CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS – DES PREUVES HUMAINES FACILES

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LaTeX, disponible sur la page ***https://github.com/bc-writing/drafts****.*

Mentions « légales »

Table des matières

Date : 21 Fév. 2024 – 24 Fév. 2024.

1. Ce qui nous intéresse

Dans l'article *« Note on Products of Consecutive Integers »*[1], Paul Erdős démontre que pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit de $(k+1)$ entiers consécutifs $n(n+1)\cdots(n+k)$ n'est jamais le carré d'un entier. Plus précisément, l'argument général de Paul Erdős est valable pour $k+1 \geq 100$, soit à partir de 100 facteurs.

Dans ce document, nous donnons les preuves les plus simples possibles de quelques cas particuliers. Quitte à nous répéter, nous avons rédigé au complet chaque preuve jusqu'au cas de 10 facteurs, ceci permettant au lecteur de piocher des preuves au gré de ses envies.

Remarque 1.1. *Vous trouverez dans mon document* « Carrés parfaits et produits d'entiers consécutifs – Des solutions à la main » *d'autres preuves, plus ou moins efficaces, mais toutes intéressantes dans leur approche.*

Remarque 1.2. *Vous trouverez dans mon document* « Carrés parfaits et produits d'entiers consécutifs – Une méthode efficace » *, un moyen très efficace pour traiter sans effort à la main, mais via de la récurrence, les cas jusqu'à $k = 6$. L'existence de ce document justifie que nous ne parlions pas de cette méthode ici.*

2. Notations utilisées

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- $\forall (n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k-1} (n+i)$.
  Par exemple, $\pi_n^1 = n$, $\pi_n^2 = n(n+1)$ et $\pi_{n+2}^4 = (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$.
- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des carrés parfaits. On note aussi ${}^2_*\mathbb{N} = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
  $\mathbb{N}_{sf}$ est l'ensemble des naturels non nuls sans facteur carré[2].
- $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
  $\forall (p\,; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p-adique de n, c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n, contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m.
- $2\,\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
  $2\,\mathbb{N} + 1$ est l'ensemble des nombres naturels impairs.
- $(a \pm b)$ est un raccourci pour $(a+b)(a-b)$.

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).
2. En anglais, on dit « square free ».

3. Les carrés parfaits

3.1. Structure.

Fait 3.1. *$n \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$ si, et seulement si, $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$.*

Démonstration. Immédiat à valider. □

Fait 3.2. *$\forall n \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$, s'il existe $m \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$ tel que $n = fm$ alors $f \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$.*

Démonstration. $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(fm) \in 2\mathbb{N}$, $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(fm) = v_p(f) + v_p(m)$ donnent $v_p(f) \in 2\mathbb{N}$. □

Fait 3.3. *$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $a \wedge b = 1$ et $ab \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$, alors $a \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$ et $b \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$.*

Démonstration. $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(ab) \in 2\mathbb{N}$, et p ne peut diviser à la fois a et b , donc $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(a) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(b) \in 2\mathbb{N}$, autrement dit $(a, b) \in {}_{*}^{2}\mathbb{N} \times {}_{*}^{2}\mathbb{N}$. □

Fait 3.4. *Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $ab \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$, ainsi que $(\alpha, \beta, A, B) \in (\mathbb{N}_{sf})^2 \times \mathbb{N}^2$ tel que $a = \alpha A^2$ et $b = \beta B^2$. Nous avons alors forcément $\alpha = \beta$.*

Démonstration. Le fait 3.2 donne $\alpha\beta \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$. De plus, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(\alpha) \in \{0, 1\}$ et $v_p(\beta) \in \{0, 1\}$. Finalement, $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\alpha) = v_p(\beta)$, autrement dit $\alpha = \beta$. □

3.2. Distance entre deux carrés parfaits.

Fait 3.5. *Soit $(M, N) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $N > M$.*

(1) $N^2 - M^2 \geq 2N - 1$, d'où l'impossibilité d'avoir $N^2 - M^2 < 3$.

(2) Notons nb_{sol} le nombre de solutions $(M, N) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de $N^2 - M^2 = \delta$.

Pour $\delta \in [\![1\,;10]\!]$, nous avons :

(a) $nb_{sol} = 0$ si $\delta \in \{1, 2, 4, 6, 10\}$.

(b) $nb_{sol} = 1$ si $\delta \in \{3, 5, 7, 8, 9\}$. Ainsi, $N^2 - M^2 = 3$ uniquement si $(M, N) = (1, 2)$.

Démonstration.

(1) Comme $N - 1 \geq M$, nous obtenons : $N^2 - M^2 \geq N^2 - (N - 1)^2 = 2N - 1$.

(2) Nous avons $2N - 1 \leq \delta$, soit $N \leq \dfrac{\delta + 1}{2}$. Ceci permet de comprendre le programme `Python` donné dans la page suivante qui sert à obtenir facilement les nombres de solutions indiqués. □

```
from math import sqrt, floor

# N**2 - M**2 = diff ?
def sol(diff):
    solfound = []

    for N in range(1, (diff + 1) // 2 + 1):
        M_square = N**2 - diff

        if M_square > 0:
            M = floor(sqrt(M_square))

            if M != 0 and M**2 == M_square:
                solfound.append((M, N))

    return solfound
```

4. Avec 2 facteurs

Fait 4.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve. Il suffit de noter que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$. □

5. Avec 3 facteurs

Fait 5.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve. Supposons que $\pi_n^3 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Posons $m = n+1$ pour « symétriser » la formule. Ceci donne $\pi_n^3 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Comme $m \wedge (m^2-1) = 1$, le fait 3.3 donne $(m, m^2-1) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$. Or, $m^2-1 \in {}^2_*\mathbb{N}$ est impossible d'après le fait 3.5. □

6. Avec 4 facteurs

Fait 6.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve. En « symétrisant » la formule, nous obtenons les manipulations algébriques naturelles suivantes qui vont nous permettre de conclure

$$
\begin{aligned}
\pi_n^4 &= n(n+1)(n+2)(n+3) && x = n + \frac{3}{2} \\
&= \left(x \pm \frac{3}{2}\right)\left(x \pm \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(x^2 - \frac{9}{4}\right)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) && y = x^2 - \frac{5}{4} \ \textit{où}\ \frac{5}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} + \frac{1}{4}\right) . \\
&= (y \pm 1) \\
&= y^2 - 1 && y = \left(n + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = n^2 + 3n + 1 \\
&= \left(n^2 + 3n + 1\right)^2 - 1 && m = n^2 + 3n + 1 \\
&= m^2 - 1
\end{aligned}
$$

Comme $m > 0$, $m^2 - 1 \notin {}^2\mathbb{N}$ d'après le fait 3.5, donc $\pi_n^4 \notin {}^2\mathbb{N}$. □

7. Avec 5 facteurs

Fait 7.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2_*\mathbb{N}$.

La preuve suivante s'inspire directement d'une démonstration citée via une source dans un échange sur `https://math.stackexchange.com` (voir la section 16).

Preuve. Supposons que $\pi_n^5 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$, $\forall i \in [\![0\,;4]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$. D'après le fait 3.2, on doit s'intéresser à $p \in \{2, 3\}$, mais on peut observer très grossièrement qu'au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^5 sont divisibles par 3 , donc au moins 3 facteurs sont de valuation p-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$. Ces facteurs vérifient alors l'une des deux alternatives suivantes, chacune d'elles levant une contradiction.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ sont de valuations 2-adiques impairs.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (2M^2, 2N^2)$ avec $|2(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;4]\!]$, c'est-à-dire $|N^2 - M^2| \in \{1, 2\}$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ sont de valuations 2-adiques pairs.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $|N^2 - M^2| \in [\![1\,;4]\!]$, mais ceci n'est possible que si $|N^2 - M^2| = 3$ d'après le fait 3.5 qui donne aussi que soit $(M, N) = (1, 2)$, soit $(M, N) = (2, 1)$. Ceci impose d'avoir $n = 1$, mais $\pi_1^5 = 5! \notin {}^2\mathbb{N}$ car $v_5(5!) = 1$. □

8. Avec 6 facteurs

Fait 8.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^6 \notin {}^2\mathbb{N}$.

La démonstration suivante se trouve dans l'article « Solution of a Problem »[3] de G. W. Hill et J. E. Oliver. Une petite simplification a été faite pour arriver à $\pi_n^6 = (a-4)a(a+2)$.

Preuve. Supposons que $\pi_n^6 \in {}^2\mathbb{N}$.

Commençons par de petites manipulations algébriques où la première modification fait apparaître le même coefficient pour n dans chaque parenthèse.

$$\begin{aligned}\pi_n^6 &= n(n+5)\cdot(n+1)(n+4)\cdot(n+2)(n+3)\\ &= (n^2+5n)(n^2+5n+4)(n^2+5n+6) && x = n^2+5n \in \mathbb{N}_{\geq 6}\\ &= x(x+4)(x+6) && a = x+4 \in \mathbb{N}_{\geq 10}\\ &= (a-4)a(a+2)\end{aligned}$$

Nous avons $a \in \mathbb{N}_{\geq 10}$ vérifiant $a(a+2)(a-4) \in {}^2_*\mathbb{N}$. Posons $a = \alpha A^2$ où $(\alpha, A) \in \mathbb{N}_{sf} \times \mathbb{N}^*$, de sorte que $\alpha(\alpha A^2+2)(\alpha A^2-4) \in {}^2_*\mathbb{N}$ via le fait 3.2. Or $\alpha \in \mathbb{N}_{sf}$ donne $\alpha \mid (\alpha A^2+2)(\alpha A^2-4)$, d'où $\alpha \mid 8$, et ainsi $\alpha \in \{1, 2\}$[4]. Nous allons voir que ceci est impossible.

Supposons que $\alpha = 1$.

- Notons les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}&(A^2+2)(A^2-4) \in {}^2_*\mathbb{N} && u = A^2-1 \text{ où } -1 = \frac{2-4}{2}.\\ \iff\ &(u+3)(u-3) \in {}^2_*\mathbb{N}\\ \iff\ &u^2-9 \in {}^2_*\mathbb{N}\end{aligned}$$

- Ensuite, prenant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = u^2 - 9$, le fait 3.5 donne $(m, u) = (4, 5)$ d'où la contradiction suivante.

$$\begin{aligned}u = 5 \iff\ & A^2 - 1 = 5 && 6 \notin {}^2\mathbb{N}.\\ \iff\ & A^2 = 6\end{aligned}$$

Supposons que $\alpha = 2$.

- Notons l'équivalence suivante.

$$\begin{aligned}&2(2A^2+2)(2A^2-4) \in {}^2_*\mathbb{N} && \textit{Via } 4\cdot 2(A^2+1)(A^2-2).\\ \iff\ &2(A^2+1)(A^2-2) \in {}^2_*\mathbb{N}\end{aligned}$$

- Ensuite, en travaillant modulo 3, nous avons $2(A^2+1)(A^2-2) \equiv -4 \equiv -1$ qui ne correspond pas à un carré modulo 3. □

3. The Analyst (1874).
4. On comprend ici le choix d'avoir $\pi_n^6 = (a-4)a(a+2)$.

9. Avec 7 facteurs

Fait 9.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$.

La preuve suivante s'inspire directement d'une démonstration citée via une source dans un échange sur `https://math.stackexchange.com` (voir la section 16).

Preuve. Supposons que $\pi_n^7 \in {}^2_*\mathbb{N}$.

Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 7}$, $\forall i \in [\![0\,;6]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$. D'après le fait 3.2, on doit s'intéresser à $p \in \{2,3,5\}$. Mais on note très grossièrement qu'au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^7 sont divisibles par 5 . Autrement dit, nous avons au moins 5 facteurs $(n+i)$ de π_n^7 de valuation p-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$, ceux-ci vérifiant l'une des alternatives suivantes.

- **[A 1]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A 2]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$
- **[A 3]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times 2\mathbb{N}$
- **[A 4]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$

Comme nous avons cinq facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions [5].

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 1]** .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $(M,N) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $N^2 - M^2 \in [\![1\,;6]\!]$. Selon le fait 3.5, seuls les cas suivants sont possibles mais ils lèvent tous une contradiction.

  (1) $N^2 - M^2 = 3$ donne $(M,N) = (1,3)$, puis nécessairement $n = 1$, mais $\pi_1^7 = 7! \notin {}^2\mathbb{N}$ via $v_7(7!) = 1$.
  (2) $N^2 - M^2 = 5$ donne $(M,N) = (2,3)$, puis nécessairement $n \in [\![1\,;4]\!]$, et $n \in [\![2\,;4]\!]$ d'après le cas précédent. Mais $\forall n \in [\![2\,;4]\!]$, $v_7(\pi_n^7) = 1$ donne $\pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$ si $n \in [\![2\,;4]\!]$.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 2]** .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (3M^2, 3N^2)$ avec $|3(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;6]\!]$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 3]** .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (2M^2, 2N^2)$ avec $|2(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;6]\!]$, puis nécessairement $|N^2 - M^2| = 3$ qui implique $n \in [\![1\,;2]\!]$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 4]** .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (6M^2, 6N^2)$ avec $|6(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;6]\!]$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5. □

5. Notons qu'en considérant 3 , il resterait au minimum 2 facteurs $(n+i)$ de π_n^7 de valuation p-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$. Or, en considérant la parité de $v_2(n+i)$, nous aurions deux alternatives, ceci rendant impossible l'usage du principe des tiroirs.

10. Avec 8 facteurs

Fait 10.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$.

La démonstration très astucieuse suivante est proposée dans un échange sur `https://math.stackexchange.com` (voir la section 16). Comme pour le cas de quatre facteurs, l'algèbre va nous permettre d'aller très vite.

Preuve.

- L'une des preuves du fait 6.1 nous donne $n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n+1)^2 - 1$.

  En particulier, $(n+4)(n+5)(n+6)(n+7) = (n^2+11n+29)^2 - 1$.
- L'idée astucieuse va être de considérer les deux expressions suivantes qui viennent de $\pi_n^8 = \big(f(n)^2 - 1\big)\big(g(n)^2 - 1\big)$.
  (1) $f(n) = n^2 + 3n + 1$.
  (2) $g(n) = n^2 + 11n + 29$.
- Nous avons les manipulations algébriques naturelles suivantes.

$$\begin{aligned} \pi_n^8 &= \big(f(n)^2-1\big)\big(g(n)^2-1\big) \\ &= (a^2-1)(b^2-1) && \textit{a = f(n) et b = g(n) .} \\ &= a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 \\ &= a^2b^2 - (a-b)^2 - 2ab + 1 && \textit{Choisir } (a-b)^2 \textit{ au lieu de } (a+b)^2 \textit{ va nous permettre, un plus bas, de ne pas trop nous éloigner de } \pi_n^8 . \\ &= (ab-1)^2 - (a-b)^2 \\ &< (ab-1)^2 && b - a \neq 0 . \end{aligned}$$

  Donc $\pi_n^8 < \big(f(n)g(n) - 1\big)^2$.
- Le point précédent rend naturel de tenter de démontrer que $\big(f(n)g(n) - 2\big)^2 < \pi_n^8$, car, si tel est le cas, π_n^8 sera encadré par les carrés de deux entiers consécutifs, et forcément nous aurons $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$. Ce qui suit montre que notre pari est gagnant dès que $n \geq 4$. Que c'est joli !

$$\begin{aligned} & \big(f(n)g(n) - 2\big)^2 < \pi_n^8 \\ \iff & (ab-2)^2 < (a^2-1)(b^2-1) && \textit{a = f(n) et b = g(n) .} \\ \iff & a^2b^2 - 4ab + 4 < a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 \\ \iff & a^2 + b^2 - 4ab + 3 < 0 \end{aligned}$$

  Le site `https://www.wolframalpha.com` nous donne sans effort cognitif[6] ce qui suit (les « transhumanophobes » se reporteront à la remarque 10.1 qui suit).

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 - 4ab + 3 \\ =\ & -2(n^2+7n)^2 + 36(n^2+7n) + 729 \\ =\ & -2m^2 + 36m + 729 && m = n^2 + 7n \\ =\ & -2(m-9)^2 + 891 \end{aligned}$$

  Or, $n^2 + 7n - 9 = 0$ admet pour unique racine positive $n = \frac{-7+\sqrt{85}}{2} \approx 1{,}1$, donc $a^2 + b^2 - 4ab + 3$ décroît en fonction de n à partir de $n = 2$. Les calculs suivants donnent alors que $a^2 + b^2 - 4ab + 3 < 0$ pour $n \geq 4$.

6. Il faut vivre avec son temps...

n	1	2	3	4
$-2(n^2+7n)^2+36(n^2+7n)+729$	889	729	9	-1559

- Nous venons de voir que $(ab-2)^2 < \pi_n^8 < (ab-1)^2$ sur $\mathbb{N}_{\geq 4}$, donc $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$ dès que $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$, mais pour $n \in \{1,2,3\}$, $v_7(\pi_n^8) = 1$ donne $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$, ce qui permet de conclure. $\square$

Remarque 10.1. *Voici comment obtenir une preuve* 100 % *non silliconé. Pour cela, commençons par les manipulations algébriques naturelles suivantes qui cherchent à obtenir le même coefficient pour* n *dans chaque parenthèse, tout en passant d'un polynôme de degré* 8 *à un polynôme de degré* 4 *.*

$$\begin{aligned}\pi_n^8 &= n(n+7)\cdot(n+1)(n+6)\cdot(n+2)(n+5)\cdot(n+3)(n+4)\\ &= (n^2+7n)\cdot(n^2+7n+6)\cdot(n^2+7n+10)\cdot(n^2+7n+12)\\ &= m(m+6)(m+10)(m+12)\end{aligned}$$

$m = n^2 + 7n$

Nous décidons d'offrir un 1^er^ rôle à la variable $m = n^2+7n$ *. Voyons où cela nous mène...*

$$\begin{aligned}&a^2+b^2-4ab+3\\ =\ &a(a-4b)+b^2+3\\ =\ &(m-4n+1)(-3m-20n-115)+(m+4n+29)^2+3\\ =\ &-3m^2-(8n+118)m+(4n-1)(20n+115)+m^2+2(4n+29)m+(4n+29)^2+3\\ =\ &-2m^2-60m+729+672n+96n^2\\ =\ &-2m^2-60m+729+96(n^2+7n)\\ =\ &-2m^2-60m+729+96m\\ =\ &-2m^2+36m+729\end{aligned}$$

$a = n^2+3n+1 = m-4n+1$
$b = n^2+11n+29 = m+4n+29$

Ici, la magie opère...

11. Avec 9 facteurs

Fait 11.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$.

La preuve suivante s'inspire directement d'une démonstration citée via une source dans un échange sur `https://math.stackexchange.com` (voir la section 16).

Preuve. Supposons que $\pi_n^9 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 9}$, $\forall i \in [\![0\,;8]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$. D'après le fait 3.2, on doit s'intéresser à $p \in \{2,3,5,7\}$. Voici ce que l'on peut observer très grossièrement.

- Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^9 sont divisibles par 5 .
- Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^9 sont divisibles par 7 .
- Les points précédents donnent au moins 5 facteurs $(n+i)$ de π_n^9 de valuation p-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$.

Nous avons alors l'une des alternatives suivantes pour chacun des 5 facteurs $(n+i)$ vérifiant $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ pour $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$.

- **[A 1]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A 2]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$
- **[A 3]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times 2\mathbb{N}$
- **[A 4]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$

Comme nous avons cinq facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions [7].

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A1]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $(M,N) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $N^2 - M^2 \in [\![1\,;8]\!]$. Selon le fait 3.5, seuls les cas suivants sont possibles mais ils lèvent tous une contradiction.
  1. $N^2 - M^2 = 3$ donne $(M,N) = (1,3)$, puis nécessairement $n = 1$, mais $\pi_1^9 = 9! \notin {}^2\mathbb{N}$ via $v_7(9!) = 1$.
  2. $N^2 - M^2 = 5$ donne $(M,N) = (2,3)$, puis nécessairement $n \in [\![1\,;4]\!]$, et $n \in [\![2\,;4]\!]$ d'après le cas précédent. Mais $\forall n \in [\![2\,;4]\!]$, $v_7(\pi_n^9) = 1$ donne $\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$ si $n \in [\![2\,;4]\!]$.
  3. $N^2 - M^2 = 7$ donne $(M,N) = (3,4)$, puis nécessairement $n \in [\![1\,;9]\!]$, et $n \in [\![5\,;9]\!]$ d'après les cas précédents. Mais $\forall n \in [\![5\,;9]\!]$, $v_{11}(\pi_n^9) = 1$ donne $\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$ si $n \in [\![5\,;9]\!]$.
  4. $N^2 - M^2 = 8$ donne $(M,N) = (1,3)$, puis nécessairement $n = 1$, mais ceci est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A2]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (3M^2, 3N^2)$ avec $|3(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;8]\!]$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A3]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (2M^2, 2N^2)$ avec $|2(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;8]\!]$, puis nécessairement $|N^2 - M^2| = 3$ qui implique $n \in [\![1\,;2]\!]$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A4]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (6M^2, 6N^2)$ avec $|6(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;8]\!]$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5. $\square$

12. Avec 10 facteurs

Fait 12.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^{10} \notin {}^2\mathbb{N}$.

La démonstration suivante est citée via une source dans un échange sur `https://math.stackexchange.com` (voir la section 16).

Preuve. Supposons que $\pi_n^{10} \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 10}$, $\forall i \in [\![0\,;9]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$. D'après le fait 3.2, on doit s'intéresser à $p \in \{2,3,5,7\}$. Voici ce que l'on peut observer très grossièrement.

- Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^{10} sont divisibles par 5.
- Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^{10} sont divisibles par 7.
- Les points précédents donnent au moins 6 facteurs $(n+i)$ de π_n^{10} de valuation p-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$.

Nous avons alors l'une des alternatives suivantes pour chacun des 6 facteurs $(n+i)$ vérifiant $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ pour $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$.

7. Notons qu'en considérant 3, il resterait au minimum 2 facteurs $(n+i)$ de π_n^9 de valuation p-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$. Or, en considérant la parité de $v_2(n+i)$, nous aurions deux alternatives, ceci rendant impossible l'usage du principe des tiroirs.

- **[A 1]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A 2]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$
- **[A 3]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times 2\mathbb{N}$
- **[A 4]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$

Comme nous avons six facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions [8].

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 1]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $(M,N) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $N^2 - M^2 \in [\![1\,;9]\!]$. Selon le fait 3.5, seuls les cas suivants sont possibles mais ils lèvent tous une contradiction.

  (1) $N^2 - M^2 = 3$ avec $(M,N) = (1,2)$ est possible, mais ceci donne $n = 1^2 = 1$, puis $\pi_1^{10} = 10! \in {}^2\mathbb{N}$, or ceci est faux car $v_7(10!) = 1$.
  (2) $N^2 - M^2 = 5$ avec $(M,N) = (2,3)$ est possible d'où $n \in [\![1\,;4]\!]$. Nous venons de voir que $n = 1$ est impossible. De plus, pour $n \in [\![2\,;4]\!]$, $v_7(\pi_n^{10}) = 1$ montre que $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.
  (3) $N^2 - M^2 = 7$ avec $(M,N) = (3,4)$ est possible d'où $n \in [\![1\,;9]\!]$, puis $n \in [\![5\,;9]\!]$ d'après ce qui précède. Mais ici, $\forall n \in [\![5\,;9]\!]$, $v_{11}(\pi_n^{10}) = 1$ montre que $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.
  (4) $N^2 - M^2 = 8$ avec $(M,N) = (1,3)$ est possible d'où $n = 1$, mais ceci est impossible comme nous l'avons vu ci-dessus.
  (5) $N^2 - M^2 = 9$ avec $(M,N) = (4,5)$ est possible d'où $n \in [\![10\,;16]\!]$ d'après ce qui précède. Or $\forall n \in [\![10\,;16]\!]$, $v_{17}(\pi_n^{10}) = 1$, donc $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 2]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (3M^2, 3N^2)$ avec $(M,N) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $3(N^2 - M^2) \in [\![1\,;9]\!]$, puis $N^2 - M^2 \in [\![1\,;3]\!]$. Selon le fait 3.5, nécessairement $N^2 - M^2 = 3$ avec $(M,N) = (1,2)$, d'où $n \in [\![1\,;3]\!]$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 3]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (2M^2, 2N^2)$ avec $(M,N) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $2(N^2 - M^2) \in [\![1\,;9]\!]$, puis $N^2 - M^2 \in [\![1\,;4]\!]$. Selon le fait 3.5, nécessairement $N^2 - M^2 = 3$ avec $(M,N) = (1,2)$, d'où $n \in [\![1\,;2]\!]$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 4]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (6M^2, 6N^2)$ avec $(M,N) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $6(N^2 - M^2) \in [\![1\,;9]\!]$, puis $N^2 - M^2 = 1$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5. $\square$

8. Notons qu'en considérant 3, il resterait au minimum 2 facteurs $(n+i)$ de π_n^7 de valuation p-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$. Or, en considérant la parité de $v_2(n+i)$, nous aurions deux alternatives, ceci rendant impossible l'usage du principe des tiroirs.

13. Avec 11 facteurs

Fait 13.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^{11} \notin {}^2\mathbb{N}$.

La démonstration suivante est très similaire à celle du cas 12.1, donc nous indiquons juste les adaptations à apporter.

Preuve. Ici nous avons moins 6 facteurs $(n+i)$ de π_n^{11} de valuation p-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$, en notant qu'ici il y a au maximum trois facteurs $(n+i)$ de π_n^{11} divisibles par 5 . Ceci nous amène aux cas suivants.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient $[\mathbf{A\,1}]$.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $|N^2 - M^2| \in [\![1\,;10]\!]$. Ce qui suit lève des contradictions.
  (1) $|N^2 - M^2| = 3$ donne $n = 1$, mais $\pi_1^{11} = 11! \notin {}^2\mathbb{N}$ via $v_{11}(11!) = 1$.
  (2) $|N^2 - M^2| = 5$ donne $n \in [\![2\,;4]\!]$, mais $\forall n \in [\![2\,;4]\!]$, $v_{11}(\pi_n^{11}) = 1$ donne $\pi_n^{11} \notin {}^2\mathbb{N}$.
  (3) $|N^2 - M^2| = 7$ donne $n \in [\![5\,;9]\!]$, mais $\forall n \in [\![5\,;9]\!]$, $v_{11}(\pi_n^{11}) = 1$ donne $\pi_n^{11} \notin {}^2\mathbb{N}$.
  (4) $|N^2 - M^2| = 8$ donne $n = 1$, mais ceci est impossible.
  (5) $|N^2 - M^2| = 9$ donne $n \in [\![10\,;16]\!]$, mais $\forall n \in [\![10\,;16]\!]$, $v_{17}(\pi_n^{11}) = 1$ implique que $\pi_n^{11} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient $[\mathbf{A\,2}]$.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (3M^2, 3N^2)$ avec $|3(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;10]\!]$, d'où $n \in [\![1\,;3]\!]$ que nous savons impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient $[\mathbf{A\,3}]$.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (2M^2, 2N^2)$ avec $|2(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;10]\!]$, puis nécessairement $|N^2 - M^2| \in \{3, 5\}$, d'où $n \in [\![1\,;8]\!]$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient $[\mathbf{A\,4}]$.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (6M^2, 6N^2)$ avec $|6(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;10]\!]$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5. ☐

14. Avec 12 facteurs

Fait 14.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^{12} \notin {}^2\mathbb{N}$.

La démonstration suivante est très similaire à celle du cas 12.1, donc nous indiquons juste les adaptations à apporter.

Preuve. Ici nous avons moins 5 facteurs $(n+i)$ de π_n^{12} de valuation p-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ avec ici 11 un nouveau compagnon premier à prendre en compte. Ceci nous amène juste à adapter le cas où deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient $[\mathbf{A\,1}]$. Dans ce cas, nous avons $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $|N^2 - M^2| \in [\![1\,;11]\!]$. Ce qui suit lève des contradictions.

(1) $|N^2 - M^2| \in \{3, 5, 7, 8, 9\}$ se traite comme pour le cas 13.1. On sait alors que $n > 9$.

(2) Un nouveau cas est à gérer car $|N^2 - M^2| = 11$ est possible. Ceci ne se peut que si $(M, N) = (5, 6)$ ou $(M, N) = (6, 5)$, d'où $n \in [\![10\,;25]\!]$, mais nous arrivons aux contradictions suivantes.
   - $\forall n \in [\![10\,;20]\!]$, $v_{17}(\pi_n^{12}) = 1$, donc $\pi_n^{12} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.
   - $\forall n \in [\![20\,;25]\!]$, $v_{29}(\pi_n^{12}) = 1$, donc $\pi_n^{12} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux. ☐

15. Avec 13 facteurs

Fait 15.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^{13} \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve. Les arguments de la preuve du cas 14.1 s'adaptent immédiatement. □

Remarque 15.1. *Que donnerait l'analyse du cas suivant $\pi_n^{14} \notin {}^2\mathbb{N}$? Nous avons ce qui suit.*

- $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 14}$, $\forall i \in [\![0\,;13]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$.
- *Au maximum trois facteurs $(n+i)$ de π_n^{14} sont divisibles par 5 .*
- *Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^{14} sont divisibles par 7 .*
- *Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^{14} sont divisibles par 11 .*
- *Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^{14} sont divisibles par 13 . Un nouveau venu !*
- *Les points précédents nous donnent qu'au moins 5 facteurs $(n+i)$ de π_n^{14} sont de valuation p-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$. On peut donc tenter de mettre en route la même machinerie que pour le cas 14.1.*

Nous sentons donc ici la possibilité d'automatiser l'analyse de certaines situations. Ceci a été fait dans mon document « Carrés parfaits et produits d'entiers consécutifs – Jusqu'à 100 facteurs ? » *qui propose une approche informatique se basant principalement sur l'idée précédente afin de traiter les cas jusqu'à 100 facteurs, c'est-à-dire ceux supposés connus dans la démonstration de Paul Erdős.*

16. Sources utilisées

Faits 7.1, 9.1, 11.1, 12.1, 13.1, 14.1 et 15.1.
Un échange consulté le 13 février 2024, et titré *« Product of 10 consecutive integers can never be a perfect square »* sur le site `https://math.stackexchange.com` .

La démonstration indiquée est celle du fait 12.1, une preuve venant d'une source Wordpress donnée dans une réponse de cet échange, mais cette source est très expéditive...

Fait 8.1.
Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré *« product of six consecutive integers being a perfect numbers »* sur le site `https://math.stackexchange.com` .

Fait 9.1.
Un échange consulté le 3 février 2024, et titré *« Proof that the product of 7 successive positive integers is not a square »* sur le site `https://math.stackexchange.com` .

Il manque certaines justifications dans la démonstration donnée dans cet échange.

Fait 10.1.
Un échange consulté le 4 février 2024, et titré *« How to prove that the product of eight consecutive numbers can't be a number raised to exponent 4 ? »* sur le site `https://math.stackexchange.com` .

La démonstration vient de l'une des réponses de cet échange, mais la justification des deux inégalités n'est pas donnée.