BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES À LA GÉOMÉTRIE

CHRISTOPHE BAL

Table des matières

Date: 18 Jan. 2025 – 22 Jan. 2025.

1. Les polygones

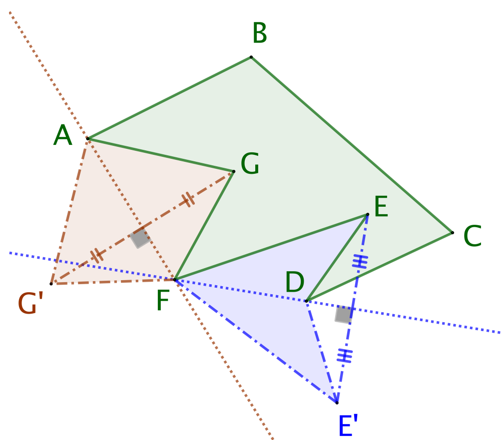
La technique ne change pas : nous allons restreindre la recherche à des polygones de plus en plus particuliers. Cette dernière section nous poussera à un peu plus de technicité.

Définition 1. *Un « n-gone » désigne un polygone à n côtés avec $n \geq 3$.*

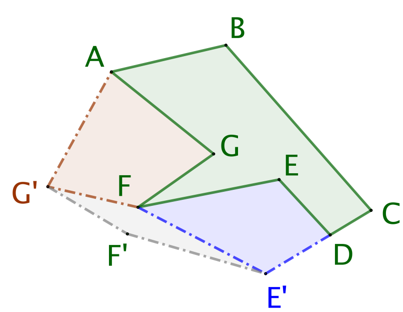
Définition 2. *Un « n-isogone » désigne un n-gone dont tous les côtés sont de mesure égale.*

Fait 1. *Si un n-gone $\mathcal{P}$ n'est pas convexe, alors on peut construire un n-gone convexe $\mathcal{P}'$ tel que* $\mathrm{Perim}(\mathcal{P}') = \mathrm{Perim}(\mathcal{P})$ *et* $\mathrm{Aire}(\mathcal{P}') > \mathrm{Aire}(\mathcal{P})$*.*

Démonstration. Ici, il ne faut pas être expéditif en indiquant que la preuve du fait **??** se généralise sans aucun souci. En effet, avec $n > 4$, nous pouvons avoir plusieurs points de non-convexité, et les éliminer comme nous l'avons fait pour le quadrilatère n'est pas immédiat : dans la figure suivante, l'élimination des deux points de non convexité G et E de l'heptagone $ABCDEFG$ nous amène à un nouvel heptagone $ABCDE'FG'$ ayant lui aussi deux points de non-convexité F et D ! Donc, rien n'empêche, a priori, d'avoir une suite de constructions n'aboutissant jamais à un heptagone convexe de même périmètre que celui de $ABCDEFG$, et d'aire strictement supérieure à celle de $ABCDEFG$.[1]



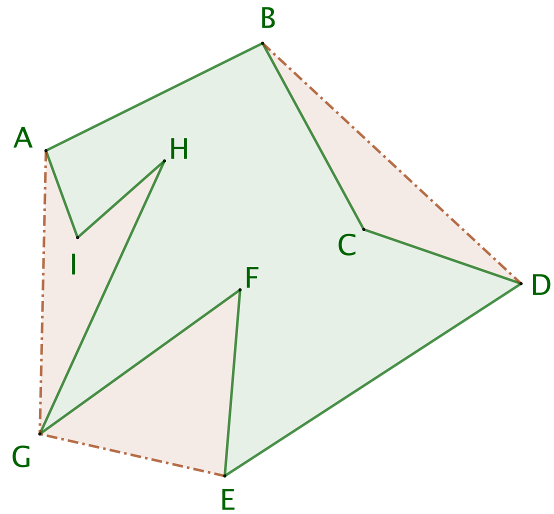
Pire, on peut perdre des côtés lors de la construction comme dans l'exemple suivant où C, D et E' sont alignés.



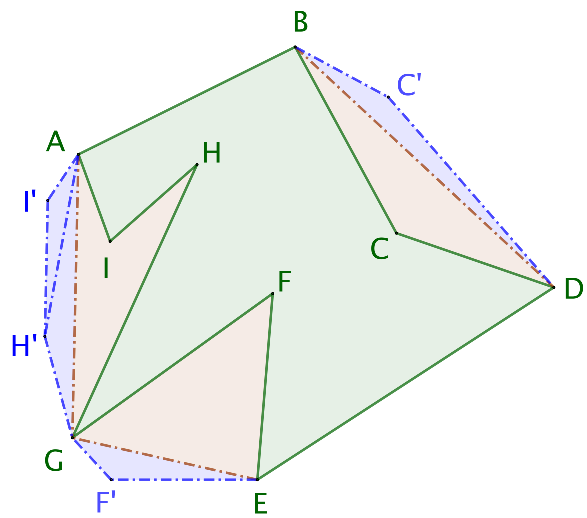
Laissons de côté cette construction pour nous concentrer sur la classique enveloppe convexe[2] du n-gone de départ. Par exemple, l'ennéagone $ABCDEFGHI$ non convexe ci-dessous admet le pentagone $ABDEG$ pour enveloppe convexe : le périmètre diminue et l'aire augmente, ce qui est utile, mais malheureusement le nombre de côtés change.

1. L'auteur est convaincu que le procédé aboutira en un nombre fini d'étapes à un polygone convexe, mais il ne l'a pas démontré pour le moment.

2. C'est le plus petit polygone convexe « *contenant* » le n-gone considéré, où « *petit* » est relatif à l'inclusion.



Une idée simple, que nous allons formaliser rigoureusement juste après, consiste à ajouter les sommets manquants suffisamment prêts des côtés de l'enveloppe convexe afin de ne pas trop augmenter le périmètre pour le laisser inférieur, ou égal, à celui du n-gone non convexe initial. Le dessin suivant illustre cette idée.



Considérons donc un n-gone non convexe $\mathcal{P}$, de périmètre p.

- XXX
- XXX
- XXX
- XXX

□

Remarque 1.1. *Convexe important car sinon on pourrait imagine avoir suite structement croissante sans maximum !*

- *XXX*
- *XXX*
- *XXX*
- *XXX*

Fait 2. *Si un n-gone convexe $\mathcal{P}$ n'est pas un n-isogone, alors on peut construire un n-isogone convexe $\mathcal{P}'$ tel que* $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$ *et* $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Considérons un n-gone convexe $\mathcal{P}$, de périmètre p, qui n'est pas un n-isogone. $\mathcal{P}$ admet donc un triplet de sommets consécutifs A, B et C tels que $AB \neq AC$ (dans le cas contraire, on obtient de proche en proche un n-isogone). La construction vue dans la preuve du fait **??** permet de conclure sans effort ou presque. En effet, XXX si un sommet mangé, on fait de nouveau mini perturb pas supérieur à la pert de péimètre pour passer à iscoèle avant dilatation axiale
non convexité pas gpenante car géré par le fait 1

- XXX
- XXX
- XXX
- XXX

□

Remarque 1.2. *ce qui suit pas bon car n-on pourrait petre enfermer dans stricte coroissante sansn maxium !*
Si un n-gone convexe $\mathcal{P}$, de périmètre p, n'est pas un n-isogone, alors on peut construire un n-gone convexe $\mathcal{P}'$ tel que $\text{Perim}(\mathcal{P}') = p$ *et* $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$.

- *XXX*
- *XXX*
- *XXX*
- *XXX*

Définition 3. *Le « *degré de régularité* » d'un n-gone $\mathcal{P}$ est son nombre maximal d'angles de même mesure. Il sera noté* $\text{dreg}(\mathcal{P})$.

Fait 3. *Si un n-isogone convexe $\mathcal{P}$ vérifie* $\text{dreg}(\mathcal{P}) < n$*, alors on peut construire un n-isogone convexe $\mathcal{P}'$ tel que* $\text{dreg}(\mathcal{P}') > \text{dreg}(\mathcal{P})$, $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$ *et* $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$..

Démonstration. XXX

- XXX
- XXX
- XXX
- XXX

□

Fait 4. *Si un n-isogone convexe $\mathcal{P}$ n'est pas régulier, alors on peut construire un n-gone régulier $\mathcal{P}'$ tel que* $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$ *et* $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. fait 3 donne de moins en moins d'nagles différentes impliquent arrivé à -n-gone régulier
XXX

- XXX
- XXX
- XXX
- XXX

□

Fait 5. *Soit* $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ *un naturel fixé. Considérons tous les* n*-gones de périmètre fixé. Parmi tous ces* n*-gones, un seul est d'aire maximale, c'est le* n*-gone régulier.*

Démonstration. Tout a déjà été dit, car d'après les faits précédents, un n-gone $\mathcal{P}$ non régulier ne peut pas maximiser son aire à périmètre fixé, et par conséquent seul le n-gone régulier maximise l'aire à périmètre fixé. Chapeau bas, géométrie... □