BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

Mentions « légales »

Table des matières

Date: 18 Jan. 2025 – 23 Jan. 2025.

1. Les polygones

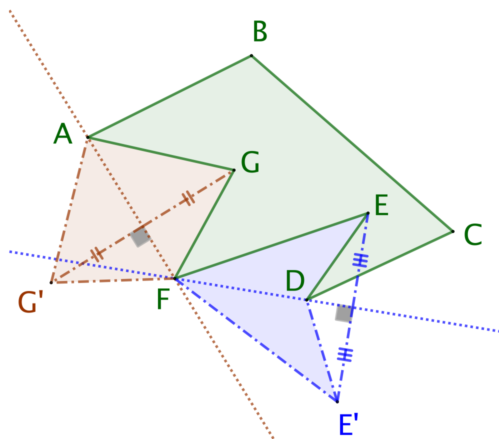
La technique est similaire au cas du triangle : nous allons obtenir une condition nécessaire, puis nous verrons que cette condition suffit via des arguments d'analyse. Cette dernière section nécessite plus de technicité.

Définition 1. *Un « n-gone » désigne un polygone à n côtés de mesure non nulle, avec $n \geq 3$.*

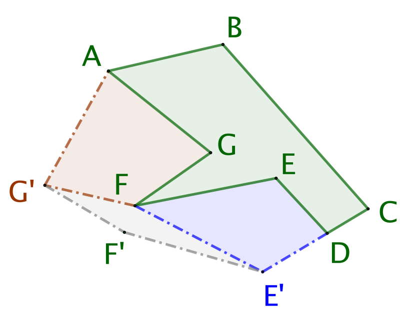
Définition 2. *Un « n-isogone » désigne un n-gone dont tous les côtés sont de mesure égale.*

Fait 1. *Si un n-gone $\mathcal{P}$ n'est pas convexe, alors on peut construire un n-gone convexe $\mathcal{P}'$ tel que* $\mathrm{Perim}(\mathcal{P}') = \mathrm{Perim}(\mathcal{P})$ *et* $\mathrm{Aire}(\mathcal{P}') > \mathrm{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Ici, il ne faut pas être expéditif en indiquant que la preuve du fait **??** se généralise sans aucun souci. En effet, avec $n > 4$, nous pouvons avoir plusieurs points de non-convexité, et les éliminer comme nous l'avons fait pour le quadrilatère n'est pas immédiat : dans la figure suivante, l'élimination des deux points de non convexité G et E de l'heptagone $ABCDEFG$ nous amène à un nouvel heptagone $ABCDE'FG'$ ayant lui aussi deux points de non-convexité F et D ! Donc, rien n'empêche, a priori, d'avoir une suite de constructions n'aboutissant jamais à un heptagone convexe de même périmètre que celui de $ABCDEFG$, et d'aire strictement supérieure à celle de $ABCDEFG$.[1]



On peut aussi perdre des côtés lors de la construction comme dans l'exemple suivant où C, D et E' sont alignés. Nous allons voir juste après que ce problème n'en est pas un.

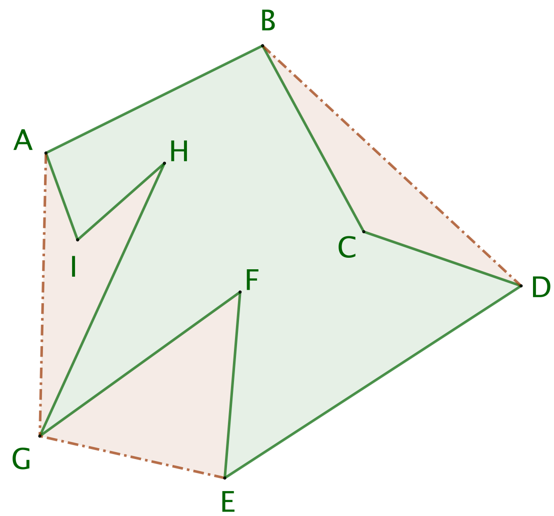


Laissons de côté la construction précédente pour nous concentrer sur la classique enveloppe convexe[2] du n-gone de départ. Par exemple, l'ennéagone $ABCDEFGHI$ non convexe ci-dessous admet le pentagone $ABDEG$ pour enveloppe convexe : le périmètre diminue et l'aire

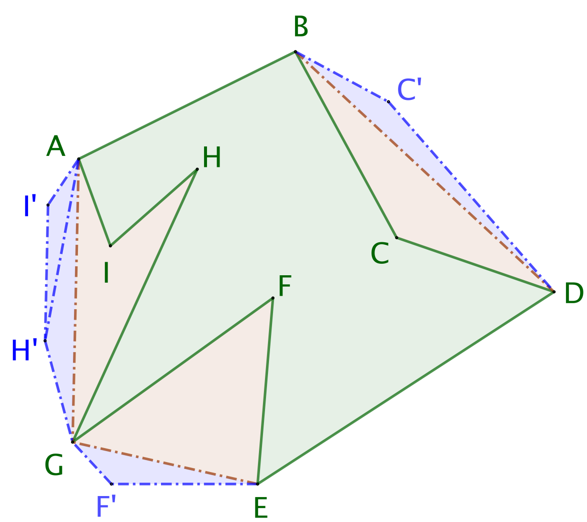
1. L'auteur est convaincu que le procédé aboutira en un nombre fini d'étapes à un polygone convexe, mais il ne l'a pas démontré pour le moment.

2. C'est le plus petit polygone convexe « *contenant* » le n-gone considéré, où « *petit* » est relatif à l'inclusion.

augmente, strictement tous les deux, ce qui est utile, mais malheureusement le nombre de côtés a diminué.



Une idée simple, que nous allons formaliser rigoureusement après, consiste à ajouter les sommets manquants suffisamment prêts des côtés de l'enveloppe convexe pour ne pas perdre la convexité, tout en gardant un périmètre inférieur strictement au périmètre initial, et une aire strictement plus grande que l'aire initiale. Si nous arrivons à faire ceci, alors une homothétie de rapport $r > 1$ nous ramènera au bon périmètre avec une aire strictement plus grande que l'aire initiale. La figure suivante illustre cette idée.



Considérons donc un n-gone non convexe $\mathcal{P}$. Son enveloppe convexe $\mathcal{C}$ vérifie, par construction, $\mathrm{Perim}(\mathcal{C}) < \mathrm{Perim}(\mathcal{P})$ et $\mathrm{Aire}(\mathcal{C}) > \mathrm{Aire}(\mathcal{P})$. Notons m le nombre de sommets en moins dans $\mathcal{C}$ relativement à $\mathcal{P}$.
XXX
facile ensuite car on peut tout faire sur un coté , faut juste rednre la constrcution explicite

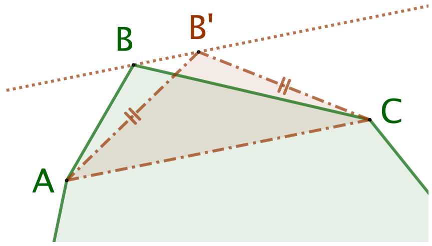
- XXX
- XXX
- XXX
- XXX

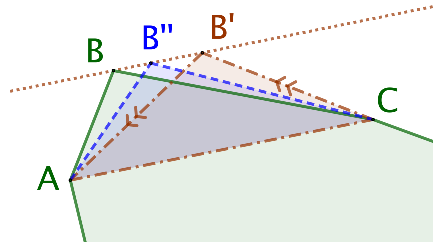
□

Remarque 1.1. *Le fait précédent permet de toujours se ramener au cas d'un n-gone convexe.*

Fait 2. *Si un n-gone convexe $\mathcal{P}$ n'est pas un n-isogone, alors on peut construire un n-gone convexe $\mathcal{P}'$ tel que* $\mathrm{Perim}(\mathcal{P}') = \mathrm{Perim}(\mathcal{P})$ *et* $\mathrm{Aire}(\mathcal{P}') > \mathrm{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Considérons un n-gone convexe $\mathcal{P}$ qui ne soit pas un n-isogone. Dans ce cas, $\mathcal{P}$ admet un triplet de sommets consécutifs A, B et C tels que $AB \neq BC$ (sinon, on obtiendrait de proche en proche un n-isogone). La construction vue dans la preuve du fait **??** nous donne la solution : voir les deux dessins ci-après dans lesquels $(AC) \mathbin{/\!/} (BB')$. Pour le 2e cas, il n'est pas possible d'utiliser le triangle $AB'C$ isocèle en B' car $(B'C)$ porte le côté de $\mathcal{P}$ de sommet C juste après $[BC]$, mais ce problème se contourne en considérant un point B'' de $]BB'[$.





Dans chaque cas, nous avons construit un n-gone convexe $\mathcal{P}''$ tel que $\mathrm{Perim}(\mathcal{P}'') < \mathrm{Perim}(\mathcal{P})$ et $\mathrm{Aire}(\mathcal{P}'') = \mathrm{Aire}(\mathcal{P})$. Un simple agrandissement donne un n-gone convexe $\mathcal{P}'$ vérifiant $\mathrm{Perim}(\mathcal{P}') = \mathrm{Perim}(\mathcal{P})$ et $\mathrm{Aire}(\mathcal{P}') > \mathrm{Aire}(\mathcal{P})$. □

Remarque 1.2. *Le fait précédent ne permet pas de toujours se ramener au cas d'un n-isogone convexe. Il nous dit juste que si un n-gone convexe maximise son aire à périmètre fixé, alors il devra être un n-isogone. La nuance est importante, et une similaire existe pour le fait suivant.*

Fait 3. *Si un n-isogone convexe $\mathcal{P}$ possède deux angles de mesures différentes, alors il existe un n-gone $\mathcal{P}'$ tel que* $\mathrm{Perim}(\mathcal{P}') = \mathrm{Perim}(\mathcal{P})$ *et* $\mathrm{Aire}(\mathcal{P}') > \mathrm{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. wikipédia ok ? tjrs le pb du côté qui disparait !

- XXX
- XXX
- XXX
- XXX

□

Fait 4. *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Considérons tous les n-gones de périmètre fixé. Parmi tous ces n-gones, un seul est d'aire maximale, c'est le n-gone régulier.*

Démonstration. Le fait 1 permet de considérer le problème de maximisation d'aire à périmètre fixé uniquement avec des n-gones convexes. Selon les faits 2 et 3, si parmi les n-gones convexes de périmètre fixé, il en existe un qui maximise l'aire, alors ce ne peut être que le n-gone régulier. Pour voir que cette condition nécessaire est suffisante, comme dans le cas du triangle, voir la remarque **??**, nous convions le couple continuité/compacité comme suit.

- On munit le plan d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
- XXX

  fermeture costaud, mais le côté birné !!!!

pour fermeture, besoin d'accpeter les k-gones pour $k \in [\![3\,;n]\!]$.

Les n-gones convexes $A_1A_2\cdots A_n$ tels que $\mathrm{Perim}(A_1A_2\cdots A_n) = p$ sont représentés en posant $A_1\,(\,0\,;0\,)$, $A_2\,(\,A_1A_2\,;0\,)$, puis $A_k\,(\,x_k\,;y_k\,)$ avec $y_k \geq 0$ pour $k \in [\![3\,;n]\!]$. Un n-gone peut donc avoir n représentations, mais peu importe. De plus, on accepte les n-gones dégénérés pour lesquels nous avons $x_B = 0$, $y_C = 0$ dans notre représentation. Nous notons alors $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des triplets $(\,x_B\,;x_C\,;y_C\,)$ ainsi obtenus.

- XXX

  Justifier que $\mathcal{G}$ est fermé dans $\mathbb{R}^{2n}$.
- $\mathcal{G}$ est aussi borné, car les coordonnées des sommets des n-gones convexes considérés le sont. En résumé, $\mathcal{G}$ est un compact de $\mathbb{R}^{2n}$.
- Notons $s : \mathcal{G} \to \mathbb{R}_+$ la fonction « *aire* » des n-gones représentés. Cette fonction est continue en les coordonnées des sommets, car elle peut être calculée comme suit pour un n-gone convexe $A_1A_2\cdots A_n$ quelconque.
  (1) L'isobarycentre G de $A_1A_2\cdots A_n$ possède des coordonnées affines en celles des points A_1, A_2, $\ldots$, et A_n.
  (2) Par convexité, l'aire de $A_1A_2\cdots A_n$ est égale à la somme de celles des triangles GA_kA_{k+1} pour $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, et du triangle GA_nA_1.
  (3) Via le déterminant, il est immédiat de voir que les aires des triangles considérés sont des fonctions continues en les coordonnées des sommets.
- Finalement, par continuité et compacité, on sait que s admet un maximum sur $\mathcal{G}$. Chapeau bas à vous, Géométrie et Analyse réunies...

$\square$