CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS – DES SOLUTIONS À LA MAIN

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page *https://github.com/bc-writing/drafts*.

Mentions « légales »

Table des matières

Date : 25 Jan. 2024 – 13 Fév. 2024.

1. Ce qui nous intéresse

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers » [1], Paul Erdos démontre que pour tout couple $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit de $(k+1)$ entiers consécutifs $n(n+1)\cdots(n+k)$ n'est jamais le carré d'un entier.

Dans ce document, nous proposons quelques cas particuliers résolus de façon « adaptative » à la sueur des neurones, le but recherché étant de fournir différentes approches même si parfois cela peut prendre du temps.

Remarque 1.1. *Il arrivera parfois que certaine démonstration cite d'autres preuves données plus tard dans le texte. Ceci permet de respecter les sources qui ont été utilisées.*

2. Notations utilisées

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- $\forall (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\pi_n^k = \prod\limits_{i=0}^{k-1} (n+i)$.
  Par exemple, $\pi_n^1 = n$, $\pi_n^2 = n(n+1)$ et $\pi_{n+2}^4 = (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$.
- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des carrés parfaits. On note aussi ${}^2_*\mathbb{N} = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
  $\mathbb{N}_{sf}$ est l'ensemble des naturels non nuls sans facteur carré [2].
- $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
  $\forall (p\,;n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p-adique de n, c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n, contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.
- $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m.
- $2\,\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
  $2\,\mathbb{N}+1$ est l'ensemble des nombres naturels impairs.
- $(a \pm b)$ est un raccourci pour $(a+b)(a-b)$.

---

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).
2. En anglais, on dit « square free ».

3. Les carrés parfaits

3.1. **Structure.**

Le fait suivant est immédiat.

Fait 3.1. $\forall n \in {}^2_*\mathbb{N}$ *,* $\forall p \in \mathbb{P}$ *, nous avons* $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ *.*

Fait 3.2. $\forall n \in {}^2_*\mathbb{N}$ *, s'il existe* $m \in {}^2_*\mathbb{N}$ *tel que* $n = fm$ *alors* $f \in {}^2_*\mathbb{N}$ *.*

Démonstration. $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(fm) \in 2\mathbb{N}$, $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(fm) = v_p(f) + v_p(m)$ donnent $v_p(f) \in 2\mathbb{N}$. ☐

Fait 3.3. $\forall (a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$*, si* $a \wedge b = 1$ *et* $ab \in {}^2_*\mathbb{N}$ *, alors* $a \in {}^2_*\mathbb{N}$ *et* $b \in {}^2_*\mathbb{N}$ *.*

Démonstration. $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(ab) \in 2\mathbb{N}$, et p ne peut diviser à la fois a et b , donc $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(a) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(b) \in 2\mathbb{N}$, autrement dit $(a,b) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$. ☐

Fait 3.4. *Soit* $(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $ab \in {}^2_*\mathbb{N}$ *, ainsi que* $(\alpha, \beta, A, B) \in (\mathbb{N}_{sf})^2 \times \mathbb{N}^2$ *tel que* $a = \alpha A^2$ *et* $b = \beta B^2$*. Nous avons alors forcément* $\alpha = \beta$ *.*

Démonstration. Le fait 3.2 donne $\alpha\beta \in {}^2_*\mathbb{N}$. De plus, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(\alpha) \in \{0,1\}$ et $v_p(\beta) \in \{0,1\}$. Finalement, $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\alpha) = v_p(\beta)$, autrement dit $\alpha = \beta$. ☐

3.2. **Distance entre deux carrés parfaits.**

Fait 3.5. *Soit* $(N,M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $N > M$ *.*

(1) $N^2 - M^2 \geq 2N - 1$ *, d'où l'impossibilité d'avoir* $N^2 - M^2 < 3$ *.*

(2) Notons nb_{sol} *le nombre de solutions* $(N,M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *de* $N^2 - M^2 = \delta$ *.*

Pour $\delta \in [\![1\,;20]\!]$*, nous avons :*

(a) $nb_{sol} = 0$ *si* $\delta \in \{1,2,4,6,10,14,18\}$ *.*

(b) $nb_{sol} = 1$ *si* $\delta \in \{3,5,7,8,9,11,12,13,16\}$ *. Par exemple,* $N^2 - M^2 = 3$ *uniquement si* $(N,M) = (2,1)$ *.*

(c) $nb_{sol} = 2$ *si* $\delta = 15$ *.*

Démonstration.

(1) Comme $N - 1 \geq M$, nous obtenons : $N^2 - M^2 \geq N^2 - (N-1)^2 = 2N - 1$.

(2) Nous avons $2N - 1 \leq \delta$, soit $N \leq \dfrac{\delta + 1}{2}$. Ceci permet de comprendre le programme `Python` donné dans la page suivante qui sert à obtenir facilement les nombres de solutions indiqués. ☐

Finissons par une jolie formule même si elle ne nous sera pas d'une grande aide dans la suite.

Fait 3.6. $\forall (N,M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$*, si* $N > M$ *, alors* $N^2 - M^2 = \sum_{k=M+1}^{N} (2k-1)$ *.*

Démonstration. $N^2 = \sum_{k=1}^{N} (2k-1)$ donne l'identité indiquée[3]. ☐

3. La formule utilisée est facile à démontrer algébriquement, et évidente à découvrir géométriquement.

```python
from math import sqrt, floor

def sol(diff):
    solfound = []

    for i in range(1, (diff + 1) // 2 + 1):
        tested = i**2 - diff

        if tested < 0:
            continue

        tested = floor(sqrt(i**2 - diff))

        if tested == 0:
            continue

        if tested**2 == i**2 - diff:
            solfound.append((i, tested))

    return solfound
```

4. Avec 2 facteurs

Fait 4.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1) \notin {}^{2}\mathbb{N}$.

Preuve 1. Il suffit de noter que $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$. □

Preuve 2. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1) \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$.
Comme $n \wedge (n+1) = 1$, le fait 3.3 donne $(n, n+1) \in {}^{2}_{*}\mathbb{N} \times {}^{2}_{*}\mathbb{N}$, d'où l'existence de deux carrés parfaits non nuls distants de 1 . D'après le fait 3.5, ceci est impossible. □

Preuve 3. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1) = N^2$ où $N \in \mathbb{N}^*$.
Nous obtenons une contradiction comme suit.

$$
\begin{aligned}
& n(n+1) = N^2 \\
\iff\ & 2\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{N} (2k-1) && \textit{$n(n+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k$ et $N^2 = \sum_{k=1}^{N} (2k-1)$.} \\
\iff\ & \sum_{k=1}^{n} 2k = \sum_{k=1}^{N} 2k - N && \textit{$N > n$ car $N^2 - n^2 = n > 0$.} \\
\iff\ & \sum_{k=n+1}^{N} 2k - N = 0 && \textit{$N > 0$ rend impossible la dernière égalité.} \\
\iff\ & \sum_{k=n+1}^{N-1} 2k + N = 0
\end{aligned}
$$

□

5. Avec 3 facteurs

Fait 5.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve 1. Supposons que $\pi_n^3 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Posant $m = n+1$, nous avons $\pi_n^3 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Comme $m \wedge (m^2-1) = 1$, le fait 3.3 donne $(m, m^2-1) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$. Or, $m^2 - 1 \in {}^2_*\mathbb{N}$ est impossible d'après le fait 3.5. □

Preuve 2. Supposons que $\pi_n^3 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Comme $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ ne peut diviser au maximum qu'un seul des trois facteurs n , $(n+1)$ et $(n+2)$, nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$, $\forall i \in [\![0\,;2]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$. Mais que se passe-t-il pour $p = 2$?

Supposons d'abord $n \in 2\mathbb{N}$.

- Posant $n = 2m$, nous avons $\pi_n^3 = 4m(2m+1)(m+1)$, d'où $m(2m+1)(m+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$.
- Comme $v_2(2m+1) = 0$, nous savons que $2m+1 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
- Donc $\pi_m^2 = m(m+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$ via le fait 3.2, mais le fait 4.1 interdit cela.

Supposons maintenant $n \in 2\mathbb{N}+1$.

- Nous savons que $n \in {}^2_*\mathbb{N}$ via $v_2(n) = 0$.
- On conclut comme dans le cas précédent mais en passant via $\pi_{n+1}^2 = (n+1)(n+2)$. □

6. Avec 4 facteurs

Fait 6.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve 1. Nous pouvons ici faire les manipulations algébriques naturelles suivantes qui cherchent à obtenir le même coefficient pour n dans chaque parenthèse.

$$\begin{aligned}
\pi_n^4 &= n(n+3)\cdot(n+1)(n+2) \\
&= (n^2+3n)\cdot(n^2+3n+2) \qquad m = n^2+3n \\
&= m(m+2) \\
&= m^2+2m \\
&= (m+1)^2-1
\end{aligned}$$

Comme $m > 0$, $(m+1)^2 - 1 \notin {}^2\mathbb{N}$ d'après le fait 3.5, donc $\pi_n^4 \notin {}^2\mathbb{N}$. □

Preuve 2. En « symétrisant » certaines expressions, nous obtenons d'autres manipulations algébriques qui permettent de conclure comme ci-dessus.

$$\begin{aligned}
\pi_n^4 &= n(n+1)(n+2)(n+3) \qquad x = n + \frac{3}{2} \\
&= \left(x \pm \frac{3}{2}\right)\left(x \pm \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(x^2 - \frac{9}{4}\right)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \qquad y = x^2 - \frac{5}{4} \ \textit{où}\ \frac{5}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}+\frac{1}{4}\right). \\
&= (y \pm 1) \\
&= y^2 - 1 \\
&= \left(\left(n+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right)^2 - 1 \\
&= \left(n^2+3n+1\right)^2 - 1
\end{aligned}$$

□

Un échange sur `https://math.stackexchange.com` a inspiré la démonstration non algébrique suivante (voir la section 14).

Preuve 3. Supposons que $\pi_n^4 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Clairement, nous avons les faits suivants.

- $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 4}$, $\forall i \in [\![0\,;3]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$.
- $\exists u \in \{n, n+1\}$ tel que $\{u, u+2\} \subset 2\mathbb{N}+1$.
  Nous avons alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $(v_p(u), v_p(u+2)) \in (2\mathbb{N})^2$, donc, pour tout naturel $m \in \{u, u+2\}$, il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = M^2$ ou $m = 3M^2$.
- Forcément, il existe $(A, B) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\{u, u+2\} = \{A^2, 3B^2\}$. Voici pourquoi.
  - $\{u, u+2\} = \{A^2, B^2\}$ donne deux carrés distants de 2 , ceci contredit le fait 3.5.
  - $\{u, u+2\} = \{3A^2, 3B^2\}$ donne $3A^2 - 3B^2 = \pm 2$, ce qui est impossible.

Nous savons donc que l'un des facteurs $(n+i)$ de π_n^4 possède une valuation 3-adique impaire. Ceci n'est possible que si n et $(n+3)$ ont une valuation 3-adique impaire. Dès lors, comme ci-dessus, nous avons $(Q, R) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\{n+1, n+2\} = \{Q^2, 2R^2\}$. Ceci nous amène aux deux situations contradictoires suivantes où $(A, B, C, D) \in (\mathbb{N}^*)^4$.

- Cas 1 : $(n, n+1, n+2, n+3) = (6A^2, B^2, 2C^2, 3D^2)$.
  - Posons $x = n + \frac{3}{2}$ de sorte que $x - \frac{3}{2} = 6A^2$, $x - \frac{1}{2} = B^2$, $x + \frac{1}{2} = 2C^2$ et $x + \frac{3}{2} = 3D^2$.

- Nous avons alors $\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)=2E^2$, c'est-à-dire $x^2-\frac{9}{4}=2E^2$, avec $E\in\mathbb{N}^*$.
- De même, $x^2-\frac{1}{4}=2F^2$ avec $F\in\mathbb{N}^*$.
- Par simple soustraction, nous obtenons $2F^2-2E^2=2$, puis $F^2-E^2=1$, mais ceci contredit le fait 3.5.

• Cas 2 : $(n,n+1,n+2,n+3)=(3A^2,2B^2,C^2,6D^2)$.

Un raisonnement similaire au précédent montre que ce cas aussi est impossible. $\square$

7. Avec 5 facteurs

Fait 7.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2_*\mathbb{N}$.

Preuve 1. Supposons que $\pi_n^5 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$, $\forall i \in [\![0\,;4]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$. Pour $p=2$ et $p=3$, nous avons les alternatives suivantes pour chaque facteur $(n+i)$ de π_n^5 .

- **[A 1]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A 2]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$
- **[A 3]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times 2\mathbb{N}$
- **[A 4]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$

Comme nous avons cinq facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions très facilement.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 1]** .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (N^2, M^2)$ avec $(N,M) \in \mathbb{N}^*$. On peut supposer $N > M$, de sorte que $N^2 - M^2 \in \{1,2,3,4\}$. Selon le fait 3.5, seul $N^2 - M^2 = 3$ avec $(N,M) = (2,1)$ est possible, puis nécessairement $n = 1$, or $\pi_1^5 = 5! \in {}^2\mathbb{N}$ est faux car $v_5(5!) = 1$.

  Autre méthode : on note que $n \notin {}^2_*\mathbb{N}$ car sinon $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2_*\mathbb{N}$ donne $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2_*\mathbb{N}$ via le fait 3.2, mais ceci contredit le fait 6.1. De même, $n+4 \notin {}^2_*\mathbb{N}$. Dès lors, nous avons $\{n+i, n+i'\} \subseteq \{n+1, n+2, n+3\}$, d'où l'existence de deux carrés parfaits non nuls éloignés de moins de 3 , et ceci contredit le fait 3.5.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 2]** .

  Dans ce cas, le couple de facteurs est $(n, n+3)$, ou $(n+1, n+4)$.

  (1) Supposons d'abord que n et $(n+3)$ vérifient **[A 2]** .
  Comme $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+3) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(n) \in 2\mathbb{N}+1$ et $v_3(n+3) \in 2\mathbb{N}+1$, nous avons $n = 3N^2$ et $n+3 = 3M^2$ où $(N,M) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
  Or, ceci donne $3 = 3M^2 - 3N^2$, puis $M^2 - N^2 = 1$ qui contredit le fait 3.5.

  (2) De façon analogue, on ne peut pas avoir $(n+1)$ et $(n+4)$ vérifiant **[A 2]** .

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 3]** .

  Comme dans le point précédent, c'est impossible car on aurait $2 = 2M^2 - 2N^2$, ou $4 = 2M^2 - 2N^2$ qui contredirait le fait 3.5.

  En effet, ici les couples possibles sont $(n, n+2)$, $(n, n+4)$, $(n+2, n+4)$ et $(n+1, n+3)$ [4].

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 4]** .

  Ceci donne deux facteurs différents divisibles par 6 , mais c'est impossible. □

Voici une approche la plus simple possible ne faisant pas appel au principe des tiroirs.

Preuve 2. Supposons que $\pi_n^5 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
En notant $m = n+2$, nous avons $\pi_n^5 = m(m \pm 2)(m \pm 1) = m(m^2-1)(m^2-4)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

4. A priori, rien n'empêche d'avoir n , $(n+2)$ et $(n+4)$ vérifiant tous les trois **[A 3]** .

Démontrons que $m \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$.

- Si $m \in 2\mathbb{N}+1$, nous avons clairement $m \wedge (m^2-1) = 1$ et $m \wedge (m^2-4) = 1$ (ici, la parité de m doit être utilisée). Donc $m \wedge \big((m^2-1)(m^2-4)\big) = 1$, puis $m \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$ selon le fait 3.3.
- Si $m \in 2\mathbb{N}$, alors $m \wedge (m^2-1) = 1$ et $m \wedge (m^2-4) \in \{1,2,4\}$ (ici, la parité de m ne limite pas les possibilités). Soyons plus fin. Notant $m-2 = 2A$ et $m+2 = 2B$, nous avons clairement $m \wedge A = 1 = m \wedge B$ car $m \wedge (m-2) = 2 = m \wedge (m+2)$. Comme $\pi_n^5 = 4m(m^2-1)AB$, nous avons aussi $m(m^2-1)AB \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$ via le fait 3.2, et finalement $m \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$ selon le fait 3.3 et $m \wedge \big((m^2-1)AB\big) = 1$.

Ce qui suit lève une contradiction.

- $m \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$ et $\pi_n^5 \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$ donnent $(m^2-1)(m^2-4) \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$ via le fait 3.2.
- En posant $x = m^2 \in \mathbb{N}_{\geq 9}$, nous arrivons à $(x-1)(x-4) = x^2-5x+4 \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$, mais ceci est impossible d'après l'implication suivante.

$$\begin{aligned} & x^2-5x+4 = (x-2)^2 - x \quad \text{et} \quad x^2-5x+4 = (x-3)^2 + x - 5 \\ \Longrightarrow \ & (x-3)^2 < x^2-5x+4 < (x-2)^2 \end{aligned} \qquad x-5>0 \textit{ et } x>0\,.$$

□

Voici une approche similaire à la dernière preuve du cas 6.1.

Preuve 3. Supposons que $\pi_n^5 \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$.

Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$, $\forall i \in [\![0\,;3]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$, ceci nous amène à considérer deux alternatives.

Supposons d'abord $\{n, n+2, n+4\} \subset 2\mathbb{N}+1$.

- Nous avons alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $(v_p(n), v_p(n+2), v_p(n+4)) \in (2\mathbb{N})^3$, donc, pour tout naturel $m \in \{n, n+2, n+4\}$, il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = M^2$ ou $m = 3M^2$.
- En raisonnant modulo 3 , on constate que 3 divise au maximum un seul des trois éléments de $\{n, n+2, n+4\}$, donc nous avons au moins deux carrés parfaits dans $\{n, n+2, n+4\}$, mais ceci contredit le fait 3.5 (deux carrés parfaits ne sont jamais distants de 2 ou 4).

Supposons maintenant $\{n+1, n+3\} \subset 2\mathbb{N}+1$.

- Comme ci-dessus, soit $(n+1, n+3) = (A^2, 3B^2)$, soit $(n+1, n+3) = (3A^2, B^2)$, avec $(A,B) \in (\mathbb{N}^*)^2$, car $(n+1, n+3) = (A^2, B^2)$ est impossible.
- Supposons $(n+1, n+3) = (A^2, 3B^2)$. Ce qui suit lève alors une contradiction.
  - Forcément, $n = 3C^2$ ou $n = 6C^2$ avec $C \in \mathbb{N}^*$. Le fait 3.5 impose d'avoir $n = 6C^2$.
  - Donc $\{n+2, n+4\} \subset 2\mathbb{N} - 3\mathbb{N}$, puis, via le fait 3.5, $\{n+2, n+4\} = \{D^2, 2E^2\}$ avec $(D,E) \in (\mathbb{N}^*)^2$ nécessairement.
  - $(n+1)$ et $(n+2)$ étant trop proches pour être tous les deux des carrés parfaits, nous arrivons à $(n+2, n+4) = (2D^2, E^2)$.
  - Or $n+4 \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$ et $\pi_n^5 \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$ donnent $\pi_n^4 \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$ d'après le fait 3.2, mais ceci contredit le fait 6.1.
- Forcément, $(n+1, n+3) = (3A^2, B^2)$, mais ce qui suit lève une nouvelle contradiction via une démarche similaire à la précédente.
  - Forcément, $n+4 = 6C^2$ avec $C \in \mathbb{N}^*$.
  - Ensuite, $(n, n+2) = (D^2, 2E^2)$ avec $(D,E) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

– $n \in {}^2_*\mathbb{N}$ et $\pi_n^5 \in {}^2_*\mathbb{N}$ donnent $\pi_{n+1}^4 \in {}^2_*\mathbb{N}$, ce qui est faux. □

Bien que longue, la preuve suivante se comprend bien, car nous ne faisons qu'avancer à vue, mais avec rigueur.

Preuve 4. Supposons que $\pi_n^5 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Posant $m = n + 2$, nous avons $\pi_n^5 = m(m \pm 2)(m \pm 1) = m(m^2 - 1)(m^2 - 4)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Pour la suite, on pose $u = m^2 - 1$ et $q = m^2 - 4$.

Notons que $u \notin {}^2_*\mathbb{N}$ et $q \notin {}^2_*\mathbb{N}$.

- $u \in {}^2_*\mathbb{N}$ donne $m^2 - 1 \in {}^2_*\mathbb{N}$ qui est impossible d'après le fait 3.5.
- $q \in {}^2_*\mathbb{N}$ donne $m^2 - 4 \in {}^2_*\mathbb{N}$ qui est impossible d'après le fait 3.5.

Supposons d'abord que $m \in {}^2_*\mathbb{N}$.

- De $muq \in {}^2_*\mathbb{N}$, nous déduisons que $uq \in {}^2_*\mathbb{N}$ via le fait 3.2.
- Comme $u - q = 3$, nous savons que $u \wedge q \in \{1, 3\}$.
- Si $u \wedge q = 1$, alors $(u, q) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$ d'après le fait 3.3, mais ceci est impossible.
- Si $u \wedge q = 3$, alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(u) \in 2\mathbb{N}+1$ et $v_3(q) \in 2\mathbb{N} + 1$, car $u \notin {}^2_*\mathbb{N}$ et $q \notin {}^2_*\mathbb{N}$. Donc $u = 3U^2$ et $q = 3Q^2$ avec $(U, Q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Or $u - q = 3$ donne $U^2 - Q^2 = 1$, et le fait 3.5 nous indique une contradiction.

Supposons maintenant que $m \notin {}^2_*\mathbb{N}$.

- Donc $m = \alpha M^2$, $u = \beta U^2$, $q = \gamma Q^2$ où $(M, U, Q) \in (\mathbb{N}^*)^3$ et $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathbb{N}_{sf} \cap \mathbb{N}_{>1}$.
- Notons que $\beta \neq \gamma$, car, dans le cas contraire, $3 = u - q = \beta\big(U^2 - Q^2\big)$ fournirait $\beta = 3$ puis $U^2 - Q^2 = 1$, et ceci contredirait le fait 3.5.
- Nous avons $m \wedge u = 1$, $m \wedge q \in \{1, 2, 4\}$ et $u \wedge q \in \{1, 3\}$ avec $m \wedge u = m \wedge q = u \wedge q = 1$ impossible car sinon on aurait $(m, u, q) \in ({}^2_*\mathbb{N})^3$ via $muq \in {}^2_*\mathbb{N}$ et le fait 3.3.
- Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$, $\big(v_p(m), v_p(u), v_p(q)\big) \in (2\mathbb{N})^3$.
- Les points précédents donnent $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$ avec de plus $\beta \neq \gamma$, ainsi que $\alpha \wedge \beta = 1$, $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2\}$ et $\beta \wedge \gamma \in \{1, 3\}$. Notons au passage que $\alpha \wedge \beta = 1$ implique $(\alpha, \beta) = (2, 3)$, ou $(\alpha, \beta) = (3, 2)$. Via le tableau « mécanique » ci-après, nous obtenons que forcément $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$ ou $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$. Le plus dur est fait !

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	*Statut*
2	3	2	1	2	1	✓
2	3	6	1	2	3	✓
3	2	3	1	3	1	☒
3	2	6	1	3	2	☒

- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$ nous donne $m = 2M^2$, $u = 3U^2$ et $q = 2Q^2$, d'où la contradiction $3 \cdot 4M^2U^2Q^2 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$ nous donne $m = 2M^2$, $m^2 - 1 = 3U^2$ et $m^2 - 4 = 6Q^2$, mais ce qui suit lève une autre contradiction.
  – Travaillons modulo 3 . Nous avons $m \equiv 2M^2 \equiv 0$ ou -1 . Or $m^2 - 1 = 3U^2$ donne $m^2 \equiv 1$, d'où $m \equiv -1$, puis $3 \mid m - 2$, et enfin $6 \mid m - 2$ puisque m est pair.
  – Posant $m - 2 = 6r$ et notant $s = m + 2$, nous avons $6rs = 6Q^2$, puis $rs = Q^2$.

- $s \notin {}^2_*\mathbb{N}$. Sinon $(m-2)(m-1)m(m+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$ via $(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) \in {}^2_*\mathbb{N}$ et le fait 3.2, mais ceci ne se peut pas d'après le fait 6.1.
- Les deux résultats précédents et le fait 3.4 donnent $(\pi, R, S) \in \mathbb{N}_{sf} \times (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $r = \pi R^2$ et $s = \pi S^2$ avec $\pi \in \mathbb{N}_{>1}$.
- Dès lors, $4 = s - 6r = \pi(S^2 - 6R^2)$ donne $\pi = 2$, d'où $m + 2 = 2S^2$.
- Finalement, $m = 2M^2$ et $m + 2 = 2S^2$ donnent $2 = 2(S^2 - M^2)$, soit $1 = S^2 - M^2$, ce qui contredit le fait 3.5. $\square$

8. Avec 6 facteurs

Fait 8.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^6 \notin {}^2\mathbb{N}$.

La démonstration suivante se trouve dans l'article « Solution of a Problem »[5] de G. W. Hill et J. E. Oliver. Une petite simplification a été faite pour arriver à $\pi_n^6 = (a-4)a(a+2)$.

Preuve 1. Supposons que $\pi_n^6 \in {}^2\mathbb{N}$.

Commençons par de petites manipulations algébriques où la première modification fait apparaître le même coefficient pour n dans chaque parenthèse.

$$\begin{aligned}
\pi_n^6 &= n(n+5)\cdot(n+1)(n+4)\cdot(n+2)(n+3) \\
&= (n^2+5n)(n^2+5n+4)(n^2+5n+6) && \color{blue}{x = n^2+5n \in \mathbb{N}_{\geq 6}} \\
&= x(x+4)(x+6) && \color{blue}{a = x+4 \in \mathbb{N}_{\geq 10}} \\
&= (a-4)a(a+2)
\end{aligned}$$

Nous avons $a \in \mathbb{N}_{\geq 10}$ vérifiant $a(a+2)(a-4) \in {}^2_*\mathbb{N}$. Posons $a = \alpha A^2$ où $(\alpha, A) \in \mathbb{N}_{sf} \times \mathbb{N}^*$, de sorte que $\alpha(\alpha A^2+2)(\alpha A^2-4) \in {}^2_*\mathbb{N}$ via le fait 3.2. Or $\alpha \in \mathbb{N}_{sf}$ donne $\alpha \mid (\alpha A^2+2)(\alpha A^2-4)$, d'où $\alpha \mid 8$, et ainsi $\alpha \in \{1, 2\}$[6]. Nous allons voir que ceci est impossible.

Supposons que $\alpha = 1$.

- Notons les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}
& (A^2+2)(A^2-4) \in {}^2_*\mathbb{N} \\
\iff\ & (u+3)(u-3) \in {}^2_*\mathbb{N} && \color{blue}{u = A^2-1 \ \textit{où}\ -1 = \frac{2-4}{2}\,.} \\
\iff\ & u^2-9 \in {}^2_*\mathbb{N}
\end{aligned}$$

- Ensuite, prenant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = u^2-9$, le fait 3.5 donne $(u, m) = (5, 4)$ d'où la contradiction suivante.

$$\begin{aligned}
u = 5 \iff\ & A^2 - 1 = 5 \\
\iff\ & A^2 = 6 && \color{blue}{6 \notin {}^2\mathbb{N}\,.}
\end{aligned}$$

Supposons que $\alpha = 2$.

- Notons l'équivalence suivante.

$$\begin{aligned}
& 2(2A^2+2)(2A^2-4) \in {}^2_*\mathbb{N} \\
\iff\ & 2(A^2+1)(A^2-2) \in {}^2_*\mathbb{N} && \color{blue}{\textit{Via}\ 4\cdot 2(A^2+1)(A^2-2)\,.}
\end{aligned}$$

- Ensuite, en travaillant modulo 3 , nous avons $2(A^2+1)(A^2-2) \equiv -4 \equiv -1$ qui ne correspond pas à un carré modulo 3 . □

Preuve 2. Se reporter à la preuve du cas 9.1 qui s'adapte mot pour mot au cas présent mais en considérant $u \in \{n, n+1\}$ tel que $\{u, u+2, u+4\} \subset 2\mathbb{N}+1$. □

Bien que très longue[7], la preuve suivante est simple à comprendre car elle ne fait que dérouler le fil des faits découverts.

Preuve 3. Supposons que $\pi_n^6 \in {}^2\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
& \pi_n^6 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \\
\iff\ & \pi_n^6 = \left(x \pm \frac{5}{2}\right)\left(x \pm \frac{3}{2}\right)\left(x \pm \frac{1}{2}\right) && \color{blue}{x = n+2+\frac{1}{2}\ \textit{(on symétrise la formule).}}
\end{aligned}$$

5. The Analyst (1874).
6. On comprend ici le choix d'avoir $\pi_n^6 = (a-4)a(a+2)$.
7. Ce sera notre dernière tentative de démonstration à faible empreinte cognitive.

$$
\begin{aligned}
& \pi_n^6 = \left(x \pm \frac{5}{2}\right)\left(x \pm \frac{3}{2}\right)\left(x \pm \frac{1}{2}\right) && \\
\iff & 2^6\pi_n^6 = (y \pm 5)(y \pm 3)(y \pm 1) && \color{blue}{y = 2x \text{ (on chasse les fractions).}} \\
& 2^6\pi_n^6 = (y \pm 5)(y \pm 3)(y \pm 1) && \\
\iff & 2^6\pi_n^6 = (z - 25)(z - 9)(z - 1) && \color{blue}{z = y^2} \\
\iff & 2^6\pi_n^6 = (u - 8)(u + 8)(u + 16) && \color{blue}{u = z - 17 \text{ où } 17 = \frac{25+9}{2} .}
\end{aligned}
$$

Notant $a = u - 8$, $b = u + 8$ et $c = u + 16$, où $u = (2n+5)^2 - 17 \in 2\mathbb{N}$, nous avons les faits suivants.

- $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$ car $(2+5)^2 - 17 = 32$.
- $(a, b, c) \in \left(\mathbb{N}_{\geq 24}\right)^3$ avec $abc \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$ puisque $2^6\pi_n^6 \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$.
- $a \wedge b \mid 16$ via $b - a = 16$.
- $a \wedge c \mid 24$ via $c - a = 24$.
- $b \wedge c \mid 8$ via $c - b = 8$.
- En particulier, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) \in (2\mathbb{N})^3$.

Démontrons qu'aucun des trois entiers a , b et c ne peut être un carré parfait.

- Commençons par supposer que $a \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$.

  Dans ce cas, $bc \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$ via le fait 3.2, soit $(u+8)(u+16) \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$. En posant $w = u + 12$, on arrive à $(w-4)(w+4) \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$, soit $w^2 - 16 \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$, d'où $(w, m) = (5, 3)$ grâce au fait 3.5. Or $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$ donne $w \in \mathbb{N}_{\geq 20}$, d'où une contradiction.

- Supposons maintenant que $b \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$.

  Dans ce cas, $ac \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$, soit $(u-8)(u+16) \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$. En posant $w = u + 4$, on arrive à $(w-12)(w+12) \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$, soit $w^2 - 144 \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$. Notant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = w^2 - 144$, nous arrivons à $w^2 - m^2 = 144$, d'où $(w, m) \in \{(13, 5), (15, 9), (20, 16), (37, 35)\}$ [8]. Comme $u \in 2\mathbb{N}$ donne $w \in 2\mathbb{N}$, nécessairement $(w, m) = (20, 16)$, mais les équivalences suivantes lèvent une contradiction.

  $$
  \begin{aligned}
  u + 4 = 20 \iff & u = 16 && \\
  \iff & (2n+5)^2 - 17 = 16 && \\
  \iff & (2n+5)^2 = 33 && \color{blue}{33 \notin {}^{2}\mathbb{N}}
  \end{aligned}
  $$

- Supposons enfin que $c \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$.

  Dans ce cas, $ab \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$, soit $(u-8)(u+8) \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$, c'est-à-dire $u^2 - 64 \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$. Notant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = u^2 - 64$, nous arrivons à $u^2 - m^2 = 64$. Ceci n'est possible que si $(u, m) \in \{(10, 6), (17, 15)\}$. Or $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$ donne une contradiction.

Donc $a = \alpha A^2$, $b = \beta B^2$ et $c = \gamma C^2$ avec $(A, B, C) \in (\mathbb{N}^*)^3$ et $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathbb{N}_{sf} \cap \mathbb{N}_{>1}$, ceci nous donnant les faits suivants.

- $\alpha \wedge \beta \in \{1, 2\}$ d'après $a \wedge b \mid 16$.
- $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2, 3\}$ d'après $a \wedge c \mid 24$.
- $\beta \wedge \gamma \in \{1, 2\}$ d'après $b \wedge c \mid 8$.
- $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$ car $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) \in (2\mathbb{N})^3$.

8. Le programme reproduit après la preuve du fait 3.5 donne rapidement cet ensemble de couples.

En fait, α , β et γ sont différents deux à deux.

- Démontrons que $\alpha \neq \beta$.
  Dans le cas contraire, $16 = b - a = \alpha(B^2 - A^2)$ et $\alpha > 1$ donnent $B^2 - A^2 \in \{1, 2, 4, 8\}$, puis forcément $B^2 - A^2 = 8$ avec $(B, A) = (3, 1)$ d'après le fait 3.5. Comme de plus, $\alpha = 2$, nous obtenons $a = 2$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.
- Nous avons aussi $\beta \neq \gamma$.
  Dans le cas contraire, $8 = c - b = \beta(C^2 - B^2)$ et $\beta > 1$ donnent $C^2 - B^2 \in \{1, 2, 4\}$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5.
- Enfin, $\alpha \neq \gamma$.
  Dans le cas contraire, $C^2 - A^2 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ car $24 = c - a = \alpha(C^2 - A^2)$ et $\alpha > 1$. Le fait 3.5 ne laisse plus que les possibilités suivantes.
  (1) $C^2 - A^2 = 3$ n'est possible que si $(C, A) = (2, 1)$. Comme de plus $\alpha = 8$, nous avons $a = 8$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.
  (2) $C^2 - A^2 = 8$ n'est possible que si $(C, A) = (3, 1)$. Comme de plus $\alpha = 3$, nous avons $a = 3$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.
  (3) $C^2 - A^2 = 12$ n'est possible que si $(C, A) = (4, 2)$. Comme de plus $\alpha = 2$, nous avons $a = 8$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.

Comme $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$, $\alpha \wedge \beta \in \{1, 2\}$, $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2, 3\}$ et $\beta \wedge \gamma \in \{1, 2\}$, et comme de plus α , β et γ sont différents deux à deux, il ne nous reste plus qu'à analyser les cas suivants. La lumière est proche...

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	*Statut*
2	3	6	1	2	3	☒
2	6	3	2	1	3	☒
3	2	6	1	3	2	✓
3	6	2	3	1	2	☒
6	2	3	2	3	1	✓
6	3	2	3	2	1	☒

Traitons les deux cas restants en nous souvenant que $a = u - 8$, $b = u + 8$ et $c = u + 16$.

- Supposons $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, 2, 6)$, autrement dit $a = 3A^2$, $b = 2B^2$ et $c = 6C^2$.
  Travaillons modulo 3 afin de lever une contradiction.
  (1) $a \equiv u - 2$ et $a \equiv 3A^2 \equiv 0$ donnent $u \equiv 2$.
  (2) D'autre part, $b \equiv 2B^2 \equiv 0$ ou 2 . Or $b \equiv u + 2 \equiv 1$ lève une contradiction.
- Supposons $(\alpha, \beta, \gamma) = (6, 2, 3)$, autrement dit $a = 6A^2$, $b = 2B^2$ et $c = 3C^2$.
  La preuve précédente s'adapte directement car $a \equiv 6A^2 \equiv 0$ et $b \equiv 2B^2$ modulo 3 . □

9. Avec 7 facteurs

Fait 9.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$.

La très jolie démonstration suivante vient d'un échange sur `https://math.stackexchange.com` (voir la section 14). Nous avons comblé les trous en apportant de petites simplifications.

Preuve. Supposons que $\pi_n^7 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Commençons par quelques observations immédiates.

- $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 7}$, $\forall i \in [\![0\,;6]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$.
- $\exists u \in \{n, n+1, n+2\}$ tel que $\{u, u+2, u+4\} \subset 2\mathbb{N}+1$.
  Nous avons alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3,5\}$, $(v_p(u), v_p(u+2), v_p(u+4)) \in (2\mathbb{N})^3$. Cette astuce permet de passer de la gestion des trois nombres premiers 2 , 3 et 5 à celle de 3 et 5 . Donc, pour tout naturel $m \in \{u, u+2, u+4\}$, il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = M^2$, $m = 3M^2$, $m = 5M^2$ ou $m = 15M^2$.
- Parmi les trois naturels u , $u+2$ et $u+4$, ...
  - il en existe un, et un seul, divisible par 3 , comme on le constate vite en raisonnant modulo 3 ,
  - au plus un est divisible par 5 ,
  - au plus un est un carrée parfait d'après le fait 3.5.

Donc, il existe $(M, P, Q) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $\{u, u+2, u+4\} = \{M^2, 3P^2, 5Q^2\}$. Ceci permet de considérer les trois cas suivants qui lèvent tous une contradiction.

- Supposons avoir $u = M^2$.
  (1) Comme $\{u+2, u+4\} = \{3P^2, 5Q^2\}$, nous savons que $3 \nmid (u+3)$ et $5 \nmid (u+3)$, d'où $u+3 = 2^a A^2$ avec $(a, A) \in \mathbb{N} \times (2\mathbb{N}+1)$.
  (2) Modulo 8 , $u \equiv M^2 \equiv 1$ car $u \in 2\mathbb{N}+1$, donc $u+3 \equiv 4$, d'où $a = 2$.
  (3) Dès lors, $u+3 \in {}^2\mathbb{N}$, puis $(u, u+3) = (1, 4)$ via le fait 3.5.
  (4) Nous arrivons à $n = u = 1$, mais $v_7(\pi_1^7) = 1$ contredit l'hypothèse $\pi_n^7 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
- Supposons maintenant que $u+2 = M^2$.
  Ce qui suit démontre que $\{u, u+4\} = \{3P^2, 5Q^2\}$ est impossible.
  (1) Si $(u, u+4) = (3P^2, 5Q^2)$, alors, comme $u \in 2\mathbb{N}+1$, nous avons, modulo 4 , $u \equiv 3$ et $u+4 \equiv 1$ qui se contredisent.
  (2) Si $(u, u+4) = (5Q^2, 3P^2)$, on raisonne de même.
- Supposons enfin que $u+4 = M^2$.
  Démontrons que $\{u, u+2\} = \{3P^2, 5Q^2\}$ est impossible en raisonnant modulo 8 .
  (1) $u+4 \equiv M^2 \equiv 1$ via $u \in 2\mathbb{N}+1$, d'où $u+3 \equiv 0$.
  (2) $u+2 \in \{3P^2, 5Q^2\}$ donne $u+2 \equiv 3$ ou 5 via $u \in 2\mathbb{N}+1$.
  (3) Les deux points précédents se contredisent. □

10. Avec 8 facteurs

Fait 10.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$.

La démonstration très astucieuse suivante est proposée dans un échange sur `https://math.stackexchange.com` (voir la section 14). Comme pour le cas de quatre facteurs, l'algèbre va nous permettre d'aller très vite.

Preuve.

- L'une des preuves du fait 6.1 nous donne $n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n+1)^2 - 1$.

  En particulier, $(n+4)(n+5)(n+6)(n+7) = (n^2+11n+29)^2 - 1$.
- L'idée astucieuse va être de considérer les deux expressions suivantes qui viennent de $\pi_n^8 = \big(f(n)^2 - 1\big)\big(g(n)^2 - 1\big)$.
  (1) $f(n) = n^2 + 3n + 1$.
  (2) $g(n) = n^2 + 11n + 29$.
- Nous avons les manipulations algébriques naturelles suivantes.

$$\begin{aligned}
\pi_n^8 &= \big(f(n)^2 - 1\big)\big(g(n)^2 - 1\big) && \textit{a = f(n) et b = g(n) .}\\
&= (a^2-1)(b^2-1) \\
&= a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 && \textit{Choisir } (a-b)^2 \textit{ au lieu de } (a+b)^2 \textit{ va nous permettre,}\\
&= a^2b^2 - (a-b)^2 - 2ab + 1 && \textit{un plus bas, de ne pas trop nous éloigner de } \pi_n^8 .\\
&= (ab-1)^2 - (a-b)^2 && b - a \neq 0 .\\
&< (ab-1)^2
\end{aligned}$$

  Donc $\pi_n^8 < \big(f(n)g(n) - 1\big)^2$.
- Le point précédent rend naturel de tenter de démontrer que $\big(f(n)g(n) - 2\big)^2 < \pi_n^8$, car, si tel est le cas, π_n^8 sera encadré par les carrés de deux entiers consécutifs, et forcément nous aurons $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$. Ce qui suit montre que notre pari est gagnant dès que $n \geq 4$. Que c'est joli !

$$\begin{aligned}
& \big(f(n)g(n) - 2\big)^2 < \pi_n^8 && \textit{a = f(n) et b = g(n) .}\\
\iff\ & (ab-2)^2 < (a^2-1)(b^2-1) \\
\iff\ & a^2b^2 - 4ab + 4 < a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 \\
\iff\ & a^2 + b^2 - 4ab + 3 < 0
\end{aligned}$$

  Le site `https://www.wolframalpha.com` nous donne sans effort cognitif[9] ce qui suit (les « transhumanophobes » se reporteront à la remarque 10.1 qui suit).

$$\begin{aligned}
& a^2 + b^2 - 4ab + 3 \\
=\ & -2(n^2+7n)^2 + 36(n^2+7n) + 729 && m = n^2 + 7n\\
=\ & -2m^2 + 36m + 729 \\
=\ & -2(m-9)^2 + 891
\end{aligned}$$

  Or, $n^2 + 7n - 9 = 0$ admet pour pour unique racine positive $n = \frac{-7+\sqrt{85}}{2} \approx 1{,}1$, donc $a^2+b^2-4ab+3$ décroît en fonction de n à partir de $n=2$. Les calculs suivants donnent alors que $a^2+b^2-4ab+3 < 0$ pour $n \geq 4$.

9. Il faut vivre avec son temps...

n	1	2	3	4
$-2(n^2+7n)^2+36(n^2+7n)+729$	889	729	9	-1559

- Nous venons de voir que $(ab-2)^2 < \pi_n^8 < (ab-1)^2$ sur $\mathbb{N}_{\geq 4}$, donc $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$ dès que $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$, mais pour $n \in \{1,2,3\}$, $v_7(\pi_n^8) = 1$ donne $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$, ce qui permet de conclure. $\square$

Remarque 10.1. *Voici comment obtenir une preuve* 100 % *non silliconé. Pour cela, commençons par les manipulations algébriques naturelles suivantes qui cherchent à obtenir le même coefficient pour* n *dans chaque parenthèse, tout en passant d'un polynôme de degré* 8 *à un polynôme de degré* 4 *.*

$$\begin{aligned}
\pi_n^8 &= n(n+7)\cdot(n+1)(n+6)\cdot(n+2)(n+5)\cdot(n+3)(n+4) \\
&= (n^2+7n)\cdot(n^2+7n+6)\cdot(n^2+7n+10)\cdot(n^2+7n+12) \\
&= m(m+6)(m+10)(m+12)
\end{aligned}$$

$m = n^2 + 7n$

Nous décidons d'offrir un 1er *rôle à la variable* $m = n^2 + 7n$ *. Voyons où cela nous mène...*

$$\begin{aligned}
& a^2+b^2-4ab+3 \\
={}& a(a-4b)+b^2+3 \\
={}& (m-4n+1)(-3m-20n-115)+(m+4n+29)^2+3 \\
={}& -3m^2-(8n+118)m+(4n-1)(20n+115)+m^2+2(4n+29)m+(4n+29)^2+3 \\
={}& -2m^2-60m+729+672n+96n^2 \\
={}& -2m^2-60m+729+96(n^2+7n) \\
={}& -2m^2-60m+729+96m \\
={}& -2m^2+36m+729
\end{aligned}$$

$a = n^2+3n+1 = m-4n+1$
$b = n^2+11n+29 = m+4n+29$

Là, cela devient magique !

11. Avec 9 facteurs

Fait 11.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$.

L'idée suivie est celle de la démonstration du cas 12.1 ; nous indiquons juste les adaptations à faire en reprenant les notations de la preuve citée.

Preuve. Ici nous avons au moins 5 facteurs $(n+i)$ de π_n^9 non divisibles par 5 et 7 . Ceci nous amène aux cas suivants.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 1]** .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (N^2, M^2)$ avec $|N^2 - M^2| \in [\![1\,;8]\!]$. Ce qui suit lève des contradictions.

  (1) $N^2 - M^2 = 3$ donne $n = 1$, mais $\pi_1^9 = 9! \notin {}^2\mathbb{N}$ via $v_7(9!) = 1$.
  (2) $N^2 - M^2 = 5$ donne $n \in [\![2\,;4]\!]$, mais $\forall n \in [\![2\,;4]\!]$, $v_7(\pi_n^9) = 1$ donne $\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$.
  (3) $N^2 - M^2 = 7$ donne $n \in [\![5\,;9]\!]$, mais $\forall n \in [\![5\,;9]\!]$, $v_{11}(\pi_n^9) = 1$ donne $\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$.
  (4) $N^2 - M^2 = 8$ donne $n = 1$, mais ceci est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 2]** .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (3N^2, 3M^2)$ avec $|3(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;8]\!]$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 3]** .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (2N^2, 2M^2)$ avec $|2(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;8]\!]$, puis nécessairement $|N^2 - M^2| = 3$ qui implique $n \in [\![1\,;2]\!]$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 4]** .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (6N^2, 6M^2)$ avec $|6(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;9]\!]$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5. □

12. Avec 10 facteurs

Fait 12.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^{10} \notin {}^2\mathbb{N}$.

La démonstration suivante, qui fait penser à la première preuve du fait 7.1, est citée via une source dans un échange sur `https://math.stackexchange.com` (voir la section 14).

Preuve. Supposons que $\pi_n^{10} \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 10}$, $\forall i \in [\![0\,;9]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$. On doit donc s'intéresser à $p \in \{2, 3, 5, 7\}$. Voici ce que l'on peut observer très grossièrement.

- Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^{10} sont divisibles par 5.
- Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^{10} sont divisibles par 7.
- Les points précédents donnent au moins 6 facteurs $(n+i)$ de π_n^{10} non divisibles par 5 et 7, c'est-à-dire du type $2^\alpha 3^\beta C^2$ avec $(\alpha, \beta, C) \in (\mathbb{N}^*)^3$.

Nous avons alors l'une des alternatives suivantes pour chacun des 6 facteurs $(n+i)$ vérifiant $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ pour $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$.

- **[A 1]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A 2]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$
- **[A 3]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times 2\mathbb{N}$
- **[A 4]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$

Comme nous avons six facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 1]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (N^2, M^2)$ avec $(N, M) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $N^2 - M^2 \in [\![1\,;9]\!]$. Selon le fait 3.5, seuls les cas suivants sont possibles mais ils lèvent tous une contradiction.

  (1) $N^2 - M^2 = 3$ avec $(N, M) = (2, 1)$ est possible, mais ceci donne $n = 1^2 = 1$, puis $\pi_1^{10} = 10! \in {}^2\mathbb{N}$, or ceci est faux car $v_7(10!) = 1$.
  (2) $N^2 - M^2 = 5$ avec $(N, M) = (3, 2)$ est possible d'où $n \in [\![1\,;4]\!]$. Nous venons de voir que $n = 1$ est impossible. De plus, pour $n \in [\![2\,;4]\!]$, $v_7(\pi_n^{10}) = 1$ montre que $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.
  (3) $N^2 - M^2 = 7$ avec $(N, M) = (4, 3)$ est possible d'où $n \in [\![1\,;9]\!]$, puis $n \in [\![5\,;9]\!]$ d'après ce qui précède. Mais ici, $\forall n \in [\![5\,;9]\!]$, $v_{11}(\pi_n^{10}) = 1$ montre que $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.
  (4) $N^2 - M^2 = 8$ avec $(N, M) = (3, 1)$ est possible d'où $n = 1$, mais ceci est impossible comme nous l'avons vu ci-dessus.
  (5) $N^2 - M^2 = 9$ avec $(N, M) = (5, 4)$ est possible d'où $n \in [\![1\,;16]\!]$, puis $n \in [\![10\,;16]\!]$ d'après ce qui précède. Or $\forall n \in [\![10\,;16]\!]$, $v_{17}(\pi_n^{10}) = 1$, donc $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 2]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (3N^2, 3M^2)$ avec $(N, M) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $3(N^2 - M^2) \in [\![1\,;9]\!]$, puis $N^2 - M^2 \in [\![1\,;3]\!]$. Selon le fait 3.5, nécessairement $N^2 - M^2 = 3$ avec $(N, M) = (2, 1)$, d'où $n \in [\![1\,;3]\!]$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 3]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (2N^2, 2M^2)$ avec $(N, M) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $2(N^2 - M^2) \in [\![1\,;9]\!]$, puis $N^2 - M^2 \in [\![1\,;4]\!]$. Selon le fait 3.5, nécessairement $N^2 - M^2 = 3$ avec $(N, M) = (2, 1)$, d'où $n \in [\![1\,;2]\!]$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 4]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (6N^2, 6M^2)$ avec $(N, M) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $6(N^2 - M^2) \in [\![1\,;9]\!]$, puis $N^2 - M^2 = 1$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5. $\square$

13. Avec 11 facteurs

Fait 13.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^{11} \notin {}^2\mathbb{N}$.

L'idée suivie est celle de la démonstration du cas 12.1 ; nous indiquons juste les adaptations à faire en reprenant les notations de la preuve citée.

Preuve. Ici nous avons moins 6 facteurs $(n+i)$ de π_n^{11} non divisibles par 5 et 7 en notant qu'ici il y a au maximum trois facteurs $(n+i)$ de π_n^{11} divisibles par 5 . Ceci nous amène aux cas suivants.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient $[\mathbf{A\,1}]$.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (N^2, M^2)$ avec $|N^2 - M^2| \in [\![1\,;10]\!]$. Ce qui suit lève des contradictions.

  (1) $N^2 - M^2 = 3$ donne $n = 1$, mais $\pi_1^{11} = 11! \notin {}^2\mathbb{N}$ via $v_{11}(11!) = 1$.
  (2) $N^2 - M^2 = 5$ donne $n \in [\![2\,;4]\!]$, mais $\forall n \in [\![2\,;4]\!]$, $v_{11}(\pi_n^{11}) = 1$ donne $\pi_n^{11} \notin {}^2\mathbb{N}$.
  (3) $N^2 - M^2 = 7$ donne $n \in [\![5\,;9]\!]$, mais $\forall n \in [\![5\,;9]\!]$, $v_{11}(\pi_n^{11}) = 1$ donne $\pi_n^{11} \notin {}^2\mathbb{N}$.
  (4) $N^2 - M^2 = 8$ donne $n = 1$, mais ceci est impossible.
  (5) $N^2 - M^2 = 9$ donne $n \in [\![10\,;16]\!]$, mais $\forall n \in [\![10\,;16]\!]$, $v_{17}(\pi_n^{11}) = 1$, donc $\pi_n^{11} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient $[\mathbf{A\,2}]$.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (3N^2, 3M^2)$ avec $|3(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;10]\!]$, d'où $n \in [\![1\,;3]\!]$ que nous savons impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient $[\mathbf{A\,3}]$.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (2N^2, 2M^2)$ avec $|2(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;10]\!]$, puis nécessairement $|N^2 - M^2| \in \{3, 5\}$, d'où $n \in [\![1\,;8]\!]$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient $[\mathbf{A\,4}]$.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (6N^2, 6M^2)$ avec $|6(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;10]\!]$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5. □

14. Sources utilisées

Fait 6.1.

La démonstration non algébrique a été impulsée par la source du fait 9.1 donnée plus bas.

Fait 7.1.

- Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré *« n(n+1)…(n+k) est un carré ? »* sur le site `lesmathematiques.net`.

  La démonstration via le principe des tiroirs trouve sa source dans cet échange.
- Un échange consulté le 12 février 2024, et titré *« Is there an easier way of proving the product of any 5 consecutive positive integers is never a perfect square ? »* sur le site `www.quora.com/`.

  La démonstration « élémentaire » sans le principe des tiroirs vient de cet échange.
- L'article *« Le produit de 5 entiers consécutifs n'est pas le carré d'un entier. »* de T. Hayashi, Nouvelles Annales de Mathématiques, est consultable via Numdam, la bibliothèque numérique française de mathématiques.

  Cet article a fortement inspiré la longue preuve.

Fait 8.1.

Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré *« product of six consecutive integers being a perfect numbers »* sur le site `https://math.stackexchange.com`.

La courte démonstration est donnée dans cet échange. Vous y trouverez aussi un très joli argument basé sur les courbes elliptiques rationnelles.

Fait 9.1.

Un échange consulté le 3 février 2024, et titré *« Proof that the product of 7 successive positive integers is not a square »* sur le site `https://math.stackexchange.com`.

La courte démonstration est donnée dans cet échange, mais certaines justifications manquent.

Fait 10.1.

Un échange consulté le 4 février 2024, et titré *« How to prove that the product of eight consecutive numbers can't be a number raised to exponent 4 ? »* sur le site `https://math.stackexchange.com`.

La démonstration astucieuse vient de l'une des réponses de cet échange, mais la justification des deux inégalités n'est pas donnée.

Fait 12.1.

Un échange consulté le 13 février 2024, et titré *« Product of 10 consecutive integers can never be a perfect square »* sur le site `https://math.stackexchange.com`.

La démonstration vient d'une source Wordpress donnée dans une réponse de cet échange, mais cette source est très expéditive…