

# INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

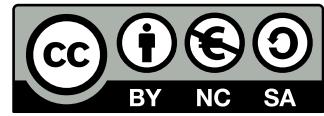
CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/math/geometry/polygon/isoperimetric-no-C>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



## TABLE DES MATIÈRES

1. Pourquoi un nouveau document sur l'isopérimétrie ?	2
2. Triangles	2
2.1. Avec un côté fixé	2
2.2. Le cas général	3
2.3. Des preuves courtes non géométriques	4
3. Quadrilatères	5
3.1. Les rectangles	5
3.2. Les parallélogrammes	6
3.3. Le cas général	7
4. Les polygones	8
4.1. Où allons-nous ?	8
4.2. Les $n$ -cycles et les $n$ -gones	8
4.3. La convexité revisitée	9
4.4. Aire algébrique d'un $n$ -cycle	11
4.5. Au moins une solution	14
4.6. Solutions, qui êtes-vous ?	19
4.7. Théorème d'isopérimétrie polygonale	23

Ce document, de niveau élémentaire,<sup>1</sup> s'intéresse au classique problème de l'isopérimétrie plane, c'est-à-dire à la recherche d'une surface plane maximisant son aire pour un périmètre donné. Seul le cas des polygones sera traité en privilégiant des démonstrations les plus géométriques possible, et en ne faisant appel à l'analyse qu'en cas de nécessité.<sup>2</sup>

*Afin d'alléger le texte, nous raisonnons parfois modulo des isométries. Ainsi, nous parlerons directement du « carré de côté  $c$  », du « triangle équilatéral de côté  $c$  », etc.*

## 1. POURQUOI UN NOUVEAU DOCUMENT SUR L'ISOPÉRIMÉTRIE ?

Voici quelques apports de ce document.

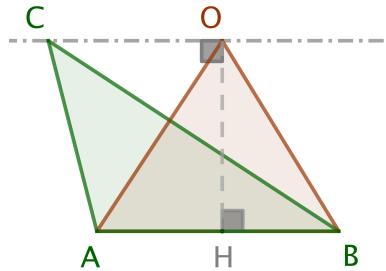
- **Pour les triangles**, l'auteur expose une démonstration ne s'appuyant pas sur le théorème des extrema d'une fonction réelle continue sur un compact. Il propose à la place une construction itérative basique qui, partant d'un triangle quelconque, converge vers le triangle équilatéral, solution du problème d'isopérimétrie pour les triangles.
- **Pour les quadrilatères**, le problème est traité sans aucune utilisation de l'analyse, en s'appuyant uniquement sur des considérations purement géométriques de niveau élémentaire.
- **Pour les polygones à 5 côtés et plus**, l'existence se fera via le basique théorème des extrema d'une fonction réelle continue sur un compact. La caractérisation des solutions optimales sera ensuite faite de façon élémentaire. L'auteur a veillé à ne laisser aucune ellipse explicative dans les démonstrations proposées.

## 2. TRIANGLES

### 2.1. Avec un côté fixé.

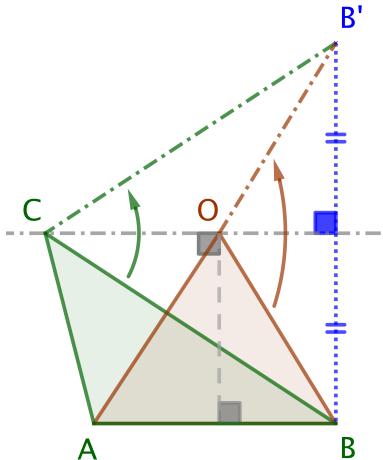
**Fait 1.** *Considérons tous les triangles de périmètre fixé, et ayant tous un côté en commun. Parmi tous ces triangles, il en existe un seul d'aire maximale, c'est le triangle isocèle ayant pour base le côté commun.*

*Démonstration.* Soit  $ABC$  un triangle de périmètre  $p$ , et fixons le côté  $[AB]$ . Pour tout point  $M$  sur la parallèle à  $(AB)$  passant par  $C$ , nous savons que  $\text{Aire}(ABM) = \text{Aire}(ABC)$ . Notons alors  $O$  le point sur cette parallèle tel que  $ABO$  soit isocèle en  $O$ .



Via une symétrie axiale, voir ci-dessous, il est aisément de noter que  $\text{Perim}(ABC) \geq \text{Perim}(ABO)$ , avec égalité uniquement si  $ABC$  est isocèle en  $C$ . Plus précisément, en passant de  $C$  à  $O$ , le périmètre diminue.

1. Cela nous conduira à admettre certains théorèmes qui, bien que paraissant simples, méritent une justification approfondie.  
2. Un autre point d'attaque serait l'usage du plan complexe pour tenter une approche synthétique.



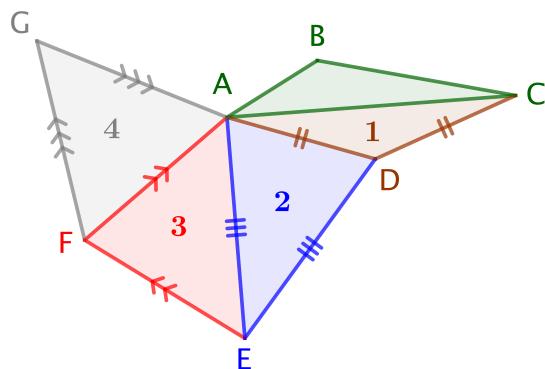
Une dilatation « verticale » de rapport  $r = \frac{\text{Perim}(ABC)}{\text{Perim}(ABO)} \geq 1$  donne un triangle isocèle  $ABO'$  tel que  $\text{Perim}(ABO') = p$  et  $\text{Aire}(ABO') \geq \text{Aire}(ABC)$ , avec égalité uniquement si  $ABC$  est isocèle en  $C$ . Contrat rempli!<sup>3</sup>  $\square$

**Remarque 2.** La recherche parmi les triangles avec un côté fixé de celui ayant un périmètre minimal pour une aire fixée est le problème dual de l'isopérimétrie pour ces triangles.

## 2.2. Le cas général.

**Fait 3.** Considérons tous les triangles de périmètre fixé  $p$ . Parmi tous ces triangles, il en existe un seul d'aire maximale, c'est le triangle équilatéral de côté  $c = \frac{1}{3}p$ .

*Démonstration.* Nous allons donner une démonstration constructive via une application itérative du fait 1 donnant, par passage à la limite, le triangle équilatéral d'aire maximale, et ceci avec une vitesse de convergence exponentielle.<sup>4</sup> Partons donc d'un triangle  $ABC$  quelconque, mais de périmètre  $p$ , le fait 1 donne successivement les triangles  $ACD$ ,  $ADE$ ,  $AEF$  et  $AFG$  isocèles en  $D$ ,  $E$ ,  $F$  et  $G$  respectivement, ayant tous pour périmètre  $p$ , et ceci avec des aires de plus en plus grandes. Le dessin suivant amène à conjecturer qu'en poursuivant ce procédé de construction, nous aboutirons « *à la limite* » à un triangle équilatéral.



Le passage du triangle initial  $ABC$  au 1<sup>er</sup> triangle  $ACD$  isocèle en  $D$  nous amène à nous concentrer sur ce que donne notre procédé d'agrandissement d'aire à périmètre fixé pour des

3. Dans la section 2.3 est expliqué comment employer la méthode des extrema liés. Les arguments fournis à cet endroit s'adaptent facilement au cas des triangles de base fixée.

4. Ceci ne va nécessiter que l'emploi de propriétés simples de l'ensemble des réels.

triangles isocèles. Voici ce que nous pouvons affirmer en supposant  $AC > AD$ , comme dans notre exemple (nous allons voir que cette hypothèse est sans conséquence).

- (1) Comme  $AC + 2AD = p$  et  $AC > AD$ , nous avons  $AC > \frac{1}{3}p > AD$ . À l'étape suivante, comme  $AD + 2AE = p$ , nous obtenons nécessairement  $AD < \frac{1}{3}p < AE$ .
- (2) Pour  $AEF$  isocèle en  $F$ , comme  $AE + 2AF = p$ , nous arrivons à  $AE > \frac{1}{3}p > AF$ .
- (3) Tentons de quantifier les écarts à la mesure pivot  $p' = \frac{1}{3}p$ .
  - Dans  $ACD$ , posant  $AD = p' - \epsilon_1$ , nous avons  $AC = p' + 2\epsilon_1$ .
  - Dans  $ADE$ , posant  $AE = p' + \epsilon_2$ , nous avons  $AD = p' - 2\epsilon_2$ .
  - Dans  $AEF$ , posant  $AF = p' - \epsilon_3$ , nous avons  $AE = p' + 2\epsilon_3$ .
  - Dans  $AFG$ , posant  $AG = p' + \epsilon_4$ , nous avons  $AF = p' - 2\epsilon_4$ .
  - Donc  $\epsilon_2 = \frac{1}{2}\epsilon_1$ ,  $\epsilon_3 = \frac{1}{2}\epsilon_2$  et  $\epsilon_4 = \frac{1}{2}\epsilon_3$ .

Voici les enseignements de ce qui précède en partant d'un triangle  $ABC$  non équilatéral.

- Si  $AC = \frac{1}{3}p$ , dès la 1<sup>re</sup> itération, nous avons un triangle équilatéral d'aire plus grande.
- Si  $AC \neq \frac{1}{3}p$ , notre procédé n'arrivera jamais en un nombre fini d'étapes à un triangle équilatéral. Dans ce cas, le point 3 ci-dessus nous donne une convergence exponentielle des longueurs des côtés vers  $p' = \frac{1}{3}p$ , tout en ayant des aires de plus en plus grandes.

Dans tous les cas, l'aire d'un triangle non équilatéral de périmètre  $p$  est strictement majorée par celle du triangle équilatéral de périmètre  $p$ . Et tout ceci a été obtenu via de la géométrie et de l'analyse élémentaires !  $\square$

### 2.3. Des preuves courtes non géométriques.

Nous donnons ici des preuves courtes du fait 3, mais sans notion géométrique intuitive. Efficacité versus beauté, l'auteur a choisi son camp depuis longtemps !

*Démonstration alternative 1.* Selon la **formule de Héron**,  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  est l'aire d'un triangle de côtés  $a, b, c$  et de demi-périmètre  $s = 0,5p$ . La **comparaison des moyennes géométrique et arithmétique**<sup>5</sup> donne  $\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{1}{3}((s-a)+(s-b)+(s-c))$ , puis  $s(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{1}{27}s^4$ , et enfin  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$  où  $\frac{s^2}{3\sqrt{3}} = \frac{p^2}{12\sqrt{3}}$  est l'aire du triangle équilatéral de périmètre  $p$ .  $\square$

*Démonstration alternative 2.* Faisons appel à l'**analyse élémentaire aidée du fait 1** qui permet de se concentrer sur  $ABC$  isocèle en  $C$ . Choisissons un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $A(0; 0)$ ,  $B(AB; 0)$  et  $C(x_C; y_C)$  avec  $y_C \geq 0$ , et posons  $c = AC = BC \neq 0$  et  $s = \frac{p}{2}$ . Dès lors,  $x_B = 2s - 2c \neq 0$ , et  $y_C = \sqrt{c^2 - (s-c)^2}$ , puis  $\text{Aire}(ABC)^2 = (s-c)^2(c^2 - (s-c)^2)$ , soit  $\text{Aire}(ABC)^2 = s(s-c)^2(s-2c)$ .<sup>6</sup> Notant  $\alpha(c) = s(s-c)^2(s-2c)$  pour  $c \in ]0; 2s[$ , nous avons  $\alpha'(c) = -2s(s-c)(s-2c) - 2s(s-c)^2 = 2s(c-s)(2s-3c)$ . Donc  $\alpha$  admet un maximum en  $c = \frac{2s}{3} = \frac{p}{3}$  uniquement, ceci justifiant que  $ABC$  équilatéral soit la solution « optimale ».  $\square$

*Démonstration alternative 3.* Utilisons **juste la continuité et la compacité**.

- On munit le plan d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

5. La formule de Héron reste un argument géométrique, mais quid de la comparaison des moyennes géométrique et arithmétique d'ordre 3, généralement justifiée via la concavité de la fonction logarithme. À l'ordre 2, l'inégalité s'obtient aisément par un argument géométrique simple : voir la remarque 6.

6. Nous venons de démontrer la formule de Héron dans le cas particulier d'un triangle isocèle.

- Les triangles  $ABC$  tels que  $\text{Perim}(ABC) = p$  sont représentés en posant  $A(0;0)$ ,  $B(AB;0)$  et  $C(x_C;y_C)$  avec  $y_C \geq 0$ . Un triangle peut donc avoir trois représentations, mais peu importe. De plus, on accepte les triangles dégénérés pour lesquels nous avons  $x_B = 0$  ou  $y_C = 0$  dans notre représentation. Nous notons alors  $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$  l'ensemble des triplets  $(x_B; x_C; y_C)$  ainsi obtenus.
- Il est facile de justifier que  $\mathcal{T}$  est séquentiellement fermé dans  $\mathbb{R}^3$ . De plus,  $\mathcal{T}$  est borné car  $x_B$ ,  $x_C$  et  $y_C$  le sont. En résumé,  $\mathcal{T}$  est un compact de  $\mathbb{R}^3$ .
- La fonction  $\alpha : (x_B; x_C; y_C) \in \mathcal{T} \mapsto 0,5x_BY_C \in \mathbb{R}_+$  est la fonction « aire » des triangles représentés. Par continuité et compacité,  $\alpha$  admet un maximum sur  $\mathcal{T}$ .
- Notons  $ABC$  un triangle maximisant  $\alpha$ . Forcément,  $ABC$  n'est pas dégénéré. Le fait 1 implique que  $ABC$  est équilatéral. En effet, dans le cas contraire, il existe un sommet  $X$  en lequel  $ABC$  n'est pas isocèle, mais la « maximalité » de  $ABC$  contredit le fait 1 en considérant comme fixé le côté opposé au sommet  $X$ .  $\square$

*Démonstration alternative 4.* Nous allons faire appel à la **méthode des extrema liés et la formule de Héron**. Pour cela, notons que l'aire d'un triangle étant positive ou nulle, nous pouvons chercher à maximiser son carré  $f(a; b; c) = s(s - a)(s - b)(s - c)$  sous la contrainte  $2s = a + b + c$  où  $s = 0,5p > 0$  est constant. Notant  $g(a; b; c) = a + b + c - 2s$ , la contrainte s'écrit  $g(a; b; c) = 0$ . Géométriquement, nous pouvons nous limiter à  $(a; b; c) \in ]0; p[^3$ , afin de travailler dans un ouvert.

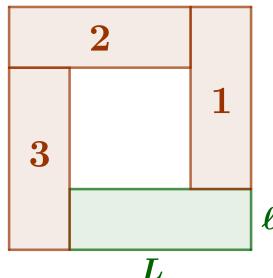
- Si un extremum existe,  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\partial_a f = \lambda \partial_a g$ ,  $\partial_b f = \lambda \partial_b g$  et  $\partial_c f = \lambda \partial_c g$  d'après la méthode des extrema liés.
- Donc  $-s(s - b)(s - c) = -s(s - a)(s - c) = -s(s - a)(s - b)$ , et par conséquent  $(s - b)(s - c) = (s - a)(s - c) = (s - a)(s - b)$ .
- Les cas  $s = a$ ,  $s = b$  et  $s = c$  donnent  $f(a; b; c) = 0$ .
- Le cas  $[s \neq a, s \neq b \text{ et } s \neq c]$  n'est envisageable que si  $a = b = c = \frac{p}{3}$ , ceci impliquant  $f(a; b; c) = \frac{p}{2} \left(\frac{p}{6}\right)^3 = \left(\frac{p^2}{12\sqrt{3}}\right)^2 > 0$ .
- En résumé, l'existence d'un maximum implique que ce maximum corresponde au cas du triangle équilatéral.
- Il reste à démontrer qu'un tel maximum existe pour pouvoir conclure : ceci est facile à justifier en considérant l'ensemble compact  $[0; 2s]^3$  de  $\mathbb{R}^3$ , et la continuité de  $f$ .  $\square$

### 3. QUADRILATÈRES

#### 3.1. Les rectangles.

**Fait 4.** *Considérons tous les rectangles de périmètre fixé  $p$ . Parmi tous ces rectangles, un seul est d'aire maximale, c'est le carré de côté  $c = 0,25p$ .*

*Démonstration.* Voici une preuve géométrique élémentaire s'appuyant sur le dessin suivant où les rectangles 1, 2 et 3 sont isométriques au rectangle étudié de dimension  $L \times \ell$ .



Le raisonnement tient alors aux constatations suivantes accessibles à un collégien.

- (1) Le grand carré a une aire  $(L + \ell)^2$  supérieure ou égale à  $4L\ell$ , et ceci strictement si le rectangle initial n'est pas un carré.
- (2) Le grand carré a un périmètre égal à  $4(L + \ell)$ .
- (3) Une homothétie de rapport 0,5 donne un carré de périmètre  $0,5 \times 4(L + \ell) = 2(L + \ell)$ , et d'aire supérieure ou égale à  $0,5^2 \times 4L\ell = L\ell$ , avec inégalité stricte si le rectangle initial n'est pas un carré.

Donc, parmi tous les rectangles de périmètre  $p = 2(L + \ell)$  et d'aire  $L\ell$ , le carré est celui d'aire maximale. Joli ! Non ?  $\square$

**Remarque 5.** *Une preuve courante consiste à exprimer l'aire du rectangle comme polynôme du 2<sup>e</sup> degré en  $L$ , par exemple : on obtient  $L\ell = L(0,5p - L)$  qui est maximale en  $L_M = 0,25p$  (moyenne des racines), d'où  $\ell_M = 0,25p = L_M$ .*

**Remarque 6.** *Nous avons établi  $4L\ell \leq (L + \ell)^2$  pour  $(L; \ell) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ . Ceci permet de comparer les moyennes arithmétique  $\frac{1}{2}(L + \ell)$ , géométrique  $\sqrt{L\ell}$  et quadratique  $\sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$  d'ordre 2. Voici comment faire.*

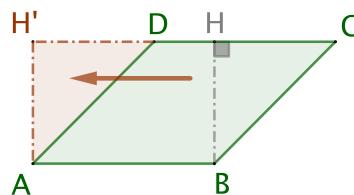
- *L'application de la racine carrée donne  $2\sqrt{L\ell} \leq L + \ell$ , puis  $\sqrt{L\ell} \leq \frac{1}{2}(L + \ell)$ .*
- *Un simple développement fournit  $2L\ell \leq L^2 + \ell^2$ , puis  $\sqrt{L\ell} \leq \sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$ .*
- *On peut faire mieux en notant que  $2L\ell \leq L^2 + \ell^2$  donne  $L^2 + \ell^2 + 2L\ell \leq 2(L^2 + \ell^2)$ , puis  $\frac{1}{4}(L + \ell)^2 \leq \frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)$ , et enfin  $\frac{1}{2}(L + \ell) \leq \sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$ .*

En résumé,  $\sqrt{L\ell} \leq \frac{1}{2}(L + \ell) \leq \sqrt{\frac{1}{2}(L^2 + \ell^2)}$  pour  $(L; \ell) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ . Ces inégalités se généralisent à l'ordre  $n$  grâce à l'algèbre, ou l'analyse.

### 3.2. Les parallélogrammes.

**Fait 7.** *Considérons tous les parallélogrammes de périmètre fixé  $p$ . Parmi tous ces parallélogrammes, un seul est d'aire maximale, c'est le carré de côté  $c = 0,25p$ .*

*Démonstration.* Le calcul de l'aire d'un parallélogramme, voir le dessin ci-dessous, nous donne  $\text{Aire}(ABCD) = \text{Aire}(ABH'H)$  et  $\text{Perim}(ABCD) \geq \text{Perim}(ABH'H)$ , avec égalité uniquement si  $ABCD$  est un rectangle.



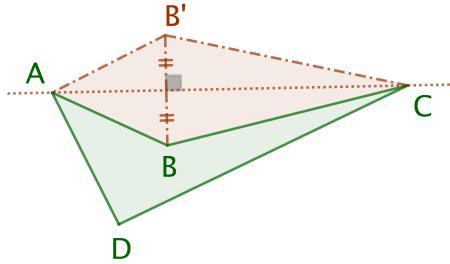
Via une homothétie de rapport  $r = \frac{\text{Perim}(ABCD)}{\text{Perim}(ABH'H)} \geq 1$ , nous obtenons un rectangle de périmètre égal à  $p$ , et d'aire supérieure ou égale à  $\text{Aire}(ABCD)$ , avec égalité uniquement si  $ABCD$  est un rectangle. Nous revenons à la situation du fait 4 qui permet de conclure très facilement.  $\square$

**Remarque 8.** *Une méthode analytique devient pénible ici, car il faut, par exemple, prendre en compte l'angle au sommet A du parallélogramme. L'auteur préfère battre en retraite en clôturant cette remarque ici.*

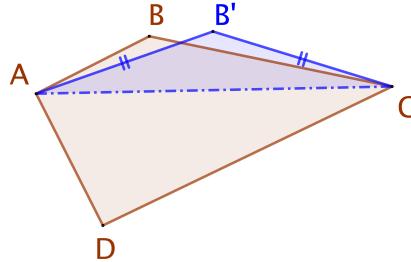
### 3.3. Le cas général.

**Fait 9.** Considérons tous les quadrilatères de périmètre fixé  $p$ . Parmi tous ces quadrilatères, il en existe un seul d'aire maximale, c'est le carré de côté  $c = 0,25p$ .

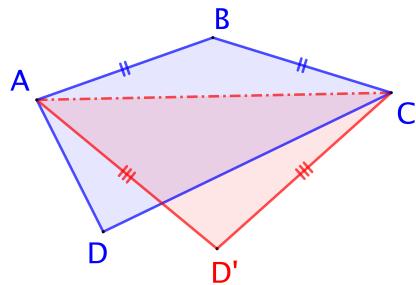
*Démonstration.* Commençons par exclure les quadrilatères avec un angle au sommet rentrant, c'est-à-dire supérieur à l'angle plat. Si tel est le cas, aucun des trois autres angles au sommet ne peut être rentrant, car la somme des quatre angles est  $(4-2)\pi = 2\pi$ .<sup>7</sup> Comme dans la figure suivante, pour tout quadrilatère  $ABCD$  de périmètre  $p$  avec  $\widehat{B}$  rentrant, il existe un quadrilatère  $AB'CD$  sans angle rentrant, de périmètre  $p$ , et tel que  $\text{Aire}(AB'CD) > \text{Aire}(ABCD)$ . Notre recherche doit donc continuer avec des quadrilatères sans angle rentrant, et de périmètre  $p$ .



Si  $ABCD$  est sans angle rentrant, de périmètre  $p$ , et tel que  $AB \neq BC$ , le fait 1 donne  $AB'CD$  sans angle rentrant, de périmètre  $p$ ,<sup>8</sup> avec  $AB' = B'C$  et  $\text{Aire}(AB'CD) > \text{Aire}(ABCD)$  comme dans la figure ci-après. Nous nous ramenons ainsi au cas d'un quadrilatère  $ABCD$  sans angle rentrant, de périmètre  $p$ , et tel que  $AB = BC$ .



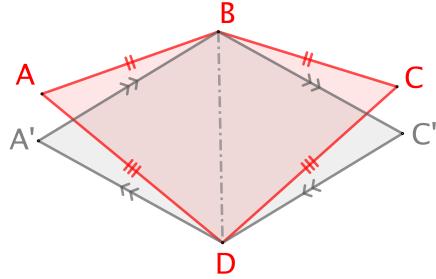
La méthode précédente appliquée au sommet  $D$  d'un quadrilatère  $ABCD$  sans angle rentrant, de périmètre  $p$ , avec  $AB = BC$ , mais  $AD \neq DC$ , permet de se ramener au cas d'un cerf-volant  $ABCD$  de périmètre  $p$ , et de sommets principaux  $B$  et  $D$ , c'est-à-dire tel que  $AB = BC$  et  $AD = DC$ , voir ci-dessous.



7. Un quadrilatère  $Q$  sans angle rentrant est forcément convexe, c'est-à-dire tel que pour toute paire de points  $M$  et  $N$  de la surface fermée bornée créée par  $Q$ , le segment  $[MN]$  est dans cette surface.

8. Noter que  $\text{Perim}(AB'CD) = \text{Perim}(AB'C) + \text{Perim}(ACD) - 2AC$ .

En supposant que notre cerf-volant ne soit pas un losange, le fait 1 appliqué aux sommets  $A$  et  $C$  fournit un losange  $A'BC'D$  de périmètre  $p$  vérifiant  $\text{Aire}(A'BC'D) > \text{Aire}(ABCD)$ , puisque  $0,5p = AB + AD$  et  $\text{Perim}(A'BD) = \text{Perim}(ABD)$  donnent  $A'B = A'D = 0,25p$ , et de même  $C'B = C'D = 0,25p$ .



Pour conclure, il suffit d'appliquer le fait 7, puisque tout losange est un parallélogramme. Que la géométrie est belle !  $\square$

**Remarque 10.** *Dans la preuve précédente, nous avons une autre façon de conclure, un peu moins élémentaire. En effet, d'après la formule trigonométrique de l'aire d'un triangle, un losange  $ABCD$  de côté  $c$  admet pour aire  $c^2 \sin \alpha$  où  $\alpha = \widehat{ABC}$ . Cette aire est donc maximale pour  $\widehat{ABC}$  droit, c'est-à-dire lorsque  $ABCD$  est un carré.*

#### 4. LES POLYGONES

**4.1. Où allons-nous ?** Le passage aux polygones à  $n$  côtés, pour  $n \geq 5$ , va mêler analyse et géométrie : nous utiliserons les notions de compacité, de continuité, de convexité « élargie » et de déterminant.

*L'approche proposée n'est pas originale dans sa globalité : voir, par exemple, "Isopérimètres en toute simplicité" de Lion Georges dans Bulletin de l'APMEP. N° 496., page 566-578. <sup>a</sup> Par contre, vous trouverez ici une approche la plus simple possible, et sans trous logiques.*

*a.* L'auteur du présent texte n'a eu connaissance du document de Lion Georges, qu'une fois son modeste travail fini.

**4.2. Les  $n$ -cycles et les  $n$ -gones.** Pour l'existence d'une solution, nous allons devoir manipuler des  $n$ -cycles, définis ci-après, qui sont des objets plus souples que les polygones.

**Définition 11.** Pour  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  uniquement, un «  $n$ -cycle » désigne une liste ordonnée de  $n$  points du plan, les répétitions étant possibles. Nous noterons  $A_1A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle, et appellerons « sommets » du  $n$ -cycle les points  $A_i$  pour  $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ , où  $A_1$  sera dit « origine » du  $n$ -cycle.

**Définition 12.** Pour tout  $n$ -cycle  $A_1A_2 \cdots A_n$ , on définit  $(A'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  comme étant  $n$ -périodique, et vérifiant  $A'_i = A_i$  sur  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ .<sup>9</sup>

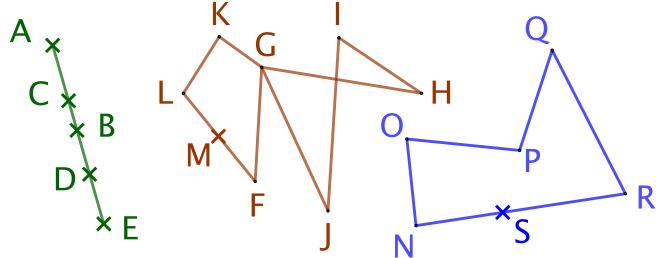
**Définition 13.** Les « côtés » d'un  $n$ -cycle  $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$  sont les segments  $[A'_iA'_{i+1}]$  pour  $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ , et la « longueur » de  $\mathcal{L}$  est définie par  $\text{Long}(\mathcal{L}) = \sum_{i=1}^n A'_iA'_{i+1}$ .

**Définition 14.** Un  $n$ -cycle est « dégénéré » s'il a, au moins, trois sommets consécutifs alignés, et il est dit « totalement dégénéré » si tous ses sommets sont alignés.

<sup>9</sup> Cette suite périodique va nous simplifier la vie dans l'écriture des énoncés et des preuves.

**Définition 15.** Un «  $n$ -gone » indique un  $n$ -cycle non dégénéré n’admettant aucun couple de côtés non contigus et sécants, et un «  $n$ -gone croisé » désigne un  $n$ -cycle non dégénéré qui n’est pas un  $n$ -gone.<sup>10</sup> La longueur d’un  $n$ -gone, croisé ou non, est aussi appelée « périmètre ».

**Remarque 16.** Voici des exemples pour clarifier le vocabulaire.



$ABCDE$  est un 5-cycle totalement dégénéré,  $FGHIJGKLM$  un 9-cycle dégénéré sans être un 9-gone,  $NOPQRS$  un 6-cycle dégénéré sans être un 6-gone,  $FGHIJGKL$  un 8-gone croisé, et enfin  $NOPQR$  un 5-gone.

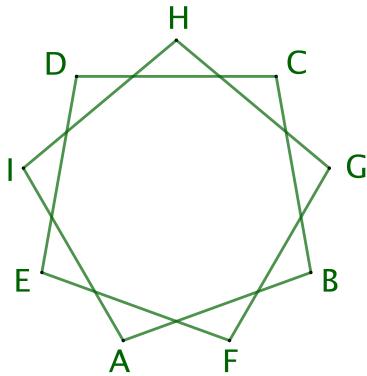
**Définition 17.** Un  $n$ -gone, croisé ou non, est dit « équilatéral » si tous ses côtés sont égaux.

**Définition 18.** Un  $n$ -gone, croisé ou non, est dit « équiangle » si tous ses angles au sommet sont de même mesure.

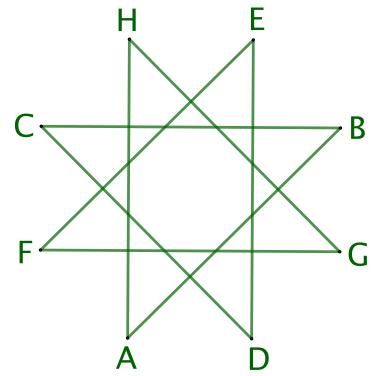
**Définition 19.** Un  $n$ -gone, croisé ou non, est dit « régulier » s’il est équiangle et équilatéral.

**Remarque 20.** Un losange non carré est un  $n$ -gone équilatéral non régulier, et un rectangle non carré est un  $n$ -gone équiangle non régulier.

**Remarque 21.** Il existe des  $n$ -gones réguliers et croisés.



Un ennégone régulier croisé dit étoilé.<sup>11</sup>



Un octogone régulier croisé dit étoilé.<sup>12</sup>

**4.3. La convexité revisitée.** Nous allons utiliser une définition simple de la convexité pour les  $n$ -gones, et plus généralement pour les  $n$ -cycles. Ceci demande de savoir que, dans un plan orienté, un triangle non dégénéré  $ABC$  est dit « orienté positivement » si la condition  $\det(\vec{AB}, \vec{AC}) > 0$  est validée. Dans ce cas, le triangle  $BAC$  est orienté négativement, comme cela se vérifie aisément via  $\det(\vec{AB}, \vec{AB} + \vec{BC})$ .

10. Bien retenir que, par définition, un  $n$ -gone n’est jamais croisé.

11. La construction se fait via  $AFBGCHDIE$  qui est un 9-gone régulier en reliant un sommet sur deux. Elle se généralise à tout  $n$ -gone régulier pour  $n$  impair.

12. La construction se fait via le 8-gone régulier intérieur en prolongeant les côtes. Elle se généralise à tout  $n$ -gone régulier pour  $n$  pair.

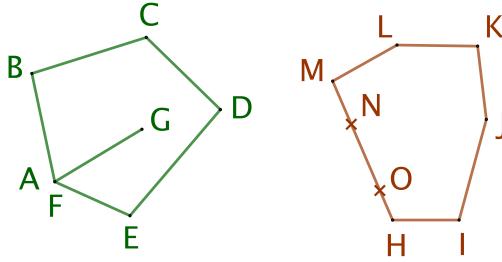
**Définition 22.** Un  $n$ -cycle  $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$  est dit « convexe » si l'une des alternatives suivantes a lieu.

- $\forall(i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ ,  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$ .
- $\forall(i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ ,  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \leq 0$ .

Autrement dit,  $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$  est convexe si l'une des alternatives suivantes a lieu.

- $\forall(i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ ,  $A'_i A'_{i+1} A'_k$  est soit dégénéré, soit orienté positivement.
- $\forall(i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ ,  $A'_i A'_{i+1} A'_k$  est soit dégénéré, soit orienté négativement.

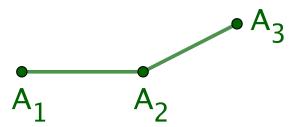
**Remarque 23.** Voici des exemples pour clarifier le vocabulaire.



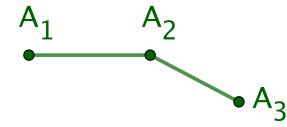
Le 7-cycle non dégénéré  $ABCDEFG$  n'est pas convexe, à cause, par exemple, des triangles d'orientations opposées  $FGE$  et  $FGC$ .<sup>13</sup> Par contre, le 8-cycle dégénéré  $HJKLMNO$  est convexe, contrairement à  $HJKLMON$ , à cause, par exemple, de  $MOK$  et  $ONK$ .<sup>14</sup> Enfin,  $HJKLM$  est un hexagone convexe.

**Fait 24.** Soit un  $n$ -gone  $\mathcal{P} = A_1A_2 \cdots A_n$  tel que  $\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ , tous les sommets de  $\mathcal{P}$  sont dans le même demi-plan fermé délimité par la droite  $(A'_i A'_{i+1})$ . Plus formellement, nous supposons que  $\forall(i, j, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^3$ ,  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_j})$  et  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k})$  ont le même signe au sens large. Bien que nous ne supposions pas, a priori, avoir un signe constant pour des valeurs différentes de  $i$ , nous pouvons affirmer que  $\mathcal{P}$  est forcément convexe.

*Démonstration.* Le cas des 3-gones, c'est-à-dire des triangles non dégénérés, est immédiat. Considérons donc  $n \geq 4$ . Comme trois sommets consécutifs de  $\mathcal{P}$  ne sont jamais alignés, nous avons l'une des deux configurations suivantes dans le plan orienté.



Cas positif.



Cas négatif.

Par symétrie, nous pouvons juste considérer le cas positif. Dès lors,  $\overrightarrow{A'_1 A'_3} = \overrightarrow{A'_1 A'_2} + \overrightarrow{A'_2 A'_3}$  et  $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_3}) > 0$  nous donnent  $\det(\overrightarrow{A'_2 A'_3}, \overrightarrow{A'_2 A'_1}) > 0$ . Or,  $A_2, A_3$  et  $A_4$  ne sont pas alignés, et de plus  $A_1$  et  $A_4$  sont du même côté de la droite  $(A_2A_3)$ , au sens large, donc nous avons  $\det(\overrightarrow{A'_2 A'_3}, \overrightarrow{A'_2 A'_4}) > 0$ . En continuant de proche en proche, nous arrivons à  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_{i+2}}) > 0$  pour  $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$  quelconque. Comme tous les sommets de  $\mathcal{P}$  sont du même côté de la droite  $(A'_i A'_{i+1})$ , ou sur elle, nous obtenons alors  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$  pour  $(i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ . Ceci établit la convexité de  $\mathcal{P}$ .  $\square$

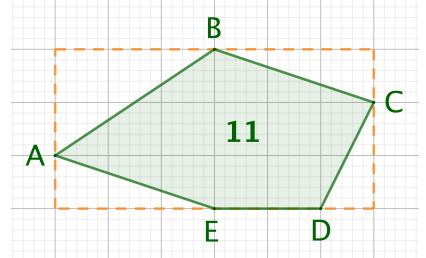
13.  $ABCDEFG$  n'est pas un 7-gone, car les trois sommets consécutifs  $F, G$  et  $A$  sont alignés.

14. Cet exemple montre que la caractérisation classique de la convexité d'un polygone en terme de demi-espace fermé n'est pas assez précise pour les  $n$ -cycles. Ceci est normal, à cause de la possibilité de dégénérescence.

**Remarque 25.** La définition standard d'un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}$  dit qu'il doit être tel que pour toute paire de points  $M$  et  $N$  de la surface fermée bornée  $\mathcal{S}$  créée par  $\mathcal{P}$ , le segment  $[MN]$  est dans cette surface. Grâce au fait 24 précédent, la surface  $\mathcal{S}$  peut se définir comme étant l'ensemble des points  $M$  du même côté de la droite  $(A'_i A'_{i+1})$  que le sommet  $A'_{i+2}$ . Il devient facile de démontrer que notre définition de la convexité implique celle usuelle.

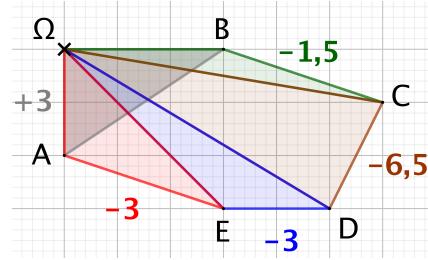
**4.4. Aire algébrique d'un  $n$ -cycle.** L'existence d'un  $n$ -gone solution du problème d'isopérimétrie polygonale nécessite un moyen « continu » de calculer une aire polygonale, ou plus généralement celle d'un  $n$ -cycle. Pour ce faire, nous utiliserons l'aire algébrique qui est définie pour tout  $n$ -cycle  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  par  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}})$ , une somme indépendante du point  $\Omega$  comme nous le verrons bientôt. Pour comprendre ce choix, il faut se souvenir qu'un triangle  $ABC$  est d'aire  $\frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$  où  $\frac{1}{2} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  est appelé aire algébrique de  $ABC$ . Pour passer aux polygones, il « suffit » d'utiliser des triangles comme ci-dessous.

Calcul direct à la main.



$$11 = 3 \cdot 6 - \frac{3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{2}$$

Via le déterminant.



$$-11 = 3 - 1,5 - 6,5 - 3 - 3$$

**Fait 26.** Soit  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle. La quantité  $\mu_1^n(\Omega; \mathcal{L}) = \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}})$  est indépendante du point  $\Omega$ . Dans la suite, cette quantité indépendante de  $\Omega$  sera notée  $\mu_1^n(\mathcal{L})$ .

*Démonstration.* Soit  $M$  un autre point du plan. La bilinéarité du déterminant nous donne :

$$\begin{aligned} & \mu_1^n(\Omega; \mathcal{L}) \\ &= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}}) \\ &= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MA'_{i+1}}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) + \det(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M}) + \det(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}) \right] \\ &= \sum_{i=2}^{n+1} \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_i}) - \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_i}) + \mu_1^n(M; \mathcal{L}) \quad \underbrace{A'_{n+1} = A'_1}_{\text{ }} \\ &= \mu_1^n(M; \mathcal{L}) \end{aligned}$$

□

**Fait 27.** Soient  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle, et l'un de ses « permutés »  $\mathcal{L}_k = B_1 B_2 \cdots B_n$  défini par  $B_i = A'_{i+k}$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ . Nous avons  $\mu_1^n(\mathcal{L}) = \mu_1^n(\mathcal{L}_k)$ . Cette quantité commune sera notée  $\mu(\mathcal{L})$ .

*Démonstration.* Il suffit de s'adonner à un petit jeu sur les indices de sommation. □

**Fait 28.** Soient  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle, et son  $n$ -cycle « opposé »  $\mathcal{L}^{\text{op}} = B_1 B_2 \cdots B_n$  où  $B_i = A_{n+1-i}$ . Nous avons  $\mu(\mathcal{L}^{\text{op}}) = -\mu(\mathcal{L})$ .

*Démonstration.* Soit  $\Omega$  un point quelconque du plan. Nous avons :

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega B'_i}, \overrightarrow{\Omega B'_{i+1}}) \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} \det(\overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}, \overrightarrow{\Omega A'_j}) \\
 &= - \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{\Omega A'_j}, \overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}) \\
 &= -\mu(\mathcal{L})
 \end{aligned}$$

□

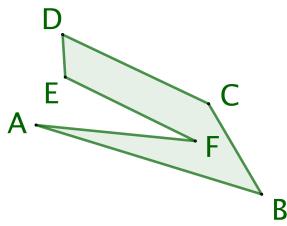
**Fait 29.** Soit  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle. La quantité  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{L}) = \frac{1}{2}\mu(\mathcal{L})$  ne dépend que du sens de parcours de  $\mathcal{L}$ , mais pas de l'origine.<sup>15</sup> Elle sera appelée « aire algébrique » de  $\mathcal{L}$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence directe des faits 27 et 28. □

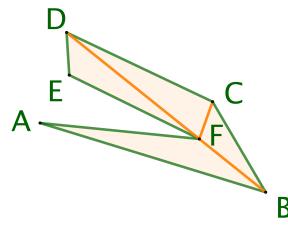
Considérons, maintenant, un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P} = A_1 A_2 \cdots A_n$  où les sommets sont parcourus dans le sens anti-horaire. En choisissant l'isobarycentre  $G$  des points  $A_1, A_2, \dots, A_n$  pour calculer  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})$ , nous obtenons  $\text{Aire}(\mathcal{P}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})$  : en effet, avec ce choix, tous les déterminants  $\det(\overrightarrow{GA'_i}, \overrightarrow{GA'_{i+1}})$  sont positifs. Dans le cas non-convexe, les choses se compliquent a priori, car nous ne maîtrisons plus les signes des déterminants. Heureusement, nous avons le résultat essentiel suivant.

**Fait 30.** Soit un  $n$ -gone  $\mathcal{P} = A_1 A_2 \cdots A_n$  tel que  $A_1, A_2, \dots, A_n$  soient parcourus dans le sens trigonométrique, ou anti-horaire. Un tel  $n$ -gone sera dit « positif ».<sup>16</sup> Sous cette hypothèse, nous avons  $\mu(\mathcal{P}) \geq 0$ , i.e.  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) \geq 0$ .

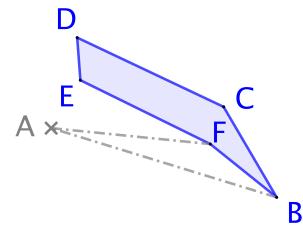
*Démonstration.* Le théorème de triangulation affirme que tout  $n$ -gone est triangulable comme dans l'exemple suivant : ceci laisse envisager une démonstration par récurrence en retirant l'un des triangles ayant deux côtés correspondant à deux côtés consécutifs du  $n$ -gone (pour peu qu'un tel triangle existe toujours).



Un  $n$ -gone « nu ».



Le  $n$ -gone triangulé.



Le  $n$ -gone allégé.

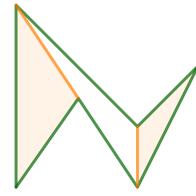
Le théorème de triangulation admet une forme forte donnant une décomposition contenant un triangle formé de deux côtés consécutifs du  $n$ -gone.<sup>17</sup> Nous dirons qu'une telle décomposition est « à l'écoute ». Ce très mauvais jeu de mots fait référence à la notion sérieuse « d'oreille » pour un  $n$ -gone : une oreille est un triangle inclus dans le  $n$ -gone, et formé de deux côtés consécutifs du  $n$ -gone. L'exemple suivant donne un  $n$ -gone n'ayant que deux oreilles.<sup>18</sup>

15. Le lecteur pardonnera les abus de langage utilisés.

16. De façon cachée, nous utilisons le célèbre théorème de Jordan, dans sa forme polygonale.

17. En pratique, cette forme forte est peu utile, car elle aboutit à un algorithme de recherche trop lent.

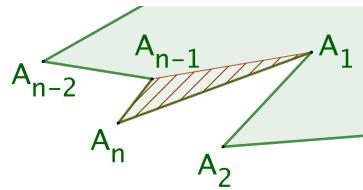
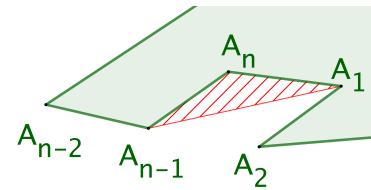
18. On démontre que tout  $n$ -gone admet au minimum deux oreilles.

Un  $n$ -gone basique.

Juste deux oreilles disponibles.

Raisonnons donc par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ .

- **Cas de base.** Soit  $ABC$  un triangle non dégénéré. Dire que  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont parcourus dans le sens trigonométrique, c'est savoir que  $\mu(ABC) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) > 0$ .
- **Héritéité.** Soit un  $n$ -gone positif  $\mathcal{P} = A_1A_2 \cdots A_n$  avec  $n \in \mathbb{N}_{>3}$ . Quitte à changer l'origine de  $\mathcal{P}$ , sans modifier le sens de parcours, nous pouvons supposer que  $A_{n-1}A_nA_1$  est une oreille d'une triangulation à l'écoute de  $\mathcal{P}$ .

 $A_{n-1}A_nA_1$  est une oreille. $A_{n-1}A_nA_1$  n'est pas une oreille.

Posons  $\mathcal{P}' = A_1 \cdots A_{n-1}$  qui est positif comme  $\mathcal{P}$ . Nous arrivons aux calculs suivants en utilisant  $A_1$  comme point de calcul de  $\mu(\mathcal{P})$ .

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{P}) &= \sum_{j=1}^n \det(\overrightarrow{A_1A_j}, \overrightarrow{A_1A'_{j+1}}) \\ &= \sum_{j=1}^{n-2} \det(\overrightarrow{A_1A_j}, \overrightarrow{A_1A_{j+1}}) + \det(\overrightarrow{A_1A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A_n}) \\ &= \mu(\mathcal{P}') + \mu(A_{n-1}A_nA_1) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} A'_{n+1} = A_1 \\ A'_i = A_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n \\ \text{Pour } \mu(\mathcal{P}'), \text{ noter que} \\ \det(\overrightarrow{A_1A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A_1}) = 0. \end{array} \right\}$$

Par hypothèse de récurrence, nous savons que  $\mu(\mathcal{P}') \geq 0$ . De plus,  $A_{n-1}A_nA_1$  étant une oreille de  $\mathcal{P}$ , ce 3-cycle est forcément positif, d'où  $\mu(A_{n-1}A_nA_1) \geq 0$  d'après le cas de base. Nous arrivons bien à  $\mu(\mathcal{P}) \geq 0$ , ce qui permet de finir aisément la démonstration par récurrence.  $\square$

Le fait suivant nous montre que, pour les  $n$ -gones, l'aire algébrique est une extension de l'aire géométrique usuelle. Merci la triangulation !

**Fait 31.** Pour tout  $n$ -gone  $\mathcal{P}$ , nous avons :  $\text{Aire}(\mathcal{P}) = |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})|$ .

*Démonstration.* Les deux points suivants permettent de faire une preuve par récurrence.

- **Cas de base.** L'égalité est immédiate pour les triangles non dégénérés (c'est ce qui a motivé la définition de l'aire algébrique).
- **Héritéité.** Soit  $\mathcal{P} = A_1 \cdots A_n$  un  $n$ -gone avec  $n \in \mathbb{N}_{>3}$ . Comme  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}^{\text{op}}) = -\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})$  selon le fait 28, nous pouvons choisir de parcourir  $\mathcal{P}$  positivement, puis de nous placer dans la situation de la démonstration du fait 30 :  $A_{n-1}A_nA_1$  est une oreille positive d'une triangulation à l'écoute du  $n$ -gone  $\mathcal{P}$ , et  $\mathcal{P}' = A_1 \cdots A_{n-1}$  positif. Nous arrivons alors aux calculs élémentaires suivants.

$$\begin{aligned}
& \text{Aire}(\mathcal{P}) \\
&= \text{Aire}(\mathcal{P}') + \text{Aire}(A_{n-1}A_nA_1) \\
&= \frac{1}{2}|\mu(\mathcal{P}')| + \frac{1}{2}|\mu(A_{n-1}A_nA_1)| \\
&= \frac{1}{2}(\mu(\mathcal{P}') + \mu(A_{n-1}A_nA_1)) \\
&= \frac{1}{2}\mu(\mathcal{P}) \\
&= \frac{1}{2}|\mu(\mathcal{P})| \\
&= |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})|
\end{aligned}
\quad
\begin{array}{l}
\downarrow A_{n-1}A_nA_1 \text{ est une oreille de } \mathcal{P}. \\
\downarrow \text{Hypothèse de récurrence et cas de base.} \\
\downarrow \text{Par positivité.} \\
\downarrow \text{Comme dans la preuve du fait 30.} \\
\downarrow \text{Par positivité.}
\end{array}$$

□

**Remarque 32.** Il faut être prudent avec la notion d'aire algébrique comme le montre l'exemple suivant, obtenu avec **GeoGebra**,<sup>19</sup> où le  $n$ -gone croisé proposé, construit via une spirale positive depuis le point  $A$ ,<sup>20</sup> possède une aire algébrique positive supérieure à celle de l'enveloppe convexe du  $n$ -gone. Contre-intuitif, mais normal.



Finissons par un théorème de continuité qui permettra de justifier l'existence d'au moins une solution au problème d'isopérimétrie polygonale.

**Fait 33.** Soient  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  et  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé direct du plan. On note  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$  l'ensemble des uplets de coordonnées  $(x(A_1); y(A_1); \dots; x(A_n); y(A_n))$  où  $A_1A_2 \cdots A_n$  désigne un  $n$ -cycle, et  $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction qui à un uplet de  $\mathcal{U}$  associe l'aire algébrique du  $n$ -cycle qu'il représente. Avec ces notations, la fonction  $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est continue.

*Démonstration.* Immédiat, car nous avons une fonction polynomiale. □

**4.5. Au moins une solution.** Tout comme pour les quadrilatères, la convexité va jouer un rôle central pour l'isopérimétrie polygonale dans le cas général. Nous allons donc chercher à justifier l'existence d'au moins un  $n$ -gone convexe d'aire maximale parmi les  $n$ -gones convexes de longueur fixée.

**Fait 34.** Si  $\mathcal{L} = A_1A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle convexe, alors l'une des assertions suivante est validée.

- (1)  $\mathcal{L}$  est totalement dégénéré.
- (2) Il existe un  $k$ -gone convexe  $\mathcal{C}$  tel que  $k \leq n$ ,  $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \text{Long}(\mathcal{L})$  et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{L})$ .  
 $\mathcal{C}$  se construit en retirant, si nécessaire, des sommets de  $\mathcal{L}$ , sans modifier l'ordre de parcours pour les sommets gardés. De plus, si  $A'_r$  et  $A'_s$  sont deux sommets consécutifs de  $\mathcal{C}$ , alors les sommets  $A'_i$ , pour  $i \in [r; s]$ , sont les seuls situés sur  $[A'_r A'_s]$ .

*Démonstration.* Par symétrie, nous considérons juste le cas positif,<sup>21</sup> c'est-à-dire que nous supposons que  $\forall (i, k) \in [1; n]^2, \det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$ . Seul le cas  $\mathcal{L}$  non totalement dégénéré

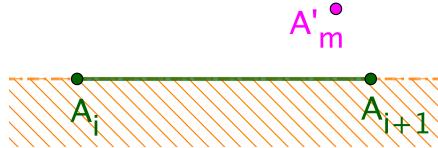
19. Quand **GeoGebra** associe un nombre à un  $n$ -gone croisé, il calcule la valeur absolue de son aire algébrique.

20. En calculant l'aire algébrique avec un point « au centre », les déterminants sont tous positifs.

21. On pourrait aussi invoquer des cycles opposés.

requiert notre attention. L'idée de la construction est simple : il s'agit de chercher des sommets extrémaux, c'est-à-dire qui « *forment un angle* ». Nous allons construire algorithmiquement une liste  $C$  contenant les sommets « utiles » à la fabrication du  $k$ -gone convexe final.

- A1** Si  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_{i+2}}) > 0$ , nous ajoutons  $A'_{i+1}$  à la fin de la liste  $C$ , puis nous passons directement à l'action **A3**.
- A2** Sinon, il existe  $m \in \mathbb{N}_{>i+2}$  minimal tel que  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_m}) > 0$ , car  $\mathcal{L}$  n'est pas totalement dégénéré.



Nous arrivons aux constatations suivantes.

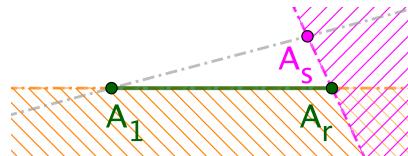
- Les points  $A'_i$ ,  $A'_{m-1}$  et  $A'_m$  ne sont pas alignés.
- Comme  $\forall j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ ,  $\det(\overrightarrow{A'_{m-1} A'_m}, \overrightarrow{A'_{m-1} A'_j}) \geq 0$ , nous avons  $A'_j \in (A'_i, A'_{m-1}]$ , pour  $j \in \llbracket i ; m-1 \rrbracket$ .<sup>22</sup>
- L'évaluation de l'aire algébrique via le point de calcul  $A'_{m-1}$  peut se passer des sommets  $A'_j$  pour  $j \in \llbracket i ; m-1 \rrbracket$ , par raison d'alignement.
- Ignorer des sommets, tout en conservant l'ordre de parcours, pour former un nouveau cycle  $\mathcal{L}'$ , donne  $\text{Long}(\mathcal{L}') \leq \text{Long}(\mathcal{L})$ .

Les constatations précédentes justifient l'ajout de  $A'_{m-1}$  à la fin de la liste  $C$ , uniquement si  $A'_{m-1}$  n'est pas dans cette liste,<sup>23</sup> puis de poser  $i = m - 2$ , puisque nous augmentons  $i$  de 1 juste après.

- A3** Ajoutons 1 à  $i$ . Si  $i \geq n + 1$ , nous avons fini, sinon nous retournons à l'action **A1**.

Commençons par justifier que l'algorithme s'arrête sans entrer dans une boucle infinie. Tant que l'indice  $m$  de l'étape **A2** vérifie  $m \leq n$ , il n'y a aucune difficulté, car  $i$  augmente, et les sommets ajoutés se placent « *avant* » l'origine  $A_1$  du  $n$ -cycle initial  $\mathcal{L}$  sans empiéter sur les « *premiers* » sommets. Supposons avoir  $m \in \llbracket n ; n+i \rrbracket$  pour un indice  $i$ , avec  $A'_i$  venant d'être stocké dans la liste  $C$ . Forcément,  $i > 1$ .

- Notons l'existence de  $A_1$ ,  $A_r$  et  $A_s$  non alignés avec  $A_r$  et  $A_s$  stockés dans  $C$ . En effet, la première boucle de l'algorithme donne  $A_r$ , puis  $A_s$  apparaît lors de la deuxième boucle.
- Supposons que  $i = s$ . Pour  $j \in \llbracket s+1 ; n \rrbracket$ , les points  $A'_j$  sont sur la droite  $(A'_s A'_1)$ , d'après l'algorithme, puis plus généralement  $A'_j \in (A'_s A'_1)$  pour  $j \in \llbracket s ; m \rrbracket$ . Le schéma suivant montre sans ambiguïté qu'alors  $A'_{m-1} = A'_1$ .<sup>24</sup> Dès lors,  $m = n+2$ , d'où l'ajout de  $A'_1$  à la fin de la liste  $C$ , puis l'arrêt de l'algorithme à l'étape suivante.



- Le raisonnement précédent fonctionne aussi lorsque  $A'_i \notin (A'_1 A'_r)$ .

22. Le point  $A'_{m-1}$  est le plus à droite possible sur notre schéma.

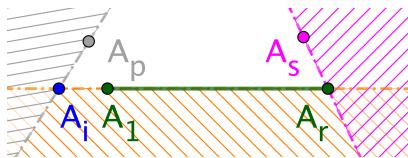
23. La justification de l'algorithme, à venir, montrera la possibilité d'avoir un doublon dans la liste  $C$ .

24.  $A'_{m-1} \neq A'_1$  contredirait la condition de positivité large sur les déterminants.

- Il reste le cas où  $A'_i \in (A'_1 A'_r)$  qui donne le schéma suivant, où  $A'_i \in [A'_1 A'_r]$  est possible, a priori.



L'algorithme assure l'existence d'un point  $A'_p \notin (A'_1, A'_r)$  stocké dans  $\mathcal{C}$  et « précédent »  $A'_i$ , tel que tout point entre  $A'_p$  et  $A'_i$  soit sur  $(A'_p A'_i)$ . Nous arrivons au schéma plus précis ci-dessous, où  $A'_1 \in [A'_i, A'_r]$  par positivité large des déterminants  $\det(\overrightarrow{A'_p A'_{p+1}}, \overrightarrow{A'_p A'_k})$ . Notons que  $A'_p = A'_s$  est possible.



Ici,  $A'_{m-1} = A'_r$  est déjà dans  $\mathcal{C}$ , donc l'algorithme s'arrêtera après avoir juste modifié  $i$  en  $(n+r)$ . Notons que les points de  $A'_{i+1}$  à  $A'_{r-1}$  sont « mangés » comme attendu.

Justifions maintenant que l'algorithme est correct, c'est-à-dire que la liste  $\mathcal{C}$  finale, lire de gauche à droite, donne les sommets du  $k$ -gone convexe  $\mathcal{C}$  cherché.

- Par construction, deux sommets « consécutifs »  $A'_r$  et  $A'_s$  de  $\mathcal{C}$ , sont tels que tout point du cycle initial  $\mathcal{L}$  situé entre  $A'_r$  et  $A'_s$  se trouve sur le segment  $[A'_r A'_s]$ . En ignorant ces points, on fait donc diminuer, au sens large, la longueur du  $n$ -cycle, mais sans modifier la valeur de l'aire algébrique, cette dernière étant calculable depuis  $A'_r$ . Donc  $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \text{Long}(\mathcal{L})$  et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{L})$
- Par construction, trois sommets « consécutifs »  $A'_q$ ,  $A'_r$  et  $A'_s$  de  $\mathcal{C}$ , sont tels que  $\det(\overrightarrow{A'_q A'_r}, \overrightarrow{A'_q A'_s}) > 0$ . Dès lors,  $\mathcal{C}$  est un  $k$ -gone, ceci nous permettant de faire appel au fait 24 (se souvenir de la convexité du  $n$ -cycle  $\mathcal{L}$ ).

Pour finir, la preuve de l'algorithme, donnée ci-dessus, montre que pour  $A'_r$  et  $A'_s$  deux sommets consécutifs de  $\mathcal{C}$ , les sommets  $(A'_i)_{i \in \llbracket r; s \rrbracket}$  sont les seuls situés sur  $[A'_r A'_s]$ .  $\square$

**Remarque 35.** La propriété sur les sommets donne un algorithme de construction de  $\mathcal{C}$ , très simple, lorsque  $\mathcal{L}$  n'est pas totalement dégénéré.

- A1** Nous posons  $i = 1$ , et considérons une liste vide  $\mathcal{C}$ .
- A2** Nous posons  $j = i + 1$ , puis tant que  $A'_j = A'_i$ , nous augmentons  $j$  de 1.
- A3** Nous posons  $k = j + 1$ , puis tant que  $A'_k \in (A'_i A'_r)$ , nous augmentons  $k$  de 1.
- A4** Si  $A'_k$  n'est pas dans  $\mathcal{C}$ , nous ajoutons ce sommet à droite de la liste, puis posons  $i = k$ , et enfin retournons à l'action **A2**. Sinon, nous avons fini.

Le résultat qui suit est juste là pour simplifier la démonstration du fait 37 à venir qui est la raison d'être de cette section.

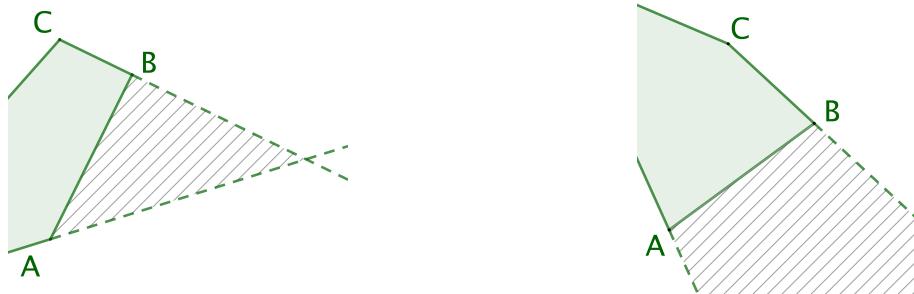
**Fait 36.** Soient  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ ,  $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé direct du plan et  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$  l'ensemble des uplets de coordonnées  $(x(A_1); y(A_1); \dots; x(A_n); y(A_n))$  où  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  désigne un  $n$ -cycle convexe tel que  $\text{Long}(\mathcal{L}) = \ell$ . Dès lors, la fonction  $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ , qui à un uplet de  $\mathcal{U}$  associe l'aire algébrique du  $n$ -cycle qu'il représente, est une fonction admettant au moins un maximum, qui est positif strict. De plus, un  $n$ -cycle maximisant  $\alpha$  est forcément un  $n$ -gone convexe.

*Démonstration.*  $\mathcal{U}$  est fermé dans  $\mathbb{R}^{2n}$ , car les conditions le définissant le sont, et il est borné, car inclus dans la boule fermée de centre O et de rayon  $\ell$ , donc  $\mathcal{U}$  est un compact de  $\mathbb{R}^{2n}$ . De plus,  $\alpha$  est continue d'après le fait 33. Donc, par continuité et compacité,  $\alpha$  admet un maximum sur  $\mathcal{U}$ , celui-ci étant positif strict pour les raisons suivantes où  $\mathcal{R}$  désigne un  $n$ -gone régulier convexe.

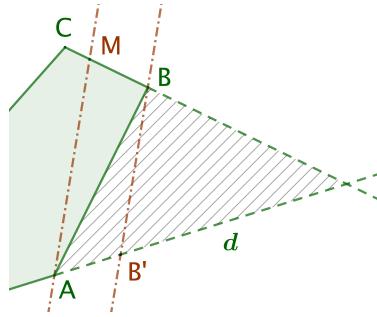
- Via une translation, nous pouvons supposer  $\mathcal{R}$  d'origine O.
- $\text{Aire}(\mathcal{R}) = |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R})|$  selon le fait 31, et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}^{\text{op}}) = -\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R})$  d'après le fait 28.
- $\mathcal{R} \in \mathcal{U}$ , ou  $\mathcal{R}^{\text{op}} \in \mathcal{U}$  par convexité.
- Si  $\mathcal{R} \in \mathcal{U}$ , alors  $\mathcal{R}$  est orienté positivement, d'où  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}) \geq 0$ , et par conséquent  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}) = \text{Aire}(\mathcal{R})$  (ceci se démontre aisément en utilisant le centre de gravité de  $\mathcal{R}$  comme point de calcul). Nous avons une propriété similaire si  $\mathcal{R}^{\text{op}} \in \mathcal{U}$ .
- Enfin, il est connu, et très facile de démontrer, que tout  $n$ -gone régulier convexe  $\mathcal{R}$  vérifie  $\text{Long}(\mathcal{R}) = 2n \sin(\frac{\pi}{n})\rho$  et  $\text{Aire}(\mathcal{R}) = n \sin(\frac{\pi}{n}) \cos(\frac{\pi}{n})\rho^2$  où  $\rho$  est le rayon du cercle circonscrit à  $\mathcal{R}$ . Il existe donc un  $n$ -gone régulier convexe  $\mathcal{R}$  de longueur  $\ell$ , et forcément d'aire non nulle.

Pour finir, justifions qu'un  $n$ -cycle  $\mathcal{M} \in \mathcal{U}$  maximisant  $\alpha$  est forcément un  $n$ -gone convexe. Comme  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{M}) > 0$ ,  $\mathcal{M}$  n'est pas totalement dégénéré, donc nous pouvons considérer le  $k$ -gone convexe  $\mathcal{C}$  donné par le fait 34. Via des arguments similaires à ceux utilisés pour  $\mathcal{R}$ , nous avons  $\text{Aire}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{M})$ . De plus,  $0 < \text{Long}(\mathcal{C}) \leq \text{Long}(\mathcal{M})$ .

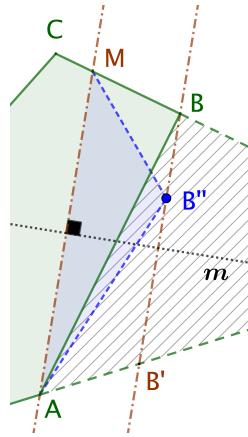
- Supposons d'abord  $k = n$ . Si  $\text{Long}(\mathcal{C}) = \text{Long}(\mathcal{M})$ , nous n'avons rien à faire. En fait,  $\text{Long}(\mathcal{C}) < \text{Long}(\mathcal{M})$  est impossible : sinon, une homothétie de rapport  $r > 1$ , où l'on a posé  $r = \frac{\text{Long}(\mathcal{M})}{\text{Long}(\mathcal{C})}$ , donnerait un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{C}'$  vérifiant  $\text{Long}(\mathcal{C}') = \text{Long}(\mathcal{M})$  et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}') > \overline{\text{Aire}}(\mathcal{M})$ , ceci contredisant la maximalité de  $\mathcal{M}$ .
- Pour la suite, nous supposons  $k < n$ , et considérons  $A$ ,  $B$  et  $C$ , trois sommets consécutifs, forcément distincts, du  $k$ -gone  $\mathcal{C}$ .
- Par convexité de  $\mathcal{C}$ , nous avons l'une des deux configurations génériques suivantes où les demi-droites en pointillés, portées par les côtés contigus à  $[AB]$ , « dessinent » avec  $[AB]$  une région hachurée  $\mathcal{H}$  qui est ouverte et à l'extérieur de  $\mathcal{C}$ . Sans perte de généralité, nous allons travailler avec la 1<sup>re</sup> configuration (qui laisse moins de liberté géométrique).



- Considérons alors  $M \in ]BC[$  quelconque pour le moment. Définissons ensuite le point  $B'$  par les contraintes  $(BB') \parallel (AM)$  et  $B' \in d$ , où  $d$  est la droite portant le côté contenant  $A$  et contigu à  $[AB]$ . Par convexité,  $]BB'[$  est inclus dans la zone  $\mathcal{H}$ . La figure suivante représente cette situation.



- Avec la preuve du fait 1 en tête, nous allons imposer d'avoir  $BM < AB$ , ce qui est toujours possible. Dès lors, nommons  $m$  la médiatrice du segment  $[AM]$ , puis prenons  $B'' \in ]BB'[$  plus proche de  $m$  que  $B$ ,<sup>25</sup> les conditions suivantes sont validées (voir la figure « zoomée » juste après).
  - (1)  $AB'' + MB'' < AB + MB$  par diminution du périmètre.
  - (2)  $\text{Aire}(AMB'') = \text{Aire}(AMB)$  par conservation de l'aire.
  - (3) En « remplaçant » dans  $C$  le sommet  $B$  par  $B''$  et  $M$ , nous avons un  $(k+1)$ -gone convexe  $C'$ .



- $C'$  vérifie  $\text{Long}(C') < \text{Long}(C) \leq \text{Long}(\mathcal{M})$  et  $\text{Aire}(C') = \text{Aire}(C) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{M})$ .
- En répétant  $(n-k-1)$  fois de plus les étapes précédentes, avec  $C'$  à la place de  $C$  à chaque fois, nous obtenons un  $n$ -gone convexe  $C''$  tel que  $\text{Long}(C'') < \text{Long}(\mathcal{M})$  et  $\overline{\text{Aire}}(C'') = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{M})$ . Or, nous savons ceci impossible, donc  $k < n$  ne se peut pas.  $\square$

Nous arrivons au résultat fondamental sur les  $n$ -gones convexes.

**Fait 37.** Soit  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  un naturel fixé. Parmi les  $n$ -gones convexes de longueur fixée, non nulle, il en existe au moins un d'aire maximale.

*Démonstration.* Soit un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}$  ayant la longueur fixée. Pour les mêmes raisons que le  $n$ -gone régulier  $\mathcal{R}$  utilisé dans la preuve du fait 36, nous pouvons supposer avoir soit  $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$  et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$ , soit  $\mathcal{P}^{\text{op}} \in \mathcal{U}$  et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}^{\text{op}}) = \text{Aire}(\mathcal{P}^{\text{op}})$ . Comme, de plus,  $\text{Aire}(\mathcal{P}^{\text{op}}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$ , nous pouvons supposer que  $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$ , quitte à échanger  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^{\text{op}}$ . Dès lors, il suffit de faire appel au fait 36 pour conclure.  $\square$

<sup>25</sup> Le choix d'avoir  $BM < AB$  donne l'existence de  $B''$ . Par contre, rien n'interdit à  $m$  et  $]BB'[$  de ne jamais se croiser.

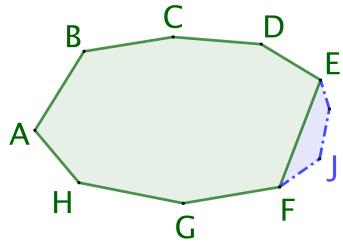
**4.6. Solutions, qui êtes-vous ?** Cette section cherche à caractériser la nature des solutions du problème d'isopérimétrie polygonale. Compte-tenu du fait 36, nous pourrions raisonner avec des  $n$ -cycles convexes,<sup>26</sup> mais nous allons tout de même nous restreindre aux  $n$ -gones, car cela ne demande que peu d'efforts supplémentaires, tout en fournissant de jolis résultats.

Comme les cas  $n = 3$  et  $n = 4$  ont été résolus, voir les faits 3 et 9, pour ne pas alourdir le texte, nous supposerons  $n \geq 5$  dans toutes les preuves de cette section.

Commençons par un fait simple, mais utile, qui mérite d'être mis en valeur.

**Fait 38.** Si  $\mathcal{P}$  est un  $n$ -gone convexe,  $s \in \mathbb{N}^*$  et  $L \in \mathbb{R}_{>\text{Long}(\mathcal{P})}$ , alors il existe un  $(n+s)$ -gone convexe  $\mathcal{C}$  tel que  $\text{Long}(\mathcal{P}) < \text{Long}(\mathcal{C}) < L$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}) < \text{Aire}(\mathcal{C})$ .

*Démonstration.* Intuitivement, il suffit d'ajouter des points suffisamment proches d'un côté, et à l'extérieur, comme l'illustre la figure suivante.



Pour formaliser proprement notre idée, posons  $\delta = \frac{L - \text{Long}(\mathcal{P})}{s}$  qui est tel que  $\delta > 0$ .

- (1) Considérons  $[AB]$  un côté quelconque de  $\mathcal{P}$ . Les droites portées par les côtés contigus à  $[AB]$  « dessinent » une région hachurée contenant toujours un triangle  $ABC$  dont l'intérieur est à l'extérieur<sup>27</sup> de  $\mathcal{P}$  comme dans les deux cas ci-dessous.



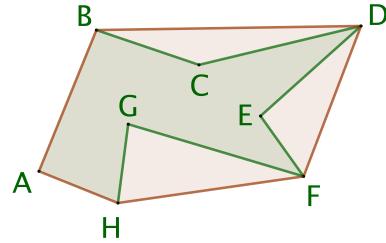
- (2) Clairement, le polygone  $\mathcal{P}_+$  obtenu à partir de  $\mathcal{P}$  en remplaçant le côté  $[AB]$  par les côtés  $[AC]$  et  $[CB]$  est un convexe avec un sommet de plus que  $\mathcal{P}$ .
- (3) Comme  $HC$  peut être rendu aussi proche de 0 que souhaité, il est aisément de voir que nous pouvons choisir cette distance de sorte que  $AC + BC < AB + \delta$ . Dès lors, le périmètre de  $\mathcal{P}_+$  augmente inférieurement strictement à  $\delta$  relativement à  $\mathcal{P}$ .
- (4) En répétant  $(s-1)$  fois de plus les étapes 1 à 3, avec  $\mathcal{P}_+$  à la place de  $\mathcal{P}$  à chaque fois, nous obtenons un  $(n+s)$ -gone convexe  $\mathcal{C}$  vérifiant à la fois  $\text{Aire}(\mathcal{C}) > \text{Aire}(\mathcal{P})$  et  $\text{Long}(\mathcal{P}) < \text{Long}(\mathcal{C}) < L$ .  $\square$

26. Par exemple, pour justifier qu'un  $n$ -gone non convexe  $\mathcal{P}$  n'est pas optimal, il suffit d'exhiber un  $n$ -cycle convexe  $\mathcal{L}$  qui vérifie  $\text{Long}(\mathcal{L}) = \text{Long}(\mathcal{P})$ , ainsi que  $\text{Aire}(\mathcal{L}) > \text{Aire}(\mathcal{P})$ .

27. C'est ce que l'on appelle de la « low poetry ».

**Fait 39.** Pour tout  $n$ -gone non convexe  $\mathcal{P}$ , nous pouvons construire un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{C}$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{C}) = \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{C}) > \text{Aire}(\mathcal{P})$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{E}$  l'enveloppe convexe d'un  $n$ -gone non convexe  $\mathcal{P}$  (voir ci-dessous).



Clairement,  $\text{Perim}(\mathcal{E}) < \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{E}) > \text{Aire}(\mathcal{P})$ , mais  $\mathcal{E}$  est un  $k$ -gone avec  $k < n$ . Appliquons donc le fait 38 à  $\mathcal{E}$ ,  $s = n - k$  et  $L = \text{Perim}(\mathcal{P})$ . Ceci nous donne un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{C}'$  vérifiant  $\text{Aire}(\mathcal{C}') > \text{Aire}(\mathcal{E}) > \text{Aire}(\mathcal{P})$  et  $\text{Perim}(\mathcal{E}) < \text{Perim}(\mathcal{C}') < \text{Perim}(\mathcal{P})$ . Finalement, une homothétie de rapport  $r > 1$ , où  $r = \frac{\text{Perim}(\mathcal{P})}{\text{Perim}(\mathcal{C}')}$ , donne le  $n$ -gone convexe  $\mathcal{C}$  cherché.  $\square$

**Fait 40.** Si un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}$  n'est pas équilatéral, alors nous pouvons construire un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{C}$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{C}) = \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{C}) > \text{Aire}(\mathcal{P})$ .

*Démonstration.* Considérons un  $n$ -gone convexe non équilatéral  $\mathcal{P}$ , de sorte que  $\mathcal{P}$  admet un triplet de sommets consécutifs  $A, B$  et  $C$  tels que  $AB \neq BC$  (sinon, on obtiendrait, de proche en proche, l'équilatéralité). La construction vue dans la preuve du fait 1 nous donne la solution : voir les dessins ci-après où  $m$  est la médiatrice du segment  $[AC]$ , et  $(AC) \parallel (BB')$ ..

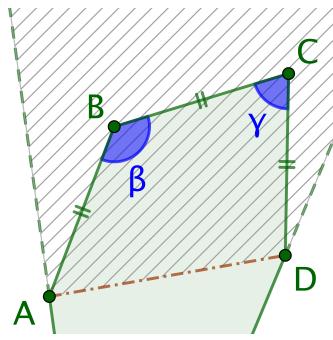


Il faut bien noter que pour le 2<sup>e</sup> cas ci-dessus, il n'est pas possible d'utiliser le triangle  $AB'C$  isocèle en  $B'$ , sinon nous n'aurions plus un  $n$ -gone. Pour ces situations problématiques, il suffit de se « déplacer » un peu sur le segment ouvert  $]BB'[$  en direction de  $m$ . Quoiqu'il en soit, dans chaque cas, nous avons construit un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{C}'$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{C}') < \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{C}') = \text{Aire}(\mathcal{P})$ . Une homothétie de rapport  $r > 1$ , où  $r = \frac{\text{Perim}(\mathcal{P})}{\text{Perim}(\mathcal{C}')}$ , donne le  $n$ -gone convexe  $\mathcal{C}$  cherché.  $\square$

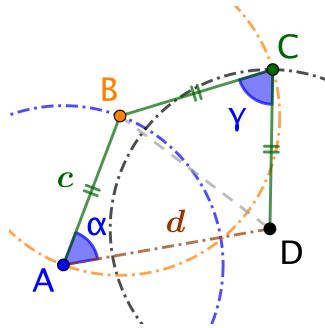
**Remarque 41.** Le fait précédent ne permet pas de toujours se ramener au cas d'un  $n$ -gone équilatéral convexe. Il nous dit juste que si un  $n$ -gone convexe maximise son aire à périmètre fixé, alors il devra être, a minima, un  $n$ -gone équilatéral. La nuance est importante, et une similaire existe pour la conclusion du fait suivant.

**Fait 42.** Si un  $n$ -gone équilatéral convexe  $\mathcal{P}$  n'est pas équiangle, alors il existe un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{C}$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{C}) = \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{C}) > \text{Aire}(\mathcal{P})$ .

*Démonstration.* Considérons un  $n$ -gone équilatéral convexe non équiangle  $\mathcal{P}$ , de sorte que  $\mathcal{P}$  admet un quadruplet de sommets consécutifs  $A, B, C$  et  $D$  tels que  $\widehat{ABC} \neq \widehat{BCD}$  (sinon, on obtiendrait, de proche en proche, l'équiangularité). Quitte à changer l'ordre de parcours des sommets de  $\mathcal{P}$ , nous pouvons supposer  $\widehat{ABC} > \widehat{BCD}$ .



Nous garderons un  $n$ -gone convexe si nous déplaçons  $B$  et  $C$  dans la zone hachurée qui est à l'extérieur du  $n$ -gone, et strictement entre les droites en pointillés, portées par des côtés contigus à  $[AB]$  et  $[CD]$ . Concentrons-nous donc sur le quadrilatère  $ABCD$ , et posons  $c = AB$  la longueur commune des côtés de  $\mathcal{P}$ , ainsi que  $d = AD$ , une longueur que nous ne pouvons pas modifier, car  $A$  et  $D$  doivent rester fixés. Nous pouvons construire  $C$  comme suit via des cercles de rayon  $c$  centrés en  $A$  et  $D$  fixes, et en  $B$  mobile.



Cherchons alors à exprimer  $\text{Aire}(ABCD)$  en fonction de  $\alpha = \widehat{DAB}$ , cet angle permettant de repérer le point mobile  $B$ .

- Par convexité, nous avons  $\alpha \in ]0 ; \pi[$  et  $\gamma \in ]0 ; \pi[$ .
- Le théorème d'Al-Kashi donne  $BD^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \alpha$  dans le triangle  $ABD$ , ainsi que  $BD^2 = 2c^2 - 2c^2 \cos \gamma$  dans le triangle  $BCD$ . Donc,  $2 \cos \gamma = 1 - k^2 + 2k \cos \alpha$  où l'on a posé  $k = \frac{d}{c}$ . Notons que l'inégalité triangulaire donne  $d < 3c$ , puis  $0 < k < 3$ .
- La formule trigonométrique de l'aire d'un triangle donne  $\text{Aire}(ABD) = 0,5cd \sin \alpha$  et  $\text{Aire}(BCD) = 0,5c^2 \sin \gamma$ , puis  $\text{Aire}(ABCD) = 0,5c^2(k \sin \alpha + \sin \gamma)$ , de sorte que  $\text{Aire}(ABCD) = 0,5c^2f(\alpha)$  en posant  $f(\alpha) = k \sin \alpha + \sqrt{1 - 0,25(1 - k^2 + 2k \cos \alpha)^2}$ , car  $\sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma}$ .
- Passons à l'étude de  $f'(\alpha) = 0$ , en nous souvenant que nous n'avons pas besoin d'atteindre le maximum de  $f$ , mais juste de pouvoir faire augmenter localement  $f(\alpha)$ . Dans les implications suivantes, nous avons posé  $S = \sin \alpha$  et  $C = \cos \alpha$ .

$$f'(\alpha) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{d'où}} kC + \frac{kS(1-k^2+2kC)}{2\sqrt{1-0,25(1-k^2+2kC)^2}} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{d'où}} S(1 - k^2 + 2kC) = -2C\sqrt{1 - 0,25(1 - k^2 + 2kC)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{d'où}} S^2(1 - k^2 + 2kC)^2 = 4C^2(1 - 0,25(1 - k^2 + 2kC)^2)$$

$$\xrightarrow{\text{d'où}} (1 - k^2 + 2kC)^2(S^2 + C^2) = 4C^2$$

$$\xrightarrow{\text{d'où}} (1 - k^2 + 2kC)^2 - 4C^2 = 0 \quad \left. \right) C^2 + S^2 = 1$$

Les implications se poursuivent comme suit.

$$(1 - k^2 + 2kC)^2 - 4C^2 = 0$$

$\xrightarrow{\text{d'où}}$   $(1 - k^2 + 2kC - 2C)(1 - k^2 + 2kC + 2C) = 0$

$\xrightarrow{\text{d'où}}$   $(1 - k)(1 + k - 2C)(1 + k)(1 - k + 2C) = 0$

$\xrightarrow{\text{d'où}}$   $k = 1 \text{ ou } C \in \left\{ \frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2} \right\}$

$\downarrow$   $k > 0$

- $k = 1$  signifie que  $ABCD$  est un losange, non rectangle, car  $\widehat{ABC} \neq \widehat{BCD}$ . Dans ce cas, en bougeant un peu le sommet  $B$  parallèlement à  $(AD)$ , tout en faisant augmenter  $\alpha$  légèrement si  $\alpha \in ]0 ; \frac{\pi}{2}[$ , ou diminuer  $\alpha$  légèrement si  $\alpha \in ]\frac{\pi}{2} ; \pi[$ ,<sup>28</sup> nous obtenons un parallélogramme de même aire, mais de périmètre diminué,<sup>29</sup> et par conséquent un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{C}'$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{C}') < \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{C}') = \text{Aire}(\mathcal{P})$ , qu'il suffit d'agrandir homothétiquement pour conclure.
- Pour  $k \neq 1$  et  $C = \frac{k-1}{2}$ , nous avons  $2 \cos \alpha = k-1$ , puis  $2 \cos \gamma = 1 - k^2 + k(k-1) = 1 - k$ , soit  $\cos \gamma = -\cos \alpha$  qui fournit  $\gamma = \pi - \alpha$ , en se souvenant que  $(\alpha, \gamma) \in ]0 ; \pi[^2$ . Notons que  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$  et  $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$ , car  $k \neq 1$ . Nous aboutissons à la contradiction que  $ABCD$  est un trapèze isocèle de bases  $[AD]$  et  $[BC]$ , ceci impliquant  $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$ . L'isocélité vient des points suivants.
  - (1) Notre construction de  $C$  à base de cercles est déterministe, car  $B$  et  $C$  sont situés dans le même demi-plan délimité par  $(AD)$ .
  - (2) Si  $A'B'C'D'$  est un trapèze isocèle de bases  $[A'D']$  et  $[B'C']$ , via la somme des angles aux sommets d'un quadrilatère convexe, qui vaut  $(4-2)\pi = 2\pi$ , nous avons  $\widehat{B'C'D'} = \pi - \widehat{D'A'B'}$ .
  - (3) Comme  $2 \cos \gamma = 1 - k^2 + 2k \cos \alpha$  pour  $(\alpha, \gamma) \in ]0 ; \pi[^2$ , nous avons :  $\gamma = \pi - \alpha$  si, et seulement si,  $\cos \alpha = \frac{k-1}{2}$ .

- Pour  $k \neq 1$  et  $C = \frac{k+1}{2}$ , comme au début du point précédent, nous avons  $\cos \gamma = \cos \alpha$ , puis  $\gamma = \alpha$  avec  $(\alpha, \gamma) \in ]0 ; \pi[^2$ . Notons qu'ici  $0 < k < 1$ , puis  $(\alpha, \gamma) \in ]0 ; \frac{\pi}{3}[$ . Dès lors, les monotonies de  $\sin$  et  $\cos$  sur  $]0 ; \frac{\pi}{3}[$ , combinées à  $1 - k^2 + 2k \cos \alpha \geq 0$ , impliquent la stricte croissance de  $f$  sur  $]0 ; \frac{\pi}{3}[$ .<sup>30</sup> Il suffit donc d'augmenter légèrement la valeur de  $\alpha$ , ceci étant faisable d'après la construction à base de cercles.  $\square$

**Remarque 43.** Ce qui précède donne envie de faire appel à la méthode des extrema liés pour plus d'élégance, et d'efficacité, dans les calculs, modulo l'utilisation d'un gros théorème. Étudions donc les extrema de  $f(\alpha, \gamma) = k \sin \alpha + \sin \gamma$  sur  $]0 ; \pi[^2$ , qui est un ouvert, sous la contrainte  $g(\alpha, \gamma) = 0$  avec  $g(\alpha, \gamma) = 1 - k^2 + 2k \cos \alpha - 2 \cos \gamma$ . Si un extremum existe, alors nous avons  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\partial_\alpha f = \lambda \partial_\alpha g$  et  $\partial_\gamma f = \lambda \partial_\gamma g$ , de sorte que  $k \cos \alpha = -2k\lambda \sin \alpha$ , soit  $\cos \alpha = -2\lambda \sin \alpha$ , et nous avons aussi  $\cos \gamma = 2\lambda \sin \gamma$ . Nous aboutissons alors aux deux alternatives suivantes qui rejoignent les arguments de la preuve précédente.

(1) Si  $\lambda = 0$ , alors  $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{2}$  et  $k = 1$ .

(2) Si  $\lambda \neq 0$ , alors  $\cos \alpha \sin \gamma = -\sin \alpha \cos \gamma$ , puis  $\sin(\alpha + \gamma) = 0$ , et  $\alpha + \gamma = \pi$ .

**Remarque 44.** Une démonstration géométrique du fait 42 est possible via un résultat attribué à Zénodore<sup>31</sup> sur la maximisation de l'aire totale de deux triangles isocèles de bases fixées, et

28.  $B$  se déplace vers la gauche dans notre cas.

29. Si besoin, se reporter à la preuve du fait 7.

30. Nous utilisons la composition de fonctions monotones, ce qui n'est pas toujours faisable.

31. La preuve du résultat de Zénodore est un peu fastidieuse.

de périmètre total constant : ce résultat affirme que les deux triangles doivent avoir des angles en leur sommet principal de même mesure. Malheureusement, cette preuve peut « échouer » lors de la disparition d'un sommet en choisissant la paire optimale de triangles isocèles pour construire un nouveau  $n$ -gone « plus gros ».

**Fait 45.** Si  $\mathcal{P}$  est un  $n$ -gone maximisant l'aire parmi les  $n$ -gones de périmètre fixé, alors  $\mathcal{P}$  ne peut être que régulier et convexe.

*Démonstration.* Si  $\mathcal{P}$  n'était pas régulier et convexe, alors soit il ne serait pas convexe, soit il serait convexe, mais pas équilatéral, soit il serait convexe et équilatéral, mais pas équiangle. Or, aucune de ces alternatives n'est possible d'après les faits 39, 40 et 42.  $\square$

#### 4.7. Théorème d'isopérimétrie polygonale.

**Fait 46.** Soit  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  un naturel fixé. Parmi les  $n$ -gones de périmètre fixé, non nul, le  $n$ -gone régulier convexe est le seul à maximiser l'aire.

*Démonstration.* Tout a été dit, il ne reste plus qu'à révéler la vérité.

- (1) Le cas  $n = 3$  correspond au fait 3.
- (2) Le cas  $n = 4$  a été établi dans le fait 9.
- (3) Pour  $n \geq 5$ , il suffit de se rappeler des faits suivants.
  - D'après le fait 37, il existe, au moins, un  $n$ -gone convexe maximisant l'aire parmi les  $n$ -gones convexes de périmètre (longueur) fixé.
  - Selon le fait 45, un  $n$ -gone « maximal » ne peut que être régulier et convexe.
  - Pour un périmètre donné, non nul, il n'existe, à isométrie près, qu'un seul  $n$ -gone régulier convexe ayant ce périmètre.  $\square$

*Ici s'achève notre joli voyage.*