

BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source $L^A T^E X$, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.

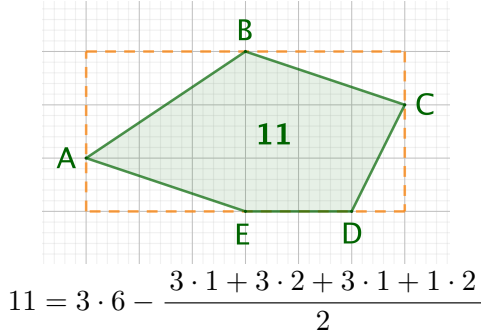


TABLE DES MATIÈRES

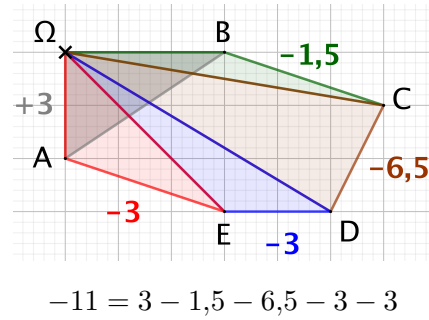
0.1.	Aires généralisée et algébrique d’un n -cycle	2
0.2.	Au moins une solution	6

0.1. Aires généralisée et algébrique d'un n -cycle. Pour prouver l'existence d'un n -gone solution du problème d'isopérimétrie polygonale, nous allons accepter de travailler avec des n -cycles. Il nous faut donc une notion d'aire pour ces objets très particuliers. Pour comprendre le choix fait, commençons par rappeler que tout triangle ABC possède une aire donnée par $\frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right|$ où $\frac{1}{2} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est l'aire algébrique de ABC . Il devient naturel de définir l'aire algébrique d'un n -gone via celles de triangles comme dans l'exemple suivant utilisant les triangles ΩAB , ΩBC , ΩCD , ΩDE et ΩEA . A priori, le résultat pourrait dépendre du point Ω employé, mais le fait 1, donné plus bas, montrera que ce n'est pas le cas.

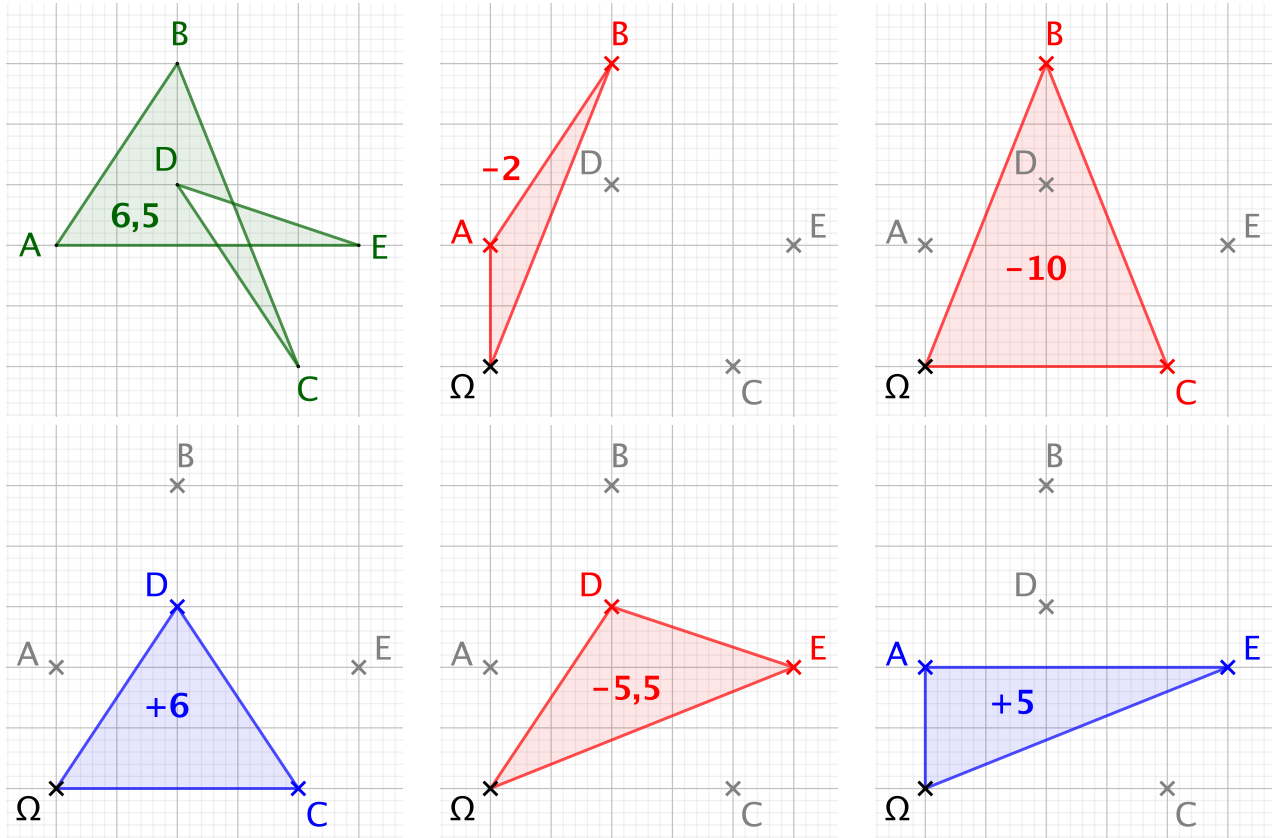
Calcul direct à la main.



Via le déterminant.

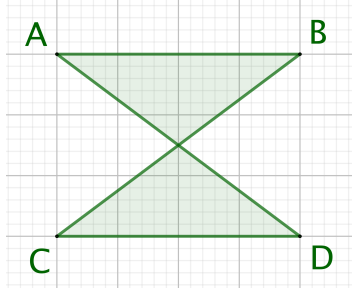


Ce mode de calcul est celui employé par **GeoGebra** qui donne une aire de 6,5 pour le polygone croisé de la bande dessinée ci-après qui détaille les calculs faits : les aires algébriques représentées en bleu sont positives, et celles en rouge négatives.¹ Nous obtenons un total de $(-6,5)$, soit la valeur fournie par **GeoGebra** au signe près.



1. Le triangle ΩAB est rouge, car orienté dans le sens horaire lorsqu'on le lit, tandis que ΩCD est bleu, car orienté suivant le sens anti-horaire.

Avant de formaliser ce qui précède, il faut noter que la notion d'aire algébrique est à manier avec prudence lorsqu'on la découvre. Si c'est votre cas, que pensez-vous de l'aire algébrique du quadrilatère croisé $ABCD$ ci-dessous qui est un antiparallélogramme très particulier ? Réponse en note de bas de page.²



Fait 1. Soit $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ un n -cycle. La fonction qui à un point Ω du plan associe $\mu_1^n(\Omega; \mathcal{L}) = \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}})$ est indépendante du point Ω . Dans la suite, cette quantité indépendante de Ω sera notée $\mu_1^n(\mathcal{L})$.

Démonstration. Soit M un autre point du plan.

$$\begin{aligned}
 & \mu_1^n(\Omega; \mathcal{L}) \\
 &= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}}) \\
 &= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MA'_{i+1}}) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left[\det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) + \det(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) + \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M}) + \mu_1^n(M; \mathcal{L}) \\
 &= \mu_1^n(M; \mathcal{L}) + \sum_{i=2}^{n+1} \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_i}) - \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_i}) \quad \left. \vphantom{\sum_{i=2}^{n+1}} \right\} A'_{n+1} = A'_1 \\
 &= \mu_1^n(M; \mathcal{L})
 \end{aligned}$$

□

Fait 2. Soit $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ un n -cycle. Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, le n -cycle $\mathcal{L}_k = B_1B_2 \cdots B_n$, où $B_i = A'_{i+k-1}$, vérifie $\mu_1^n(\mathcal{L}) = \mu_1^n(\mathcal{L}_k)$. Dans la suite, cette quantité commune sera notée $\mu(\mathcal{L})$.

Démonstration. Il suffit de s'adonner à un petit jeu sur les indices de sommation. □

Fait 3. Soit $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ un n -cycle. Le n -cycle $\mathcal{L}^{\text{op}} = B_1B_2 \cdots B_n$, où $B_i = A_{n+1-i}$, vérifie $\mu(\mathcal{L}^{\text{op}}) = -\mu(\mathcal{L})$. Le n -cycle \mathcal{L}^{op} est dit « opposé » à \mathcal{L} .

Démonstration. Soit Ω un point quelconque du plan.

2. La réponse est 0. Comme nous allons voir que le choix de Ω est libre, il suffit de faire les calculs avec Ω l'intersection des segments $[AD]$ et $[BC]$. On peut donner du sens à ceci. Voici comment. Plongeons-nous dans l'espace. Imaginons une toile rectangulaire bleue sur le dessus, et rouge en dessous. Tournons de 180° verticalement l'un des côtés du rectangle. En supposant que la toile soit parfaitement tendue, nous obtenons, vue de dessus, un antiparallélogramme dont l'un des triangles est bleu, et l'autre rouge. De façon savante, les deux faces ont deux orientations différentes. Nous reparlerons de cette notion plus tard, c'est elle qui justifie les jeux de signes dans les calculs introductifs précédents.

$$\begin{aligned}
& \mu(\mathcal{L}^{\text{op}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega B'_i}, \overrightarrow{\Omega B'_{i+1}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_{n+1-i}}, \overrightarrow{\Omega A'_{n-i}}) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \det(\overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}, \overrightarrow{\Omega A'_j}) \quad \left. \begin{array}{l} A'_0 = A'_n \text{ et } A'_1 = A'_{n+1} \end{array} \right\} \\
&= \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}, \overrightarrow{\Omega A'_j}) \\
&= - \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_j}, \overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}) \\
&= - \mu(\mathcal{L}) \quad \square
\end{aligned}$$

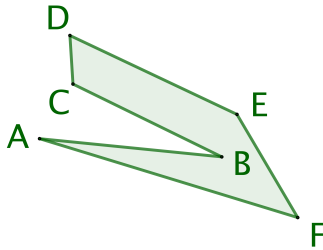
Fait 4. Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n -cycle. La quantité $\frac{1}{2}|\mu(\mathcal{L})|$ ne dépend ni du sens de parcours de \mathcal{L} , ni du point de départ choisi.³ La quantité $\text{AireGene}(\mathcal{L}) = \frac{1}{2}|\mu(\mathcal{L})|$ sera nommée « aire généralisée », tandis que $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{L}) = \frac{1}{2}\mu(\mathcal{L})$ sera appelée « aire algébrique ».

Démonstration. C'est une conséquence directe des faits 2 et 3. □

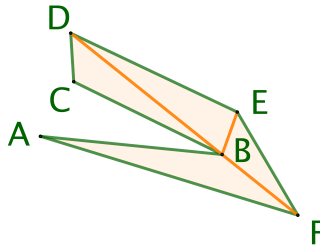
Dans la suite, nous utiliserons $\text{AireGene}(\mathcal{P}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$ dès que \mathcal{P} est un n -gone (ceci sera démontré plus bas). Notons que ceci est évident dans le cas convexe, car il suffit de choisir l'isobarycentre G de A_1, A_2, \dots, A_n pour le calcul de $\text{AireGene}(\mathcal{P})$: en effet, avec ce choix, tous les déterminants $\det(\overrightarrow{GA'_i}, \overrightarrow{GA'_{i+1}})$ ont le même signe. Par contre, dans le cas non-convexe, les choses se compliquent a priori, car nous ne maîtrisons plus les signes des déterminants. Heureusement, nous avons le résultat suivant.

Fait 5. Soit un n -gone \mathcal{P} de n -cycle associé $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ tel que A_1, A_2, \dots, A_n soient parcourus dans le sens trigonométrique, ou anti-horaire. Un tel n -cycle sera dit « positif ».⁴ Sous cette hypothèse, nous avons $\mu(\mathcal{L}) \geq 0$.

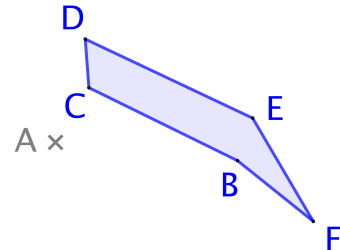
Démonstration. Le théorème de triangulation affirme que tout n -gone est triangulable comme dans l'exemple très basique suivant qui laisse envisager une démonstration par récurrence en retirant l'un des triangles ayant deux côtés correspondant à deux côtés consécutifs du n -gone (pour peu qu'un tel triangle existe toujours).



Un n -gone « nu ».



Le n -gone triangulé.



Le n -gone allégé.

3. Le lecteur pardonnera les abus de langage utilisés.

4. Bien noté que cette notion ne peut pas exister pour un polygone croisé. De façon cachée, nous utilisons le célèbre théorème de Jordan, dans sa forme polygonale.

Le théorème de triangulation admet une forme forte donnant une décomposition contenant un triangle formé de deux côtés consécutifs du n -gone.⁵ Nous dirons qu'une telle décomposition est « à l'écoute ». Ce très mauvais jeu de mots fait référence à la notion sérieuse « d'oreille » pour un n -gone : une oreille est un triangle inclus dans le n -gone, et formé de deux côtés consécutifs du n -gone. L'exemple suivant donne un n -gone ayant juste deux oreilles.⁶



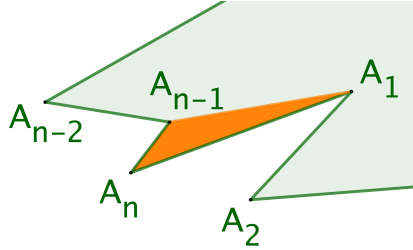
Un n -gone basique.



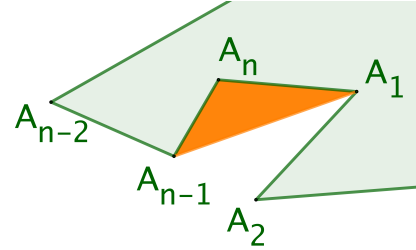
Juste deux oreilles disponibles.

Raisonnons donc par récurrence sur $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

- **Cas de base.** Soit ABC un triangle. Dire que les sommets A , B et C sont parcourus dans le sens trigonométrique, c'est savoir que $\mu(ABC) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) > 0$.
- **Hérédité.** Soient un n -gone \mathcal{P} , avec $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, et $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n -cycle positif qui lui est associée. On peut supposer que $A_{n-1} A_n A_1$ est une oreille d'une triangulation à l'écoute du n -gone \mathcal{P} .



$A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille.



$A_{n-1}A_nA_1$ n'est pas une oreille.

Notons \mathcal{P}' le k -gone associé au k -cycle $\mathcal{L}' = A_1 \cdots A_{n-1}$ où $k = n - 1$ vérifie $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Par hypothèse, \mathcal{L}' est positive. Nous arrivons aux calculs élémentaires suivants en utilisant $\Omega = A_1$ comme point de calcul de $\mu(\mathcal{L})$.

$$\begin{aligned}
 & \mu(\mathcal{L}) \\
 = & \\
 = & \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_1 A'_j}, \overrightarrow{A_1 A'_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1 A'_{n-1}}, \overrightarrow{A_1 A'_n}) + \det(\overrightarrow{A_1 A'_n}, \overrightarrow{A_1 A'_{n+1}}) \\
 = & \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_1 A_j}, \overrightarrow{A_1 A_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1 A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1 A_n}) + \det(\overrightarrow{A_1 A_n}, \overrightarrow{A_1 A_1}) \\
 = & \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_1 A_j}, \overrightarrow{A_1 A_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1 A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1 A_n}) \\
 = & \mu(\mathcal{L}') + \mu(A_{n-1} A_n A_1)
 \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} A_1 = A'_{n+1} \\ A_i = A'_i \\ \text{pour } i \leq n \end{array} \right\}$

5. En pratique, cette forme forte est peu utile, car elle aboutit à un algorithme de recherche trop lent.

6. On démontre que tout n -gone admet au minimum deux oreilles.

Par hypothèse de récurrence, nous savons que $\mu(\mathcal{L}') \geq 0$, et comme $A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille de \mathcal{P} , la 3-ligne $A_{n-1}A_nA_1$ est forcément positive, d'où $\mu(A_{n-1}A_nA_1) \geq 0$ d'après le cas de base. Nous arrivons bien à $\mu(\mathcal{L}) \geq 0$, ce qui permet de finir aisément la démonstration par récurrence. \square

Fait 6. Pour tout n -gone \mathcal{P} , nous avons : $\text{AireGene}(\mathcal{P}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Les deux points suivants permettent de faire une preuve par récurrence.

- **Cas de base.** L'égalité est immédiate pour les triangles (c'est ce qui a motivé la définition de l'aire généralisée).
- **Hérédité.** Reprenons les notations de la démonstration du fait 5 : \mathcal{P} est un n -gone où $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ un n -cycle positif qui lui est associée, $A_{n-1}A_nA_1$ une oreille d'une triangulation à l'écoute du n -gone \mathcal{P} , \mathcal{P}' le k -gone associé au k -cycle $\mathcal{L}' = A_1 \cdots A_{n-1}$ où $k = n - 1$ vérifie $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, avec \mathcal{L}' positif. Nous arrivons aux calculs élémentaires suivants.

$$\begin{aligned}
& \text{Aire}(\mathcal{P}) \\
&= \text{Aire}(\mathcal{P}') + \text{Aire}(A_{n-1}A_nA_1) && \left. \begin{array}{l} \text{A}_{n-1}A_nA_1 \text{ est une oreille de } \mathcal{P}. \\ \text{Hypothèse de récurrence et cas de base.} \end{array} \right\} \\
&= \text{AireGene}(\mathcal{P}') + \text{AireGene}(A_{n-1}A_nA_1) && \left. \begin{array}{l} \text{Voir le fait 5.} \\ \text{Comme dans la preuve du fait 5.} \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{2}(\mu(\mathcal{L}') + \mu(A_{n-1}A_nA_1)) \\
&= \frac{1}{2}\mu(\mathcal{L}) && \left. \begin{array}{l} \text{Comme dans la preuve du fait 5.} \\ \text{Voir le fait 5.} \end{array} \right\} \\
&= \text{AireGene}(\mathcal{P})
\end{aligned}$$

\square

0.2. Au moins une solution.

Fait 7. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Parmi tous les n -cycles de longueur fixée, il en existe au moins un d'aire généralisée maximale.

Démonstration. Notons ℓ la longueur fixée que nous supposons non nulle.

- Munissant le plan d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note \mathcal{Z} l'ensemble des n -cycles $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$ tels que $\text{Long}(A_1A_2 \cdots A_n) = \ell$ et $A_1(0;0)$,⁷ puis $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des uplets de coordonnées $(x(A_1); y(A_1); \dots; x(A_n); y(A_n))$ pour $A_1A_2 \cdots A_n \in \mathcal{Z}$.
- \mathcal{U} est clairement fermé dans \mathbb{R}^{2n} . De plus, il est borné, car les coordonnées des sommets des n -cycles considérés le sont. En résumé, \mathcal{U} est un compact de \mathbb{R}^{2n} .
- Nous définissons la fonction $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui à un uplet de \mathcal{U} associe l'aire généralisée du n -cycle qu'il représente. Cette fonction est continue comme valeur absolue d'une fonction polynomiale en les coordonnées.
- Finalement, par continuité et compacité, α admet un maximum sur \mathcal{U} .

\square

Comment le fait précédent peut-il nous aider dans notre quête d'un n -gone solution du problème d'isopérimétrie? Nous allons tout simplement démontré que tout n -cycle autre que le n -gone régulier ne peut pas être une solution « optimale ».

7. Le mot « Zeile » est une traduction possible de « ligne » en allemand.

0.3. Solutions, qui êtes-vous ? Nous allons établir le fait ?? affirmant qu'un n -cycle maximisant son aire généralisée à périmètre fixé doit être, a minima, un n -gone régulier.

Les cas $n = 3$ et $n = 4$ étant résolus, voir les faits ?? et ??, dans toutes les preuves de cette section, nous supposons $n \geq 5$.