

# BROUILLON – NEWTON, BERNOULLI, LEIBNIZ, FIBONACCI ET BELL

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page*  
*<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



---

## TABLE DES MATIÈRES

1.	Des identités bien connues	2
2.	La loi binomiale révèle...	2
2.1.	De l'utilité des arbres	2
2.2.	En route directement vers le binôme de Newton	3
2.3.	Leibniz sans effort	3
2.4.	Une petite astuce pour Fibonacci	4
2.5.	Avec des coefficients binomiaux	4
2.6.	Bell sonne la fin du jeu	5
2.7.	Généraliser aux coefficients multimoniaux	6
3.	La formule du binôme de Newton implique...	6

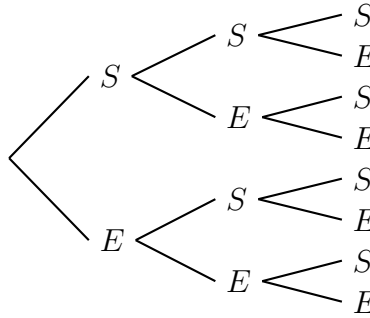
## 1. DES IDENTITÉS BIEN CONNUES

Les formules suivantes intriguent par leur ressemblance. Bien qu'elles appartiennent à des domaines distincts, leur similitude n'est pas le fruit du hasard. À travers deux démonstrations adoptant des approches différentes, nous révélerons les liens combinatoires qui unissent ces objets en apparence indépendants.

- **Formule du binôme de Newton** :  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ .
- **Formule de dérivation de Leibniz** :  $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$ .
- **Loi binomiale** :  $P(X = j) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_{jk}$ ,<sup>1</sup> même s'il est d'usage de juste écrire  $P(X = j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$ .
- **Une identité portant sur la suite de Fibonacci** :  $F_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k$ .
- **Une formule similaire avec des coefficients binomiaux** :  $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k}$ .
- **Une équation liant les nombres de Bell** :  $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$  où  $B_s$  est le nombre de façons de partitionner un ensemble de  $s$  éléments en sous-ensembles non vides : par exemple,  $B_3 = 5$ , car l'ensemble  $\{a, b, c\}$  admet les partitions  $\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$ ,  $\{a, b, c\}$ ,  $\{a\} \cup \{b, c\}$ ,  $\{b\} \cup \{a, c\}$  et  $\{c\} \cup \{a, b\}$ .

## 2. LA LOI BINOMIALE RÉVÈLE...

**2.1. De l'utilité des arbres.** Lorsque l'on présente la loi binomiale, il est courant d'utiliser un arbre de probabilité comme le suivant où  $S$  désigne un succès et  $E$  un échec, un succès ayant une probabilité  $p$  de se réaliser (ici nous avons un niveau de profondeur de 3).



Nous pouvons calculer les probabilités aux feuilles de l'arbre via le mini-arbre de calcul  $\mathcal{T}_c$  suivant dans lequel un choix de chemin vers le bas, soit un déplacement vers un succès, implique de multiplier la valeur  $p^i q^j$  par  $p$ , et sinon de multiplier par  $q$ .

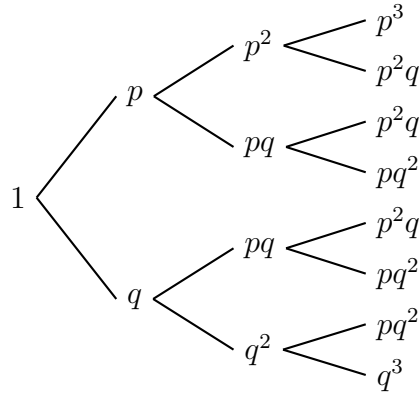
$$x \begin{cases} px \\ qx \end{cases}$$

*Arbre de calcul.*

$$p^a q^b \begin{cases} p^{a+1} q^b \\ p^a q^{b+1} \end{cases}$$

*Un calcul intermédiaire.*

Si l'on part de la racine de la valeur 1 pour construire un arbre binaire complet via les règles de calcul de  $\mathcal{T}_c$ , nous retrouvons  $P(X = j) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_{jk}$  de façon combinatoire, voir ci-dessous, mais surtout via une méthode généralisable à d'autres contextes comme nous allons le constater.



## 2.2. En route directement vers le binôme de Newton. XXXX

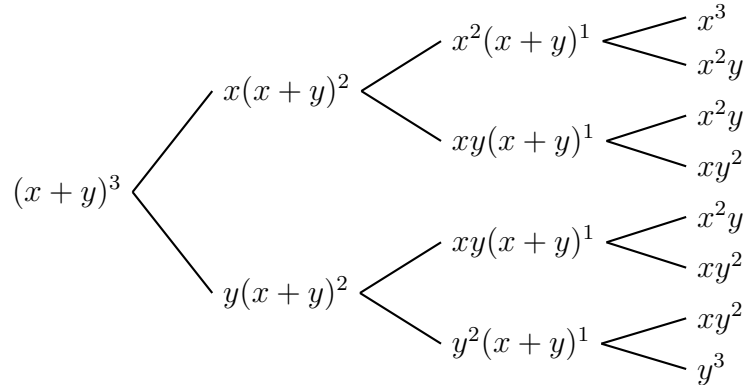
$$(x+y)^k \begin{cases} x(x+y)^{k-1} \\ y(x+y)^{k-1} \end{cases}$$

*Arbre de calcul.*

$$x^a y^b (x+y)^k \begin{cases} x^{a+1} y^b (x+y)^{k-1} \\ x^a y^{b+1} (x+y)^{k-1} \end{cases}$$

*Un calcul intermédiaire.*

YYY



## 2.3. Leibniz sans effort. XXXX

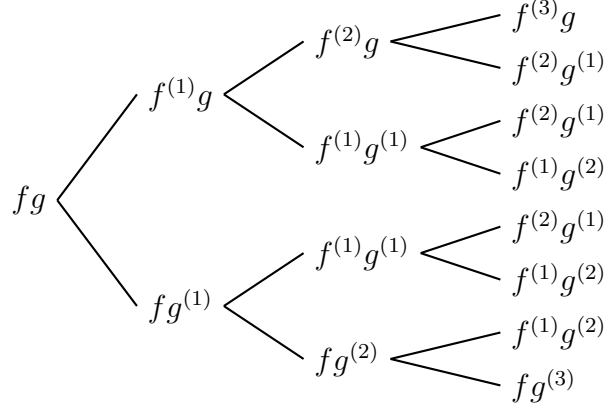
$$uv \begin{cases} u'v \\ uv' \end{cases}$$

*Arbre de calcul.*

$$f^{(a)}g^{(b)} \begin{cases} f^{(a+1)}g^{(b)} \\ f^{(a)}g^{(b+1)} \end{cases}$$

*Un calcul intermédiaire.*

YYY



## 2.4. Une petite astuce pour Fibonacci. XXXX

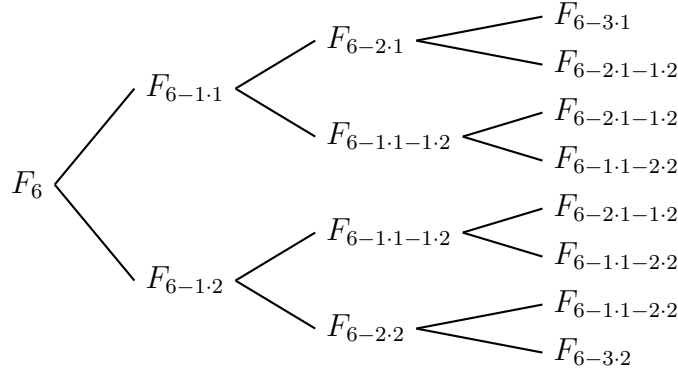
$$F_k \begin{cases} F_{k-1} \\ F_{k-2} \end{cases}$$

*Arbre de calcul.*

$$F_{k-a \cdot 1 - b \cdot 2} \begin{cases} F_{k-(a+1) \cdot 1 - b \cdot 2} \\ F_{k-a \cdot 1 - (b+1) \cdot 2} \end{cases}$$

*Un calcul intermédiaire.*

YYY



généralisable à  $F_{n+m}$

2.5. **Avec des coefficients binomiaux.** Notant  $\mathcal{C}_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  si et  $\mathcal{C}_k^n = 0$  sinon, nous allons démontrer que  $\mathcal{C}_k^n = \binom{n}{k}$ .

XXXX

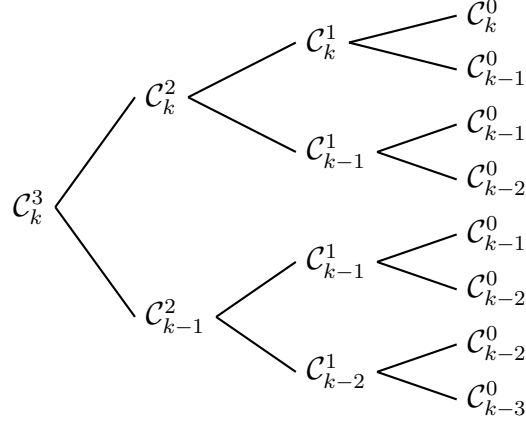
$$\mathcal{C}_k^n \begin{cases} \mathcal{C}_k^{n-1} \\ \mathcal{C}_{k-1}^{n-1} \end{cases}$$

*Arbre de calcul.*

$$\mathcal{C}_{k-b}^{n-a} \begin{cases} \mathcal{C}_{k-(b+1)}^{n-(a+1)} \\ \mathcal{C}_{k-b}^{n-(a+1)} \end{cases}$$

*Un calcul intermédiaire.*

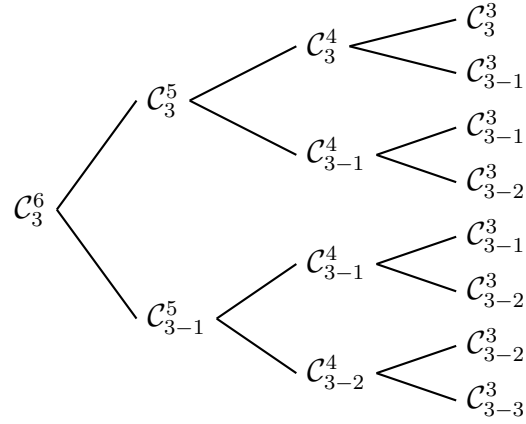
YYY



Passons à l'identité  $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k}$  que nous allons démontrer sous la forme équivalente

$$\mathcal{C}_n^{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{C}_{n-k}^n.$$

YYY



**Remarque 2.** Notant  $\mathcal{C}(n, k)$  le nombre de sous-ensembles à ....  
la dernière identité devient évidente.

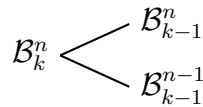
Plus généralement, formule de Van der Monde  $\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}$

## 2.6. Bell sonne la fin du jeu. XXXX

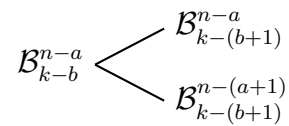
$B_n = \mathcal{B}_0^n = \mathcal{B}_{n-1}^{n-1}$  si  $\mathcal{B}_k^n = \mathcal{B}_{k-1}^n + \mathcal{B}_{k-1}^{n-1}$  avec  $\mathcal{B}_0^0 = \mathcal{B}_0^1 = 1$  et  $\mathcal{B}_k^n = 0$  si ???.

situatoin similaire aux coefficients binomiaux

XXXX

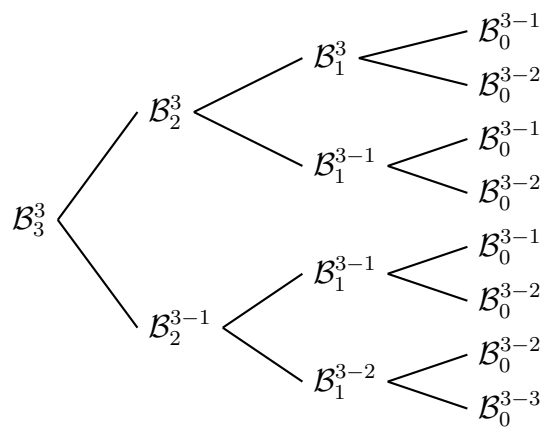


Arbre de calcul.

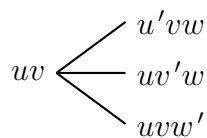


Un calcul intermédiaire.

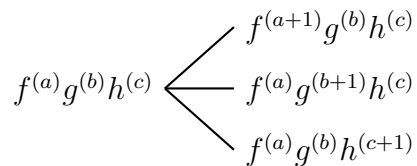
YYY



## 2.7. Généraliser aux coefficients multimoniaux. XXX



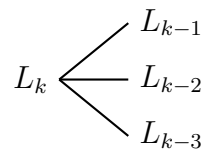
*Arbre de calcul.*



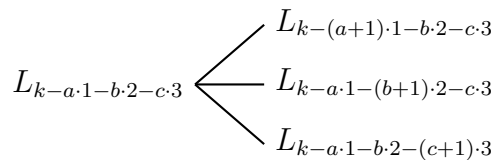
*Un calcul intermédiaire.*

XXX

attention au piège car l'astuce de Fibonnaci ne se généralise pas



*Arbre de calcul.*



*Un calcul intermédiaire.*

## 3. LA FORMULE DU BINÔME DE NEWTON IMPLIQUE...

XXXX