CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS – DES PREUVES HUMAINES FACILES

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LaTeX, disponible sur la page *https://github.com/bc-writing/drafts*.

Mentions « légales »

Table des matières

Date : 21 Fév. 2024.

1. Ce qui nous intéresse

Dans l'article *« Note on Products of Consecutive Integers »*[1], Paul Erdős démontre que pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit de $(k+1)$ entiers consécutifs $n(n+1)\cdots(n+k)$ n'est jamais le carré d'un entier. Plus précisément, l'argument général de Paul Erdős est valable pour $k+1 \geq 100$, soit à partir de 100 facteurs.

Dans ce document, nous donnes des preuves très simples de quelques cas particuliers.

Remarque 1.1. *Dans mon document* « Carrés parfaits et produits d'entiers consécutifs – Des solutions à la main » *sont réunis d'autres preuves, plus ou moins efficaces, mais toutes intéressantes dans leur approche.*

2. Notations utilisées

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- $\forall (n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k-1} (n+i)$.
  Par exemple, $\pi_n^1 = n$, $\pi_n^2 = n(n+1)$ et $\pi_{n+2}^4 = (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$.
- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des carrés parfaits. On note aussi ${}^2_*\mathbb{N} = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
  $\mathbb{N}_{sf}$ est l'ensemble des naturels non nuls sans facteur carré[2].
- $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
  $\forall (p\,; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p-adique de n, c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n, contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m.
- $2\,\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
  $2\,\mathbb{N} + 1$ est l'ensemble des nombres naturels impairs.
- $(a \pm b)$ est un raccourci pour $(a+b)(a-b)$.

3. Les carrés parfaits

3.1. Structure.

Fait 3.1. *$n \in {}^2_*\mathbb{N}$ si, et seulement si, $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$.*

Démonstration. Immédiat à valider. □

Fait 3.2. *$\forall n \in {}^2_*\mathbb{N}$, s'il existe $m \in {}^2_*\mathbb{N}$ tel que $n = fm$ alors $f \in {}^2_*\mathbb{N}$.*

Démonstration. $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(fm) \in 2\mathbb{N}$, $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(fm) = v_p(f) + v_p(m)$ donnent $v_p(f) \in 2\mathbb{N}$. □

Fait 3.3. *$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $a \wedge b = 1$ et $ab \in {}^2_*\mathbb{N}$, alors $a \in {}^2_*\mathbb{N}$ et $b \in {}^2_*\mathbb{N}$.*

Démonstration. $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(ab) \in 2\mathbb{N}$, et p ne peut diviser à la fois a et b, donc $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(a) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(b) \in 2\mathbb{N}$, autrement dit $(a, b) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$. □

---

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).
2. En anglais, on dit « square free ».

Fait 3.4. *Soit* $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $ab \in {}^2_*\mathbb{N}$ *, ainsi que* $(\alpha, \beta, A, B) \in (\mathbb{N}_{sf})^2 \times \mathbb{N}^2$ *tel que* $a = \alpha A^2$ *et* $b = \beta B^2$*. Nous avons alors forcément* $\alpha = \beta$ *.*

Démonstration. Le fait 3.2 donne $\alpha\beta \in {}^2_*\mathbb{N}$. De plus, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(\alpha) \in \{0, 1\}$ et $v_p(\beta) \in \{0, 1\}$. Finalement, $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\alpha) = v_p(\beta)$, autrement dit $\alpha = \beta$. ☐

3.2. **Distance entre deux carrés parfaits.**

Fait 3.5. *Soit* $(M, N) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $N > M$ *.*

(1) $N^2 - M^2 \geq 2N - 1$ *, d'où l'impossibilité d'avoir* $N^2 - M^2 < 3$ *.*
(2) *Notons* nb_{sol} *le nombre de solutions* $(M, N) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *de* $N^2 - M^2 = \delta$ *.*
   Pour $\delta \in [\![1 ; 10]\!]$*, nous avons :*
   (a) $nb_{sol} = 0$ *si* $\delta \in \{1, 2, 4, 6, 10\}$ *.*
   (b) $nb_{sol} = 1$ *si* $\delta \in \{3, 5, 7, 8, 9\}$ *.*
   Par exemple, $N^2 - M^2 = 3$ *uniquement si* $(M, N) = (1, 2)$ *.*

Démonstration.

(1) Comme $N - 1 \geq M$, nous obtenons : $N^2 - M^2 \geq N^2 - (N - 1)^2 = 2N - 1$.
(2) Nous avons $2N - 1 \leq \delta$, soit $N \leq \dfrac{\delta + 1}{2}$. Ceci permet de comprendre le programme `Python` donné dans la page suivante qui sert à obtenir facilement les nombres de solutions indiqués. ☐

```python
from math import sqrt, floor

# N**2 - M**2 = diff ?
def sol(diff):
    solfound = []

    for N in range(1, (diff + 1) // 2 + 1):
        M_square = N**2 - diff

        if M_square > 0:
            M = floor(sqrt(M_square))

            if M != 0 and M**2 == M_square:
                solfound.append((M, N))

    return solfound
```

4. Avec 2 facteurs

Fait 4.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n + 1) \notin {}^2\mathbb{N}$ *.*

Preuve. Il suffit de noter que $n^2 < n(n + 1) < (n + 1)^2$. ☐

5. Avec 3 facteurs

Fait 5.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n + 1)(n + 2) \notin {}^2\mathbb{N}$ *.*

Preuve. Supposons que $\pi_n^3 \in {}^2_*\mathbb{N}$.

Posons $m = n+1$ pour « symétriser » la formule. Ceci donne $\pi_n^3 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Comme $m \wedge (m^2-1) = 1$, le fait 3.3 donne $(m, m^2-1) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$. Or, $m^2-1 \in {}^2_*\mathbb{N}$ est impossible d'après le fait 3.5. ☐

6. Avec 4 facteurs

Fait 6.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve. En « symétrisant » la formule, nous obtenons les manipulations algébriques naturelles suivantes qui vont nous permettre de conclure

$$
\begin{aligned}
\pi_n^4 &= n(n+1)(n+2)(n+3) \\
&= \left(x \pm \frac{3}{2}\right)\left(x \pm \frac{1}{2}\right) && x = n + \frac{3}{2} \\
&= \left(x^2 - \frac{9}{4}\right)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \\
&= (y \pm 1) && y = x^2 - \frac{5}{4} \text{ où } \frac{5}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} + \frac{1}{4}\right) . \\
&= y^2 - 1 \\
&= \left(n^2 + 3n + 1\right)^2 - 1 && y = \left(n + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = n^2 + 3n + 1 \\
&= m^2 - 1 && m = n^2 + 3n + 1
\end{aligned}
$$

Comme $m > 0$, $m^2 - 1 \notin {}^2\mathbb{N}$ d'après le fait 3.5, donc $\pi_n^4 \notin {}^2\mathbb{N}$. □

7. Avec 5 facteurs

Fait 7.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2_*\mathbb{N}$.

La preuve suivante s'inspire directement d'une démonstration citée via une source dans un échange sur `https://math.stackexchange.com` (voir la section 16).

Preuve. Supposons que $\pi_n^5 \in {}^2_*\mathbb{N}$.

Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$, $\forall i \in [\![0\,;4]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$. On doit donc s'intéresser à $p \in \{2, 3\}$, mais on peut observer très grossièrement qu'au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^5 sont divisibles par 3 , donc au moins 3 facteurs sont de valuation p-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$. Ces facteurs vérifient alors l'une des deux alternatives suivantes, chacune d'elles levant une contradiction.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ sont de valuations 2-adiques impairs.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (2M^2, 2N^2)$ avec $|2(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;4]\!]$, c'est-à-dire $|N^2 - M^2| \in \{1, 2\}$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ sont de valuations 2-adiques pairs.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $|N^2 - M^2| \in [\![1\,;4]\!]$, mais ceci n'est possible que si $|N^2 - M^2| = 3$ d'après le fait 3.5 qui donne aussi que soit $(M, N) = (1, 2)$, soit $(M, N) = (2, 1)$. Ceci impose d'avoir $n = 1$, mais $\pi_1^5 = 5! \notin {}^2\mathbb{N}$ car $v_5(5!) = 1$. □

8. Avec 6 facteurs

Fait 8.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^6 \notin {}^2\mathbb{N}$.

La démonstration suivante se trouve dans l'article « Solution of a Problem » [3] de G. W. Hill et J. E. Oliver. Une petite simplification a été faite pour arriver à $\pi_n^6 = (a-4)a(a+2)$.

3. The Analyst (1874).

Preuve. Supposons que $\pi_n^6 \in {}^2\mathbb{N}$.

Commençons par de petites manipulations algébriques où la première modification fait apparaître le même coefficient pour n dans chaque parenthèse.

$$\begin{aligned}
\pi_n^6 &= n(n+5)\cdot(n+1)(n+4)\cdot(n+2)(n+3) \\
&= (n^2+5n)(n^2+5n+4)(n^2+5n+6) && x = n^2+5n \in \mathbb{N}_{\geq 6} \\
&= x(x+4)(x+6) && a = x+4 \in \mathbb{N}_{\geq 10} \\
&= (a-4)a(a+2)
\end{aligned}$$

Nous avons $a \in \mathbb{N}_{\geq 10}$ vérifiant $a(a+2)(a-4) \in {}^2_*\mathbb{N}$. Posons $a = \alpha A^2$ où $(\alpha, A) \in \mathbb{N}_{sf} \times \mathbb{N}^*$, de sorte que $\alpha(\alpha A^2+2)(\alpha A^2-4) \in {}^2_*\mathbb{N}$ via le fait 3.2. Or $\alpha \in \mathbb{N}_{sf}$ donne $\alpha \mid (\alpha A^2+2)(\alpha A^2-4)$, d'où $\alpha \mid 8$, et ainsi $\alpha \in \{1, 2\}$ [4]. Nous allons voir que ceci est impossible.

Supposons que $\alpha = 1$.

- Notons les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}
& (A^2+2)(A^2-4) \in {}^2_*\mathbb{N} \\
\iff\ & (u+3)(u-3) \in {}^2_*\mathbb{N} && u = A^2-1 \text{ où } -1 = \frac{2-4}{2}\,. \\
\iff\ & u^2-9 \in {}^2_*\mathbb{N}
\end{aligned}$$

- Ensuite, prenant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = u^2-9$, le fait 3.5 donne $(u, m) = (5, 4)$ d'où la contradiction suivante.

$$\begin{aligned}
u = 5 \iff\ & A^2 - 1 = 5 && 6 \notin {}^2\mathbb{N}\,. \\
\iff\ & A^2 = 6
\end{aligned}$$

Supposons que $\alpha = 2$.

- Notons l'équivalence suivante.

$$\begin{aligned}
& 2(2A^2+2)(2A^2-4) \in {}^2_*\mathbb{N} && \textit{Via } 4\cdot 2(A^2+1)(A^2-2)\,. \\
\iff\ & 2(A^2+1)(A^2-2) \in {}^2_*\mathbb{N}
\end{aligned}$$

- Ensuite, en travaillant modulo 3 , nous avons $2(A^2+1)(A^2-2) \equiv -4 \equiv -1$ qui ne correspond pas à un carré modulo 3 . ☐

9. Avec 7 facteurs

Fait 9.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$.

Pour la preuve suivante, nous reprenons l'idée de la démonstration du cas 12.1 ; nous indiquons juste les adaptations à faire en reprenant les notations de la preuve citée.

Preuve. Ici nous avons au moins 5 facteurs $(n+i)$ de π_n^7 de valuation p-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$. Ceci nous amène aux cas suivants.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 1]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $|N^2-M^2| \in [\![1\,;6]\!]$, mais ce qui suit lève des contradictions.

  (1) $|N^2-M^2| = 3$ donne $n = 1$, mais $\pi_1^7 = 7! \notin {}^2\mathbb{N}$ via $v_7(7!) = 1$.
  (2) $|N^2-M^2| = 5$ donne $n \in [\![2\,;4]\!]$, mais $\forall n \in [\![2\,;4]\!]$, $v_7(\pi_n^7) = 1$ donne $\pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$.

4. On comprend ici le choix d'avoir $\pi_n^6 = (a-4)a(a+2)$.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 2]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (3M^2, 3N^2)$ avec $|3(N^2-M^2)| \in [\![1\,;6]\!]$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 3]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (2M^2, 2N^2)$ avec $|2(N^2-M^2)| \in [\![1\,;6]\!]$, puis nécessairement $|N^2-M^2| = 3$ qui implique $n \in [\![1\,;2]\!]$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 4]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (6M^2, 6N^2)$ avec $|6(N^2-M^2)| \in [\![1\,;6]\!]$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5. □

10. Avec 8 facteurs

Fait 10.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$.

La démonstration très astucieuse suivante est proposée dans un échange sur `https://math.stackexchange.com` (voir la section 16). Comme pour le cas de quatre facteurs, l'algèbre va nous permettre d'aller très vite.

Preuve.

- L'une des preuves du fait 6.1 nous donne $n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n+1)^2 - 1$.

  En particulier, $(n+4)(n+5)(n+6)(n+7) = (n^2+11n+29)^2 - 1$.

- L'idée astucieuse va être de considérer les deux expressions suivantes qui viennent de $\pi_n^8 = \big(f(n)^2-1\big)\big(g(n)^2-1\big)$.

  (1) $f(n) = n^2+3n+1$.

  (2) $g(n) = n^2+11n+29$.

- Nous avons les manipulations algébriques naturelles suivantes.

  $$\begin{aligned}\pi_n^8 &= \big(f(n)^2-1\big)\big(g(n)^2-1\big) && \textit{a = f(n) et b = g(n)}\,.\\ &= (a^2-1)(b^2-1) \\ &= a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 && \textit{Choisir } (a-b)^2 \textit{ au lieu de } (a+b)^2 \textit{ va nous permettre,}\\ &= a^2b^2 - (a-b)^2 - 2ab + 1 && \textit{un plus bas, de ne pas trop nous éloigner de } \pi_n^8\,.\\ &= (ab-1)^2 - (a-b)^2 && b-a \neq 0\,.\\ &< (ab-1)^2\end{aligned}$$

  Donc $\pi_n^8 < \big(f(n)g(n)-1\big)^2$.

- Le point précédent rend naturel de tenter de démontrer que $\big(f(n)g(n)-2\big)^2 < \pi_n^8$, car, si tel est le cas, π_n^8 sera encadré par les carrés de deux entiers consécutifs, et forcément nous aurons $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$. Ce qui suit montre que notre pari est gagnant dès que $n \geq 4$. Que c'est joli !

$$\begin{aligned}&\big(f(n)g(n)-2\big)^2 < \pi_n^8 && \textit{a = f(n) et b = g(n)}\,.\\ \iff\ &(ab-2)^2 < (a^2-1)(b^2-1) \\ \iff\ &a^2b^2 - 4ab + 4 < a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 \\ \iff\ &a^2 + b^2 - 4ab + 3 < 0\end{aligned}$$

Le site `https://www.wolframalpha.com` nous donne sans effort cognitif[5] ce qui suit (les « transhumanophobes » se reporteront à la remarque 10.1 qui suit).

$$\begin{aligned} & a^2+b^2-4ab+3 \\ = \; & -2(n^2+7n)^2+36(n^2+7n)+729 && m = n^2+7n \\ = \; & -2m^2+36m+729 \\ = \; & -2(m-9)^2+891 \end{aligned}$$

Or, $n^2+7n-9=0$ admet pour pour unique racine positive $n = \frac{-7+\sqrt{85}}{2} \approx 1{,}1$, donc $a^2+b^2-4ab+3$ décroît en fonction de n à partir de $n=2$. Les calculs suivants donnent alors que $a^2+b^2-4ab+3<0$ pour $n \geq 4$.

n	1	2	3	4
$-2(n^2+7n)^2+36(n^2+7n)+729$	889	729	9	-1559

- Nous venons de voir que $(ab-2)^2 < \pi_n^8 < (ab-1)^2$ sur $\mathbb{N}_{\geq 4}$, donc $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$ dès que $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$, mais pour $n \in \{1,2,3\}$, $v_7(\pi_n^8) = 1$ donne $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$, ce qui permet de conclure. □

Remarque 10.1. *Voici comment obtenir une preuve* 100 % *non silliconé. Pour cela, commençons par les manipulations algébriques naturelles suivantes qui cherchent à obtenir le même coefficient pour* n *dans chaque parenthèse, tout en passant d'un polynôme de degré* 8 *à un polynôme de degré* 4 *.*

$$\begin{aligned} \pi_n^8 &= n(n+7)\cdot(n+1)(n+6)\cdot(n+2)(n+5)\cdot(n+3)(n+4) \\ &= (n^2+7n)\cdot(n^2+7n+6)\cdot(n^2+7n+10)\cdot(n^2+7n+12) && m = n^2+7n \\ &= m(m+6)(m+10)(m+12) \end{aligned}$$

*Nous décidons d'offrir un 1*er *rôle à la variable* $m = n^2+7n$ *. Voyons où cela nous mène...*

$$\begin{aligned} & a^2+b^2-4ab+3 \\ = \; & a(a-4b)+b^2+3 && a = n^2+3n+1 = m-4n+1 \\ = \; & (m-4n+1)(-3m-20n-115)+(m+4n+29)^2+3 && b = n^2+11n+29 = m+4n+29 \\ = \; & -3m^2-(8n+118)m+(4n-1)(20n+115)+m^2+2(4n+29)m+(4n+29)^2+3 \\ = \; & -2m^2-60m+729+672n+96n^2 && \text{Ici, la magie opère...} \\ = \; & -2m^2-60m+729+96(n^2+7n) \\ = \; & -2m^2-60m+729+96m \\ = \; & -2m^2+36m+729 \end{aligned}$$

11. Avec 9 facteurs

Fait 11.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$.

L'idée suivie est celle de la démonstration du cas 12.1 ; nous indiquons juste les adaptations à faire en reprenant les notations de la preuve citée.

Preuve. Ici nous avons au moins 5 facteurs $(n+i)$ de π_n^9 de valuation p-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$. Ceci nous amène aux cas suivants.

5. Il faut vivre avec son temps...

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 1]** .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $|N^2 - M^2| \in [\![1\,;8]\!]$. Ce qui suit lève des contradictions.

  (1) $|N^2 - M^2| = 3$ donne $n = 1$, mais $\pi_1^9 = 9! \notin {}^2\mathbb{N}$ via $v_7(9!) = 1$.
  (2) $|N^2 - M^2| = 5$ donne $n \in [\![2\,;4]\!]$, mais $\forall n \in [\![2\,;4]\!]$, $v_7(\pi_n^9) = 1$ donne $\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$.
  (3) $|N^2 - M^2| = 7$ donne $n \in [\![5\,;9]\!]$, mais $\forall n \in [\![5\,;9]\!]$, $v_{11}(\pi_n^9) = 1$ donne $\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$.
  (4) $|N^2 - M^2| = 8$ donne $n = 1$, mais ceci est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 2]** .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (3M^2, 3N^2)$ avec $|3(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;8]\!]$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 3]** .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (2M^2, 2N^2)$ avec $|2(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;8]\!]$, puis nécessairement $|N^2 - M^2| = 3$ qui implique $n \in [\![1\,;2]\!]$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 4]** .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (6M^2, 6N^2)$ avec $|6(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;8]\!]$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5. □

12. Avec 10 facteurs

Fait 12.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^{10} \notin {}^2\mathbb{N}$.

La démonstration suivante, qui fait penser à la première preuve du fait 7.1, est citée via une source dans un échange sur `https://math.stackexchange.com` (voir la section 16).

Preuve. Supposons que $\pi_n^{10} \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 10}$, $\forall i \in [\![0\,;9]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$. On doit donc s'intéresser à $p \in \{2, 3, 5, 7\}$. Voici ce que l'on peut observer très grossièrement.

- Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^{10} sont divisibles par 5 .
- Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^{10} sont divisibles par 7 .
- Les points précédents donnent au moins 6 facteurs $(n+i)$ de π_n^{10} de valuation p-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$.

Nous avons alors l'une des alternatives suivantes pour chacun des 6 facteurs $(n+i)$ vérifiant $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ pour $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$.

- **[A 1]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A 2]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times \big(2\mathbb{N} + 1\big)$
- **[A 3]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N} + 1\big) \times 2\mathbb{N}$
- **[A 4]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N} + 1\big) \times \big(2\mathbb{N} + 1\big)$

Comme nous avons six facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient $[\mathbf{A\,1}]$.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $(M,N) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $N^2 - M^2 \in [\![1\,;9]\!]$. Selon le fait 3.5, seuls les cas suivants sont possibles mais ils lèvent tous une contradiction.

  (1) $N^2 - M^2 = 3$ avec $(M,N) = (1,2)$ est possible, mais ceci donne $n = 1^2 = 1$, puis $\pi_1^{10} = 10! \in {}^2\mathbb{N}$, or ceci est faux car $v_7(10!) = 1$.
  (2) $N^2 - M^2 = 5$ avec $(M,N) = (2,3)$ est possible d'où $n \in [\![1\,;4]\!]$. Nous venons de voir que $n = 1$ est impossible. De plus, pour $n \in [\![2\,;4]\!]$, $v_7(\pi_n^{10}) = 1$ montre que $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.
  (3) $N^2 - M^2 = 7$ avec $(M,N) = (3,4)$ est possible d'où $n \in [\![1\,;9]\!]$, puis $n \in [\![5\,;9]\!]$ d'après ce qui précède. Mais ici, $\forall n \in [\![5\,;9]\!]$, $v_{11}(\pi_n^{10}) = 1$ montre que $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.
  (4) $N^2 - M^2 = 8$ avec $(M,N) = (1,3)$ est possible d'où $n = 1$, mais ceci est impossible comme nous l'avons vu ci-dessus.
  (5) $N^2 - M^2 = 9$ avec $(M,N) = (4,5)$ est possible d'où $n \in [\![10\,;16]\!]$ d'après ce qui précède. Or $\forall n \in [\![10\,;16]\!]$, $v_{17}(\pi_n^{10}) = 1$, donc $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient $[\mathbf{A\,2}]$.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (3M^2, 3N^2)$ avec $(M,N) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $3(N^2 - M^2) \in [\![1\,;9]\!]$, puis $N^2 - M^2 \in [\![1\,;3]\!]$. Selon le fait 3.5, nécessairement $N^2 - M^2 = 3$ avec $(M,N) = (1,2)$, d'où $n \in [\![1\,;3]\!]$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient $[\mathbf{A\,3}]$.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (2M^2, 2N^2)$ avec $(M,N) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $2(N^2 - M^2) \in [\![1\,;9]\!]$, puis $N^2 - M^2 \in [\![1\,;4]\!]$. Selon le fait 3.5, nécessairement $N^2 - M^2 = 3$ avec $(M,N) = (1,2)$, d'où $n \in [\![1\,;2]\!]$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient $[\mathbf{A\,4}]$.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (6M^2, 6N^2)$ avec $(M,N) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $6(N^2 - M^2) \in [\![1\,;9]\!]$, puis $N^2 - M^2 = 1$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5. $\square$

13. Avec 11 facteurs

Fait 13.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^{11} \notin {}^2\mathbb{N}$.

L'idée suivie est celle de la démonstration du cas 12.1 ; nous indiquons juste les adaptations à faire en reprenant les notations de la preuve citée.

Preuve. Ici nous avons moins 6 facteurs $(n+i)$ de π_n^{11} de valuation p-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$, en notant qu'ici il y a au maximum trois facteurs $(n+i)$ de π_n^{11} divisibles par 5. Ceci nous amène aux cas suivants.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient $[\mathbf{A\,1}]$.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $|N^2 - M^2| \in [\![1\,;10]\!]$. Ce qui suit lève des contradictions.

  (1) $|N^2 - M^2| = 3$ donne $n = 1$, mais $\pi_1^{11} = 11! \notin {}^2\mathbb{N}$ via $v_{11}(11!) = 1$.

(2) $|N^2 - M^2| = 5$ donne $n \in [\![2\,;4]\!]$, mais $\forall n \in [\![2\,;4]\!]$, $v_{11}(\pi_n^{11}) = 1$ donne $\pi_n^{11} \notin {}^2\mathbb{N}$.
(3) $|N^2 - M^2| = 7$ donne $n \in [\![5\,;9]\!]$, mais $\forall n \in [\![5\,;9]\!]$, $v_{11}(\pi_n^{11}) = 1$ donne $\pi_n^{11} \notin {}^2\mathbb{N}$.
(4) $|N^2 - M^2| = 8$ donne $n = 1$, mais ceci est impossible.
(5) $|N^2 - M^2| = 9$ donne $n \in [\![10\,;16]\!]$, mais $\forall n \in [\![10\,;16]\!]$, $v_{17}(\pi_n^{11}) = 1$, donc $\pi_n^{11} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient $[\mathbf{A\,2}]$.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (3M^2, 3N^2)$ avec $|3(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;10]\!]$, d'où $n \in [\![1\,;3]\!]$ que nous savons impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient $[\mathbf{A\,3}]$.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (2M^2, 2N^2)$ avec $|2(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;10]\!]$, puis nécessairement $|N^2 - M^2| \in \{3, 5\}$, d'où $n \in [\![1\,;8]\!]$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient $[\mathbf{A\,4}]$.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (6M^2, 6N^2)$ avec $|6(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;10]\!]$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5. □

14. Avec 12 facteurs

Fait 14.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^{12} \notin {}^2\mathbb{N}$.

L'idée suivie est celle de la démonstration des cas 12.1 et 13.1 avec les changements suivants.

Preuve. Ici nous avons moins 5 facteurs $(n+i)$ de π_n^{12} de valuation p-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ avec ici 11 un nouveau compagnon premier à prendre en compte. Ceci nous amène juste à adapter le cas où deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient $[\mathbf{A\,1}]$. Dans ce cas, nous avons $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $|N^2 - M^2| \in [\![1\,;11]\!]$. Ce qui suit lève des contradictions.

(1) $|N^2 - M^2| \in \{3, 5, 7, 8, 9\}$ se traite comme pour le cas 13.1. On sait alors que $n > 9$.
(2) Un nouveau cas est à gérer car $|N^2 - M^2| = 11$ est possible. Ceci ne se peut que si $(M, N) = (5, 6)$ ou $(N, M) = (6, 5)$, d'où $n \in [\![10\,;25]\!]$, mais nous arrivons aux contradictions suivantes.
   - $\forall n \in [\![10\,;20]\!]$, $v_{17}(\pi_n^{12}) = 1$, donc $\pi_n^{12} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.
   - $\forall n \in [\![20\,;25]\!]$, $v_{29}(\pi_n^{12}) = 1$, donc $\pi_n^{12} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux. □

15. Avec 13 facteurs

Fait 15.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^{13} \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve. Les arguments de la preuve du cas 14.1 s'adaptent immédiatement. □

Remarque 15.1. *Que donnerait l'analyse du cas suivant $\pi_n^{14} \notin {}^2\mathbb{N}$? Nous avons ce qui suit.*

- $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 14}$, $\forall i \in [\![0\,;13]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$.
- *Au maximum trois facteurs $(n+i)$ de π_n^{14} sont divisibles par 5 .*
- *Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^{14} sont divisibles par 7 .*
- *Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^{14} sont divisibles par 11 .*
- *Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^{14} sont divisibles par 13 . Un nouveau venu !*
- *Les points précédents nous donnent qu'au moins 5 facteurs $(n+i)$ de π_n^{14} sont de valuation p-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$.*

Dans mon document « Carrés parfaits et produits d'entiers consécutifs – Jusqu'à 100 facteurs ? » *est proposée une approche informatique se basant principalement sur l'idée précédente pour traiter les cas jusqu'à* 100 *facteurs, c'est-à-dire ceux supposés connus dans la démonstration de Paul Erdős.*

16. Sources utilisées

Fait 6.1.
La démonstration non algébrique a été impulsée par la source du fait 9.1 donnée plus bas.

Fait 7.1.

- Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré *« n(n+1)...(n+k) est un carré ? »* sur le site `lesmathematiques.net`.

  La démonstration via le principe des tiroirs trouve sa source dans cet échange.
- Un échange consulté le 12 février 2024, et titré *« Is there an easier way of proving the product of any 5 consecutive positive integers is never a perfect square ? »* sur le site `www.quora.com/`.

  La démonstration « élémentaire » sans le principe des tiroirs vient de cet échange.
- L'article *« Le produit de 5 entiers consécutifs n'est pas le carré d'un entier. »* de T. Hayashi, Nouvelles Annales de Mathématiques, est consultable via Numdam, la bibliothèque numérique française de mathématiques.

  Cet article a fortement inspiré la longue preuve.

Fait 8.1.
Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré *« product of six consecutive integers being a perfect numbers »* sur le site `https://math.stackexchange.com`.
La courte démonstration est donnée dans cet échange. Vous y trouverez aussi un très joli argument basé sur les courbes elliptiques rationnelles.

Fait 9.1.
Un échange consulté le 3 février 2024, et titré *« Proof that the product of 7 successive positive integers is not a square »* sur le site `https://math.stackexchange.com`.
La courte démonstration est donnée dans cet échange, mais certaines justifications manquent.

Fait 10.1.
Un échange consulté le 4 février 2024, et titré *« How to prove that the product of eight consecutive numbers can't be a number raised to exponent 4 ? »* sur le site `https://math.stackexchange.com`.
La démonstration astucieuse vient de l'une des réponses de cet échange, mais la justification des deux inégalités n'est pas donnée.

Fait 12.1.
Un échange consulté le 13 février 2024, et titré *« Product of 10 consecutive integers can never be a perfect square »* sur le site `https://math.stackexchange.com`.
La démonstration vient d'une source Wordpress donnée dans une réponse de cet échange, mais cette source est très expéditive...