Exercice 23

Deux méthodes pour déterminer la limite d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

Partie A : première méthode

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{3}{u_n + 2}$.

2) a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n < 1$

   b) Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1 - u_n^2}{u_n + 2}$ puis montrer que (u_n) est croissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ

4) On admet que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ avec f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$

   a) Déterminer la valeur de ℓ

   b) Écrire un algorithme déterminant la valeur N tel que : $\forall n > N,\ |u_n - \ell| < 10^{-3}$.
   Donner la valeur de N à l'aide de la calculatrice.

Partie B : deuxième méthode

1) La suite (v_n) est définie pour tout entier n par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

   Démontrer que (v_n) est géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

2) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 24

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1) On considère l'algorithme en pseudo-code suivant :

```
Lire n
u ← 1
pour i variant de 1 à n faire
  | u ← √(2u)
fin
Afficher u
```

   a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

   b) Que permet de calculer cet algorithme ?

   c) Remplir le tableau ci-dessous. On donnera les valeurs approchées à 10^{-4}

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée					

   Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

   b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

   c) Démontrer que (u_n) est convergente. On ne demande pas sa limite.

Exercice 25

Vrai-Faux

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = (-1)^n$.

1) **Proposition 1 :** « La suite (u_n) est bornée. »
2) **Proposition 2 :** « La suite (u_n) converge. »
3) **Proposition 3 :** « La suite de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ converge. »
4) **Proposition 4 :**
   « Toute suite (v_n) à termes strictement positifs et décroissante converge vers 0. »

Exercice 26

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \frac{1}{n+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

1) Calculer les termes u_1, u_2, u_3.
   Pour les termes u_2 et u_3, on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.
2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{n+\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n}{n+1}$
3) En déduire que la suite converge et calculer sa limite.

Exercice 27

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1 \end{cases}$

1) a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 (arrondir à 10^{-2} près).
   b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2) a) Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant n+3$
   b) Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}(n+3-u_n)$
   c) En déduire une validation de la conjecture précédente.
3) On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - n$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + n$
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
4) Pour tout n non nul, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ et $T_n = \dfrac{S_n}{n^2}$.
   a) Exprimer S_n en fonction de n.
   b) Déterminer la limite de la suite (T_n).