

# BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

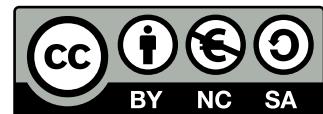
CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



### TABLE DES MATIÈRES

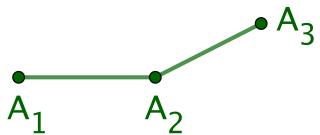
0.1. Au moins une solution, ou presque	2
--	---

**0.1. Au moins une solution, ou presque.** Le cas des quadrilatères a montré que la convexité était un ingrédient central. Ceci sera aussi le cas pour les  $n$ -gones, bien que moins immédiat à justifier, comme nous le verrons dans le fait ??, dont la preuve est indépendante des résultats de cette section. Ceci explique que nous allons chercher à justifier l'existence d'au moins un  $n$ -gone convexe d'aire maximale parmi les  $n$ -gones convexes de longueur fixée. Nous allons presque y arriver...

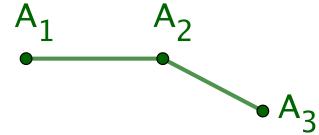
**Fait 1.** Pour tout  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P} = A_1 A_2 \cdots A_n$ , l'une des alternatives suivantes a lieu.

- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ , si  $k \notin \{i ; i + 1\}$ , alors  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) > 0$ .
- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ , si  $k \notin \{i ; i + 1\}$ , alors  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) < 0$ .

*Démonstration.* Le cas  $n = 3$  des triangles est immédiat. Nous considérons alors  $\mathcal{P}$  un  $n$ -gone convexe où  $n \geq 4$ . Nous savons que, relativement à  $\mathcal{P}$ , aucun triplet de sommets consécutifs alignés n'existe. Dès lors, dans le plan orienté, les trois premiers sommets sont placés suivant l'une des deux configurations suivantes.



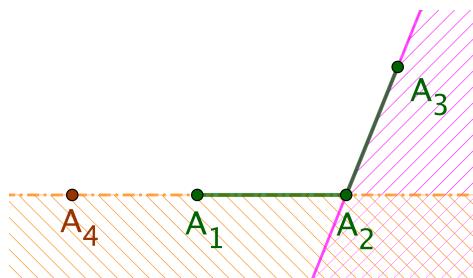
Cas positif.



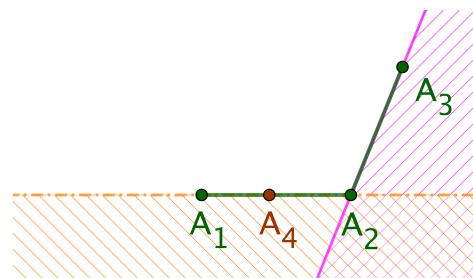
Cas négatif.

Considérons le cas positif, c'est-à-dire supposons que  $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_3}) > 0$ .

- $\overrightarrow{A'_1 A'_3} = \overrightarrow{A'_1 A'_2} + \overrightarrow{A'_2 A'_3}$  donne  $\det(\overrightarrow{A'_2 A'_3}, \overrightarrow{A'_2 A'_1}) > 0$ .
- Comme  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  ne sont pas alignés, et de plus  $A_1$  et  $A_4$  du même côté, au sens large, de la droite  $(A_2 A_3)$ , nous obtenons  $\det(\overrightarrow{A'_2 A'_3}, \overrightarrow{A'_2 A'_4}) > 0$ .
- En continuant de proche en proche, nous arrivons à  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_{i+2}}) > 0$  pour  $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$  quelconque.
- Le point précédent et la convexité donnent  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$  pour  $(i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$  tel que  $k \notin \{i ; i + 1\}$ .
- Montrons maintenant que  $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_k}) > 0$  pour  $k \in \llbracket 3 ; n \rrbracket$ . Nous savons déjà l'inégalité vraie pour  $k = 3$ , donc passons à  $k = 4$ . Pour avoir  $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_4}) > 0$ , le point précédent donne qu'il faut vérifier que  $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_4}) = 0$  est impossible. Supposons donc l'égalité vraie, ce qui implique d'avoir  $n \geq 5$ , et donne les configurations suivantes où les hachures et la droite en trait plein sont des zones interdites pour  $A_4$ .

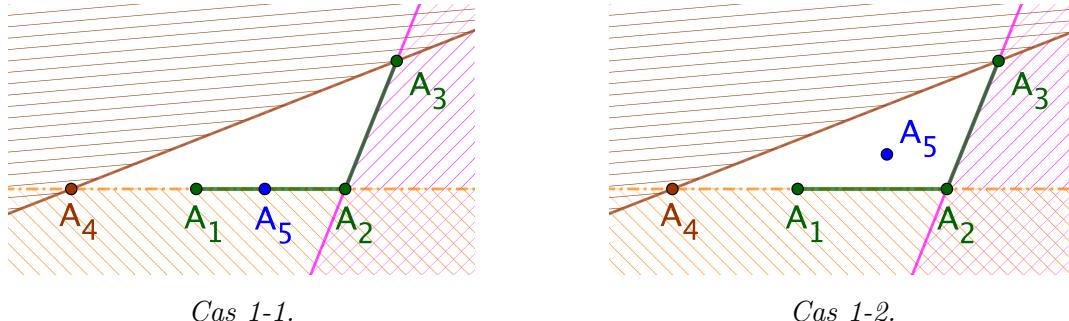


Cas 1.



Cas 2.

Le cas 2 est impossible par raison de convexité, car  $A_1$  et  $A_2$  sont de part et d'autre de la droite  $(A_3A_4)$ . Voyons donc ce qu'implique le 1<sup>er</sup> cas pour  $A_5$ .



Le cas 1-2 est impossible par raison de convexité à cause de  $(A_4A_5)$ . Notons que dans le cas 1-1, il est possible d'avoir  $A_5 \in ]A_4A_1[$ . Comme  $A_5 \in (A_1A_2)$ , nous devons avoir  $n \geq 6$ , puis  $A_6 \in (A_1A_2)$  par convexité, mais ceci donne la contradiction  $A_6 \in (A_4A_5)$ . Donc, nécessairement  $\det(\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_1A'_4}) > 0$ . En continuant de même, de proche en proche, nous arrivons à  $\det(\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_1A'_k}) > 0$  pour  $k \in \llbracket 3 ; n \rrbracket$ .

- En généralisant le raisonnement précédent,<sup>1</sup> nous avons  $\det(\overrightarrow{A'_iA'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_iA'_k}) > 0$  pour tout couple  $(i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$  vérifiant  $k \notin \{i ; i + 1\}$ .

Le cas négatif se traite de façon similaire. □

---

1. Se souvenir de la définition de la suite  $(A'_i)$ .

Nous allons établir une réciproque élargie du résultat précédent. Ce nouveau fait va nous rendre un grand service par la suite.<sup>2</sup>

**Fait 2.** Soit  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle vérifiant l'une des alternatives suivantes.

- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, \det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0.$
- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, \det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \leq 0.$

Ceci implique la validité de l'une des assertions ci-dessous.

i.  $\mathcal{L}$  est totalement dégénéré.

ii. Il existe un  $k$ -gone convexe  $\mathcal{C}$  tel que  $k \leq n$ ,  $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \text{Long}(\mathcal{L})$  et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{L})$ , ceci se faisant en retirant, si nécessaire, des sommets de  $\mathcal{L}$ , sans modifier l'ordre de parcours pour les sommets gardés.

*Démonstration.* Par symétrie des alternatives, nous pouvons nous concentrer sur le cas positif, c'est-à-dire supposer que  $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, \det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$ . Seul le cas  $\mathcal{L}$  non totalement dégénéré requiert notre attention. Nous allons raisonner algorithmiquement en utilisant une variable  $i$  initialisée à 1, et une liste  $\mathsf{C}$ , initialement vide, pour stocker les sommets « utiles » à la fabrication du  $k$ -gone convexe final.

**A1** Si  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_{i+2}}) > 0$ , nous ajoutons  $A'_{i+1}$  à la fin de la liste  $\mathsf{C}$ , puis nous passons directement à l'action **A3**.

**A2** Sinon, il existe  $m \in \mathbb{N}_{>i+2}$  minimal tel que  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_m}) > 0$ , car  $\mathcal{L}$  n'est pas totalement dégénéré.



Comme  $\det(\overrightarrow{A'_{m-1} A'_m}, \overrightarrow{A'_{m-1} A'_{i+1}}) \geq 0$ , forcément  $A'_{m-1} \in [A'_{i+1}, \overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}]$ .<sup>3</sup> Nous arrivons aux constatations suivantes.

- Les points  $A'_i$ ,  $A'_{m-1}$  et  $A'_m$  ne sont pas alignés.
- L'évaluation de l'aire algébrique via le point de calcul  $A'_{m-1}$  n'a pas besoin de tenir compte des sommets  $A'_j$  pour  $j \in \llbracket i ; m - 1 \rrbracket$ .
- Ignorer des sommets, tout en conservant l'ordre de parcours, pour former un nouveau cycle  $\mathcal{L}'$ , donne  $\text{Long}(\mathcal{L}') \leq \text{Long}(\mathcal{L})$ .

Ceci justifie l'ajout de  $A'_{m-1}$  à la fin de la liste  $\mathsf{C}$  si  $A'_{m-1}$  n'est pas dans cette liste,<sup>4</sup> puis de poser  $i = m - 2$ .

**A3** Ajoutons 1 à  $i$ . Si  $i \geq n + 1$ , nous avons fini, sinon nous retournons à l'action **A1**.

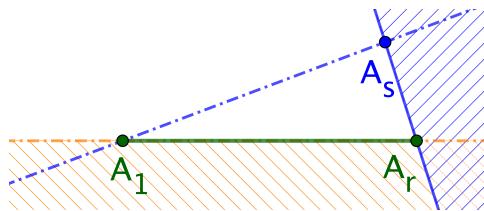
2. Pourquoi s'attarder sur des inégalités larges ? Parce que nous allons travailler dans un ensemble compact, et donc fermé, de  $n$ -cycles. Pour garder des  $n$ -gones, nous devrions utiliser des non-égalités, mais ceci nous ferait sortir du cadre fermé qui nous intéresse. Nous n'avons pas le choix !

3. Ceci signifie juste que  $A'_{m-1}$  est confondu avec  $A'_{i+1}$ , ou « aligné » à droite de  $A'_{i+1}$  sur notre schéma.

4. La justification de l'algorithme, donnée un peu plus bas, montrera la possibilité d'avoir un doublon dans la liste  $\mathsf{C}$ .

Justifions que l'algorithme s'arrêtera en fournissant une liste  $C$  qui, lue de gauche à droite, donnera les sommets du  $k$ -gone convexe  $\mathcal{C}$  cherché. Tant que l'indice  $m$  de l'étape **A2** vérifie  $m \leq n$ , il n'y a aucune difficulté, puisque  $i$  augmente, et les points ajoutés ne se placent pas « après » l'origine  $A_1$  du  $n$ -cycle initial  $\mathcal{L}$ , et donc n'empêtent pas sur les « premiers » sommets. Supposons donc avoir  $m > n$  pour un certain indice  $i$ .

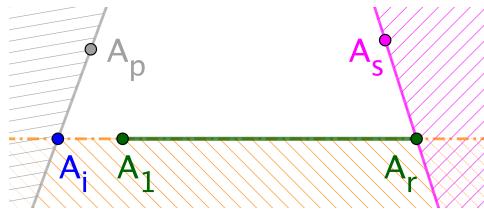
- Notons que  $i > 1$ . En effet, dans le cas contraire, le  $n$ -cycle  $\mathcal{L}$  serait totalement dégénéré. Nous avons donc au passage  $A_1$ ,  $A_r$  et  $A_s$  non alignés avec  $s \in \llbracket 3 ; n \rrbracket$  minimal et  $A_r$  stocké dans  $C$ , où  $r \in \llbracket 2 ; s - 1 \rrbracket$ .
- Supposons que  $i = s$ . Pour  $j \in \llbracket s + 1 ; n \rrbracket$ , les points  $A'_j$  sont sur la droite  $(A'_s A'_1)$ , et ensuite plus généralement pour  $j \in \llbracket s ; m \rrbracket$ . Le schéma suivant montre sans ambiguïté qu'alors  $A'_m = A'_2$  et  $A'_{m-1} = A'_1$ ,<sup>5</sup> ceci ne levant aucune difficulté pour l'algorithme, car il y a ajout de  $A'_1$  à la fin de la liste  $C$ , puis arrêt de l'algorithme car  $i$  devient  $n + 2$  pour l'action **A1**.



- Le raisonnement précédent fonctionne plus généralement lorsque  $A'_i \notin (A'_1 A'_r)$ .
- Pour conclure, supposons que  $A'_i \in (A'_1 A'_r)$ . Ceci nous donne le schéma suivant, où, a priori, il est possible d'avoir  $A'_i \in [A'_1 A'_r]$ .



L'algorithme assure l'existence d'un point  $A'_p$  stocké dans  $C$  et « précédent »  $A'_i$ , tel que tout point entre  $A'_p$  et  $A'_i$ , lors du parcours du  $n$ -cycle  $\mathcal{L}$ , soit sur  $(A'_p A'_i)$ , sans être sur  $(A'_1 A'_2)$ .<sup>6</sup> Nous arrivons au schéma plus précis ci-dessous, où  $A'_p = A'_s$  est possible, et de plus  $A'_i \in [A'_p, A'_r]$  par positivité large des déterminants  $\det(\overrightarrow{A'_p A'_{p+1}}, \overrightarrow{A'_p A'_x})$ .



Dans ce cas,  $A'_r$  est déjà présent dans  $C$ , donc l'algorithme s'arrêtera après avoir juste modifié  $i$  en  $(n + r)$ . Ici aussi, tout se passe bien pour l'algorithme.

□

Le résultat qui suit est juste là pour simplifier la justification du fait 4, central, à venir.

5.  $A'_{m-1} \neq A'_1$  contredirait la condition de positivité large sur les déterminants.

6. Sinon, le traitement de  $A'_p$  aurait mené à l'arrêt de l'algorithme.

**Fait 3.** Soient  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ ,  $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé direct du plan et  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$  l'ensemble des uplets de coordonnées  $(x(A_1); y(A_1); \dots; x(A_n); y(A_n))$  où  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  désigne un  $n$ -cycle vérifiant les conditions suivantes.

- $\text{Long}(\mathcal{L}) = \ell$ .
- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ ,  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$ .

Considérons alors la fonction  $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  qui à un uplet de  $\mathcal{U}$  associe l'aire algébrique du  $n$ -cycle qu'il représente. Avec ces notations, la fonction  $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  admet au moins un maximum forcément positif strict.

*Démonstration.*  $\mathcal{U}$  est fermé dans  $\mathbb{R}^{2n}$ , car les conditions le définissant le sont, et il est borné, car inclus dans la boule fermée de centre  $O$  et de rayon  $\ell$ , donc  $\mathcal{U}$  est un compact de  $\mathbb{R}^{2n}$ . De plus,  $\alpha$  est continue d'après le fait ???. Donc, par continuité et compacité,  $\alpha$  admet un maximum sur  $\mathcal{U}$ , celui-ci étant positif strict pour les raisons suivantes où  $\mathcal{R}$  désigne un  $n$ -gone régulier convexe.

- Via une translation, nous pouvons supposer  $\mathcal{R}$  d'origine  $O$ .
- $\mathcal{R}$ , de périmètre non nul, est d'aire non nulle.
- $\text{Aire}(\mathcal{R}) = |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R})|$  selon le fait ???, et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}^{\text{op}}) = -\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R})$  d'après le fait ???.
- $\mathcal{R} \in \mathcal{U}$ , ou  $\mathcal{R}^{\text{op}} \in \mathcal{U}$  selon le fait 1.
- Si  $\mathcal{R} \in \mathcal{U}$ , alors  $\mathcal{R}$  est orienté positivement, d'où  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}) \geq 0$ , et par conséquent  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}) = \text{Aire}(\mathcal{R})$  (c'est immédiat en utilisant le centre de gravité de  $\mathcal{R}$  comme point de calcul). Nous avons une propriété similaire si  $\mathcal{R}^{\text{op}} \in \mathcal{U}$ .  $\square$

Nous arrivons, au résultat fondamental pour les  $n$ -gones convexes où la perte éventuelle de sommets est un faux problème, car nous aboutirons, plus tard, à la comparaison de  $k$ -gones réguliers convexes pour  $k$  variable, une tâche aisée, puisque le périmètre et l'aire d'un  $k$ -gone régulier convexe s'expriment en fonction de  $k$ .

**Fait 4.** Soient  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  et  $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ . Il existe un  $k$ -gone convexe  $\mathcal{K}$  validant les assertions suivantes.

- $k \leq n$  et  $\text{Long}(\mathcal{K}) = \ell$ .
- Si  $\mathcal{P}$  est un  $n$ -gone convexe tel que  $\text{Long}(\mathcal{P}) = \ell$ , alors  $\text{Aire}(\mathcal{P}) \leq \text{Aire}(\mathcal{K})$ .

*Démonstration.* Reprenons les notations du fait 3, puis choisissons  $\mathcal{L} \in \mathcal{U}$  maximisant l'aire algébrique sur  $\mathcal{U}$ . Ce  $n$ -cycle ne peut être totalement dégénéré, car  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{L}) > 0$ . Dès lors, pour tout  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}$  vérifiant  $\text{Long}(\mathcal{P}) = \ell$ , nous pouvons raisonner comme suit.

- Via une translation, nous ramenons à  $\mathcal{P}$  d'origine  $O$ .
- Comme dans la preuve du fait 3, soit  $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$  et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$ , soit  $\mathcal{P}^{\text{op}} \in \mathcal{U}$  et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}^{\text{op}}) = \text{Aire}(\mathcal{P}^{\text{op}})$ . Quitte à échanger  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^{\text{op}}$ , nous pouvons supposer que  $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$ .
- Le fait 2 donne un  $k$ -gone convexe  $\mathcal{C}$ , où  $k \leq n$ , tel que  $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \text{Long}(\mathcal{L})$ , ainsi que  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{L})$ .
- Le choix de  $\mathcal{L}$  fait que  $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \ell$  et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) \leq \overline{\text{Aire}}(\mathcal{C})$ , mais aussi que  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) > 0$ .
- Comme  $\text{Aire}(\mathcal{C}) = |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C})| = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{C})$  via le fait ???, alors  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) \leq \overline{\text{Aire}}(\mathcal{C})$  devient  $\text{Aire}(\mathcal{P}) \leq \text{Aire}(\mathcal{C})$ .
- Or  $\text{Long}(\mathcal{C}) > 0$ , donc une homothétie de rapport  $\frac{\ell}{\text{Long}(\mathcal{C})} \geq 1$  fournit finalement un  $k$ -gone convexe  $\mathcal{K}$  tel que  $k \leq n$ ,  $\text{Long}(\mathcal{K}) = \ell$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}) \leq \text{Aire}(\mathcal{K})$ . Affaire conclue, sans arnaque logique !  $\square$