

BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



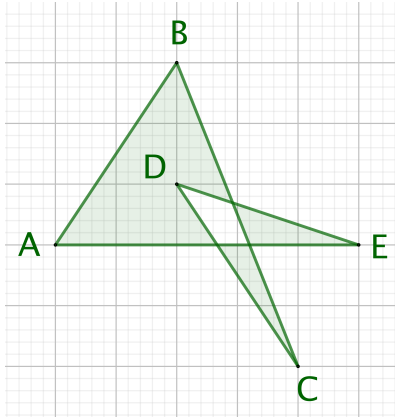
TABLE DES MATIÈRES

0.1. Condition suffisante

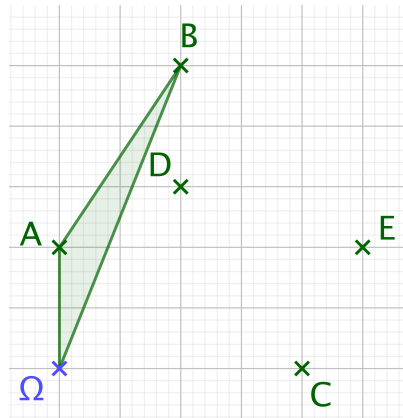
2

0.1. **Condition suffisante.** Selon le fait ??, si parmi les n -gones de périmètre fixé, il en existe un qui maximise l'aire, alors ce ne peut être que le n -gone régulier. Nous allons établir que cette condition nécessaire est suffisante. Pour cela, nous avons juste besoin de savoir qu'il existe au moins un n -gone d'aire maximale. Comme dans la remarque ??, nous allons convier le couple continuité/compacité, mais ici les choses se compliquent, car nous allons devoir accepter de travailler avec des polygones croisés, et par conséquent il nous faut un moyen de mesurer la surface de tels polygones (le vrai point délicat est ici).

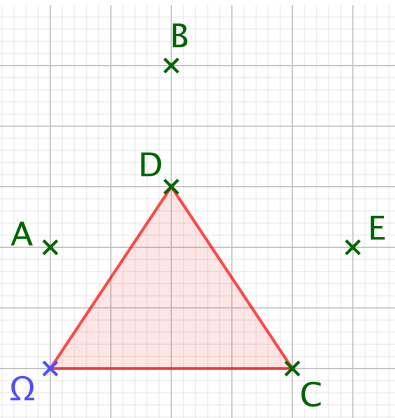
Pour commencer, expliquons comment GeoGebra obtient une aire de 6,5 pour le polygone croisé ci-après.



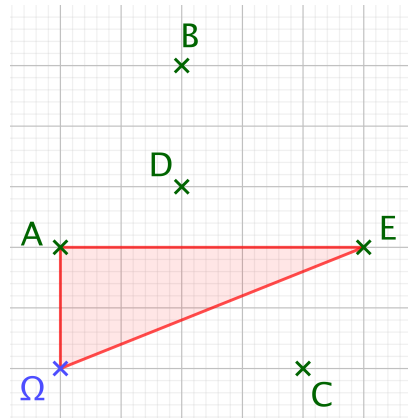
L'idée consiste à fixer un point Ω , puis à calculer les aires algébriques des triangles indiqués ci-dessous : les aires vertes sont comptées positivement, et les rouges négativement.



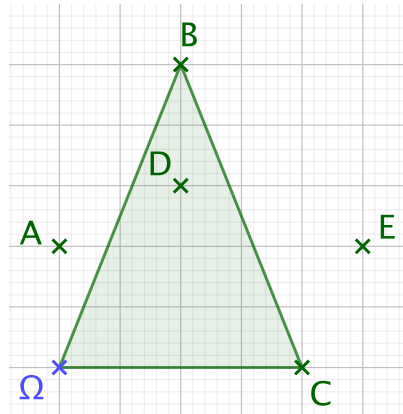
Étape 1.



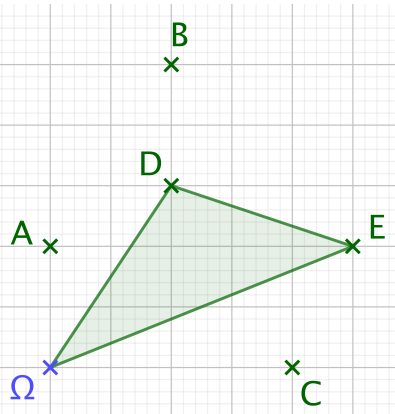
Étape 3.



Étape 5.



Étape 2.



Étape 4.

$2 + 10 - 6 + 5,5 - 5 = 6,5$
redonne bien la valeur fournie par GeoGebra. Le fait suivant explique le bien fondé de cette méthode qui, a priori, pourrait dépendre du point Ω . Comme, pour les polygones convexes, on retombera sur son aire géométrique à un signe près, cette aire algébrique va nous être utile.

Fait 1. *Aire algébrique def + pro*

Démonstration. □

Fait 2. *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Considérons tous les n -gones de périmètre fixé. Parmi tous ces n -gones, il en existe au moins un d'aire maximale.*

Démonstration. Le fait ?? permet de considérer le problème de maximisation d'aire à périmètre fixé uniquement avec des n -gones convexes. Selon les faits ?? et ??, si parmi les n -gones convexes de périmètre fixé, il en existe un qui maximise l'aire, alors ce ne peut être que le n -gone régulier. Pour voir que cette condition nécessaire est suffisante, c

- On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- XXX

fermeture costaud, mais le côté birné!!!!

pour fermeture, besoin d'accpeter les k -gones pour $k \in \llbracket 3; n \rrbracket$.

Les n -gones convexes $A_1 A_2 \cdots A_n$ tels que $\text{Perim}(A_1 A_2 \cdots A_n) = p$ sont représentés en posant $A_1(0; 0)$, $A_2(A_1 A_2; 0)$, puis $A_k(x_k; y_k)$ avec $y_k \geq 0$ pour $k \in \llbracket 3; n \rrbracket$. Un n -gone peut donc avoir n représentations, mais peu importe. De plus, on accepte les n -gones dégénérés pour lesquels nous avons $x_B = 0$, $y_C = 0$ dans notre représentation. Nous notons alors $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des triplets $(x_B; x_C; y_C)$ ainsi obtenus.

- XXX

Justifier que \mathcal{G} est fermé dans \mathbb{R}^{2n} .

- De plus, \mathcal{G} est borné, car les coordonnées des sommets des k -gones considérés le sont. Finalement, \mathcal{G} est un compact de \mathbb{R}^{2n} .
- Notons $s : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction « aire » des n -gones représentés. Cette fonction est continue en les coordonnées des sommets, car elle peut être calculée comme suit pour un n -gone convexe $A_1 A_2 \cdots A_n$ quelconque.
 - (1) L'isobarycentre G de $A_1 A_2 \cdots A_n$ possède des coordonnées affines en celles des points A_1, A_2, \dots , et A_n .
 - (2) Par convexité, l'aire de $A_1 A_2 \cdots A_n$ est égale à la somme de celles des triangles $GA_k A_{k+1}$ pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, et du triangle $GA_n A_1$.
 - (3) Via le déterminant, il est immédiat de voir que les aires des triangles considérés sont des fonctions continues en les coordonnées des sommets.
- Finalement, par continuité et compacité, on sait que s admet un maximum sur \mathcal{G} , un tel maximum ne pouvant pas être atteint sur un k -gone dégénéré. That's all folks!

□

Fait 3. *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Considérons tous les n -gones de périmètre fixé. Parmi tous ces n -gones, un seul est d'aire maximale, c'est le n -gone régulier.*

Démonstration. C'est une conséquence directe des faits ?? et 2. □