PARLER DE TAB RÉDUIT OU NON CÀD SANS FACTAUER CARRÉ, DU COUP MULTUIPLICATION MÉCANIQUE ET ON RÉDUIT BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS – UNE MÉTHODE EFFICACE

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page `https://github.com/bc-writing/drafts`.

Mentions « légales »

Table des matières

Date : 25 Jan. 2024 – 6 Fév. 2024.

1. Prenons du recul

L'idée de départ est simple : il faut se concentrer sur les diviseurs sans facteur carré des facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^k = n(n+1)\cdots(n+k)$.

Définition 1.1. *Considérons* $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $(a_i)_{0\leq i\leq k} \subseteq \mathbb{N}^*$ *et* $(s_i)_{0\leq i\leq k} \subseteq {}^2_*\mathbb{N}$ *tels que* $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$, $n+i = a_i s_i$. *Ce type de situation sera résumé par le tableau suivant que nous nommerons tableau de Vogler en référence à la discussion où l'auteur a vu ce concept.*

$n+\bullet$	0	1	2	$\dots$	k
	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_k

Exemple 1.1. *Supposons avoir le tableau de Vogler suivant où* $n \in \mathbb{N}^*$.

$n+\bullet$	0	1	2	3
	2	5	6	1

Ceci résume la situation suivante.

- $\exists A \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n = 2A^2$.
- $\exists B \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n+1 = 5B^2$.
- $\exists C \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n+2 = 6C^2$.
- $\exists D \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n+3 = D^2$.

Fait 1.1. *Dans les tableaux ci-dessous, les puces* $\bullet$ *indiquent des valeurs quelconques.*

(1) *Si nous avons un tableau de Vogler du type suivant, alors* $\pi_n^{k-1} \in {}^2_*\mathbb{N}$.

$n+\bullet$	0	1	$\dots$	$k-1$	k
	$\bullet$	$\bullet$	$\dots$	$\bullet$	1

(2) *Si nous avons un tableau de Vogler du type suivant, alors* $\pi_{n+1}^{k-1} \in {}^2_*\mathbb{N}$.

$n+\bullet$	0	1	$\dots$	$k-1$	k
	1	$\bullet$	$\dots$	$\bullet$	$\bullet$

Démonstration. Immédiat via le fait **??**, car nous avons soit $n+k \in {}^2_*\mathbb{N}$, soit $n \in {}^2_*\mathbb{N}$. □

Fait 1.2. *Soit* $(n,d,a) \in (\mathbb{N}^*)^3$ *et* $i \in \mathbb{N}$. *Les tableaux de Vogler ci-après sont impossibles (les puces* $\bullet$ *indiquent des valeurs quelconques).*

(1) *Pas de facteurs carrés trop près.*

$n+\bullet$	i	$i+1$	$\dots$	$i+d-1$	$i+d$
	ad	$\bullet$	$\dots$	$\bullet$	ad

(2) *Pas de facteurs carrés pas trop loin.*

$n+\bullet$	i	$i+1$	$\dots$	$i+2d-1$	$i+2d$
	ad	$\bullet$	$\dots$	$\bullet$	ad

Démonstration. Tout est contenu dans le fait **??**.

(1) Ici, $n+i = adA^2$ et $n+i+d = adB^2$ donnent $ad(B^2 - A^2) = d$, puis $a(B^2 - A^2) = 1$, d'où $B^2 - A^2 = 1$ qui ne se peut pas car $B^2 > A^2 \geq 1$.

(2) Ici, $n+i = adA^2$ et $n+i+2d = adB^2$ donnent $ad(B^2 - A^2) = 2d$, *i.e.* $a(B^2 - A^2) = 2$, d'où $B^2 - A^2 \in \{1, 2\}$ qui est impossible.

□

Pour fabriquer des tableaux de Vogler, nous allons « multiplier » des d-tableaux de Vogler qui sont moins restrictifs ; ils sont définis comme suit.

Définition 1.2. *Soient* $(n, k, d) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^3$, $(q_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq \mathbb{N}$, $(\epsilon_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq \{0, 1\}$ *et* $(f_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq \mathbb{N}^*$ *tels que* $\forall i \in [\![0\,; k]\!]$, $n + i = d^{2q_i + \epsilon_i} f_i$ *avec* $f_i \wedge d = 1$. *Ce type de situation sera résumé par le tableau suivant que nous nommerons d-tableau de Vogler où* $d^{\epsilon_i} \in \{1, d\}$.

$n+\bullet$	0	1	2	$\dots$	k
d	d^{ϵ_0}	d^{ϵ_1}	d^{ϵ_2}	$\dots$	d^{ϵ_k}

Exemple 1.2. *Supposons avoir le* 5*-tableau de Vogler suivant où* $n \in \mathbb{N}^*$.

$n+\bullet$	0	1	2	3
5	1	5	1	1

Ceci résume la situation suivante.

- $\exists (a, A) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $A \wedge 5 = 1$ *et* $n = 5^{2a} A$.
- $\exists (b, B) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $B \wedge 5 = 1$ *et* $n + 1 = 5^{2b+1} B$.
- $\exists (c, C) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $C \wedge 5 = 1$ *et* $n + 2 = 5^{2c} C$.
- $\exists (d, D) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $D \wedge 5 = 1$ *et* $n + 3 = 5^{2d} D$.

Exemple 1.3. *La multiplication de deux d-tableaux de Vogler est « naturelle » lorsqu'elle porte sur des nombres d premiers entre eux. Considérons le* 2*-tableau de Vogler et le* 3*-tableau de Vogler suivants.*

$n+\bullet$	0	1	2	3
2	1	2	1	2

$n+\bullet$	0	1	2	3
3	3	1	1	3

La multiplication de ces d-tableaux de Vogler est le 6*-tableau de Vogler suivant.*

$n+\bullet$	0	1	2	3
6	3	2	1	6

Ceci résume la situation suivante avec des notations « évidentes » .

- $A \wedge 6 = 1$ *et* $n = 2^{2a} 3^{2\alpha+1} A$.
- $B \wedge 6 = 1$ *et* $n + 1 = 2^{2b+1} 3^{2\beta} B$.
- $C \wedge 6 = 1$ *et* $n + 2 = 2^{2c} 3^{2\gamma} C$.
- $D \wedge 6 = 1$ *et* $n + 3 = 2^{2d+1} 3^{2\delta+1} D$.

Fait 1.3. *Dans la deuxième ligne d'un d-tableau de Vogler, les valeurs d sont séparées par exactement* $(d-1)$ *valeurs* 1 .

Démonstration. Penser aux multiples de d . □

Fait 1.4. $\forall p \in \mathbb{P}$, *si* $\pi_n^k \in {}^2\mathbb{N}$, *alors dans le p-tableau de Vogler associé à* π_n^k , *le nombre de valeurs p est forcément pair.*

Démonstration. Évident, mais très pratique, comme nous le verrons dans la suite. □

2. Sources utilisées

Ce document n'aurait pas vu le jour sans la source suivante.

(1) Une discussion archivée consultée le 28 janvier 2024 :
`https://web.archive.org/web/20171110144534/http://mathforum.org/library/drmath/view/65589.html` .

Cette discussion utilise ce que nous avons nommé les tableaux de Vogler, mais le côté semi-mécanisable de leur utilisation n'est pas souligné.

PARLER DE TAB RÉDUIT OU NON CÀD SANS FACTAUER CARRÉ, DU COUP MULTUIPLICATION MÉCANIQUE ET OI

3. AFFAIRE À SUIVRE...