BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

Table des matières

Date: 18 Jan. 2025 – 27 Jan. 2025.

0.1. **Condition suffisante.** Selon le fait **??**, si parmi les n-gones de périmètre fixé, il en existe un qui maximise l'aire, alors ce ne peut être que le n-gone régulier. Nous allons établir que cette condition nécessaire est suffisante. Pour cela, nous avons juste besoin de savoir qu'il existe au moins un n-gone d'aire maximale. Comme dans la remarque **??**, nous allons convier le couple continuité/compacité, mais ici les choses se compliquent, car nous allons devoir accepter de travailler avec des polygones croisés, et par conséquent il nous faut un moyen de mesurer la surface de tels polygones (le vrai point délicat est ici).

Fait 1. *Aire algébrique def + pro*

Démonstration. □

Fait 2. *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Considérons tous les n-gones de périmètre fixé. Parmi tous ces n-gones, il en existe au moins un d'aire maximale.*

Démonstration. Le fait **??** permet de considérer le problème de maximisation d'aire à périmètre fixé uniquement avec des n-gones convexes. Selon les faits **??** et **??**, si parmi les n-gones convexes de périmètre fixé, il en existe un qui maximise l'aire, alors ce ne peut être que le n-gone régulier. Pour voir que cette condition nécessaire est suffisante, c

- On munit le plan d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
- XXX

  fermeture costaud, mais le côté birné!!!!

  pour fermeture, besoin d'accpeter les k-gones pour $k \in [\![3\,;n]\!]$.

  Les n-gones convexes $A_1A_2\cdots A_n$ tels que $\mathrm{Perim}(A_1A_2\cdots A_n) = p$ sont représentés en posant $A_1\,(\,0\,;0\,)$, $A_2\,(\,A_1A_2\,;0\,)$, puis $A_k\,(\,x_k\,;y_k\,)$ avec $y_k \geq 0$ pour $k \in [\![3\,;n]\!]$. Un n-gone peut donc avoir n représentations, mais peu importe. De plus, on accepte les n-gones dégénérés pour lesquels nous avons $x_B = 0$, $y_C = 0$ dans notre représentation. Nous notons alors $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'ensemble des triplets $(\,x_B\,;x_C\,;y_C\,)$ ainsi obtenus.
- XXX

  Justifier que $\mathcal{G}$ est fermé dans $\mathbb{R}^{2n}$.
- De plus, $\mathcal{G}$ est borné, car les coordonnées des sommets des k-gones considérés le sont. Finalement, $\mathcal{G}$ est un compact de $\mathbb{R}^{2n}$.
- Notons $s : \mathcal{G} \to \mathbb{R}_+$ la fonction « *aire* » des n-gones représentés. Cette fonction est continue en les coordonnées des sommets, car elle peut être calculée comme suit pour un n-gone convexe $A_1A_2\cdots A_n$ quelconque.
  (1) L'isobarycentre G de $A_1A_2\cdots A_n$ possède des coordonnées affines en celles des points A_1, A_2, ... , et A_n.
  (2) Par convexité, l'aire de $A_1A_2\cdots A_n$ est égale à la somme de celles des triangles GA_kA_{k+1} pour $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, et du triangle GA_nA_1.
  (3) Via le déterminant, il est immédiat de voir que les aires des triangles considérés sont des fonctions continues en les coordonnées des sommets.
- Finalement, par continuité et compacité, on sait que s admet un maximum sur $\mathcal{G}$, un tel maximum ne pouvant pas être atteint sur un k-gone dégénéré. That's all folks!

□

Fait 3. *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé. Considérons tous les n-gones de périmètre fixé. Parmi tous ces n-gones, un seul est d'aire maximale, c'est le n-gone régulier.*

Démonstration. C'est une conséquence directe des faits **??** et 1. □