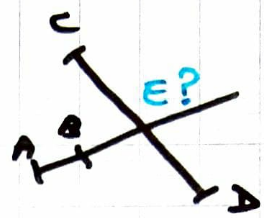
Preuve "Géo." d'existence de



① $(AB)\cap(CD)\neq\emptyset$

$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})\leq 0$

On est sur ou de part-et-d'autre de $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM})=0$.

② $[AB)\cap(CD)\neq\emptyset$

$\det(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB})\det(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})\geq 0$

on est du même côté de (CD).

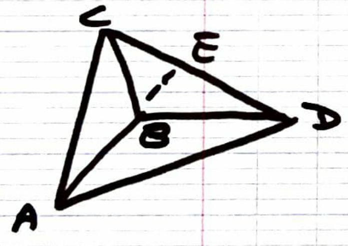
$\text{Aire}(BCD)\leq\text{Aire}(ACD)$

$\iff |\det(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB})|<|\det(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})|$

Ceci se résume si les 2 dets non nuls en :

$$0<\frac{\det(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB})}{\det(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})}\leq 1$$

③ Où E est-il ? (Ici E existe)



Lemme du chevron donne

$\frac{CE}{ED}=\frac{\text{Aire}(ABC)}{\text{Aire}(ABD)}$) via des det.

En effet, on a :

- $\text{Aire}(AEC)=h\cdot CE$
- $\text{Aire}(AED)=h\cdot ED$
- $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}$ via $ad=bc$
  $\Rightarrow ad-cd=bc-cd$
  $\Rightarrow d(a-c)=c(b-d)$
- $\text{Aire}(BCE)=\tilde{h}\cdot CE$
- $\text{Aire}(BDE)=\tilde{h}\cdot CD$

④ λ tq $\overrightarrow{CE} = \lambda \cdot \overrightarrow{CD}$

$ABC^\circ :=$ aire(ABC). On a :

$$\frac{CE}{CD} = \frac{ABC^\circ}{ABD^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{ABC^\circ}{ABD^\circ} =: k$$

$$\frac{ax+b}{cx+d} \longleftrightarrow \overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \in GL_2(\mathbb{R}) / c \cdot I_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{k \times ABD^\circ}{(1+k) \times ABD^\circ}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{ABC^\circ}{ABD^\circ + ABC^\circ}$$

Ensuite, via les aires algébriques, on a avec $\varepsilon \in \{-1; 1\}$:

- $ABC^\circ = \frac{\varepsilon}{2} \det(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$
- $ABD^\circ = \frac{\varepsilon}{2} \det(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BD})$
- $ABD^\circ + ABC^\circ = \frac{\varepsilon}{2} \left(\det(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BD}) - \det(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \right)$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \det(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD})$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \det(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CD})$$

Finalement,

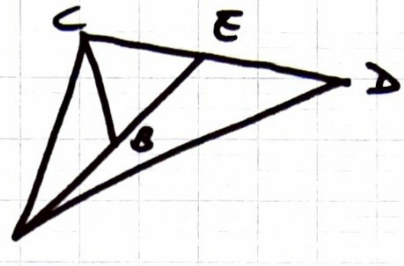
$$\lambda = \frac{\det(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})}{\det(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CD})}$$ ← ou → $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ ⚠ Tenir compte du signe.

$$= \frac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{\det(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CD})}$$

$$= \frac{\det(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{BA})}{\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})}$$

CQFV
(ce qu'il fallait (pour) Vincent)

⑤ t tq $\overrightarrow{AE} = t \cdot \overrightarrow{AB}$



$t > 0$ donne :

$$t = \frac{AE}{AB}$$

$$= \frac{ACE^\circ}{ABC^\circ} = \frac{ADE^\circ}{ABD^\circ}$$ (voir 4 pour les nota°)

$$= \frac{ACD^\circ}{ABC^\circ + ABD^\circ}$$ (via $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$: voir 3)

Les aires alg. donnent:

$\varepsilon = \pm 1$
$$\begin{cases} \bullet\ ACD^\circ = \frac{\varepsilon}{2} \det(\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CD}) \\ \bullet\ ABC^\circ + ABD^\circ = \frac{\varepsilon}{2} \det(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{CD}) \end{cases}$$ (voir 4)

Finalement,

$$t = \frac{\det(\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CD})}{\det(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{CD})}$$

$$= \frac{\det(\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{DC})}{\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD})}$$ CQFV

FORMULES PLUS JOLIES

$$s = \left| \frac{\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})}{\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD})} \right| \quad \text{et} \quad t = \left| \frac{\det(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{CD})}{\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD})} \right|$$