

# BROUILLON - INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES RESTREINTES AUX POLYGONES

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
<https://github.com/bc-writings/bc-public-docs/tree/main/drafts>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



---

## TABLE DES MATIÈRES

0.1. Solutions, qui êtes-vous ?

2

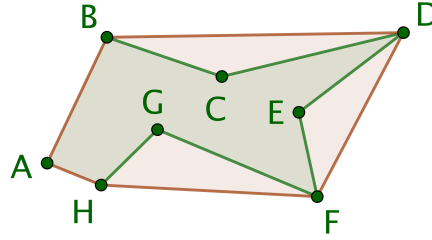
## 1. LES POLYGONES

**1.1. Solutions, qui êtes-vous ?** Cette section va établir que, relativement au problème d'isopérimétrie polygonal, un  $n$ -gone solution doit être convexe, puis qu'un  $n$ -gone convexe solution doit être un  $n$ -gone régulier, et enfin que si  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  sont respectivement un  $k_1$ -gone et un  $k_2$ -gone, tous les deux réguliers convexes, avec  $k_1 < k_2$  et  $\text{Perim}(\mathcal{R}_1) = \text{Perim}(\mathcal{R}_2)$ , alors  $\text{Aire}(\mathcal{R}_1) < \text{Aire}(\mathcal{R}_2)$ . Nous pourrons alors conclure dans la section finale suivante.

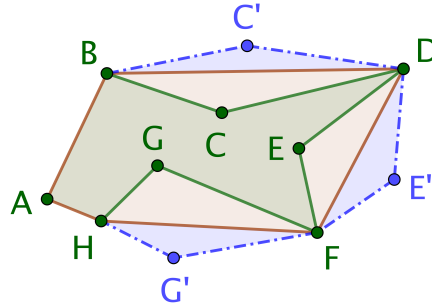
*Les cas  $n = 3$  et  $n = 4$  étant résolus, voir les faits ?? et ??, dans toutes les preuves de cette section, nous supposons  $n \geq 5$ , pour ne pas alourdir le texte.*

**Fait 1.** Pour tout  $n$ -gone non convexe  $\mathcal{P}$ , nous pouvons construire un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{C}$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{C}) = \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{C}) > \text{Aire}(\mathcal{P})$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{E}$  l'enveloppe convexe d'un  $n$ -gone non convexe  $\mathcal{P}$  (voir ci-dessous).



Clairement,  $\text{Perim}(\mathcal{E}) < \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{E}) > \text{Aire}(\mathcal{P})$ , mais  $\mathcal{E}$  est un  $s$ -gone avec  $s < n$ . Pour gérer ce problème, une idée simple, formalisée après, est d'ajouter des sommets assez près des côtés de  $\mathcal{E}$  pour garder la convexité, un périmètre inférieur à  $\text{Perim}(\mathcal{P})$ , et une aire supérieure à  $\text{Aire}(\mathcal{P})$ . Si c'est faisable, une homothétie de rapport  $r \geq 1$ , où  $r = \frac{\text{Perim}(\mathcal{P})}{\text{Perim}(\mathcal{E})}$ , donnera le  $n$ -gone convexe  $\mathcal{C}$  cherché. La figure suivante illustre cette idée.



Notons  $m = n - s$  qui compte les sommets manquants, puis posons  $\delta = \frac{\text{Perim}(\mathcal{P}) - \text{Perim}(\mathcal{E})}{m}$ .

- (1) Considérons  $[AB]$  un côté quelconque de  $\mathcal{E}$ . Les droites portées par les côtés « autour » de  $[AB]$  « dessinent » une région contenant toujours un triangle  $ABC$  dont l'intérieur est à l'extérieur<sup>1</sup> de  $\mathcal{E}$  comme dans les deux cas ci-dessous.



- (2) Clairement, le polygone  $\mathcal{E}_+$  obtenu à partir de  $\mathcal{E}$  en remplaçant le côté  $[AB]$  par les côtés  $[AC]$  et  $[CB]$  est un convexe avec un sommet de plus que  $\mathcal{E}$ .
- (3) Comme  $HC$  peut être rendu aussi proche de 0 que souhaité, il est aisé de voir que l'on nous pouvons choisir cette distance de sorte que  $AC + BC < AB + \delta$ . Dès lors, le périmètre de  $\mathcal{E}_+$  augmente inférieurement strictement à  $\delta$  relativement à  $\mathcal{E}$ .
- (4) En répétant  $(m - 1)$  fois les étapes 1 à 3, nous obtenons un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{C}$  tel que  $\text{Aire}(\mathcal{C}) > \text{Aire}(\mathcal{P})$  et  $\text{Perim}(\mathcal{C}) < \text{Perim}(\mathcal{E}) + m\delta = \text{Perim}(\mathcal{P})$ .  $\square$

**Fait 2.** Si un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}$  n'est pas équilatéral, alors nous pouvons construire un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}'$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$ .

*Démonstration.* Considérons un  $n$ -gone convexe non équilatéral  $\mathcal{P}$ . Dans ce cas,  $\mathcal{P}$  admet un triplet de sommets consécutifs  $A, B$  et  $C$  tels que  $AB \neq BC$  (sinon, on obtiendrait de proche en proche l'équilatéralité). La construction vue dans la preuve du fait ?? nous donne la solution : voir les deux dessins ci-après dans lesquels  $(AC) \parallel (BB')$ . Pour le 2<sup>e</sup> cas, il n'est pas possible d'utiliser le triangle  $AB'C$  isocèle en  $B'$  car  $(B'C)$  porte le côté de  $\mathcal{P}$  de sommet  $C$  juste après  $[BC]$ , mais ce problème se contourne en considérant un point  $B''$  du segment ouvert  $]BB'[,$  (si besoin, se reporter au 2<sup>e</sup> dessin de la preuve du fait ??).



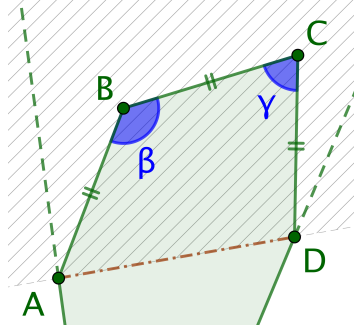
Dans chaque cas, nous avons construit un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}''$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{P}'') < \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}'') = \text{Aire}(\mathcal{P})$ . Une homothétie de rapport  $r > 1$ , où  $r = \frac{\text{Perim}(\mathcal{P})}{\text{Perim}(\mathcal{E})}$ , donne un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}'$  vérifiant  $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$ .  $\square$

**Remarque 1.1.** Le fait précédent ne permet pas de toujours se ramener au cas d'un  $n$ -gone équilatéral convexe. Il nous dit juste que si un  $n$ -gone convexe maximise son aire à périmètre fixé, alors il devra être, a minima, un  $n$ -gone équilatéral. La nuance est importante, et une similaire existe pour la conclusion du fait suivant.

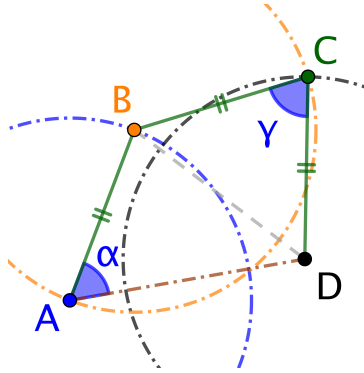
1. C'est ce que l'on appelle de la « low poetry »,.

**Fait 3.** Si un  $n$ -gone équilatéral convexe  $\mathcal{P}$  n'est pas équiangle, alors il existe un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}'$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$ .

*Démonstration.* Considérons un  $n$ -gone équilatéral convexe non équiangle  $\mathcal{P}$ . Dans ce cas,  $\mathcal{P}$  admet un quadruplet de sommets consécutifs  $A, B, C$  et  $D$  tels que  $\widehat{ABC} \neq \widehat{BCD}$  (sinon, on obtiendrait de proche en proche l'équiangularité). Quitte à changer l'ordre de parcours des sommets de  $\mathcal{P}$ , nous pouvons supposer  $\widehat{ABC} > \widehat{BCD}$ .



En déplaçant  $B$  et  $C$  dans la zone grise hachurée strictement entre les droites vertes en pointillés, nous garderons un  $n$ -gone convexe. Concentrons-nous donc sur le quadrilatère  $ABCD$ , et posons  $c = AB$  la longueur commune des côtés de  $\mathcal{P}$ , ainsi que  $d = AD$  que nous ne pouvons pas modifier. Si nous fixons la valeur de  $c$ , notre situation possède juste un degré de liberté comme le montre la construction de  $C$  ci-après qui utilise des cercles de rayon  $c$  centrés en  $A$  et  $D$  fixes, et  $B$  mobile.



Cherchons donc à exprimer  $\text{Aire}(ABCD)$  en fonction de  $\alpha = \widehat{DAB}$ , cet angle permettant de repérer le point mobile  $B$ .

- Nous avons  $\alpha \in ]0; \pi[$  et  $\gamma \in ]0; \pi[$ .
- Le théorème d'Al-Kashi donne  $BD^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \alpha$  dans le triangle  $ABD$ , ainsi que  $BD^2 = 2c^2 - 2c^2 \cos \gamma$  dans le triangle  $BCD$ . Donc,  $2 \cos \gamma = 1 - k^2 + 2k \cos \alpha$  où l'on a posé  $k = \frac{d}{c}$ . Notons que l'inégalité triangulaire donne  $d < 3c$ , puis  $0 < k < 3$ .
- La formule trigonométrique de l'aire d'un triangle donne  $\text{Aire}(ABD) = 0,5cd \sin \alpha$  et  $\text{Aire}(BCD) = 0,5c^2 \sin \gamma$ , puis  $\text{Aire}(ABCD) = 0,5c^2(k \sin \alpha + \sin \gamma)$ , de sorte que  $\text{Aire}(ABCD) = 0,5c^2 f(\alpha)$  en posant  $f(\alpha) = k \sin \alpha + \sqrt{1 - 0,25(1 - k^2 + 2k \cos \alpha)^2}$ , car  $\sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma}$ .
- Passons à l'étude de  $f'(\alpha) = 0$ , en nous souvenant que nous n'avons pas besoin d'atteindre le maximum de  $f$ , mais juste de pouvoir faire augmenter localement  $f(\alpha)$ . Dans les implications suivantes, nous avons posé  $S = \sin \alpha$  et  $C = \cos \alpha$ .

$$\begin{aligned}
& f'(\alpha) = 0 \\
& \xRightarrow{\text{d'où}} kC + \frac{kS(1 - k^2 + 2kC)}{2\sqrt{1 - 0,25(1 - k^2 + 2kC)^2}} = 0 \\
& \xRightarrow{\text{d'où}} S(1 - k^2 + 2kC) = -2C\sqrt{1 - 0,25(1 - k^2 + 2kC)^2} \\
& \xRightarrow{\text{d'où}} S^2(1 - k^2 + 2kC)^2 = 4C^2(1 - 0,25(1 - k^2 + 2kC)^2) \\
& \xRightarrow{\text{d'où}} (1 - k^2 + 2kC)^2(S^2 + C^2) = 4C^2 \\
& \xRightarrow{\text{d'où}} (1 - k^2 + 2kC)^2 - 4C^2 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} C^2 + S^2 = 1 \\
& \xRightarrow{\text{d'où}} (1 - k^2 + 2kC - 2C)(1 - k^2 + 2kC + 2C) = 0 \\
& \xRightarrow{\text{d'où}} (1 - k)(1 + k - 2C)(1 + k)(1 - k + 2C) = 0 \\
& \xRightarrow{\text{d'où}} k = 1 \text{ ou } C \in \left\{ \frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} k > 0
\end{aligned}$$

- $k = 1$  signifie que  $ABCD$  est un losange, non rectangle, car  $\widehat{ABC} \neq \widehat{BCD}$ . Dans ce cas, en bougeant un peu le sommet  $B$  parallèlement à  $(AD)$ , tout en faisant augmenter  $\alpha$  légèrement si  $\alpha \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ , ou diminuer  $\alpha$  légèrement si  $\alpha \in ]\frac{\pi}{2}; \pi[$ ,<sup>2</sup> nous obtenons un parallélogramme de même aire, mais de périmètre diminué.<sup>3</sup> On obtient au final un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}'$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{P}') < \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}') = \text{Aire}(\mathcal{P})$ , qu'il suffit d'agrandir pour conclure.
- Pour  $k \neq 1$  et  $C = \frac{k-1}{2}$ , nous avons  $2 \cos \alpha = k-1$ , puis  $2 \cos \gamma = 1 - k^2 + k(k-1) = 1 - k$ , soit  $\cos \gamma = -\cos \alpha$  qui fournit  $\gamma = \pi - \alpha$ , en se souvenant que  $(\alpha, \gamma) \in ]0; \pi[$ .<sup>2</sup> Notons que  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$  et  $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$ , car  $k \neq 1$ .

XXX

- Pour  $k \neq 1$  et  $C = \frac{k+1}{2}$ , comme au début du point précédent, nous avons  $\cos \gamma = \cos \alpha$ , puis  $\gamma = \alpha$  avec  $(\alpha, \gamma) \in ]0; \pi[$ .<sup>2</sup> Notons qu'ici  $0 < k < 1$ , puis  $(\alpha, \gamma) \in ]0; \frac{\pi}{3}[$ . Dès lors, les monotonies de  $\sin$  et  $\cos$  sur  $]0; \frac{\pi}{3}[$ , combinées à  $1 - k^2 + 2k \cos \alpha \geq 0$ , impliquent la stricte croissance de  $f$  sur  $]0; \frac{\pi}{3}[$ .<sup>4</sup> Il suffit donc d'augmenter légèrement la valeur de  $\alpha$ .  $\square$

**Remarque 1.2.** *Ce qui précède donne envie de faire appel à la méthode des extrema liés pour plus d'élégance dans les calculs. Étudions donc les extrema de  $f(\alpha, \gamma) = k \sin \alpha + \sin \gamma$  sur  $]0; \pi[$  sous la contrainte  $g(\alpha, \gamma) = 0$  avec  $g(\alpha, \gamma) = 1 - k^2 + 2k \cos \alpha - 2 \cos \gamma$ . Si un extremum existe, alors nous avons  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\partial_\alpha f = \lambda \partial_\alpha g$  et  $\partial_\gamma f = \lambda \partial_\gamma g$ , de sorte que  $k \cos \alpha = -2k\lambda \sin \alpha$ , soit  $\cos \alpha = -2\lambda \sin \alpha$ , et aussi  $\cos \gamma = 2\lambda \sin \gamma$ . Nous avons alors les deux alternatives suivantes qui rejoignent les arguments de la preuve précédente.*

- (1) Si  $\lambda = 0$ , alors  $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{2}$ , puis  $k = 1$ .
- (2) Si  $\lambda \neq 0$ , alors  $\cos \alpha \sin \gamma = -\cos \gamma \sin \alpha$ , puis  $\sin(\alpha + \gamma) = 0$ , et  $\gamma = \pi - \alpha$ .

**Remarque 1.3.** *Une démonstration géométrique du fait 3 est possible via un résultat attribué à Zénodore<sup>5</sup> sur la maximisation de l'aire totale de deux triangles isocèles de bases fixées, et de périmètre total constant : ce résultat affirme que les deux triangles doivent avoir des angles*

2.  $B$  se déplace vers la gauche dans notre cas.  
3. Si besoin, se reporter à la preuve du fait ??.  
4. Nous utilisons la composition de fonctions monotones, ce qui n'est pas toujours faisable.  
5. La preuve du résultat de Zénodore est un peu fastidieuse.

en leur sommet principal de même mesure. Malheureusement, cette preuve échoue lors de la disparition d'un sommet en choisissant la paire optimale de triangles isocèles pour construire un nouveau  $n$ -gone « plus gros ».

**Fait 4.** Si un  $n$ -gone  $\mathcal{P}$  n'est pas un  $n$ -gone régulier convexe, alors il existe un  $n$ -gone convexe  $\mathcal{P}'$  tel que  $\text{Perim}(\mathcal{P}') = \text{Perim}(\mathcal{P})$  et  $\text{Aire}(\mathcal{P}') > \text{Aire}(\mathcal{P})$ .

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser les faits 1, 2 et 3. □

Pour en finir avec le problème d'isopérimétrie polygonal, nous aurons besoin du fait suivant.

**Fait 5.** Si  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  sont respectivement un  $k_1$ -gone et un  $k_2$ -gone, tous les deux réguliers convexes, avec  $k_1 < k_2$  et  $\text{Perim}(\mathcal{R}_1) = \text{Perim}(\mathcal{R}_2)$ , alors  $\text{Aire}(\mathcal{R}_1) < \text{Aire}(\mathcal{R}_2)$ .

*Démonstration.* Il est connu, et facile à démontrer, qu'un  $n$ -gone régulier convexe  $\mathcal{R}$  vérifie  $\text{Perim}(\mathcal{R}) = 2n \sin(\frac{\pi}{n})\rho$  et  $\text{Aire}(\mathcal{R}) = n \sin(\frac{\pi}{n}) \cos(\frac{\pi}{n})\rho^2$  où  $\rho$  désigne le rayon du cercle circonscrit à  $\mathcal{R}$ . Ceci donne  $\text{Aire}(\mathcal{R}) = \frac{\text{Perim}(\mathcal{R})^2}{4n \tan(\frac{\pi}{n})}$ , puis amène à justifier que  $k_1 \tan(\frac{\pi}{k_1}) > k_2 \tan(\frac{\pi}{k_2})$ , c'est-à-dire que la suite  $(k \tan(\frac{\pi}{k}))_{k \in \mathbb{N}_{\geq 3}}$  est strictement décroissante.

XXXX □