DES PREUVES SANS MOT AUX PREUVES SANS DOUTE

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LaTeX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/visual-proof/polynomial-analytic-principles.

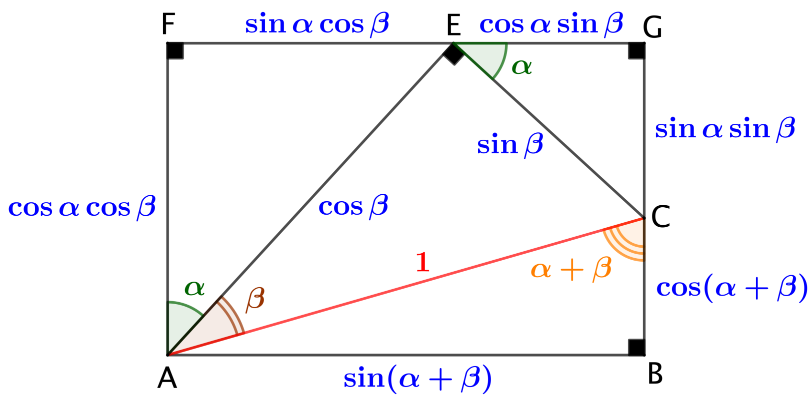
Mentions « légales »

Table des matières

Date: 16 Juillet 2019 - 30 Mars 2025.

1. Et suivirent les fonctions séparablement analytiques

Que faire si nous avons des formules trigonométriques impliquant deux variables, ou plus ? Par exemple, pour $(\alpha\,;\beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, le dessin suivant nous donne $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ et $\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$.



Le fait 3 ci-dessous, qui généralise le fait **??**, implique la validité des formules trigonométriques précédentes sur $\mathbb{C}^2$ tout entier en choisissant $f_1(\alpha\,;\beta) = \cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ et $f_2(\alpha\,;\beta) = \sin(\alpha+\beta) - \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta$.[1] Nous voilà sauvés !

Définition 1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ et $k \in [\![1\,;n]\!]$, la* « k$^{\text{e}}$ restriction » *de f, relative à $(z_1\,;\dots;z_{k-1}\,;z_{k+1}\,;\dots;z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$, est définie sur $\mathbb{C}$ par $f_k(z) = f(z_1\,;\dots;z_{k-1}\,;z\,;z_{k+1}\,;\dots;z_n)$.*[2]

Définition 2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une fonction $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ sera dite* « séparablement analytique » *sur $\mathbb{C}^n$, si $\forall k \in [\![1\,;n]\!]$, toutes les k^{es} restrictions de f sont analytique sur $\mathbb{C}$.*

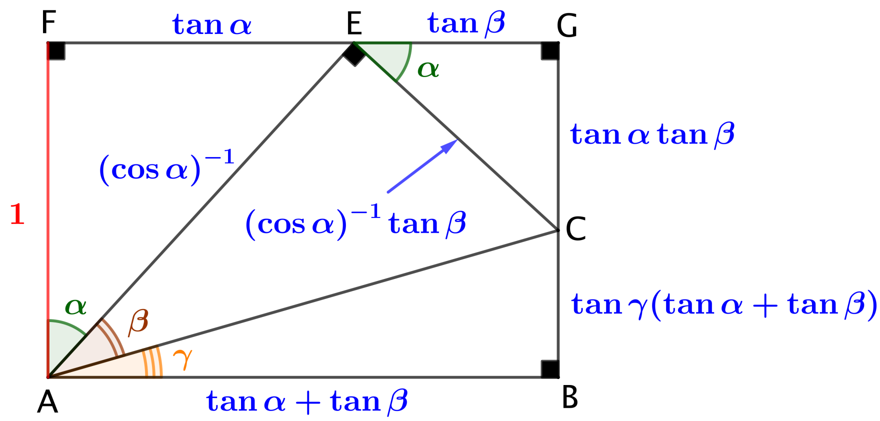
Fait 3. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ une fonction séparablement analytique. Si f s'annule sur un ouvert non vide Ω, alors f s'annule sur $\mathbb{C}^n$.*

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour démontrer la validité de la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie par *« Pour toute fonction séparablement analytique $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, si f s'annule sur un ouvert non vide Ω, alors f s'annule sur $\mathbb{C}^n$. »*.

- **Cas de base.** $\mathcal{P}(1)$ découle directement du fait **??**.
- **Hérédité.** Supposons $\mathcal{P}(n)$ valide pour un naturel n quelconque. Soit f une fonction séparablement analytique à $(n+1)$ variables vérifiant les conditions de la propriété $\mathcal{P}(n+1)$. Notons Ω l'ouvert non vide sur lequel f est nulle. Quitte à réduire Ω, on peut supposer que $\Omega = \prod_{k=1}^{n+1} \mathcal{D}(\alpha_k\,;r[$ avec $r > 0$ et les α_k des complexes fixés.
  (1) Pour $\omega \in \mathcal{D}(\alpha_{n+1}\,;r[$ fixé, posons $f_\omega : (z_1\,;\dots;z_n) \in \mathbb{C}^n \mapsto f(z_1\,;\dots;z_n\,;\omega) \in \mathbb{C}$. Comme f_ω vérifie les conditions de la propriété $\mathcal{P}(n)$, par hypothèse de récurrence, $\forall (z_1\,;\dots;z_n) \in \mathbb{C}^n$, $f_\omega(z_1\,;\dots;z_n) = 0$, soit $f(z_1\,;\dots;z_n\,;\omega) = 0$.
  (2) Pour z_1 , ... , z_n des complexes quelconques, posons $\ell(z) = f(z_1\,;\dots;z_n\,;z)$. Le point précédent montre que ℓ vérifie $\mathcal{P}(1)$, donc, d'après le cas de base, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\ell(z) = 0$, soit $f(z_1\,;\dots;z_n\,;z) = 0$.
  (3) Finalement, $\forall (z_1\,;\dots;z_n\,;z) \in \mathbb{C}^{n+1}$, $f(z_1\,;\dots;z_n\,;z) = 0$. Autrement dit, nous avons déduit la validité de $\mathcal{P}(n+1)$ à partir de celle de $\mathcal{P}(n)$.
- **Conclusion.** Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout naturel non nul n. □

1. L'ouvert d'annulation est l'intérieur d'un triangle.
2. Avec des abus de notations évidents.

Exemple 4. *L'implication* $\left[\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2} \implies \tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=1\right]$ *est vraie pour* $(\alpha\,;\beta\,;\gamma)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$*, comme le montre le dessin suivant. Il est naturel de se demander s'il est possible de partir, plus généralement, de* $(\alpha\,;\beta\,;\gamma)\in\left(\mathbb{C}-\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)^3$*. Nous allons voir que c'est le cas.*[3]



Voici comment arriver à une généralisation pour $(\alpha\,;\beta\,;\gamma)\in\left(\mathbb{C}-\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)^3$.

- *XXX*
- *XXX*
- *XXX*
- *XXX*
- *XXX*

3. Pour une fois, la vérification directe est facile, mais cela sort de l'esprit de ce document, et est non généralisable. En effet, en multipliant par $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ l'égalité souhaitée, nous devons démontrer que $\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=0$. Dans le terme de gauche, les formules d'addition se cachent de façon ostentatoire. Nous obtenons $\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)-\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)$, puis $-\cos(\alpha+\beta+\gamma)$, soit $-\cos(\frac{\pi}{2})$ qui est bien nul.