BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES À LA GÉOMÉTRIE

CHRISTOPHE BAL

Table des matières

Date: 18 Jan. 2025 – 22 Jan. 2025.

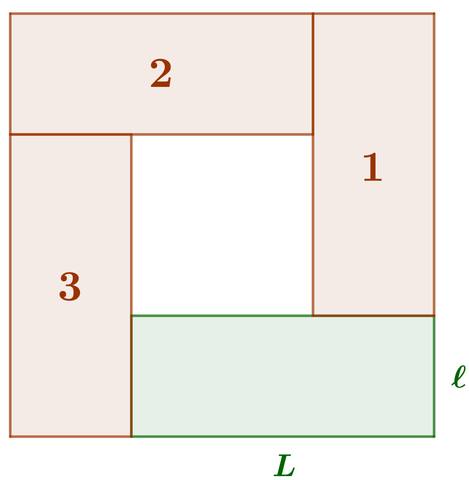
Ce document restreint l'étude du problème de l'isopérimétrie, c'est-dire la recherche d'une surface maximisant son aire pour un périmètre fixé, au cas des polygones, tout en se restreignant à des preuves purement géométriques. La restriction est donc double, voire triple une fois les différentes preuves lues.

> *Pour ne pas alourdir le texte, on raisonnera de façon cachée modulo des isométries, positives ou non. Ainsi, on pourra parler* « du carré équilatéral de côté c » , « du triangle équilatéral de côté c » *, etc.*

1. Les rectangles

Fait 1. *Considérons tous les rectangles de périmètre fixé p. Parmi tous ces rectangles, un seul est d'aire maximale, c'est le carré de côté $c = 0{,}25p$.*

Démonstration. Voici une preuve géométrique élémentaire s'appuyant sur le dessin suivant où les rectangles 1, 2 et 3 sont isométriques au rectangle vert étudié de dimension $L \times \ell$.



Le raisonnement tient alors aux constations suivantes accessibles à un collégien.

(1) Le grand carré a une aire supérieure ou égale à $4L\ell$, et même strictement si le rectangle initial n'est pas un carré.

(2) Le grand carré a un périmètre égal à $4(L+\ell)$.

(3) Une homothétie de rapport 0,5 donne un carré de périmètre $0{,}5 \times 4(L+\ell) = 2(L+\ell)$, et d'aire supérieure ou égale à $0{,}5^2 \times 4L\ell = L\ell$, avec inégalité stricte si le rectangle initial n'est pas un carré.

Donc, parmi tous les rectangles de périmètre $p = 2(L+\ell)$ et d'aire $L\ell$, le seul qui puisse avoir une aire maximale est le carré. Joli ! Non ? □

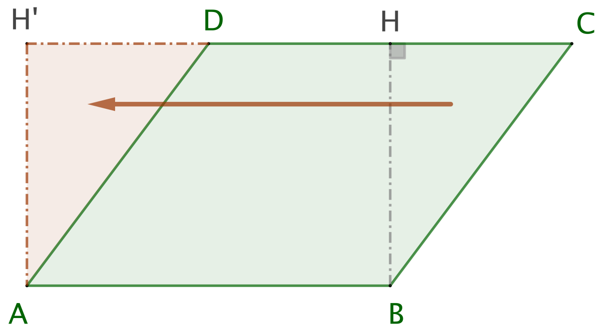
Remarque 1.1. *Une preuve courante est d'exprimer l'aire du rectangle comme un polynôme du 2ᵉ degré en L par exemple. On obtient $L\ell = L(0{,}5p - L)$ qui est maximale en $L_M = 0{,}25p$ (moyenne des racines), d'où $\ell_M = 0{,}25p = L_M$.*

Remarque 1.2. *Au passage, nous avons pour $(L\,;\ell) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $4L\ell \leq (L+\ell)^2$, c'est-à-dire $2L\ell \leq L^2 + \ell^2$, d'où $\sqrt{L\ell} \leq \sqrt{\frac{1}{2}(L^2+\ell^2)}$, soit la comparaison des moyennes géométriques et quadratiques d'ordre 2.*

2. Les parallélogrammes

Fait 2. *Considérons tous les parallélogrammes de périmètre fixé p. Parmi tous ces parallélogrammes, un seul est d'aire maximale, c'est le carré de côté $c = 0{,}25p$.*

Démonstration. Le calcul de l'aire d'un parallélogramme, voir le dessin ci-dessous, nous donne $\mathrm{Aire}(ABCD) = \mathrm{Aire}(ABHH')$ et $\mathrm{Perim}(ABCD) \geq \mathrm{Perim}(ABHH')$, avec égalité uniquement si $ABCD$ est un rectangle.



Via une homothétie de rapport $k = \frac{\mathrm{Perim}(ABCD)}{\mathrm{Perim}(ABHH')} \geq 1$, nous obtenons un rectangle de périmètre égal à p, et d'aire supérieure ou égale à $\mathrm{Aire}(ABCD)$, avec égalité uniquement si $ABCD$ est un rectangle. Nous revenons à la situation du fait 1 qui permet de conclure très facilement. □

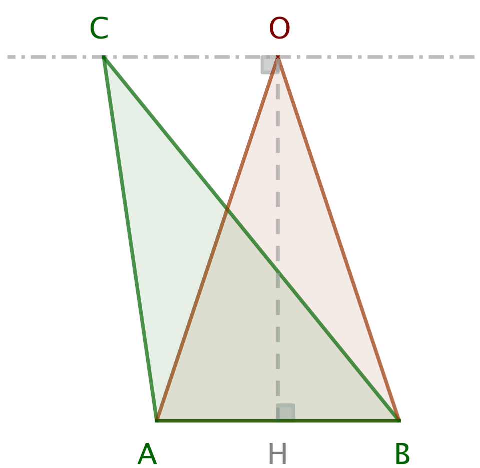
Remarque 2.1. *La recherche d'un parallélogramme de périmètre minimal pour une aire fixée est le problème dual de l'isopérimétrie pour les parallélogrammes.*

Remarque 2.2. *Une méthode analytique devient pénible ici, car il faut par exemple prendre en compte l'angle au sommet A du parallélogramme. L'auteur préfère battre en retraite en clôturant cette remarque ici.*

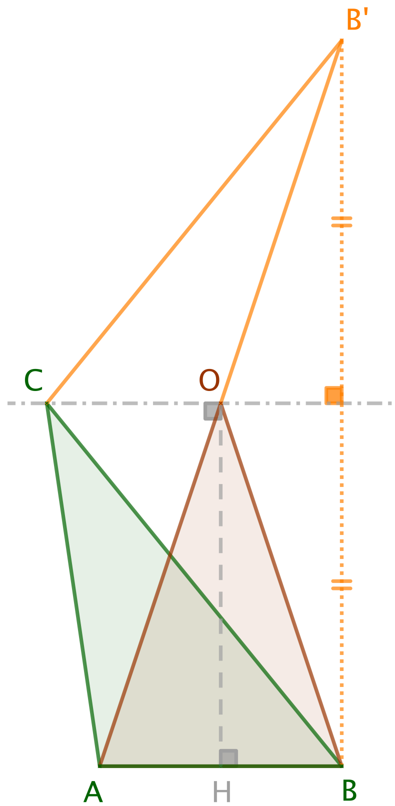
3. Les triangles avec un côté fixé

Fait 3. *Considérons tous les triangles de périmètre fixé p, et ayant tous un côté en commun. Parmi tous ces triangles, un seul est d'aire maximale, c'est le triangle isocèle ayant pour base le côté commun.*

Démonstration. Soit ABC un triangle de périmètre p, et fixons le côté $[AB]$. Pour tout point M sur la parallèle à (AB) passant par C, nous savons que $\mathrm{Aire}(ABM) = \mathrm{Aire}(ABC)$. Notons alors O le point sur cette parallèle tel que ABO soit isocèle en O.



Via une petite symétrie axiale, voir ci-dessous, il est aisé de noter que $\text{Perim}(ABC) \geq \text{Perim}(ABO)$, avec égalité uniquement si ABC est isocèle en C.



Via une dilatation « *verticale* » de rapport $r = \frac{\text{Perim}(ABC)}{\text{Perim}(ABO)} \geq 1$, on obtient finalement un triangle isocèle ABO' de périmètre p, et qui vérifie $\text{Aire}(ABO') \geq \text{Aire}(ABC)$, avec égalité uniquement si ABC est isocèle en C. Contrat rempli ![1] □

4. Les triangles sans contrainte

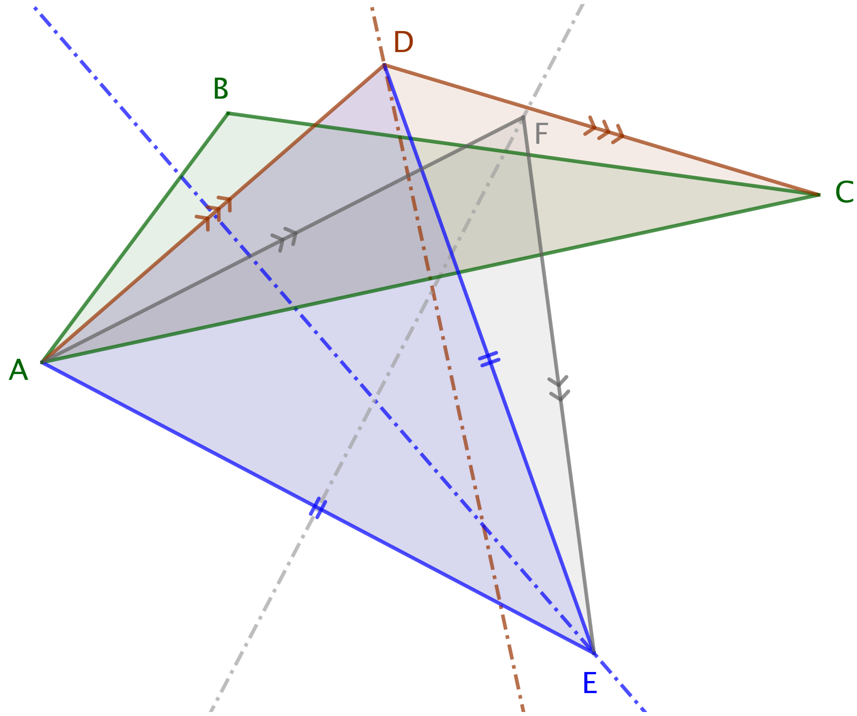
Fait 4. *Considérons tous les triangles de périmètre fixé p. Parmi tous ces triangles, un seul est d'aire maximale, c'est le triangle équilatéral de côté $c = \dfrac{1}{3}p$.*

Démonstration. Soit un triangle ABC non équilatéral, de sorte que ABC n'est pas isocèle en A. Selon le fait 3, il existe un triangle isocèle de base $[BC]$, de même périmètre et d'aire strictement plus grande. Ceci nous prouve qu'un triangle non équilatéral ne peut pas être solution du problème, et par conséquent seul le triangle équilatéral maximise l'aire à périmètre fixé. Que c'est efficace ! □

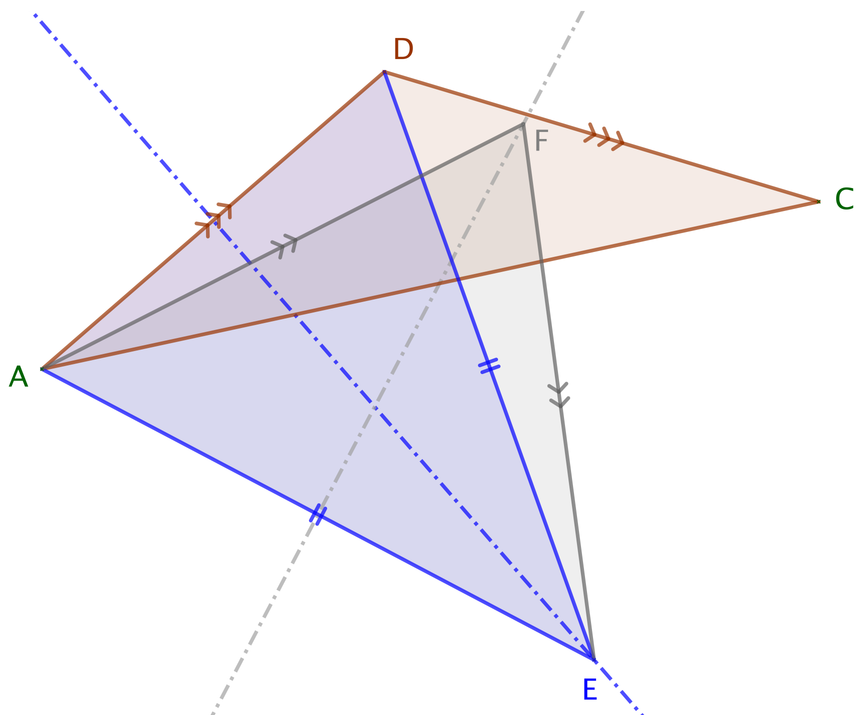
Remarque 4.1. *Voici un fait rigolo. Une application itérative du fait 3 donne à la limite le triangle équilatéral d'aire maximale, et ceci avec une vitesse de convergence exponentielle. En effet, partons d'un triangle ABC quelconque de périmètre p, le fait 3 nous donne successivement les triangles ACD, ADE et AEF isocèles en D, E et F respectivement, ayant tous pour périmètre p, et ceci avec des aires de plus en plus grandes. Le dessin suivant amène à conjecturer qu'en poursuivant le procédé pour avoir ensuite un triangle AFG isocèle en G…, nous aboutirons* « à la limite » *à un triangle équilatéral.*

---

1. La remarque 4.3 explique comment employer la méthode des extrema liés. Les arguments fournis à cet endroit s'adaptent facilement au cas des triangles de base fixée.



Le passage d'un triangle quelconque ABC au triangle ACD isocèle en D nous amène à nous concentrer sur ce que donne notre procédé d'agrandissement d'aire à périmètre fixé pour des triangles isocèles. Dans la suite, nous allons nous appuyer sur le schéma suivant.



Voici ce que nous pouvons affirmer.

(1) *Considérons ACD isocèle en D tel que $AC > AD$. Comme $AC + AD + DC = p$, nous avons $AC > \frac{1}{3}p > AD$. Dès lors, on doit avoir ensuite $AD < \frac{1}{3}p < AE$, car $AD + DE + AE = p$ et $AD = AE$.*

(2) Considérons ADE isocèle en E tel que $AD < AE$ en oubliant le point précédent. Comme $AD + DE + AE = p$, nous avons $AD < \frac{1}{3}p < AE$. Dès lors, on doit avoir ensuite $AE > \frac{1}{3}p > AF$, car $AE + AF + EF = p$ et $AF = EF$.

(3) Les deux points précédents démontrent que notre procédé n'arrivera jamais en un nombre fini d'étapes à un triangle équilatéral si l'on part d'un triangle isocèle non équilatéral. [2]

(4) Nous devons quantifier les écarts à la mesure « limite » *$p' = \frac{1}{3}p$.*

- *Dans ADC, posant $AD = p' - \epsilon$, nous avons $AC = p' + 2\epsilon$.*
- *Dans ADE, posant $AE = p' + \epsilon'$, nous avons $AD = p' - 2\epsilon'$.*
- *Donc $\epsilon' = \frac{1}{2}\epsilon$.*

Nous avons donc une convergence exponentielle des longueurs des côtés vers $p' = \frac{1}{3}p$. Et tout ceci via de la géométrie et de l'analyse élémentaires !

Remarque 4.2. *La formule de Héron donne qu'un triangle de côtés a, b et c, et de demi-périmètre $s = 0{,}5p$, possède une aire égale à $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. La comparaison des moyennes géométriques et arithmétiques d'ordre 3 nous donne alors une solution algébrique efficace, puisque de $\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}\big((s-a)+(s-b)+(s-c)\big)$, nous déduisons $s(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{1}{27}s^4$, puis $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{p^2}{12\sqrt{3}}$ où $\frac{p^2}{12\sqrt{3}}$ est l'aire du triangle équilatéral de périmètre p.*

Remarque 4.3. *L'aire d'un triangle étant positive ou nulle, nous pouvons chercher à maximiser son carré $f(a\,;b\,;c) = s(s-a)(s-b)(s-c)$, sous la contrainte $2s = a+b+c$ où $s > 0$ est constant. Notant $g(a\,;b\,;c) = a+b+c-2s$, la contrainte s'écrit $g(a\,;b\,;c) = 0$.*

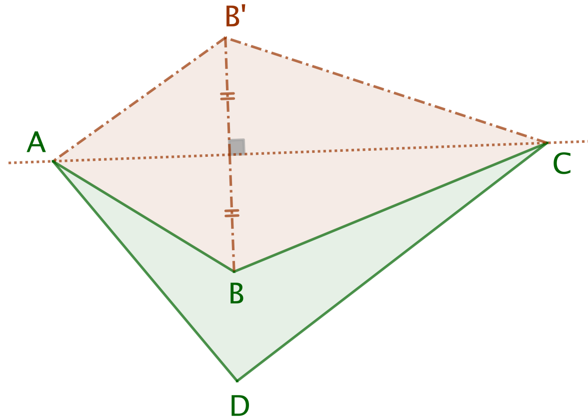
- *Si un extremum existe, $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\partial_a f = \lambda\partial_a g$, $\partial_b f = \lambda\partial_b g$ et $\partial_c f = \lambda\partial_c g$ d'après la méthode des extrema liés.*
- *Donc $-s(s-b)(s-c) = -s(s-a)(s-c) = -s(s-a)(s-b)$, et par conséquent $(s-b)(s-c) = (s-a)(s-c) = (s-a)(s-b)$.*
- *Les cas $s = a$, $s = b$ et $s = c$ donnent $f(a\,;b\,;c) = 0$.*
- *Le cas $\big[s \neq a, s \neq b$ et $s \neq c\big]$ n'est envisageable que si $a = b = c = \frac{p}{3}$, ceci impliquant $f(a\,;b\,;c) = \frac{1}{16}p\big(\frac{p}{3}\big)^3 = \big(\frac{p^2}{12\sqrt{3}}\big)^2 > 0$.*
- *En résumé, l'existence d'un maximum implique que ce maximum corresponde au cas du triangle équilatéral.*
- *Il reste à démontrer qu'un tel maximum existe pour pouvoir conclure : ceci est facile à justifier en considérant l'ensemble compact $[0\,;2s]^3$ de $\mathbb{R}^3$.*

5. Les quadrilatères

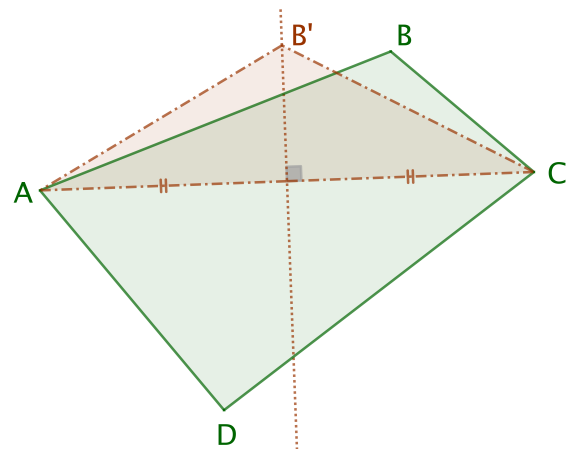
Fait 5. *Considérons tous les quadrilatères de périmètre fixé p. Parmi tous ces quadrilatères, un seul est d'aire maximale, c'est le carré de côté $c = 0{,}25p$.*

Démonstration. La figure suivante montre que pour tout quadrilatère $ABCD$ non convexe en B, et de périmètre p, il existe un quadrilatère convexe $AB'CD$ de périmètre p, et tel que $\text{Aire}(AB'CD) > \text{Aire}(ABCD)$. Notre recherche doit donc continuer dans l'ensemble des quadrilatères convexes de périmètre p.

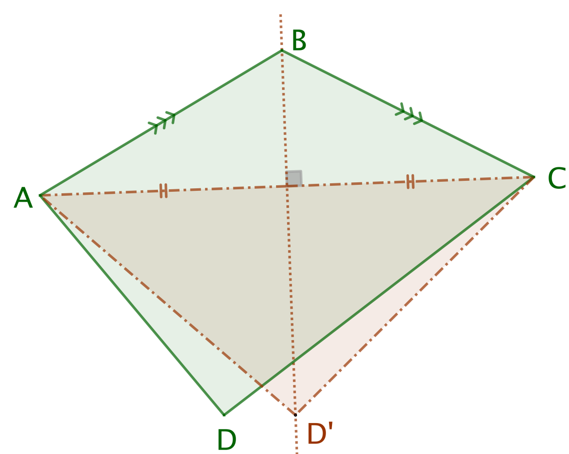
2. Et plus généralement si le procédé ne commence pas avec une base de longueur $\frac{1}{3}p$.



Si un quadrilatère convexe $ABCD$ de périmètre p est tel que $AB \neq BC$, le fait 3 nous donne un quadrilatère convexe $AB'CD$ de périmètre p,[3] et vérifiant aussi $AB' = B'C$ et $\text{Aire}(AB'CD) > \text{Aire}(ABCD)$ comme le montre la figure ci-après. On se ramène donc au cas d'un quadrilatère convexe $ABCD$ de périmètre p avec en plus $AB = BC$.



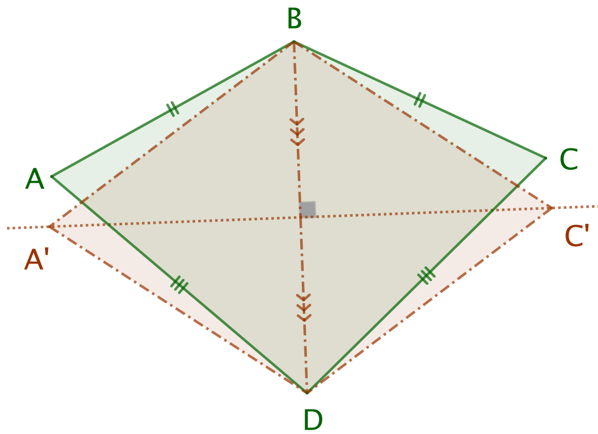
La méthode précédente appliquée au sommet D d'un quadrilatère convexe $ABCD$ de périmètre p tel que $AB = BC$ et $AD \neq DC$ permet en fait de se ramener au cas d'un cerf-volant $ABCD$ de périmètre p, avec $AB = BC$ et $AD = DC$, voir ci-dessous.



En supposant que notre cerf-volant ne soit pas un losange, le fait 3 appliqué aux sommets A et C fournit un losange $A'BC'D$ de périmètre p, et tel que $\text{Aire}(A'BC'D) > \text{Aire}(ABCD)$. En

3. Noter que $\text{Perim}(AB'CD) = \text{Perim}(AB'C) + \text{Perim}(ACD) - 2AC$.

effet, nous avons $p = 2(AB+AD)$ et $\text{Perim}(A'BD) = \text{Perim}(ABD)$, donc $A'B = A'D = 0{,}25p$, et de même, nous obtenons $C'B = C'D = 0{,}25p$.



Pour conclure, il suffit d'appliquer le fait 2, puisque tout losange est un parallélogramme. Que la géométrie est belle ! □