \left(\frac{r}{\rho}\right)^k$ pour $k \geq n_0$. Comme $0 < \frac{r}{\rho} < 1$, la convergence normale devient évidente.
- Soit $z \in \mathbb{C} - \mathcal{D}(0\,;R]$. Comme $\frac{1}{|z|} < \frac{1}{R}$, nous avons ici $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$, $\sup\left\{\sqrt[k]{|a_k|}\ ,\ k \in \mathbb{N}_{\geq n}\right\} > \frac{1}{|z|}$. En particulier, nous pouvons construire une suite strictement croissante d'indices $(k_i)$ telle que $\left|a_{k_i} z^{k_i}\right| > 1$. Ceci donne la divergence grossière.

1. La démonstration va révéler le côté « *naturel* » de la formule de Hadamard.

- La justification du comportement pathologique sur le cercle $\mathcal{C}(0\,;R)$ se fait via des contre-exemples. Nous pouvons citer les exemples classiques suivants.
  (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, de rayon de convergence 1, diverge grossièrement sur $\mathcal{C}(0\,;1)$.
  (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$, de rayon de convergence 1, puisque $\ln\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}\right) = -\frac{2\ln n}{n}$. De plus, cette série entière converge normalement sur $\mathcal{C}(0\,;1)$.
  (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$, de rayon de convergence 1, puisque $\ln\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right) = -\frac{\ln n}{n}$. De plus, cette série entière converge sur $\mathcal{C}(0\,;1) - \{1\}$, mais pas en 1. Le comportement sur $\mathcal{C}(0\,;1) - \{1\}$ est plus délicat à démontrer, car il se base sur le test de Abel-Dirichlet.

Les cas $\ell = 0$, c'est-à-dire $R = +\infty$, et $\ell = +\infty$, c'est-à-dire $R = 0$, s'obtiennent via des adaptations immédiates de ce qui a été fait ci-dessus. □

**Exemple 2.** *La série entière complexe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ *admet un rayon de convergence infini ; la fonction associée est l'exponentielle complexe* exp. *En effet, notant* Ent *la fonction partie entière, nous avons* $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\mathrm{Ent}\left(\frac{n}{2}\right)} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}$, *puis* $\ln\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}\right) \leq \frac{2-n}{2n} \ln\left(\frac{n}{2}\right)$.

**Préliminaire 3.** *Soit une série entière complexe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *de rayon de convergence* $R$ *non nul. La fonction* $f : z \in \mathcal{D}(0\,;R[ \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}$ *vérifie les propriétés suivantes.*

*(1)* $f$ *est infiniment* $\mathbb{C}$*-dérivable.* [2]

*(2)* $\forall k \in \mathbb{N}$, *la série entière* $\sum\limits_{n=k}^{\infty} \dfrac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$ *admet* $R$ *pour rayon de convergence.*

*(3)* $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathcal{D}(0\,;R[$, $f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} \dfrac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$.

*(4)* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

*Démonstration.* La propriété 4 étant aisée à déduire, une récurrence immédiate à faire montre que nous avons juste à démontrer que $\forall z \in \mathcal{D}(0\,;R[$, $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \mathcal{D}(0\,;R[}} \left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

- $\ln\left(\sqrt[n]{|na_n|}\right) = \frac{\ln n}{n} + \ln\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ donne que $R$ est le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.
  On peut donc définir la fonction $g : z \in \mathcal{D}(0\,;R[ \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \in \mathbb{C}$.
- Pour $(z, z_0) \in \mathcal{D}(0\,;R[^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$, nous introduisons les notations suivantes.
  (a) $f_k(z) = \sum\limits_{n=0}^{k} a_n z^n$.
  (b) $g_k(z) = \sum\limits_{n=1}^{k} n a_n z^{n-1}$, cette fonction étant clairement la $\mathbb{C}$-dérivée de $f_k(z)$.

2. La théorie des fonctions $\mathbb{C}$-dérivables est très riche. Elle est nommée « *analyse complexe* », et le terme « *holomorphie* » est employé à la place de la $\mathbb{C}$-dérivabilité.

(c) $T_k(z) = \begin{cases} \frac{f_k(z)-f_k(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \in \mathcal{D}(0\,;R[ - \{z_0\} \\ g_k(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$

(d) $T(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \in \mathcal{D}(0\,;R[ - \{z_0\} \\ g(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$

- Considérons alors $r \in ]0\,;R[$ tel que $z_0 \in \mathcal{D}(0\,;r[$. Par convergence normale sur $\mathcal{D}(0\,;r]$ de $(f_k)_k$ et $(g_k)_k$ vers $f$ et $g$ respectivement, nous avons la convergence uniforme sur $\mathcal{D}(0\,;r]$ de $(T_k)_k$ vers $T$. Or chaque fonction $T_k$ est continue en $z_0$ par $\mathbb{C}$-dérivablité de $f_k$, donc $T$ est continue en $z_0$, d'où la $\mathbb{C}$-dérivabilité de $f$ en $z_0$ avec $f'(z_0) = g(z_0)$. Ceci achève la preuve, car $z_0 \in \mathcal{D}(0\,;R[$ est quelconque.

□

**Remarque 4.** *Une relecture de preuves des résultats préliminaires 1 et 3 donnent que pour toute série entière complexe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *de rayon de convergence* $R$ *non nul, et tout nombre complexe* $z_0$*, la fonction* $f : z \in \mathcal{D}(z_0\,;R[ \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \in \mathbb{C}$ *vérifie les propriétés suivantes.*

*(1)* $f$ *est infiniment* $\mathbb{C}$*-dérivable.*

*(2)* $\forall k \in \mathbb{N}$*, la série* $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-z_0)^{n-k}$ *converge normalement sur* $\mathcal{D}(z_0\,;R[$*,*

*(3)* $\forall k \in \mathbb{N}$*,* $\forall z \in \mathcal{D}(z_0\,;R[$*,* $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-z_0)^{n-k}$.

*(4)* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Nous allons voir que les fonctions développables en série entière autour d'un nombre complexe $z_0$ ont le bon ton de l'être aussi dans un voisinage de $z_0$.

**Définition 5.** *Soit* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *un ouvert non vide. Une fonction* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *est dite analytique en* $z_0 \in \Omega$*, s'il existe une série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *de rayon de convergence* $R > 0$ *et un réel* $r \in ]0\,;R]$ *tels qu'on ait* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ *dans le disque ouvert* $\mathcal{D}(z_0\,;r[ \subseteq \Omega$*.*

*Si* $f$ *est analytique en tout nombre complexe de* $\Omega$*, la fonction* $f$ *est dite analytique sur* $\Omega$*.*

**Fait 6.** *Soit* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *où* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *est un ouvert non vide. Si* $f$ *est analytique en* $z_0$*, alors il existe un réel* $r > 0$ *tel que* $f$ *soit analytique sur* $\mathcal{D}(z_0\,;r[$ *tout entier.*

*Démonstration.* Nous allons montrer que le réel $r$ introduit dans la définition 5 convient. Pour cela, reprenons les notations de cette définition, et considérons $\omega \in \mathcal{D}(z_0\,;r[$. Nous devons trouver $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ de rayon de convergence $S > 0$ et $\rho \in ]0\,;S]$ tels qu'on ait $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-w)^n$ sur le disque ouvert $\mathcal{D}(\omega\,;\rho[ \subseteq \mathcal{D}(z_0\,;r[$.

- Faisons **une analyse purement formelle** sans nous soucier des problèmes de convergence. Selon la remarque 4, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\omega)}{n!} (z-\omega)^n$ et $f^{(n)}(\omega) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k \omega^{k-n}$ amènent à considérer $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{n!(k-n)!} a_k \omega^{k-n} (z-\omega)^n$.
- XXXX

- XXXX
- XXXX

□

**Temporary page!**

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows how many pages to expect for this document.