

# BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



### TABLE DES MATIÈRES

1. Pourquoi un nouveau document sur l’isopérimétrie ?	2
2. Triangles	2
2.1. Avec un côté fixé	2
2.2. Le cas général	3
2.3. Des preuves courtes non géométriques	4
3. Quadrilatères	5
3.1. Les rectangles	5
3.2. Les parallélogrammes	6
3.3. Le cas général	7
4. Les polygones	8
4.1. Où allons-nous ?	8
4.2. Quelques définitions	8
4.3. Aire algébrique d’un $n$ -cycle	9
4.4. Au moins une solution, ou presque	13

Ce document, de niveau élémentaire,<sup>1</sup> s'intéresse au classique problème de l'isopérimétrie plane, c'est-à-dire à la recherche d'une surface plane maximisant son aire pour un périmètre donné. Nous nous limiterons ici au cas des polygones, en privilégiant des démonstrations les plus géométriques que possible, et en ne faisant appel à l'analyse qu'en cas de nécessité.<sup>2</sup>

*Afin d'alléger le texte, nous raisonnons parfois modulo des isométries. Ainsi, nous parlerons directement du « carré de côté  $c$  », du « triangle équilatéral de côté  $c$  », etc.*

## 1. POURQUOI UN NOUVEAU DOCUMENT SUR L'ISOPÉRIMÉTRIE ?

Voici quelques apports de ce document.

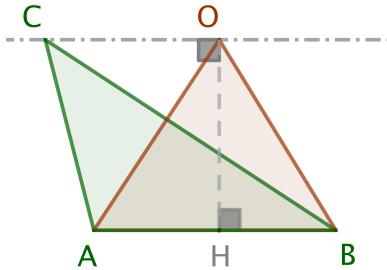
- **Pour les triangles**, l'auteur expose une démonstration ne s'appuyant pas sur le théorème des extrema d'une fonction réelle continue sur un compact. Il propose à la place une construction itérative basique qui, partant d'un triangle quelconque, converge vers le triangle équilatéral, solution du problème d'isopérimétrie pour les triangles.
- **Pour les quadrilatères**, le problème est traité sans aucune utilisation de l'analyse, en s'appuyant uniquement sur des considérations purement géométriques de niveau élémentaire.
- **Pour les polygones à 5 côtés et plus**, l'existence se fera via le basique théorème des extrema d'une fonction réelle continue sur un compact. La caractérisation des solutions optimales sera ensuite faite de façon élémentaires. L'auteur a veillé à ne laisser aucune ellipse explicative dans les démonstrations proposées.

## 2. TRIANGLES

### 2.1. Avec un côté fixé.

**Fait 1.** *Considérons tous les triangles de périmètre fixé, et ayant tous un côté en commun. Parmi tous ces triangles, un seul est d'aire maximale, c'est le triangle isocèle ayant pour base le côté commun.*

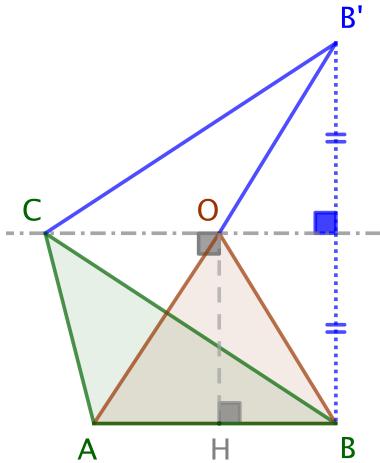
*Démonstration.* Soit  $ABC$  un triangle de périmètre  $p$ , et fixons le côté  $[AB]$ . Pour tout point  $M$  sur la parallèle à  $(AB)$  passant par  $C$ , nous savons que  $\text{Aire}(ABM) = \text{Aire}(ABC)$ . Notons alors  $O$  le point sur cette parallèle tel que  $ABO$  soit isocèle en  $O$ .



Via une symétrie axiale, voir ci-dessous, il est aisément de noter que  $\text{Perim}(ABC) \geq \text{Perim}(ABO)$ , avec égalité uniquement si  $ABC$  est isocèle en  $C$ .<sup>3</sup>

---

1. Cela nous conduira à admettre certains théorèmes qui, bien que paraissant simples, méritent une justification approfondie.  
 2. L'usage des nombres complexes fournit une approche très synthétique.  
 3. Plus précisément, en passant de  $C$  à  $O$ , le périmètre diminue.



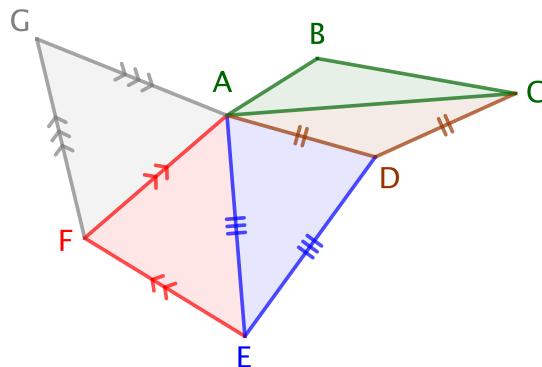
Une dilatation « *verticale* » de rapport  $r = \frac{\text{Perim}(ABC)}{\text{Perim}(ABO)} \geq 1$  donne un triangle isocèle  $ABO'$  tel que  $\text{Perim}(ABO') = p$  et  $\text{Aire}(ABO') \geq \text{Aire}(ABC)$ , avec égalité uniquement si  $ABC$  est isocèle en  $C$ . Contrat rempli!<sup>4</sup>  $\square$

**Remarque 2.1.** La recherche parmi les triangles avec un côté fixé de celui ayant un périmètre minimal pour une aire fixée est le problème dual de l’isopérimétrie pour ces triangles.

## 2.2. Le cas général.

**Fait 2.** Considérons tous les triangles de périmètre fixé  $p$ . Parmi tous ces triangles, un seul est d’aire maximale, c’est le triangle équilatéral de côté  $c = \frac{1}{3}p$ .

*Démonstration.* Nous allons donner une démonstration constructive via une application itérative du fait 1 qui va donner à la limite le triangle équilatéral d’aire maximale, et ceci avec une vitesse de convergence exponentielle.<sup>5</sup> Partons donc d’un triangle  $ABC$  quelconque, mais de périmètre  $p$ , le fait 1 nous donne successivement les triangles  $ACD$ ,  $ADE$  et  $AEF$  isocèles en  $D$ ,  $E$  et  $F$  respectivement, ayant tous pour périmètre  $p$ , et ceci avec des aires de plus en plus grandes. Le dessin suivant amène à conjecturer qu’en poursuivant le procédé pour avoir ensuite un triangle  $AFG$  isocèle en  $G$ ..., nous aboutirons « à la limite » à un triangle équilatéral.



Le passage d’un triangle quelconque  $ABC$  au triangle  $ACD$  isocèle en  $D$  nous amène à nous concentrer sur ce que donne notre procédé d’agrandissement d’aire à périmètre fixé pour des

4. La remarque 2.3 explique comment employer la méthode des extrema liés. Les arguments fournis à cet endroit s’adaptent facilement au cas des triangles de base fixée.

5. Ceci ne va nécessiter que l’emploi de propriétés simples de l’ensemble des réels.

triangles isocèles. Voici ce que nous pouvons affirmer en supposant  $AC > AD$ , comme dans notre exemple (nous allons voir que cette hypothèse est sans conséquence).

- (1) Comme  $AC + 2AD = p$  et  $AC > AD$ , nous avons  $AC > \frac{1}{3}p > AD$ . À l'étape suivante, comme  $AD + 2AE = p$ , nous obtenons  $AD < \frac{1}{3}p < AE$ .
- (2) Pour  $AEF$  isocèle en  $F$ , comme  $AE + 2AF = p$ , nous arrivons à  $AE > \frac{1}{3}p > AF$ .
- (3) Tentons de quantifier les écarts à la mesure pivot  $p' = \frac{1}{3}p$ .
  - Dans  $ACD$ , posant  $AD = p' - \epsilon_1$ , nous avons  $AC = p' + 2\epsilon_1$ .
  - Dans  $ADE$ , posant  $AE = p' + \epsilon_2$ , nous avons  $AD = p' - 2\epsilon_2$ .
  - Dans  $AEF$ , posant  $AF = p' - \epsilon_3$ , nous avons  $AE = p' + 2\epsilon_3$ .
  - Dans  $AFG$ , posant  $AG = p' + \epsilon_4$ , nous avons  $AF = p' - 2\epsilon_4$ .
  - Donc  $\epsilon_2 = \frac{1}{2}\epsilon_1$ ,  $\epsilon_3 = \frac{1}{2}\epsilon_2$  et  $\epsilon_4 = \frac{1}{2}\epsilon_3$ .

Voici les enseignements de ce qui précède en partant d'un triangle  $ABC$  non équilatéral.

- Si  $AC = \frac{1}{3}p$ , dès la 1<sup>re</sup> itération, nous avons un triangle équilatéral d'aire plus grande.
- Si  $AC \neq \frac{1}{3}p$ , notre procédé n'arrivera jamais en un nombre fini d'étapes à un triangle équilatéral. Dans ce cas, le point 3 ci-dessus nous donne une convergence exponentielle des longueurs des côtés vers  $p' = \frac{1}{3}p$ , tout en ayant des aires des plus en plus grandes.

Dans tous les cas, l'aire d'un triangle non équilatéral de périmètre  $p$  est strictement majorée par celle du triangle équilatéral de périmètre  $p$ . Et tout ceci a été obtenu via de la géométrie et de l'analyse élémentaires !  $\square$

### 2.3. Des preuves courtes non géométriques.

Nous donnons ici des preuves courtes du fait 2, mais sans notion géométrique intuitive. Efficacité versus beauté, l'auteur a choisi son camp depuis longtemps !

*Démonstration alternative 1.* Selon la **formule de Héron**,  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  est l'aire d'un triangle de côtés  $a, b, c$  et de demi-périmètre  $s = 0,5p$ . La comparaison des moyennes géométrique et arithmétique<sup>6</sup> donne  $\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}((s-a) + (s-b) + (s-c))$ , puis  $s(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{1}{27}s^4$ , et enfin  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{p^2}{12\sqrt{3}}$  où  $\frac{p^2}{12\sqrt{3}}$  est l'aire du triangle équilatéral de périmètre  $p$ .  $\square$

*Démonstration alternative 2.* Faisons appel à l'**analyse élémentaire aidée du fait 1**. Ce fait permet de se concentrer sur  $ABC$  isocèle en  $C$ . Choisissons un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $A(0; 0)$ ,  $B(AB; 0)$  et  $C(x_C; y_C)$  avec  $y_C \geq 0$ , et posons  $c = AC = BC \neq 0$  et  $s = \frac{p}{2}$ . Donc  $x_B = 2s - 2c \neq 0$ , et  $y_C = \sqrt{c^2 - (s-c)^2}$ , puis  $\text{Aire}(ABC)^2 = (s-c)^2(c^2 - (s-c)^2)$ , soit  $\text{Aire}(ABC)^2 = s(s-c)^2(s-2c)$ .<sup>7</sup> Or, le maximum de la fonction  $\alpha : c \mapsto s(s-c)^2(s-2c)$  est forcément atteint en  $c$  annulant  $\alpha'(c) = -2s(s-c)(s-2c) - 2s(s-c)^2 = 2s(c-s)(2s-3c)$ , soit pour  $c = \frac{2s}{3} = \frac{p}{3}$ , car  $c = s$  est exclu, donc  $ABC$  équilatéral est la solution « optimale ».  $\square$

*Démonstration alternative 3.* Utilisons **juste la continuité et la compacité**.

- On munit le plan d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

---

6. La formule de Héron reste un argument géométrique, mais quid de la comparaison des moyennes géométrique et arithmétique d'ordre 3, généralement justifiée via la concavité de la fonction logarithme. À l'ordre 2, l'inégalité s'obtient aisément par un argument géométrique simple : voir la remarque 3.2.

7. Nous venons de démontrer la formule de Héron dans le cas particulier d'un triangle isocèle.

- Les triangles  $ABC$  tels que  $\text{Perim}(ABC) = p$  sont représentés en posant  $A(0;0)$ ,  $B(AB;0)$  et  $C(x_C;y_C)$  avec  $y_C \geq 0$ . Un triangle peut donc avoir trois représentations, mais peu importe. De plus, on accepte les triangles dégénérés pour lesquels nous avons  $x_B = 0$  ou  $y_C = 0$  dans notre représentation. Nous notons alors  $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$  l'ensemble des triplets  $(x_B; x_C; y_C)$  ainsi obtenus.
- Il est facile de justifier que  $\mathcal{T}$  est séquentiellement fermé dans  $\mathbb{R}^3$ . De plus,  $\mathcal{T}$  est borné car  $x_B$ ,  $x_C$  et  $y_C$  le sont. En résumé,  $\mathcal{T}$  est un compact de  $\mathbb{R}^3$ .
- La fonction  $\alpha : (x_B; x_C; y_C) \in \mathcal{T} \mapsto 0,5x_B y_C \in \mathbb{R}_+$  est la fonction « aire » des triangles représentés. Par continuité et compacité,  $\alpha$  admet un maximum sur  $\mathcal{T}$ .
- Notons  $ABC$  un triangle maximisant  $\alpha$ . Forcément,  $ABC$  n'est pas dégénéré. Le fait 1 implique que  $ABC$  est équilatéral. En effet, dans le cas contraire, il existe un sommet  $X$  en lequel  $ABC$  n'est pas isocèle, mais la « maximalité » de  $ABC$  contredit le fait 1 en considérant comme fixé le côté opposé au sommet  $X$ .  $\square$

*Démonstration alternative 4.* Nous allons faire appel à **la méthode des extrema liés et la formule de Héron**. Pour cela, notons que l'aire d'un triangle étant positive ou nulle, nous pouvons chercher à maximiser son carré  $f(a; b; c) = s(s-a)(s-b)(s-c)$  sous la contrainte  $2s = a + b + c$  où  $s = 0,5p > 0$  est constant. Notant  $g(a; b; c) = a + b + c - 2s$ , la contrainte s'écrit  $g(a; b; c) = 0$ .

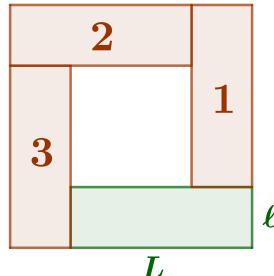
- Si un extremum existe,  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\partial_a f = \lambda \partial_a g$ ,  $\partial_b f = \lambda \partial_b g$  et  $\partial_c f = \lambda \partial_c g$  d'après la méthode des extrema liés.
- Donc  $-s(s-b)(s-c) = -s(s-a)(s-c) = -s(s-a)(s-b)$ , et par conséquent  $(s-b)(s-c) = (s-a)(s-c) = (s-a)(s-b)$ .
- Les cas  $s = a$ ,  $s = b$  et  $s = c$  donnent  $f(a; b; c) = 0$ .
- Le cas  $[s \neq a, s \neq b \text{ et } s \neq c]$  n'est envisageable que si  $a = b = c = \frac{p}{3}$ , ceci impliquant  $f(a; b; c) = \frac{1}{16}p\left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{p^2}{12\sqrt{3}}\right)^2 > 0$ .
- En résumé, l'existence d'un maximum implique que ce maximum corresponde au cas du triangle équilatéral.
- Il reste à démontrer qu'un tel maximum existe pour pouvoir conclure : ceci est facile à justifier en considérant l'ensemble compact  $[0; 2s]^3$  de  $\mathbb{R}^3$ , et la continuité de  $f$ .  $\square$

### 3. QUADRILATÈRES

#### 3.1. Les rectangles.

**Fait 3.** Considérons tous les rectangles de périmètre fixé  $p$ . Parmi tous ces rectangles, un seul est d'aire maximale, c'est le carré de côté  $c = 0,25p$ .

*Démonstration.* Voici une preuve géométrique élémentaire s'appuyant sur le dessin suivant où les rectangles 1, 2 et 3 sont isométriques au rectangle vert étudié de dimension  $L \times \ell$ .



Le raisonnement tient alors aux constatations suivantes accessibles à un collégien.

- (1) Le grand carré a une aire  $(L + \ell)^2$  supérieure ou égale à  $4L\ell$ , et ceci strictement si le rectangle initial n'est pas un carré.
- (2) Le grand carré a un périmètre égal à  $4(L + \ell)$ .
- (3) Une homothétie de rapport 0,5 donne un carré de périmètre  $0,5 \times 4(L + \ell) = 2(L + \ell)$ , et d'aire supérieure ou égale à  $0,5^2 \times 4L\ell = L\ell$ , avec inégalité stricte si le rectangle initial n'est pas un carré.

Donc, parmi tous les rectangles de périmètre  $p = 2(L + \ell)$  et d'aire  $L\ell$ , le seul qui puisse avoir une aire maximale est le carré. Joli ! Non ?  $\square$

**Remarque 3.1.** *Une preuve courante consiste à exprimer l'aire du rectangle comme polynôme du 2<sup>e</sup> degré en  $L$  par exemple. On obtient  $L\ell = L(0,5p - L)$  qui est maximale en  $L_M = 0,25p$  (moyenne des racines), d'où  $\ell_M = 0,25p = L_M$ .*

**Remarque 3.2.** *Nous avons établi que  $4L\ell \leq (L + \ell)^2$  pour  $(L; \ell) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ . Ceci permet de comparer les moyennes arithmétique  $\frac{1}{2}(L + \ell)$ , géométrique  $\sqrt{L\ell}$  et quadratique  $\sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$ .*

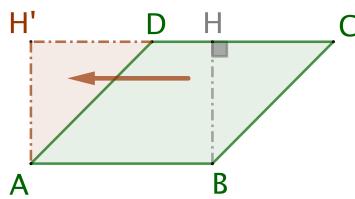
- *L'application de la racine carrée donne  $2\sqrt{L\ell} \leq L + \ell$ , puis  $\sqrt{L\ell} \leq \frac{1}{2}(L + \ell)$ .*
- *Un simple développement fournit  $2L\ell \leq L^2 + \ell^2$ , puis  $\sqrt{L\ell} \leq \sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$ .*
- *On peut faire mieux en notant que  $2L\ell \leq L^2 + \ell^2$  donne  $L^2 + \ell^2 + 2L\ell \leq 2(L^2 + \ell^2)$ , puis  $\frac{1}{4}(L + \ell)^2 \leq \frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)$ , et enfin  $\frac{1}{2}(L + \ell) \leq \sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$ .*

En résumé,  $\sqrt{L\ell} \leq \frac{1}{2}(L + \ell) \leq \sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$  pour  $(L; \ell) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ . Ces inégalités se généralisent à l'ordre  $n$  grâce à l'algèbre, ou l'analyse.

### 3.2. Les parallélogrammes.

**Fait 4.** *Considérons tous les parallélogrammes de périmètre fixé  $p$ . Parmi tous ces parallélogrammes, un seul est d'aire maximale, c'est le carré de côté  $c = 0,25p$ .*

*Démonstration.* Le calcul de l'aire d'un parallélogramme, voir le dessin ci-dessous, nous donne  $\text{Aire}(ABCD) = \text{Aire}(ABHH')$  et  $\text{Perim}(ABCD) \geq \text{Perim}(ABHH')$ , avec égalité uniquement si  $ABCD$  est un rectangle.



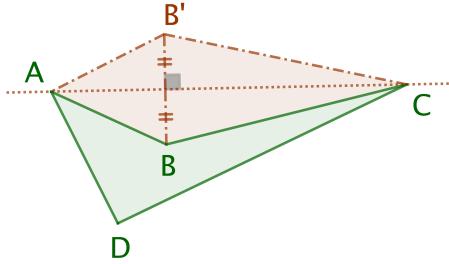
Via une homothétie de rapport  $k = \frac{\text{Perim}(ABCD)}{\text{Perim}(ABHH')} \geq 1$ , nous obtenons un rectangle de périmètre égal à  $p$ , et d'aire supérieure ou égale à  $\text{Aire}(ABCD)$ , avec égalité uniquement si  $ABCD$  est un rectangle. Nous revenons à la situation du fait 3 qui permet de conclure très facilement.  $\square$

**Remarque 3.3.** *Une méthode analytique devient pénible ici, car il faut par exemple prendre en compte l'angle au sommet A du parallélogramme. L'auteur préfère battre en retraite en clôturant cette remarque ici.*

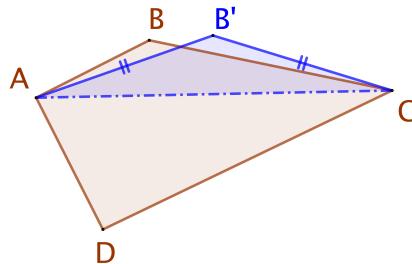
### 3.3. Le cas général.

**Fait 5.** Considérons tous les quadrilatères de périmètre fixé  $p$ . Parmi tous ces quadrilatères, un seul est d'aire maximale, c'est le carré de côté  $c = 0,25p$ .

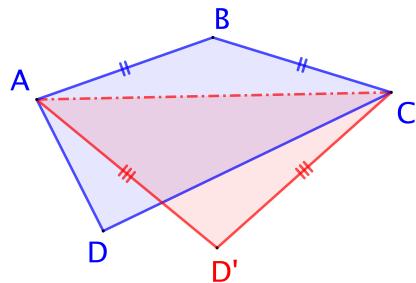
*Démonstration.* Rappelons, ou indiquons, qu'un quadrilatère  $\mathcal{Q}$  est convexe si pour toute paire de points  $M$  et  $N$  de la surface associée à  $\mathcal{Q}$ , le segment  $[MN]$  est contenu dans cette surface (cette définition se généralise aux polygones). La figure suivante montre que pour tout quadrilatère  $ABCD$  non convexe en  $B$ , et de périmètre  $p$ , il existe un quadrilatère convexe  $AB'CD$  de périmètre  $p$ , et tel que  $\text{Aire}(AB'CD) > \text{Aire}(ABCD)$ . Notre recherche doit donc continuer dans l'ensemble des quadrilatères convexes de périmètre  $p$ .



Si un quadrilatère convexe  $ABCD$  de périmètre  $p$  est tel que  $AB \neq BC$ , le fait 1 nous donne un quadrilatère convexe  $AB'CD$  de périmètre  $p$ ,<sup>8</sup> et vérifiant aussi  $AB' = B'C$  et  $\text{Aire}(AB'CD) > \text{Aire}(ABCD)$  comme le montre la figure ci-après. On se ramène donc au cas d'un quadrilatère convexe  $ABCD$  de périmètre  $p$  avec en plus  $AB = BC$ .

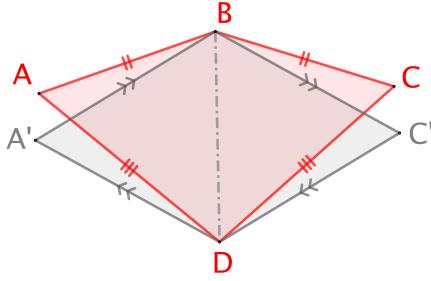


La méthode précédente appliquée au sommet  $D$  d'un quadrilatère convexe  $ABCD$  de périmètre  $p$  tel que  $AB = BC$  et  $AD \neq DC$  permet en fait de se ramener au cas d'un cerf-volant  $ABCD$  de périmètre  $p$ , avec  $AB = BC$  et  $AD = DC$ , voir ci-dessous.



En supposant que notre cerf-volant ne soit pas un losange, le fait 1 appliqué aux sommets  $A$  et  $C$  fournit un losange  $A'BC'D'$  de périmètre  $p$ , et tel que  $\text{Aire}(A'BC'D') > \text{Aire}(ABCD)$ . En effet, nous avons  $p = 2(AB+AD)$  et  $\text{Perim}(A'BD) = \text{Perim}(ABD)$ , donc  $A'B = A'D = 0,25p$ , et de même, nous obtenons  $C'B = C'D = 0,25p$ .

8. Noter que  $\text{Perim}(AB'CD) = \text{Perim}(AB'C) + \text{Perim}(ACD) - 2AC$ .



Pour conclure, il suffit d'appliquer le fait 4, puisque tout losange est un parallélogramme. Que la géométrie est belle!  $\square$

#### 4. LES POLYGONES

**4.1. Où allons-nous?** Pour passer au cas des polygones à  $n$  côtés pour  $n \geq 5$ , nous allons employer une méthode mêlant analyse, pour l'existence d'au moins une solution, et géométrie pour la caractérisation de l'unique solution, l'unicité venant comme cadeau de la recherche de polygones pouvant être gagnants. De plus, comme pour les quadrilatères, la convexité va jouer un rôle essentiel.

**4.2. Quelques définitions.** Pour l'existence d'au moins une solution, via l'analyse, nous allons devoir sortir de l'ensemble des polygones en travaillant avec des objets plus souples, à savoir les  $n$ -cycles que nous définissons tout de suite.

**Définition 1.** Pour  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ , un «  $n$ -cycle » désigne une liste ordonnée de  $n$  points du plan, les répétitions étant possibles. Nous noterons  $A_1A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle, et appellerons « sommets » du  $n$ -cycle les points  $A_i$  pour  $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ .

**Définition 2.** Pour tout  $n$ -cycle  $A_1A_2 \cdots A_n$ , on définit  $(A'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  comme étant  $n$ -périodique, et vérifiant  $A'_i = A_i$  sur  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ .

**Définition 3.** Les « côtés » d'un  $n$ -cycle  $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$  sont les segments  $[A'_iA'_{i+1}]$  pour  $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ , et la « longueur » de  $\mathcal{L}$  est définie par  $\text{Long}(\mathcal{L}) = \sum_{i=1}^n A'_iA'_{i+1}$ .

**Définition 4.** Un  $n$ -cycle  $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$  est « convexe » si, pour chaque côté  $[A'_iA'_{i+1}]$ , tous les sommets de  $\mathcal{L}$  sont du même côté, au sens large, de la droite  $(A'_iA'_{i+1})$ .

**Définition 5.** Un  $n$ -cycle est « dégénéré » s'il a, au moins, trois sommets consécutifs alignés.

**Définition 6.** Un «  $n$ -gone » est un  $n$ -cycle, avec  $n \geq 3$ , qui est non dégénéré, et n'admet aucun couple de sommets confondus, ni aucun couple de côtés non contigus sécants. Si certains côtés non contigus sont sécants, mais aucun couple de sommets confondus n'existe, nous parlerons de «  $n$ -gone croisé ».<sup>9</sup>

**Définition 7.** Un  $n$ -gone est dit « équilatéral » si tous ses côtés sont de même mesure.

**Définition 8.** Un «  $n$ -isogone » est un  $n$ -gone dont tous les angles au sommet sont égaux.

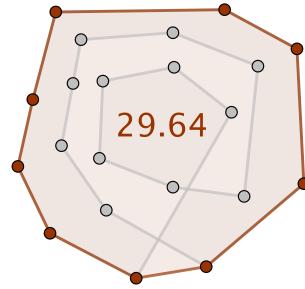
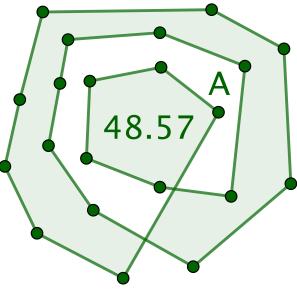
**Définition 9.** Un  $n$ -gone est dit « régulier » si c'est un  $n$ -isogone équilatéral.

**Remarque 4.1.** Un losange non carré est un  $n$ -gone équilatéral convexe non régulier, et un rectangle non carré est un  $n$ -isogone convexe non régulier.

9. Bien retenir qu'un  $n$ -gone n'est jamais croisé par définition. Dès lors, la longueur d'un  $n$ -gone correspond à son périmètre.

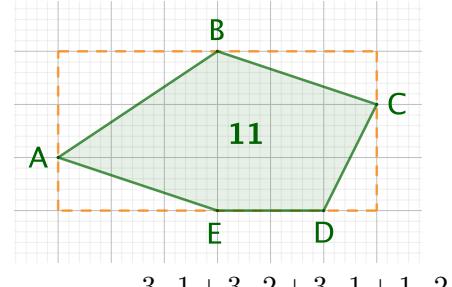
**4.3. Aire algébrique d'un  $n$ -cycle.** Pour prouver l'existence d'un  $n$ -gone solution du problème d'isopérimétrie polygonale, il faut un moyen « continu » de calculer une aire polygonale. L'outil que nous allons utiliser est l'aire algébrique qui est définie pour tout  $n$ -cycle  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  par  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}})$  indépendamment du point  $\Omega$ .<sup>10</sup>

Indiquons au passage qu'il faut être prudent avec cette notion comme le montre l'exemple suivant, obtenu avec **GeoGebra**,<sup>11</sup> où le  $n$ -gone croisé proposé, construit via une spirale positive depuis le point  $A$ ,<sup>12</sup> possède une aire algébrique positive supérieure à celle de l'enveloppe convexe du  $n$ -gone. Contre-intuitif, mais normal.



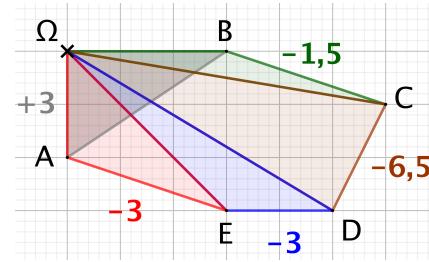
Au commencement étaient les triangles... Il est connu que  $ABC$  est d'aire  $\frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$  où  $\frac{1}{2} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  est appelé aire algébrique de  $ABC$ . Pour passer aux polygones, il « suffit » d'utiliser des triangles comme dans l'exemple suivant.

*Calcul direct à la main.*



$$11 = 3 \cdot 6 - \frac{3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{2}$$

*Via le déterminant.*



$$-11 = 3 - 1,5 - 6,5 - 3 - 3$$

Dans le cas précédent, le résultat pourrait dépendre du point  $\Omega$  employé, mais le fait suivant nous montre que non. Bonne nouvelle ! Yapluka...

**Fait 6.** Soit  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle où  $n \geq 2$ . La fonction qui à un point  $\Omega$  du plan associe  $\mu_1^n(\Omega; \mathcal{L}) = \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}})$  est indépendante du point  $\Omega$ . Dans la suite, cette quantité indépendante de  $\Omega$  sera notée  $\mu_1^n(\mathcal{L})$ .

*Démonstration.* Soit  $M$  un autre point du plan.

10. Ce fait est démontré un peu plus bas.

11. Quand **GeoGebra** associe un nombre à un  $n$ -cycle  $\mathcal{L}$ , il calcule la valeur absolue de son aire algébrique.

12. En calculant l'aire algébrique avec un point « au centre », les déterminants sont tous positifs.

$$\begin{aligned}
& \mu_1^n(\Omega ; \mathcal{L}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det (\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det (\overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MA'_{i+1}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \left[ \det (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) + \det (\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det (\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \det (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) + \sum_{i=1}^n \det (\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M}) + \mu_1^n(M ; \mathcal{L}) \\
&= \mu_1^n(M ; \mathcal{L}) + \sum_{i=2}^{n+1} \det (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_i}) - \sum_{i=1}^n \det (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_i}) \quad \underbrace{\qquad}_{A'_{n+1} = A'_1} \\
&= \mu_1^n(M ; \mathcal{L})
\end{aligned}$$

□

**Fait 7.** Soit  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle où  $n \geq 2$ . Pour  $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ , définissant le  $n$ -cycle  $\mathcal{L}_k = B_1 B_2 \cdots B_n$  par  $B_i = A'_{i+k-1}$ , nous avons  $\mu_1^n(\mathcal{L}) = \mu_1^n(\mathcal{L}_k)$ . Dans la suite, cette quantité commune sera notée  $\mu(\mathcal{L})$ .

*Démonstration.* Il suffit de s'adonner à un petit jeu sur les indices de sommation. □

**Fait 8.** Soit  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle où  $n \geq 2$ . Le  $n$ -cycle « opposé »  $\mathcal{L}^{\text{op}} = B_1 B_2 \cdots B_n$ , où  $B_i = A_{n+1-i}$ , vérifie  $\mu(\mathcal{L}^{\text{op}}) = -\mu(\mathcal{L})$ .

*Démonstration.* Soit  $\Omega$  un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned}
& \mu(\mathcal{L}^{\text{op}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \det (\overrightarrow{\Omega B'_i}, \overrightarrow{\Omega B'_{i+1}}) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \det (\overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}, \overrightarrow{\Omega A'_j}) \quad \underbrace{\qquad}_{B'_i = A'_{n+1-i} \text{ et } j = n-i} \\
&= - \sum_{j=1}^n \det (\overrightarrow{\Omega A'_j}, \overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}) \quad \underbrace{\qquad}_{A'_0 = A'_n \text{ et } A'_1 = A'_{n+1}} \\
&= -\mu(\mathcal{L})
\end{aligned}$$

□

**Fait 9.** Soit  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle où  $n \geq 2$ . La quantité  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{L}) = \frac{1}{2}\mu(\mathcal{L})$  ne dépend que du sens de parcours de  $\mathcal{L}$ , mais pas du point de départ.<sup>13</sup> Elle sera appelée « aire algébrique » de  $\mathcal{L}$ , et elle est étendue au 0-cycle et aux 1-cycles par  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{L}) = 0$  pour ces cycles particuliers.

*Démonstration.* C'est une conséquence directe des faits 7 et 8. □

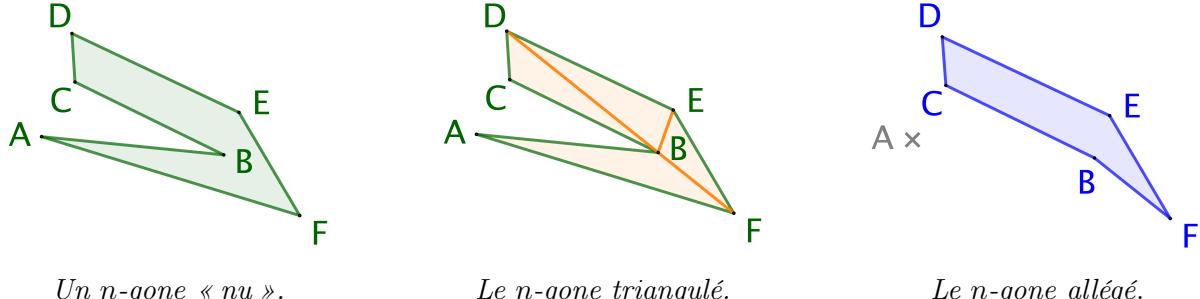
Considérons, maintenant, un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P} = A_1 A_2 \cdots A_n$  où les sommets sont parcourus dans le sens anti-horaire. En choisissant l'isobarycentre  $G$  des points  $A_1, A_2, \dots, A_n$  pour le calcul de  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})$ , nous obtenons que  $\text{Aire}(\mathcal{P}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})$  : en effet, avec ce choix, tous les déterminants  $\det (\overrightarrow{GA'_i}, \overrightarrow{GA'_{i+1}})$  sont positifs. Dans le cas non-convexe, les choses se compliquent a priori, car nous ne maîtrisons plus les signes des déterminants. Heureusement, nous avons le résultat essentiel suivant.

---

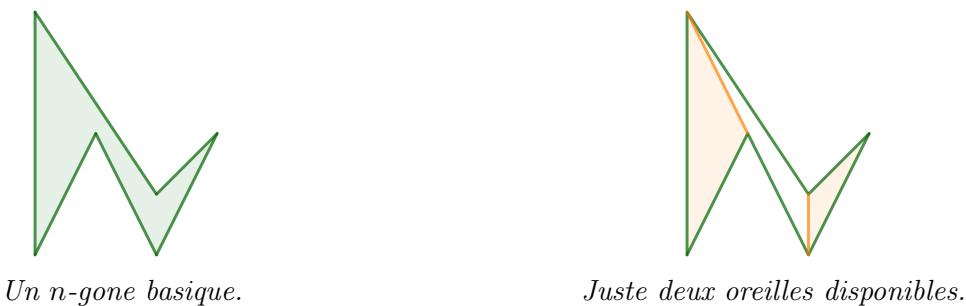
13. Le lecteur pardonnera les abus de langage utilisés.

**Fait 10.** Soit un  $n$ -gone  $\mathcal{P} = A_1A_2 \cdots A_n$  tel que  $A_1, A_2, \dots, A_n$  soient parcourus dans le sens trigonométrique, ou anti-horaire. Un tel  $n$ -gone sera dit « positif ».<sup>14</sup> Sous cette hypothèse, nous avons  $\mu(\mathcal{P}) \geq 0$ , i.e.  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) \geq 0$ .

*Démonstration.* Le théorème de triangulation affirme que tout  $n$ -gone est triangulable comme dans l'exemple suivant : ceci laisse envisager une démonstration par récurrence en retirant l'un des triangles ayant deux côtés correspondant à deux côtés consécutifs du  $n$ -gone (pour peu qu'un tel triangle existe toujours).



Le théorème de triangulation admet une forme forte donnant une décomposition contenant un triangle formé de deux côtés consécutifs du  $n$ -gone.<sup>15</sup> Nous dirons qu'une telle décomposition est « à l'écoute ». Ce très mauvais jeu de mots fait référence à la notion sérieuse « d'oreille » pour un  $n$ -gone : une oreille est un triangle inclus dans le  $n$ -gone, et formé de deux côtés consécutifs du  $n$ -gone. L'exemple suivant donne un  $n$ -gone n'ayant que deux oreilles.<sup>16</sup>



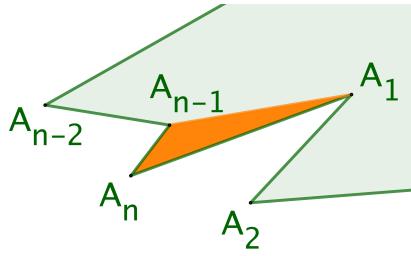
Raisonnons donc par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ .

- **Cas de base.** Soit  $ABC$  un triangle. Dire que les sommets  $A, B$  et  $C$  sont parcourus dans le sens trigonométrique, c'est savoir que  $\mu(ABC) = \det(\vec{AB}, \vec{AC}) > 0$ .
- **Hérédité.** Soit un  $n$ -gone positif  $\mathcal{P} = A_1A_2 \cdots A_n$  avec  $n \in \mathbb{N}_{>3}$ . On peut supposer que  $A_{n-1}A_nA_1$  est une oreille d'une triangulation à l'écoute du  $n$ -gone  $\mathcal{P}$ .

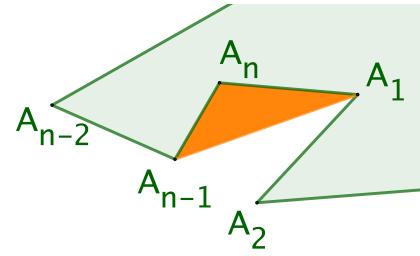
14. Bien noté que cette notion ne peut pas exister pour un  $n$ -gone croisé. De façon cachée, nous utilisons le célèbre théorème de Jordan, dans sa forme polygonale.

15. En pratique, cette forme forte est peu utile, car elle aboutit à un algorithme de recherche trop lent.

16. On démontre que tout  $n$ -gone admet au minimum deux oreilles.



$A_{n-1}A_nA_1$  est une oreille.



$A_{n-1}A_nA_1$  n'est pas une oreille.

Posons  $\mathcal{P}' = A_1 \cdots A_{n-1}$  où  $k = n - 1$  vérifie  $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ . Par hypothèse,  $\mathcal{P}'$  est positif. Nous arrivons finalement aux calculs élémentaires suivants en utilisant  $A_1$  comme point de calcul de  $\mu(\mathcal{P})$ .

$$\begin{aligned} & \mu(\mathcal{P}) \\ &= \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{A_1 A'_j}, \overrightarrow{A_1 A'_{j+1}}) \quad \left. \begin{array}{l} A'_{n+1} = A_1 \\ A'_i = A_i \text{ pour } i \leq n \end{array} \right. \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \det(\overrightarrow{A_1 A_j}, \overrightarrow{A_1 A_{j+1}}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Pour } \mu(\mathcal{P}'), \text{ noter que} \\ \det(\overrightarrow{A_1 A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1 A_1}) = 0. \end{array} \right. \\ &= \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_1 A_j}, \overrightarrow{A_1 A_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1 A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1 A_n}) \\ &= \mu(\mathcal{P}') + \mu(A_{n-1}A_nA_1) \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, nous savons que  $\mu(\mathcal{P}') \geq 0$ , et comme  $A_{n-1}A_nA_1$  est une oreille de  $\mathcal{P}$ , la 3-ligne  $A_{n-1}A_nA_1$  est forcément positive, d'où  $\mu(A_{n-1}A_nA_1) \geq 0$  d'après le cas de base. Nous arrivons bien à  $\mu(\mathcal{P}) \geq 0$ , ce qui permet de finir aisément la démonstration par récurrence.  $\square$

**Fait 11.** Pour tout  $n$ -gone  $\mathcal{P}$ , nous avons :  $\text{Aire}(\mathcal{P}) = |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})|$ .

*Démonstration.* Les deux points suivants permettent de faire une preuve par récurrence.

- **Cas de base.** L'égalité est immédiate pour les triangles (c'est ce qui a motivé la définition de l'aire algébrique).
- **Hérédité.** Soit  $\mathcal{P} = A_1 \cdots A_n$  un  $n$ -gone avec  $n \in \mathbb{N}_{>3}$ . Comme  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}^{\text{op}}) = -\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})$  selon le fait 8, nous pouvons choisir de parcourir  $\mathcal{P}$  positivement, puis de nous placer dans la situation de la démonstration du fait 10 :  $A_{n-1}A_nA_1$  est une oreille positive d'une triangulation à l'écoute du  $n$ -gone  $\mathcal{P}$ , et  $\mathcal{P}' = A_1 \cdots A_{n-1}$  un  $k$ -gone positif où  $k = n - 1$  vérifie  $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ . Nous arrivons finalement aux calculs élémentaires suivants.

$$\begin{aligned} & \text{Aire}(\mathcal{P}) \\ &= \text{Aire}(\mathcal{P}') + \text{Aire}(A_{n-1}A_nA_1) \quad \left. \begin{array}{l} A_{n-1}A_nA_1 \text{ est une oreille de } \mathcal{P}. \\ \text{Hypothèse de récurrence et cas de base.} \end{array} \right. \\ &= \frac{1}{2}|\mu(\mathcal{P}')| + \frac{1}{2}|\mu(A_{n-1}A_nA_1)| \quad \left. \begin{array}{l} \text{Voir le fait 10.} \\ \text{Comme dans la preuve du fait 10.} \end{array} \right. \\ &= \frac{1}{2}(\mu(\mathcal{P}') + \mu(A_{n-1}A_nA_1)) \\ &= \frac{1}{2}\mu(\mathcal{P}) \\ &= \frac{1}{2}|\mu(\mathcal{P})| \\ &= |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})| \quad \left. \begin{array}{l} \text{Voir le fait 10.} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$\square$

Finissons par un théorème de continuité qui permettra de justifier l'existence d'au moins une solution au problème d'isopérimétrie polygonale.

**Fait 12.** Soient  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  et  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé direct du plan. On note  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$  l'ensemble des uplets de coordonnées  $(x(A_1); y(A_1); \dots; x(A_n); y(A_n))$  où  $A_1 A_2 \cdots A_n$  désigne un  $n$ -cycle, et  $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction qui à un uplet de  $\mathcal{U}$  associe l'aire algébrique du  $n$ -cycle qu'il représente. Avec ces notations, la fonction  $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est continue.

*Démonstration.* Immédiat, car nous avons une fonction polynomiale.  $\square$

**4.4. Au moins une solution, ou presque.** Nous allons restreindre notre recherche d'un  $n$ -gone solution du problème d'isopérimétrie polygonale à l'ensemble des  $n$ -gones convexes. Le fait ?? nous montrera plus tard que cette restriction n'en est pas une. Cette section va se résumer à l'unique fait suivant a priori imprécis,<sup>17</sup> mais qui va être essentiel dans la suite de notre analyse.

**Fait 13.** Soit  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  un naturel fixé. Parmi tous les  $n$ -cycles convexes positifs de longueur  $\ell$  fixée, non nulle, il en existe au moins un d'aire algébrique maximale.

*Démonstration.*

- Munissant le plan d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on note  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$  l'ensemble des uplets de coordonnées  $(x(A_1); y(A_1); \dots; x(A_n); y(A_n))$  où  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  est un  $n$ -cycle vérifiant les conditions suivantes.
  - (1)  $A_1 = O$ .
  - (2)  $\text{Long}(\mathcal{L}) = \ell$ .
  - (3)  $\forall (k, i) \in [\![1; n]\!]^2, \det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$ .
- La condition 3 n'est autre que celle caractérisant les  $n$ -cycles convexes et positifs, donc  $\mathcal{U}$  est l'ensemble des  $n$ -cycles convexes positifs  $OA_2 \cdots A_n$  de longueur  $\ell$ .
- $\mathcal{U}$  est fermé dans  $\mathbb{R}^{2n}$ , car les conditions le définissant le sont, et il est borné, car inclus dans la boule fermée de centre  $O$  et de rayon  $\ell$ . En résumé,  $\mathcal{U}$  est un compact de  $\mathbb{R}^{2n}$ .
- Nous définissons la fonction  $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui à un uplet de  $\mathcal{U}$  associe l'aire algébrique du  $n$ -cycle qu'il représente. Cette fonction est continue d'après le fait 12. Donc,  $\alpha$  admet un maximum sur  $\mathcal{U}$  par continuité et compacité.
- Pour conclure, il suffit de noter que tout  $n$ -cycle d'origine  $B_1$  translaté via le vecteur  $\overrightarrow{B_1 O}$  donne un  $n$ -cycle d'origine  $O$ , sans modification de la longueur, ni de l'aire algébrique, ni de l'orientation des sommets.  $\square$

---

<sup>17</sup> Un  $n$ -cycle convexe n'est pas forcément un  $n$ -gone. Penser tout bêtement à un  $n$ -cycle « plat ». Il existe plein d'autres exemples de  $n$ -cycles convexes dégénérés.