BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES

CHRISTOPHE BAL

Mentions « légales »

Table des matières

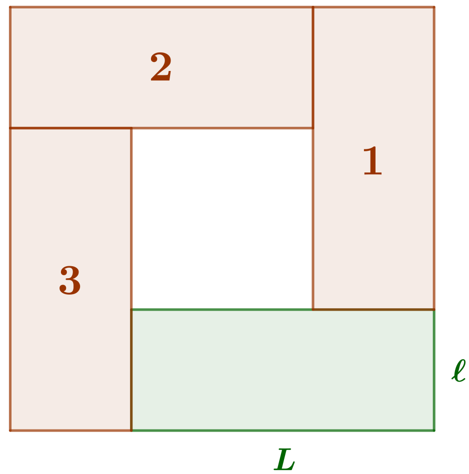
1. Le cas du rectangle 2

Date: 18 Janvier 2025.

1. Le cas du rectangle

Fait 1. *Considérons tous les rectangles de périmètre fixé p. Parmi tous ces rectangles, celui d'aire maximale est le carré de côté $c = 0{,}25p$.*

Démonstration. Une preuve courante est d'exprimer l'aire du rectangle comme un polynôme du 2e degré en L par exemple.[1] On peut en fait faire plus simplement grâce au dessin suivant où les rectangles 1, 2 et 3 sont isométriques au rectangle vert étudié de dimension $L \times \ell$.



Le raisonnement tient alors aux constations suivantes accessibles à un collégien.

(1) Le grand carré a un aire supérieure ou égale à $4L\ell$.

(2) Le grand carré a un périmètre égal à $4(L+\ell)$.

(3) Via une homothétie de rapport $0{,}5$, nous obtenons un carré d'aire supérieure ou égale à $0{,}5^2 \times 4L\ell = L\ell$, et de périmètre égal à $0{,}5 \times 4(L+\ell) = 2(L+\ell)$.

Donc pour tout rectangle de périmètre $p = 2(L+\ell)$ et d'aire $\mathscr{A} = L\ell$, nous pouvons construire un carré de périmètre identique, mais avec une aire supérieure ou égale à $\mathscr{A}$. Joli ! Non ? $\square$

Remarque 1.1. *Au passage, nous avons pour $(L\,;\ell) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $4L\ell \leq (L+\ell)^2$, c'est-à-dire $2L\ell \leq L^2 + \ell^2$, d'où $\sqrt{L\ell} \leq \sqrt{\dfrac{1}{2}(L^2+\ell^2)}$, soit la comparaison des moyennes géométriques et quadratiques. Ceci donne une 3e preuve en s'appuyant sur cette comparaison.*

1. L'aire est donnée par $L\ell = L(0{,}5p - L)$ qui est maximale en $L = 0{,}25p$ (moyenne des racines), d'où $\ell = 0{,}25p = L$.