IDENTITÉS PARTICULIÈRES GÉNÉRALISABLES RIGOUREUSEMENT

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LaTeX, disponible sur la page ***https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/visual-proof/polynomial-analytic-principles.***

Mentions « légales »

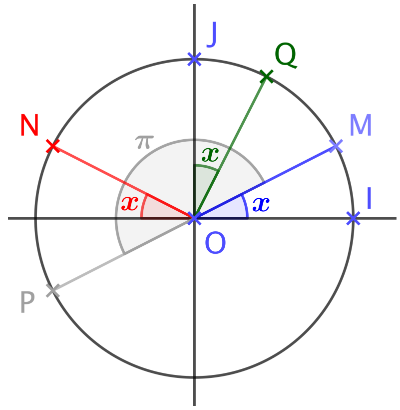
Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons "Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International".

Table des matières

Date: 16 Juillet 2019 - 24 Mars 2025.

1. Ensuite vinrent les fonctions analytiques

Considérons le dessin suivant, où les mesures des angles sont en radians.



Via les points M, N, P et Q, il est facile de fournir des arguments géométriques de symétrie justifiant que, sous la condition $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{4}\right[$, nous avons :

- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
  $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
  $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

De nouveau, il serait bien de pouvoir passer, sans plus d'effort, à la validité des formules ci-dessus sur $\mathbb{R}$ tout entier *(considérer les autres cas n'est pas compliqué, mais c'est pénible)*. Nous allons voir que cela est licite grâce au fait 2 suivant qui est un peu technique, car il nécessite la notion de fonction analytique.

Définition 1. *Soit $U \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert non vide. Une fonction réelle $f : U \to \mathbb{R}$ est dite analytique en x_0, s'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $\rho_0 > 0$, et un réel $r \in \left]0\,;\rho_0\right]$ tels que $\forall x \in \left]x_0 - r\,;x_0 + r\right[\subseteq U$, on ait : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$.*
Si f est analytique en tout réel de U, nous dirons que f est analytique sur U.

Fait 2. *Soit $U \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert connexe non vide, et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction analytique. Si f s'annule sur un ouvert de U, alors f est identiquement nulle* (c'est le théorème d'identité).

Démonstration. Ceci découle du fait 6 analogue pour plusieurs variables que nous démontrerons plus tard. □

Fait 3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. S'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence infini telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors f est analytique sur $\mathbb{R}$.*

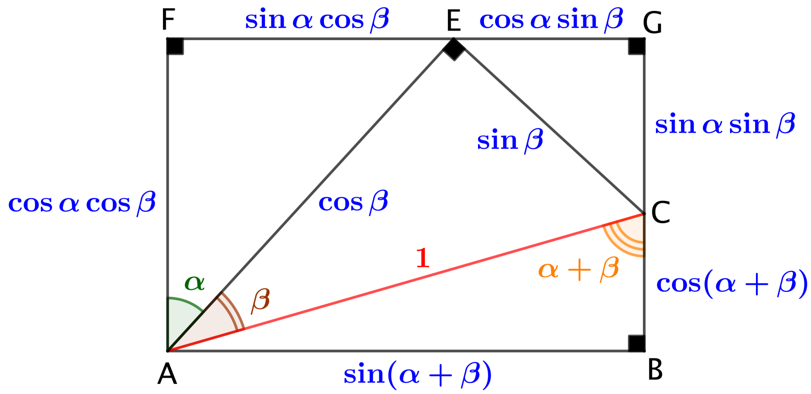
Démonstration. Ceci découle du fait 5 analogue pour plusieurs variables que nous démontrerons plus tard. □

Si nous revenons à nos identités trigonométriques, il suffit de savoir que les fonctions circulaires réelles sont analytiques sur $\mathbb{R}$ tout entier, et de noter que le raisonnement géométrique au début de cette section fait clairement apparaître des zéros non isolés pour les fonctions analytiques sur $\mathbb{R}$ suivantes. [1]

1. Nous admettrons ces affirmations qui ne sont pas violentes à démontrer une fois que l'on a les bases de la théorie des fonctions analytiques.

- $f_1(z) = \cos(\pi - z) + \cos z$ et $f_2(z) = \sin(\pi - z) - \sin z$
- $f_3(z) = \cos(z + \pi) + \cos z$ et $f_4(z) = \sin(z + \pi) + \sin z$
- $f_5(z) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \sin z$ et $f_6(z) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \cos z$

Que faire si nous avons des formules trigonométriques impliquant deux variables ? Par exemple, le dessin suivant, par simple application des définitions géométriques du cosinus et du sinus, donne à la fois $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ et $\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$ pour $(\alpha\,;\beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que $0 < \alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$.



Le fait 6 ci-dessous, qui généralise le fait 2, implique la validité des formules trigonométriques précédentes sur $\mathbb{R}^2$ tout entier en faisant les choix ci-après. Nous voilà sauvés !

- $f_1(\alpha\,;\beta) = \cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
- $f_2(\alpha\,;\beta) = \sin(\alpha+\beta) - \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta$

Définition 4. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $U \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert non vide. Une fonction réelle $f : U \to \mathbb{R}$ est dite analytique en x_0, s'il existe une série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $\rho_0 > 0$, et un réel $r \in \left]0\,;\rho_0\right]$ tels que $\forall x \in \mathcal{D}(x_0\,;r) \subseteq U$, on ait : $f(x) = \sum\limits_{XXX} a_n(x-x_0)^n$. Si f est analytique en tout réel de U, on dira que f est analytique sur U.*

Fait 5. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. S'il existe une série entière $\sum\limits_{XXXX} a_n x^n$ de rayon de convergence infini telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \sum\limits_{XXX} a_n x^n$, alors f est analytique sur $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. TODO $\square$

Fait 6. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe non vide, et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction analytique. Si f s'annule sur un ouvert de U, alors f est identiquement nulle* (c'est le théorème d'identité).

Démonstration. TODO $\square$