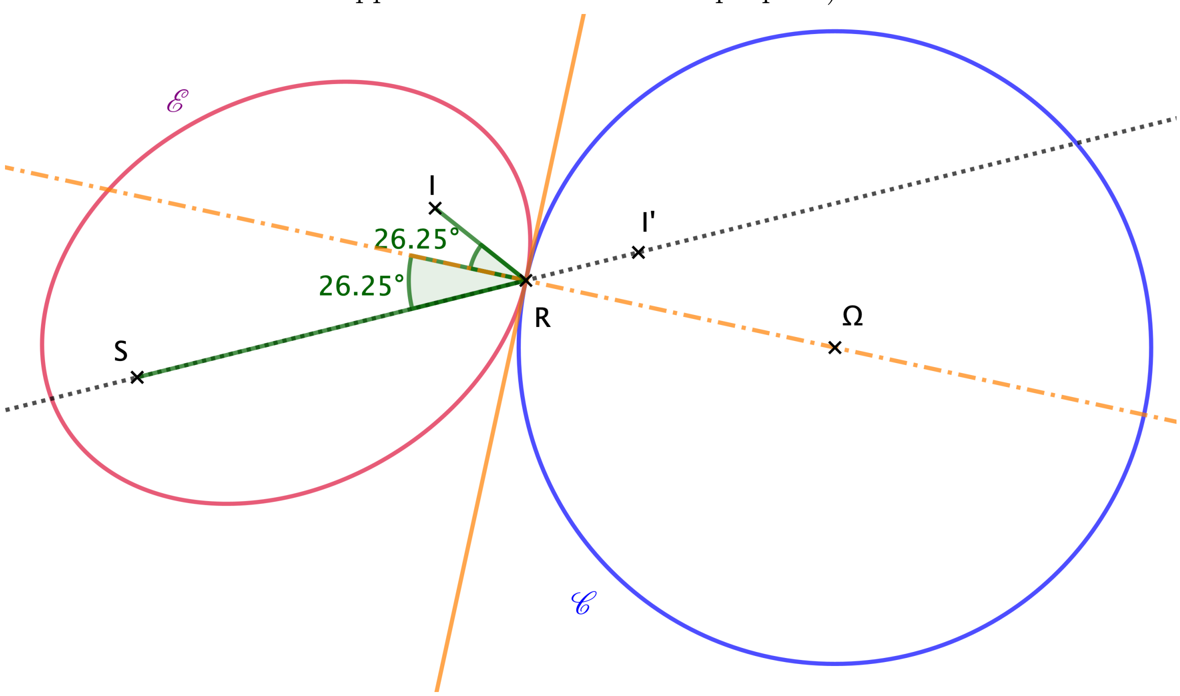
BROUILLON - MIROIR SPHÉRIQUE

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writing/drafts.

Mentions « légales »

Avec des points tels que dans la figure suivante, nous devons chercher l'intersection d'une ellipse de foyers S(ource) et I(mage) qui soit tangente au cercle. On utilise une propriété connue de rebond des ondes sur une ellipse utilisée dans certaines gares de métro (merci à mon collègue Jean - marie B. de m'avoir rappelé cette « évidence elliptique »).



1. À la recherche de l'ellipse perdue

On se place dans un repère orthonormé tel que l'on ait les faits suivantes.

- L'origine O du repère est le milieu du segment $[SI]$.
- $S\,(1\,;0)$ et $I\,(-1\,;0)$.

Notant $\Omega\,(p\,;q)$, nous avons alors $\mathscr{C} : (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ et $\mathscr{E} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec a minima $(a\,;b\,;r) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$. On doit trouver a et b tels que $\mathrm{card}\left(\mathscr{C} \cap \mathscr{E}\right) = 1$.

Date: 16 Juin 2023.

Nous avons pour $P\,(\,x\,;y\,) \in \mathscr{C} \cap \mathscr{E}$:

$$
\begin{aligned}
& (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 && \rho = r^2 \\
\Longrightarrow\ & x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2qy + q^2 = \rho && \mathscr{E} : b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\
\Longrightarrow\ & a^2x^2 - 2pa^2x + p^2a^2 + (a^2b^2 - b^2x^2) - 2qa^2y + a^2q^2 = a^2\rho && \alpha = a^2 \ , \ \beta = b^2 \ , \ \gamma = a^2b^2 \\
\Longrightarrow\ & \alpha x^2 - 2p\alpha x + p^2\alpha + (\gamma - \beta x^2) - 2q\alpha y + \alpha q^2 = \alpha\rho \\
\Longrightarrow\ & 2q\alpha y = (\alpha-\beta)x^2 - 2p\alpha x + \alpha(p^2+q^2) + \gamma - \alpha\rho
\end{aligned}
$$

Nous savons que $\alpha > 0$, mais il est aussi immédiat que la configuration proposée empêche d'avoir $q = 0$, nous avons ensuite :

$$
\begin{aligned}
& \beta x^2 + \alpha y^2 = \gamma \\
\Longrightarrow\ & 4q^2\alpha\beta x^2 + 4q^2\alpha^2y^2 = 4q^2\alpha\gamma \\
\Longrightarrow\ & 4q^2\alpha\beta x^2 + \big((\alpha-\beta)x^2 - 2p\alpha x + \alpha(p^2+q^2) + \gamma - \alpha\rho\big)^2 = 4q^2\alpha\gamma
\end{aligned}
$$

AFFAIRE À SUIVRE...
