

# BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

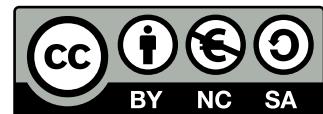
CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



## TABLE DES MATIÈRES

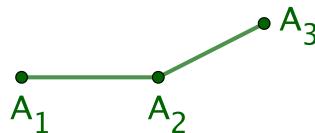
- |                                 |   |
|---------------------------------|---|
| 0.1. Solutions, qui êtes-vous ? | 7 |
|---------------------------------|---|

Le cas des quadrilatères a montré que la convexité était un ingrédient central. Ceci sera aussi le cas pour les  $n$ -gones, bien que moins immédiat à justifier, comme nous le verrons dans le fait ??, dont la preuve est indépendante des résultats de cette section. Ceci explique que nous allons chercher à justifier l'existence d'au moins un  $n$ -gone convexe d'aire maximale parmi les  $n$ -gones convexes de longueur fixée. Nous allons presque y arriver...

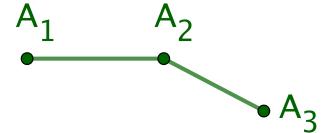
**Fait 1.** Pour tout  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P} = A_1A_2 \cdots A_n$ , l'une des alternatives suivantes a lieu.

- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ , si  $k \notin \{i ; i + 1\}$ , alors  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) > 0$ .
- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ , si  $k \notin \{i ; i + 1\}$ , alors  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) < 0$ .

*Démonstration.* Le cas  $n = 3$  des triangles est immédiat. Considérons alors  $\mathcal{P}$  un  $n$ -gone convexe où  $n \geq 4$ . Nous savons que, relativement à  $\mathcal{P}$ , aucun triplet de sommets consécutifs alignés n'existe. Dès lors, dans le plan orienté, les trois premiers sommets sont placés suivant l'une des deux configurations suivantes.



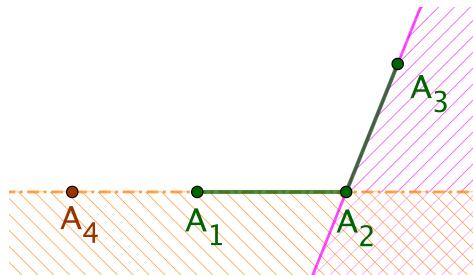
Cas positif.



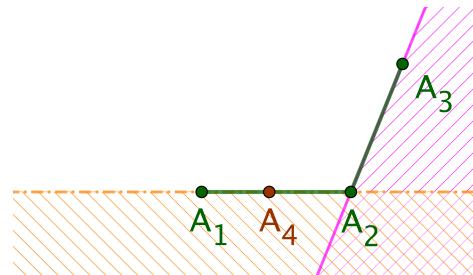
Cas négatif.

Considérons le cas positif, c'est-à-dire supposons que  $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_3}) > 0$ .

- $\overrightarrow{A'_1 A'_3} = \overrightarrow{A'_1 A'_2} + \overrightarrow{A'_2 A'_3}$  donne  $\det(\overrightarrow{A'_2 A'_3}, \overrightarrow{A'_1 A'_2}) > 0$ .
- Comme  $A_2, A_3$  et  $A_4$  ne sont pas alignés, et de plus  $A_1$  et  $A_4$  du même côté de la droite  $(A_2 A_3)$ , au sens large, nous obtenons  $\det(\overrightarrow{A'_2 A'_3}, \overrightarrow{A'_2 A'_4}) > 0$ .
- En continuant de proche en proche, nous arrivons à  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_{i+2}}) > 0$  pour  $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$  quelconque.
- Le point précédent et la convexité donnent  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$  pour  $(i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$  tel que  $k \notin \{i ; i+1\}$ .
- Montrons maintenant que  $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_k}) > 0$  pour  $k \in \llbracket 3 ; n \rrbracket$ . Nous savons déjà l'inégalité vraie pour  $k = 3$ ; passons donc à  $k = 4$ . Pour avoir  $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_4}) > 0$ , le point précédent donne qu'il faut vérifier que  $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_4}) = 0$  est impossible. Supposons donc l'égalité vraie, ce qui implique d'avoir  $n \geq 5$ , car dans le cas contraire les sommets consécutifs  $A_4, A_1$  et  $A_2$  seraient alignés. Nous aboutissons aux configurations suivantes où les hachures et la droite en trait plein sont des zones interdites pour  $A_4$ .

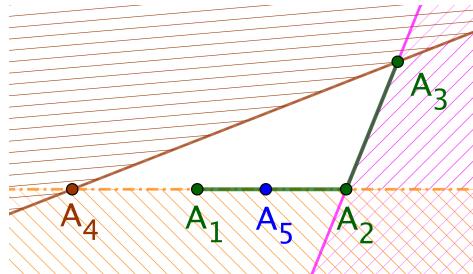


Cas 1.

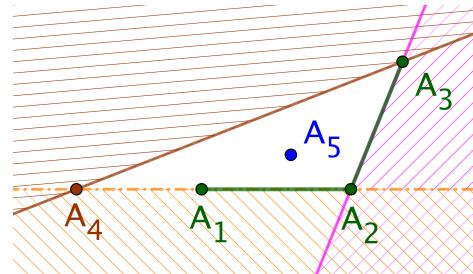


Cas 2.

Le cas 2 est impossible par raison de convexité, car  $A_1$  et  $A_2$  sont de part et d'autre de la droite  $(A_3 A_4)$ . Voyons donc ce qu'implique le 1<sup>er</sup> cas pour  $A_5$ .



Cas 1-1.



Cas 1-2.

Le cas 1-2 est impossible par raison de convexité, car  $(A_4 A_5)$  sépare les points  $A_3$  et  $A_2$ . Notons que dans le cas 1-1, il est possible d'avoir  $A_5 \in ]A_4 A_1[$ . Comme  $A_5 \in (A_1 A_2)$ , nous devons avoir  $n \geq 6$ , mais  $A_6$  ne peut être ni à l'intérieur du triangle  $A_2 A_3 A_4$  par convexité, ni sur la droite  $(A_1 A_2)$ , car  $A_4, A_5$  et  $A_6$  ne peuvent pas être alignés. Cette situation contradictoire montre que  $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_4}) > 0$ . En continuant de même, de proche en proche, nous arrivons à  $\det(\overrightarrow{A'_1 A'_2}, \overrightarrow{A'_1 A'_k}) > 0$  pour  $k \in \llbracket 3 ; n \rrbracket$ .

- En généralisant le raisonnement précédent,<sup>1</sup> nous avons  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) > 0$  pour tout couple  $(i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$  vérifiant  $k \notin \{i ; i+1\}$ .

1. Se souvenir de la définition « cyclique » de la suite  $(A'_i)$ .

Le cas négatif se traite de façon similaire.  $\square$

Nous allons établir une réciproque élargie du résultat précédent. Ce nouveau fait, le plus technique à justifier, va nous rendre un grand service par la suite.<sup>2</sup>

**Fait 2.** Soit  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  un  $n$ -cycle vérifiant l'une des alternatives suivantes.

- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ ,  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$ .
- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ ,  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \leq 0$ .

Sous l'une de ces hypothèses, l'une des assertions ci-après est validée.

i.  $\mathcal{L}$  est totalement dégénéré.

ii. Il existe un  $k$ -gone convexe  $\mathcal{C}$  tel que  $k \leq n$ ,  $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \text{Long}(\mathcal{L})$  et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{L})$ .  $\mathcal{C}$  se construit en retirant, si nécessaire, des sommets de  $\mathcal{L}$ , sans modifier l'ordre de parcours pour les sommets gardés.

*Démonstration.* Par symétrie des alternatives, nous pouvons nous concentrer sur le cas positif,<sup>3</sup> c'est-à-dire supposer que  $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ ,  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$ . Seul le cas  $\mathcal{L}$  non totalement dégénéré requiert notre attention. L'idée de la construction est simple : il s'agit de chercher des sommets extrémaux, c'est-à-dire qui « forment un angle ». Nous allons raisonner algorithmiquement en utilisant une variable  $i$  initialisée à 1, et une liste  $C$ , initialement vide, pour stocker les sommets « utiles » à la fabrication du  $k$ -gone convexe final.

- A1** Si  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_{i+2}}) > 0$ , nous ajoutons  $A'_{i+1}$  à la fin de la liste  $C$ , puis nous passons directement à l'action **A3**.
- A2** Sinon, il existe  $m \in \mathbb{N}_{>i+2}$  minimal tel que  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_m}) > 0$ , car  $\mathcal{L}$  n'est pas totalement dégénéré.



Nous arrivons aux constatations suivantes.

- Les points  $A'_i$ ,  $A'_{m-1}$  et  $A'_m$  ne sont pas alignés, et par conséquent deux à deux distincts.
- Comme  $\forall j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ ,  $\det(\overrightarrow{A'_{m-1} A'_m}, \overrightarrow{A'_{m-1} A'_j}) \geq 0$ , nous avons  $A'_j \in (A'_i, A'_{m-1}]$ , pour  $j \in \llbracket i ; m-1 \rrbracket$ .<sup>4</sup>
- L'évaluation de l'aire algébrique via le point de calcul  $A'_{m-1}$  peut se passer des sommets  $A'_j$  pour  $j \in \llbracket i ; m-1 \rrbracket$ , par raison d'alignement.
- Ignorer des sommets, tout en conservant l'ordre de parcours, pour former un nouveau cycle  $\mathcal{L}'$ , donne  $\text{Long}(\mathcal{L}') \leq \text{Long}(\mathcal{L})$ .

2. Pourquoi s'attarder sur des inégalités larges ? Parce que nous allons travailler dans un ensemble compact, et donc fermé, de  $n$ -cycles. Pour garder des  $n$ -gones, nous devrions utiliser des non-égalités, mais ceci nous ferait sortir du cadre fermé qui nous intéresse. Nous n'avons pas le choix !

3. On pourrait aussi invoquer des cycles opposés.

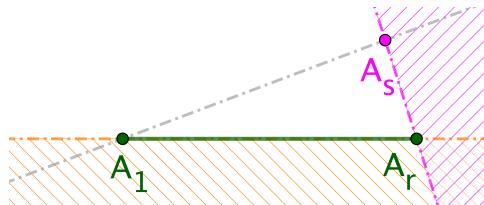
4. Le point  $A'_{m-1}$  est le plus à droite sur notre schéma.

Les constatations précédentes justifient l'ajout de  $A'_{m-1}$  à la fin de la liste  $C$ , uniquement si  $A'_{m-1}$  n'est pas dans cette liste,<sup>5</sup> puis de poser  $i = m - 2$ , puisque nous augmentons  $i$  de 1 juste après.

**A3** Ajoutons 1 à  $i$ . Si  $i \geq n + 1$ , nous avons fini, sinon nous retournons à l'action **A1**.

Commençons par justifier que l'algorithme s'arrête sans entrer dans une boucle infinie. Tant que l'indice  $m$  de l'étape **A2** vérifie  $m \leq n$ , il n'y a aucune difficulté, car  $i$  augmente, et les sommets ajoutés se placent « *avant* » l'origine  $A_1$  du  $n$ -cycle initial  $\mathcal{L}$  sans empiéter sur les « *premiers* » sommets. Supposons avoir  $m \in \llbracket n ; n + i \rrbracket$  pour un indice  $i$ , où forcément  $i > 1$ , et par conséquent  $A'_i$  a été stocké dans la liste  $C$ .

- Commençons par noter l'existence de  $A_1$ ,  $A_r$  et  $A_s$  non alignés avec  $A_r$  et  $A_s$  stockés dans  $C$ . En effet,  $A_r$  vient de l'application de l'algorithme à  $i = 1$ , puis  $A_s$  s'obtient avec  $i = r$ .
- Supposons que  $i = s$ . Pour  $j \in \llbracket s + 1 ; n \rrbracket$ , les points  $A'_j$  sont sur la droite  $(A'_s A'_1)$ , et ensuite plus généralement pour  $j \in \llbracket s ; m \rrbracket$ . Le schéma suivant montre sans ambiguïté qu'alors  $A'_{m-1} = A'_1$ .<sup>6</sup> Dès lors,  $m = n + 2$ , d'où l'ajout de  $A'_1$  à la fin de la liste  $C$ , puis l'arrêt de l'algorithme à l'étape suivante.



- Le raisonnement précédent fonctionne plus généralement lorsque  $A'_i \notin (A'_1 A'_r)$ .
- Il reste le cas où  $A'_i \in (A'_1 A'_r)$ . Ceci nous donne le schéma suivant, où  $A'_i \in [A'_1 A'_r]$  est possible, a priori.



L'algorithme assure l'existence d'un point  $A'_p \notin (A'_1, A'_r)$  stocké dans  $C$  et « *précédent* »  $A'_i$ , tel que tout point entre  $A'_p$  et  $A'_i$  soit sur  $(A'_p A'_i)$ . Nous arrivons au schéma plus précis ci-dessous, où  $A'_1 \in [A'_i, A'_r]$  par positivité large des déterminants  $\det(\overrightarrow{A'_p A'_{p+1}}, \overrightarrow{A'_p A'_k})$ , avec la possibilité d'avoir  $A'_p = A'_s$ .



Ici,  $A'_r$  est déjà présent dans  $C$ , donc l'algorithme s'arrêtera après avoir juste modifié  $i$  en  $(n + r)$ . Notons que les points de  $A'_{i+1}$  à  $A'_{r-1}$  sont « *mangés* » comme attendu.

5. La justification de l'algorithme, donnée un peu plus bas, montrera la possibilité d'avoir un doublon dans la liste  $C$ .

6.  $A'_{m-1} \neq A'_1$  contredirait la condition de positivité large sur les déterminants.

Il reste à justifier que la liste  $C$  qui, lue de gauche à droite, donnera les sommets du  $k$ -gone convexe  $\mathcal{C}$  cherché.

- Par construction, deux sommets « consécutifs »  $A'_r$  et  $A'_s$  de  $\mathcal{C}$ , sont tels que tout point du cycle initial  $\mathcal{L}$  situé entre  $A'_r$  et  $A'_s$  se trouve sur le segment  $[A'_r A'_s]$ . En ignorant ces points, on fait donc diminuer, au sens large, la longueur du  $n$ -cycle, mais sans modifier la valeur de l'aire algébrique, cette dernière étant calculable depuis  $A'_r$ , ou  $A'_s$ . Donc  $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \text{Long}(\mathcal{L})$  et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{L})$
- Par construction, trois sommets « consécutifs »  $A'_q$ ,  $A'_r$  et  $A'_s$  de  $\mathcal{C}$ , sont tels que  $\det(\overrightarrow{A'_q A'_r}, \overrightarrow{A'_q A'_s}) > 0$ . En particulier, ces trois sommets « consécutifs » ne sont pas alignés. Dès lors,  $\mathcal{C}$  est un  $k$ -gone, et il est aussi convexe.  $\square$

Le résultat qui suit est juste là pour simplifier la justification du fait 4 à venir qui est la raison d'être de cette section.

**Fait 3.** Soient  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ ,  $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé direct du plan et  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$  l'ensemble des uplets de coordonnées  $(x(A_1); y(A_1); \dots; x(A_n); y(A_n))$  où  $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$  désigne un  $n$ -cycle vérifiant les conditions suivantes.

- $\text{Long}(\mathcal{L}) = \ell$ .
- $\forall (i, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ ,  $\det(\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}, \overrightarrow{A'_i A'_k}) \geq 0$ .

Dès lors, la fonction  $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ , qui à un uplet de  $\mathcal{U}$  associe l'aire algébrique du  $n$ -cycle qu'il représente, est une fonction admettant au moins un maximum, qui est positif strict.

*Démonstration.*  $\mathcal{U}$  est fermé dans  $\mathbb{R}^{2n}$ , car les conditions le définissant le sont, et il est borné, car inclus dans la boule fermée de centre  $O$  et de rayon  $\ell$ , donc  $\mathcal{U}$  est un compact de  $\mathbb{R}^{2n}$ . De plus,  $\alpha$  est continue d'après le fait ???. Donc, par continuité et compacité,  $\alpha$  admet un maximum sur  $\mathcal{U}$ , celui-ci étant positif strict pour les raisons suivantes où  $\mathcal{R}$  désigne un  $n$ -gone régulier convexe.

- Via une translation, nous pouvons supposer  $\mathcal{R}$  d'origine  $O$ .
- $\mathcal{R}$ , de périmètre non nul, est d'aire non nulle.
- $\text{Aire}(\mathcal{R}) = |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R})|$  selon le fait ???, et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}^{\text{op}}) = -\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R})$  d'après le fait ???.
- $\mathcal{R} \in \mathcal{U}$ , ou  $\mathcal{R}^{\text{op}} \in \mathcal{U}$  selon le fait 1.
- Si  $\mathcal{R} \in \mathcal{U}$ , alors  $\mathcal{R}$  est orienté positivement, d'où  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}) \geq 0$ , et par conséquent  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{R}) = \text{Aire}(\mathcal{R})$  (c'est immédiat en utilisant le centre de gravité de  $\mathcal{R}$  comme point de calcul). Nous avons une propriété similaire si  $\mathcal{R}^{\text{op}} \in \mathcal{U}$ .  $\square$

Nous arrivons, au résultat fondamental pour les  $n$ -gones convexes avec une perte éventuelle de sommets : ceci est un faux problème, car nous aboutirons, plus tard, à la comparaison de  $k$ -gones réguliers convexes pour  $k$  variable, une tâche aisée, puisque le périmètre et l'aire d'un  $k$ -gone régulier convexe s'expriment en fonction de  $k$ , nous saurons alors que le  $k$ -gone convexe  $\mathcal{K}$  ci-après est en fait un  $n$ -gone régulier convexe.

**Fait 4.** Soient  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  et  $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ . Il existe un  $k$ -gone convexe  $\mathcal{K}$  validant les assertions suivantes.

- $k \leq n$  et  $\text{Long}(\mathcal{K}) = \ell$ .
- Si  $\mathcal{P}$  est un  $n$ -gone convexe tel que  $\text{Long}(\mathcal{P}) = \ell$ , alors  $\text{Aire}(\mathcal{P}) \leq \text{Aire}(\mathcal{K})$ .

*Démonstration.* Reprenons les notations du fait 3, puis choisissons  $\mathcal{L} \in \mathcal{U}$  maximisant l'aire algébrique sur  $\mathcal{U}$ . Ce  $n$ -cycle ne peut être totalement dégénéré, car  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{L}) > 0$ . Dès lors, pour tout  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}$  vérifiant  $\text{Long}(\mathcal{P}) = \ell$ , nous pouvons raisonner comme suit.

- Via une translation, nous nous ramenons à  $\mathcal{P}$  d'origine O.
- Comme dans la preuve du fait 3, nous avons soit  $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$  et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$ , soit  $\mathcal{P}^{\text{op}} \in \mathcal{U}$  et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}^{\text{op}}) = \text{Aire}(\mathcal{P}^{\text{op}})$ . Comme, de plus,  $\text{Aire}(\mathcal{P}^{\text{op}}) = \text{Aire}(\mathcal{P})$ , quitte à échanger  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^{\text{op}}$ , nous pouvons supposer avoir  $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$ .
- Le fait 2 donne un  $k$ -gone convexe  $\mathcal{C}$ , où  $k \leq n$ , tel que  $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \text{Long}(\mathcal{L})$ , ainsi que  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{L})$ .
- Le choix de  $\mathcal{L}$  fait que  $\text{Long}(\mathcal{C}) \leq \ell$  et  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) \leq \overline{\text{Aire}}(\mathcal{C})$ , mais aussi que  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C}) > 0$ .
- Comme  $\text{Aire}(\mathcal{C}) = |\overline{\text{Aire}}(\mathcal{C})| = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{C})$  via le fait ??, alors  $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) \leq \overline{\text{Aire}}(\mathcal{C})$  devient  $\text{Aire}(\mathcal{P}) \leq \text{Aire}(\mathcal{C})$ .
- Or  $\text{Long}(\mathcal{C}) > 0$ , donc une homothétie de rapport  $\frac{\ell}{\text{Long}(\mathcal{C})} \geq 1$  fournit finalement un  $k$ -gone convexe  $\mathcal{K}$  tel que  $k \leq n$ ,  $\text{Long}(\mathcal{K}) = \ell$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}) \leq \text{Aire}(\mathcal{K})$ . Affaire conclue !

□

0.1. **Solutions, qui êtes-vous ?** TOUT REPRENDRE : au final rapide acr on page de kgone convexe régulier à kgone régulier, puis on conclut vai formule pour le nreg!!!  
besoin aussi de voir que sol max ne peut etre un ncycle convexe non ngone  
le fait 4

Cette section va établir le fait ?? affirmant qu'un  $n$ -gone maximisant son aire à périmètre fixé doit être, a minima, un  $n$ -gone régulier.

*Les cas  $n = 3$  et  $n = 4$  étant résolus, voir les faits ?? et ??, dans toutes les preuves de cette section, nous supposerons  $n \geq 5$ .*