

CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTRIERS CONSÉCUTIFS – DES SOLUTIONS À LA MAIN

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons « Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International ».



TABLE DES MATIÈRES

1.	Ce qui nous intéresse	2
2.	Notations utilisées	2
3.	Les carrés parfaits	3
3.1.	Structure	3
3.2.	Distance entre deux carrés parfaits	3
4.	Avec 2 facteurs	4
5.	Avec 3 facteurs	5
6.	Avec 4 facteurs	6
7.	Avec 5 facteurs	8
8.	Avec 6 facteurs	12
9.	Avec 7 facteurs	17
10.	Avec 8 facteurs	19
11.	Avec 9 facteurs	22
12.	Avec 10 facteurs	23
13.	Avec 11 facteurs	25
14.	Avec 12 facteurs	26
15.	Avec 13 facteurs	27
16.	Sources utilisées	28

1. CE QUI NOUS INTÉRESSE

Dans l'article « *Note on Products of Consecutive Integers* »¹, Paul Erdős démontre que pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit de $(k+1)$ entiers consécutifs $n(n+1) \cdots (n+k)$ n'est jamais le carré d'un entier. Plus précisément, l'argument général de Paul Erdős est valable pour $k+1 \geq 100$, soit à partir de 100 facteurs.

Dans ce document, nous proposons quelques cas particuliers résolus de façon « adaptative » à la sueur des neurones, en évitant au maximum l'emploi de récurrence. Le but recherché est de fournir différentes approches même si parfois cela peut prendre du temps, et aussi manquer de finesse... C'est assumé !

Remarque 1.1. *Il arrivera parfois que certaine démonstration cite d'autres preuves données plus tard dans le texte. Ceci a été fait pour respecter les sources qui ont été utilisées.*

Remarque 1.2. *Si vous êtes intéressé par des preuves élégantes, efficaces et non récursives, voir mon document « Carrés parfaits et produits d'entiers consécutifs – Des preuves humaines faciles » qui ne garde que les meilleures preuves parmi celles proposées ici.*

Remarque 1.3. *Vous trouverez dans mon document « Carrés parfaits et produits d'entiers consécutifs – Une méthode efficace », un moyen très efficace pour traiter sans effort les premiers cas à la main, mais via de la récurrence. L'existence de ce document justifie que nous ne parlions de cette méthode juste pour $k=6$ afin d'obtenir une preuve alternative.*

2. NOTATIONS UTILISÉES

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- $\forall (n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2, \pi_n^k = \prod_{i=0}^{k-1} (n+i)$.

Par exemple, $\pi_n^1 = n$, $\pi_n^2 = n(n+1)$ et $\pi_{n+2}^4 = (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$.

- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des carrés parfaits. On note aussi ${}^2_*\mathbb{N} = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
 \mathbb{N}_{sf} est l'ensemble des naturels non nuls sans facteur carré².

- \mathbb{P} désigne l'ensemble des nombres premiers.

$\forall (p; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*, v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p -adique de n , c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n , contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.

- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m .
- $2\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
 $2\mathbb{N} + 1$ est l'ensemble des nombres naturels impairs.
- $(a \pm b)$ est un raccourci pour $(a+b)(a-b)$.

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).

2. En anglais, on dit « square free ».

3. LES CARRÉS PARFAITS

3.1. Structure.

Fait 3.1. $n \in {}^2\mathbb{N}$ si, et seulement si, $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(n) \in 2\mathbb{N}$.

Démonstration. Immédiat à valider. □

Fait 3.2. $\forall n \in {}^2\mathbb{N}$, s'il existe $m \in {}^2\mathbb{N}$ tel que $n = fm$ alors $f \in {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(fm) \in 2\mathbb{N}, v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(fm) = v_p(f) + v_p(m)$ donnent $v_p(f) \in 2\mathbb{N}$. □

Fait 3.3. $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $a \wedge b = 1$ et $ab \in {}^2\mathbb{N}$, alors $a \in {}^2\mathbb{N}$ et $b \in {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(ab) \in 2\mathbb{N}$, et p ne peut diviser à la fois a et b , donc $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(a) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(b) \in 2\mathbb{N}$, autrement dit $(a, b) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. □

Fait 3.4. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $ab \in {}^2\mathbb{N}$, ainsi que $(\alpha, \beta, A, B) \in (\mathbb{N}_{sf})^2 \times \mathbb{N}^2$ tel que $a = \alpha A^2$ et $b = \beta B^2$. Nous avons alors forcément $\alpha = \beta$.

Démonstration. Le fait 3.2 donne $\alpha\beta \in {}^2\mathbb{N}$. De plus, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(\alpha) \in \{0, 1\}$ et $v_p(\beta) \in \{0, 1\}$. Finalement, $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(\alpha) = v_p(\beta)$, autrement dit $\alpha = \beta$. □

3.2. Distance entre deux carrés parfaits.

Fait 3.5. Soit $(M, N) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $N > M$.

(1) $N^2 - M^2 \geq 2N - 1$, d'où l'impossibilité d'avoir $N^2 - M^2 < 3$.

(2) Notons nb_{sol} le nombre de solutions $(M, N) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de $N^2 - M^2 = \delta$.

Pour $\delta \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$, nous avons :

(a) $nb_{sol} = 0$ si $\delta \in \{1, 2, 4, 6, 10\}$.

(b) $nb_{sol} = 1$ si $\delta \in \{3, 5, 7, 8, 9\}$. Ainsi, $N^2 - M^2 = 3$ uniquement si $(M, N) = (1, 2)$.

Démonstration.

(1) Comme $N - 1 \geq M$, nous obtenons : $N^2 - M^2 \geq N^2 - (N - 1)^2 = 2N - 1$.

(2) Nous avons $2N - 1 \leq \delta$, soit $N \leq \frac{\delta + 1}{2}$. Ceci permet de comprendre le programme Python suivant donnant facilement les nombres de solutions indiqués. □

```
from math import sqrt, floor

# N**2 - M**2 = diff ?
def sol(diff):
    solfound = []

    for N in range(1, (diff + 1) // 2 + 1):
        M_square = N**2 - diff

        if M_square > 0:
            M = floor(sqrt(M_square))

            if M != 0 and M**2 == M_square:
                solfound.append((M, N))

    return solfound
```

4. AVEC 2 FACTEURS

Fait 4.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve 1. Il suffit de noter que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$. □

Preuve 2. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$.

Comme $n \wedge (n+1) = 1$, le fait 3.3 donne $(n, n+1) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$, d'où l'existence de deux carrés parfaits non nuls distants de 1. D'après le fait 3.5, ceci est impossible. □

Preuve 3. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1) = N^2$ où $N \in \mathbb{N}^*$.

Nous obtenons une contradiction comme suit.

$$\begin{aligned}
 & n(n+1) = N^2 \\
 \iff & 2 \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^N (2k-1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} n(n+1) = 2 \sum_{k=1}^n k \text{ et } N^2 = \sum_{k=1}^N (2k-1). \\
 \iff & \sum_{k=1}^n 2k = \sum_{k=1}^N 2k - N \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} N > n \text{ car } N^2 - n^2 = n > 0. \\
 \iff & \sum_{k=n+1}^N 2k - N = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} N > 0 \text{ rend impossible la dernière égalité.} \\
 \iff & \sum_{k=n+1}^{N-1} 2k + N = 0
 \end{aligned}$$

□

5. AVEC 3 FACTEURS

Fait 5.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve 1. Supposons que $\pi_n^3 \in {}^2\mathbb{N}$.

Posant $m = n + 1$, nous avons $\pi_n^3 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Comme $m \wedge (m^2-1) = 1$, le fait 3.3 donne $(m, m^2-1) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Or, $m^2-1 \in {}^2\mathbb{N}$ est impossible d'après le fait 3.5. \square

Preuve 2. Supposons que $\pi_n^3 \in {}^2\mathbb{N}$.

Comme $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ ne peut diviser au maximum qu'un seul des trois facteurs n , $(n+1)$ et $(n+2)$, nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 3}, \forall i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$. Mais que se passe-t-il pour $p = 2$?

Supposons d'abord $n \in 2\mathbb{N}$.

- Posant $n = 2m$, nous avons $\pi_n^3 = 4m(2m+1)(m+1)$, d'où $m(2m+1)(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$.
- Comme $v_2(2m+1) = 0$, nous savons que $2m+1 \in {}^2\mathbb{N}$.
- Donc $\pi_m^2 = m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$ via le fait 3.2, mais le fait 4.1 interdit cela.

Supposons maintenant $n \in 2\mathbb{N} + 1$.

- Nous savons que $n \in {}^2\mathbb{N}$ via $v_2(n) = 0$.
- On conclut comme dans le cas précédent mais en passant via $\pi_{n+1}^2 = (n+1)(n+2)$. \square

Preuve 3. Finissons avec une preuve dans l'esprit de la démonstration du cas 12.1. Pour cela, commençons par supposer que $\pi_n^3 \in {}^2\mathbb{N}$.

Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 3}, \forall i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$, donc pour les facteurs $(n+i)$ de π_n^3 , nous avons l'une des deux alternatives suivantes, chacune d'elles levant une contradiction.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ sont de valuations 2-adiques impairs.
Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (2M^2, 2N^2)$ avec $|2(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$, c'est-à-dire $|N^2 - M^2| = 1$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5.
- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ sont de valuations 2-adiques paires.
Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $|N^2 - M^2| \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5. \square

6. AVEC 4 FACTEURS

Fait 6.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve 1. Nous pouvons ici faire les manipulations algébriques naturelles suivantes qui cherchent à obtenir le même coefficient pour n dans chaque parenthèse.

$$\begin{aligned}
 \pi_n^4 &= n(n+3) \cdot (n+1)(n+2) \\
 &= (n^2+3n) \cdot (n^2+3n+2) \quad \left. \vphantom{(n^2+3n)} \right\} m = n^2+3n \\
 &= m(m+2) \\
 &= m^2+2m \\
 &= (m+1)^2-1
 \end{aligned}$$

Comme $m > 0$, $(m+1)^2-1 \notin {}^2\mathbb{N}$ d'après le fait 3.5, donc $\pi_n^4 \notin {}^2\mathbb{N}$. \square

Preuve 2. En « symétrisant » certaines expressions, nous obtenons d'autres manipulations algébriques qui permettent de conclure comme ci-dessus.

$$\begin{aligned}
 \pi_n^4 &= n(n+1)(n+2)(n+3) \quad \left. \vphantom{(n+1)} \right\} x = n + \frac{3}{2} \\
 &= \left(x \pm \frac{3}{2}\right) \left(x \pm \frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \quad \left. \vphantom{(x^2 - \frac{9}{4})} \right\} y = x^2 - \frac{5}{4} \text{ où } \frac{5}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{4}\right) \\
 &= (y \pm 1) \\
 &= y^2 - 1 \\
 &= \left(\left(n + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right)^2 - 1 \\
 &= (n^2 + 3n + 1)^2 - 1
 \end{aligned}$$

\square

Preuve 3. Cette preuve suivante s'inspire directement de la première démonstration du cas 8.1³. Nous commençons par supposer que $\pi_n^4 \in {}^2\mathbb{N}$.

Comme dans la première preuve ci-dessus, on note que $\pi_n^4 = m(m+2)$ où $m = n^2+3n$. Posons $m = \mu M^2$ où $(\mu, M) \in \mathbb{N}_{sf} \times \mathbb{N}^*$, de sorte que $\mu(\mu M^2+2) \in {}^2\mathbb{N}$ via le fait 3.2. Or $\mu \in \mathbb{N}_{sf}$ donne $\mu \mid (\mu M^2+2)$, d'où $\mu \mid 2$, et ainsi $\mu \in \{1, 2\}$ ⁴. Nous allons voir que ceci est impossible.

Supposons que $\mu = 1$.

- Dans ce cas $M^2+2 \in {}^2\mathbb{N}$ donne $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^2 = M^2+2$, soit tel que $N^2-M^2 = 2$, mais ceci contredit le fait 3.5.

Supposons que $\mu = 2$.

- Notons l'équivalence suivante.

$$\begin{aligned}
 &2(2M^2+2) \in {}^2\mathbb{N} \\
 \iff &M^2+1 \in {}^2\mathbb{N} \quad \left. \vphantom{(M^2+1)} \right\} \text{Via } 4 \cdot (M^2+1).
 \end{aligned}$$

- On a alors $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^2 = M^2+1$, c'est-à-dire tel que $N^2-M^2 = 1$, mais ceci contredit le fait 3.5. \square

3. Compte-tenu de la première preuve, celle proposée ici peut sembler « capillo-tracté ». Ceci étant dit, l'approche reste intéressante malgré tout, et de plus, rien n'interdit de s'amuser.

4. On comprend ici le choix d'avoir $\pi_n^4 = m(m+2)$.

Preuve 4. Un échange sur <https://math.stackexchange.com> a inspiré cette démonstration non algébrique (voir la section 16). Nous commençons par supposer que $\pi_n^4 \in {}^2\mathbb{N}$.

Clairement, nous avons les faits suivants.

- $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 4}, \forall i \in \llbracket 0; 3 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$.
- $\exists u \in \{n, n+1\}$ tel que $\{u, u+2\} \subset 2\mathbb{N} + 1$.
 Nous avons alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}, (v_p(u), v_p(u+2)) \in (2\mathbb{N})^2$, donc, pour tout naturel $m \in \{u, u+2\}$, il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = M^2$ ou $m = 3M^2$.
- Forcément, il existe $(A, B) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\{u, u+2\} = \{A^2, 3B^2\}$. Voici pourquoi.
 - $\{u, u+2\} = \{A^2, B^2\}$ donne deux carrés distants de 2, ceci contredit le fait 3.5.
 - $\{u, u+2\} = \{3A^2, 3B^2\}$ donne $3A^2 - 3B^2 = \pm 2$, ce qui est impossible.

Nous savons donc que l'un des facteurs $(n+i)$ de π_n^4 possède une valuation 3-adique impaire. Ceci n'est possible que si n et $(n+3)$ ont une valuation 3-adique impaire. Dès lors, comme ci-dessus, nous avons $(Q, R) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\{n+1, n+2\} = \{Q^2, 2R^2\}$. Ceci nous amène aux deux situations contradictoires suivantes où $(A, B, C, D) \in (\mathbb{N}^*)^4$.

- Cas 1 : $(n, n+1, n+2, n+3) = (6A^2, B^2, 2C^2, 3D^2)$.
 - Posons $x = n + \frac{3}{2}$ de sorte que $x - \frac{3}{2} = 6A^2, x - \frac{1}{2} = B^2, x + \frac{1}{2} = 2C^2$ et $x + \frac{3}{2} = 3D^2$.
 - Nous avons alors $(x - \frac{3}{2})(x + \frac{3}{2}) = 2E^2$, c'est-à-dire $x^2 - \frac{9}{4} = 2E^2$, avec $E \in \mathbb{N}^*$.
 - De même, $x^2 - \frac{1}{4} = 2F^2$ avec $F \in \mathbb{N}^*$.
 - Par simple soustraction, nous obtenons $2F^2 - 2E^2 = 2$, puis $F^2 - E^2 = 1$, mais ceci contredit le fait 3.5.
- Cas 2 : $(n, n+1, n+2, n+3) = (3A^2, 2B^2, C^2, 6D^2)$.

Un raisonnement similaire au précédent montre que ce cas aussi est impossible. □

7. AVEC 5 FACTEURS

Fait 7.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2\mathbb{N}_*$.

Preuve 1. Commençons par une idée simple consistant à se concentrer sur les nombres premiers de valuation impaire dans π_n^5 supposé être un carré parfait. Nous commençons par supposer que $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}_*$.

Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 5}, \forall i \in \llbracket 0; 4 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$. Pour $p = 2$ et $p = 3$, nous avons les alternatives suivantes pour chaque facteur $(n+i)$ de π_n^5 .

- **[A1]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A2]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times (2\mathbb{N} + 1)$
- **[A3]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times 2\mathbb{N}$
- **[A4]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times (2\mathbb{N} + 1)$

Comme nous avons cinq facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions très facilement.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A1]**.

Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $(M, N) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $N^2 - M^2 \in \{1, 2, 3, 4\}$. Selon le fait 3.5, seul $N^2 - M^2 = 3$ avec $(M, N) = (1, 2)$ est possible, puis nécessairement $n = 1$, or $\pi_1^5 = 5! \in {}^2\mathbb{N}$ est faux car $v_5(5!) = 1$.

Autre méthode : on note que $n \notin {}^2\mathbb{N}_*$ car sinon $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$ donne $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$ via le fait 3.2, mais ceci contredit le fait 6.1. De même, $n+4 \notin {}^2\mathbb{N}_*$. Dès lors, nous avons $\{n+i, n+i'\} \subseteq \{n+1, n+2, n+3\}$, d'où l'existence de deux carrés parfaits non nuls éloignés de moins de 3, et ceci contredit le fait 3.5.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A2]**.

Dans ce cas, le couple de facteurs est $(n, n+3)$, ou $(n+1, n+4)$.

(1) Supposons d'abord que n et $(n+3)$ vérifient **[A2]**.

Comme $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}, v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+3) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(n) \in 2\mathbb{N} + 1$ et $v_3(n+3) \in 2\mathbb{N} + 1$, nous avons $n = 3M^2$ et $n+3 = 3N^2$ où $(M, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Or, ceci donne $3 = 3N^2 - 3M^2$, puis $N^2 - M^2 = 1$ qui contredit le fait 3.5.

(2) De façon analogue, on ne peut pas avoir $(n+1)$ et $(n+4)$ vérifiant **[A2]**.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A3]**.

Comme dans le point précédent, c'est impossible car on aurait $2 = 2N^2 - 2M^2$, ou $4 = 2N^2 - 2M^2$, mais ceci contredirait le fait 3.5.

En effet, ici les couples possibles sont $(n, n+2)$, $(n, n+4)$, $(n+2, n+4)$ et $(n+1, n+3)$ ⁵.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A4]**.

Ceci donne deux facteurs différents divisibles par 6, mais c'est impossible. \square

5. A priori, rien n'empêche d'avoir n , $(n+2)$ et $(n+4)$ vérifiant tous les trois **[A3]**.

Preuve 2. Cette preuve s'inspire directement de la démonstration du cas 12.1 : on utilise plus efficacement le principe des tiroirs en commençant par un raisonnement plus grossier a priori. Comme quoi certains détails ne comptent pas, ou au contraire comptent trop ! Nous commençons par supposer que $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}_*$.

Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 5}, \forall i \in \llbracket 0; 4 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$. On doit donc s'intéresser à $p \in \{2, 3\}$, mais on peut observer très grossièrement qu'au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^5 sont divisibles par 3, donc au moins 3 facteurs sont de valuation p -adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$. Ces facteurs vérifient alors l'une des deux alternatives suivantes, chacune d'elles levant une contradiction.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ sont de valuations 2-adiques impairs.

Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (2M^2, 2N^2)$ avec $|2(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$, c'est-à-dire $|N^2 - M^2| \in \{1, 2\}$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ sont de valuations 2-adiques paires.

Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $|N^2 - M^2| \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$, mais ceci n'est possible que si $|N^2 - M^2| = 3$ d'après le fait 3.5 qui donne aussi que soit $(M, N) = (1, 2)$, soit $(M, N) = (2, 1)$. Ceci impose d'avoir $n = 1$, mais $\pi_1^5 = 5! \notin {}^2\mathbb{N}$ car $v_5(5!) = 1$. \square

Preuve 3. Voici une approche la plus simple possible ne faisant pas appel au principe des tiroirs. Nous commençons par supposer que $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}_*$.

En notant $m = n + 2$, nous avons $\pi_n^5 = m(m \pm 2)(m \pm 1) = m(m^2 - 1)(m^2 - 4)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

Démontrons que $m \in {}^2\mathbb{N}_*$.

- Si $m \in 2\mathbb{N} + 1$, nous avons clairement $m \wedge (m^2 - 1) = 1$ et $m \wedge (m^2 - 4) = 1$ (ici, la parité de m doit être utilisée). Donc $m \wedge ((m^2 - 1)(m^2 - 4)) = 1$, puis $m \in {}^2\mathbb{N}_*$ selon le fait 3.3.
- Si $m \in 2\mathbb{N}$, alors $m \wedge (m^2 - 1) = 1$ et $m \wedge (m^2 - 4) \in \{1, 2, 4\}$ (ici, la parité de m ne limite pas les possibilités). Soyons plus fin. Notant $m - 2 = 2A$ et $m + 2 = 2B$, nous avons clairement $m \wedge A = 1 = m \wedge B$ car $m \wedge (m - 2) = 2 = m \wedge (m + 2)$. Comme $\pi_n^5 = 4m(m^2 - 1)AB$, nous avons aussi $m(m^2 - 1)AB \in {}^2\mathbb{N}_*$ via le fait 3.2, et finalement $m \in {}^2\mathbb{N}_*$ selon le fait 3.3 et $m \wedge ((m^2 - 1)AB) = 1$.

Ce qui suit lève une contradiction.

- $m \in {}^2\mathbb{N}_*$ et $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}_*$ donnent $(m^2 - 1)(m^2 - 4) \in {}^2\mathbb{N}_*$ via le fait 3.2.
- En posant $x = m^2 \in \mathbb{N}_{\geq 9}$, nous arrivons à $(x - 1)(x - 4) = x^2 - 5x + 4 \in {}^2\mathbb{N}_*$, mais ceci est impossible d'après l'implication suivante.

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 4 &= (x - 2)^2 - x \quad \text{et} \quad x^2 - 5x + 4 = (x - 3)^2 + x - 5 \\ \implies (x - 3)^2 &< x^2 - 5x + 4 < (x - 2)^2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x^2 - 5x + 4 &= (x - 2)^2 - x \quad \text{et} \quad x^2 - 5x + 4 = (x - 3)^2 + x - 5} \right\} x - 5 > 0 \text{ et } x > 0.$$

\square

Preuve 4. Voici une approche similaire à la dernière preuve du cas 6.1. Nous commençons par supposer que $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}_*$.

Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 5}, \forall i \in \llbracket 0; 3 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$, ceci nous amène à considérer deux alternatives.

Supposons d'abord $\{n, n+2, n+4\} \subset 2\mathbb{N} + 1$.

- Nous avons alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}, (v_p(n), v_p(n+2), v_p(n+4)) \in (2\mathbb{N})^3$, donc, pour tout naturel $m \in \{n, n+2, n+4\}$, il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = M^2$ ou $m = 3M^2$.

- En raisonnant modulo 3, on constate que 3 divise au maximum un seul des trois éléments de $\{n, n+2, n+4\}$, donc nous avons au moins deux carrés parfaits dans $\{n, n+2, n+4\}$, mais ceci contredit le fait 3.5 (deux carrés parfaits ne sont jamais distants de 2 ou 4).

Supposons maintenant $\{n+1, n+3\} \subset 2\mathbb{N}+1$.

- Comme ci-dessus, soit $(n+1, n+3) = (A^2, 3B^2)$, soit $(n+1, n+3) = (3A^2, B^2)$, avec $(A, B) \in (\mathbb{N}^*)^2$, car $(n+1, n+3) = (A^2, B^2)$ est impossible.
- Supposons $(n+1, n+3) = (A^2, 3B^2)$. Ce qui suit lève alors une contradiction.
 - Forcément, $n = 3C^2$ ou $n = 6C^2$ avec $C \in \mathbb{N}^*$. Le fait 3.5 impose d'avoir $n = 6C^2$.
 - Donc $\{n+2, n+4\} \subset 2\mathbb{N} - 3\mathbb{N}$, puis, via le fait 3.5, $\{n+2, n+4\} = \{D^2, 2E^2\}$ avec $(D, E) \in (\mathbb{N}^*)^2$ nécessairement.
 - $(n+1)$ et $(n+2)$ étant trop proches pour être tous les deux des carrés parfaits, nous arrivons à $(n+2, n+4) = (2D^2, E^2)$.
 - Or $n+4 \in {}^2\mathbb{N}$ et $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}$ donnent $\pi_n^4 \in {}^2\mathbb{N}$ d'après le fait 3.2, mais ceci contredit le fait 6.1.
- Forcément, $(n+1, n+3) = (3A^2, B^2)$, mais ce qui suit lève une nouvelle contradiction via une démarche similaire à la précédente.
 - Forcément, $n+4 = 6C^2$ avec $C \in \mathbb{N}^*$.
 - Ensuite, $(n, n+2) = (D^2, 2E^2)$ avec $(D, E) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
 - $n \in {}^2\mathbb{N}$ et $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}$ donnent $\pi_{n+1}^4 \in {}^2\mathbb{N}$, ce qui est faux. □

Preuve 5. Bien que longue, cette preuve se comprend bien, car nous ne faisons qu'avancer à vue, mais avec rigueur. Nous commençons par supposer que $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}$.

Posant $m = n+2$, nous avons $\pi_n^5 = m(m \pm 2)(m \pm 1) = m(m^2 - 1)(m^2 - 4)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Pour la suite, on pose $u = m^2 - 1$ et $q = m^2 - 4$.

Notons que $u \notin {}^2\mathbb{N}$ et $q \notin {}^2\mathbb{N}$.

- $u \in {}^2\mathbb{N}$ donne $m^2 - 1 \in {}^2\mathbb{N}$ qui est impossible d'après le fait 3.5.
- $q \in {}^2\mathbb{N}$ donne $m^2 - 4 \in {}^2\mathbb{N}$ qui est impossible d'après le fait 3.5.

Supposons d'abord que $m \in {}^2\mathbb{N}$.

- De $muq \in {}^2\mathbb{N}$, nous déduisons que $uq \in {}^2\mathbb{N}$ via le fait 3.2.
- Comme $u - q = 3$, nous savons que $u \wedge q \in \{1, 3\}$.
- Si $u \wedge q = 1$, alors $(u, q) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$ d'après le fait 3.3, mais ceci est impossible.
- Si $u \wedge q = 3$, alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(u) \in 2\mathbb{N}+1$ et $v_3(q) \in 2\mathbb{N}+1$, car $u \notin {}^2\mathbb{N}$ et $q \notin {}^2\mathbb{N}$. Donc $u = 3U^2$ et $q = 3Q^2$ avec $(U, Q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Or $u - q = 3$ donne $U^2 - Q^2 = 1$, et le fait 3.5 nous indique une contradiction.

Supposons maintenant que $m \notin {}^2\mathbb{N}$.

- Ici, $m = \alpha M^2$, $u = \beta U^2$, $q = \gamma Q^2$ avec $(M, U, Q) \in (\mathbb{N}^*)^3$ et $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathbb{N}_{sf} \cap \mathbb{N}_{>1}$.
- Notons que $\beta \neq \gamma$, car, dans le cas contraire, $3 = u - q = \beta(U^2 - Q^2)$ fournirait $\beta = 3$ puis $U^2 - Q^2 = 1$, et ceci contredirait le fait 3.5.
- Nous avons $m \wedge u = 1$, $m \wedge q \in \{1, 2, 4\}$ et $u \wedge q \in \{1, 3\}$ avec $m \wedge u = m \wedge q = u \wedge q = 1$ impossible car sinon on aurait $(m, u, q) \in ({}^2\mathbb{N})^3$ via $muq \in {}^2\mathbb{N}$ et le fait 3.3.
- Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$, $(v_p(m), v_p(u), v_p(q)) \in (2\mathbb{N})^3$.

- Les points précédents donnent $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$ avec de plus $\beta \neq \gamma$, ainsi que $\alpha \wedge \beta = 1$, $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2\}$ et $\beta \wedge \gamma \in \{1, 3\}$. Notons au passage que $\alpha \wedge \beta = 1$ implique $(\alpha, \beta) = (2, 3)$, ou $(\alpha, \beta) = (3, 2)$. Via le tableau « mécanique » ci-après, nous obtenons que forcément $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$ ou $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$. Le plus dur est fait !

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	<i>Statut</i>
2	3	2	1	2	1	✓
2	3	6	1	2	3	✓
3	2	3	1	3	1	✗
3	2	6	1	3	2	✗

- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$ nous donne $m = 2M^2$, $u = 3U^2$ et $q = 2Q^2$, d'où la contradiction $3 \cdot 4M^2U^2Q^2 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$ nous donne $m = 2M^2$, $m^2 - 1 = 3U^2$ et $m^2 - 4 = 6Q^2$, mais ce qui suit lève une autre contradiction.
 - Travaillons modulo 3. Nous avons $m \equiv 2M^2 \equiv 0$ ou -1 . Or $m^2 - 1 = 3U^2$ donne $m^2 \equiv 1$, d'où $m \equiv -1$, puis $3 \mid m - 2$, et enfin $6 \mid m - 2$ puisque m est pair.
 - Posant $m - 2 = 6r$ et notant $s = m + 2$, nous avons $6rs = 6Q^2$, puis $rs = Q^2$.
 - $s \notin {}^2_*\mathbb{N}$. Sinon $(m-2)(m-1)m(m+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$ via $(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) \in {}^2_*\mathbb{N}$ et le fait 3.2, mais ceci ne se peut pas d'après le fait 6.1.
 - Les deux résultats précédents et le fait 3.4 donnent $(\pi, R, S) \in \mathbb{N}_{sf} \times (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $r = \pi R^2$ et $s = \pi S^2$ avec $\pi \in \mathbb{N}_{>1}$.
 - Dès lors, $4 = s - 6r = \pi(S^2 - 6R^2)$ donne $\pi = 2$, d'où $m + 2 = 2S^2$.
 - Finalement, $m = 2M^2$ et $m + 2 = 2S^2$ donnent $2 = 2(S^2 - M^2)$, soit $1 = S^2 - M^2$, ce qui contredit le fait 3.5. \square

8. AVEC 6 FACTEURS

Fait 8.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^6 \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve 1. Cette démonstration se trouve dans l'article « Solution of a Problem »⁶ de G. W. Hill et J. E. Oliver. Une petite simplification a été faite pour arriver à $\pi_n^6 = (a-4)a(a+2)$. Commençons par supposer que $\pi_n^6 \in {}^2\mathbb{N}$.

Commençons par de petites manipulations algébriques où la première modification fait apparaître le même coefficient pour n dans chaque parenthèse.

$$\begin{aligned} \pi_n^6 &= n(n+5) \cdot (n+1)(n+4) \cdot (n+2)(n+3) \\ &= (n^2+5n)(n^2+5n+4)(n^2+5n+6) \\ &= x(x+4)(x+6) \\ &= (a-4)a(a+2) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} x = n^2 + 5n \in \mathbb{N}_{\geq 6} \\ \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} a = x + 4 \in \mathbb{N}_{\geq 10} \end{array}$$

Nous avons $a \in \mathbb{N}_{\geq 10}$ vérifiant $a(a+2)(a-4) \in {}^2\mathbb{N}$. Posons $a = \alpha A^2$ où $(\alpha, A) \in \mathbb{N}_{sf} \times \mathbb{N}^*$, de sorte que $\alpha(\alpha A^2+2)(\alpha A^2-4) \in {}^2\mathbb{N}$ via le fait 3.2. Or $\alpha \in \mathbb{N}_{sf}$ donne $\alpha \mid (\alpha A^2+2)(\alpha A^2-4)$, d'où $\alpha \mid 8$, et ainsi $\alpha \in \{1, 2\}$ ⁷. Nous allons voir que ceci est impossible.

Supposons que $\alpha = 1$.

- Notons les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} (A^2+2)(A^2-4) &\in {}^2\mathbb{N} \\ \iff (u+3)(u-3) &\in {}^2\mathbb{N} \\ \iff u^2-9 &\in {}^2\mathbb{N} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} u = A^2 - 1 \text{ où } -1 = \frac{2-4}{2}.$$

- Ensuite, prenant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = u^2 - 9$, le fait 3.5 donne $(m, u) = (4, 5)$ d'où la contradiction suivante.

$$\begin{aligned} u = 5 &\iff A^2 - 1 = 5 \\ &\iff A^2 = 6 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 6 \notin {}^2\mathbb{N}.$$

Supposons que $\alpha = 2$.

- Notons l'équivalence suivante.

$$\begin{aligned} 2(2A^2+2)(2A^2-4) &\in {}^2\mathbb{N} \\ \iff 2(A^2+1)(A^2-2) &\in {}^2\mathbb{N} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Via } 4 \cdot 2(A^2+1)(A^2-2).$$

- Ensuite, en travaillant modulo 3, nous avons $2(A^2+1)(A^2-2) \equiv -4 \equiv 2$ qui ne correspond à aucun carré modulo 3. \square

Preuve 2. Se reporter à la preuve du cas 9.1 qui s'adapte mot pour mot au cas présent mais en considérant $u \in \{n, n+1\}$ tel que $\{u, u+2, u+4\} \subset 2\mathbb{N}+1$. \square

Preuve 3. Dans une discussion archivée consultée le 28 janvier 2024, voir la section 16, sont présentés les tableaux au coeur de cette preuve⁸. Nous commençons par supposer que $\pi_n^6 \in {}^2\mathbb{N}$.

- Comme clairement $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 6}, \forall i \in \llbracket 0; 5 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$, nous nous intéressons aux nombres premiers $p \in \mathbb{P}_{<6}$.

6. The Analyst (1874).

7. On comprend ici le choix d'avoir $\pi_n^6 = (a-4)a(a+2)$.

8. Ces tableaux sont suffisamment intéressants pour leur dédier un écrit : voir mon document « Carrés parfaits et produits d'entiers consécutifs – Une méthode efficace ».

- Nous allons tenter d'envisager toutes les alternatives possibles pour les parités des valuations p -adiques des facteurs $(n+i)$ de π_n^6 lorsque $p \in \mathbb{P}_{<6}$.

Les tableaux suivants donnent toutes les alternatives possibles. Par exemple, la 3^e ligne du tableau de 2 donne $v_2(n+i) \in 2\mathbb{N}$ pour $i \in \{0, 4\}$, et $v_2(n+i) \in 2\mathbb{N} + 1$ sinon.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4	5	No. de ligne
2	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	2	1	1	1	2
	2	1	1	1	2	1	3
	1	2	1	2	1	1	4
	1	2	1	1	1	2	5
	1	1	2	1	2	1	6
	1	1	1	2	1	2	7

$n + \bullet$	0	1	2	3	4	5	No. de ligne
3	1	1	1	1	1	1	1
	3	1	1	3	1	1	2
	1	3	1	1	3	1	3
	1	1	3	1	1	3	4
$n + \bullet$	0	1	2	3	4	5	No. de ligne
5	1	1	1	1	1	1	1
	5	1	1	1	1	5	2

Si nous supposons avoir les trois alternatives surlignées en vert, nous pouvons affirmer avoir les informations suivantes en notant au passage que les coefficients sans facteur carré s'obtiennent en multipliant les lignes cellule par cellule.

- $\exists A \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 10A^2$.
- $\exists B \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 1 = 3B^2$.
- $\exists C \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 2 = C^2$.
- $\exists D \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 3 = D^2$.
- $\exists E \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 4 = 6E^2$.
- $\exists F \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 5 = 5F^2$.

Ce qui précède est impossible, car $D^2 - C^2 = 1$ contredit le fait 3.5. Intéressant mais a priori nous devrions analyser $7 \times 4 \times 2 = 56$ possibilités ! Nous allons être plus efficace en éliminant certaines situations rapidement. C'est parti !

- (1) Notons $\boxed{d.t.c}$ le produit cellule par cellule des lignes numérotées d , t et c des tableaux de 2, 3 et 5 respectivement. Nous venons de voir que $\boxed{3.3.2}$ lève une contradiction.
- (2) **Pas de motif $\boxed{1\dots}$ ou $\boxed{\dots 1}$.**
Un produit $\boxed{d.t.c}$ commençant par 1 donne $\pi_{n+1}^5 \in {}^2\mathbb{N}$ via le fait 3.2, or c'est impossible d'après le fait 7.1. De même, un produit se finissant par 1 lève une contradiction.
- (3) **Pas de motif $\boxed{11}$.**
Un produit $\boxed{d.t.c}$ contenant deux 1 consécutifs lève une contradiction (vu dans l'exemple ci-dessus).
- (4) **Pas de motif $\boxed{1*1}$.**
Un produit $\boxed{d.t.c}$ contenant deux 1 séparés par une seule cellule lève une contradiction, car ceci donne $N^2 - M^2 = 2$ qui contredit le fait 3.5.
- (5) **Pas de motif $\boxed{1**1}$.**
Un produit $\boxed{d.t.c}$ contenant deux 1 séparés par deux cellules n'est possible que si le 1 est en début de ligne et $n = 1$, car $N^2 - M^2 = 3$ uniquement si $(M, N) = (1, 2)$ d'après le fait 3.5. Comme nous rejetons les produits commençant par 1, nous avons un nouveau critère pour lever une contradiction.
- (6) **Pas de motif $\boxed{2*2}$.**
Un produit $\boxed{d.t.c}$ contenant deux 2 séparés par une seule cellule lève une contradiction, car ceci donne $2N^2 - 2M^2 = 2$, puis $N^2 - M^2 = 1$.

(7) **Pas de motif** $\boxed{3**3}$.

Un produit $\boxed{d.t.c}$ contenant deux 3 séparés par deux cellules lève une contradiction, car ceci donne $3N^2 - 3M^2 = 3$, puis $N^2 - M^2 = 1$.

(8) **Pas de motif** $\boxed{5****5}$.

Un produit $\boxed{d.t.c}$ contenant deux 5 séparés par quatre cellules lève une contradiction, car ceci donne $5N^2 - 5M^2 = 5$, puis $N^2 - M^2 = 1$.

Nous voilà armé pour lever des contractions à la chaîne.

- D'après le point 2, tous les produits du type $\boxed{1.t.1}$ lèvent une contradiction.
Il reste 52 cas à traiter.
- D'après le point 3, tous les produits du type $\boxed{1.t.2}$ lèvent une contradiction.
Il reste 48 cas à traiter.
- Les points 2, 3 et 6 lèvent une contradiction pour les produits du type $\boxed{d.1.c}$ où $d \neq 1$.
Il reste 36 cas à traiter.
- Pour les produits du type $\boxed{d.t.1}$ où $d \neq 1$ et $t \neq 1$, les points 2, 3, 6 et 7 lèvent une contradiction.
Il reste 18 cas à traiter.
- Les produits restants sont du type $\boxed{d.t.2}$ où $d \neq 1$ et $t \neq 1$. Ceci revient à se concentrer sur les tableaux suivants.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4	5
2	2	1	2	1	1	1
	2	1	1	1	2	1
	1	2	1	2	1	1
	1	2	1	1	1	2
	1	1	2	1	2	1
	1	1	1	2	1	2

$n + \bullet$	0	1	2	3	4	5	Produit
(3, 5)	15	1	1	3	1	5	$\boxed{2.2}$
	5	3	1	1	3	5	$\boxed{3.2}$
	5	1	3	1	1	15	$\boxed{4.2}$

- Pour $\boxed{d.2.2}$ avec $d \neq 1$, les points 4, 5 et 6 permettent d'obtenir des contradictions.
Il reste 12 cas à traiter.
- Pour $\boxed{d.3.2}$ avec $d \neq 1$, les points 3, 7 et 8 permettent d'obtenir des contradictions.
Il reste 6 cas à traiter.
- Pour $\boxed{d.4.2}$ avec $d \neq 1$, les points 3, 4, 5 et 6 permettent d'obtenir des contradictions.
Tous les cas ont été traités.

Noter le peu de réflexion que nous avons dû engager dans cette démonstration. \square

Preuve 4. Bien que très longue⁹, cette preuve est simple à comprendre car elle ne fait que dérouler le fil des faits découverts. Commençons par supposer que $\pi_n^6 \in {}^2\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 \pi_n^6 &= n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \\
 \iff \pi_n^6 &= \left(x \pm \frac{5}{2}\right) \left(x \pm \frac{3}{2}\right) \left(x \pm \frac{1}{2}\right) \\
 \iff 2^6 \pi_n^6 &= (y \pm 5)(y \pm 3)(y \pm 1)
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = n + 2 + \frac{1}{2} \text{ (on symétrise la formule).} \\ y = 2x \text{ (on chasse les fractions).} \end{array}$$

9. Ce sera notre dernière tentative de démonstration à faible empreinte cognitive.

$$\begin{aligned}
2^6 \pi_n^6 &= (y \pm 5)(y \pm 3)(y \pm 1) \\
\iff 2^6 \pi_n^6 &= (z - 25)(z - 9)(z - 1) \\
\iff 2^6 \pi_n^6 &= (u - 8)(u + 8)(u + 16)
\end{aligned}
\quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} z = y^2 \\ u = z - 17 \text{ où } 17 = \frac{25+9}{2} . \end{array}$$

Notant $a = u - 8$, $b = u + 8$ et $c = u + 16$, où $u = (2n + 5)^2 - 17 \in 2\mathbb{N}$, nous avons les faits suivants.

- $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$ car $(2 + 5)^2 - 17 = 32$.
- $(a, b, c) \in (\mathbb{N}_{\geq 24})^3$ avec $abc \in {}^2\mathbb{N}$ puisque $2^6 \pi_n^6 \in {}^2\mathbb{N}$.
- $a \wedge b \mid 16$ via $b - a = 16$.
- $a \wedge c \mid 24$ via $c - a = 24$.
- $b \wedge c \mid 8$ via $c - b = 8$.
- En particulier, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) \in (2\mathbb{N})^3$.

Démontrons qu'aucun des trois entiers a , b et c ne peut être un carré parfait.

- Commençons par supposer que $a \in {}^2\mathbb{N}$.

Dans ce cas, $bc \in {}^2\mathbb{N}$ via le fait 3.2, soit $(u + 8)(u + 16) \in {}^2\mathbb{N}$. En posant $w = u + 12$, on arrive à $(w - 4)(w + 4) \in {}^2\mathbb{N}$, soit $w^2 - 16 \in {}^2\mathbb{N}$, d'où $(m, w) = (3, 5)$ grâce au fait 3.5. Or $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$ donne $w \in \mathbb{N}_{\geq 20}$, d'où une contradiction.

- Supposons maintenant que $b \in {}^2\mathbb{N}$.

Dans ce cas, $ac \in {}^2\mathbb{N}$, soit $(u - 8)(u + 16) \in {}^2\mathbb{N}$. En posant $w = u + 4$, on arrive à $(w - 12)(w + 12) \in {}^2\mathbb{N}$, soit $w^2 - 144 \in {}^2\mathbb{N}$. Notant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = w^2 - 144$, nous arrivons à $w^2 - m^2 = 144$, d'où $(m, w) \in \{(5, 13), (9, 15), (16, 20), (35, 37)\}^{10}$. Comme $u \in 2\mathbb{N}$ donne $w \in 2\mathbb{N}$, nécessairement $(m, w) = (16, 20)$, mais les équivalences suivantes lèvent une contradiction.

$$\begin{aligned}
u + 4 = 20 &\iff u = 16 \\
&\iff (2n + 5)^2 - 17 = 16 \\
&\iff (2n + 5)^2 = 33
\end{aligned}
\quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 33 \notin {}^2\mathbb{N}$$

- Supposons enfin que $c \in {}^2\mathbb{N}$.

Dans ce cas, $ab \in {}^2\mathbb{N}$, soit $(u - 8)(u + 8) \in {}^2\mathbb{N}$, c'est-à-dire $u^2 - 64 \in {}^2\mathbb{N}$. Notant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = u^2 - 64$, nous arrivons à $u^2 - m^2 = 64$. Ceci n'est possible que si $(m, u) \in \{(6, 10), (15, 17)\}$. Or $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$ donne une contradiction.

Donc $a = \alpha A^2$, $b = \beta B^2$ et $c = \gamma C^2$ avec $(A, B, C) \in (\mathbb{N}^*)^3$ et $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathbb{N}_{sf} \cap \mathbb{N}_{>1}$, ceci nous donnant les faits suivants.

- $\alpha \wedge \beta \in \{1, 2\}$ d'après $a \wedge b \mid 16$.
- $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2, 3\}$ d'après $a \wedge c \mid 24$.
- $\beta \wedge \gamma \in \{1, 2\}$ d'après $b \wedge c \mid 8$.
- $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$ car $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) \in (2\mathbb{N})^3$.

10. Le programme reproduit après la preuve du fait 3.5 donne rapidement cet ensemble de couples.

En fait, α , β et γ sont différents deux à deux.

- Démontrons que $\alpha \neq \beta$.

Dans le cas contraire, $16 = b - a = \alpha(B^2 - A^2)$ et $\alpha > 1$ donnent $B^2 - A^2 \in \{1, 2, 4, 8\}$, puis forcément $B^2 - A^2 = 8$ avec $(B, A) = (3, 1)$ d'après le fait 3.5. Comme de plus, $\alpha = 2$, nous obtenons $a = 2$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.

- Nous avons aussi $\beta \neq \gamma$.

Dans le cas contraire, $8 = c - b = \beta(C^2 - B^2)$ et $\beta > 1$ donnent $C^2 - B^2 \in \{1, 2, 4\}$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5.

- Enfin, $\alpha \neq \gamma$.

Dans le cas contraire, $C^2 - A^2 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ car $24 = c - a = \alpha(C^2 - A^2)$ et $\alpha > 1$. Le fait 3.5 ne laisse plus que les possibilités suivantes.

- (1) $C^2 - A^2 = 3$ n'est possible que si $(C, A) = (2, 1)$. Comme de plus $\alpha = 8$, nous avons $a = 8$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.
- (2) $C^2 - A^2 = 8$ n'est possible que si $(C, A) = (3, 1)$. Comme de plus $\alpha = 3$, nous avons $a = 3$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.
- (3) $C^2 - A^2 = 12$ n'est possible que si $(C, A) = (4, 2)$. Comme de plus $\alpha = 2$, nous avons $a = 8$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.

Comme $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$, $\alpha \wedge \beta \in \{1, 2\}$, $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2, 3\}$ et $\beta \wedge \gamma \in \{1, 2\}$, et comme de plus α , β et γ sont différents deux à deux, il ne nous reste plus qu'à analyser les cas suivants. La lumière est proche...

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	Statut
2	3	6	1	2	3	☒
2	6	3	2	1	3	☒
3	2	6	1	3	2	✓
3	6	2	3	1	2	☒
6	2	3	2	3	1	✓
6	3	2	3	2	1	☒

Traisons les deux cas restants en nous souvenant que $a = u - 8$, $b = u + 8$ et $c = u + 16$.

- Supposons $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, 2, 6)$, autrement dit $a = 3A^2$, $b = 2B^2$ et $c = 6C^2$.

Travaillons modulo 3 afin de lever une contradiction.

- (1) $a \equiv u - 2$ et $a \equiv 3A^2 \equiv 0$ donnent $u \equiv 2$.

- (2) D'autre part, $b \equiv 2B^2 \equiv 0$ ou 2 . Or $b \equiv u + 2 \equiv 1$ lève une contradiction.

- Supposons $(\alpha, \beta, \gamma) = (6, 2, 3)$, autrement dit $a = 6A^2$, $b = 2B^2$ et $c = 3C^2$.

La preuve précédente s'adapte directement car $a \equiv 6A^2 \equiv 0$ et $b \equiv 2B^2$ modulo 3. \square

9. AVEC 7 FACTEURS

Fait 9.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve 1. Cette jolie preuve vient d'un échange sur <https://math.stackexchange.com> (voir la section 16). Nous avons comblé les trous en apportant de petites simplifications. Nous commençons par supposer que $\pi_n^7 \in {}^2\mathbb{N}$.

Commençons par quelques observations immédiates.

- $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 7}, \forall i \in \llbracket 0; 6 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$.
- $\exists u \in \{n, n+1, n+2\}$ tel que $\{u, u+2, u+4\} \subset 2\mathbb{N}+1$.
Nous avons alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3, 5\}, (v_p(u), v_p(u+2), v_p(u+4)) \in (2\mathbb{N})^3$. Cette astuce permet de passer de la gestion des trois nombres premiers 2, 3 et 5 à celle de 3 et 5. Donc, pour tout naturel $m \in \{u, u+2, u+4\}$, il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = M^2$, $m = 3M^2$, $m = 5M^2$ ou $m = 15M^2$.
- Parmi les trois naturels $u, u+2$ et $u+4$, ...
 - il en existe un, et un seul, divisible par 3, comme on le constate vite en raisonnant modulo 3,
 - au plus un est divisible par 5,
 - au plus un est un carré parfait d'après le fait 3.5.

Donc, il existe $(M, P, Q) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $\{u, u+2, u+4\} = \{M^2, 3P^2, 5Q^2\}$. Ceci permet de considérer les trois cas suivants qui lèvent tous une contradiction.

- Supposons avoir $u = M^2$.
 - (1) Comme $\{u+2, u+4\} = \{3P^2, 5Q^2\}$, nous savons que $3 \nmid (u+3)$ et $5 \nmid (u+3)$, d'où $u+3 = 2^a A^2$ avec $(a, A) \in \mathbb{N} \times (2\mathbb{N}+1)$.
 - (2) Modulo 8, $u \equiv M^2 \equiv 1$ car $u \in 2\mathbb{N}+1$, donc $u+3 \equiv 4$, d'où $a = 2$.
 - (3) Dès lors, $u+3 \in {}^2\mathbb{N}$, puis $(u, u+3) = (1, 4)$ via le fait 3.5.
 - (4) Nous arrivons à $n = u = 1$, mais $v_7(\pi_1^7) = 1$ contredit l'hypothèse $\pi_n^7 \in {}^2\mathbb{N}$.
- Supposons maintenant que $u+2 = M^2$.
Ce qui suit démontre que $\{u, u+4\} = \{3P^2, 5Q^2\}$ est impossible.
 - (1) Si $(u, u+4) = (3P^2, 5Q^2)$, alors, comme $u \in 2\mathbb{N}+1$, nous avons, modulo 4, $u \equiv 3$ et $u+4 \equiv 1$ qui se contredisent.
 - (2) Si $(u, u+4) = (5Q^2, 3P^2)$, on raisonne de même.
- Supposons enfin que $u+4 = M^2$.
Démontrons que $\{u, u+2\} = \{3P^2, 5Q^2\}$ est impossible en raisonnant modulo 8.
 - (1) $u+4 \equiv M^2 \equiv 1$ via $u \in 2\mathbb{N}+1$, d'où $u+3 \equiv 0$.
 - (2) $u+2 \in \{3P^2, 5Q^2\}$ donne $u+2 \equiv 3$ ou 5 via $u \in 2\mathbb{N}+1$.
 - (3) Les deux points précédents se contredisent. □

Preuve 2. Pour cette preuve, nous reprenons l'idée de la démonstration du cas 12.1; nous indiquons juste les adaptations à faire en reprenant les notations de la preuve citée.

Ici nous avons au moins 5 facteurs $(n+i)$ de π_n^7 de valuation p -adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$. Ceci nous amène aux cas suivants.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient [A1].
Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $|N^2 - M^2| \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, mais ce qui suit lève des contradictions.

(1) $|N^2 - M^2| = 3$ donne $n = 1$, mais $\pi_1^7 = 7! \notin {}^2\mathbb{N}$ via $v_7(7!) = 1$.

(2) $|N^2 - M^2| = 5$ donne $n \in \llbracket 2; 4 \rrbracket$, mais $\forall n \in \llbracket 2; 4 \rrbracket$, $v_7(\pi_n^7) = 1$ donne $\pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$.

- Deux facteurs différents $(n + i)$ et $(n + i')$ vérifient **[A2]**.

Dans ce cas, $(n + i, n + i') = (3M^2, 3N^2)$ avec $|3(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5.

- Deux facteurs différents $(n + i)$ et $(n + i')$ vérifient **[A3]**.

Dans ce cas, $(n + i, n + i') = (2M^2, 2N^2)$ avec $|2(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, puis nécessairement $|N^2 - M^2| = 3$ qui implique $n \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n + i)$ et $(n + i')$ vérifient **[A4]**.

Dans ce cas, $(n + i, n + i') = (6M^2, 6N^2)$ avec $|6(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5. \square

10. AVEC 8 FACTEURS

Fait 10.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve 1. Cette démonstration vient d'un document d'entraînement aux Olympiades Mathématiques (se reporter à la section 16). L'idée de départ est similaire au cas de quatre facteurs.

- Nous avons les manipulations algébriques naturelles suivantes.

$$\begin{aligned} \pi_n^8 &= n(n+7) \cdot (n+1)(n+6) \cdot (n+2)(n+5) \cdot (n+4)(n+3) \\ &= (n^2+7n)(n^2+7n+6)(n^2+7n+10)(n^2+7n+12) \\ &= a(a+6)(a+10)(a+12) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \pi_n^8 &= n(n+7) \cdot (n+1)(n+6) \cdot (n+2)(n+5) \cdot (n+4)(n+3) \\ &= (n^2+7n)(n^2+7n+6)(n^2+7n+10)(n^2+7n+12) \end{aligned}} \right\} a = n^2 + 7n \in \llbracket 8; +\infty \rrbracket$$

- Clairement $a \in 2\mathbb{N}$, donc $a = 2b$ avec $b \in \llbracket 4; +\infty \rrbracket$, d'où les implications suivantes.

$$\begin{aligned} &\pi_n^8 \in {}^2_*\mathbb{N} \\ \implies &2b(2b+6)(2b+10)(2b+12) \in {}^2_*\mathbb{N} \\ \implies &16b(b+3)(b+5)(b+6) \in {}^2_*\mathbb{N} \\ \implies &b(b+3)(b+5)(b+6) \in {}^2_*\mathbb{N} \\ \implies &(b^2+6b)(b^2+8b+15) \in {}^2_*\mathbb{N} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Voir le fait 3.2.} \\ \text{Via } b(b+6) \cdot (b+3)(b+5). \end{array}$$

- Que faire de $(b^2+6b)(b^2+8b+15)$?

Tentons de passer via $c = b^2 + 7b$ la moyenne de $b^2 + 6b$ et $b^2 + 8b$. Voici une première constatation.

$$\begin{aligned} &(b^2+6b)(b^2+8b+15) \\ &= (c-b)(c+b+15) \\ &= (c-b)(c+b) + 15(c-b) \\ &= c^2 - b^2 + 15(b^2+6b) \\ &= c^2 + 14b^2 + 90b \\ &= c^2 + 14(c-7b) + 90b \\ &= c^2 + 14c - 8b \\ &< c^2 + 14c + 49 \\ &< (c+7)^2 \end{aligned}$$

Pas mal ! Avons-nous $(b^2+6b)(b^2+8b+15) > (c+6)^2$? Si oui, nous pourrions conclure. Voici ce que cela donne.

$$\begin{aligned} &(b^2+6b)(b^2+8b+15) - (c+6)^2 \\ &= c^2 + 14c - 8b - (c+6)^2 \\ &= 2c - 8b - 36 \\ &= 2b^2 + 6b - 36 \\ &\geq 32 + 24 - 36 \\ &> 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} &(b^2+6b)(b^2+8b+15) - (c+6)^2 \\ &= c^2 + 14c - 8b - (c+6)^2 \\ &= 2c - 8b - 36 \end{aligned}} \right\} b \in \llbracket 4; +\infty \rrbracket$$

□

Preuve 2. Cette démonstration est très astucieuse, voire magique. Elle se trouve dans un échange sur <https://math.stackexchange.com> (se reporter à la section 16). Comme pour le cas de quatre facteurs, l'algèbre va nous permettre d'aller relativement vite.

- L'une des preuves du fait 6.1 nous donne $n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1$.
En particulier, $(n+4)(n+5)(n+6)(n+7) = (n^2 + 11n + 29)^2 - 1$.
- L'idée astucieuse va être de considérer les deux expressions suivantes qui viennent de $\pi_n^8 = (f(n)^2 - 1)(g(n)^2 - 1)$.
 - (1) $f(n) = n^2 + 3n + 1$.
 - (2) $g(n) = n^2 + 11n + 29$.
- Nous avons les manipulations algébriques naturelles suivantes.

$$\begin{aligned}
 \pi_n^8 &= (f(n)^2 - 1)(g(n)^2 - 1) \\
 &= (a^2 - 1)(b^2 - 1) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} a = f(n) \text{ et } b = g(n). \\
 &= a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 \\
 &= a^2b^2 - (a - b)^2 - 2ab + 1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Choisir } (a - b)^2 \text{ au lieu de } (a + b)^2 \text{ va nous permettre,} \\
 &= (ab - 1)^2 - (a - b)^2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{un plus bas, de ne pas trop nous éloigner de } \pi_n^8. \\
 &< (ab - 1)^2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} b - a \neq 0.
 \end{aligned}$$

Donc $\pi_n^8 < (f(n)g(n) - 1)^2$.

- Le point précédent rend naturel de tenter de démontrer que $(f(n)g(n) - 2)^2 < \pi_n^8$, car, si tel est le cas, π_n^8 sera encadré par les carrés de deux entiers consécutifs, et forcément nous aurons $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$. Notre pari va être gagnant dès que $n \geq 4$. Que c'est joli !

$$\begin{aligned}
 &(f(n)g(n) - 2)^2 < \pi_n^8 \\
 \iff &(ab - 2)^2 < (a^2 - 1)(b^2 - 1) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} a = f(n) \text{ et } b = g(n). \\
 \iff &a^2b^2 - 4ab + 4 < a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 \\
 \iff &a^2 + b^2 - 4ab + 3 < 0
 \end{aligned}$$

Le site <https://www.wolframalpha.com> nous donne sans effort cognitif¹¹ ce qui suit (les « transhumanophobes » se reporteront à la remarque 10.1 qui suit).

$$\begin{aligned}
 &a^2 + b^2 - 4ab + 3 \\
 &= -2(n^2 + 7n)^2 + 36(n^2 + 7n) + 729 \\
 &= -2m^2 + 36m + 729 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} m = n^2 + 7n \\
 &= -2(m - 9)^2 + 891
 \end{aligned}$$

Or, $n^2 + 7n - 9 = 0$ admet pour unique racine positive $n = \frac{-7+\sqrt{85}}{2} \approx 1,1$, donc $a^2 + b^2 - 4ab + 3$ décroît en fonction de n à partir de $n = 2$. Les calculs suivants donnent alors que $a^2 + b^2 - 4ab + 3 < 0$ pour $n \geq 4$.

n	1	2	3	4
$-2(n^2 + 7n)^2 + 36(n^2 + 7n) + 729$	889	729	9	-1559

- Nous venons de voir que $(ab - 2)^2 < \pi_n^8 < (ab - 1)^2$ sur $\mathbb{N}_{\geq 4}$, donc $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$ dès que $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$, mais pour $n \in \{1, 2, 3\}$, $v_7(\pi_n^8) = 1$ donne $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$, ce qui permet de conclure. \square

11. Il faut vivre avec son temps...

Remarque 10.1. *Voici comment obtenir une preuve 100 % non silliconé. Pour cela, commençons par les manipulations algébriques naturelles suivantes qui cherchent à obtenir le même coefficient pour n dans chaque parenthèse, tout en passant d'un polynôme de degré 8 à un polynôme de degré 4.*

$$\begin{aligned}\pi_n^8 &= n(n+7) \cdot (n+1)(n+6) \cdot (n+2)(n+5) \cdot (n+3)(n+4) \\ &= (n^2+7n) \cdot (n^2+7n+6) \cdot (n^2+7n+10) \cdot (n^2+7n+12) \\ &= m(m+6)(m+10)(m+12) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} m = n^2 + 7n\end{aligned}$$

Nous décidons d'offrir un 1^{er} rôle à la variable $m = n^2 + 7n$. Voyons où cela nous mène...

$$\begin{aligned}&a^2 + b^2 - 4ab + 3 \\ &= a(a-4b) + b^2 + 3 \\ &= (m-4n+1)(-3m-20n-115) + (m+4n+29)^2 + 3 \quad \left. \begin{array}{l} a = n^2 + 3n + 1 = m - 4n + 1 \\ b = n^2 + 11n + 29 = m + 4n + 29 \end{array} \right\} \\ &= -3m^2 - (8n+118)m + (4n-1)(20n+115) + m^2 + 2(4n+29)m + (4n+29)^2 + 3 \\ &= -2m^2 - 60m + 729 + 672n + 96n^2 \\ &= -2m^2 + 36m + 729 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Ici, la magie opère... En effet, nous avons :} \\ &\quad \quad \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 672n + 96n^2 = 96(7n + n^2) = 96m.\end{aligned}$$

11. AVEC 9 FACTEURS

Fait 11.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$.

L'idée suivie est celle de la démonstration du cas 12.1 ; nous indiquons juste les adaptations à faire en reprenant les notations de la preuve citée.

Preuve. Ici nous avons au moins 5 facteurs $(n+i)$ de π_n^9 de valuation p -adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$. Ceci nous amène aux cas suivants.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A1]**.

Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $|N^2 - M^2| \in \llbracket 1; 8 \rrbracket$. Ce qui suit lève des contradictions.

- (1) $|N^2 - M^2| = 3$ donne $n = 1$, mais $\pi_1^9 = 9! \notin {}^2\mathbb{N}$ via $v_7(9!) = 1$.
- (2) $|N^2 - M^2| = 5$ donne $n \in \llbracket 2; 4 \rrbracket$, mais $\forall n \in \llbracket 2; 4 \rrbracket, v_7(\pi_n^9) = 1$ donne $\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$.
- (3) $|N^2 - M^2| = 7$ donne $n \in \llbracket 5; 9 \rrbracket$, mais $\forall n \in \llbracket 5; 9 \rrbracket, v_{11}(\pi_n^9) = 1$ donne $\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$.
- (4) $|N^2 - M^2| = 8$ donne $n = 1$, mais ceci est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A2]**.

Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (3M^2, 3N^2)$ avec $|3(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 8 \rrbracket$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A3]**.

Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (2M^2, 2N^2)$ avec $|2(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 8 \rrbracket$, puis nécessairement $|N^2 - M^2| = 3$ qui implique $n \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A4]**.

Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (6M^2, 6N^2)$ avec $|6(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 8 \rrbracket$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5. \square

12. AVEC 10 FACTEURS

Fait 12.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^{10} \notin {}^2\mathbb{N}$.

La démonstration suivante, qui fait penser à la première preuve du fait 7.1, est citée via une source dans un échange sur <https://math.stackexchange.com> (voir la section 16).

Preuve. Supposons que $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$.

Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 10}, \forall i \in \llbracket 0; 9 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$. D'après le fait 3.2, on doit s'intéresser à $p \in \{2, 3, 5, 7\}$. Voici ce que l'on peut observer très grossièrement.

- Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^{10} sont divisibles par 5.
- Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^{10} sont divisibles par 7.
- Les points précédents donnent au moins 6 facteurs $(n+i)$ de π_n^{10} de valuation p -adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$.

Nous avons alors l'une des alternatives suivantes pour chacun des 6 facteurs $(n+i)$ vérifiant $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ pour $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$.

- **[A1]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A2]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times (2\mathbb{N} + 1)$
- **[A3]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times 2\mathbb{N}$
- **[A4]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times (2\mathbb{N} + 1)$

Comme nous avons six facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions¹².

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A1]**.

Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $(M, N) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $N^2 - M^2 \in \llbracket 1; 9 \rrbracket$. Selon le fait 3.5, seuls les cas suivants sont possibles mais ils lèvent tous une contradiction.

- (1) $N^2 - M^2 = 3$ avec $(M, N) = (1, 2)$ est possible, mais ceci donne $n = 1^2 = 1$, puis $\pi_1^{10} = 10! \in {}^2\mathbb{N}$, or ceci est faux car $v_7(10!) = 1$.
- (2) $N^2 - M^2 = 5$ avec $(M, N) = (2, 3)$ est possible d'où $n \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$. Nous venons de voir que $n = 1$ est impossible. De plus, pour $n \in \llbracket 2; 4 \rrbracket$, $v_7(\pi_n^{10}) = 1$ montre que $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.
- (3) $N^2 - M^2 = 7$ avec $(M, N) = (3, 4)$ est possible d'où $n \in \llbracket 1; 9 \rrbracket$, puis $n \in \llbracket 5; 9 \rrbracket$ d'après ce qui précède. Mais ici, $\forall n \in \llbracket 5; 9 \rrbracket, v_{11}(\pi_n^{10}) = 1$ montre que $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.
- (4) $N^2 - M^2 = 8$ avec $(M, N) = (1, 3)$ est possible d'où $n = 1$, mais ceci est impossible comme nous l'avons vu ci-dessus.
- (5) $N^2 - M^2 = 9$ avec $(M, N) = (4, 5)$ est possible d'où $n \in \llbracket 10; 16 \rrbracket$ d'après ce qui précède. Or $\forall n \in \llbracket 10; 16 \rrbracket, v_{17}(\pi_n^{10}) = 1$, donc $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.

12. Notons qu'en considérant 3, il resterait au minimum 2 facteurs $(n+i)$ de π_n^7 de valuation p -adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$. Or, en considérant la parité de $v_2(n+i)$, nous aurions deux alternatives, ceci rendant impossible l'usage du principe des tiroirs.

- Deux facteurs différents $(n + i)$ et $(n + i')$ vérifient **[A2]**.

Dans ce cas, $(n + i, n + i') = (3M^2, 3N^2)$ avec $(M, N) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $3(N^2 - M^2) \in \llbracket 1; 9 \rrbracket$, puis $N^2 - M^2 \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$. Selon le fait 3.5, nécessairement $N^2 - M^2 = 3$ avec $(M, N) = (1, 2)$, d'où $n \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n + i)$ et $(n + i')$ vérifient **[A3]**.

Dans ce cas, $(n + i, n + i') = (2M^2, 2N^2)$ avec $(M, N) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $2(N^2 - M^2) \in \llbracket 1; 9 \rrbracket$, puis $N^2 - M^2 \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$. Selon le fait 3.5, nécessairement $N^2 - M^2 = 3$ avec $(M, N) = (1, 2)$, d'où $n \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n + i)$ et $(n + i')$ vérifient **[A4]**.

Dans ce cas, $(n + i, n + i') = (6M^2, 6N^2)$ avec $(M, N) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $6(N^2 - M^2) \in \llbracket 1; 9 \rrbracket$, puis $N^2 - M^2 = 1$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5. \square

13. AVEC 11 FACTEURS

Fait 13.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^{11} \notin {}^2\mathbb{N}$.

L'idée suivie est celle de la démonstration du cas 12.1 ; nous indiquons juste les adaptations à faire en reprenant les notations de la preuve citée.

Preuve. Ici nous avons moins 6 facteurs $(n+i)$ de π_n^{11} de valuation p -adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$, en notant qu'ici il y a au maximum trois facteurs $(n+i)$ de π_n^{11} divisibles par 5. Ceci nous amène aux cas suivants.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient [A1].

Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $|N^2 - M^2| \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$. Ce qui suit lève des contradictions.

- (1) $|N^2 - M^2| = 3$ donne $n = 1$, mais $\pi_1^{11} = 11! \notin {}^2\mathbb{N}$ via $v_{11}(11!) = 1$.
- (2) $|N^2 - M^2| = 5$ donne $n \in \llbracket 2; 4 \rrbracket$, mais $\forall n \in \llbracket 2; 4 \rrbracket$, $v_{11}(\pi_n^{11}) = 1$ donne $\pi_n^{11} \notin {}^2\mathbb{N}$.
- (3) $|N^2 - M^2| = 7$ donne $n \in \llbracket 5; 9 \rrbracket$, mais $\forall n \in \llbracket 5; 9 \rrbracket$, $v_{11}(\pi_n^{11}) = 1$ donne $\pi_n^{11} \notin {}^2\mathbb{N}$.
- (4) $|N^2 - M^2| = 8$ donne $n = 1$, mais ceci est impossible.
- (5) $|N^2 - M^2| = 9$ donne $n \in \llbracket 10; 16 \rrbracket$, mais $\forall n \in \llbracket 10; 16 \rrbracket$, $v_{17}(\pi_n^{11}) = 1$ implique que $\pi_n^{11} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient [A2].

Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (3M^2, 3N^2)$ avec $|3(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$, d'où $n \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ que nous savons impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient [A3].

Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (2M^2, 2N^2)$ avec $|2(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$, puis nécessairement $|N^2 - M^2| \in \{3, 5\}$, d'où $n \in \llbracket 1; 8 \rrbracket$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient [A4].

Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (6M^2, 6N^2)$ avec $|6(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5. \square

14. AVEC 12 FACTEURS

Fait 14.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^{12} \notin {}^2\mathbb{N}$.

L'idée suivie est celle de la démonstration des cas 12.1 et 13.1 avec les changements suivants.

Preuve. Ici nous avons moins 5 facteurs $(n+i)$ de π_n^{12} de valuation p -adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ avec ici 11 un nouveau compagnon premier à prendre en compte. Ceci nous amène juste à adapter le cas où deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A1]**. Dans ce cas, nous avons $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $|N^2 - M^2| \in \llbracket 1; 11 \rrbracket$. Ce qui suit lève des contradictions.

- (1) $|N^2 - M^2| \in \{3, 5, 7, 8, 9\}$ se traite comme pour le cas 13.1. On sait alors que $n > 9$.
- (2) Un nouveau cas est à gérer car $|N^2 - M^2| = 11$ est possible. Ceci ne se peut que si $(M, N) = (5, 6)$ ou $(M, N) = (6, 5)$, d'où $n \in \llbracket 10; 25 \rrbracket$, mais nous arrivons aux contradictions suivantes.
 - $\forall n \in \llbracket 10; 20 \rrbracket, v_{17}(\pi_n^{12}) = 1$, donc $\pi_n^{12} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.
 - $\forall n \in \llbracket 20; 25 \rrbracket, v_{29}(\pi_n^{12}) = 1$, donc $\pi_n^{12} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux. □

15. AVEC 13 FACTEURS

Fait 15.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^{13} \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve. Les arguments de la preuve du cas 14.1 s'adaptent immédiatement. \square

Remarque 15.1. *Que donnerait l'analyse du cas suivant $\pi_n^{14} \notin {}^2\mathbb{N}$? Nous avons ce qui suit.*

- $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 14}, \forall i \in \llbracket 0; 13 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$.
- Au maximum trois facteurs $(n+i)$ de π_n^{14} sont divisibles par 5.
- Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^{14} sont divisibles par 7.
- Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^{14} sont divisibles par 11.
- Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^{14} sont divisibles par 13. Un nouveau venu !
- Les points précédents nous donnent qu'au moins 5 facteurs $(n+i)$ de π_n^{14} sont de valuation p -adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$. On peut donc tenter de mettre en route la même machinerie que pour le cas 14.1.

Nous sentons donc ici la possibilité d'automatiser l'analyse de certaines situations. Ceci a été fait dans mon document « Carrés parfaits et produits d'entiers consécutifs – Jusqu'à 100 facteurs ? » qui propose une approche informatique se basant principalement sur l'idée précédente afin de traiter les cas jusqu'à 100 facteurs, c'est-à-dire ceux supposés connus dans la démonstration de Paul Erdős.

16. SOURCES UTILISÉES

Fait 6.1.

La démonstration non algébrique a été impulsée par la source du fait 9.1 donnée plus bas.

Fait 7.1.

- Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré « $n(n+1)\dots(n+k)$ est un carré ? » sur le site lesmathematiques.net.

La démonstration via le principe des tiroirs trouve sa source dans cet échange.

- Un échange consulté le 12 février 2024, et titré « *Is there an easier way of proving the product of any 5 consecutive positive integers is never a perfect square ?* » sur le site www.quora.com/.

La démonstration « élémentaire » sans le principe des tiroirs vient de cet échange.

- L'article « *Le produit de 5 entiers consécutifs n'est pas le carré d'un entier.* » de T. Hayashi, Nouvelles Annales de Mathématiques, est consultable via Numdam, la bibliothèque numérique française de mathématiques.

Cet article a fortement inspiré la longue preuve.

Fait 8.1.

- Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré « *product of six consecutive integers being a perfect numbers* » sur le site <https://math.stackexchange.com>.

La courte démonstration est donnée dans cet échange. Vous y trouverez aussi un très joli argument basé sur les courbes elliptiques rationnelles.

- Une discussion archivée consultée le 28 janvier 2024 :

<https://web.archive.org/web/20171110144534/http://mathforum.org/library/drmath/view/65589.html>.

Cette discussion a impulsé la preuve fastidieuse, mais facile d'accès, via des tableaux.

Fait 9.1.

Un échange consulté le 3 février 2024, et titré « *Proof that the product of 7 successive positive integers is not a square* » sur le site <https://math.stackexchange.com>.

La courte démonstration est donnée dans cet échange, mais certaines justifications manquent.

Fait 10.1.

- Le document « *Products of consecutive Integers* » de Vadim Bugaenko, Konstantin Kokhas, Yaroslav Abramov et Maria Ilyukhina obtenu via un moteur de recherche le 28 février 2024.
- Un échange consulté le 4 février 2024, et titré « *How to prove that the product of eight consecutive numbers can't be a number raised to exponent 4 ?* » sur le site <https://math.stackexchange.com>.

La démonstration astucieuse vient de l'une des réponses de cet échange, mais la justification des deux inégalités n'est pas donnée.

Fait 12.1.

Un échange consulté le 13 février 2024, et titré « *Product of 10 consecutive integers can never be a perfect square* » sur le site <https://math.stackexchange.com>.

La démonstration vient d'une source Wordpress donnée dans une réponse de cet échange, mais cette source est très expéditive...