BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writing/drafts.

Mentions « légales »

Table des matières

Date: 25 Jan. 2024 – 31 Jan. 2024.

1. Ce qui nous intéresse

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers » [1], Paul Erdos démontre que pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit d'entiers consécutifs $\prod_{i=0}^{k} (n+i)$ n'est jamais le carré d'un entier. Dans ce court document, nous commençons par étudier quelques cas particuliers de façon « adaptative », puis nous proposons ensuite une méthode efficace [2], et semi-automatisable, pour gérer plus facilement les premiers cas.

Remarque 1.1. *Les sections 4 et 3 peuvent être lues indépendamment l'une de l'autre.*

2. Notations utilisées

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ et ${}^2\mathbb{N}_* = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
- $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k} (n+i)$. Par exemple, nous avons $\pi_n^0 = n$ et $\pi_n^1 = n(n+1)$.
- $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
- $\forall (p\,; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p-adique de n, c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n, contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m.
- $2\,\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
- $2\,\mathbb{N} + 1$ désigne l'ensemble des nombres naturels impairs.

3. Résolutions à fortes empreintes cognitives

3.1. Avec 1 seul facteur.

Via $N^2 - M^2 = (N - M)(N + M)$, il est immédiat de noter que $\forall (N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $N > M$, alors $N^2 - M^2 \geq 3$. Le fait suivant précise ceci.

Fait 3.1. $\forall (N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, *si* $N > M$, *alors* $N^2 - M^2 = \sum_{k=M+1}^{N} (2k - 1)$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser $N^2 = \sum_{k=1}^{N} (2k - 1)$. □

3.2. Avec 2 facteurs.

Fait 3.2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Il suffit de noter que $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$. □

Preuve alternative no.1. Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Clairement $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\pi_n^1) \in 2\mathbb{N}$. Or $p \in \mathbb{P}$ ne peut diviser à la fois n et $n+1$. Nous savons donc que $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+1) \in 2\mathbb{N}$, autrement dit $(n, n+1) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. D'après le fait 3.1, nous savons que ceci est impossible. □

---

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).
2. Cette méthode s'appuie sur une représentation trouvée dans un message archivé que l'auteur a consulté le 28 janvier 2024. Voir `https://web.archive.org/web/20171110144534/http://mathforum.org/library/drmath/view/65589.html`.

Preuve alternative no.2. Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) = N^2$ où $N \in \mathbb{N}^*$. Les équivalences suivantes donnent alors une contradiction.

$$\begin{aligned}
& n(n+1) = N^2 \\
\iff\ & 2\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{N}(2k-1) && n(n+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k \ \textit{et}\ N^2 = \sum_{k=1}^{N}(2k-1)\,. \\
\iff\ & \sum_{k=1}^{n} 2k = \sum_{k=1}^{N} 2k - N \\
\iff\ & \sum_{k=n+1}^{N} 2k = N && N > n \\
\iff\ & \sum_{k=n+1}^{N-1} 2k + N = 0 && N > 0 \ \textit{rend impossible la dernière égalité.}
\end{aligned}$$

□

3.3. **Avec 3 facteurs.**

Fait 3.3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n(n+1)(n+2) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Posant $m = n+1$, nous avons $\pi_n^2 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Comme $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\pi_n^2) \in 2\mathbb{N}$, et comme de plus $p \in \mathbb{P}$ ne peut diviser à la fois m et $m^2 - 1$, nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(m^2-1) \in 2\mathbb{N}$, d'où $(m, m^2-1) \in {}^2\mathbb{N}_* \times {}^2\mathbb{N}_*$. Or, d'après le fait 3.1, $m^2 - 1 \in {}^2\mathbb{N}$ est impossible. □

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Comme $p \in \mathbb{P}_{>2}$ ne peut diviser au maximum qu'un seul des trois facteurs n , $(n+1)$ et $(n+2)$, nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}_{>2}$, $\big(v_p(n), v_p(n+1), v_p(n+2)\big) \in \big(2\mathbb{N}\big)^3$. Mais que se passe-t-il pour $p = 2$?

Supposons d'abord $n \in 2\mathbb{N}$.

- Posant $n = 2m$, nous avons $\pi_n^2 = 4m(2m+1)(m+1)$, d'où $m(2m+1)(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Comme $v_2(2m+1) = 0$, nous savons que $2m+1 \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Donc $m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$, mais le fait 3.2 interdit cela.

Supposons maintenant $n \in 2\mathbb{N}+1$.

- Nous savons que $n \in {}^2\mathbb{N}_*$ via $v_2(n) = 0$.
- Dès lors, on obtient $(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$, mais de nouveau ceci contredit le fait 3.2. □

3.4. **Avec 4 facteurs.**

Fait 3.4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Nous pouvons ici faire les manipulations algébriques naturelles suivantes.

$$\begin{aligned}
\pi_n^3 &= n(n+3)\cdot(n+1)(n+2) \\
&= (n^2+3n)\cdot(n^2+3n+2) && m = n^2 + 3n \\
&= m(m+2) \\
&= m^2 + 2m \\
&= (m+1)^2 - 1
\end{aligned}$$

Comme $m > 0$, d'après le fait 3.1, $(m+1)^2 - 1 \notin {}^2\mathbb{N}$, c'est-à-dire $\pi_n^3 \notin {}^2\mathbb{N}$. □

Une preuve alternative. En « symétrisant » certaines expressions, nous obtenons les manipulations algébriques « moins magiques » suivantes.

$$\begin{aligned}
\pi_n^3 &= n(n+1)(n+2)(n+3) \\
&= \big(x-\frac{3}{2}\big)\big(x-\frac{1}{2}\big)\big(x+\frac{1}{2}\big)\big(x+\frac{3}{2}\big) \qquad x = n+\frac{3}{2} \\
&= \big(x^2-\frac{9}{4}\big)\big(x^2-\frac{1}{4}\big) \\
&= (y-1)(y+1) \qquad y = x^2-\frac{5}{4} \\
&= y^2-1 \\
&= \Big(\big(n+\frac{3}{2}\big)^2-\frac{5}{4}\Big)^2-1 \\
&= \big(n^2+3n+1\big)^2-1
\end{aligned}$$

□

3.5. **Avec 5 facteurs.**

Fait 3.5. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $\big(v_p(n), v_p(n+1), v_p(n+2), v_p(n+3), v_p(n+4)\big) \in \big(2\mathbb{N}\big)^5$. Pour $p=2$ et $p=3$, nous avons les alternatives suivantes pour chaque facteur $(n+i)$ de π_n^3 .

- **[A 1]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A 2]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$
- **[A 3]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times 2\mathbb{N}$
- **[A 4]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$

Comme nous avons cinq facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions très facilement.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 1]** .

  Dans ce cas, on sait juste que $(n+i, n+i') \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Or $n \notin {}^2\mathbb{N}$ puisque sinon nous aurions $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$ via $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$, mais ceci ne se peut pas d'après le fait 3.4. De même, $n+4 \notin {}^2\mathbb{N}$. Dès lors, nous avons $\{n+i, n+i'\} \subseteq \{n+1, n+2, n+3\}$ qui donne deux carrés parfaits non nuls éloignés de moins de 3 , et ceci contredit le fait 3.1.
- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 2]** .

  Dans ce cas, le couple de facteurs est $(n, n+3)$, ou $(n+1, n+4)$.
  1. Supposons d'abord que n et $(n+3)$ vérifient **[A 2]** .
     Comme $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+3) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(n) \in 2\mathbb{N}+1$ et $v_3(n+3) \in 2\mathbb{N}+1$, nous avons $n = 3N^2$ et $n+3 = 3M^2$ où $(N, M) \in \big(\mathbb{N}^*\big)^2$. Or, ceci donne $3 = 3M^2 - 3N^2$, puis $M^2 - N^2 = 1$ qui contredit le fait 3.1.
  2. De façon analogue, on ne peut pas avoir $(n+1)$ et $(n+4)$ vérifiant **[A 2]** .
- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 3]** .

  Comme dans le point précédent, c'est impossible car on aurait $2 = 2M^2 - 2N^2$, ou $4 = 2M^2 - 2N^2$. En effet, ici les couples possibles sont $(n, n+2)$, $(n, n+4)$, $(n+2, n+4)$ et $(n+1, n+3)$ [3].

3. Rien n'empêche d'avoir n , $(n+2)$ et $(n+4)$ vérifiant tous les trois **[A 3]** .

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 4]**.

  Ceci donne deux facteurs différents divisibles par 6, mais c'est impossible. $\square$

Bien que longue, la preuve suivante est simple à comprendre car elle ne fait que dérouler le fil des faits découverts. De plus, cette preuve utilise une technique dont nous reparlerons plus tard lors de l'exposé de la méthode efficace et généraliste.

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Posant $m = n+2$, nous avons $\pi_n^4 = (m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) = m(m^2-1)(m^2-4)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. On notera dans la suite $u = m^2 - 1$ et $q = m^2 - 4$.

Supposons d'abord que $m \in {}^2\mathbb{N}_*$.

- De $muq \in {}^2\mathbb{N}_*$, nous déduisons $uq \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Comme $u - q = 3$, nous savons que $u \wedge q \in \{1, 3\}$.
- Si $u \wedge q = 1$, alors $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, d'où $(u,q) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Le fait 3.1 impose d'avoir $(u,q) = (4,1)$, d'où $m^2 - 1 = 4$, mais ceci est impossible[4].
- Si $u \wedge q = 3$, alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(u) \in 2\mathbb{N}+1$ et $v_3(q) \in 2\mathbb{N}+1$. Donc $u = 3U^2$ et $q = 3Q^2$ avec $(U,Q) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$. Or $u - q = 3$ donne $U^2 - Q^2 = 1$, et le fait 3.1 nous indique une contradiction.

Supposons maintenant que $m \notin {}^2\mathbb{N}_*$.

- Nous avons vu ci-dessus que $u \notin {}^2\mathbb{N}$ et $q \notin {}^2\mathbb{N}$. On peut donc écrire $m = \alpha M^2$, $u = \beta U^2$, $q = \gamma Q^2$ où $(M,U,Q) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^3$, et $(\alpha,\beta,\gamma) \in \left(\mathbb{N}_{>1}\right)^3$, le dernier triplet étant formé d'entiers sans facteur carré.
- Notons que $\beta \neq \gamma$ car, dans le cas contraire, $3 = u - q = \beta\left(U^2 - Q^2\right)$ fournirait $\beta = 3$ puis $U^2 - Q^2 = 1$, et ceci contredirait le fait 3.1.
- Nous avons $m \wedge u = 1$, $m \wedge q \in \{1,2,4\}$ et $u \wedge q \in \{1,3\}$ avec $m \wedge u = m \wedge q = u \wedge q = 1$ impossible car sinon on aurait $(m,u,q) \in \left({}^2\mathbb{N}\right)^3$ via $muq \in {}^2\mathbb{N}$.
- Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $\left(v_p(m), v_p(u), v_p(q)\right) \in \left(2\mathbb{N}\right)^3$.
- Les points précédents donnent $\{\alpha,\beta,\gamma\} \subseteq \{2,3,6\}$ avec de plus $\beta \neq \gamma$, ainsi que $\alpha \wedge \beta = 1$, $\alpha \wedge \gamma \in \{1,2\}$ et $\beta \wedge \gamma \in \{1,3\}$. Notons au passage que $\alpha \wedge \beta = 1$ implique $(\alpha,\beta) = (2,3)$, ou $(\alpha,\beta) = (3,2)$. Via le tableau « mécanique » ci-après, nous obtenons que forcément $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,3,2)$ ou $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,3,6)$. Le plus dur est fait !

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	*Statut*
2	3	2	1	2	1	✓
2	3	6	1	2	3	✓
3	2	3	1	3	1	☒
3	2	6	1	3	2	☒

- $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,3,2)$ nous donne $m = 2M^2$, $m^2 - 1 = 3U^2$ et $m^2 - 4 = 2Q^2$, d'où la contradiction $3 \cdot 4M^2U^2Q^2 \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,3,6)$ nous donne $m = 2M^2$, $m^2 - 1 = 3U^2$ et $m^2 - 4 = 6Q^2$, mais ce qui suit lève une autre contradiction.

4. On peut aussi noter que le fait 3.3 lève une contradiction car nous avons $m \in {}^2\mathbb{N}$ et $u \in {}^2\mathbb{N}$ qui donnent $(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$

– Travaillons modulo 3. Comme $m = 2M^2$, nous avons $m \equiv 0$ ou $m \equiv -1$. Or $m^2 - 1 = 3U^2$ donne $m^2 \equiv 1$, d'où $m \equiv -1$, puis $3 \mid m-2$, et enfin $6 \mid m-2$ puisque m est pair.
– Posant $m - 2 = 6r$ et notant $s = m + 2$, nous avons $6rs = 6Q^2$, puis $rs = Q^2$.
– $s \notin {}^2\mathbb{N}$, car dans le cas contraire, nous aurions $(m-2)(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$ via $(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) \in {}^2\mathbb{N}$, mais ceci ne se peut pas d'après le fait 3.4.
– Les deux résultats précédents donnent $(\pi, R, S) \in \mathbb{N}_{>1} \times \left(\mathbb{N}^*\right)^2$ tel que $r = \pi R^2$ et $s = \pi S^2$ avec π sans facteur carré.
– $4 = s - 6r = \pi(S^2 - 6R^2)$ donne $\pi = 2$, d'où $m + 2 = 2S^2$.
– Finalement, $m = 2M^2$ et $m+2 = 2S^2$ donnent $2 = 2(S^2 - M^2)$, soit $1 = S^2 - M^2$, ce qui contredit le fait 3.1. □

4. Une méthode efficace

4.1. Prenons du recul.

Les exemples proposés précédemment sont tous sympathiques, mais, malheureusement, ils ne nous ont pas permis de noter un schéma général de raisonnement autre que de découvrir des carrés mal espacés : par exemple, tomber sur $N^2 - M^2 = 4$ lève une contradiction du fait 3.1. Tentons donc de limiter au maximum l'emploi de fourberies déductives ; pour cela, commençons par noter le fait suivant.

Fait 4.1. *$\forall n \in {}^2\mathbb{N}_*$, s'il existe $m \in {}^2\mathbb{N}_*$ tel que $n = fm$ alors $f \in {}^2\mathbb{N}_*$.*

Démonstration. Il suffit de passer via les décompositions en facteurs premiers de n, m et f. □

Concentrons-nous sur les diviseurs sans facteur carré des facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k}(n+i)$.

Définition 4.1. *Soient $(n,k) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$, $(a_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq \mathbb{N}^*$ et $(s_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq {}^2\mathbb{N}_*$ tels que $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$, $n + i = a_i s_i$. Ce type de situation sera résumé par le tableau suivant que nous nommerons tableau de Vogler en référence à la discussion où l'auteur a découvert ce concept.*

$n + \bullet$	0	1	2	$\ldots$	k
	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_k

Exemple 4.1. *Supposons avoir le tableau de Vogler suivant où $n \in \mathbb{N}^*$.*

$n + \bullet$	0	1	2	3
	2	5	6	1

Ceci résume la situation suivante.

- *$\exists A \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2A^2$.*
- *$\exists B \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 1 = 5B^2$.*
- *$\exists C \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 2 = 6C^2$.*
- *$\exists D \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 3 = D^2$.*

Fait 4.2.

(1) Si nous avons un tableau de Vogler du type suivant, où les puces $\bullet$ indiquent des valeurs inconnues, alors nous pouvons affirmer que $\pi_n^{k-1} \in {}^2\mathbb{N}_*$.

$n + \bullet$	0	1	$\ldots$	$k-1$	k
	$\bullet$	$\bullet$	$\ldots$	$\bullet$	1

(1) Si nous avons un tableau de Vogler du type suivant, où les puces $\bullet$ *indiquent des valeurs inconnues, alors nous pouvons affirmer que* $\pi_{n+1}^{k-1} \in {}^2\mathbb{N}_*$.

$n+\bullet$	0	1	$\dots$	$k-1$	k
	1	$\bullet$	$\dots$	$\bullet$	$\bullet$

Démonstration. C'est immédiat via le fait 4.1. □

Fait 4.3. *Soit* $(n, d, i, a) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^4$. *Les tableaux de Vogler ci-après sont impossibles.*

(1) Pas de facteurs carrés consécutifs.

$n+\bullet$	i	$i+1$
	a	a

(2) Pas de facteurs carrés trop près (les puces $\bullet$ *indiquent des valeurs inconnues).*

$n+\bullet$	i	$i+1$	$\dots$	$i+d-1$	$i+d$
	ad	$\bullet$	$\dots$	$\bullet$	ad

(3) Pas de facteurs carrés pas trop loin.

$n+\bullet$	i	$i+1$	$\dots$	$i+2d-1$	$i+2d$
	ad	$\bullet$	$\dots$	$\bullet$	ad

Démonstration. Tout est contenu dans le fait 3.1.

(1) Ici, $n+i = aA^2$ et $n+i+1 = aB^2$ donnent $a(B^2 - A^2) = 1$, d'où $B^2 - A^2 = 1$ qui ne se peut pas car nous sommes dans $\mathbb{N}^*$, d'où $A^2 > B^2 \geq 1$.

(2) Ici, $n+i = adA^2$ et $n+i+d = adB^2$ donnent $ad(B^2 - A^2) = d$, puis $a(B^2 - A^2) = 1$ qui a été rejeté dans l'explication précédente.

(3) Ici, $n+i = adA^2$ et $n+i+2d = adB^2$ donnent $ad(B^2 - A^2) = 2d$, *i.e.* $a(B^2 - A^2) = 2$, d'où $B^2 - A^2 \in \{1, 2\}$ qui est impossible d'après l'explication 1 ci-dessus et le fait 3.1.

□

Pour fabriquer des tableaux de Vogler, nous allons « multiplier » des d-tableaux de Vogler qui sont moins précis et définis comme suit.

Définition 4.2. *Soient* $(n, k, d) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^3$, $(q_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq \mathbb{N}$, $(\epsilon_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq \{0, 1\}$ *et* $(f_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq \mathbb{N}^*$ *tels que* $\forall i \in [\![0\,; k]\!]$, $n+i = d^{\,2q_i+\epsilon_i} f_i$ *avec* $f_i \wedge d = 1$. *Ce type de situation sera résumé par le tableau suivant que nous nommerons d-tableau de Vogler où* $d^{\epsilon_i} \in \{1, d\}$.

$n+\bullet$	0	1	2	$\dots$	k
d	d^{ϵ_0}	d^{ϵ_1}	d^{ϵ_2}	$\dots$	d^{ϵ_k}

Exemple 4.2. *Supposons avoir le* 5*-tableau de Vogler suivant où* $n \in \mathbb{N}^*$.

$n+\bullet$	0	1	2	3
5	1	5	1	1

Ceci résume la situation suivante.

- $\exists (a, A) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $A \wedge 5 = 1$ *et* $n = 5^{\,2a} A$.
- $\exists (b, B) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $B \wedge 5 = 1$ *et* $n+1 = 5^{\,2b+1} B$.

- $\exists (c, C) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $C \wedge 5 = 1$ *et* $n + 2 = 5^{2c} C$.
- $\exists (d, D) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $D \wedge 5 = 1$ *et* $n + 3 = 5^{2d} D$.

Exemple 4.3. *La multiplication de deux d-tableaux de Vogler est « naturelle » lorsqu'elle porte sur des d premiers entre eux. Considérons le* 2*-tableau de Vogler et le* 3*-tableau de Vogler suivants.*

$n + \bullet$	0	1	2	3
2	1	2	1	2

$n + \bullet$	0	1	2	3
3	3	1	1	3

La multiplication de ces d-tableaux de Vogler est le 6*-tableau de Vogler suivant.*

$n + \bullet$	0	1	2	3
6	3	2	1	6

Ceci résume la situation suivante avec des notations « évidentes » .

- $A \wedge 6 = 1$ *et* $n = 2^{2a} 3^{2\alpha+1} A$.
- $B \wedge 6 = 1$ *et* $n + 1 = 2^{2b+1} 3^{2\beta} B$.
- $C \wedge 6 = 1$ *et* $n + 2 = 2^{2c} 3^{2\gamma} C$.
- $D \wedge 6 = 1$ *et* $n + 3 = 2^{2d+1} 3^{2\delta+1} D$.

Fait 4.4. *Dans la deuxième ligne d'un d-tableau de Vogler, les valeurs d sont séparées par exactement* $(d - 1)$ *valeurs* 1 *.*

Démonstration. Penser aux multiples de d . ☐

Fait 4.5. $\forall p \in \mathbb{P}$ *, si* $\pi_n^k \in {}^2\mathbb{N}$ *, alors dans le p-tableau de Vogler associé à* $\pi_n^k \in {}^2\mathbb{N}$ *, le nombre de valeurs p est forcément pair.*

Démonstration. Évident, mais très pratique, comme nous le verrons dans la suite. ☐

4.2. Application au cas de 2 facteurs.

Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Nous avons alors les p-tableaux de Vogler suivants pour $p \in \mathbb{P}$ divisant π_n^1 , car les valeurs p de la deuxième ligne doivent apparaître un nombre pair de fois tout en étant espacées par $(p - 1)$ valeurs 1 (voir les faits 4.4 et 4.5).

$n + \bullet$	0	1
p	1	1

La multiplication de tous les p-tableaux de Vogler précédents donne le tableau de Vogler ci-après qui contredit le fait 4.3.

$n + \bullet$	0	1
	1	1

4.3. Application au cas de 3 facteurs.

Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Nous avons alors les p-tableaux de Vogler suivants pour $p \in \mathbb{P}_{>2}$ divisant π_n^2 , de nouveau car les valeurs p doivent apparaître un nombre pair de fois, et être espacées par $(p - 1)$ valeurs 1 (voir les faits 4.4 et 4.5).

$n + \bullet$	0	1	2
p	1	1	1

Pour $p = 2$, via les faits 4.4 et 4.5, seulement deux 2-tableaux de Vogler sont possibles. Nous utilisons un abus de notation évident pour indiquer ces deux possibilités.

$n + \bullet$	0	1	2
2	1	1	1
	2	1	2

La multiplication de tous les d-tableaux de Vogler précédents donne juste les deux tableaux de Vogler suivants, mais ceci est impossible d'après le fait 4.3.

$n + \bullet$	0	1	2
	1	1	1
	2	1	2

4.4. **Application au cas de 4 facteurs.**

Supposons que $\pi_n^3 = n(n+1)(n+2)(n+3) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Nous avons alors les p-tableaux de Vogler suivants pour $p \in \mathbb{P}_{>3}$ divisant π_n^3 .

$n + \bullet$	0	1	2	3
p	1	1	1	1

Pour $p = 2$, nous avons les trois 2-tableaux de Vogler suivants.

$n + \bullet$	0	1	2	3
2	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2

Pour $p = 3$, nous obtenons les deux 3-tableaux de Vogler suivants.

$n + \bullet$	0	1	2	3
3	1	1	1	1
	3	1	1	3

La multiplication des d-tableaux de Vogler précédents donne les tableaux de Vogler suivants.

$n + \bullet$	0	1	2	3
	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2
	3	1	1	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Le fait 4.3 rejette les quatre premiers tableaux de Vogler : voir les cellules surlignées ci-dessous.

$n+\bullet$	0	1	2	3
	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2
	3	1	1	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Il nous reste à étudier les deux derniers tableaux reproduits ci-après.

$n+\bullet$	0	1	2	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Commençons par démontrer que l'on ne peut pas avoir $n = 6A^2$, $n+1 = B^2$, $n+2 = 2C^2$ et $n+3 = 3D^2$ où $(A, B, C, D) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^4$.

- Posons $x = n + \frac{3}{2}$ de sorte que $x - \frac{3}{2} = 6A^2$, $x - \frac{1}{2} = B^2$, $x + \frac{1}{2} = 2C^2$ et $x + \frac{3}{2} = 3D^2$.
- Nous avons $\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = 2E^2$, c'est-à-dire $x^2 - \frac{9}{4} = 2E^2$, avec $E \in \mathbb{N}^*$.
- De même, $x^2 - \frac{1}{4} = 2F^2$ avec $F \in \mathbb{N}^*$.
- Par simple soustraction, nous obtenons $2F^2 - 2E^2 = 2$, puis $F^2 - E^2 = 1$, mais ceci contredit le fait 3.1.

Le même type de raisonnement [5] démontre l'impossibilité d'avoir $n = 3A^2$, $n+1 = 2B^2$, $n+2 = C^2$ et $n+3 = 6D^2$ où $(A, B, C, D) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^4$.

4.5. **Application au cas de 5 facteurs.**
Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Nous avons alors les p-tableaux de Vogler suivants pour $p \in \mathbb{P}_{>4}$ divisant π_n^4 .

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
p	1	1	1	1	1

Pour $p = 2$, nous avons les 2-tableaux de Vogler suivants.

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
2	1	1	1	1	1
	2	1	2	1	1
	2	1	1	1	2
	1	2	1	2	1
	1	1	2	1	2

Pour $p = 3$, nous obtenons les 3-tableaux de Vogler suivants.

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
3	1	1	1	1	1
	3	1	1	3	1
	1	3	1	1	3

5. Noter la « symmétrie » respectée par les valeurs des deux tableaux.

La multiplication de tous les d-tableaux de Vogler précédents donne les 15 cas suivants.

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
	1	1	1	1	1
	2	1	2	1	1
	2	1	1	1	2
	1	2	1	2	1
	1	1	2	1	2
	3	1	1	3	1
	6	1	2	3	1
	6	1	1	3	2
	3	2	1	6	1
	3	1	2	3	2
	1	3	1	1	3
	2	3	2	1	3
	2	3	1	1	6
	1	6	1	2	3
	1	3	2	1	6

Comme $\pi_n^3 = n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}_*$ et $\pi_{n+1}^3 = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2\mathbb{N}_*$, nous pouvons ignorer tous les tableaux commençant, ou finissant, par une valeur 1 d'après le fait 4.2. Cela laisse les tableaux de Vogler ci-après, mais ces derniers sont rejetés par le fait 4.3.

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
	2	1	1	1	2
	6	1	1	3	2
	3	1	2	3	2
	2	3	2	1	3
	2	3	1	1	6

Remarque 4.1. *Notons qu'un cas comme* $6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2$, *c'est-à-dire* $n = 6A^2$, $n+1 = B^2$, $n+2 = C^2$, $n+3 = 3D^2$ *et* $n+4 = 2E^2$ *où* $(A,B,C,D,E) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^4$ *peut se traiter de façon analogue à ce qui a été fait dans la section 4.4 via* $x-2 = 6A^2$, $x-1 = B^2$, $x = C^2$, $x+1 = 3D^2$ *et* $x+2 = 2E^2$ *qui donnent* $x^2 - 4 = 3F^2$ *et* $x^2 - 1 = 3G^2$ *où* $(F,G) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^4$.

4.6. **Et après ?**

La méthode présentée ci-dessus permet de faire appel à un programme pour n'avoir à traiter à la main, et aux neurones, que certains tableaux de Vogler problématiques comme nous avons dû le faire dans la section 4.4. Expliquons cette tactique semi-automatique en traitant le cas de 6 facteurs.

(1) On fabrique la liste $\mathcal{P}$ des diviseurs premiers stricts de 6 : nous avons juste 2, 3 et 5. Notons qu'avec 7 facteurs, nous n'aurions pas garder 7 car il est forcément de valuation paire dans chaque facteur $(n+i)$ de π_n^7.

(2) Pour chaque élément p de $\mathcal{P}$, on construit la liste $\mathcal{V}_p$ des p-tableaux de Vogler possibles relativement à π_n^6.

(3) On calcule toutes les multiplications de p-tableaux de Vogler, et pour chacune d'elles on ne la garde que si elle ne vérifie aucune des conditions suivantes, celles du dernier cas devant être indiquées à la main au programme.

   (a) Le tableau « produit » commence, ou se termine, par la valeur 1. Dans ce cas, on sait par récurrence que le tableau produit n'est pas possible.

   (b) L'une des interdictions du fait 4.3 est validée par le tableau « produit » .

   (c) Le tableau « produit » contient un sous-tableau que nous savons impossible suite à un raisonnement humain fait *localement* , c'est-à-dire que seul les facteurs indiqués dans le sous-tableau, et le sous-tableau lui-même sont utilisés pour raisonner. Comme c'est ce qui a été fait en fin de section 4.4, nous pouvons indiquer les deux sous-tableaux impossibles suivants.

$m + \bullet$	0	1	2	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

YAPLUKA !

5. Sources utilisées

Ce document n'aurait pas vu le jour sans les sources suivantes.

5.1. **Résolutions à fortes empreintes cognitives.**

(1) Un échange titré *« n(n+1)...(n+k) est un carré ? »* sur le site `lesmathematiques.net` .

   La démonstration du fait 3.5 via le principe des tiroirs trouve sa source dans cet échange.

(2) L'article *« Le produit de 5 entiers consécutifs n'est pas le carré d'un entier. »* de T. Hayashi, Nouvelles Annales de Mathématiques, est consultable via Numdam , la bibliothèque numérique française de mathématiques.

   Cet article a inspiré la preuve alternative du fait 3.5.

5.2. **Une méthode efficace.**

(1) Une discussion archivée consultée le 28 janvier 2024 :

   `https://web.archive.org/web/20171110144534/http://mathforum.org/library/drmath/view/65589.html` .

   Cette discussion utilise ce que nous avons nommé les tableaux de Vogler, mais le côté semi-mécanisable de leur utilisation n'est pas souligné.

6. AFFAIRE À SUIVRE...