BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS – UNE MÉTHODE EFFICACE

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writing/drafts.

Mentions « légales »

Table des matières

Date: 25 Jan. 2024 – 31 Jan. 2024.

1. Ce qui nous intéresse

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers » [1], Paul Erdos démontre que pour tout couple $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit d'entiers consécutifs $\prod_{i=0}^{k}(n+i)$ n'est jamais le carré d'un entier.
Dans ce document, nous proposons une méthode efficace [2], élémentaire, et semi-automatisable, pour gérer plus facilement les premiers cas d'impossibilité.

2. Notations utilisées

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ et ${}^2\mathbb{N}_* = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
- $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k}(n+i)$. Par exemple, nous avons $\pi_n^0 = n$ et $\pi_n^1 = n(n+1)$.
- $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
- $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m.

3. Prenons du recul

Il est facile de trouver des démonstrations à la main du fait que $n(n+1)\cdots(n+k) \notin {}^2\mathbb{N}_*$ pour les premières valeurs de k. Certains preuves sont très sympathiques, mais, malheureusement, elles ne reposent pas sur un schéma général de raisonnement autre que de découvrir des carrés mal espacés : par exemple, tomber sur $N^2 - M^2 = 4$ lève une contradiction du fait 3.1 donné ci-dessous. Dans la suite, nous allons tenter de limiter au maximum l'emploi de fourberies déductives ; pour cela, commençons par noter le fait suivant [3].

Fait 3.1. *$\forall (N,M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $N > M$, alors $N^2 - M^2 = \sum_{k=M+1}^{N}(2k-1)$.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser $N^2 = \sum_{k=1}^{N}(2k-1)$. □

Fait 3.2. *$\forall n \in {}^2\mathbb{N}_*$, s'il existe $m \in {}^2\mathbb{N}_*$ tel que $n = fm$ alors $f \in {}^2\mathbb{N}_*$.*

Démonstration. Il suffit de passer via les décompositions en facteurs premiers de n, m et f. □

Passons aux diviseurs sans facteur carré des facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k}(n+i)$.

Définition 3.1. *Soient $(n,k) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$, $(a_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq \mathbb{N}^*$ et $(s_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq {}^2\mathbb{N}_*$ tels que $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$, $n+i = a_i s_i$. Ce type de situation sera résumé par le tableau suivant que nous nommerons tableau de Vogler en référence à la discussion où l'auteur a découvert ce concept.*

$n + \bullet$	0	1	2	$\ldots$	k
	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_k

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).
2. Cette méthode s'appuie sur une représentation trouvée dans un message archivé que l'auteur a consulté le 28 janvier 2024. Voir `https://web.archive.org/web/20171110144534/http://mathforum.org/library/drmath/view/65589.html`.
3. $N^2 - M^2 = (N-M)(N+M)$ donne directement $N^2 - M^2 \geq 3$ dès que $(N,M) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$ vérifie $N > M$.

Exemple 3.1. *Supposons avoir le tableau de Vogler suivant où $n \in \mathbb{N}^*$.*

$n + \bullet$	0	1	2	3
	2	5	6	1

Ceci résume la situation suivante.

- $\exists A \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n = 2A^2$.
- $\exists B \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n + 1 = 5B^2$.
- $\exists C \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n + 2 = 6C^2$.
- $\exists D \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n + 3 = D^2$.

Fait 3.3.

(1) *Si nous avons un tableau de Vogler du type suivant, où les puces $\bullet$ indiquent des valeurs inconnues, alors nous pouvons affirmer que $\pi_n^{k-1} \in {}^2\mathbb{N}_*$.*

$n + \bullet$	0	1	$\ldots$	$k-1$	k
	$\bullet$	$\bullet$	$\ldots$	$\bullet$	1

(1) *Si nous avons un tableau de Vogler du type suivant, où les puces $\bullet$ indiquent des valeurs inconnues, alors nous pouvons affirmer que $\pi_{n+1}^{k-1} \in {}^2\mathbb{N}_*$.*

$n + \bullet$	0	1	$\ldots$	$k-1$	k
	1	$\bullet$	$\ldots$	$\bullet$	$\bullet$

Démonstration. C'est immédiat via le fait 3.2. □

Fait 3.4. *Soit $(n, d, i, a) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^4$. Les tableaux de Vogler ci-après sont impossibles.*

(2) *Pas de facteurs carrés trop près (les puces $\bullet$ indiquent des valeurs inconnues).*

$n + \bullet$	i	$i + 1$	$\ldots$	$i+d-1$	$i + d$
	ad	$\bullet$	$\ldots$	$\bullet$	ad

(3) *Pas de facteurs carrés pas trop loin.*

$n + \bullet$	i	$i + 1$	$\ldots$	$i+2d-1$	$i + 2d$
	ad	$\bullet$	$\ldots$	$\bullet$	ad

Démonstration. Tout est contenu dans le fait 3.1.

(1) Ici, $n + i = adA^2$ et $n + i + d = adB^2$ donnent $ad(B^2 - A^2) = d$, puis $a(B^2 - A^2) = 1$, d'où $B^2 - A^2 = 1$ qui ne se peut pas car $B^2 > A^2 \geq 1$.

(2) Ici, $n + i = adA^2$ et $n + i + 2d = adB^2$ donnent $ad(B^2 - A^2) = 2d$, *i.e.* $a(B^2 - A^2) = 2$, d'où $B^2 - A^2 \in \{1, 2\}$ qui est impossible.

□

Pour fabriquer des tableaux de Vogler, nous allons « multiplier » des d-tableaux de Vogler qui sont moins précis ; ils sont définis comme suit.

Définition 3.2. *Soient $(n, k, d) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^3$, $(q_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq \mathbb{N}$, $(\epsilon_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq \{0, 1\}$ et $(f_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq \mathbb{N}^*$ tels que $\forall i \in [\![0\,; k]\!]$, $n + i = d^{2q_i + \epsilon_i} f_i$ avec $f_i \wedge d = 1$. Ce type de situation sera résumé par le tableau suivant que nous nommerons d-tableau de Vogler où $d^{\epsilon_i} \in \{1, d\}$.*

$n+\bullet$	0	1	2	$\dots$	k
d	d^{ϵ_0}	d^{ϵ_1}	d^{ϵ_2}	$\dots$	d^{ϵ_k}

Exemple 3.2. *Supposons avoir le* 5*-tableau de Vogler suivant où* $n \in \mathbb{N}^*$.

$n+\bullet$	0	1	2	3
5	1	5	1	1

Ceci résume la situation suivante.

- $\exists (a, A) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $A \wedge 5 = 1$ *et* $n = 5^{2a} A$.
- $\exists (b, B) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $B \wedge 5 = 1$ *et* $n + 1 = 5^{2b+1} B$.
- $\exists (c, C) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $C \wedge 5 = 1$ *et* $n + 2 = 5^{2c} C$.
- $\exists (d, D) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $D \wedge 5 = 1$ *et* $n + 3 = 5^{2d} D$.

Exemple 3.3. *La multiplication de deux d-tableaux de Vogler est « naturelle » lorsqu'elle porte sur des nombres d premiers entre eux. Considérons le* 2*-tableau de Vogler et le* 3*-tableau de Vogler suivants.*

$n+\bullet$	0	1	2	3
2	1	2	1	2

$n+\bullet$	0	1	2	3
3	3	1	1	3

La multiplication de ces d-tableaux de Vogler est le 6*-tableau de Vogler suivant.*

$n+\bullet$	0	1	2	3
6	3	2	1	6

Ceci résume la situation suivante avec des notations « évidentes ».

- $A \wedge 6 = 1$ *et* $n = 2^{2a} 3^{2\alpha+1} A$.
- $B \wedge 6 = 1$ *et* $n + 1 = 2^{2b+1} 3^{2\beta} B$.
- $C \wedge 6 = 1$ *et* $n + 2 = 2^{2c} 3^{2\gamma} C$.
- $D \wedge 6 = 1$ *et* $n + 3 = 2^{2d+1} 3^{2\delta+1} D$.

Fait 3.5. *Dans la deuxième ligne d'un d-tableau de Vogler, les valeurs d sont séparées par exactement* $(d - 1)$ *valeurs* 1 .

Démonstration. Penser aux multiples de d . ☐

Fait 3.6. $\forall p \in \mathbb{P}$, *si* $\pi_n^k \in {}^2\mathbb{N}$, *alors dans le p-tableau de Vogler associé à* π_n^k , *le nombre de valeurs p est forcément pair.*

Démonstration. Évident, mais très pratique, comme nous le verrons dans la suite. ☐

4. Application au cas de 2 facteurs

Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Nous avons alors les p-tableaux de Vogler suivants pour $p \in \mathbb{P}$ divisant π_n^1 , car les valeurs p de la deuxième ligne doivent apparaître un nombre pair de fois tout en étant espacées par $(p - 1)$ valeurs 1 (voir les faits 3.5 et 3.6).

$n+\bullet$	0	1
p	1	1

La multiplication de tous les p-tableaux de Vogler précédents donne le tableau de Vogler ci-après qui contredit le fait 3.4.

$n+\bullet$	0	1
	1	1

5. Application au cas de 3 facteurs

Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Nous avons alors les p-tableaux de Vogler suivants pour $p \in \mathbb{P}_{>2}$ divisant π_n^2 , de nouveau car les valeurs p doivent apparaître un nombre pair de fois, et être espacées par $(p-1)$ valeurs 1 (voir les faits 3.5 et 3.6).

$n+\bullet$	0	1	2
p	1	1	1

Pour $p = 2$, via les faits 3.5 et 3.6, seulement deux 2-tableaux de Vogler sont possibles. Nous utilisons un abus de notation évident pour indiquer ces deux possibilités.

$n+\bullet$	0	1	2
2	1	1	1
	2	1	2

La multiplication de tous les d-tableaux de Vogler précédents donne juste les deux tableaux de Vogler suivants, mais ceci est impossible d'après le fait 3.4.

$n+\bullet$	0	1	2
	1	1	1
	2	1	2

6. Application au cas de 4 facteurs

Supposons que $\pi_n^3 = n(n+1)(n+2)(n+3) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Nous avons alors les p-tableaux de Vogler suivants pour $p \in \mathbb{P}_{>3}$ divisant π_n^3 .

$n+\bullet$	0	1	2	3
p	1	1	1	1

Pour $p = 2$, nous avons les trois 2-tableaux de Vogler suivants.

$n+\bullet$	0	1	2	3
2	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2

Pour $p = 3$, nous obtenons les deux 3-tableaux de Vogler suivants.

$n+\bullet$	0	1	2	3
3	1	1	1	1
	3	1	1	3

La multiplication des d-tableaux de Vogler précédents donne les tableaux de Vogler suivants.

$n+\bullet$	0	1	2	3
	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2
	3	1	1	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Le fait 3.4 rejette les quatre premiers tableaux de Vogler : voir les cellules surlignées ci-dessous.

$n+\bullet$	0	1	2	3
	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2
	3	1	1	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Il nous reste à étudier les deux derniers tableaux reproduits ci-après.

$n+\bullet$	0	1	2	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Commençons par démontrer que l'on ne peut pas avoir $n = 6A^2$, $n+1 = B^2$, $n+2 = 2C^2$ et $n+3 = 3D^2$ où $(A, B, C, D) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^4$.

- Posons $x = n + \frac{3}{2}$ de sorte que $x - \frac{3}{2} = 6A^2$, $x - \frac{1}{2} = B^2$, $x + \frac{1}{2} = 2C^2$ et $x + \frac{3}{2} = 3D^2$.
- Nous avons $\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = 2E^2$, c'est-à-dire $x^2 - \frac{9}{4} = 2E^2$, avec $E \in \mathbb{N}^*$.
- De même, $x^2 - \frac{1}{4} = 2F^2$ avec $F \in \mathbb{N}^*$.
- Par simple soustraction, nous obtenons $2F^2 - 2E^2 = 2$, puis $F^2 - E^2 = 1$, mais ceci contredit le fait 3.1.

Le même type de raisonnement [4] démontre l'impossibilité d'avoir $n = 3A^2$, $n+1 = 2B^2$, $n+2 = C^2$ et $n+3 = 6D^2$ où $(A, B, C, D) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^4$.

7. Application au cas de 5 facteurs

Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Nous avons alors les p-tableaux de Vogler suivants pour $p \in \mathbb{P}_{>4}$ divisant π_n^4 .

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
p	1	1	1	1	1

Pour $p = 2$, nous avons les 2-tableaux de Vogler suivants.

4. Noter la « symmétrie » respectée par les valeurs des deux tableaux.

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
2	1	1	1	1	1
	2	1	2	1	1
	2	1	1	1	2
	1	2	1	2	1
	1	1	2	1	2

Pour $p = 3$, nous obtenons les 3-tableaux de Vogler suivants.

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
3	1	1	1	1	1
	3	1	1	3	1
	1	3	1	1	3

La multiplication de tous les d-tableaux de Vogler précédents donne les 15 cas suivants.

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
	1	1	1	1	1
	2	1	2	1	1
	2	1	1	1	2
	1	2	1	2	1
	1	1	2	1	2
	3	1	1	3	1
	6	1	2	3	1
	6	1	1	3	2
	3	2	1	6	1
	3	1	2	3	2
	1	3	1	1	3
	2	3	2	1	3
	2	3	1	1	6
	1	6	1	2	3
	1	3	2	1	6

Comme $\pi_n^3 = n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}_*$ et $\pi_{n+1}^3 = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2\mathbb{N}_*$, nous pouvons ignorer tous les tableaux commençant, ou finissant, par une valeur 1 d'après le fait 3.3. Cela laisse les tableaux de Vogler ci-après, mais ces derniers sont rejetés par le fait 3.4.

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
	2	1	1	1	2
	6	1	1	3	2
	3	1	2	3	2
	2	3	2	1	3
	2	3	1	1	6

Remarque 7.1. *Notons qu'un cas comme* $6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2$ *, c'est-à-dire* $n = 6A^2$ *,* $n+1 = B^2$ *,* $n+2 = C^2$ *,* $n+3 = 3D^2$ *et* $n+4 = 2E^2$ *où* $(A, B, C, D, E) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^4$ *peut se traiter de façon analogue à ce qui a été fait dans la section 6 via* $x-2 = 6A^2$ *,* $x-1 = B^2$ *,* $x = C^2$ *,* $x+1 = 3D^2$ *et* $x+2 = 2E^2$ *qui donnent* $x^2 - 4 = 3F^2$ *et* $x^2 - 1 = 3G^2$ *où* $(F, G) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^4$ *.*

8. Et après ?

La méthode présentée ci-dessus permet de faire appel à un programme pour n'avoir à traiter à la main, et aux neurones, que certains tableaux de Vogler problématiques comme nous avons dû le faire dans la section 6. Expliquons cette tactique semi-automatique en traitant le cas de 6 facteurs.

(1) On fabrique la liste $\mathcal{P}$ des diviseurs premiers stricts de 6 : nous avons juste 2 , 3 et 5 . Notons qu'avec 7 facteurs, nous n'aurions pas garder 7 car il est forcément de valuation paire dans chaque facteur $(n+i)$ de π_n^7 .

(2) Pour chaque élément p de $\mathcal{P}$, on construit la liste $\mathcal{V}_p$ des p-tableaux de Vogler possibles relativement à π_n^6 .

(3) Via les listes $\mathcal{V}_p$, on calcule toutes les multiplications de p-tableaux de Vogler, et pour chacune d'elles on ne la garde que si elle ne vérifie aucune des conditions suivantes, celles du dernier cas devant être indiquées à la main au programme.

   (a) Le tableau « produit » commence, ou se termine, par la valeur 1 . Dans ce cas, on sait par récurrence que le tableau produit n'est pas possible (voir le fait 3.3).

   (b) L'une des interdictions du fait 3.4 est validée par le tableau « produit » .

   (c) Le tableau « produit » contient un sous-tableau que nous savons impossible suite à un raisonnement humain fait *localement* , c'est-à-dire que seul les facteurs indiqués dans le sous-tableau, et le sous-tableau lui-même sont utilisés pour raisonner. Comme c'est ce qui a été fait en fin de section 6, nous pouvons indiquer les deux sous-tableaux impossibles suivants.

$m + \bullet$	0	1	2	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

YAPLUKA !

9. Sources utilisées

Ce document n'aurait pas vu le jour sans la source suivante.

(1) Une discussion archivée consultée le 28 janvier 2024 :
`https://web.archive.org/web/20171110144534/http://mathforum.org/library/drmath/view/65589.html` .

Cette discussion utilise ce que nous avons nommé les tableaux de Vogler, mais le côté semi-mécanisable de leur utilisation n'est pas souligné.

10. AFFAIRE À SUIVRE...