BROUILLON – NEWTON, BERNOULLI, LEIBNIZ, FIBONACCI ET BELL

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts.

Mentions « légales »

Table des matières

Date: 2 Avril 2025 - 3 Avril 2025.

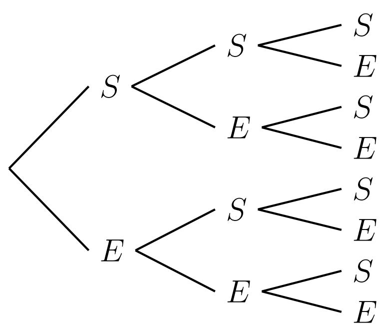
1. Des identités bien connues

Les formules suivantes intriguent par leur ressemblance. Bien qu'elles appartiennent à des domaines distincts, leur similitude n'est pas le fruit du hasard. À travers deux démonstrations adoptant des approches différentes, nous révélerons les liens combinatoires qui unissent ces objets en apparence indépendants.

- **Formule du binôme de Newton :** $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
- **Formule de dérivation de Leibniz :** $(fg)^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$.
- **Loi binomiale :** $\mathrm{P}(X=j) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_{jk}$,[1] même s'il est d'usage de juste écrire $\mathrm{P}(X=j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$.
- **Une identité portant sur la suite de Fibonacci :** $F_{2n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k$.
- **Une formule similaire avec des coefficients binomiaux :** $\binom{2n}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k}$.
- **Une équation liant les nombres de Bell :** $B_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$ où B_s est le nombre de façons de partitionner un ensemble de s éléments en sous-ensembles non vides : par exemple, $B_3 = 5$, car l'ensemble $\{a,b,c\}$ admet les partitions $\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a\} \cup \{b,c\}$, $\{b\} \cup \{a,c\}$ et $\{c\} \cup \{a,b\}$.

2. La loi binomiale révèle...

2.1. **De l'utilité des arbres.** Lorsque l'on présente la loi binomiale, il est courant d'utiliser un arbre de probabilité comme le suivant où S désigne un succès et E un échec, un succès ayant une probabilité p de se réaliser (ici nous avons un niveau de profondeur de 3).

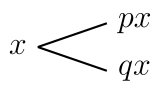


Définition 1. $\binom{n}{k}$ *désigne le nombre de chemins avec exactement k succès dans la version générale à n niveaux de l'arbre précédent. Dans cette section, nous n'utiliserons ni la définition combinatoire de $\binom{n}{k}$ via les sous-ensembles à k éléments, ni la formule factorielle de $\binom{n}{k}$.*

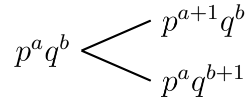
Notant X la variable aléatoire comptant le nombre de succès, ainsi que $q = 1-p$, expliquons pourquoi nous avons $\mathrm{P}(X=j) = \binom{n}{j} p^j q^{n-j}$, soit de façon équivalente $\mathrm{P}(X=j) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_{jk}$. Pour cela, calculons les probabilités aux feuilles d'un nouvel arbre via le

1. δ_{jk} est le symbole de Kronecker valant 1 si $j=k$, et 0 sinon, tandis que X désigne la variable aléatoire comptant le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli de paramètre $(n\,;p)$.

mini-arbre de calcul suivant dans lequel un choix de chemin vers le bas, soit vers un succès, implique de multiplier la probabilité en cours par p, et sinon il faut la multiplier par q.

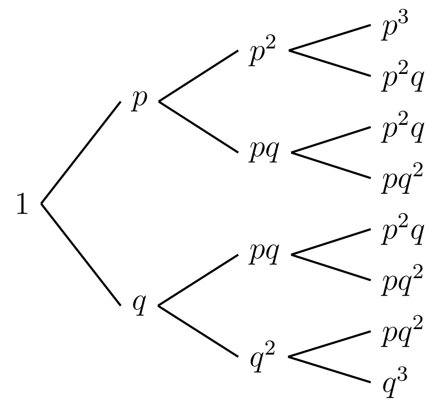


Arbre de calcul.



Un calcul intermédiaire.

Si l'on part de la racine avec la valeur 1 pour construire un arbre binaire complet via la règle de calcul, nous obtenons $\mathrm{P}(X=j) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_{jk}$ de façon combinatoire.



Un exemple de calcul.

La méthode que nous venons de présenter est généralisable à d'autres contextes comme nous allons le constater dans la suite.