BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES

CHRISTOPHE BAL

Mentions « légales »

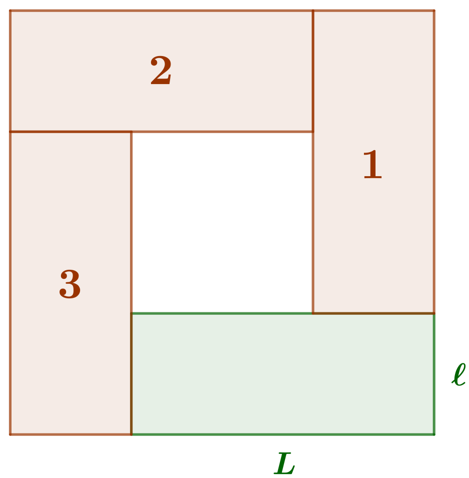
Table des matières

Date: 18 Jan. 2025 – 22 Jan. 2025.

1. Les rectangles

Fait 1. *Considérons tous les rectangles de périmètre fixé p. Parmi tous ces rectangles, celui d'aire maximale est le carré de côté $c = 0{,}25p$.*

Démonstration. Voici une preuve géométrique élémentaire s'appuyant sur le dessin suivant où les rectangles 1, 2 et 3 sont isométriques au rectangle vert étudié de dimension $L \times \ell$.



Le raisonnement tient alors aux constations suivantes accessibles à un collégien.

(1) Le grand carré a une aire supérieure ou égale à $4L\ell$.

(2) Le grand carré a un périmètre égal à $4(L+\ell)$.

(3) Via une homothétie de rapport $0{,}5$, nous obtenons un carré d'aire supérieure ou égale à $0{,}5^2 \times 4L\ell = L\ell$, et de périmètre égal à $0{,}5 \times 4(L+\ell) = 2(L+\ell)$.

Donc pour tout rectangle de périmètre $p = 2(L+\ell)$ et d'aire $L\ell$, nous pouvons construire un carré de périmètre identique, mais avec une aire supérieure ou égale à $L\ell$. Joli ! Non ? □

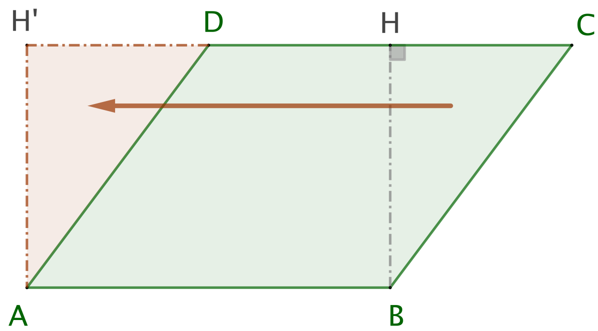
Remarque 1.1. *Une preuve courante est d'exprimer l'aire du rectangle comme un polynôme du 2ᵉ degré en L par exemple. On obtient $L\ell = L(0{,}5p - L)$ qui est maximale en $L_M = 0{,}25p$ (moyenne des racines), d'où $\ell_M = 0{,}25p = L_M$.*

Remarque 1.2. *Au passage, nous avons pour $(L\,;\ell) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $4L\ell \leq (L+\ell)^2$, c'est-à-dire $2L\ell \leq L^2 + \ell^2$, d'où $\sqrt{L\ell} \leq \sqrt{\frac{1}{2}(L^2+\ell^2)}$, soit la comparaison des moyennes géométriques et quadratiques d'ordre 2.*

2. Les parallélogrammes

Fait 2. *Considérons tous les parallélogrammes de périmètre fixé p. Parmi tous ces parallélogrammes, celui d'aire maximale est le carré de côté $c = 0{,}25p$.*

Démonstration. Le calcul de l'aire d'un parallélogramme, voir le dessin ci-dessous, nous donne $\text{Aire}(ABCD) = \text{Aire}(ABHH')$ et $\text{Perim}(ABCD) \geq \text{Perim}(ABHH')$.



Via une homothétie de rapport $k = \frac{\text{Perim}(ABCD)}{\text{Perim}(ABHH')} \geq 1$, nous obtenons un rectangle d'aire supérieure ou égale à Aire$(ABCD)$, et de périmètre égal à p. Nous revenons à la situation du fait 1 qui permet de conclure très facilement. □

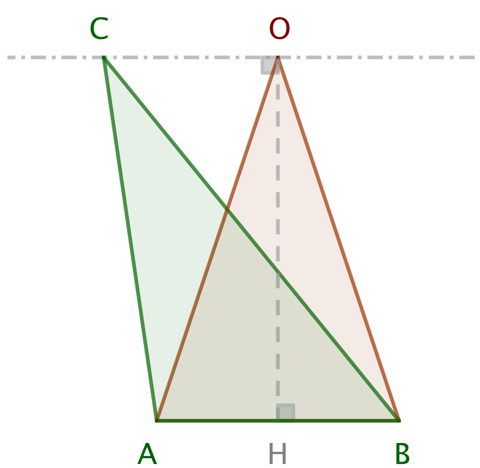
Remarque 2.1. *La recherche d'un parallélogramme de périmètre minimal pour une aire fixée est le problème dual de l'isopérimétrie pour les parallélogrammes.*

Remarque 2.2. *Une méthode analytique devient pénible ici, car il faut par exemple prendre en compte l'angle au sommet A du parallélogramme. L'auteur préfère battre en retraite en clôturant cette remarque ici.*

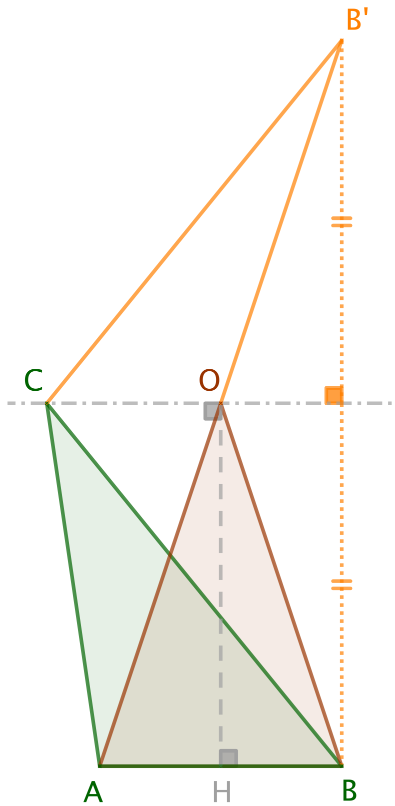
3. Les triangles avec un côté fixé

Fait 3. *Considérons tous les triangles de périmètre fixé p, et ayant tous au moins un côté de même mesure c (on suppose que nous avons au moins un tel triangle). Parmi tous ces triangles, il n'y en a un qu'un seul d'aire maximale, c'est le triangle isocèle ayant une base de mesure c.*

Démonstration. Soit ABC un triangle de périmètre p, et vérifiant $AB = c$. Les points M sur la parallèle à (AB) passant par C sont tels que Aire(ABM) = Aire(ABC). On note O le point sur cette parallèle tel que ABO soit isocèle en O.



Via une petite symétrie axiale, voir ci-dessous, il est aisé de noter que Perim$(ABC) \geq$ Perim(ABO) avec égalité uniquement si ABC est isocèle en C.



Via une dilatation « *verticale* » de rapport $r = \frac{\text{Perim}(ABC)}{\text{Perim}(ABO)} \geq 1$, on obtient finalement un triangle isocèle ABO' de périmètre p, et qui vérifie $\text{Aire}(ABO') \geq \text{Aire}(ABC)$ avec égalité uniquement si ABC est isocèle en C.[1] Contrat rempli ! □

4. Les triangles sans contrainte

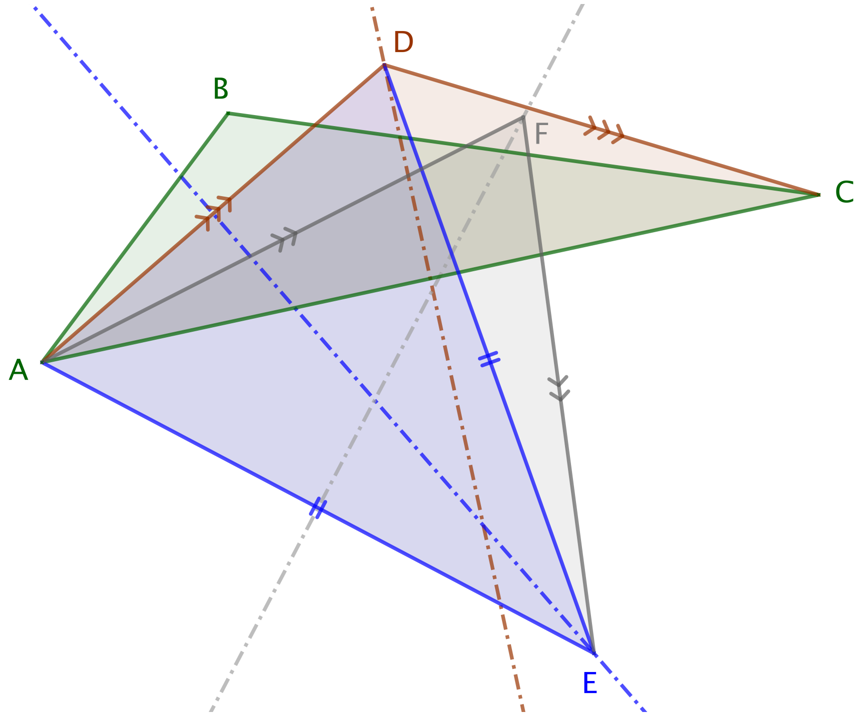
Fait 4. *Considérons tous les triangles de périmètre fixé p. Parmi tous ces triangles, celui d'aire maximale est le triangle équilatéral de côté $c = \dfrac{1}{3}p$.*

Démonstration. Soit un triangle ABC non équilatéral, de sorte que ABC n'est pas isocèle en A. Selon le fait 4, il existe un triangle isocèle de base $[BC]$, de même périmètre et d'aire strictement plus grande. Ceci nous prouve qu'un triangle non équilatéral ne peut pas être solution du problème, et par conséquent seul le triangle équilatéral maximise l'aire à périmètre fixé. Que c'est efficace ! □

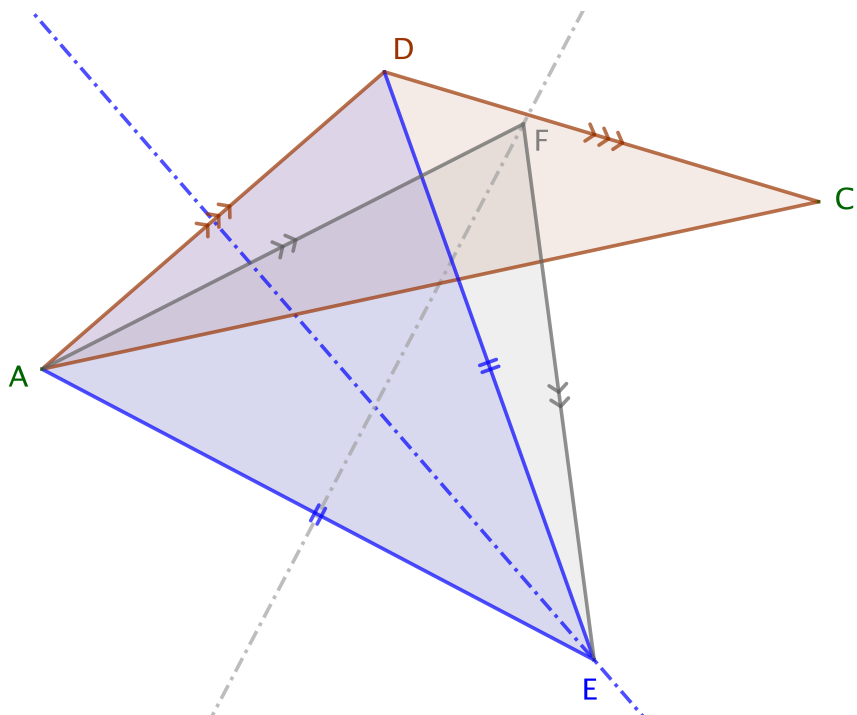
Remarque 4.1. *Voici un fait rigolo. Une application itérative du fait 4 donne à la limite le triangle équilatéral d'aire maximale, et ceci avec une vitesse de convergence exponentielle. En effet, partons d'un triangle ABC quelconque de périmètre p, le fait 4 nous donne successivement les triangles ACD, ADE et AEF isocèles en D, E et F respectivement, ayant tous pour périmètre p, et ceci avec des aires de plus en plus grandes. Le dessin suivant amène à conjecturer qu'en poursuivant le procédé pour avoir ensuite un triangle AFG isocèle en G…, nous aboutirons* « à la limite » *à un triangle équilatéral.*

---

1. La remarque 4.3 explique comment employer la méthode des extrema liés. Les arguments fournis à cet endroit s'adaptent facilement au cas des triangles isocèles de base fixée.



Le passage d'un triangle quelconque ABC au triangle ACD isocèle en D nous amène à nous concentrer sur ce que donne notre procédé d'agrandissement d'aire à périmètre fixé pour des triangles isocèles. Dans la suite, nous allons nous appuyer sur le schéma suivant.



Voici ce que nous pouvons affirmer.

(1) *Considérons ACD isocèle en D tel que $AC > AD$. Comme $AC + AD + DC = p$, nous avons $AC > \frac{1}{3}p > AD$. Dès lors, on doit avoir ensuite $AD < \frac{1}{3}p < AE$, car $AD + DE + AE = p$ et $AD = AE$.*

(2) *Considérons ADE isocèle en E tel que $AD < AE$ en oubliant le point précédent. Comme $AD + DE + AE = p$, nous avons $AD < \frac{1}{3}p < AE$. Dès lors, on doit avoir ensuite $AE > \frac{1}{3}p > AF$, car $AE + AF + EF = p$ et $AF = EF$.*

(3) *Les deux points précédents démontrent que notre procédé n'arrivera jamais en un nombre fini d'étapes à un triangle équilatéral si l'on part d'un triangle isocèle non équilatéral.* [2]

(4) *Nous devons quantifier les écarts à la mesure «* limite *» $p' = \frac{1}{3}p$.*

- *Dans ADC, posant $AD = p' - \epsilon$, nous avons $AC = p' + 2\epsilon$.*
- *Dans ADE, posant $AE = p' + \epsilon'$, nous avons $AD = p' - 2\epsilon'$.*
- *Donc $\epsilon' = \dfrac{1}{2}\epsilon$.*

Nous avons donc une convergence exponentielle des longueurs des côtés vers $p' = \frac{1}{3}p$. Et tout ceci via de la géométrie et de l'analyse élémentaires !

Remarque 4.2. *La formule de Héron donne qu'un triangle de côtés a, b et c, et de demi-périmètre $s = 0{,}5p$, possède une aire égale à $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. La comparaison des moyennes géométriques et arithmétiques d'ordre 3 nous donne alors une solution algébrique efficace, puisque $\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}\big((s-a)+(s-b)+(s-c)\big)$ nous donne alors $s(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{1}{27}s^4$, puis $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{p^2}{12\sqrt{3}}$ où $\frac{p^2}{12\sqrt{3}}$ est l'aire du triangle équilatéral de périmètre p.*

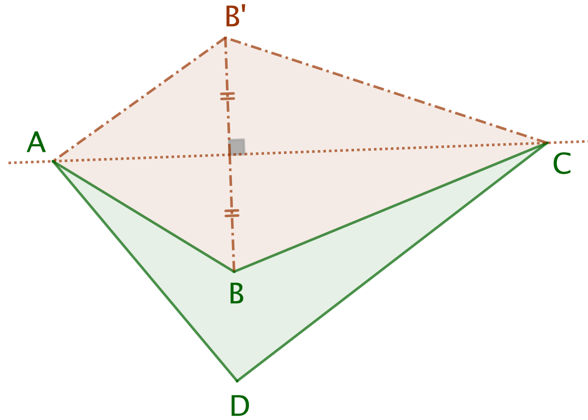
Remarque 4.3. *L'aire du triangle étudié étant de mesure positive ou nulle, nous cherchons à maximiser son carré $f(a\,;b\,;c) = s(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{1}{16}(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$, sous la contrainte $2s = a + b + c$ où $s > 0$ est constant. Notant $g(a\,;b\,;c) = a + b + c - 2s$, la contrainte s'écrit $g(a\,;b\,;c) = 0$. Selon la méthode des extrema liés, un éventuel extremum doit vérifier $\partial_a f = \lambda\partial_a g$, $\partial_b f = \lambda\partial_b g$ et $\partial_c f = \lambda\partial_c g$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ une constante. En particulier, nous obtenons $-s(s-b)(s-c) = -s(s-a)(s-c) = -s(s-a)(s-b)$, et par conséquent $(s-b)(s-c) = (s-a)(s-c) = (s-a)(s-b)$. Les cas $s = a$, $s = b$ et $s = c$ donnent $f(a\,;b\,;c) = 0$. Quant au cas $\left[s \neq a, s \neq b \text{ et } s \neq c\right]$, il n'est envisageable que si $a = b = c = \frac{p}{3}$ qui implique $f(a\,;b\,;c) = \frac{1}{16}p\left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{p^2}{12\sqrt{3}}\right)^2 > 0$. En résumé, l'existence d'un maximum implique que ce maximum corresponde au cas du triangle équilatéral. Il reste à démontrer qu'un tel maximum existe pour pouvoir conclure : ceci est facile à justifier en considérant l'ensemble compact $[0\,;2s]^3$ de $\mathbb{R}^3$.*

5. Les quadrilatères

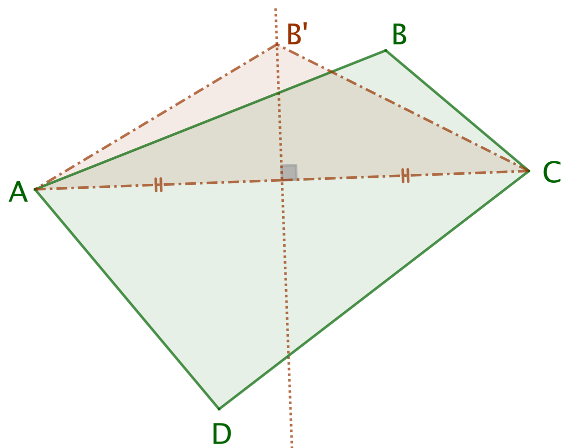
Fait 5. *Considérons tous les quadrilatères de périmètre fixé p. Parmi tous ces quadrilatères, celui d'aire maximale est le carré de côté $c = 0{,}25p$.*

Démonstration. La figure suivante montre que pour tout quadrilatère $ABCD$ non convexe en B, et de périmètre p, il existe un quadrilatère convexe $AB'CD$ de périmètre p, et tel que $\text{Aire}(AB'CD) \geq \text{Aire}(ABCD)$. Notre recherche doit donc continuer dans l'ensemble des quadrilatères convexes de périmètre p.

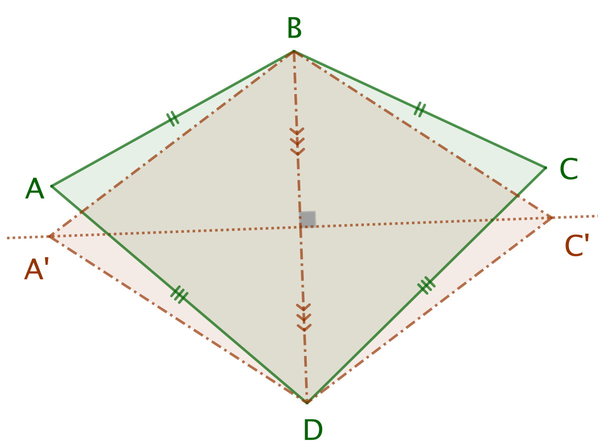
2. Et plus généralement si le procédé ne commence pas avec une base de longueur $\frac{1}{3}p$.



Comme dans la preuve du fait 3, à partir d'un quadrilatère convexe $ABCD$ de périmètre p, nous obtenons un quadrilatère convexe $AB'CD$ de périmètre p,[3] et tel que $AB' = B'C$ et $\text{Aire}(AB'CD) \geq \text{Aire}(ABCD)$ comme le montre la figure ci-après.



En appliquant la méthode précédente au sommet D, nous arrivons au cas d'un cerf-volant $ABCD$ de périmètre p, et tel que $AB = BC$ et $AD = DC$, voir ci-dessous. Cette même méthode appliquée cette fois-ci aux sommets A et C nous fournit un losange $A'BC'D$ de périmètre p, et tel que $\text{Aire}(A'BC'D) \geq \text{Aire}(ABCD)$. En effet, nous avons $p = 2(AB + AD)$ et $\text{Perim}(A'BD) = \text{Perim}(ABD)$, donc $A'B = A'D = 0{,}25p$, et de même nous obtenons $C'B = C'D = 0{,}25p$.



3. Noter que $\text{Perim}(AB'CD) = \text{Perim}(AB'C) + \text{Perim}(ACD) - 2AC$.

Pour conclure, il suffit d'appliquer le fait 2, puisque tout losange est un parallélogramme. Que la géométrie est belle ! □