BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

Mentions « légales »

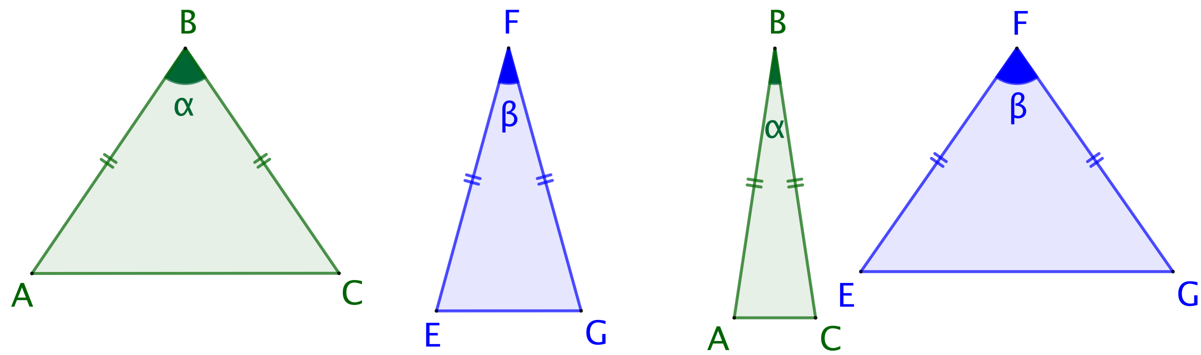
Table des matières

Date: 18 Jan. 2025 – 23 Jan. 2025.

1. Les polygones

Fait 1. *Si un n-isogone convexe $\mathcal{P}$ possède deux angles de mesures différentes, alors il existe un n-gone convexe $\mathcal{P}'$ tel que* $\mathrm{Perim}(\mathcal{P}') = \mathrm{Perim}(\mathcal{P})$ *et* $\mathrm{Aire}(\mathcal{P}') > \mathrm{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Par hypothèse, nous avons deux paires de côtés $\big([AB],[BC]\big)$ et $\big([EF],[FG]\big)$ tels que $\widehat{ABC} > \widehat{EFG}$. Par convexité de $\mathcal{P}$, nous avons juste à augmenter la somme des aires des triangles ABC et EFG. Nous allons le faire en modifiant les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{EFG}$ tout en gardant $AB = BC = EF = FG$.



Les deux exemples ci-dessus nous permettent de noter que si $\alpha = \widehat{ABC}$ diminue, et $\beta = \widehat{EFG}$ augmente, alors la somme des aires se rapprochent de 0. Par raison de symétrie, on devine que cette somme est maximisée quand $\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$. Nous allons établir un résultat plus faible, mais suffisant, en commençant par les calculs suivants où $\ell = AB$, $\mu = \frac{\alpha+\beta}{2}$ et $\delta = \mu - \beta > 0$ (rappelons que nous avons supposé $\alpha > \beta$).

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Aire}(ABC) + \mathrm{Aire}(EFG) \\
= &\frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin\left(\widehat{ABC}\right) + \frac{1}{2} FE \cdot FG \cdot \sin\left(\widehat{EFG}\right) \\
= &\frac{1}{2}\ell^2(\sin\alpha + \sin\beta) \\
= &\frac{1}{2}\ell^2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
= &\frac{1}{2}\ell^2 \sin\mu\cos\delta
\end{aligned}$$

Formule dite des sinus.

Formules trigonométriques de Simpson.

Comme $(\delta\,;\mu) \in]0\,;\pi[^2$, nous avons $\sin\mu\cos\delta > \sin\mu$. Remplaçons alors α et β respectivement par α' et β' de telle sorte que $\alpha' = \beta' = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Notons que $0 < \alpha' < \alpha$ et $\beta < \beta' < \pi$ (diminution de α et augmentation de β). Deux situations se présentent à nous.

- Le n-gone obtenu ne perd aucun côté. Comme la convexité est gardée, c'est gagné.
- Le n-gone obtenu perd au moins un côté. La solution consiste à choisir $\alpha'' = \mu + \frac{\delta}{2}$ et $\beta'' = \mu - \frac{\delta}{2}$ au lieu de $\alpha' = \mu + \delta$ et $\beta' = \mu - \delta$, puisque $\cos\delta > \cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$, $\alpha' < \alpha'' < \alpha$ et $\beta < \beta'' < \beta'$.

□

Fait 2. *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Considérons tous les n-gones de périmètre fixé. Parmi tous ces n-gones, un seul est d'aire maximale, c'est le n-gone régulier.*

Démonstration. Le fait **??** permet de considérer le problème de maximisation d'aire à périmètre fixé uniquement avec des n-gones convexes. Selon les faits **??** et 1, si parmi les n-gones convexes de périmètre fixé, il en existe un qui maximise l'aire, alors ce ne peut être que le n-gone régulier. Pour voir que cette condition nécessaire est suffisante, comme dans le cas du triangle, voir la remarque **??**, nous convions le couple continuité/compacité comme suit.

- On munit le plan d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
- XXX

  fermeture costaud, mais le côté birné !!!!

  pour fermeture, besoin d'accpeter les k-gones pour $k \in [\![3\,;n]\!]$.

  Les n-gones convexes $A_1A_2\cdots A_n$ tels que $\mathrm{Perim}(A_1A_2\cdots A_n) = p$ sont représentés en posant $A_1\,(\,0\,;0\,)$, $A_2\,(\,A_1A_2\,;0\,)$, puis $A_k\,(\,x_k\,;y_k\,)$ avec $y_k \geq 0$ pour $k \in [\![3\,;n]\!]$. Un n-gone peut donc avoir n représentations, mais peu importe. De plus, on accepte les n-gones dégénérés pour lesquels nous avons $x_B = 0$, $y_C = 0$ dans notre représentation. Nous notons alors $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des triplets $(\,x_B\,;x_C\,;y_C\,)$ ainsi obtenus.
- XXX

  Justifier que $\mathcal{G}$ est fermé dans $\mathbb{R}^{2n}$.
- $\mathcal{G}$ est aussi borné, car les coordonnées des sommets des n-gones convexes considérés le sont. En résumé, $\mathcal{G}$ est un compact de $\mathbb{R}^{2n}$.
- Notons $s : \mathcal{G} \to \mathbb{R}_+$ la fonction « *aire* » des n-gones représentés. Cette fonction est continue en les coordonnées des sommets, car elle peut être calculée comme suit pour un n-gone convexe $A_1A_2\cdots A_n$ quelconque.
  (1) L'isobarycentre G de $A_1A_2\cdots A_n$ possède des coordonnées affines en celles des points A_1, A_2, … , et A_n.
  (2) Par convexité, l'aire de $A_1A_2\cdots A_n$ est égale à la somme de celles des triangles GA_kA_{k+1} pour $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, et du triangle GA_nA_1.
  (3) Via le déterminant, il est immédiat de voir que les aires des triangles considérés sont des fonctions continues en les coordonnées des sommets.
- Finalement, par continuité et compacité, on sait que s admet un maximum sur $\mathcal{G}$. Chapeau bas à vous, Géométrie et Analyse réunies...

$\square$