

# BROUILLON – NEWTON, BERNOULLI, LEIBNIZ, FIBONACCI ET BELL

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



## TABLE DES MATIÈRES

1.	Des identités bien connues	2
2.	La loi binomiale révèle...	2
2.1.	De l’utilité des arbres	2
2.2.	Directement vers le binôme de Newton	3
2.3.	Leibniz sans effort	3
2.4.	Une petite astuce pour Fibonacci	4
2.5.	Avec des coefficients binomiaux	4
2.6.	Bell sonne la fin du jeu	5

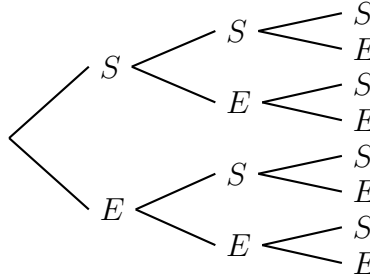
## 1. DES IDENTITÉS BIEN CONNUES

Les formules suivantes intriguent par leur ressemblance. Bien qu'elles appartiennent à des domaines distincts, leur similitude n'est pas le fruit du hasard. À travers deux approches différentes, l'une discrète, et l'autre algébrique, nous révélerons les liens combinatoires unissant ces divers objets.

- **Formule du binôme de Newton** :  $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ .
- **Formule de dérivation de Leibniz** :  $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$ .
- **Loi binomiale** :  $P(X = j) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_{jk}$ ,<sup>1</sup> même s'il est d'usage de juste écrire  $P(X = j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$ .
- **Une identité portant sur la suite de Fibonacci** :  $F_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k$ .
- **Une formule similaire pour les coefficients binomiaux** :  $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k}$ .
- **Une équation liant les nombres de Bell** :  $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$  où  $B_i$  est le nombre de façons de partitionner un ensemble de  $i$  éléments.<sup>2</sup>

## 2. LA LOI BINOMIALE RÉVÈLE...

**2.1. De l'utilité des arbres.** Lorsque l'on présente la loi binomiale, il est courant d'utiliser un arbre de probabilité comme le suivant où  $S$  désigne un succès et  $E$  un échec, un succès ayant une probabilité  $p$  de se réaliser (ici nous avons 3 niveaux de profondeur).



**Définition 1.**  $\binom{n}{k}$  désigne le nombre de chemins avec exactement  $k$  succès dans la version générale à  $n$  niveaux de profondeur de l'arbre précédent.

**Remarque 2.** Dans le début de ce document, nous n'utiliserons ni la définition combinatoire de  $\binom{n}{k}$  via les sous-ensembles à  $k$  éléments, ni la formule factorielle de  $\binom{n}{k}$ .

Notons  $X$  la variable aléatoire comptant le nombre de succès, ainsi que  $q = 1 - p$ . Pour justifier que  $P(X = j) = \binom{n}{j} p^j q^{n-j}$ , soit  $P(X = j) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_{jk}$ , nous allons nous concentrer sur les bifurcations lors du parcours de l'arbre de gauche à droite. L'arbre de calcul ci-dessous à gauche traduit que si l'on va vers un succès, la probabilité en cours est multipliée par  $p$ , et sinon c'est  $q$  qui est appliqué. Ceci nous donne des calculs intermédiaires à chaque bifurcation comme montré ci-dessous à droite.

$$x \begin{cases} px \\ qx \end{cases}$$

Arbre de calcul.

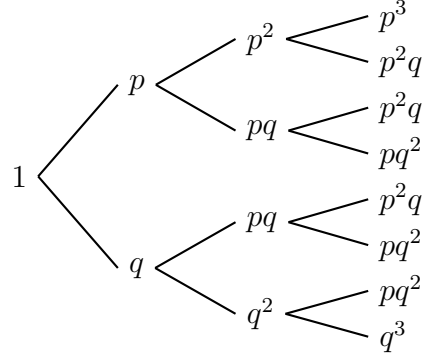
$$p^a q^b \begin{cases} p^{a+1} q^b \\ p^a q^{b+1} \end{cases}$$

Un calcul intermédiaire.

1.  $\delta_{jk}$  est le symbole de Kronecker valant 1 si  $j = k$ , et 0 sinon, tandis que  $X$  désigne la variable aléatoire comptant le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli de paramètre  $(n; p)$ .

2. Par exemple,  $B_3 = 5$ , car l'ensemble  $\{a, b, c\}$  admet les partitions  $\{a, b, c\}$ ,  $\{a\} \cup \{b, c\}$ ,  $\{b\} \cup \{a, c\}$ ,  $\{c\} \cup \{a, b\}$  et  $\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$ .

Considérons maintenant un arbre binaire de niveau de profondeur  $n$ . En partant de la racine, à gauche, avec la valeur 1, l'application de la règle de calcul donne  $P(X = j) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_{jk}$ . Voici un exemple de calcul avec  $n = 3$ .



*Un exemple de calcul.*

La méthode que nous venons de présenter est généralisable à d'autres contextes comme nous allons le constater dans la suite de ce document.

**2.2. Directement vers le binôme de Newton.** Pour développer  $(x + y)^n$ , la brique de base est la distribution indiquée dans l'arbre de calcul ci-dessous à gauche, ceci nous donnant des calculs intermédiaires comme celui montré ci-dessous à droite.

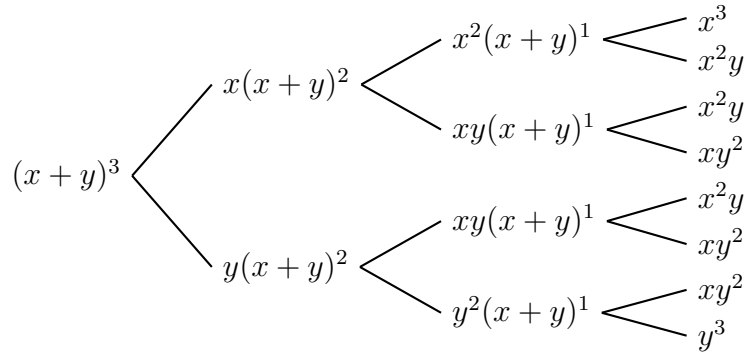
$$(x + y)f(x; y) \begin{cases} xf(x; y) \\ yf(x; y) \end{cases}$$

*Arbre de calcul.*

$$x^a y^b (x + y)^k \begin{cases} x^{a+1} y^b (x + y)^{k-1} \\ x^a y^{b+1} (x + y)^{k-1} \end{cases}$$

*Un calcul intermédiaire.*

En considérant un arbre binaire de niveau de profondeur  $n$ , et avec pour racine l'expression  $(x + y)^n$ , l'application répétée de la règle de calcul donne la formule du binôme de Newton  $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ . Voici un exemple de calcul avec  $n = 3$ .



*Un exemple de calcul.*

**2.3. Leibniz sans effort.** Pour la formule de dérivation de Leibniz, comme la dérivation est une fonctionnelle linéaire, la brique de base est la classique formule de dérivation d'un produit, voir ci-dessous à gauche. Les calculs intermédiaires sont de la forme indiquée ci-dessous à droite.

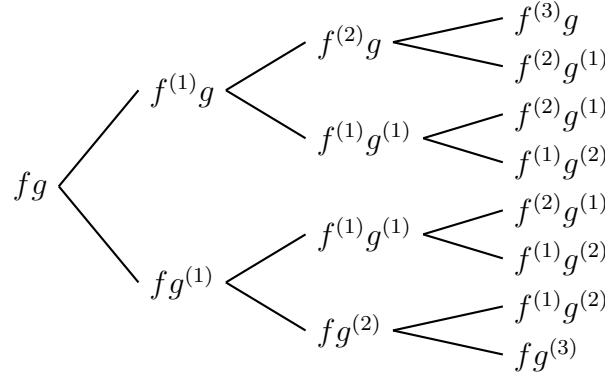
$$uv \begin{cases} u'v \\ uv' \end{cases}$$

*Arbre de calcul.*

$$f^{(a)} g^{(b)} \begin{cases} f^{(a+1)} g^{(b)} \\ f^{(a)} g^{(b+1)} \end{cases}$$

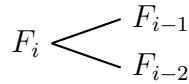
*Un calcul intermédiaire.*

En considérant un arbre binaire de niveau de profondeur  $n$ , et avec pour racine la fonction produit  $fg$ , l'application répétée de la règle de calcul donne la formule de dérivation de Liebniz  $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$ . Voici un exemple de calcul avec  $n = 3$ .

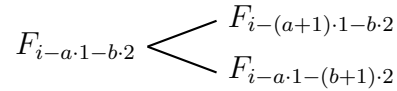


*Un exemple de calcul.*

**2.4. Une petite astuce pour Fibonacci.** Pour la suite de Fibonacci, la règle de calcul est évidemment donnée par la relation de récurrence  $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ , et pour les calculs intermédiaires, nous faisons apparaître ce qui a été soustrait à l'indice.

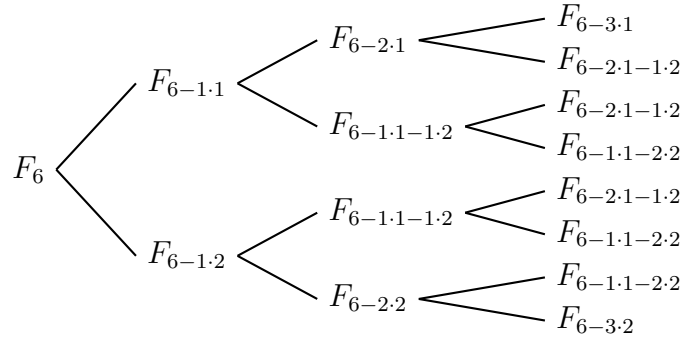


*Arbre de calcul.*



*Un calcul intermédiaire.*

Pour valider  $F_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k$ , nous considérons un arbre binaire de niveau de profondeur  $n$ , et avec pour racine le terme  $F_{2n}$ . Ainsi, pour  $n = 3$ , nous obtenons l'arbre suivant.

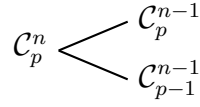


*Un exemple de calcul.*

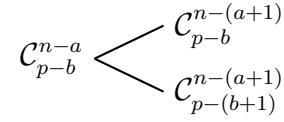
Aux feuilles de l'arbre, tout à droite, nous avons les termes  $F_{2n-k-1-(n-k)-2} = F_k$  pour  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , donc  $F_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k$  est validée.

**Remarque 3.** Plus généralement, nous avons  $F_{m+2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{m+k}$  par simple décalage de tous les indices, puisque cette opération est compatible avec notre méthode de construction.

**2.5. Avec des coefficients binomiaux.** Définissons  $\mathcal{C}_p^n$  sur  $\mathbb{Z}^2$  par  $\mathcal{C}_p^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  si  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , et  $\mathcal{C}_p^n = 0$  dans les autres cas. Nous allons démontrer que  $\mathcal{C}_p^n = \binom{n}{p}$  si  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$ . Pour cela, notons que  $\mathcal{C}_p^n = \mathcal{C}_p^{n-1} + \mathcal{C}_{p-1}^{n-1}$  : c'est facile à vérifier pour les valeurs non nulles de  $\mathcal{C}_p^n$ , et ensuite à généraliser aux cas restants. Ceci nous amène à considérer la situation suivante.

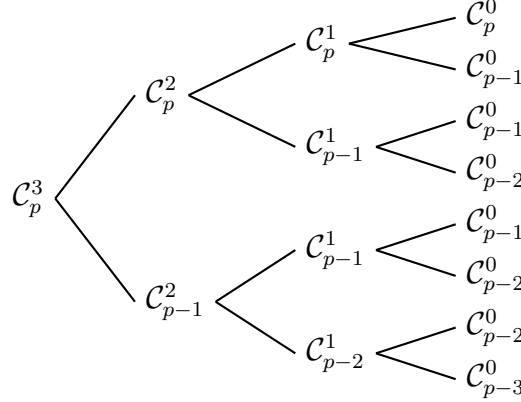


Arbre de calcul.



Un calcul intermédiaire.

Nous considérons alors l'arbre binaire de niveau de profondeur  $n$  avec pour racine le terme  $\mathcal{C}_p^n$  doublement indexé par  $n$  et  $k$ . Ainsi, pour  $n = 3$  et  $p \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$ , nous obtenons l'arbre suivant où les feuilles sont toutes du type  $\mathcal{C}_p^0$ .



Un exemple de calcul.

Nous obtenons donc  $\mathcal{C}_p^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{C}_{p-k}^0$ . Or, pour  $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , la somme de droite se réduit à  $\binom{n}{p} \mathcal{C}_p^0$ , d'où  $\mathcal{C}_p^n = \binom{n}{p}$  comme annoncé. Dès lors, l'identité  $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$ , soit de façon équivalente  $\mathcal{C}_n^{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{C}_{n-k}^n$ , se démontre en considérant un arbre de racine  $\mathcal{C}_n^{2n}$  qui donne  $\mathcal{C}_n^{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{C}_{n-k}^{2n-n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{C}_{n-k}^n$  comme souhaité.

**Remarque 4.** Notant  $\mathcal{C}(n; p)$  le nombre de sous-ensembles à  $p$  élément d'un ensemble  $\mathcal{E}$  de cardinal  $n$ , il est immédiat de voir que  $\mathcal{C}(n; p) = \mathcal{C}(n-1; p) + \mathcal{C}(n-1; p-1)$  si  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$ .<sup>3</sup> Comme pour  $\mathcal{C}_p^n$ , nous avons alors  $\mathcal{C}(n; p) = \binom{n}{p}$  si  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$ . Une fois ceci démontré, il est très facile de deviner que  $\mathcal{C}(2n; n) = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}(n; k) \mathcal{C}(n; n-k)$  en partageant  $\mathcal{E}$  en deux sous-ensembles particuliers disjoints de cardinal  $n$ , choisis et fixés arbitrairement.

**Remarque 5.** L'identité  $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$  est un cas particulier de la formule de Van der Monde, à savoir de  $\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}$  pour  $(m; n) \in \mathbb{N}^2$  et  $p \in \llbracket 0; \min(n; m) \rrbracket$ . Comme à la fin de la remarque précédente, la découverte de  $\mathcal{C}(m+n; p) = \sum_{k=0}^p \mathcal{C}(m; k) \mathcal{C}(n; p-k)$  est aisée.

**2.6. Bell sonne la fin du jeu.** Pour  $i \in \mathbb{N}^*$ , notons  $B_i$  le nombre de façons de partitionner un ensemble de  $i$  éléments, et posons  $B_0 = 1$  par convention. Pour calculer récursivement  $B_i$ , nous allons reprendre des idées présentes dans l'article « *The largest singletons of set partitions* » de Yidong Sun et Xiaojuan Wu.<sup>4</sup>

- Pour  $(n; p) \in \mathbb{N}^2$ , notons  $\mathcal{B}_p^n$  le nombre de partitions de  $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$  contenant le singleton  $\{p+1\}$ , et aucun singleton  $\{k\}$  tel que  $k > p+1$ . De façon abusive, dans ce type de situation, nous dirons que  $\{p+1\}$  est le plus grand singleton.<sup>5</sup>

3. Il suffit de distinguer les sous-ensembles contenant un élément particulier  $e \in \mathcal{E}$ , choisi et fixé arbitrairement, de ceux ne le contenant pas.

4. Voir <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2010.10.011> sur le site ScienceDirect.

5. L'idée consiste à s'appuyer sur l'élément le plus simple qu'une partition puisse contenir : le singleton. Pour restreindre le nombre de cas à analyser, on choisit, arbitrairement, de se focaliser sur les singletons maximaux.

- Notons que  $\mathcal{B}_n^n = B_n$ . En effet, l'existence du singleton maximal  $\{n+1\}$  dans une partition de  $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$  permet, en ignorant  $\{n+1\}$ , d'obtenir une partition de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ . Cette construction est réversible, donc bijective.
- Le cas intéressant de  $\mathcal{B}_0^n$  est abordé dans la remarque 6 plus bas (nous n'aurons pas besoin de  $\mathcal{B}_0^n$  pour notre introduction aux nombres de Bell).
- Que pouvons-nous dire de  $\mathcal{B}_1^n$  lorsque  $n \in \mathbb{N}_{>2}$ ? Considérons une partition  $\pi$  de  $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$  ayant  $\{2\}$  comme singleton maximal. Deux cas se présentent à nous.
  - (1) **Cas 1 :  $\{1\}$  fait partie de  $\pi$ .** En ignorant 1 et 2, et en remplaçant chaque naturel  $k \in \llbracket 3; n+1 \rrbracket$  par  $k-2 \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ , nous obtenons une partition  $\pi'$  de  $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$  sans aucun singleton.
  - (2) **Cas 2 :  $\{1\}$  est absent de  $\pi$ .** Dans ce cas,  $\{2\}$  est l'unique singleton de  $\pi$ . En ignorant 2, en transformant l'ensemble  $\{1; k_1; \dots; k_s\}$  de  $\pi$  en  $\{k_1\} \sqcup \dots \sqcup \{k_s\}$ , et en remplaçant chaque naturel  $k \in \llbracket 3; n+1 \rrbracket$  par  $k-2 \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ , nous obtenons une partition  $\pi'$  de  $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$  avec pour singletons  $\{k_1\}, \dots, \{k_s\}$  (on peut voir 1 comme un marqueur de singletons).

Les procédés ci-dessus étant réversibles, par bijection, nous obtenons :  $\mathcal{B}_1^n = B_{n-1}$  lorsque  $n \in \mathbb{N}_{>2}$ . Comme  $\mathcal{B}_1^1 = 1$  et  $B_0 = 1$ , l'identité est valable sur  $\mathbb{N}^*$ .

- Plus généralement, considérons une partition  $\pi$  de  $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$  ayant  $\{p+1\}$  comme singleton maximal. Deux cas se présentent à nous.
  - (1) **Cas 1 :  $\{p\}$  fait partie de  $\pi$ .** En ignorant  $\{p+1\}$ , et en remplaçant chaque naturel  $k \in \llbracket p+2; n+1 \rrbracket$  par  $k-1 \in \llbracket p+1; n \rrbracket$ , nous obtenons une partition  $\pi'$  de  $\llbracket 1; n \rrbracket$  ayant  $\{p\}$  comme singleton maximal.
  - (2) **Cas 2 :  $\{p\}$  est absent de  $\pi$ .** En échangeant  $p$  et  $(p+1)$ , nous obtenons une partition  $\pi'$  de  $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$  ayant  $\{p\}$  comme singleton maximal.

Les procédés ci-dessus étant réversibles, par bijection, nous avons :  $\mathcal{B}_p^n = \mathcal{B}_{p-1}^{n-1} + \mathcal{B}_{p-1}^n$ .

En résumé,  $B_n = \mathcal{B}_n^n = \mathcal{B}_1^{n+1}$  avec  $\mathcal{B}_p^n = \mathcal{B}_{p-1}^n + \mathcal{B}_{p-1}^{n-1}$  et  $\mathcal{B}_1^1 = 1$ . Comme les relations de récurrence vérifiées par  $(\mathcal{B}_p^n)$  ressemblent à celles de la suite  $(\mathcal{C}_p^n)$ , il devient évident de procéder comme suit.

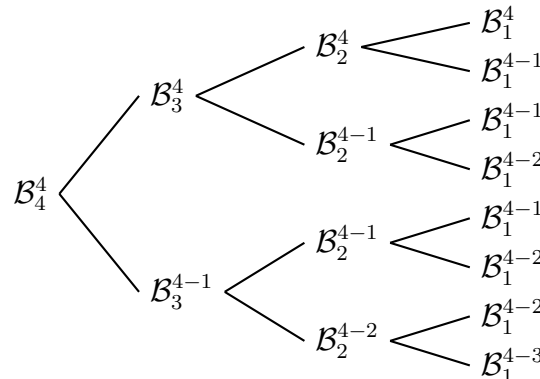
$$\mathcal{B}_p^n \begin{cases} \mathcal{B}_{p-1}^n \\ \mathcal{B}_{p-1}^{n-1} \end{cases}$$

*Arbre de calcul.*

$$\mathcal{B}_{k-b}^{n-a} \begin{cases} \mathcal{B}_{k-(b+1)}^{n-a} \\ \mathcal{B}_{k-(b+1)}^{n-(a+1)} \end{cases}$$

*Un calcul intermédiaire.*

Prenons  $\mathcal{B}_{n+1}^{n+1} = B_{n+1}$  pour racine de l'arbre binaire comme dans l'exemple suivant où  $n = 3$ .



*Un exemple de calcul.*

Nous arrivons à  $\mathcal{B}_{n+1}^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{B}_1^{n+1-k}$  qui équivaut à  $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}$ . Comme  $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ , nous avons bien  $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$ .

**Remarque 6.**  $\mathcal{B}_0^n$  est le nombre de partitions de  $\llbracket 1; n \rrbracket$  sans singleton. En effet, si  $\{1\}$  est le singleton maximal d'une partition de  $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ , alors en ignorant  $\{1\}$ , et en remplaçant chaque naturel  $k \in \llbracket 2; n+1 \rrbracket$  par  $k-1 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , nous obtenons une partition de  $\llbracket 1; n \rrbracket$  sans singleton. Cette construction est réversible, donc bijective.