# IDENTITÉS PARTICULIÈRES GÉNÉRALISABLES RIGOUREUSEMENT

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source LATEX, disponible sur la page*
*https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/visual-proof/polynomial-analytic-principles.*

## Mentions « légales »



Table des matières

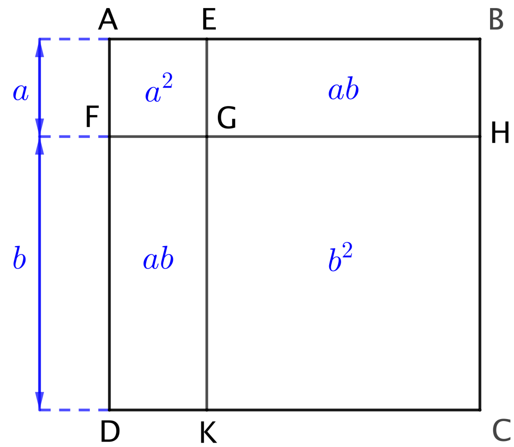


*Date*: 16 Juillet 2019 - 18 Mars 2025.

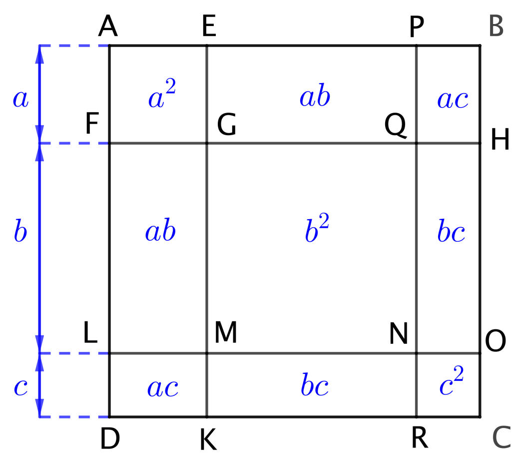
Ce document donne un cadre rigoureux pour justifier certaines identités facilement obtenues via des cas particuliers « *visuels* » comme dans les preuves sans mot.

## 1. Au commencement étaient les polynômes

Via de simples calculs d'aires, il est très facile de découvrir les classiques identités remarquables $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$, $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$ et $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$. Par exemple, en considérant le dessin ci-dessous où $ABCD$, $AEGF$ et $GHCK$ sont des carrés, il est évident que $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$. Malheureusement, cette démonstration n'est valable que pour $a > 0$ et $b > 0$ *(ce sont des contraintes géométriques concrètes)*.




Comment passer à $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ pour $a$ et $b$ deux réels de signes quelconques ? Classiquement, on fait une vérification via un calcul algébrique : en résumé, on conjecture géométriquement, puis on valide algébriquement. Bien que rigoureuse, la démarche précédente est peu satisfaisante, car elle balaye d'un revers de main l'approche géométrique, dont le rôle est réduit à la découverte d'une formule. Si l'on considère le dessin ci-après, il est dommage de devoir faire du calcul algébrique pour valider $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ pour $a$, $b$ et $c$ des réels de signes quelconques. Ce serait bien de pouvoir passer directement de $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ vraie pour $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$, à la validation de l'identité pour $a$, $b$ et $c$ de signes quelconques.




Le fait 1 ci-après va rendre licite le passage des formules géométriques contraintes précdentes au cas général en faisant les choix suivants.

- $p_1(a\,;b) = (a+b)^2 - a^2 - b^2 - 2ab$
- $p_2(a\,;b\,;c) = (a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$

**Fait 1.** *Soit $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale à $n$ variables, où $n \in \mathbb{N}^*$. Si $p$ s'annule sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$, alors $p$ s'annule sur $\mathbb{R}^n$ tout entier.*

*Démonstration.* Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour démontrer la validité de la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie par *« Pour tout fonction polynomiale réelle $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si $p$ s'annule sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$, alors $p$ s'annule sur $\mathbb{R}^n$ tout entier. »*.

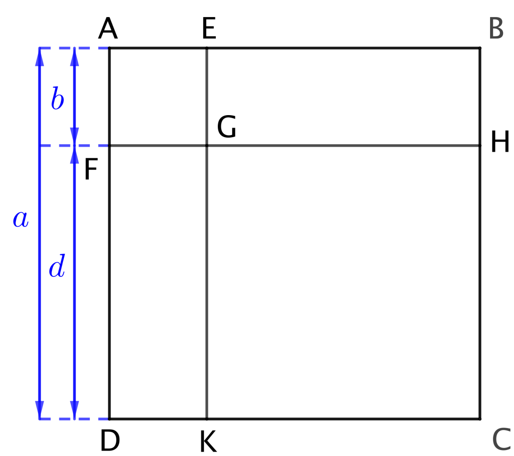
- **Cas de base.** $\mathcal{P}(1)$ signifie qu'une fonction polynomiale réelle à une variable s'annulant sur $\mathbb{R}_+^*$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier. Comme un polynôme réel non nul n'a qu'un nombre fini de racines, nous avons la validité de $\mathcal{P}(1)$.
- **Hérédité.** Supposons $\mathcal{P}(n)$ valide pour un naturel $n$ quelconque. Soit une fonction polynomiale $p$ à $(n+1)$ variables vérifiant les conditions de la propriété $\mathcal{P}(n+1)$.
  (1) Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, puis la fonction polynomiale $p_x(x_1\,;\dots;x_n) = p(x_1\,;\dots;x_n\,;x)$. Comme $p_x$ vérifie les conditions de la propriété $\mathcal{P}(n)$, par hypothèse de récurrence, on a $p_x(x_1\,;\dots;x_n) = 0$, soit $p(x_1\,;\dots;x_n\,;x) = 0$, pour tous réels $x_1$ , ... , $x_n$.
  (2) Fixons maintenant des réels $x_1$ , ... , $x_n$ de signes quelconques, et considérons la fonction polynomiale $\ell(x) = p(x_1\,;\dots;x_n\,;x)$. Le point précédent montre que $\ell$ vérifie $\mathcal{P}(1)$, donc $\ell(x) = 0$, soit $p(x_1\,;\dots;x_n\,;x) = 0$, pour tout réel $x$, d'après le cas de base.
  (3) Finalement, $p(x_1\,;\dots;x_n\,;x) = 0$ pour tous réels $x_1$ , ... , $x_n$ et $x$. Autrement dit, nous avons déduit la validité de $\mathcal{P}(n+1)$ à partir de celle de $\mathcal{P}(n)$.
- **Conclusion.** Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout naturel non nul $n$. □

**Exemple 2.** *En utilisant une approche géométrique semblable à celle présentée plus haut, il devient évident, et rigoureux maintenant, d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (a_1\,;\dots;a_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)^2 = \sum_{k=1}^{n} (a_k)^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j$$

**Exemple 3.** *Nous laissons le soin au lecteur de vérifier à l'aide d'un cube, le solide géométrique, la validité de l'identité $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ pour tous réels $a$ et $b$.*

Considérons maintenant le dessin ci-dessous avec $d = a - b$, et la contrainte $a > b$.



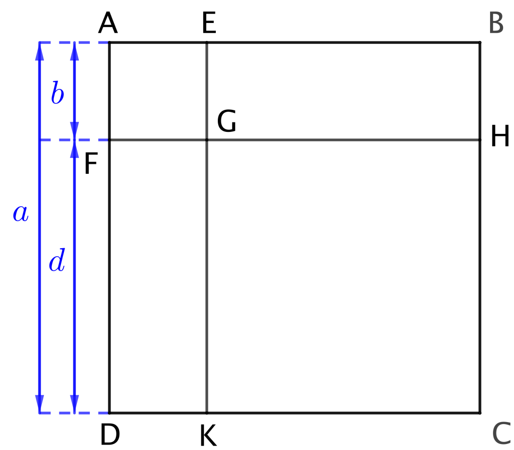

Le fait 1, bien que très utile, ne peut plus s'appliquer ici au calcul géométrique évident suivant.
$\mathscr{A}_{GHCK} = \mathscr{A}_{ABCD} - \mathscr{A}_{ABHF} - \mathscr{A}_{AEKD} + \mathscr{A}_{AEGF}$
$\iff (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Peut-on tout de même déduire du calcul géométrique précédent la validité, pour tous les réels $a$ et $b$, de l'identité $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ ? Le fait 4 suivant montre que cela est possible.

**Fait 4.** *Soit $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale à $n$ variables, où $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\mathscr{E} \subseteq \mathbb{R}^n$ contient $\mathscr{E}_1 \times \cdots \times \mathscr{E}_n$ où chaque $\mathscr{E}_k \subseteq \mathbb{R}$ est infini, et si $p$ s'annule sur $\mathscr{E}$, alors $p$ s'annule sur $\mathbb{R}^n$ tout entier.*

*Démonstration.* La preuve du fait 1 s'adapte facilement au cadre proposé ici (se souvenir que la clé du raisonnement était le fait qu'un polynôme réel n'admet qu'un nombre fini de racines). □

**Exemple 5.** *Considérons le dessin ci-dessous avec $d = a - b$, et la contrainte $a > b$.*

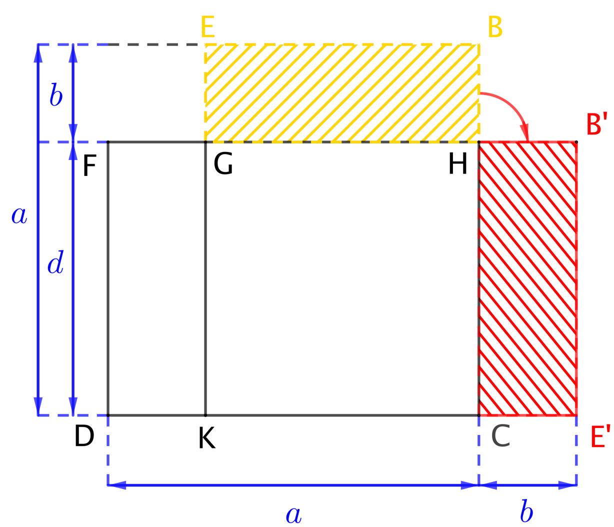



*Nous avons les calculs géométriques simples suivants.*

$\mathscr{A}_{ABCD} - \mathscr{A}_{AEGF} = \mathscr{A}_{GHCK} + \mathscr{A}_{EBHG} + \mathscr{A}_{FGKD}$

$\iff a^2 - b^2 = \mathscr{A}_{GHCK} + \mathscr{A}_{EBHG} + \mathscr{A}_{FGKD}$

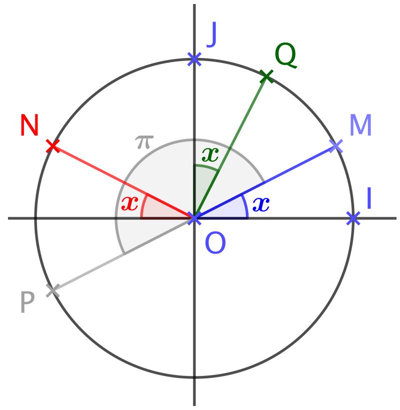
*En déplaçant ensuite le rectangle $EBHG$ comme ci-dessous, nous obtenons alors un rectangle de dimension $(a+b) \times (a-b)$.*




*Finalement, nous obtenons $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ si $a > b$, puis, en appliquant le fait 4 à $p(a\,;b) = a^2 - b^2 - (a+b)(a-b)$, on obtient : $\forall (a\,;b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.*

## 2. Ensuite vinrent les fonctions analytiques

Considérons le dessin suivant, où les mesures des angles sont en radians.




Via les points $M$, $N$, $P$ et $Q$, il est facile de fournir des arguments géométriques justifiant que, sous la condition $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{4}\right[$, on a :

- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
  $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
  $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

De nouveau, il serait bien de pouvoir passer à la validité des formules précédentes sur $\mathbb{R}$ tout entier sans plus d'effort *(considérer les autres cas n'est pas compliqué, mais c'est pénible)*. Nous allons voir que cela est licite grâce au fait 7 suivant qui est un peu technique, car il nécessite la notion de fonction holomorphe, un concept dont nous donnons la définition tout de suite.

**Définition 6.** *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert non vide. Une fonction complexe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe en $\omega \in \Omega$, si la limite* $\displaystyle\lim_{\substack{|z-\omega| \to 0 \\ z \in \Omega - \{\omega\}}} \left(\frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega}\right)$ *existe dans $\mathbb{C}$.*

Tout comme avec les fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$, la propriété d'holomorphie se conserve par addition, multiplication, inverse et composition. De plus, comme les fonctions polynomiales, les fonctions holomorphes vérifient des restrictions fortes sur leurs zéros éventuels, comme le montre le fait classique suivant.

**Fait 7.** *Soient $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe non vide, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non identiquement nulle. Si $\lambda \in \Omega$ vérifie $f(\lambda) = 0$, alors il existe un ouvert $V$ tel que $\lambda \in V \subseteq \Omega$, et $\forall z \in V - \{\lambda\}$, $f(z) \neq 0$* (c'est le principe des zéros isolés).

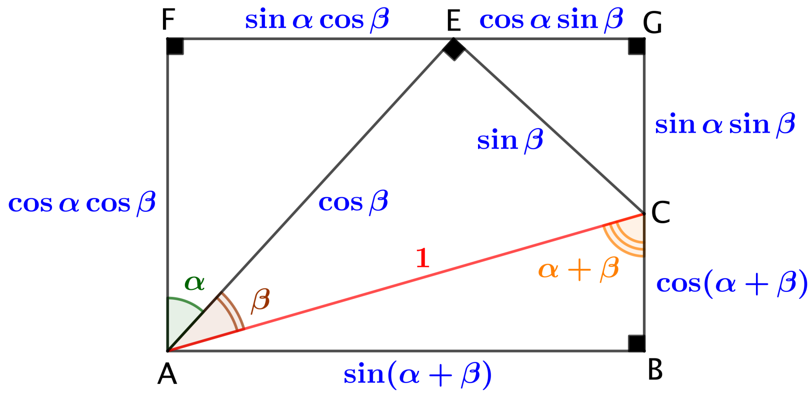
*Démonstration.* Ceci nous amènerait trop loin, donc nous admettrons ce résultat. □

Si nous revenons à nos identités trigonométriques, il suffit de savoir que les fonctions circulaires réelles ne sont en fait que les restrictions à $\mathbb{R}$ de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ tout entier, et de noter que le raisonnement géométrique au début de cette section fait clairement apparaître des zéros non isolés pour les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ suivantes. [1]

- $f_1(z) = \cos(\pi - z) + \cos z$ et $f_2(z) = \sin(\pi - z) - \sin z$
- $f_3(z) = \cos(z + \pi) + \cos z$ et $f_4(z) = \sin(z + \pi) + \sin z$
- $f_5(z) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \sin z$ et $f_6(z) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \cos z$

1. Nous admettrons ces affirmations qui ne sont pas violentes à démontrer une fois que l'on a les bases de la théorie des fonctions holomorphes.

Que faire si nous avons des formules trigonométriques impliquant deux variables ? Par exemple, le dessin suivant, par simple application des définitions géométriques du cosinus et du sinus, donne à la fois $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ et $\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$ pour $(\alpha\,;\beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que $0 < \alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$.




Le fait 9 ci-dessous, qui généralise le fait 7, implique la validité des formules trigonométriques précédentes sur $\mathbb{R}^2$ tout entier en faisant les choix ci-après. Nous voilà sauvés !

- $f_1(\alpha\,;\beta) = \cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
- $f_2(\alpha\,;\beta) = \sin(\alpha+\beta) - \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta$

**Définition 8.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un ouvert non vide. Une fonction complexe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe en $\omega \in \Omega$, si elle est $\mathbb{C}$-différentiable en $\omega$, c'est-à-dire s'il existe une application $\mathbb{C}$-linéaire $Df : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ vérifiant* $\displaystyle\lim_{\substack{\|z-\omega\|_n \to 0 \\ z \in \Omega - \{\omega\}}} \left( \frac{f(z) - f(\omega) - Df(\omega)(z-\omega)}{\|z-\omega\|_n} \right) = 0.$

**Fait 9.** *Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un ouvert connexe non vide, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Si $f$ s'annule sur un ouvert de $\Omega$, alors $f$ est identiquement nulle* (c'est le théorème d'identité).

*Démonstration.* Ceci nous amènerait trop loin, donc nous admettrons ce résultat. Si vous avez une impression de déjà-lu, c'est normal. $\square$