$\mathbb{Q}$ est dénombrable

On passe de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{Q}_+$ via les injec$^{\circ}$ $\mathbb{Q}_+ \xhookrightarrow{\text{inclusion naturelle}} \mathbb{Q}$ et $i : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_+$

déf. via $\underbrace{i\left(\frac{p}{q}\right)}$

où $p \wedge q = 1$ si $p/q \neq 0$ si besoin
et $(p;q) = (0;1)$ sinon

PREUVE 1

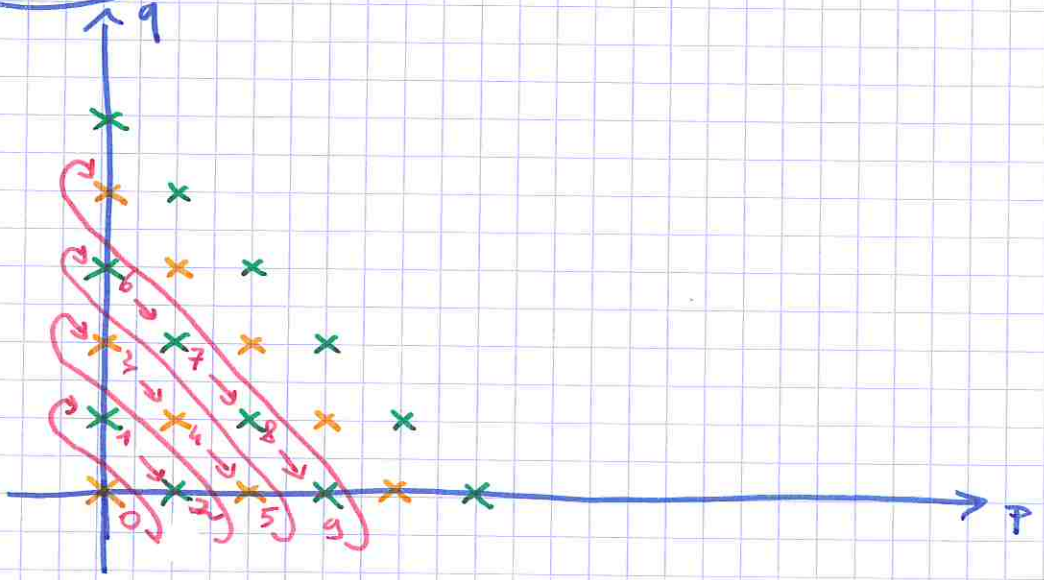
$r \in \mathbb{Q}_+^*$, $\quad r = \dfrac{\prod_i p_i^{\alpha_i}}{\prod_j q_j^{\beta_j}}$ où $\forall i, j,\ p_i \neq q_j$

$\Updownarrow$ Correspondance 1-à-1 (un à un)

$n = \prod_i p_i^{2\alpha_i} \times \prod_j q_j^{2\beta_j + 1}$

$\mathbb{Q}_+^*$ en bijec$^{\circ}$ avec $\mathbb{N}^*$ d'où $\mathbb{Q}_+$ équipotent à $\mathbb{N}$

PREUVE 2



Représenta$^{\circ}$ des $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$

Ici $0 \in \mathbb{Q}_+$ associé à $(0;0)$

Pas de $p \wedge q = 1$ nécessaire !

Intuitivement ok, mais rigoureusement il nous faut une formule.

On note NUM le numéro proposé sur le graph. pour $(p;q)$.

On voit que, et cela devient une déf. :

Déf. récu. qui fonctionne car p dim. et on a (I2) indépendant de p

(I1) • $NUM(0,0) = 0$

(I2) • $NUM(0,q) = NUM(q-1,0)+1$ si $q \neq 0$

(I3) • $NUM(p,q) = NUM(p-1,q+1)+1$ si $p \neq 0$

(I3) $\Rightarrow$ $NUM(p,q) = NUM(0,p+q)+p$ si $p \neq 0$.

On doit donc déterminer $NUM(0,k)$ pour $k \neq 0$.

(I2) $\Rightarrow$ $NUM(0,k) = NUM(k-1,0)+1$

(I3) $\Rightarrow$ $NUM(k-1,0) = NUM(0,k-1)+k-1$

Notant $u_k = NUM(0,k)$, on a donc $u_k = u_{k-1}+k$

d'où $u_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.

Finalement, $NUM(p,q) = \dfrac{(p+q)(p+q+1)}{2} + p$ dans tous les cas !

<u>Autre raisonnement</u> : sur chaque diago. descendante, $p+q=k \in \mathbb{N}$.
le point le plus haut, ie celui sur l'axe des ordo., est précédé de $1+2+\dots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ points. Comme on commence à 0 la num., ce point a pour numéro $\dfrac{k(k+1)}{2}$.

Donc $NUM(0,k) = \dfrac{k(k+1)}{2}$ comme avant. Ensuite quand p augmente de 1 sur $p+q=k$, NUM augm. aussi de 1 d'où la form. générale.

<u>A-t-on une injec° ?</u>

Supposons que $NUM(p,q) = NUM(p',q')$.

- Cas 1 : $p+q=p'+q'=k$ (on est donc sur une diago. $p+q=k$)
  Il est immédiat que $p=p'$ puis $q=q'$.

- Cas 2 : $p+q \neq p'+q'$ (on est sur deux diagos $\neq$)

On suppose $p+q < p'+q'$ (sym. de l'hypo.)

$$\underset{k}{\underset{\shortparallel}{p+q}} < \underset{k'}{\underset{\shortparallel}{p'+q'}}$$

On a alors : $k \leq K'$ où $K' = k' - 1$.

Par déf. de NUM on a finalement :

Prop. évidentes mais à dé-montrer ! $\longleftarrow$ $\left[\ \underbrace{NUM(p,q) \leq}_{\leq NUM(k,0)} NUM(K',0) < NUM(0,k') \leq NUM(p',q') \right.$ avec $k' = K'+1$

Donc $\mathbb{Q}_+$ s'injecte dans $\mathbb{N}$, et ds $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ en fait car ici on considère pas diff des écritures comme $\frac{2}{4}$ et $\frac{1}{2}$.

⚠ En tte rig., $\mathbb{Q}_+$ vu comme sous partie de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ s'injecte clairement dans $\mathbb{Q}_+$, et aussi $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, d'où $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_+$ et $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ont m̂ cardinal !

__Peut-on inverser NUM de façon calculable ?__

Intuitivement, NUM est une bijec°. Comment retrouver p et q tq $NUM(p,q) = n$ où $n \in \mathbb{N}$ est connu ?

Soit k tq $\frac{k(k+1)}{2} \leq n < \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. k existe par st. ↗ de la suite $\frac{k(k+1)}{2}$.

- Cas 1 : $n = \frac{k(k+1)}{2}$. On a directement $\overline{NUM(0,k)} = n$. (Numéros des pts sur l'axe des ords.)

- Cas 2 : $\frac{k(k+1)}{2} < n < \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ (on descend sur la diago $p+q=k$)

  On vérifie que $p = n - \frac{k(k+1)}{2}$ et $q = k - p$ conviennent !

Notons que $k = \max\{K \mid \frac{K(K+1)}{2} \leq n\}$.