

NEWTON, BERNOULLI, LEIBNIZ, FIBONACCI ET BELL

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/math/sequences-series/sequences/newton-bernoulli-leibniz-&-fibonacci>.

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



TABLE DES MATIÈRES

1. Des identités bien connues	2
2. Notations différenciées	2
3. La loi binomiale révèle...	2
3.1. De l'utilité des arbres	2
3.2. Directement vers le binôme de Newton	3
3.3. Leibniz sans effort	4
3.4. Coefficients factoriels	4
3.5. Une escale combinatoire	5
3.6. Une petite astuce pour Fibonacci	6
3.7. Bell sonne la fin du jeu	7
3.8. Généraliser aux coefficients multimoniaux	8
4. La formule du binôme de Newton implique...	9
4.1. Un classique des identités algébriques	9
4.2. La loi binomiale est algébrique	9
4.3. Leibniz, le retour	11
4.4. Coefficients factoriels et combinatoires	12
4.5. Fibonacci via Newton	13
4.6. Bell en écho de Fibonacci	14
5. Sources utilisées	15

Dans ce document, via des arbres binaires complets, puis la formule du binôme de Newton, nous faisons émerger des liens naturels, via les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$, entre notamment la formule du binôme de Newton, celle de dérivation de Leibniz, et la loi binomiale.

1. DES IDENTITÉS BIEN CONNUES

Les égalités suivantes intriguent par leur ressemblance. Bien qu'appartenant à des domaines distincts, la similitude de ces identités n'est pas le fruit du hasard. À travers deux approches différentes, l'une discrète et éclairante, et l'autre algébrique et puissante, nous révélerons les liens combinatoires et algébriques unissant ces divers objets.

- **Formule du binôme de Newton** : $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.
- **Formule de dérivation de Leibniz** : $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.
- **Loi binomiale** : $P(X = j) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_{jk}$,¹ même s'il est d'usage de juste écrire $P(X = j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$.
- **Une identité portant sur la suite de Fibonacci** : $F_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k$.
- **Une formule similaire pour les coefficients binomiaux** : $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k}$.
- **Une récurrence liant les nombres de Bell** : $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$ où B_i est le nombre de façons de partitionner un ensemble de i éléments.²

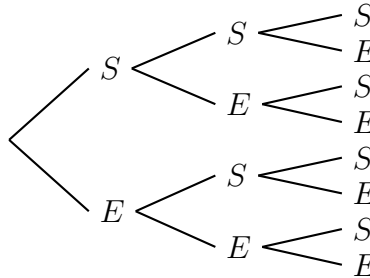
2. NOTATIONS DIFFÉRENCIÉES

Nous utiliserons les notations suivantes sans jamais employer directement l'égalité classique $\binom{n}{p} = \mathcal{C}_p^n = C(p, n)$, et nous introduisons le vocabulaire non standard suivant.

- **Coefficients binomiaux** : pour $(n; k) \in \mathbb{N}^2$, $\binom{n}{k}$ désigne le nombre de chemins avec k succès dans un arbre binaire complet de profondeur n (voir la section 3.1).
- **Coefficients factoriels** : \mathcal{C}_k^n est définie sur \mathbb{N}^2 par $\mathcal{C}_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ si $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, et $\mathcal{C}_k^n = 0$ dans les autres cas.
- **Coefficients combinatoires** : pour $(n; k) \in \mathbb{N}^2$, $C(k, n)$ désigne le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble de cardinal n .

3. LA LOI BINOMIALE RÉVÈLE...

3.1. De l'utilité des arbres. Lorsque l'on présente la loi binomiale, il est courant d'utiliser un arbre de probabilité comme le suivant où S désigne un succès et E un échec, un succès ayant une probabilité p de se réaliser (ici nous avons 3 niveaux de profondeur).



1. δ_{jk} est le symbole de Kronecker valant 1 si $j = k$, et 0 sinon, tandis que X désigne la variable aléatoire comptant le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli de paramètre $(n; p)$.

2. Par exemple, $B_3 = 5$, car l'ensemble $\{a, b, c\}$ admet les partitions $\{a, b, c\}$, $\{a\} \cup \{b, c\}$, $\{b\} \cup \{a, c\}$, $\{c\} \cup \{a, b\}$ et $\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$.

Notons X la variable aléatoire comptant le nombre de succès, ainsi que $q = 1 - p$, puis concentrons-nous sur les bifurcations lors du parcours de l'arbre de gauche à droite. La règle de calcul à gauche ci-dessous traduit qu'en allant vers un succès, la probabilité en cours est multipliée par p , et sinon c'est q qui est appliqué. Ceci nous donne des calculs intermédiaires à chaque bifurcation comme montré à droite ci-dessous où $(a; b) \in \mathbb{N}^2$.

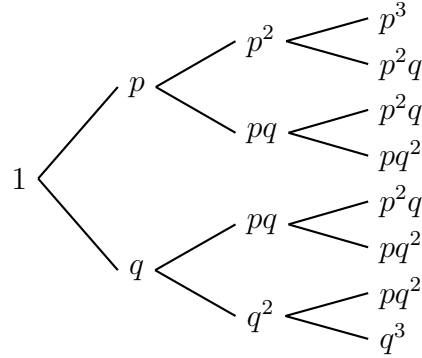
$$x \begin{cases} \nearrow px \\ \searrow qx \end{cases}$$

Arbre de calcul.

$$p^a q^b \begin{cases} \nearrow p^{a+1} q^b \\ \searrow p^a q^{b+1} \end{cases}$$

Un calcul intermédiaire.

Soit ensuite l'arbre binaire de niveau de profondeur n , et de racine la valeur 1. L'application de la règle de calcul donne $P(X = j) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_{jk}$. Voici un exemple avec $n = 3$.



Un exemple de calcul.

La méthode que nous venons de présenter est généralisable à d'autres contextes comme nous allons le constater dans la suite.

3.2. Directement vers le binôme de Newton. Pour développer $(x+y)^n$, la brique de base est la distribution indiquée dans l'arbre de calcul à gauche ci-dessous, ceci nous donnant des calculs intermédiaires comme celui montré à droite ci-dessous où $(a; b; k) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$.

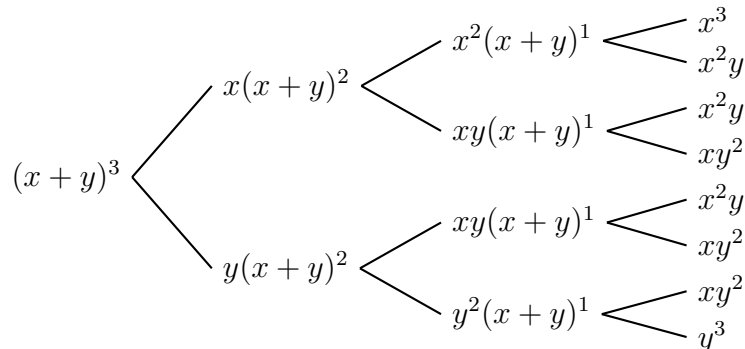
$$(x+y)f(x; y) \begin{cases} \nearrow xf(x; y) \\ \searrow yf(x; y) \end{cases}$$

Arbre de calcul.

$$x^a y^b (x+y)^k \begin{cases} \nearrow x^{a+1} y^b (x+y)^{k-1} \\ \searrow x^a y^{b+1} (x+y)^{k-1} \end{cases}$$

Un calcul intermédiaire.

En considérant un arbre binaire de niveau de profondeur n , et avec pour racine l'expression $(x+y)^n$, l'application répétée de la règle de calcul donne la formule du binôme de Newton $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. Voici un exemple de calcul avec $n = 3$.



Un exemple de calcul.

Remarque 1. Nous allons établir un classique de la combinatoire, à savoir la formule d'inversion de Pascal qui affirme que si $b_n = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}_k^n a_k$, alors $a_n = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}_k^n (-1)^{n-k} b_k$. La preuve qui suit est très intuitive.

- Nous avons $(X+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k$ et $X^n = (X+1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (X+1)^k$ d'après la formule du binôme de Newton.
- Donc, la matrice de passage de $(X^i)_{1 \leq i \leq n}$ à $((X+1)^i)_{1 \leq i \leq n}$ est $M = ((\binom{j}{i}))_{1 \leq i, j \leq n}$, et celle de $((X+1)^i)_{1 \leq i \leq n}$ à $(X^i)_{1 \leq i \leq n}$ est $N = ((-1)^{j-i} \binom{j}{i}))_{1 \leq i, j \leq n}$.
- Nous venons de démontrer, sans effort, que $M^{-1} = ((-1)^{j-i} \binom{j}{i}))_{1 \leq i, j \leq n}$.
- Soit l'endomorphisme linéaire de \mathbb{R}^n de matrice M . La relation $b_n = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}_k^n a_k$ donne $(b_i)_{1 \leq i \leq n} = M (a_i)_{1 \leq i \leq n}$, puis $(a_i)_{1 \leq i \leq n} = M^{-1} (b_i)_{1 \leq i \leq n}$, c'est-à-dire en particulier $a_n = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}_k^n (-1)^{n-k} b_k$ comme souhaité.

3.3. Leibniz sans effort. Pour la formule de Leibniz, la clé est la formule de dérivation d'un produit avec les calculs intermédiaires indiqués ci-dessous où $(a; b) \in \mathbb{N}^2$.

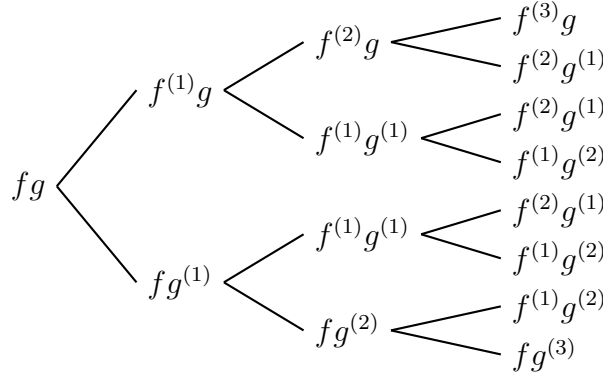
$$uv \begin{array}{l} \swarrow u'v \\ \searrow uv' \end{array}$$

Arbre de calcul.

$$f^{(a)}g^{(b)} \begin{array}{l} \swarrow f^{(a+1)}g^{(b)} \\ \searrow f^{(a)}g^{(b+1)} \end{array}$$

Un calcul intermédiaire.

En considérant un arbre binaire de niveau de profondeur n , et de racine la fonction produit fg , l'application répétée de la règle de calcul donne $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n-k)}$ qui est bien la formule de dérivation de Leibniz. Voici un exemple de calcul avec $n = 3$.



Un exemple de calcul.

3.4. Coefficients factoriels. Nous allons démontrer que $\mathcal{C}_p^n = \binom{n}{p}$ si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Pour cela, notons que $\mathcal{C}_p^n = \mathcal{C}_p^{n-1} + \mathcal{C}_{p-1}^{n-1}$: c'est facile à vérifier pour les valeurs non nulles de \mathcal{C}_p^n , et ensuite à généraliser aux cas restants. Ceci nous amène à considérer la situation suivante.

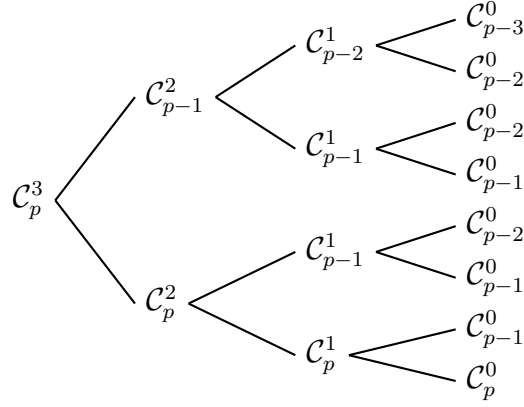
$$\mathcal{C}_p^n \begin{array}{l} \swarrow \mathcal{C}_{p-1}^{n-1} \\ \searrow \mathcal{C}_p^{n-1} \end{array}$$

Arbre de calcul.

$$\mathcal{C}_{p-b}^{n-a} \begin{array}{l} \swarrow \mathcal{C}_{p-(b+1)}^{n-(a+1)} \\ \searrow \mathcal{C}_{p-b}^{n-(a+1)} \end{array}$$

Un calcul intermédiaire.

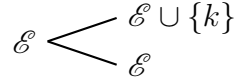
Nous considérons alors l'arbre binaire de niveau de profondeur n , et de racine le terme \mathcal{C}_p^n . Ainsi, pour $n = 3$ et $p \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, nous obtenons l'arbre suivant avec des feuilles du type \mathcal{C}_k^0 .



Un exemple de calcul.

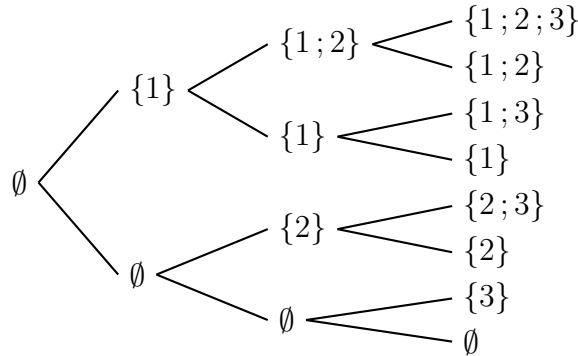
Nous obtenons donc $C_p^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} C_{p-k}^0$. Or, pour $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, la somme de droite se réduit à $\binom{n}{p} C_p^0$, d'où $C_p^n = \binom{n}{p}$ comme annoncé. Notons alors que l'identité $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k}$, est équivalente à $C_n^{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} C_{n-k}^n$ car $C_{n-k}^n = C_k^n$. L'égalité souhaitée s'obtient aisément en considérant un arbre de racine C_n^{2n} qui donne $C_n^{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} C_{n-k}^{2n-n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} C_{n-k}^n$.

3.5. Une escale combinatoire. En distinguant les sous-ensembles contenant un élément particulier e , choisi et fixé arbitrairement, de ceux ne le contenant pas, il est immédiat de voir que $C(p, n) = C(p-1, n-1) + C(p, n-1)$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Dès lors, comme pour C_p^n , nous avons $C(p, n) = \binom{n}{p}$ si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Ceci étant indiqué, nous allons proposer une autre approche très classique pour valider $C(p, n) = \binom{n}{p}$. Pour cela, travaillons dans l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket$ avec $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Plus exactement, nous allons considérer la chaîne croissante d'ensembles $\emptyset \subset \{1\} \subset \llbracket 1; 2 \rrbracket \subset \dots \subset \llbracket 1; n \rrbracket$. À la k^e étape, il s'agit d'ajouter, ou non, le naturel k comme nouvel élément. Ceci nous mène à l'arbre suivant où $\mathcal{E} \subseteq \llbracket 1; k-1 \rrbracket$.



Arbre de calcul.

Considérons alors l'arbre binaire de niveau de profondeur n , et de racine l'ensemble vide \emptyset . Ainsi, pour $n = 3$, nous obtenons l'arbre suivant.



Un exemple de calcul.

Nous obtenons alors $C(p, n) = \binom{n}{p}$ pour $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Remarque 2. Il est très facile de deviner que $C(n, 2n) = \sum_{k=0}^n C(k, n) C(n-k, n)$ en considérant deux sous-ensembles particuliers disjoints de cardinal n , choisis et fixés arbitrairement.

Remarque 3. L'identité $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$ est un cas particulier de la formule de Van der Monde, à savoir de $\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}$ pour $(m; n) \in \mathbb{N}^2$ et $p \in \llbracket 0; \min(n; m) \rrbracket$. Comme à la fin de la remarque précédente, découvrir $\mathcal{C}(p, m+n) = \sum_{k=0}^p \mathcal{C}(k, m) \mathcal{C}(p-k, n)$ est aisé.

3.6. Une petite astuce pour Fibonacci. Pour la suite de Fibonacci, la règle de calcul est évidemment donnée par la relation de récurrence $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$, et pour les calculs intermédiaires, nous faisons apparaître ce qui a été soustrait à l'indice.

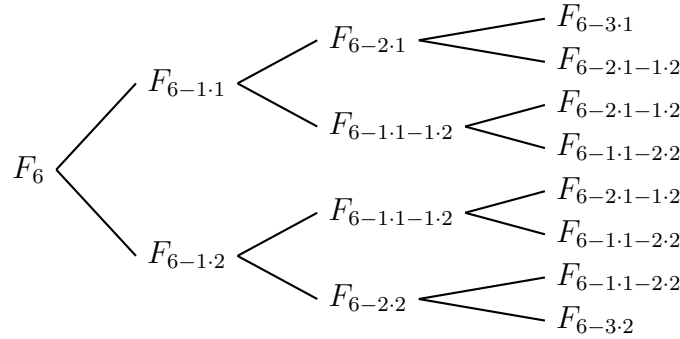
$$F_i \begin{cases} \nearrow F_{i-1} \\ \searrow F_{i-2} \end{cases}$$

Arbre de calcul.

$$F_{i-a-1-b-2} \begin{cases} \nearrow F_{i-(a+1)-1-b-2} \\ \searrow F_{i-a-1-(b+1)-2} \end{cases}$$

Un calcul intermédiaire.

Pour valider $F_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k$, nous considérons un arbre binaire de niveau de profondeur n , et de racine le terme F_{2n} . Ainsi, pour $n = 3$, nous obtenons l'arbre suivant.



Un exemple de calcul.

Aux feuilles de l'arbre, tout à droite, nous avons les termes $F_{2n-k-1-(n-k)-2} = F_k$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, donc $F_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k$ est validée.

Remarque 4. Plus généralement, nous avons $F_{m+2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{m+k}$ par simple décalage de tous les indices, puisque cette opération est compatible avec notre méthode de construction.

Remarque 5. Examinons ce que donne la relation de récurrence modifiée $F_{i-2} = F_i - F_{i-1}$, soit aussi $F_i = F_{i+2} - F_{i+1}$. La règle de calcul devient la suivante.

$$F_i \begin{cases} \nearrow F_{i+2} \\ \searrow -F_{i+1} \end{cases}$$

Arbre de calcul.

Un arbre de racine F_0 , et de profondeur n donne la jolie formule $F_0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} F_{2k+n-k}$, soit $1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} F_{n+k}$. Plus généralement, $F_m = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} F_{m+n+k}$. Quant à l'autre modification $F_{i-1} = F_i - F_{i-2}$, soit aussi $F_i = F_{i+1} - F_{i-1}$, elle donne la règle de calcul ci-dessous.

$$F_i \begin{cases} \nearrow F_{i+1} \\ \searrow -F_{i-1} \end{cases}$$

Arbre de calcul.

Un arbre de racine F_n , et de profondeur n donne la formule $F_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} F_{n+k-(n-k)}$, soit $F_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} F_{2k}$. Nous retombons sur la formule d'inversion de Pascal (voir le remarque 1) : choisir $a_n = F_n$ et $b_n = F_{2n}$.

Remarque 6. Considérons U une suite récurrente linéaire d'ordre 2, c'est-à-dire telle que $U_i = pU_{i-1} + qU_{i-2}$ avec $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. En mixant les idées pour la suite de Fibonacci avec celles utilisées pour la formule du binôme de Newton, voir les arbres ci-dessous, nous obtenons sans effort $U_{m+2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} U_{m+k}$, et donc $U_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} U_k$.

$$U_i \begin{cases} pU_{i-1} \\ qU_{i-2} \end{cases}$$

Arbre de calcul.

$$p^a q^b U_{i-a-1-b-2} \begin{cases} p^{a+1} q^b U_{i-(a+1)-1-b-2} \\ p^a q^{b+1} U_{i-a-1-(b+1)-2} \end{cases}$$

Un calcul intermédiaire.

Supposons $p \neq 0$ et $q \neq 0$. Via $U_{i-1} = p^{-1}(U_i - qU_{i-2})$, soit $U_i = p^{-1}U_{i+1} - p^{-1}qU_{i-1}$, il est rapide d'obtenir $U_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^{-n} (-q)^{n-k} U_{2k}$ (voir ci-dessous). Ceci est une instance de la formule d'inversion de Pascal : passer via $a_n = p^n q^{-n} U_n$ et $b_n = q^{-n} U_{2n}$.

$$U_i \begin{cases} p^{-1}U_{i+1} \\ -p^{-1}qU_{i-1} \end{cases}$$

Arbre de calcul.

3.7. Bell sonne la fin du jeu. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, notons B_i le nombre de façons de partitionner un ensemble de i éléments, et posons $B_0 = 1$ par convention. Commençons par exhiber un calcul récursif des B_i en reprenant des idées présentes dans l'article « *The largest singletons of set partitions* » de Yidong Sun et Xiaojuan Wu.³

- Pour $(n; p) \in \mathbb{N}^2$, notons \mathcal{B}_p^n le nombre de partitions de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ contenant le singleton $\{p+1\}$, et aucun singleton $\{k\}$ tel que $k > p+1$. De façon abusive, dans ce type de situation, nous dirons que $\{p+1\}$ est le plus grand singleton.⁴
- Notons que $\mathcal{B}_n^n = B_n$. En effet, l'existence du singleton maximal $\{n+1\}$ dans une partition de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ permet, en ignorant $\{n+1\}$, d'obtenir une partition de $\llbracket 1; n \rrbracket$. Cette construction est réversible, donc bijective.
- Le cas intéressant de \mathcal{B}_0^n est abordé dans la remarque 7 plus bas (nous n'aurons pas besoin de \mathcal{B}_0^n pour notre introduction aux nombres de Bell).
- Que pouvons-nous dire de \mathcal{B}_1^n lorsque $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$? Considérons une partition π de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ ayant $\{2\}$ comme singleton maximal. Deux cas se présentent à nous.
 - (1) **Cas 1 : $\{1\}$ fait partie de π .** En ignorant 1 et 2, et en remplaçant chaque naturel $k \in \llbracket 3; n+1 \rrbracket$ par $k-2 \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, nous obtenons une partition π' de $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$ sans aucun singleton.
 - (2) **Cas 2 : $\{1\}$ est absent de π .** Dans ce cas, $\{2\}$ est l'unique singleton de π . En ignorant 2, en transformant l'ensemble $\{1; k_1; \dots; k_s\}$ de π en $\{k_1\} \sqcup \dots \sqcup \{k_s\}$, et en remplaçant chaque naturel $k \in \llbracket 3; n+1 \rrbracket$ par $k-2 \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, nous obtenons une partition π' de $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$ avec pour singletons $\{k_1\}, \dots, \{k_s\}$ (on peut voir 1 comme un marqueur de singletons).

Les procédés ci-dessus étant réversibles, par bijection, nous obtenons : $\mathcal{B}_1^n = B_{n-1}$ lorsque $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Comme $\mathcal{B}_1^1 = 1$ et $B_0 = 1$, l'identité est valable sur \mathbb{N}^* .

- Plus généralement, considérons une partition π de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ ayant $\{p+1\}$ comme singleton maximal. Deux cas se présentent à nous.

3. Voir <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2010.10.011> sur le site ScienceDirect.

4. L'idée consiste à s'appuyer sur l'élément le plus simple qu'une partition puisse contenir : le singleton. Pour restreindre le nombre de cas à analyser, on choisit, arbitrairement, de se focaliser sur les singletons maximaux.

- (1) **Cas 1 : $\{p\}$ fait partie de π .** En ignorant $\{p+1\}$, et en remplaçant chaque naturel $k \in \llbracket p+2; n+1 \rrbracket$ par $k-1 \in \llbracket p+1; n \rrbracket$, nous obtenons une partition π' de $\llbracket 1; n \rrbracket$ ayant $\{p\}$ comme singleton maximal.
- (2) **Cas 2 : $\{p\}$ est absent de π .** En échangeant p et $(p+1)$, nous obtenons une partition π' de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ ayant $\{p\}$ comme singleton maximal.

Les procédés ci-dessus étant réversibles, par bijection, nous avons : $\mathcal{B}_p^n = \mathcal{B}_{p-1}^{n-1} + \mathcal{B}_{p-1}^n$.

En résumé, $B_n = \mathcal{B}_n^n = \mathcal{B}_1^{n+1}$ avec $\mathcal{B}_p^n = \mathcal{B}_{p-1}^n + \mathcal{B}_{p-1}^{n-1}$ et $\mathcal{B}_1^1 = 1$. Comme les relations de récurrence vérifiées par (\mathcal{B}_p^n) ressemblent à celles de la suite (C_p^n) , il devient évident de procéder comme suit.

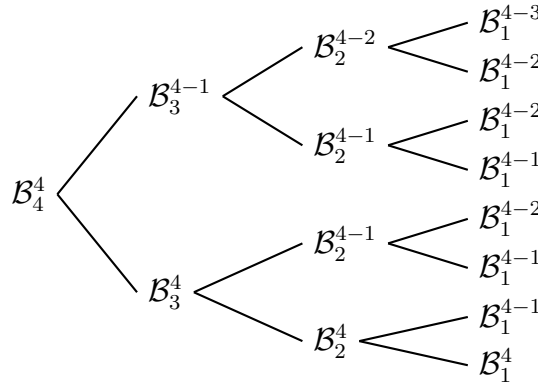
$$\mathcal{B}_p^n \begin{cases} \mathcal{B}_{p-1}^{n-1} \\ \mathcal{B}_{p-1}^n \end{cases}$$

Arbre de calcul.

$$\mathcal{B}_{k-b}^{n-a} \begin{cases} \mathcal{B}_{k-(b+1)}^{n-(a+1)} \\ \mathcal{B}_{k-(b+1)}^{n-a} \end{cases}$$

Un calcul intermédiaire.

Prenons $\mathcal{B}_{n+1}^{n+1} = B_{n+1}$ pour racine de l'arbre binaire comme dans l'exemple suivant où $n = 3$.



Un exemple de calcul.

Nous arrivons à $\mathcal{B}_{n+1}^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{B}_1^{n+1-k}$, soit $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}$. Comme $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, nous obtenons bien $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$.

Remarque 7. \mathcal{B}_0^n est le nombre de partitions de $\llbracket 1; n \rrbracket$ sans singleton. En effet, si $\{1\}$ est le singleton maximal d'une partition de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$, alors en ignorant $\{1\}$, et en remplaçant chaque naturel $k \in \llbracket 2; n+1 \rrbracket$ par $k-1 \in \llbracket 1; n \rrbracket$, nous obtenons une partition de $\llbracket 1; n \rrbracket$ sans singleton. Cette construction est réversible, donc bijective.

3.8. Généraliser aux coefficients multimoniaux. La méthode peut s'adapter aux cas d'un arbre m -aire. Par exemple, ce qui suit nous donne la formule de Liebniz pour trois fonctions : $(fgh)^{(n)} = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \binom{n}{k_1 \ k_2 \ k_3} f^{(k_1)} g^{(k_2)} h^{(k_3)}$ où $\binom{n}{k_1 \ k_2 \ k_3}$ compte le nombre de chemins avec k_1 déplacements vers le haut, k_2 déplacements vers le milieu, et k_3 déplacements vers le bas.

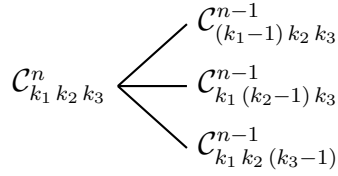
$$uvw \begin{cases} u'vw \\ uv'w \\ uvw' \end{cases}$$

Arbre de calcul.

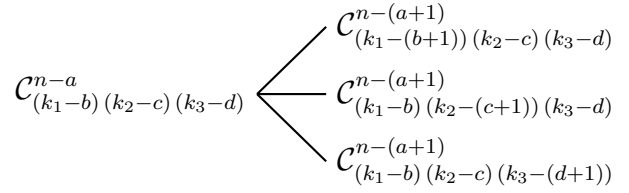
$$f^{(a)} g^{(b)} h^{(c)} \begin{cases} f^{(a+1)} g^{(b)} h^{(c)} \\ f^{(a)} g^{(b+1)} h^{(c)} \\ f^{(a)} g^{(b)} h^{(c+1)} \end{cases}$$

Un calcul intermédiaire.

Notant $\mathcal{C}_{k_1 \ k_2 \ k_3}^n = \frac{n!}{k_1! k_2! k_3!}$ où $k_1 + k_2 + k_3 = n$, nous avons $\binom{n}{k_1 \ k_2 \ k_3} = \frac{n!}{k_1! k_2! k_3!}$ via ce qui suit.

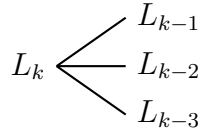


Arbre de calcul.

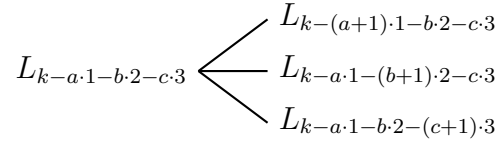


Un calcul intermédiaire.

Par contre, si la suite L est telle que $L_i = L_{i-1} + L_{i-2} + L_{i-3}$, ce qui suit ne sera pas aussi pertinent que ce que nous avons obtenu pour la suite de Fibonacci : le problème ici est qu'aboutir à $L_{3n-k_1-1-k_2-2-k_3-3} = L_{3n-k_1-2k_2-3(n-k_1-k_2)} = L_{2k_1-k_2}$ est peu intéressant.



Arbre de calcul.



Un calcul intermédiaire.

4. LA FORMULE DU BINÔME DE NEWTON IMPLIQUE...

4.1. Un classique des identités algébriques. Dans cette section, nous changeons de point de vue : nous allons partir du fait très classique suivant pour donner un éclairage différent sur les identités exhibées dans la section 1.

Fait 8. Soit \mathbb{A} un anneau, forcément unitaire,⁵ qui est commutatif. Dans l'anneau des polynômes à deux variables $\mathbb{A}[X, Y]$, nous avons : $\forall n \in \mathbb{N}, (X + Y)^n = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) X^k Y^{n-k}$. Ceci est la formule générique du binôme de Newton.

Démonstration. Il suffit d'écrire $(X + Y)^n = \prod_{k=1}^n (X + Y)_k$ avec des indices étiquetant les parenthèses dont les positions sont fixées dans le produit. En distribuant parenthèse par parenthèse de gauche à droite, le nombre de $X^k Y^{n-k}$ obtenus correspond au nombre de choix de k parenthèses, pour X , parmi les n disponibles, ce qui donne $\mathcal{C}(k, n)$ possibilités. \square

Dans les applications à venir, nous allons nous appuyer sur la formule suivante appliquée dans différents anneaux bien choisis.

Fait 9. Soit \mathbb{A} un anneau commutatif. $\forall (a, b) \in \mathbb{A}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) a^k b^{n-k}$.

Démonstration. Il suffit d'évaluer en (a, b) la formule générique du binôme de Newton. \square

4.2. La loi binomiale est algébrique. Nous souhaitons établir la loi binomiale sous la forme $P(X = j) = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) p^k q^{n-k} \delta_{jk}$ où X est la variable aléatoire (v.a.) comptant le nombre de succès de probabilité p ($q = 1 - p$). Notons X_i la v.a. comptant le nombre de succès de la i^{e} épreuve de Bernoulli du schéma de Bernoulli associé à X . Dès lors, $X = \sum_{s=1}^n X_s$ où $(X_s)_{1 \leq s \leq n}$ forme une famille de v.a. indépendantes deux à deux ayant chacune pour loi de probabilité $P(X_s = j) = p\delta_{1j} + q\delta_{0j}$. Nous posons $f_X : j \in \mathbb{Z} \mapsto P(X = j) \in [0; 1]$, de sorte que $f_{X_s} = p\delta_1 + q\delta_0$ en notant $\delta_k(j) = \delta_{kj}$. A-t-on un lien entre f_X et $(f_{X_s})_{1 \leq s \leq n}$? La réponse est oui, mais cela va nécessiter de passer par le produit de convolution. Par exemple, avec deux épreuves, nous avons ce qui suit.

5. Il fut un temps où un anneau n'avait pas forcément un élément neutre pour le produit.

$$\begin{aligned}
f_X(j) &= P(X_1 + X_2 = j) \\
&= \sum_{k=0}^2 P((X_1 = k) \cap (X_2 = j - k)) \\
&= \sum_{k=0}^2 P(X_1 = k) P(X_2 = j - k) \\
&= \sum_{k+m=j} P(X_1 = k) P(X_2 = m) \\
&= \sum_{k+m=j} f_{X_1}(k) f_{X_2}(m)
\end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont des v.a. indépendantes.} \\ \text{On écrit juste } k + m = j \text{ sans } (k, m) \in \mathbb{Z}^2. \end{array} \right\}$

Ceci motive la définition suivante.

Définition 10. Notons $\mathbb{A} = \ell_+(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles indexées sur \mathbb{Z} et à support minoré.⁶ Pour $(f, g) \in \mathbb{A}^2$, nous pouvons définir π sur \mathbb{Z} par $\pi(j) = \sum_{k+m=j} f(k)g(m)$ (cette somme est finie).⁷ La suite π est appelée « produit de convolution » de f et g , et notée $f * g$.

Fait 11. $\mathbb{A} = \ell_+(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ muni de l'addition + point par point, et du produit de convolution $*$ est un anneau commutatif.

Démonstration. Nous devons juste vérifier les propriétés portant sur le produit de convolution.

- (1) Clairement, $\forall (f, g, h) \in \mathbb{A}^3$, nous avons $f * g = g * f$ et $(f + g) * h = f * h + g * h$.
- (2) L'élément neutre $1_{\mathbb{A}}$ pour $*$ doit vérifier : $\forall j \in \mathbb{Z}$, $f(j) = \sum_{k+m=j} f(k)1_{\mathbb{A}}(m)$. Il est aisé de deviner que $1_{\mathbb{A}} = \delta_0$ convient, où $\delta_0(j) = \delta_{0j}$.
- (3) La validation de $(f * g) * h = f * (g * h)$ pour $(f, g, h) \in \mathbb{A}^3$ se fait comme suit.

$$\begin{aligned}
&((f * g) * h)(j) & \left| \begin{array}{l} (f * (g * h))(j) \\ = \sum_{k+m=j} f(k)(g * h)(m) \\ = \sum_{k+m=j} \sum_{q+r=m} f(k)g(q)h(r) \\ = \sum_{k+q+r=j} f(k)g(q)h(r) \end{array} \right. \\
&= \sum_{k+m=j} (f * g)(k)h(m) \\
&= \sum_{k+m=j} \sum_{q+r=k} f(q)g(r)h(m) \\
&= \sum_{q+r+m=j} f(q)g(r)h(m) & \quad \square
\end{aligned}$$

L'application de la formule du binôme de Newton nous donne ce qui suit.

$$\begin{aligned}
P(X = j) &= f_X(j) \\
&= f_{X_1 + \dots + X_n}(j) \\
&= (f_{X_1} * \dots * f_{X_n})(j) \\
&= ((p\delta_1 + q\delta_0) * \dots * (p\delta_1 + q\delta_0))(j) \\
&= (p\delta_1 + q\delta_0)^n(j) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) p^k q^{n-k} \delta_1^k * \delta_0^{n-k} \right)(j) \\
&= \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) p^k q^{n-k} \delta_1^k(j)
\end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{On généralise sans souci l'identité qui} \\ \text{a motivé l'introduction de la convolution.} \\ \text{La puissance est relative à } *. \\ \delta_0 \text{ est l'élément neutre pour } *. \end{array} \right\}$

Pour conclure, nous devons simplifier $\delta_1^k(j)$. Une petite récurrence donne $\delta_1^k = \delta_k$. Nous donnons juste les deux grandes étapes du raisonnement.

6. Ceci signifie que $\forall f \in \mathbb{A}$, $\exists m_f \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall j \in \mathbb{Z}_{\leq m_f}$, $f(j) = 0$.

7. $f(k) = 0$ si $k \leq m_f$, $g(m) = 0$ si $m \leq m_g$ et $k + m = j$ impliquent $f(k)g(m) = 0$ si $j - m_g \leq k$ et $k \leq m_f$, c'est-à-dire pour un nombre fini de valeurs de j , et par conséquent de m .

- **Cas de base.** δ_1^0 est l'élément neutre pour $*$, donc $\delta_1^0 = \delta_0$.
- **Hérédité.** Supposons avoir $\delta_1^n = \delta_n$. Nous avons alors les égalités suivantes.

$$\begin{aligned}\delta_1^{n+1}(j) &= (\delta_1^n * \delta_1)(j) \\ &= (\delta_n * \delta_1)(j) \\ &= \sum_{k+m=j} \delta_n(k) \delta_1(m)\end{aligned}$$

Dès lors, $\delta_1^{n+1}(j) = 1$ si $j = n + 1$, et 0 sinon. Ceci donne $\delta_1^{n+1} = \delta_{n+1}$ comme souhaité.

Finalement, $P(X = j) = \sum_{k=0}^n C(k, n) p^k q^{n-k} \delta_k(j)$, soit $P(X = j) = \sum_{k=0}^n C(k, n) p^k q^{n-k} \delta_{jk}$.

4.3. Leibniz, le retour. Notre objectif est d'obtenir $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C(k, n) f^k(x) g^{n-k}(x)$. Comme nous souhaitons dériver autant de fois que nécessaire, cette opération de dérivation étant linéaire, et comme de plus nous considérons deux fonctions, il est naturel d'introduire les objets suivants.

- $\pi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x)g(y) \in \mathbb{R}$. Ceci permet de « *singulariser* » les fonctions f et g .
- $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions infiniment dérivables de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .⁸
- $\mathbb{A} = \text{End}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$ est l'ensemble des endomorphismes linéaires de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ muni de l'addition + point par point, et de la composition \circ comme produit.
- $\frac{\partial}{\partial x} \in \mathbb{A}$ et $\frac{\partial}{\partial y} \in \mathbb{A}$ sont les dérivations partielles relativement aux première et deuxième coordonnées respectivement.

Pour utiliser le fait 9, nous devons avoir $\frac{\partial}{\partial x} \circ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \circ \frac{\partial}{\partial x}$. Le théorème de Schwarz nous dit que c'est bien le cas sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Nous obtenons alors $(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})^n = \sum_{k=0}^n C(k, n) \frac{\partial^k}{\partial x^k} \circ \frac{\partial^{n-k}}{\partial y^{n-k}}$ selon la formule du binôme de Newton. Il nous reste à revenir dans le monde des fonctions à une seule variable. Pour ce faire, considérons $\Lambda \in \mathbb{A}$ qui à $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ associe $\Lambda(h)$ définie sur \mathbb{R}^2 par $\Lambda(h)(x, y) = h(x, x)$. Nous avons la propriété de commutativité essentielle suivante.

$$\begin{aligned}\bullet \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \circ \Lambda(h)(x, y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) (h(x, x)) \\ &= \frac{\partial h}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial h}{\partial y} h(x, x) \\ \bullet \Lambda \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) (h(x, y)) &= \Lambda \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial h}{\partial y} h(x, y) \right) \\ &= \frac{\partial h}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial h}{\partial y} h(x, x)\end{aligned}$$

La conclusion se fait alors via les calculs ci-dessous.

8. Si besoin, il est possible de modifier cet ensemble tant que cela n'enfreint pas le théorème de Schwarz qui va être essentiel pour la suite.

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n)}(x) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^n (f(x)g(y)) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^n \circ \Lambda(\pi)(x, y) \\
&= \Lambda \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^n (\pi)(x, y) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \Lambda \text{ et } \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ commutent.} \\
&= \Lambda \circ \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) \frac{\partial^k}{\partial x^k} \circ \frac{\partial^{n-k}}{\partial y^{n-k}}\right) (f(x)g(y)) \\
&= \Lambda \circ \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) f^k(x) g^{n-k}(y)\right) \\
&= \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) f^k(x) g^{n-k}(x)
\end{aligned}$$

4.4. Coefficients factoriels et combinatoires. Nos objectifs ici sont $\binom{n}{p} = \mathbb{C}(p, n) = \mathcal{C}_p^n$, puis $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$. Pour les atteindre, nous allons commencer avec les coefficients factoriels qui vérifient $\mathcal{C}_0^0 = 1$, $\mathcal{C}_p^0 = 0$ si $p \neq 0$ et $\mathcal{C}_p^n = \mathcal{C}_p^{n-1} + \mathcal{C}_{p-1}^{n-1}$ sur \mathbb{Z}^2 . Reprenant les notations de la section précédente, la relation de récurrence se réécrit $\mu_1^1(\mathcal{C}) = \mu_1^0(\mathcal{C}) + \mathcal{C}$. Nous aboutissons aux calculs suivants.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{C}_{p+n}^{m+n})_{(p,m) \in \mathbb{Z}^2} &= (\mu_1^1)^n(\mathcal{C}) \\
&= (\mu_1^0 + \text{id})^n(\mathcal{C}) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (\mu_1^0)^k \circ \text{id}^{n-k}\right)(\mathcal{C}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \mu_1^0 \text{ et id commutent.} \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) \mu_k^0\right)(\mathcal{C}) \\
&= \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) \mu_k^0(\mathcal{C}) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) \mathcal{C}_{p+k}^m\right)_{(p,m) \in \mathbb{Z}^2}
\end{aligned}$$

En choisissant $(p, m) = (0, n)$, nous obtenons $\mathcal{C}_n^{2n} = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) \mathcal{C}_k^n$. Justifions maintenant que $\mathcal{C}_p^n = \mathbb{C}(p, n)$. Pour ce faire, réécrivons $\mu_1^1(\mathcal{C}) = \mu_1^0(\mathcal{C}) + \mathcal{C}$ sous la forme $\mathcal{C} = \mu_0^{-1}(\mathcal{C}) + \mu_{-1}^{-1}(\mathcal{C})$ afin de mener les calculs suivants.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{C}_p^m)_{(p,m) \in \mathbb{Z}^2} &= \mathcal{C} \\
&= (\mu_0^{-1} + \mu_{-1}^{-1})^n(\mathcal{C}) \\
&= (\mu_{-1}^{-1} + \mu_0^{-1})^n(\mathcal{C}) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (\mu_{-1}^{-1})^k \circ (\mu_0^{-1})^{n-k}\right)(\mathcal{C}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Cette petite modification va permettre} \\ \text{d'arriver directement à notre but.} \\ \mu_0^{-1} \text{ et } \mu_{-1}^{-1} \text{ commutent.} \end{array} \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) \mu_{-k}^{-1} \circ \mu_0^{-n+k}\right)(\mathcal{C})
\end{aligned}$$

Continuons nos calculs.

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{C}_p^m)_{(p,m) \in \mathbb{Z}^2} &= \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mu_{-k}^{-n} \right) (\mathcal{C}) \\
 &= \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mu_{-k}^{-n} (\mathcal{C}) \\
 &= \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mathcal{C}_{p-k}^{m-n} \right)_{(p,m) \in \mathbb{Z}^2}
 \end{aligned}$$

En considérant $m = n$ et $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, nous obtenons $\mathcal{C}_p^n = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mathcal{C}_{p-k}^0 = \mathcal{C}(p, n)$. Ensuite, il est aisé d'obtenir $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ en raisonnant juste sur des arbres binaires. Nous pouvons donc reprendre ce qui précède pour obtenir $\binom{n}{p} = \mathcal{C}(p, n)$ via la formule du binôme de Newton. Finalement, $\binom{n}{p} = \mathcal{C}(p, n) = \mathcal{C}_p^n$ permet de réécrire $\mathcal{C}_n^{2n} = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \mathcal{C}_k^n$ sous la forme $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k}$.

Remarque 12. En partant de $\mathcal{C} = \mu_1^1(\mathcal{C}) - \mu_1^0(\mathcal{C})$, via des calculs similaires à ceux menés pour la suite \mathcal{B} , nous arrivons à $\mathcal{C}_p^m = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (-1)^{n-k} \mathcal{C}_{p+n}^{m+k}$ qui fournit la triviale identité $1 = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{n}$ via $(p, m) = (0, 0)$.⁹ Quant au choix $\mu_1^0(\mathcal{C}) = \mu_1^1(\mathcal{C}) - \mathcal{C}$, il donne $\mathcal{C}_{p+n}^m = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) (-1)^{n-k} \mathcal{C}_{p+k}^{m+k}$, puis l'identité non immédiate $1 = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$ via $(p, m) = (0, n)$.

4.5. Fibonacci via Newton. Notre objectif est d'obtenir $F_{m+2n} = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) F_{m+k}$ où la suite de Fibonacci F vérifie la relation de récurrence $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$. Comme pour l'identité de Leibniz, nous allons raisonner en terme d'opérateurs linéaires via les ingrédients naturels suivants.

- $\ell(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des suites réelles indexées sur \mathbb{Z} .¹⁰
- $\mathbb{A} = \text{End}(\ell(\mathbb{Z}, \mathbb{R}))$ est l'ensemble des endomorphismes linéaires de $\ell(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ muni de l'addition $+$ point par point, et de la composition \circ comme produit.
- $\sigma_k \in \mathbb{A}$ désigne pour $k \in \mathbb{Z}$ un opérateur de décalage d'indice qui à la suite $(U_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ associe la suite $(U_{m+k})_{m \in \mathbb{Z}}$.¹¹

Prolongeons F sur \mathbb{Z}_-^* en posant $F_i = 0$, de sorte que $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ reste valable sur \mathbb{Z} , et se réécrit $\sigma_2(F) = \sigma_1(F) + F$. Dès lors, la conclusion se fait comme suit sans souci.

$$\begin{aligned}
 (F_{m+2n})_{m \in \mathbb{Z}} &= \sigma_2^n(F) \\
 &= (\sigma_1 + \text{id})^n(F) && \left. \begin{array}{l} \text{id est l'application identité sur } \ell(\mathbb{Z}, \mathbb{R}). \\ \sigma_1 \text{ et id commutent.} \end{array} \right\} \\
 &= \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \sigma_1^k \circ \text{id}^{n-k} \right) (F) \\
 &= \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \sigma_k \right) (F) \\
 &= \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) \sigma_k(F) \\
 &= \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{C}(k, n) F_{m+k} \right)_{m \in \mathbb{Z}}
 \end{aligned}$$

Remarque 13. En considérant $F = \sigma_2(F) - \sigma_1(F)$, nous pouvons conduire les calculs suivants.

9. L'auteur craque, mais il assume son double zéro pointé.

10. Si besoin, \mathbb{R} peut être remplacé par un anneau commutatif de son choix.

11. En considérant $\ell(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, nous aurions eu un problème ici.

$$\begin{aligned}
(F_m)_{m \in \mathbb{Z}} &= (\sigma_2 - \sigma_1)^n(F) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} \sigma_2^k \circ \sigma_1^{n-k} \right) (F) \quad \left. \vphantom{\sum_{k=0}^n} \right\} \sigma_1 \text{ et } \sigma_2 \text{ commutent.} \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} \sigma_{n+k} \right) (F) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} F_{m+n+k} \right)_{m \in \mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

Nous obtenons sans effort $F_m = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} F_{m+n+k}$. En partant de $\sigma_1(F) = \sigma_2(F) - F$, nous arrivons aux manipulations ci-dessous.

$$\begin{aligned}
(F_{m+n})_{m \in \mathbb{Z}} &= (\sigma_1)^n(F) \\
&= (\sigma_2 - \text{id})^n(F) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} \sigma_{2k} \right) (F) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} F_{m+2k} \right)_{m \in \mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

Le choix $m = 0$ fournit $F_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} F_{2k}$ qui correspond à l'utilisation de la formule d'inversion de Pascal (voir le fait ??).

Remarque 14. La généralisation à une suite récurrente vérifiant $U_i = pU_{i-1} + qU_{i-2}$ ne pose pas de difficulté via $\sigma_2(U) = p\sigma_1(U) + qU$. Nous obtenons par exemple $U_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} U_k$. Si $p \neq 0$ et $q \neq 0$, alors $\sigma_1(U) = p^{-1}(\sigma_2(U) - qU)$ donne $U_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) p^{-n} (-q)^{n-k} U_{2k}$ via $U_{m+n} = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) p^{-n} (-q)^{n-k} U_{m+2k}$.

4.6. Bell en écho de Fibonacci. Notre objectif est d'obtenir $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) B_k$, où $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne la suite des nombres de Bell. Indépendamment de la technique spécifique à la section 3, nous savons que ceci équivaut à démontrer que $\mathcal{B}_{n+1}^{n+1} = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) \mathcal{B}_1^{k+1}$, où $\mathcal{B}_n^n = \mathcal{B}_1^{n+1} = B_n$, $\mathcal{B}_p^n = \mathcal{B}_{p-1}^n + \mathcal{B}_{p-1}^{n-1}$ et $\mathcal{B}_1^1 = 1$, avec \mathcal{B} une suite doublement indexée sur \mathbb{N}^2 . Inspiré par la suite de Fibonacci, nous introduisons les ingrédients suivants.

- $\ell(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des suites réelles doublement indexées sur \mathbb{Z}^2 .¹²
- $\mathbb{A} = \text{End}(\ell(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R}))$ est l'ensemble des endomorphismes linéaires de $\ell(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R})$ muni de l'addition + point par point, et de la composition \circ comme produit.
- $\mu_a^b \in \mathbb{A}$ désigne pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ un opérateur de décalage qui à la suite $(w_p^m)_{(p,m) \in \mathbb{Z}^2}$ associe la suite $(w_{p+a}^{m+b})_{(p,m) \in \mathbb{Z}^2}$.

Prolongeons \mathcal{B} sur $\mathbb{Z}^2 - \mathbb{N}^2$ en posant $\mathcal{B}_p^n = 0$, de sorte que $\mathcal{B}_p^n = \mathcal{B}_{p-1}^n + \mathcal{B}_{p-1}^{n-1}$ reste valable sur \mathbb{Z}^2 , et se réécrit $\mu_1^1(\mathcal{B}) = \mu_0^1(\mathcal{B}) + \mathcal{B}$.¹³ La formule du binôme de Newton nous donne ce qui suit.

12. Ici aussi, si besoin, \mathbb{R} peut être remplacé par un anneau commutatif de son choix.

13. Noter la ressemblance avec $\mu_1^1(\mathcal{C}) = \mu_1^0(\mathcal{C}) + \mathcal{C}$.

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{B}_{p+n}^{m+n})_{(p,m) \in \mathbb{Z}^2} &= (\mu_1^1)^n(\mathcal{B}) \\
 &= (\mu_0^1 + \text{id})^n(\mathcal{B}) \\
 &= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (\mu_0^1)^k \circ \text{id}^{n-k} \right) (\mathcal{B}) \\
 &= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) \mu_0^k \right) (\mathcal{B}) \\
 &= \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) \mu_0^k(\mathcal{B}) \\
 &= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) \mathcal{B}_p^{m+k} \right)_{(p,m) \in \mathbb{Z}^2}
 \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{id est l'application identité sur } \ell(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R}). \\ \mu_0^1 \text{ et id commutent.} \end{array} \right\}$

Pour conclure, il suffit de choisir $p = m = 1$.

Remarque 15. Comme pour la suite de Fibonacci, il est aisé de produire de nouvelles formules de récurrence. Partons de $\mu_0^1(\mathcal{B}) = \mu_1^1(\mathcal{B}) - \mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{B}_p^{m+n})_{(p,m) \in \mathbb{Z}^2} &= (\mu_0^1)^n(\mathcal{B}) \\
 &= (\mu_1^1 - \text{id})^n(\mathcal{B}) \\
 &= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} \mu_k^k \right) (\mathcal{B}) \\
 &= \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} \mathcal{B}_{p+k}^{m+k} \right)_{(p,m) \in \mathbb{Z}^2}
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}_p^{m+n} = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} \mathcal{B}_{p+k}^{m+k}$, puis $\mathcal{B}_0^n = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} \mathcal{B}_k^k$ en considérant $(p, m) = (0, 0)$, c'est-à-dire $\mathcal{B}_0^n = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} B_k$. Un autre cas d'utilisation intéressant de la formule précédente est celui pour lequel $(p, m) = (1, 1)$, car ceci fait apparaître $\mathcal{B}_1^{n+1} = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} \mathcal{B}_{k+1}^{k+1}$, soit $B_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}(k, n) (-1)^{n-k} B_{k+1}$ qui est une instance de la formule d'inversion de Pascal (voir le fait ??).

5. SOURCES UTILISÉES

Voici les sources utilisées lors de la rédaction de ce document.

- « *The largest singletons of set partitions* » de Yidong Sun et Xiaojuan Wu, en ligne : <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2010.10.011> sur le site ScienceDirect.
- Les lignes sur l'utilisation de la formule du binôme de Newton dans différents anneaux doivent leur existence à la lecture du post suivant qui restait consultable en ligne le 12 avril 2025 : <https://pierreallkenbernard.wordpress.com/2011/06/26/binome-de-newton-formule-de-leibniz-loi-binomiale>.