

BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



TABLE DES MATIÈRES

1. Les polygones	2
1.1. Où allons-nous ?	2
1.2. Quelques définitions	2
1.3. Au moins une solution	2

1. LES POLYGONES

1.1. Où allons-nous ? Pour passer au cas des polygones à n côtés pour $n \geq 5$, nous allons généraliser l'idée de la 2^e démonstration page ???. Cela va nécessiter la manipulation d'objets plus souples que les polygones, les n -cycles. Nous commencerons par vérifier que l'existence d'au moins une solution, puis nous partirons à la recherche des solutions optimales.

1.2. Quelques définitions.

Définition 1. Pour $n \geq 3$, un « n -cycle » désigne une ligne brisée fermée à n sommets et n côtés sans restriction particulière (tous les cas pathologiques sont acceptés).

Définition 2. Un n -cycle $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ admet pour « côtés » les segments $[A_nA_1]$ et $[A_iA_{i+1}]$ pour $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, et pour longueur $\text{Long}(\mathcal{L}) = A_nA_1 + \sum_{i=1}^{n-1} A_iA_{i+1}$.

Définition 3. Un n -cycle est « dégénéré » s'il a, au moins, trois sommets consécutifs alignés.

Définition 4. Un « n -gone » est un n -cycle non dégénéré n'admettant aucun couple de sommets confondus, ni aucun couple de côtés non contigus sécants. Si certains côtés non contigus sont sécants, mais aucun couple de sommets confondus, on parle de « n -gone croisé ». ¹

Définition 5. Un n -gone est dit « équilatéral » si tous ses côtés sont de même mesure.

Définition 6. Un « n -isogone » est un n -gone dont tous les angles au sommet sont de même mesure.

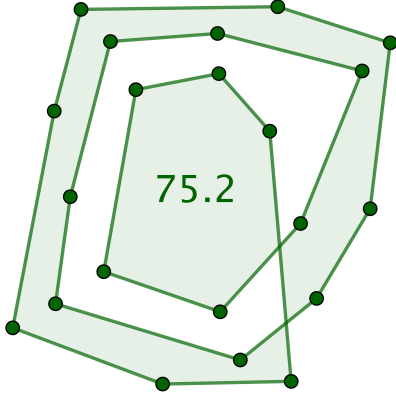
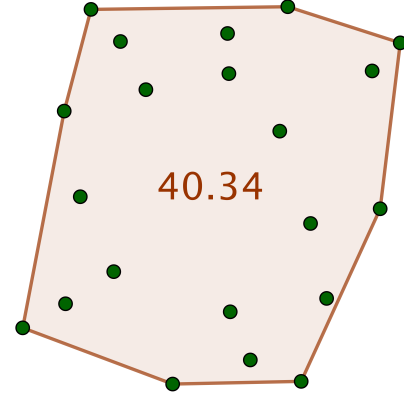
Définition 7. Un n -gone est dit « régulier » si c'est un n -isogone équilatéral.

Remarque 1.1. Un losange non carré est un n -gone équilatéral convexe non régulier, et un rectangle non carré est un n -isogone convexe non régulier.

1.3. Au moins une solution. Nous devons commencer par trouver un moyen de mesurer l'aire d'un n -cycle \mathcal{L} , si tant est que cela signifie quelque chose. Il existe une notion d'aire algébrique d'un n -cycle qui s'appuie sur le déterminant : si $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$, posant $A_{n+1} = A_1$, alors l'aire algébrique de \mathcal{L} est $\sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A_i}, \overrightarrow{\Omega A_{i+1}})$, une quantité indépendante du point Ω choisi. Quand GeoGebra associe un nombre à un n -cycle \mathcal{L} , il calcule la valeur absolue de son aire algébrique. Malheureusement, cette notion n'est pas une bonne candidate pour nous comme le montre l'exemple suivant facile à construire, ² mais elle nous sera utile pour établir un argument de continuité.

1. Bien retenir qu'un n -gone n'est jamais croisé par définition. De plus, la longueur d'un n -gone correspond à son périmètre.

2. Il suffit de fabriquer un n -gone croisé en « spirale », et de penser au calcul de l'aire algébrique avec un point Ω au « centre » de cette spirale, car $\det(\overrightarrow{\Omega A_i}, \overrightarrow{\Omega A_{i+1}})$ est l'aire algébrique du triangle $\Omega A_i A_{i+1}$.

Aire « algébrique » d'un n -gone croisé \mathcal{P} .Aire de l'enveloppe convexe de \mathcal{P} .

Nous avons en fait la solution sous les yeux : définir l'aire comme la somme des aires des n -gones coloriés par **GeoGebra**. Sympa ! Mais comment ce coloriage est-il fait ? C'est un classique de l'informatique graphique, mais aussi un moyen de démontrer le faussement simple théorème de Jordan donnant l'intérieur et l'extérieur d'un n -gone. Voici comment cela fonctionne, sans chercher à démontrer les faits indiqués.

- Choisissons une direction orientée \vec{d} qui n'est parallèle avec aucun des côtés de \mathcal{L} .
- Considérons un point M non situé sur le n -cycle \mathcal{L} , et faisons partir une demi-droite \mathcal{D} de M suivant \vec{d} . On calcule alors $p(M)$ le nombre de points d'intersection de \mathcal{D} avec le n -cycle \mathcal{L} (si l'on tombe sur un sommet de \mathcal{L} , on ajoute 2).
- L'ensemble des points M tels que $p(M)$ soit pair sera appelé la « surface paire » de \mathcal{L} . On définit de même la « surface impaire » de \mathcal{L} . Une difficulté non négligeable est à lever ici, à savoir, que le choix de la direction orientée ne modifie pas les surfaces paires et impaires obtenues.
- La frontière de la surface impaire de \mathcal{L} est la réunion d'un nombre fini, éventuellement nul,³ de n -gones d'intérieurs disjoints deux à deux.

Définition 8. Soit \mathcal{L} un n -cycle tel que la frontière de sa surface impaire soit $\bigcup_i \mathcal{P}_i$ où les \mathcal{P}_i , en nombre fini éventuellement nul, sont des n -gones d'intérieurs disjoints deux à deux. La quantité $\text{AireGene}(\mathcal{L}) = \sum_i \text{Aire}(\mathcal{P}_i)$ sera nommée « aire généralisée » du n -cycle \mathcal{L} .

Fait 1. Pour tout n -gone \mathcal{P} , nous avons $\text{AireGene}(\mathcal{P}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$.

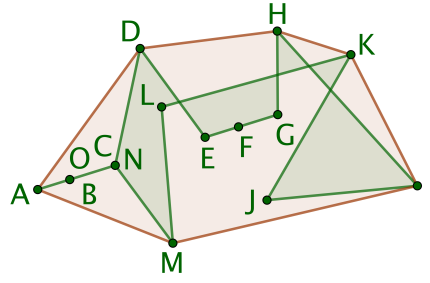
Démonstration. Immédiat. □

Fait 2. Si un n -cycle \mathcal{L} , éventuellement dégénéré, n'est pas un n -gone convexe, alors il existe un n -gone convexe \mathcal{P} tel que $\text{Long}(\mathcal{P}) = \text{Long}(\mathcal{L})$ et $\text{AireGene}(\mathcal{P}) > \text{AireGene}(\mathcal{L})$.

Démonstration. Commençons par le cas « hyper-dégénéré » : si tous les sommets de \mathcal{L} sont alignés, son aire généralisée est nulle. Le triangle équilatéral de côté $\frac{1}{3}\text{Long}(\mathcal{L})$ permet de conclure.

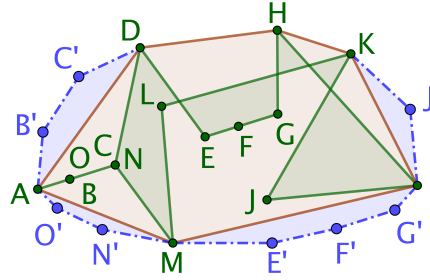
Supposons maintenant que \mathcal{L} possède au moins trois sommets non alignés. Notons \mathcal{C} l'enveloppe convexe de \mathcal{L} (nous savons donc que \mathcal{C} contient au moins un triangle).

3. Penser au cas d'un n -cycle dont tous les sommets sont alignés.



Exemple où $N = C$ et $O = B$.

Clairement, $\text{Long}(\mathcal{C}) < \text{Long}(\mathcal{L})$. Quant à $\text{AireGene}(\mathcal{C}) > \text{AireGene}(\mathcal{L})$, c'est une conséquence directe de la définition de l'aire généralisée combinée au fait que \mathcal{L} ne soit pas un n -gone convexe. Il reste un problème à gérer : \mathcal{C} est un s -gone avec $s \leq n$. Une idée simple, formalisée après, est d'ajouter des sommets assez près des côtés de \mathcal{C} pour garder la convexité, une longueur strictement supérieure à $\text{Long}(\mathcal{L})$, et une aire généralisée strictement plus grande que $\text{AireGene}(\mathcal{L})$. Si c'est faisable, un agrandissement de rapport $r > 1$ donnera le n -gone \mathcal{P} cherché. La figure suivante illustre cette idée.



$m = n - s$ compte les sommets manquants. Si $m = 0$, il n'y a rien à faire. Sinon, posons $\delta = \frac{\text{Long}(\mathcal{L}) - \text{Long}(\mathcal{C})}{m}$.

- (1) Considérons $[AB]$ un côté quelconque de \mathcal{C} . Les droites portées par les côtés « autour » de $[AB]$ « dessinent » une région contenant toujours un triangle ABC dont l'intérieur est à l'extérieur⁴ de \mathcal{C} comme dans les deux cas ci-dessous.



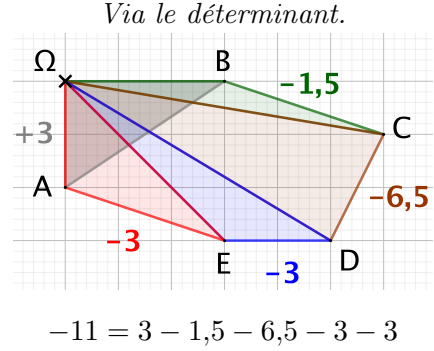
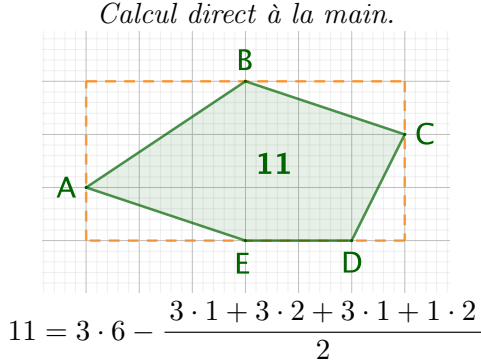
- (2) Clairement, le polygone \mathcal{C}_+ obtenu à partir de \mathcal{C} en remplaçant le côté $[AB]$ par les côtés $[AC]$ et $[CB]$ est un convexe avec un sommet de plus que \mathcal{C} .
- (3) Comme HC peut être rendu aussi proche de 0 que souhaité, il est aisé de voir que l'on peut choisir cette distance de sorte que $AC + BC < AB + \delta$. Dès lors, le périmètre de \mathcal{C}_+ augmente inférieurement strictement à δ relativement à \mathcal{C} .

4. C'est ce que l'on appelle de la « low poetry ».

- (4) En répétant $(m - 1)$ fois les étapes 1 à 3, nous obtenons un n -gone convexe \mathcal{C} tel que $\text{AireGene}(\mathcal{C}) > \text{AireGene}(\mathcal{L})$ et $\text{Long}(\mathcal{C}) < \text{Long}(\mathcal{L}) + m\delta = \text{Long}(\mathcal{L})$.

□

Nous avons besoin de savoir calculer l'aire d'un n -gone, ne serait-ce que pour savoir si une forme de continuité existe. Partons du fait connu que tout triangle ABC possède une aire donnée par $\frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right|$ où $\frac{1}{2} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est l'aire algébrique de ABC . Il devient naturel de définir l'aire algébrique d'un n -gone via celles de triangles comme dans l'exemple suivant utilisant les triangles ΩAB , ΩBC , ΩCD , ΩDE et ΩEA . A priori, le résultat pourrait dépendre du point Ω employé, mais le fait 3, donné plus bas, montrera que ce n'est pas le cas.



Définition 9. Pour tout n -cycle $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$, on définit $(A'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ comme étant n -périodique, et vérifiant $A'_i = A_i$ sur $\llbracket 1; n \rrbracket$.

Fait 3. Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n -cycle. La fonction qui à un point Ω du plan associe $\mu_1^n(\Omega; \mathcal{L}) = \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}})$ est indépendante du point Ω . Dans la suite, cette quantité indépendante de Ω sera notée $\mu_1^n(\mathcal{L})$.

Démonstration. Soit M un autre point du plan.

$$\begin{aligned}
 & \mu_1^n(\Omega; \mathcal{L}) \\
 &= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}}) \\
 &= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MA'_{i+1}}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Cette bonne vieille relation de Chasles.} \end{array} \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n \left[\det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) + \det(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) + \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M}) + \mu_1^n(M; \mathcal{L}) \\
 &= \mu_1^n(M; \mathcal{L}) + \sum_{i=2}^{n+1} \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_i}) - \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_i}) \quad \left. \begin{array}{l} A'_{n+1} = A'_1 \end{array} \right\} \\
 &= \mu_1^n(M; \mathcal{L})
 \end{aligned}$$

□

Fait 4. Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n -cycle. Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, le n -cycle $\mathcal{L}_k = B_1 B_2 \cdots B_n$, où $B_i = A'_{i+k-1}$, vérifie $\mu_1^n(\mathcal{L}) = \mu_1^n(\mathcal{L}_k)$. Dans la suite, cette quantité commune sera notée $\mu(\mathcal{L})$.

Démonstration. Il suffit de s'adonner à un petit jeu sur les indices de sommation. □

Fait 5. Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n -cycle. Le n -cycle $\mathcal{L}^{\text{op}} = B_1 B_2 \cdots B_n$, où $B_i = A_{n+1-i}$, vérifie $\mu(\mathcal{L}^{\text{op}}) = -\mu(\mathcal{L})$.

Démonstration. Soit Ω un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned}
& \mu(\mathcal{L}^{\text{op}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega B'_i}, \overrightarrow{\Omega B'_{i+1}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_{n+1-i}}, \overrightarrow{\Omega A'_{n-i}}) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \det(\overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}, \overrightarrow{\Omega A'_j}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} \begin{array}{l} A'_0 = A'_n \text{ et } A'_1 = A'_{n+1} \end{array} \\
&= \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}, \overrightarrow{\Omega A'_j}) \\
&= - \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_j}, \overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}) \\
&= - \mu(\mathcal{L}) \quad \square
\end{aligned}$$

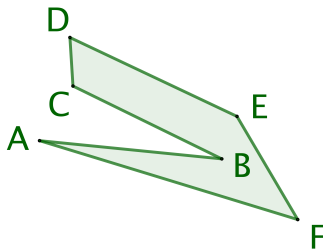
Fait 6. Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n -cycle. La quantité $\frac{1}{2} \mu(\mathcal{L})$, qui dépend juste du sens de parcours de \mathcal{L} , mais pas du point de départ choisi,⁵ sera appelé « aire algébrique » de \mathcal{L} .

Démonstration. C'est une conséquence directe des faits 4 et 5. \square

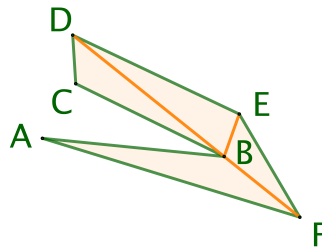
Considérons un n -gone convexe $\mathcal{P} = A_1 A_2 \cdots A_n$. En choisissant l'isobarycentre G des sommets A_1, A_2, \dots, A_n pour le calcul de $\mu(\mathcal{P})$, nous obtenons que $\text{Aire}(\mathcal{P}) = \frac{1}{2} |\mu(\mathcal{P})|$: en effet, avec ce choix, tous les déterminants $\det(\overrightarrow{GA'_i}, \overrightarrow{GA'_{i+1}})$ ont le même signe. Dans le cas non-convexe, les choses se compliquent a priori, car nous ne maîtrisons plus les signes des déterminants. Heureusement, nous avons le résultat suivant.

Fait 7. Soit un n -gone $\mathcal{P} = A_1 A_2 \cdots A_n$ tel que A_1, A_2, \dots, A_n soient parcourus dans le sens trigonométrique, ou anti-horaire. Un tel n -gone sera dit « positif ».⁶ Sous cette hypothèse, nous avons $\mu(\mathcal{P}) \geq 0$.

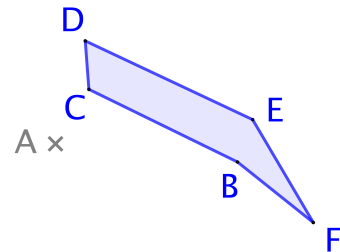
Démonstration. Le théorème de triangulation affirme que tout n -gone est triangulable comme dans l'exemple très basique suivant qui laisse envisager une démonstration par récurrence en retirant l'un des triangles ayant deux côtés correspondant à deux côtés consécutifs du n -gone (pour peu qu'un tel triangle existe toujours).



Un n -gone « nu ».



Le n -gone triangulé.



Le n -gone allégé.

Le théorème de triangulation admet une forme forte donnant une décomposition contenant un triangle formé de deux côtés consécutifs du n -gone.⁷ Nous dirons qu'une telle décomposition

⁵. Le lecteur pardonnera les abus de langage utilisés.

⁶. Bien noté que cette notion ne peut pas exister pour un n -gone croisé. De façon cachée, nous utilisons le célèbre théorème de Jordan, dans sa forme polygonale.

⁷. En pratique, cette forme forte est peu utile, car elle aboutit à un algorithme de recherche trop lent.

est « à l'écoute ». Ce très mauvais jeu de mots fait référence à la notion sérieuse « d'oreille » pour un n -gone : une oreille est un triangle inclus dans le n -gone, et formé de deux côtés consécutifs du n -gone. L'exemple suivant donne un n -gone ayant juste deux oreilles.⁸



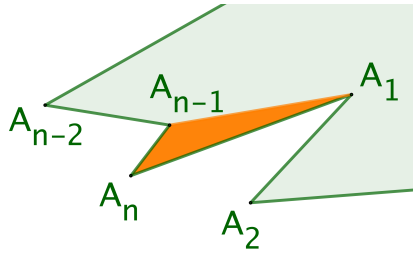
Un n -gone basique.



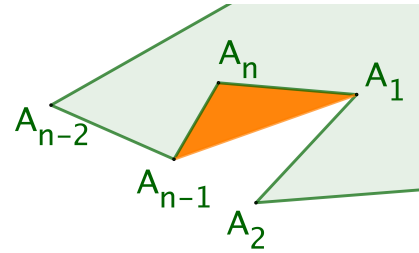
Juste deux oreilles disponibles.

Raisonnons donc par récurrence sur $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

- **Cas de base.** Soit ABC un triangle. Dire que les sommets A , B et C sont parcourus dans le sens trigonométrique, c'est savoir que $\mu(ABC) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) > 0$.
- **Hérédité.** Soit un n -gone positif $\mathcal{P} = A_1 A_2 \cdots A_n$ avec $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. On peut supposer que $A_{n-1} A_n A_1$ est une oreille d'une triangulation à l'écoute du n -gone \mathcal{P} .



$A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille.



$A_{n-1}A_nA_1$ n'est pas une oreille.

Posons $\mathcal{P}' = A_1 \cdots A_{n-1}$ où $k = n - 1$ vérifie $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Par hypothèse, \mathcal{P}' est positif. Nous arrivons aux calculs élémentaires suivants en utilisant $\Omega = A_1$ comme point de calcul de $\mu(\mathcal{P})$.

$$\begin{aligned}
 & \mu(\mathcal{P}) \\
 &= \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_1 A_j}, \overrightarrow{A_1 A_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1 A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1 A_n}) + \det(\overrightarrow{A_1 A_n}, \overrightarrow{A_1 A_{n+1}}) \\
 &= \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_1 A_j}, \overrightarrow{A_1 A_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1 A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1 A_n}) + \det(\overrightarrow{A_1 A_n}, \overrightarrow{A_1 A_1}) \\
 &= \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_1 A_j}, \overrightarrow{A_1 A_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1 A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1 A_n}) \\
 &= \mu(\mathcal{P}') + \mu(A_{n-1} A_n A_1)
 \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} A_1 = A'_{n+1} \\ A_i = A'_i \\ \text{pour } i \leq n \end{array} \right\}$

Par hypothèse de récurrence, nous savons que $\mu(\mathcal{P}') \geq 0$, et comme $A_{n-1} A_n A_1$ est une oreille de \mathcal{P} , la 3-ligne $A_{n-1} A_n A_1$ est forcément positive, d'où $\mu(A_{n-1} A_n A_1) \geq 0$ d'après le cas de base. Nous arrivons bien à $\mu(\mathcal{P}) \geq 0$, ce qui permet de finir aisément la démonstration par récurrence.

□

8. On démontre que tout n -gone admet au minimum deux oreilles.

Fait 8. Pour tout n -gone \mathcal{P} , nous avons : $\text{Aire}(\mathcal{P}) = \frac{1}{2}|\mu(\mathcal{P})|$.

Démonstration. Les deux points suivants permettent de faire une preuve par récurrence.

- **Cas de base.** L'égalité est immédiate pour les triangles (c'est ce qui a motivé la définition de l'aire algébrique).
- **Hérédité.** Soit $\mathcal{P} = A_1 \cdots A_n$ un n -gone avec $n \in \mathbb{N}_{>3}$. On choisit de parcourir \mathcal{P} positivement, puis de se placer dans la même situation que celle de la démonstration du fait 7 : $A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille positive d'une triangulation à l'écoute du n -gone \mathcal{P} , et $\mathcal{P}' = A_1 \cdots A_{n-1}$ un k -gone positif où $k = n - 1$ vérifie $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Nous arrivons alors aux calculs élémentaires suivants.

$$\begin{aligned}
& \text{Aire}(\mathcal{P}) \\
&= \text{Aire}(\mathcal{P}') + \text{Aire}(A_{n-1}A_nA_1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \begin{array}{l} A_{n-1}A_nA_1 \text{ est une oreille de } \mathcal{P}. \\ \text{Hypothèse de récurrence et cas de base.} \end{array} \\
&= \frac{1}{2}|\mu(\mathcal{P}')| + \frac{1}{2}|\mu(A_{n-1}A_nA_1)| \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Voir le fait 7.} \\ \text{Comme dans la preuve du fait 7.} \end{array} \\
&= \frac{1}{2}(\mu(\mathcal{P}') + \mu(A_{n-1}A_nA_1)) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Voir le fait 7.} \end{array} \\
&= \frac{1}{2}\mu(\mathcal{P}) \\
&= \frac{1}{2}|\mu(\mathcal{P})|
\end{aligned}$$

□

Fait 9. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Parmi tous les n -cycles de périmètre fixé, il en existe au moins un d'aire généralisée maximale, un tel n -cycle devant être à minima un n -gone convexe.

Démonstration. Notons p le périmètre fixé..

- Munissant le plan d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note \mathcal{Z} l'ensemble des n -cycles $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ tels que $\text{Long}(\mathcal{L}) = p$ et $A_1(0;0)$,⁹ puis $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des uplets de coordonnées $(x(A_1); y(A_1); \dots; x(A_n); y(A_n))$ pour $A_1A_2 \cdots A_n \in \mathcal{Z}$.
- \mathcal{G} est clairement fermé dans \mathbb{R}^{2n} .¹⁰ De plus, il est borné, car les coordonnées des sommets des n -cycles considérés le sont. En résumé, \mathcal{G} est un compact de \mathbb{R}^{2n} .
- Nous définissons la fonction $\alpha : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui à un uplet de \mathcal{G} associe l'aire généralisée du n -cycle qu'il représente. Cette fonction est continue comme valeur absolue d'une fonction polynomiale d'après le fait 8.
- Finalement, par continuité et compacité, α admet un maximum sur \mathcal{G} . Or, un tel maximum ne peut être atteint qu'en un n -gone convexe, au moins, selon le fait 2.

□

9. Le mot « Zeile » est une traduction possible de « ligne » en allemand.

10. Il est faux d'affirmer que l'ensemble des n -gones est fermé : penser par exemple à un n -gone dont tous les sommets seraient fixés sauf un que l'on ferait d'entre vers l'un de ses voisins.