BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

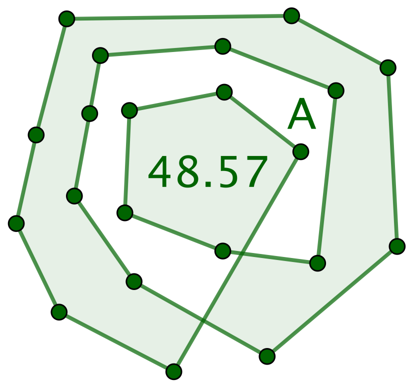
Document, avec son source LaTeX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts.

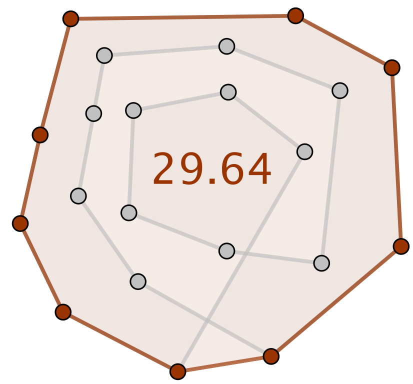
Mentions « légales »

Table des matières

Date: 18 Jan. 2025 – 24 Fev. 2025.

0.1. **Aire géométrique d'un n-cycle.** Pour prouver l'existence d'un n-gone solution du problème d'isopérimétrie polygonale, nous allons accepter de travailler avec des n-cycles. Il nous faut donc une notion d'aire pour ces objets très particuliers. Il existe une notion d'aire algébrique d'un n-cycle qui s'appuie sur le déterminant : si $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$, alors l'aire algébrique de $\mathcal{L}$ est $\frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} \det\left(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}}\right)$, une quantité indépendante du point Ω choisi. Quand `GeoGebra` associe un nombre à un n-cycle $\mathcal{L}$, il calcule la valeur absolue de son aire algébrique. Malheureusement, cette notion n'est pas la bonne candidate, pour une approche élémentaire, comme le montre l'exemple suivant, où le n-cycle proposé a été construit via une spirale positive depuis le point A, de sorte que les déterminants pour calculer l'aire algébrique sont tous positifs, ceci donnant au total une aire algébrique, positive, supérieure à celle de l'enveloppe convexe du n-cycle. Nous verrons que l'aire algébrique nous sera néanmoins utile pour formuler un argument de continuité.





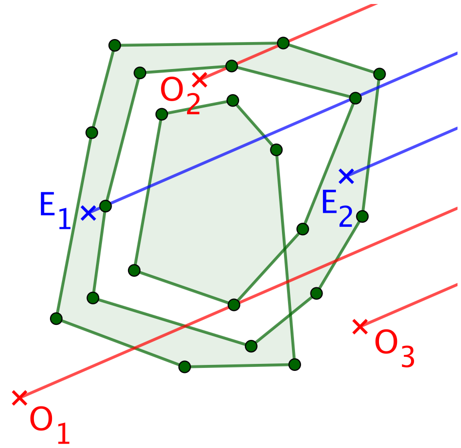
Tout n'est pas perdu, car l'image de gauche nous donne la solution : il suffit de définir l'aire comme la somme des aires des n-gones coloriés par `GeoGebra`. Sympa ! Mais comment ce coloriage est-il fait ? C'est un classique de l'informatique graphique, mais aussi un moyen de démontrer le faussement simple théorème de Jordan donnant l'intérieur et l'extérieur d'un n-gone. Voici comment cela fonctionne, sans chercher à démontrer les faits indiqués.

- Choisissons une direction orientée $\vec{d}$ qui n'est parallèle avec aucun des côtés de $\mathcal{L}$.
- Considérons un point M non situé sur le n-cycle $\mathcal{L}$, et faisons partir une demi-droite $\mathscr{D}$ de M suivant $\vec{d}$. On calcule alors $p(M)$ le nombre de points d'intersection de $\mathscr{D}$ avec le n-cycle $\mathcal{L}$ en appliquant les règles suivantes.

  (1) Quand on rencontre un côté, mais pas un sommet, on ajoute 1.
  (2) Quand on tombe sur un sommet, on ajoute 1 si les voisins du sommet sont de part et d'autre de la demi-droite, et rien sinon.

- L'ensemble des points M tels que $p(M)$ soit pair sera appelé la « *surface paire* » de $\mathcal{L}$. On définit de même la « *surface impaire* » de $\mathcal{L}$. Une difficulté non négligeable reste à surmonter : s'assurer que le choix de la direction orientée ne modifie pas les surfaces paires et impaires obtenues.
- La frontière de la surface impaire de $\mathcal{L}$ est la réunion d'un nombre fini, éventuellement nul,[1] de n-gones d'intérieurs disjoints deux à deux.

1. Penser au cas d'un n-cycle dont tous les sommets sont alignés.



Quelques calculs de $p(M)$:
$p(E_1) = 5$, $p(E_2) = 1$, $p(O_1) = 4$, $p(O_2) = 2$ *et* $p(O_3) = 0$.

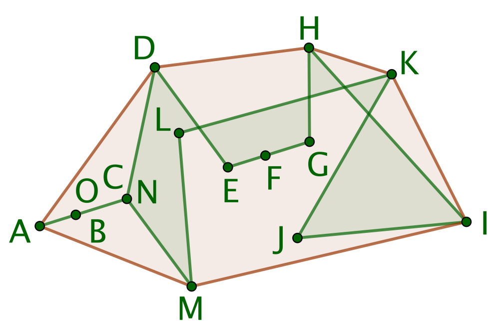
Définition 1. *Soit $\mathcal{L}$ un n-cycle ayant $\bigcup_i \mathcal{P}_i$ pour frontière de sa surface impaire, où les $\mathcal{P}_i$, en nombre fini éventuellement nul, sont des n-gones d'intérieurs disjoints deux à deux. La quantité* $\mathrm{AireGeo}(\mathcal{L}) = \sum_i \mathrm{Aire}(\mathcal{P}_i)$ *sera nommée* « aire géométrique » *du n-cycle $\mathcal{L}$.* [2]

Fait 1. *Pour tout n-gone $\mathcal{P}$, nous avons* $\mathrm{AireGeo}(\mathcal{P}) = \mathrm{Aire}(\mathcal{P})$.

Démonstration. Immédiat. □

Fait 2. *Si un n-cycle $\mathcal{L}$ de longueur non nulle n'est pas un n-gone convexe, alors il existe un n-gone convexe $\mathcal{P}$ tel que* $\mathrm{Long}(\mathcal{P}) = \mathrm{Long}(\mathcal{L})$ *et* $\mathrm{AireGeo}(\mathcal{P}) > \mathrm{AireGeo}(\mathcal{L})$.

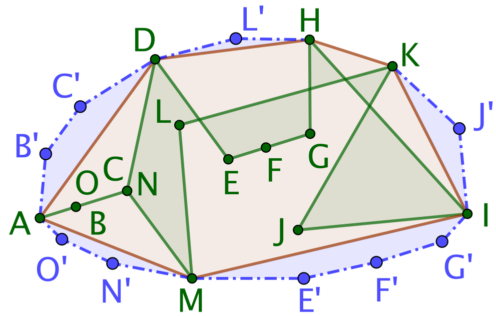
Démonstration. Commençons par le cas « hyper-dégénéré » : si tous les sommets de $\mathcal{L}$ sont alignés, son aire géométrique est nulle. Le triangle équilatéral de côté $\frac{1}{3}\mathrm{Long}(\mathcal{L})$ permet de conclure.
Supposons maintenant que $\mathcal{L}$ possède au moins trois sommets non alignés. Notons $\mathcal{C}$ l'enveloppe convexe de $\mathcal{L}$ (nous savons donc que $\mathcal{C}$ contient au moins un triangle).



Exemple où $N = C$ et $O = B$.

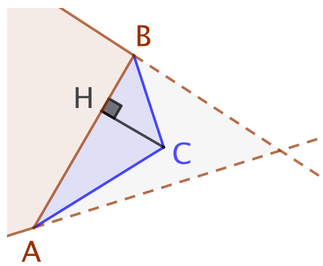
Clairement, $\mathrm{Long}(\mathcal{C}) < \mathrm{Long}(\mathcal{L})$. Quant à $\mathrm{AireGeo}(\mathcal{C}) > \mathrm{AireGeo}(\mathcal{L})$, c'est une conséquence directe de la définition de l'aire géométrique combinée au fait que $\mathcal{L}$ ne soit pas un n-gone convexe. Il reste un problème à gérer : $\mathcal{C}$ est un s-gone avec $s \leq n$. Une idée simple, formalisée après, est d'ajouter des sommets assez prêts des côtés de $\mathcal{C}$ pour garder la convexité, une longueur strictement inférieure à $\mathrm{Long}(\mathcal{L})$, et une aire géométrique strictement plus grande que $\mathrm{AireGeo}(\mathcal{L})$. Si c'est faisable, un agrandissement de rapport $r > 1$ donnera le n-gone $\mathcal{P}$ cherché. La figure suivante illustre cette idée.

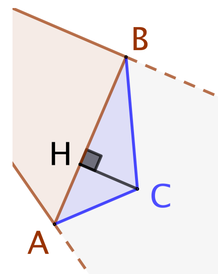
2. Rappelons qu'une somme de réels sur l'ensemble vide vaut zéro par convention.



$m = n - s$ compte les sommets manquants. Si $m = 0$, il n'y a rien à faire. Sinon, posons $\delta = \frac{\text{Long}(\mathcal{L}) - \text{Long}(\mathcal{C})}{m}$.

(1) Considérons $[AB]$ un côté quelconque de $\mathcal{C}$. Les droites portées par les côtés « *autour* » de $[AB]$ « *dessinent* » une région contenant toujours un triangle ABC dont l'intérieur est à l'extérieur [3] de $\mathcal{C}$ comme dans les deux cas ci-dessous.





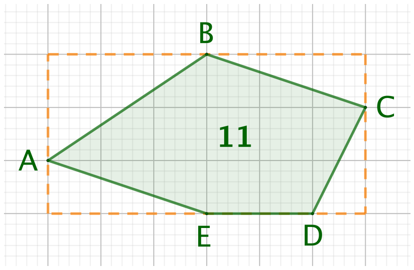
(2) Clairement, le polygone $\mathcal{C}_+$ obtenu à partir de $\mathcal{C}$ en remplaçant le côté $[AB]$ par les côtés $[AC]$ et $[CB]$ est un convexe avec un sommet de plus que $\mathcal{C}$.

(3) Comme HC peut être rendu aussi proche de 0 que souhaité, il est aisé de voir que l'on peut choisir cette distance de sorte que $AC + BC < AB + \delta$. Dès lors, le périmètre de $\mathcal{C}_+$ augmente inférieurement strictement à δ relativement à $\mathcal{C}$.

(4) En répétant $(m-1)$ fois les étapes 1 à 3, nous obtenons un n-gone convexe $\mathcal{P}$ tel que $\text{AireGeo}(\mathcal{P}) > \text{AireGeo}(\mathcal{L})$ et $\text{Long}(\mathcal{P}) < \text{Long}(\mathcal{C}) + m\delta = \text{Long}(\mathcal{L})$. □

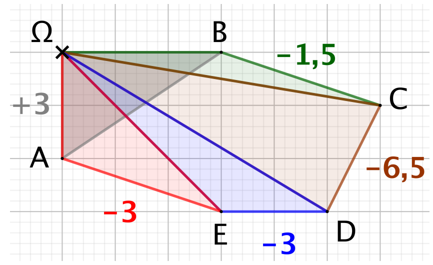
Enquêtons sur le calcul de l'aire d'un n-gone, afin de savoir si l'aire géométrique est « continue ». Il est connu que ABC est d'aire $\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|$ où $\frac{1}{2}\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est appelé aire algébrique. Nous allons donc travailler avec des triangles comme dans l'exemple suivant.

Calcul direct à la main.



$$11 = 3 \cdot 6 - \frac{3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{2}$$

Via le déterminant.



$$-11 = 3 - 1{,}5 - 6{,}5 - 3 - 3$$

3. C'est ce que l'on appelle de la « *low poetry* » .

Dans le cas précédent, le résultat pourrait dépendre du point Ω employé, mais le fait suivant nous montre que non. Allons-y !

Fait 3. *Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n-cycle. La fonction qui à un point Ω du plan associe $\mu_1^n(\Omega\,;\mathcal{L}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \det\left(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}}\right)$ est indépendante du point Ω. Dans la suite, cette quantité indépendante de Ω sera notée $\mu_1^n(\mathcal{L})$.*

Démonstration. Soit M un autre point du plan.

$$\begin{aligned}
&\mu_1^n(\Omega\,;\mathcal{L})\\
=&\sum_{i=1}^{n} \det\left(\overrightarrow{\Omega A'_i}, \overrightarrow{\Omega A'_{i+1}}\right)\\
=&\sum_{i=1}^{n} \det\left(\overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MA'_{i+1}}\right)
\end{aligned}$$

Cette bonne vieille relation de Chasles.

$$\begin{aligned}
=&\sum_{i=1}^{n} \left[\det\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M}\right) + \det\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}\right) + \det\left(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M}\right) + \det\left(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}\right)\right]\\
=&\sum_{i=1}^{n} \det\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_{i+1}}\right) + \sum_{i=1}^{n} \det\left(\overrightarrow{MA'_i}, \overrightarrow{\Omega M}\right) + \mu_1^n(M\,;\mathcal{L})\\
=&\mu_1^n(M\,;\mathcal{L}) + \sum_{i=2}^{n+1} \det\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_i}\right) - \sum_{i=1}^{n} \det\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MA'_i}\right)\\
=&\mu_1^n(M\,;\mathcal{L})
\end{aligned}$$

$A'_{n+1} = A'_1$

□

Fait 4. *Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n-cycle. Pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, le n-cycle $\mathcal{L}_j = B_1 B_2 \cdots B_n$, où $B_i = A'_{i+k-1}$, vérifie $\mu_1^n(\mathcal{L}) = \mu_1^n(\mathcal{L}_k)$. Dans la suite, cette quantité commune sera notée $\mu(\mathcal{L})$.*

Démonstration. Il suffit de s'adonner à un petit jeu sur les indices de sommation. □

Fait 5. *Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n-cycle. Le n-cycle $\mathcal{L}^{\mathrm{op}} = B_1 B_2 \cdots B_n$, où $B_i = A_{n+1-i}$, vérifie $\mu(\mathcal{L}^{\mathrm{op}}) = -\,\mu(\mathcal{L})$.*

Démonstration. Soit Ω un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned}
&\mu(\mathcal{L}^{\mathrm{op}})\\
=&\sum_{i=1}^{n} \det\left(\overrightarrow{\Omega B'_i}, \overrightarrow{\Omega B'_{i+1}}\right)\\
=&\sum_{i=1}^{n} \det\left(\overrightarrow{\Omega A'_{n+1-i}}, \overrightarrow{\Omega A'_{n-i}}\right)\\
=&\sum_{j=0}^{n-1} \det\left(\overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}, \overrightarrow{\Omega A'_j}\right)\\
=&\sum_{j=1}^{n} \det\left(\overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}, \overrightarrow{\Omega A'_j}\right)
\end{aligned}$$

$A'_0 = A'_n$ *et* $A'_1 = A'_{n+1}$

$$\begin{aligned}
=&-\sum_{j=1}^{n} \det\left(\overrightarrow{\Omega A'_j}, \overrightarrow{\Omega A'_{j+1}}\right)\\
=&-\,\mu(\mathcal{L})
\end{aligned}$$

□

Fait 6. *Soit $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ un n-cycle. La quantité $\overline{\mathrm{Aire}}(\mathcal{L}) = \frac{1}{2}\mu(\mathcal{L})$, qui dépend juste du sens de parcours de $\mathcal{L}$, mais pas du point de départ,*[4] *sera appelé* « aire algébrique » *de $\mathcal{L}$.*

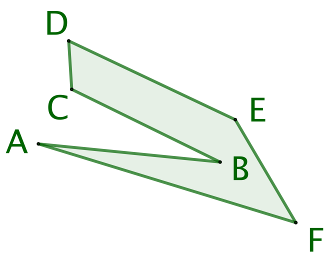
Démonstration. C'est une conséquence directe des faits 4 et 5. □

4. Le lecteur pardonnera les abus de langage utilisés.

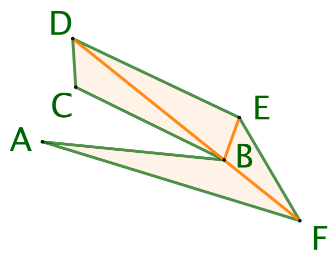
Considérons, maintenant, un n-gone convexe $\mathcal{P} = A_1 A_2 \cdots A_n$ où les sommes sont parcourus dans le sens anti-horaire. En choisissant l'isobarycentre G des sommets A_1, A_2, ..., A_n pour le calcul de $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})$, nous obtenons que $\text{Aire}(\mathcal{P}) = \overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})$: en effet, avec ce choix, tous les déterminants $\det\left(\overrightarrow{GA'_i}, \overrightarrow{GA'_{i+1}}\right)$ sont positifs. Dans le cas non-convexe, les choses se compliquent a priori, car nous ne maîtrisons plus les signes des déterminants. Heureusement, nous avons le résultat suivant.

Fait 7. *Soit un n-gone $\mathcal{P} = A_1 A_2 \cdots A_n$ tel que A_1, A_2, ..., A_n soient parcourus dans le sens trigonométrique, ou anti-horaire. Un tel n-gone sera dit « positif ».*[5] *Sous cette hypothèse, nous avons $\mu(\mathcal{P}) \geq 0$, i.e. $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}) \geq 0$.*

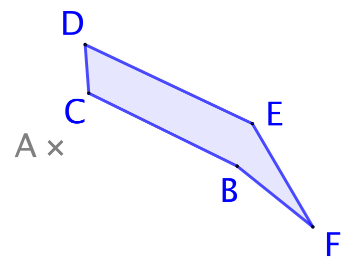
Démonstration. Le théorème de triangulation affirme que tout n-gone est triangulable comme dans l'exemple très basique suivant qui laisse envisager une démonstration par récurrence en retirant l'un des triangles ayant deux côtés correspondant à deux côtés consécutifs du n-gone (pour peu qu'un tel triangle existe toujours).



Un n-gone « nu ».

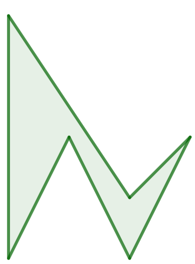


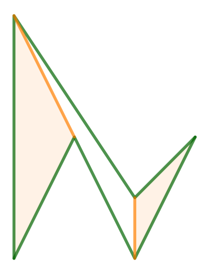
Le n-gone triangulé.



Le n-gone allégé.

Le théorème de triangulation admet une forme forte donnant une décomposition contenant un triangle formé de deux côtés consécutifs du n-gone.[6] Nous dirons qu'une telle décomposition est « *à l'écoute* ». Ce très mauvais jeu de mots fait référence à la notion sérieuse « *d'oreille* » pour un n-gone : une oreille est un triangle inclus dans le n-gone, et formé de deux côtés consécutifs du n-gone. L'exemple suivant donne un n-gone n'ayant que deux oreilles.[7]


Un n-gone basique.


Juste deux oreilles disponibles.

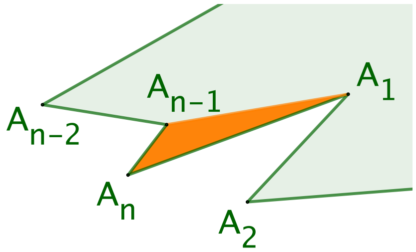
Raisonnons donc par récurrence sur $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

- **Cas de base.** Soit ABC un triangle. Dire que les sommets A, B et C sont parcourus dans le sens trigonométrique, c'est savoir que $\mu(ABC) = \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) > 0$.
- **Hérédité.** Soit un n-gone positif $\mathcal{P} = A_1 A_2 \cdots A_n$ avec $n \in \mathbb{N}_{>3}$. On peut supposer que $A_{n-1} A_n A_1$ est une oreille d'une triangulation à l'écoute du n-gone $\mathcal{P}$.

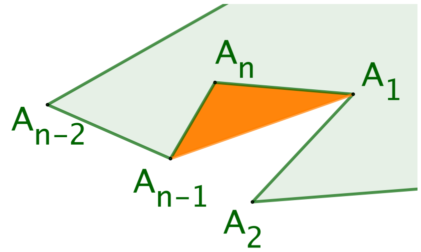
5. Bien noté que cette notion ne peut pas exister pour un n-gone croisé. De façon cachée, nous utilisons le célèbre théorème de Jordan, dans sa forme polygonale.

6. En pratique, cette forme forte est peu utile, car elle aboutit à un algorithme de recherche trop lent.

7. On démontre que tout n-gone admet au minimum deux oreilles.



$A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille.



$A_{n-1}A_nA_1$ n'est pas une oreille.

Posons $\mathcal{P}' = A_1 \cdots A_{n-1}$ où $k = n-1$ vérifie $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Par hypothèse, $\mathcal{P}'$ est positif. Nous arrivons finalement aux calculs élémentaires suivants en utilisant A_1 comme point de calcul de $\mu(\mathcal{P})$.

$$
\begin{aligned}
&\mu(\mathcal{P}) \\
= &\sum_{j=1}^{n} \det\left(\overrightarrow{A_1A'_j}, \overrightarrow{A_1A'_{j+1}}\right) \\
= &\sum_{j=1}^{n-1} \det\left(\overrightarrow{A_1A_j}, \overrightarrow{A_1A_{j+1}}\right) \\
= &\sum_{j=1}^{n-2} \det\left(\overrightarrow{A_1A_j}, \overrightarrow{A_1A_{j+1}}\right) + \det\left(\overrightarrow{A_1A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A_n}\right) \\
= &\mu(\mathcal{P}') + \mu(A_{n-1}A_nA_1)
\end{aligned}
$$

$A'_{n+1} = A_1$
$A'_i = A_i$ pour $i \leq n$

Pour $\mu(\mathcal{P}')$, noter que $\det\left(\overrightarrow{A_1A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A_1}\right) = 0$.

Par hypothèse de récurrence, nous savons que $\mu(\mathcal{P}') \geq 0$, et comme $A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille de $\mathcal{P}$, la 3-ligne $A_{n-1}A_nA_1$ est forcément positive, d'où $\mu(A_{n-1}A_nA_1) \geq 0$ d'après le cas de base. Nous arrivons bien à $\mu(\mathcal{P}) \geq 0$, ce qui permet de finir aisément la démonstration par récurrence. □

Fait 8. *Pour tout n-gone $\mathcal{P}$, nous avons :* $\text{Aire}(\mathcal{P}) = \left|\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})\right|$.

Démonstration. Les deux points suivants permettent de faire une preuve par récurrence.

- **Cas de base.** L'égalité est immédiate pour les triangles (c'est ce qui a motivé la définition de l'aire algébrique).
- **Hérédité.** Soit $\mathcal{P} = A_1 \cdots A_n$ un n-gone avec $n \in \mathbb{N}_{>3}$. Comme $\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P}^{\text{op}}) = -\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})$ selon le fait 5, nous pouvons choisir de parcourir $\mathcal{P}$ positivement, puis de nous placer dans la situation de la démonstration du fait 7 : $A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille positive d'une triangulation à l'écoute du n-gone $\mathcal{P}$, et $\mathcal{P}' = A_1 \cdots A_{n-1}$ un k-gone positif où $k = n-1$ vérifie $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Nous arrivons finalement aux calculs élémentaires suivants.

$$
\begin{aligned}
&\text{Aire}(\mathcal{P}) \\
= &\text{Aire}(\mathcal{P}') + \text{Aire}(A_{n-1}A_nA_1) \\
= &\tfrac{1}{2}|\mu(\mathcal{P}')| + \tfrac{1}{2}|\mu(A_{n-1}A_nA_1)| \\
= &\tfrac{1}{2}\left(\mu(\mathcal{P}') + \mu(A_{n-1}A_nA_1)\right) \\
= &\tfrac{1}{2}\mu(\mathcal{P}) \\
= &\tfrac{1}{2}|\mu(\mathcal{P})| \\
= &\left|\overline{\text{Aire}}(\mathcal{P})\right|
\end{aligned}
$$

$A_{n-1}A_nA_1$ est une oreille de $\mathcal{P}$.
Hypothèse de récurrence et cas de base.
Voir le fait 7.
Comme dans la preuve du fait 7.
Voir le fait 7.

□

Tout ce qui précède va nous permettre de justifier la continuité de l'aire géométrique sur l'ensemble de n-cycles de longueur ℓ pour ℓ un réel fixé.

Fait 9. *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un naturel fixé.*
le plan d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
$\alpha : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+$ *qui à un uplet de* $\mathcal{U}$ *associe l'aire généralisée du* n*-cycle qu'il représente. Cette fonction est continue d'après le fait 9.*

Démonstration. GGGGG
pour les raisons suivantes où $\mathcal{L} = A_1 A_2 \cdots A_n$ désigne un n-cycle.

- $\mathrm{AireGeo}(\mathcal{L}) = \sum\limits_i \mathrm{Aire}(\mathcal{P}_i)$ où $\bigcup\limits_i \mathcal{P}_i$ est frontière de la surface impaire de $\mathcal{L}$.
- Si $\bigcup\limits_i \mathcal{P}_i = \emptyset$, alors $\mathrm{AireGeo}(\mathcal{L}) = 0$.
- Si $\bigcup\limits_i \mathcal{P}_i \neq \emptyset$, en posant $\mathcal{P}_i = A_{i,1} A_{i,2} \cdots A_{i,n_i}$, le fait 8 nous permet d'écrire, en calculant les aires algébriques via l'origine O du repère, $\mathrm{AireGeo}(\mathcal{L}) = \frac{1}{2} \sum\limits_i \Big| \sum\limits_{k=1}^{n_i} \big(x(A'_{i,k}) y(A'_{i,k+1}) - y(A'_{i,k}) x(A'_{i,k+1}) \big) \Big|$.
- XXXXX
- XXXXX
- XXXXX
- XXXXX ∎