Triangles Bell et Pascal
et aussi Fibo via arbre

Cas Bell

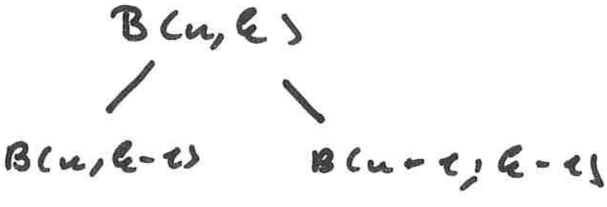
n-ième nbre de Bell : nbre partitions d'un ens. à n elts
↳ B_n

$B_n = B(n;0)$
$= B(n-1; n-1)$ où $B(n;k) = B(n;k-1) + B(n-1;k-1)$

1 2 → 1
1 2
2 3 5 → ... etc

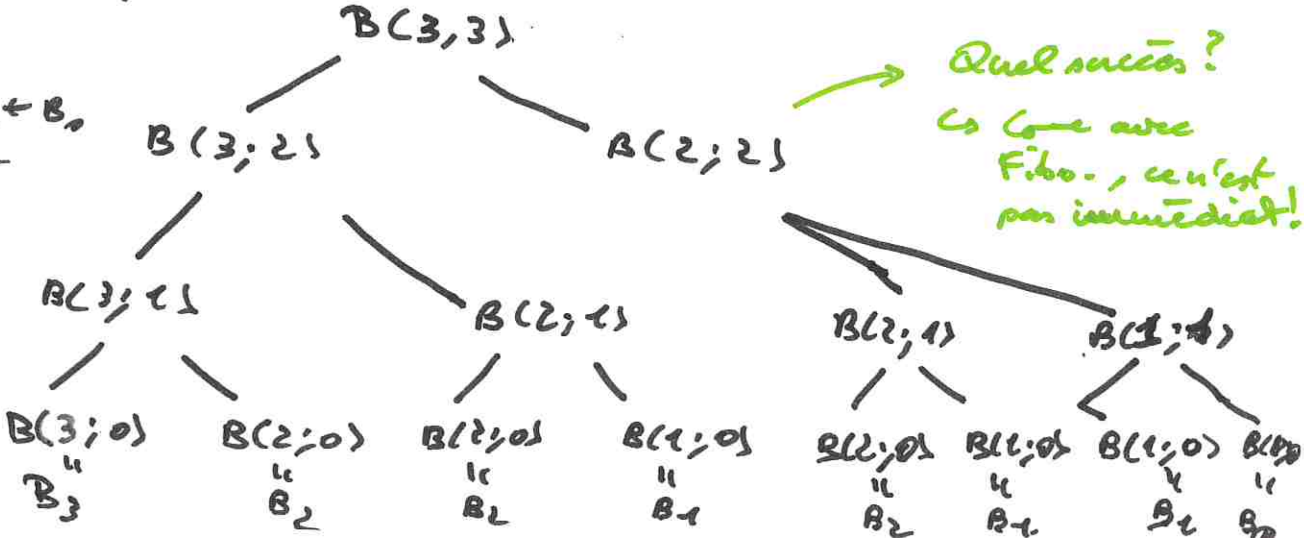
1
1.2
2.3.5
5.7.10.15
15.20.27.37.52
52 ...

Lien avec les ∴ (arbres binaires)



On choisit $k = n$.

Donc, par ex., on a :



$B_3 + 3B_2 + 3B_1 + B_0$

Quel succès ?
↳ Comme avec Fibo., ce n'est pas immédiat !

Comment arrive-t-on à $B_2 = B(2;0)$?

On note $2 \cdot 0 = B(2;0)$.

On dispose $a = (n-1; k-1)$ et $b = (n; k-1)$.

- $B_3 = 3 \cdot 0 = 3 \cdot 3 - 3b - 0a$
- $B_2 = 2 \cdot 0 = 3 \cdot 3 - 2b - 1a$

$$= 3 \cdot 3 \underbrace{- b - b - a}_{\binom{3}{2}}$$

Cool !

Cas Pascal

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1

$C(n;k) =$ val case ...

$$C(n;k)$$

$$C(n-1;k) \qquad C(n-1;k-1)$$

$\hat{\Pi}$ principe ! Ici $C(n;1) \to$ que des $\binom{n}{k}$.

$C(n;1) = C(1;n) = n$ et $C(k;n) = 0$ si $k > n+1$

$$\boxed{C(3;2)}$$

$$C(2;2) \qquad\qquad C(2;1)$$

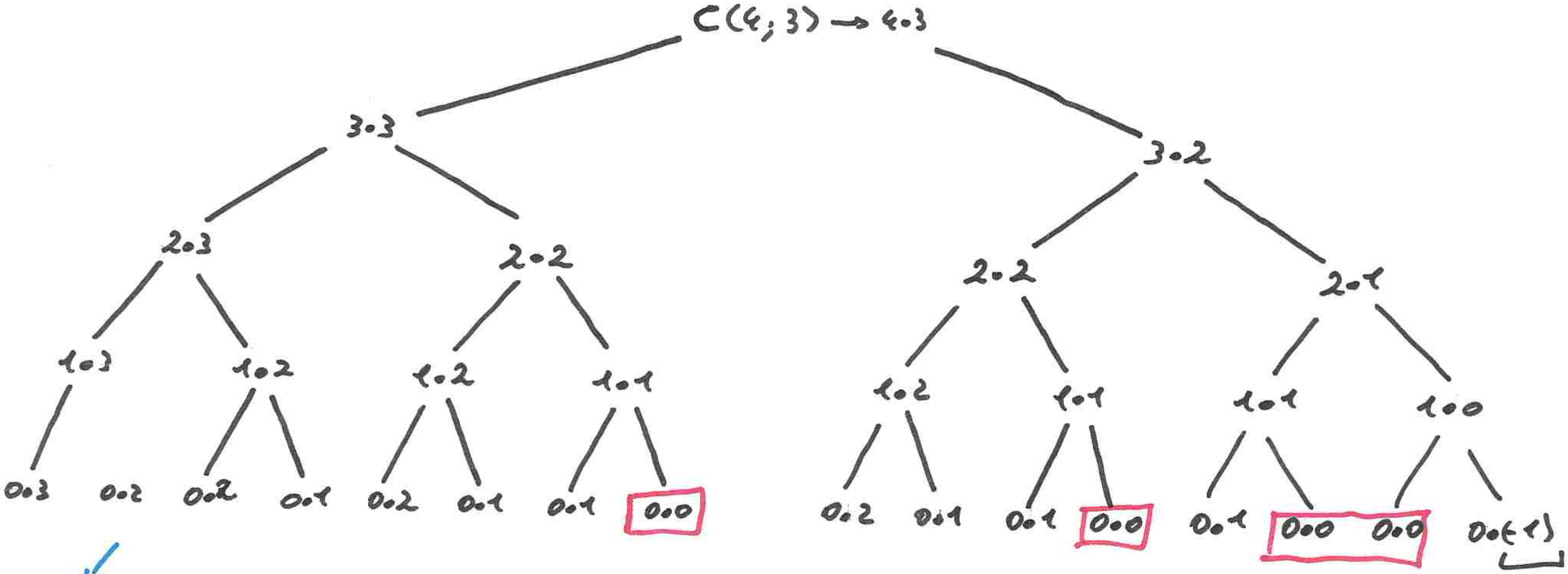
$$C(1;2) = 1 \qquad C(1;1) = 1 \qquad C(1;1) = 1 \qquad C(1;0)$$

"NON"

Il manque niveau. On veut que des $C(0;1)$.

$C(3;2) = 3$

Un motif génér. éclairant (aussi Bell) :



$k<0$ ok!

Que des $C(0;\bullet)$ ⇒ Hauteur OK

$$\binom{4}{3} = 4$$

$C(4;3) =$ nbre de chemins pour aller à $0\bullet0 = C(0;0)$ qui est tq $C(0;0)=1$ sinon $C(0;k)=0$ si $k \neq 0$.

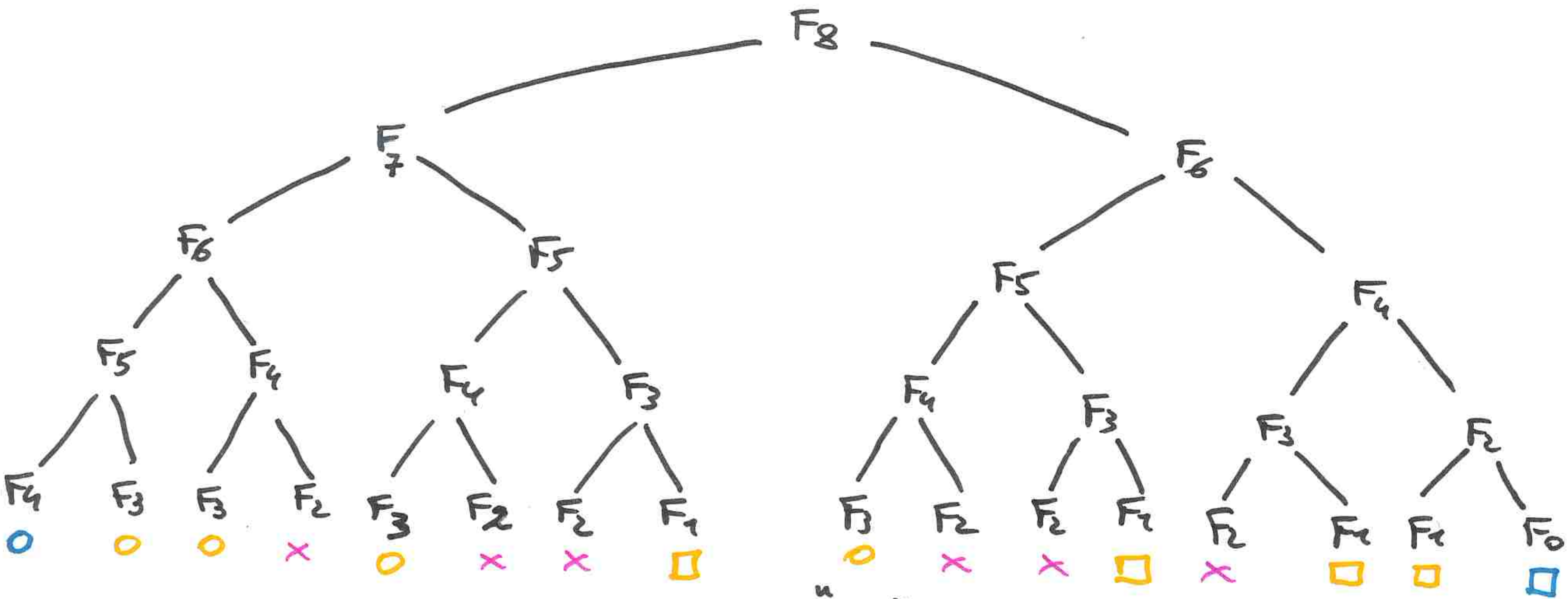
Comment arriver à $C(0;0)$?

⟷ Chemin de succès 3 = haut. où Succès vers la dte car 3-1-1-1 à dte attendu!

BINGO!

(i) Ça marche car k et n deux rôles ≠ dans $C(n,k)$

$C(n-1,k)$ $C(n-1,k-1)$



$$F_{2n} = \sum_{0}^{n} \binom{n}{k} F_k$$

$$\begin{array}{c} 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \\ \boxed{1\ 4\ 6\ 4\ 1} \end{array}$$

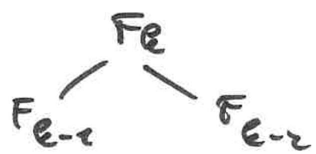
Ici, $F_8 = F_4 + 4F_3 + 6F_2 + 4F_1 + F_0$

Pourquoi ?

↳ Voir après.

La difficulté ici est de voir succès/échec.

On doit "dissocier" F_{k-1} et F_{k-2} dans



Ex Fibo. ?

Idée simple également :

$0 = 8 - 4\times 2 - 0\times 1$

$1 = 8 - 3\times 2 - 1\times 1$

$2 = 8 - 2\times 2 - 2\times 1$

$3 = 8 - 1\times 2 - 3\times 1$

$4 = 8 - 0\times 2 - 4\times 1$

On note ensuite que :

$$3 = 8 - 1 - 2 - 2 - 2$$
$$= 8 - 2 - 1 - 2 - 2$$
$$= 8 - 2 - 2 - 1 - 2$$
$$= 8 - 2 - 2 - 2 - 1$$

(i) Généralisation à $L_k = L_{k-1} + L_{k-2} + L_{k-3}$ via coeff. multinomiaux

$$L_{3n} = \sum \binom{n}{k_1, k_2} L_{\underbrace{3n - k_1 - 2k_2 - 3(n - k_1 - k_2)}_{= 2k_1 + k_2}}$$

$$F_{2n} = \sum \binom{n}{k} F_{\underbrace{2n - k - 2(n-k)}_{2n - k - 2n + 2k = k}}$$ COOL!