BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES

CHRISTOPHE BAL

Mentions « légales »

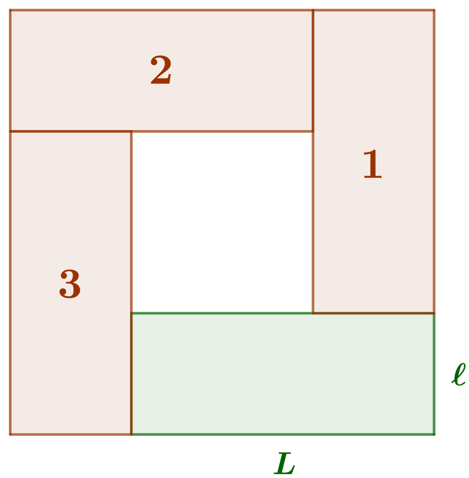
Table des matières

Date: 18 Janvier 2025.

1. Le cas du rectangle

Fait 1. *Considérons tous les rectangles de périmètre fixé p. Parmi tous ces rectangles, celui d'aire maximale est le carré de côté $c = 0{,}25p$.*

Démonstration. Une preuve courante est d'exprimer l'aire du rectangle comme un polynôme du 2^e degré en L par exemple.[1] On peut en fait faire plus simplement grâce au dessin suivant où les rectangles 1, 2 et 3 sont isométriques au rectangle vert étudié de dimension $L \times \ell$.



Le raisonnement tient alors aux constations suivantes accessibles à un collégien.

(1) Le grand carré a un aire supérieure ou égale à $4L\ell$.

(2) Le grand carré a un périmètre égal à $4(L + \ell)$.

(3) Via une homothétie de rapport $0{,}5$, nous obtenons un carré d'aire supérieure ou égale à $0{,}5^2 \times 4L\ell = L\ell$, et de périmètre égal à $0{,}5 \times 4(L + \ell) = 2(L + \ell)$.

Donc pour tout rectangle de périmètre $p = 2(L+\ell)$ et d'aire $\mathscr{A} = L\ell$, nous pouvons construire un carré de périmètre identique, mais avec une aire supérieure ou égale à $\mathscr{A}$. Joli ! Non ? ☐

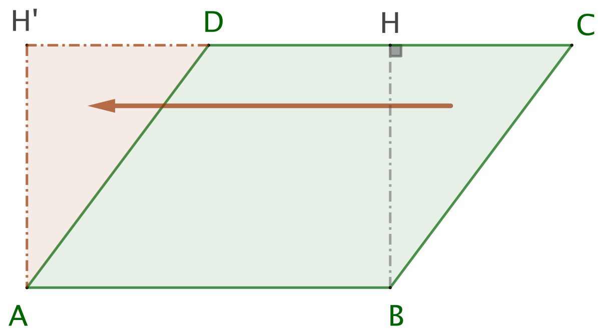
Remarque 1.1. *Au passage, nous avons pour $(L\,;\ell) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $4L\ell \leq (L + \ell)^2$, c'est-à-dire $2L\ell \leq L^2 + \ell^2$, d'où $\sqrt{L\ell} \leq \sqrt{\dfrac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$, soit la comparaison des moyennes géométriques et quadratiques d'ordre* 2.

2. Le cas du parallélogramme

Fait 2. *Considérons tous les parallélogrammes de périmètre fixé p. Parmi tous ces parallélogrammes, celui d'aire maximale est le carré de côté $c = 0{,}25p$.*

Démonstration. Le calcul de l'aire d'un parallélogramme donne l'astuce : dans le dessin ci-dessous, nous avons $\mathrm{Aire}(ABCD) = \mathrm{Aire}(ABHH')$ et $\mathrm{Perim}(ABCD) \geq \mathrm{Perim}(ABHH')$.

1. L'aire est donnée par $L\ell = L(0{,}5p - L)$ qui est maximale en $L_M = 0{,}25p$ (moyenne des racines), d'où $\ell_M = 0{,}25p = L_M$.



Via une homothétie de rapport $k \geq 1$, nous obtenons un rectangle d'aire supérieure ou égale à Aire$(ABCD)$, et de périmètre égal à p. Nous revenons à la situation du fait 1 qui permet de conclure. □

Remarque 2.1. *Une méthode analytique devient pénible ici, car il faut par exemple prendre en compte l'angle au sommet A du parallélogramme. L'auteur préfère battre en retraite en clôturant cette remarque ici.*

3. Le cas du triangle

Fait 3. *Considérons tous les triangles de périmètre fixé p. Parmi tous ces triangles, celui d'aire maximale est le triangle équilatéral de côté $c = \dfrac{1}{3}p$.*

Démonstration. Une première idée, calculatoire, est de passer via la classique formule de Héron $Aire = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ où $s = 0{,}5p$ désigne le demi-périmètre, et les variables a, b et c les mesures des côtés du triangle. Comme l'aire est positive ou nulle, il suffit de chercher les maxima de $Aire^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$. La méthode des extrema liés s'appliquent ici, [2] mais il se trouve que l'on peut établir le fait 3 ci-dessus avec des raisonnements géométriques élémentaires. La petite astuce toute simple est de considérer le problème plus contraint exprimé dans le fait 4 donné plus bas, et qui permet de conclure comme suit.

- XXX
- XXX
- XXX

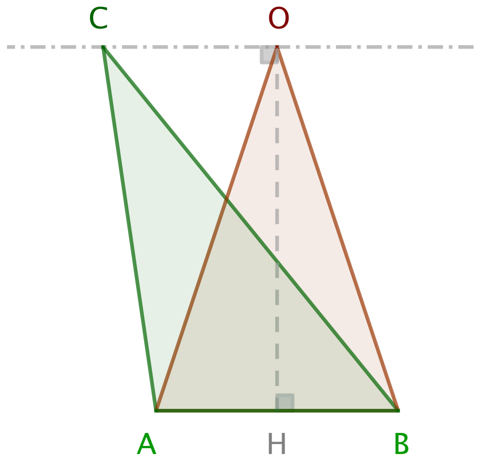
□

Fait 4. *Considérons tous les triangles de périmètre fixé p et ayant tous au moins un côté de même mesure c. Parmi tous ces triangles, celui qui a une aire maximale est le triangle isocèle ayant une base de mesure c.*

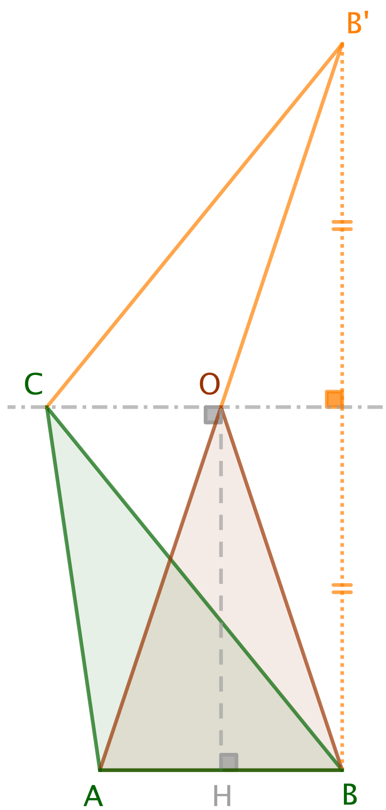
Démonstration. Soit ABC un triangle de périmètre p, et posons $c = AB$. Les points M sur la parallèle à (AB) passant C sont tels que Aire(ABM) = Aire(ABC). On note O le point sur cette parallèle tel que ABO soit isocèle en O.

---

2. Nous devons trouver un éventuel maximum de $f(a\,;b\,;c) = \frac{1}{16}(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$ sous la contrainte $2s = a+b+c$ où $s > 0$ est une constante. Notant $g(a\,;b\,;c) = a+b+c-2s$, la contrainte s'écrit $g(a\,;b\,;c) = 0$. Selon la méthode des extrema liés, un éventuel maximum doit vérifier $\partial_a f = \lambda \partial_a g$, $\partial_b f = \lambda \partial_b g$ et $\partial_c f = \lambda \partial_c g$ pour un certain réel λ. Donc, $-s(s-b)(s-c) = -s(s-a)(s-c) = -s(s-a)(s-b) = \lambda$, puis $(s-b)(s-c) = (s-a)(s-c) = (s-a)(s-b)$. Le cas $s = a$, $s = b$ ou $s = c$ donne $f(a\,;b\,;c) = 0$ à chaque fois. Quant au cas $s \neq a$, $s \neq b$ et $s \neq c$, il n'est envisageable que si $a = b = c = \frac{p}{3}$ qui implique $f(a\,;b\,;c) = \frac{1}{16}p\left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$. En résumé, l'existence d'un maximum implique que ce maximum corresponde au cas du triangle équilatéral. Il reste à justifier qu'un tel maximum existe pour pouvoir conclure. Ceci est facile à justifier en considérant le compact $[0\,;s]^3$.



Via une petite symétrie axiale, voir ci-dessous, il est aisé de noter que $\mathrm{Perim}(ABC) \geq \mathrm{Perim}(ABO)$.



Via une dilatation verticale de rapport $r \geq 1$, on obtient finalement un triangle isocèle ABO' de périmètre p tel que $\mathrm{Aire}(ABO') \geq \mathrm{Aire}(ABC)$.[3] Contrat rempli ! $\square$

3. Il est immédiat d'adapter les arguments de la méthode des extrema liés pour le triangle général au cas qui nous a occupé dans cette preuve.