BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writing/drafts.

Mentions « légales »

Table des matières

Date: 25 Jan. 2024 – 27 Jan. 2024.

1. Ce qui nous intéresse

Existe-t-il $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $\prod_{i=0}^{k}(n+i)$ soit le carré d'un entier ?

2. Notations utilisées

Dans la suite, nous utiliserons les notations suivantes.

- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ et ${}^2\mathbb{N}_* = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
- $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k}(n+i)$. Par exemple, nous avons $\pi_n^0 = n$ et $\pi_n^1 = n(n+1)$.
- $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
- $\forall (p\,;n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p-adique de n, c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n, mais $p^{v_p(n)+1} \nmid n$.
- $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m.
- $2\,\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
- $2\,\mathbb{N}+1$ désigne l'ensemble des nombres naturels impairs.

3. Cas 0

Donnons juste un fait basique concernant l'ensemble ${}^2\mathbb{N}$, fait qui nous sera utile par la suite.

Fait 3.1. *$\forall (n,m) \in {}^2\mathbb{N}_* \times {}^2\mathbb{N}_*$, si $n \neq m$, alors nous avons :*

(1) $|n-m| = 3 \iff (n,m) \in \{(1,4)\,;(4,1)\}$

(2) $|n-m| \geq 5$ dès que $(n,m) \notin \{(1,4)\,;(4,1)\}$.

Démonstration. Quitte à échanger les rôles, on peut supposer $n > m$. Par hypothèse, nous avons $(N,M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $n = N^2$ et $m = M^2$. Comme $n > m$, nous avons aussi $N > M$. Pour conclure, il suffit de s'appuyer sur les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}
N > M &\iff N \geq M+1 \\
&\iff N^2 \geq (M+1)^2 \\
&\iff n \geq m + 2M + 1 \\
&\iff n - m \geq 2M + 1
\end{aligned}$$

□

4. Cas 1

Fait 4.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Clairement $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\pi_n^1) \in 2\mathbb{N}$. Or $p \in \mathbb{P}$ ne pent diviser à la fois n et $n+1$. Nous savons donc que $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+1) \in 2\mathbb{N}$, autrement dit $(n, n+1) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. D'après le fait 3.1, nous savons que ceci est impossible. □

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) = N^2$ où $N \in \mathbb{N}^*$. Rappelons les deux identités classiques suivantes.

- $n(n+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k$
- $N^2 = \sum_{k=1}^{N}(2k-1)$

Dès lors, après avoir noté que $N > n$, les équivalences suivantes donnent une contradiction.

$$\begin{aligned}
n(n+1) = N^2 &\iff 2\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{N} (2k-1) \\
&\iff \sum_{k=1}^{n} 2k = \sum_{k=1}^{N} 2k - N \\
&\iff \sum_{k=n+1}^{N} 2k = N \\
&\iff \sum_{k=n+1}^{N-1} 2k + N = 0
\end{aligned}$$

Se souvenir que $N > 0$.

□

5. Cas 2

Fait 5.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n(n+1)(n+2) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Posant $m = n+1$, nous avons $\pi_n^2 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Comme $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\pi_n^2) \in 2\mathbb{N}$, et comme de plus $p \in \mathbb{P}$ ne peut diviser à la fois m et m^2-1, nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(m^2-1) \in 2\mathbb{N}$, d'où $(m, m^2-1) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Or, d'après le fait 3.1, $m^2-1 \in {}^2\mathbb{N}$ est impossible. □

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Comme $p \in \mathbb{P}_{>2}$ ne peut diviser au maximum qu'un seul des trois facteurs n, $(n+1)$ et $(n+2)$, nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}_{>2}$, $\big(v_p(n), v_p(n+1), v_p(n+2)\big) \in \big(2\mathbb{N}\big)^3$. Mais que se passe-t-il pour $p = 2$?

Supposons d'abord $n \in 2\mathbb{N}$.

- Posant $n = 2m$, nous avons $\pi_n^2 = 4m(2m+1)(m+1)$, d'où $m(2m+1)(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Comme $v_2(n+1) = v_2(2m+1) = 0$, nous savons que $2m+1 = n+1 \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Donc $m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$, mais le fait 4.1 interdit cela.

Supposons maintenant $n \in 2\mathbb{N}+1$.

- Nous savons que $n \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Dès lors, on obtient $(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$, mais de nouveau ceci contredit le fait 4.1. □

6. Cas 3

Fait 6.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Nous pouvons ici faire les manipulations algébriques naturelles suivantes.

$$\begin{aligned}
\pi_n^3 &= n(n+3)\cdot(n+1)(n+2) \\
&= (n^2+3n)\cdot(n^2+3n+2) \\
&= (m-1)(m+1) \\
&= m^2-1
\end{aligned}$$

$m = n^2+3n+1$

D'après le fait 3.1, $m^2-1 \notin {}^2\mathbb{N}$, c'est-à-dire $\pi_n^3 \notin {}^2\mathbb{N}$. □

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^3 = n(n+1)(n+2)(n+3) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Comme $p \in \mathbb{P}_{>3}$ ne peut diviser au maximum qu'un seul des quatre facteurs n, $(n+1)$, $(n+2)$ et $(n+3)$, nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $\big(v_p(n), v_p(n+1), v_p(n+2), v_p(n+3)\big) \in \big(2\mathbb{N}\big)^4$. Mais que se passe-t-il pour $p = 2$ et $p = 3$? Nous avons les alternatives suivantes pour chaque facteur $(n+i)$ de π_n^3.

- **[A 1]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A 2]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$
- **[A 3]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times 2\mathbb{N}$
- **[A 4]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$

Notons que $n \notin {}^2\mathbb{N}$ car sinon $n(n+1)(n+2)(n+3) \in {}^2\mathbb{N}$ donnerait $(n+1)(n+2)(n+3) \in {}^2\mathbb{N}$, mais ceci ne se peut pas d'après le fait 5.1. De même, $n+3 \notin {}^2\mathbb{N}$. Ceci nous montre que $v_2(n) \in 2\mathbb{N}+1$, ou $v_3(n) \in 2\mathbb{N}+1$, mais aussi que $v_2(n+1) \in 2\mathbb{N}+1$, ou $v_3(n+3) \in 2\mathbb{N}+1$.

Supposons d'abord que $v_2(n) \in 2\mathbb{N}+1$.

- Comme $2 \nmid n+3$, nous avons $v_3(n+3) \in 2\mathbb{N}+1$. Dès lors nous devons aussi avoir $v_3(n) \in 2\mathbb{N}+1$ puisque ni $(n+1)$, ni $(n+2)$ n'est divisible par 3 . Donc $n = 6A^2$ et $n+3 = 3D^2$ avec $(A, D) \in \mathbb{N}^2$.
- Comme $2 \nmid n+1$ et $3 \nmid n+1$, nous avons $n+1 = B^2$ avec $B \in \mathbb{N}$.
- Comme $2 \mid n+2$ et $3 \nmid n+2$, nous avons $n+2 = 2C^2$ avec $C \in \mathbb{N}$.
- Le tableau suivant montre que $n = 6A^2 = B^2 - 1 = 3D^2 - 3 = 2C^2 - 2$ est impossible modulo 5 , et donc a fortiori dans $\mathbb{N}$.

k	k^2	k^2-1	$3k^2-3$	$2k^2-2$
0	0	4	2	3
1	1	0	0	0
2	4	3	4	1
3	4	3	4	1
4	1	4	0	0

□

7. Cas 4

Fait 7.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $\big(v_p(n), v_p(n+1), v_p(n+2), v_p(n+3), v_p(n+4)\big) \in \big(2\mathbb{N}\big)^5$. Pour $p=2$ et $p=3$, comme dans la preuve alternative du fait 6.1, nous avons quatre alternatives, mais ici comme nous avons aussi cinq facteurs, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions très facilement.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 1]** .

  Dans ce cas, on sait juste que $(n+i, n+i') \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Or $n \notin {}^2\mathbb{N}$ puisque sinon nous aurions $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$ via $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$, mais ceci ne se peut pas d'après le fait 6.1. De même, $n+4 \notin {}^2\mathbb{N}$. Dès lors, nous avons $\{n+i, n+i'\} \subseteq \{n+1, n+2, n+3\}$ qui donne deux carrés parfaits éloignés de moins de 3 , et ceci contredit le fait 3.1.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 2]** .

  Dans ce cas, le couple de facteurs est $(n, n+3)$, ou $(n+1, n+4)$.

(1) Supposons d'abord que n et $(n+3)$ vérifient **[A 2]**.
Comme $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+3) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(n) \in 2\mathbb{N}+1$ et $v_3(n+3) \in 2\mathbb{N}+1$, nous avons $n = 3N^2$ et $n+3 = 3M^2$ où $(N, M) \in \mathbb{N}^2$. Or, ceci donne $3 = 3M^2 - 3N^2$, puis $M^2 - N^2 = 1$ qui contredit le fait 3.1.

(2) De façon analogue, on ne peut pas avoir $(n+1)$ et $(n+4)$ vérifiant **[A 2]**.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 3]**.

  Comme dans le point précédent, c'est impossible car on aurait $2 = 2M^2 - 2N^2$, ou $4 = 2M^2 - 2N^2$. En effet, ici les couples possibles sont $(n, n+2)$, $(n, n+4)$, $(n+2, n+4)$ et $(n+1, n+3)$[1].

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 4]**.

  Ceci donne deux facteurs différents divisibles par 6, mais c'est impossible. $\square$

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Posant $m = n+2$, nous avons $\pi_n^4 = (m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) = m(m^2-1)(m^2-4)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. On notera dans la suite $u = m^2 - 1$ et $q = m^2 - 4$.

Supposons d'abord que $m \in {}^2\mathbb{N}_*$.

- De $muq \in {}^2\mathbb{N}_*$, nous déduisons $uq \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Comme $u - q = 3$, nous savons que $u \wedge q \in \{1, 3\}$.
- Si $u \wedge q = 1$, alors $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, d'où $(u, q) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Or ceci est impossible d'après le fait 3.1[2].
- Si $u \wedge q = 3$, alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(u) \in 2\mathbb{N}+1$ et $v_3(q) \in 2\mathbb{N}+1$. Donc $u = 3U^2$ et $q = 3Q^2$ avec $(U, Q) \in \mathbb{N}^2$. Or $u - q = 3$ donne $U^2 - Q^2 = 1$, et le fait 3.1 nous indique une contradiction.

Supposons maintenant que $m \notin {}^2\mathbb{N}_*$.

- Nous avons vu ci-dessus que $u \notin {}^2\mathbb{N}$ et $q \notin {}^2\mathbb{N}$. On peut donc écrire $m = \alpha M^2$, $u = \beta U^2$, $q = \gamma Q^2$ où $(M, U, Q) \in \mathbb{N}^3$, et $(\alpha, \beta, \gamma) \in \left(\mathbb{N}_{>1}\right)^3$ formant un triplet de naturels sans facteur carré.
- Notons que $\beta \neq \gamma$ car, dans le cas contraire, nous aurions $3 = u - q = \beta\left(U^2 - Q^2\right)$ qui fournirait $0 < |U^2 - Q^2| < 3$, et ceci contredirait le fait 3.1.
- Nous avons $m \wedge u = 1$, $m \wedge q \in \{1, 2, 4\}$ et $u \wedge q \in \{1, 3\}$ avec $m \wedge u = m \wedge q = u \wedge q = 1$ impossible car sinon on aurait $(m, u, q) \in \left({}^2\mathbb{N}\right)^3$ via $muq \in {}^2\mathbb{N}$.
- Dès lors, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $\left(v_p(m), v_p(u), v_p(q)\right) \in \left(2\mathbb{N}\right)^3$.
- Les points précédents donnent $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$, où $\beta \neq \gamma$, ainsi que $\alpha \wedge \beta = 1$, $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2\}$, $\beta \wedge \gamma \in \{1, 3\}$ avec $\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge \gamma = \beta \wedge \gamma = 1$ impossible. Ceci nous donne le tableau « mécanique » suivant qui montre que forcément $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$ ou $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$. Le plus dur est fait !

---

1. Rien n'empêche d'avoir n, $(n+2)$ et $(n+4)$ vérifiant tous les trois **[A 3]**.
2. On peut aussi noter que le fait 5.1 lève une contradiction car nous avons $m \in {}^2\mathbb{N}$ et $u \in {}^2\mathbb{N}$ qui donnent $(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	Statut
2	3	2	1	2	1	OK
2	3	6	1	2	3	OK
3	2	3	1	3	1	KO
3	2	6	1	3	2	KO

- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$ nous donne $m = 2M^2$, $m^2 - 1 = 3U^2$ et $m^2 - 4 = 2Q^2$.
  Comme m est pair, posant $m - 2 = 2r$ et notant $s = m + 2$, les faits suivants lèvent une contradiction.
  - $2rs = 2Q^2$ donne $rs = Q^2$.
  - $s \notin {}^2\mathbb{N}$, car dans le cas contraire, nous aurions $(m-2)(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$ via $(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) \in {}^2\mathbb{N}$, mais ceci ne se peut d'après le fait 6.1.
  - Les deux résultats précédents donnent $(\pi, R, S) \in \mathbb{N}_{>1} \times \mathbb{N}^2$ tel que $r = \pi R^2$ et $s = \pi S^2$ avec π sans facteur carré.
  - $4 = s - 2r = \pi(S^2 - 2R^2)$ donne alors $\pi = 2$, d'où $m + 2 = 2S^2$.
  - Finalement, $m = 2M^2$ et $m + 2 = 2S^2$ contredisent le fait 3.1 via $2 = 2(S^2 - M^2)$.
- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$ nous donne $m = 2M^2$, $m^2 - 1 = 3U^2$ et $m^2 - 4 = 6Q^2$.
  Les faits suivants lèvent une autre contradiction via une technique similaire à celle employée ci-dessus.
  - Travaillons modulo 3. Comme $m = 2M^2$, nous avons $m \equiv 0$ ou $m \equiv -1$. Or $m^2 - 1 = 3U^2$ donne $m^2 \equiv 1$, d'où $m \equiv -1$, puis $3 \mid m - 2$, et enfin $6 \mid m - 2$ puisque m est pair.
  - Posant $m - 2 = 6r$ et notant $s = m + 2$, nous avons $6rs = 6Q^2$, puis $rs = Q^2$.
  - $s \notin {}^2\mathbb{N}$ reste valable ici.
  - Les deux résultats précédents donnent $(\pi, R, S) \in \mathbb{N}_{>1} \times \mathbb{N}^2$ tel que $r = \pi R^2$ et $s = \pi S^2$ avec π sans facteur carré.
  - $4 = s - 6r = \pi(S^2 - 6R^2)$ donne $\pi = 2$, et on conclut comme avant. □

8. AFFAIRE À SUIVRE...