

# IDENTITÉS PARTICULIÈRES GÉNÉRALISABLES RIGOREUSEMENT

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
[https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/visual-proof/  
polynomial-analytic-principles](https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/visual-proof/polynomial-analytic-principles).*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.

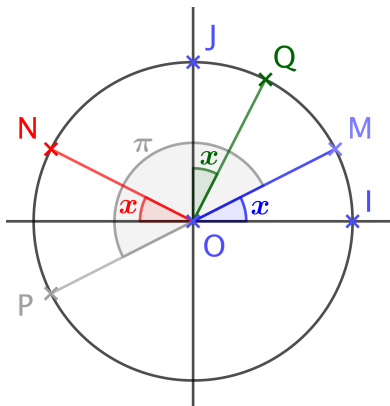


## TABLE DES MATIÈRES

- |   |   |
|---|---|
| 1. ... puis vinrent les fonctions analytiques | 2 |
|---|---|

## 1. ... PUIS VINRENT LES FONCTIONS ANALYTIQUES

Considérons le dessin suivant, où les mesures des angles sont en radians.



Via les points  $M$ ,  $N$ ,  $P$  et  $Q$ , il est facile de fournir des arguments géométriques de symétrie justifiant que, sous la condition  $x \in ]0; \frac{\pi}{4}[$ , nous avons :

$$\begin{array}{lll} \bullet \cos(\pi - x) = -\cos x & \bullet \cos(x + \pi) = -\cos x & \bullet \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin(\pi - x) = \sin x & \sin(x + \pi) = -\sin x & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{array}$$

De nouveau, il serait bien de pouvoir passer, sans plus d'effort, à la validité des formules ci-dessus sur  $\mathbb{R}$  tout entier (*considérer les autres cas n'est pas compliqué, mais c'est pénible*). Nous allons voir que cela est licite grâce au fait ??, donné plus bas, qui est un peu technique, car il nécessite la notion de fonction analytique.

**Préliminaire 1.** Le rayon de convergence  $R$  de la série entière complexe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  est défini par la formule de Hadamard<sup>1</sup>  $\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{|a_n|})$  avec les conventions  $0 = \frac{1}{+\infty}$  et  $+\infty = \frac{1}{0}$ . Ce nombre  $R$  s'interprète comme suit.

- (1) Si  $R = 0$ , la série ne converge que pour  $z = 0$ , et sinon elle diverge grossièrement.
- (2) Si  $R = +\infty$ , la série converge sur  $\mathbb{C}$ . Plus précisément, la série converge normalement sur tout disque ouvert  $\mathcal{D}(0; r[$  tel que  $r \in \mathbb{R}_+^*$ .
- (3) Si  $0 < R < +\infty$ , la série converge normalement sur tout disque ouvert  $\mathcal{D}(0; r[$  tel que  $0 < r < R$ , donc elle converge sur  $\mathcal{D}(0; R[$ . Par contre, elle diverge grossièrement sur  $\mathbb{C} - \mathcal{D}(0; R]$ , et le comportement sur le cercle  $\mathcal{C}(0; R)$  doit être traité au cas par cas.

*Démonstration.* Notons  $\ell = \limsup_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{|a_n|})$ , soit  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sup \{\sqrt[k]{|a_k|}, k \in \mathbb{N}_{\geq n}\})$ , de sorte que  $\ell \in [0; +\infty]$ . Commençons par le cas  $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ , c'est-à-dire  $R \in \mathbb{R}_+^*$ .

- Soit  $r \in ]0; R[$ . Considérons  $\rho \in ]r; R[$  de sorte que  $\frac{1}{r} > \frac{1}{\rho} > \frac{1}{R}$ . Par définition de  $\ell = \frac{1}{R}$ , nous avons  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\sup \{\sqrt[k]{|a_k|}, k \in \mathbb{N}_{\geq n_0}\} < \frac{1}{\rho}$ . Donc pour  $z \in \mathcal{D}(0; r[$  et  $k \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ , nous obtenons  $|a_k z^k| < \left(\frac{r}{\rho}\right)^k$  pour  $k \geq n_0$ . Comme  $0 < \frac{r}{\rho} < 1$ , la convergence normale devient évidente.
- Soit  $z \in \mathbb{C} - \mathcal{D}(0; R]$ . Comme  $\frac{1}{|z|} < \frac{1}{R}$ , nous avons ici  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ ,  $\sup \{\sqrt[k]{|a_k|}, k \in \mathbb{N}_{\geq n}\} > \frac{1}{|z|}$ . En particulier, nous pouvons construire une suite strictement croissante d'indices  $(k_i)$  telle que  $|a_{k_i} z^{k_i}| > 1$ . Ceci donne la divergence grossière.

1. La démonstration va révéler le côté « naturel » de la formule de Hadamard.

- La justification du comportement pathologique sur le cercle  $\mathcal{C}(0; R)$  se fait via des contre-exemples. Nous pouvons citer les exemples classiques suivants.

- (a)  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ , de rayon de convergence 1, diverge grossièrement sur  $\mathcal{C}(0; 1)$ .
- (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ , de rayon de convergence 1, puisque  $\ln \left( \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \right) = -\frac{2 \ln n}{n}$ . De plus, cette série entière converge normalement sur  $\mathcal{C}(0; 1)$ .
- (c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ , de rayon de convergence 1, puisque  $\ln \left( \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \right) = -\frac{\ln n}{n}$ . De plus, cette série entière converge sur  $\mathcal{C}(0; 1) - \{1\}$ , mais pas en 1. Le comportement sur  $\mathcal{C}(0; 1) - \{1\}$  est plus délicat à démontrer, car il se base sur le test de Abel-Dirichlet.

Les cas  $\ell = 0$ , c'est-à-dire  $R = +\infty$ , et  $\ell = +\infty$ , c'est-à-dire  $R = 0$ , s'obtiennent via des adaptations immédiates de ce qui a été fait ci-dessus.  $\square$

**Exemple 2.** La série entière complexe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$  admet un rayon de convergence infini ; la fonction associée est l'exponentielle complexe  $\exp$ . En effet, notant  $\text{Ent}$  la fonction partie entière, nous avons  $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\text{Ent}(\frac{n}{2})} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}$ , puis  $\ln \left( \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \right) \leq \frac{2-n}{2n} \ln \left( \frac{n}{2} \right)$ .

**Préliminaire 3.** Soit une série entière complexe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  de rayon de convergence  $R$  non nul.

La fonction  $f : z \in \mathcal{D}(0; R[ \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}$  vérifie les propriétés suivantes.

(1)  $f$  est infiniment  $\mathbb{C}$ -dérivable.

(2)  $\forall k \in \mathbb{N}$ , la série entière  $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$  admet  $R$  pour rayon de convergence.

(3)  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\forall z \in \mathcal{D}(0; R[$ ,  $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$ .

(4)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ .

*Démonstration.* La propriété 4 étant aisée à déduire, une récurrence immédiate à faire montre que nous avons juste à démontrer que  $\forall z \in \mathcal{D}(0; R[$ ,  $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \mathcal{D}(0; R[}} \left( \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ .

- $\ln \left( \sqrt[n]{|n a_n|} \right) = \frac{\ln n}{n} + \ln \left( \sqrt[n]{|a_n|} \right)$  donne que  $R$  est le rayon de convergence de  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ .

On peut donc définir la fonction  $g : z \in \mathcal{D}(0; R[ \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \in \mathbb{C}$ .

- Pour  $(z, z_0) \in \mathcal{D}(0; R[^2$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ , nous introduisons les notations suivantes.

(a)  $f_k(z) = \sum_{n=0}^k a_n z^n$ .

(b)  $g_k(z) = \sum_{n=1}^k n a_n z^{n-1}$ , cette fonction étant clairement la  $\mathbb{C}$ -dérivée de  $f_k(z)$ .

(c)  $T_k(z) = \begin{cases} \frac{f_k(z) - f_k(z_0)}{z - z_0} & \text{si } z \in \mathcal{D}(0; R[ - \{z_0\} \\ g_k(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$

$$(d) \quad T(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \in \mathcal{D}(0; R[ - \{z_0\} \\ g(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

- Considérons alors  $r \in ]0; R[$  tel que  $z_0 \in \mathcal{D}(0; r[$ . Par convergence normale sur  $\mathcal{D}(0; r[$  de  $(f_k)$  et  $(g_k)$  vers  $f$  et  $g$  respectivement, nous avons la convergence uniforme sur  $\mathcal{D}(0; r[$  de  $(T_k)$  vers  $T$ . Or chaque fonction  $T_k$  est continue en  $z_0$  par  $\mathbb{C}$ -dérivabilité de  $f_k$ , donc, par raison de convergence uniforme,  $T$  est continue en  $z_0$ , d'où la  $\mathbb{C}$ -dérivabilité de  $f$  en  $z_0$  avec  $f'(z_0) = g(z_0)$ . Ceci achève la preuve, car  $z_0 \in \mathcal{D}(0; R[$  est quelconque.  $\square$

**Remarque 4.** Les preuves des résultats préliminaires 1 et 3 montrent que, plus généralement, pour toute série entière complexe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  de rayon de convergence  $R$  non nul, et tout nombre complexe  $z_0$ , la fonction  $f : z \in \mathcal{D}(z_0; R[ \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \in \mathbb{C}$  vérifie les propriétés suivantes.

(1)  $f$  est infiniment  $\mathbb{C}$ -dérivable.

(2)  $\forall k \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k}$  converge normalement sur  $\mathcal{D}(z_0; R[$ ,

(3)  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\forall z \in \mathcal{D}(z_0; R[$ ,  $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k}$ .

(4)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ .

Nous allons voir que les fonctions développables en série entière autour de 0 ont le bon ton de l'être aussi localement autour de nombres complexes  $z_0$  assez proches de 0.

**Définition 5.** Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert non vide. Une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  est dite analytique en  $z_0 \in \Omega$ , s'il existe une série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  de rayon de convergence  $R > 0$  et un réel

$r \in ]0; R[$  tels que, dans le disque ouvert  $\mathcal{D}(z_0; r[ \subseteq \Omega$ , on ait  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ .

Si  $f$  est analytique en tout nombre complexe de  $\Omega$ , la fonction  $f$  est dite analytique sur  $\Omega$ .

**Fait 6.** Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  où  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  est un ouvert non vide. Si  $f$  est analytique en  $z_0$ , alors il existe un réel  $r > 0$  tel que  $f$  soit analytique sur  $\mathcal{D}(z_0; r[$  tout entier.

*Démonstration.* Nous allons voir que le réel  $r$  de la définition 5 convient. Reprenons toutes les notations de cette définition, et considérons  $\omega \in \mathcal{D}(z_0; r[$ . Notre but est de prouver l'existence d'une série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$  de rayon de convergence  $S > 0$  et d'un réel  $\rho \in ]0; S[$  tels que, dans

le disque ouvert  $\mathcal{D}(\omega; \rho[ \subseteq \mathcal{D}(z_0; r[$ , on ait  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - \omega)^n$ .

- XXXX
- XXXX
- XXXX
- XXXX

$\square$