DES PREUVES SANS MOT AUX PREUVES SANS DOUTE

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/visual-proof/polynomial-analytic-principles.

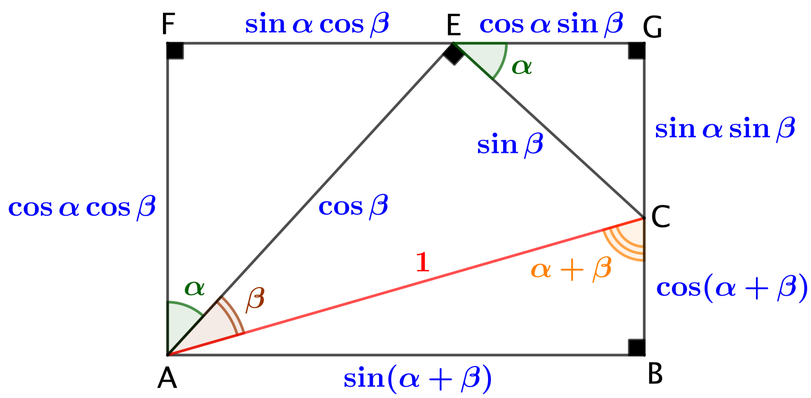
Mentions « légales »

Table des matières

Date: 16 Juillet 2019 - 29 Mars 2025.

1. Et suivirent les fonctions séparablement analytiques

Que faire si nous avons des formules trigonométriques impliquant deux variables, ou plus ? Par exemple, pour $(\alpha\,;\beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, le dessin suivant nous donne $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ et $\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$.



Le fait 3 ci-dessous, qui généralise le fait **??**, implique la validité des formules trigonométriques précédentes sur $\mathbb{C}^2$ tout entier en choisissant $f_1(\alpha\,;\beta) = \cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ et $f_2(\alpha\,;\beta) = \sin(\alpha+\beta) - \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta$.[1] Nous voilà sauvés !

Définition 1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ et $k \in [\![1\,;n]\!]$, la* « k^e^ restriction » *de f est définie par $f_k : z \in \mathbb{C} \mapsto f(z_1\,;\dots;z_{k-1}\,;z\,;z_{k+1}\,;\dots;z_n) \in \mathbb{C}$.*[2]

Définition 2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une fonction $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ sera dite* « séparablement analytique » *sur $\mathbb{C}^n$, si $\forall k \in [\![1\,;n]\!]$, la k^e restriction de f est analytique sur $\mathbb{C}$.*

Fait 3. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ une fonction séparablement analytique. Si f s'annule sur un ouvert non vide Ω, alors f s'annule sur $\mathbb{C}^n$.*

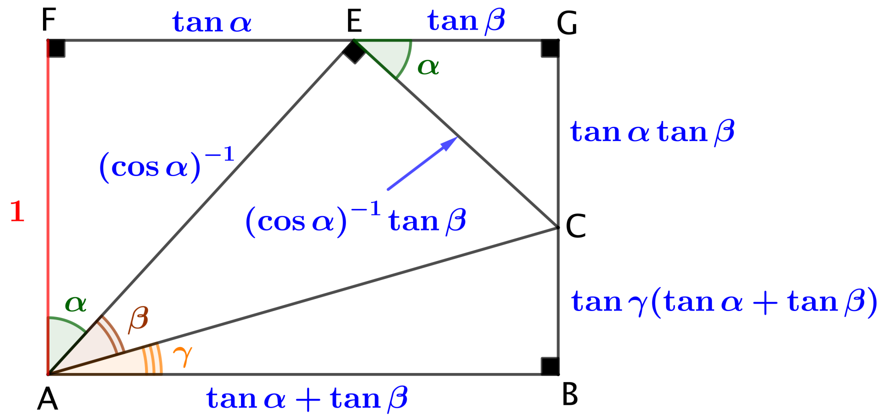
Démonstration. Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour démontrer la validité de la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie par *« Pour toute fonction séparablement analytique $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, si f s'annule sur un ouvert non vide Ω, alors f s'annule sur $\mathbb{C}^n$. »*.

- **Cas de base.** $\mathcal{P}(1)$ découle directement du fait **??**.
- **Hérédité.** Supposons $\mathcal{P}(n)$ valide pour un naturel n quelconque. Soit f une fonction séparablement analytique à $(n+1)$ variables vérifiant les conditions de la propriété $\mathcal{P}(n+1)$. Notons Ω l'ouvert non vide sur lequel f est nulle. Quitte à réduire Ω, on peut supposer que $\Omega = \prod_{k=1}^{n+1} \mathcal{D}(\alpha_k\,;r[$ avec $r > 0$ et les α_k des complexes fixés.
  1. Pour $\omega \in \mathcal{D}(\alpha_{n+1}\,;r[$ fixé, posons $f_\omega : (z_1\,;\dots;z_n) \in \mathbb{C}^n \mapsto f(z_1\,;\dots;z_n\,;\omega) \in \mathbb{C}$. Comme f_ω vérifie les conditions de la propriété $\mathcal{P}(n)$, par hypothèse de récurrence, $\forall (z_1\,;\dots;z_n) \in \mathbb{C}^n$, $f_\omega(z_1\,;\dots;z_n) = 0$, soit $f(z_1\,;\dots;z_n\,;\omega) = 0$.
  2. Pour z_1 , ... , z_n des complexes quelconques, posons $\ell(z) = f(z_1\,;\dots;z_n\,;z)$. Le point précédent montre que ℓ vérifie $\mathcal{P}(1)$, donc, d'après le cas de base, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\ell(z) = 0$, soit $f(z_1\,;\dots;z_n\,;z) = 0$.
  3. Finalement, $\forall (z_1\,;\dots;z_n\,;z) \in \mathbb{C}^{n+1}$, $f(z_1\,;\dots;z_n\,;z) = 0$. Autrement dit, nous avons déduit la validité de $\mathcal{P}(n+1)$ à partir de celle de $\mathcal{P}(n)$.
- **Conclusion.** Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout naturel non nul n. □

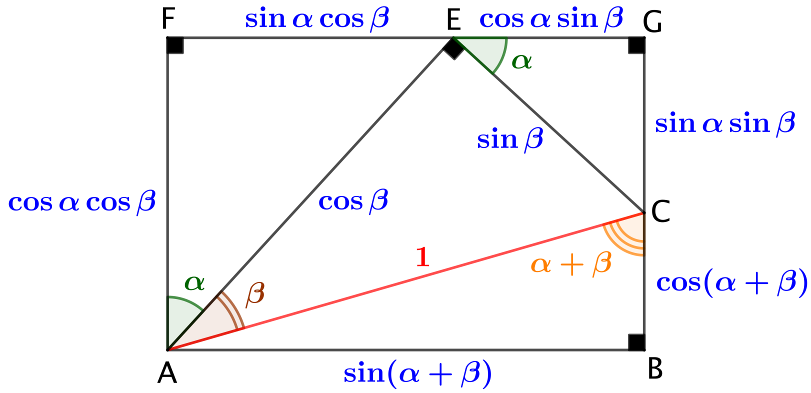
1. L'ouvert d'annulation est l'intérieur d'un triangle.
2. Avec des abus de notations évidents.

2. Que dire des si utiles fonctions analytiques de plusieurs variables ?

Malheureusement, le fait 3 échoue dans la tentative de généralisation à $\left(\mathbb{C}-\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)^3$ de l'identité $\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=1$, celle-ci s'obtenant sans effort comme ci-dessous sous les contraintes géométriques $(\alpha\,;\beta\,;\gamma)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ et $0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}$.



Que faire si nous avons des formules trigonométriques impliquant deux variables, ou plus ? Par exemple, pour $(\alpha\,;\beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, le dessin suivant nous donne $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ et $\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$. [3]



Le fait 7 ci-dessous, qui généralise le fait **??**, implique la validité des formules trigonométriques précédentes sur $\mathbb{C}^2$ tout entier en faisant les choix ci-après. [4] Nous voilà sauvés !

- $f_1(\alpha\,;\beta) = \cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
- $f_2(\alpha\,;\beta) = \sin(\alpha+\beta) - \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta$

3. Cette démonstration est très utile pour un cours pré universitaire.
4. L'ouvert d'annulation est l'intérieur d'un triangle.

Définition 4. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* Ω *un sous-ensemble de* $\mathbb{C}^n$*. Pour* $k \in [\![1\,;n]\!]$*, la* « k^{e} projection » *de* Ω *est l'ensemble* $\pi_k(\Omega) = \{\omega \in \mathbb{C} \mid \exists (z_1\,;\ldots;z_{k-1}\,;\omega\,;z_{k+1}\,;\ldots;z_n) \in \Omega\}$*, et la* « k^{e} section » *de* Ω *est l'ensemble* $\sigma_{\leq k}(\Omega) = \left\{(\omega_1\,;\ldots;\omega_k) \in \mathbb{C}^k \mid \exists(\omega_1\,;\ldots;\omega_k\,;z_{k+1}\,;\ldots;z_n) \in \Omega\right\}$.

Définition 5. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ *un ensemble non vide. Pour* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *et* $k \in [\![1\,;n]\!]$*, la* « k^{e} restriction » *de* f *est définie par* $f_k : z \in \pi_k(\Omega) \mapsto f(z_1\,;\ldots;z_{k-1}\,;z\,;z_{k+1}\,;\ldots;z_n) \in \mathbb{C}$.[5]

Définition 6. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ *un ouvert non vide. Une fonction* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *sera dite* « séparablement analytique » *sur* Ω*, si* $\forall k \in [\![1\,;n]\!]$*, la* k^e *restriction de* f *est analytique sur* $\pi_k(\Omega)$ *(qui est un ouvert non vide de* $\mathbb{C}$*).*

Fait 7. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$*,* $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ *un ouvert connexe non vide et* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *une fonction séparablement analytique. Si* f *s'annule sur un ouvert non vide de* Ω*, alors* f *s'annule sur* Ω *tout entier.*

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour démontrer la validité de la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie par *« Pour toute fonction séparablement analytique* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *sur un ouvert connexe non vide* $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$*, si* f *s'annule sur un ouvert non vide de* Ω*, alors* f *s'annule sur* Ω *tout entier. »*.

- **Cas de base.** $\mathcal{P}(1)$ découle directement du fait **??**.
- **Hérédité.** Supposons $\mathcal{P}(n)$ valide pour un naturel n quelconque. Soit f une fonction séparablement analytique à $(n+1)$ variables vérifiant les conditions de la propriété $\mathcal{P}(n+1)$. Notons $V \subseteq \Omega$ l'ouvert non vide sur lequel f est nulle. Quitte à réduire V, on peut supposer que $V = \prod\limits_{k=1}^{n+1} \mathcal{D}(\alpha_k\,;r[$ avec $r > 0$ et les α_k des complexes fixés.
  (1) Pour $\omega \in \mathcal{D}(\alpha_{n+1}\,;r[$ fixé, posons $f_\omega : (z_1\,;\ldots;z_n) \in \sigma_{\leq n}(\Omega) \mapsto f(z_1\,;\ldots;z_n\,;\omega) \in \mathbb{C}$. Comme f_ω vérifie les conditions de la propriété $\mathcal{P}(n)$, par hypothèse de récurrence, $f_\omega(z_1\,;\ldots;z_n) = 0$, soit $f(z_1\,;\ldots;z_n\,;\omega) = 0$, pour $(z_1\,;\ldots;z_n) \in \sigma_{\leq n}(\Omega)$.
  (2) Pour $z_1\,,\ldots,z_n$ des complexes quelconques de $\sigma_{\leq n}(\Omega)$, posons $\ell(z) = f(z_1\,;\ldots;z_n\,;z)$. Le point précédent montre que ℓ vérifie $\mathcal{P}(1)$, donc, d'après le cas de base, $\ell(z) = 0$, soit $f(z_1\,;\ldots;z_n\,;z) = 0$, pour tout complexe $z\Omega \cap \prod_{i=1}^n z_k \times \omega$.
  (3) Finalement, $f(z_1\,;\ldots;z_n\,;z) = 0$ pour tous complexes $z_1\,,\ldots,z_n$ et z. Autrement dit, nous avons déduit la validité de $\mathcal{P}(n+1)$ à partir de celle de $\mathcal{P}(n)$.
- **Conclusion.** Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout naturel non nul n. □

5. Avec des abus de notations évidents.