BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS – UNE MÉTHODE EFFICACE

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page *https://github.com/bc-writing/drafts*.

Mentions « légales »

Table des matières

Date : 25 Jan. 2024 – 6 Fév. 2024.

1. Ce qui nous intéresse

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers »[1], Paul Erdos démontre que pour tout couple $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit de $(k+1)$ entiers consécutifs $n(n+1)\cdots(n+k)$ n'est jamais le carré d'un entier.

Il est facile de trouver sur le web des preuves à la main de $n(n+1)\cdots(n+k) \notin {}^2_*\mathbb{N}$ pour $k \in [\![2\,;8]\!]$. Bien que certaines de ces preuves soient très sympathiques, leur lecture ne fait pas ressortir de schéma commun de raisonnement. Dans ce document, nous allons tenter de limiter au maximum l'emploi de fourberies déductives en présentant une méthode très élémentaire[2], efficace, et semi-automatisable, pour démontrer, avec peu d'efforts cognitifs, les premiers cas d'impossibilité.

2. Notations utilisées

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k} (n+i)$.
  Par exemple, $\pi_n^0 = n$, $\pi_n^1 = n(n+1)$ et $\pi_{n+2}^3 = (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$.
  Par convention, nous posons $\pi_n^{-1} = 1$.
- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des carrés parfaits. On note aussi ${}^2_*\mathbb{N} = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
  $\mathbb{N}_{sf}$ est l'ensemble des naturels non nuls sans facteur carré[3].
- $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
  $\forall (p\,;n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p-adique de n, c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n, contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.
- $\mathbb{P}_{sc}^n$ désigne l'ensemble des suites finies strictement croissantes de n nombres premiers.
- $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m.
- $2\,\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
  $2\,\mathbb{N}+1$ est l'ensemble des nombres naturels impairs.

3. Les carrés parfaits

3.1. **Structure.**

Fait 3.1. *$\forall n \in {}^2_*\mathbb{N}$, s'il existe $m \in {}^2_*\mathbb{N}$ tel que $n = fm$ alors $f \in {}^2_*\mathbb{N}$.*

Démonstration. Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(fm) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ qui donnent $v_p(f) \in 2\mathbb{N}$ car $v_p(fm) = v_p(f) + v_p(m)$. □

Fait 3.2. *$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $a \wedge b = 1$ et $ab \in {}^2_*\mathbb{N}$, alors $a \in {}^2_*\mathbb{N}$ et $b \in {}^2_*\mathbb{N}$.*

Démonstration. Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(ab) \in 2\mathbb{N}$. Or $p \in \mathbb{P}$ ne peut diviser à la fois a et b, donc $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(a) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(b) \in 2\mathbb{N}$, autrement dit $(a,b) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$. □

Fait 3.3. *Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $ab \in {}^2_*\mathbb{N}$, ainsi que $(\alpha, \beta, A, B) \in (\mathbb{N}_{sf})^2 \times \mathbb{N}^2$ tel que $a = \alpha A^2$ et $b = \beta B^2$. Nous avons alors forcément $\alpha = \beta$.*

Démonstration. Le fait 3.1 donne $\alpha\beta \in {}^2_*\mathbb{N}$. De plus, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(\alpha) \in \{0,1\}$ et $v_p(\beta) \in \{0,1\}$. Finalement, $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\alpha) = v_p(\beta)$, autrement dit $\alpha = \beta$. □

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).
2. Cette méthode s'appuie sur une représentation trouvée dans un message archivé : voir la section 9.
3. En anglais, on dit « square free ».

3.2. Distance entre deux carrés parfaits.

Fait 3.4. *Soit* $(N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $N > M$ *.*

(1) $N^2 - M^2 \geq 2N - 1$ *.*

(2) Notons nb_{sol} *le nombre de solutions* $(N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *de* $N^2 - M^2 = \delta$ *.*

Pour $\delta \in [\![1\,;20]\!]$*, nous avons :*

(a) $nb_{sol} = 0$ *si* $\delta \in \{1, 2, 4, 6, 10, 14, 18\}$ *.*

(b) $nb_{sol} = 1$ *si* $\delta \in \{3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 16\}$ *.*

(c) $nb_{sol} = 2$ *si* $\delta = 15$ *.*

Démonstration.

(1) Comme $N - 1 \geq M$, nous obtenons : $N^2 - M^2 \geq N^2 - (N - 1)^2 = 2N - 1$.

(2) Le point précédent permet d'utiliser le programme `Python` suivant afin d'obtenir les nombres de solutions indiqués.

```
from math import sqrt, floor

def sol(diff):
    solfound = []

    for i in range(1, (diff + 1) // 2 + 1):
        tested = i**2 - diff

        if tested < 0:
            continue

        tested = floor(sqrt(i**2 - diff))

        if tested == 0:
            continue

        if tested**2 == i**2 - diff:
            solfound.append((i, tested))

    return solfound
```

□

Finissons par une jolie formule même si elle ne nous sera pas d'une grande aide dans la suite.

Fait 3.5. $\forall (N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$*, si* $N > M$ *, alors* $N^2 - M^2 = \sum_{k=M+1}^{N} (2k - 1)$ *.*

Démonstration. $N^2 = \sum_{k=1}^{N} (2k - 1)$ donne l'identité indiquée [4]. □

4. La formule utilisée est facile à démontrer algébriquement, et évidente à découvrir géométriquement.

4. Prenons du recul

4.1. Tableaux de Vogler.

L'idée de départ est simple : d'après le fait 3.1, il semble opportun de se concentrer sur les diviseurs sans facteur carré des facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^k = n(n+1)\cdots(n+k)$.

Définition 4.1. *Considérons* $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $(a_i)_{0 \le i \le k} \subseteq \mathbb{N}_{sf}$ *et* $(s_i)_{0 \le i \le k} \subseteq {}^2_*\mathbb{N}$ *tels que* $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$, $n+i = a_i s_i$. *Cette situation est résumée par le tableau suivant que nous nommerons tableau de Vogler en référence à la discussion où l'auteur a rencontré ce concept.*

$n+\bullet$	0	1	2	$\ldots$	k
	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_k

Exemple 4.1. *Supposons avoir le tableau de Vogler suivant où* $n \in \mathbb{N}^*$.

$n+\bullet$	0	1	2	3
	2	5	6	1

Ceci résume la situation suivante.

- $\exists A \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n = 2A^2$.
- $\exists B \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n+1 = 5B^2$.
- $\exists C \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n+2 = 6C^2$.
- $\exists D \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n+3 = D^2$.

Fait 4.1. *Dans les tableaux ci-dessous, les puces* $\bullet$ *indiquent des valeurs quelconques.*

(1) *Si nous avons un tableau de Vogler du type suivant, alors* $\pi_n^{k-1} \in {}^2_*\mathbb{N}$.

$n+\bullet$	0	1	$\ldots$	$k-1$	k
	$\bullet$	$\bullet$	$\ldots$	$\bullet$	1

(2) *Si nous avons un tableau de Vogler du type suivant, alors* $\pi_{n+1}^{k-1} \in {}^2_*\mathbb{N}$.

$n+\bullet$	0	1	$\ldots$	$k-1$	k
	1	$\bullet$	$\ldots$	$\bullet$	$\bullet$

Démonstration. Immédiat via le fait 3.1, car nous avons soit $n+k \in {}^2_*\mathbb{N}$, soit $n \in {}^2_*\mathbb{N}$. □

Fait 4.2. *Soit* $(n,d,a) \in (\mathbb{N}^*)^3$ *et* $i \in \mathbb{N}$. *Les tableaux de Vogler ci-après sont impossibles (les puces* $\bullet$ *indiquent des valeurs quelconques).*

(1) *Pas de facteurs carrés trop près.*

$n+\bullet$	i	$i+1$	$\ldots$	$i+d-1$	$i+d$
	ad	$\bullet$	$\ldots$	$\bullet$	ad

(2) *Pas de facteurs carrés pas trop loin.*

$n+\bullet$	i	$i+1$	$\ldots$	$i+2d-1$	$i+2d$
	ad	$\bullet$	$\ldots$	$\bullet$	ad

Démonstration. Tout est contenu dans le fait 3.4.

(1) $n+i = adA^2$ et $n+i+d = adB^2$ donnent $ad(B^2-A^2) = d$, puis $a(B^2-A^2) = 1$, d'où $B^2 - A^2 = 1$ qui ne se peut pas car $B^2 > A^2 \geq 1$.

(2) $n+i = adA^2$ et $n+i+2d = adB^2$ donnent $ad(B^2-A^2) = 2d$, *i.e.* $a(B^2-A^2) = 2$, d'où $B^2 - A^2 \in \{1,2\}$ qui est impossible.

□

4.2. **Construire des tableaux de Vogler.**

Pour fabriquer des tableaux de Vogler, nous allons « multiplier » des tableaux de Vogler partiels.

Définition 4.2. *Soient* $(n,k,r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $(p_j)_{1 \leq j \leq r} \subseteq \mathbb{P}^n_{sc}$, $(\epsilon_{i,j})_{0 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq r} \subseteq \{0,1\}$ *et* $(f_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq \mathbb{N}^*$ *vérifiant les conditions suivantes.*

- $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$, $n+i = f_i \cdot \prod_{j=1}^{r} p_j^{v_{p_j}(n+i)}$. *Noter que* $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$, $\forall j \in [\![1\,;r]\!]$, $f_i \wedge p_j = 1$.
- $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$, $\forall j \in [\![1\,;r]\!]$, $v_{p_j}(n+i) \equiv \epsilon_{i,j}$ *modulo* 2.

Cette situation est résumée par le tableau suivant qui sera nommé tableau de Vogler partiel[5].

$n+\bullet$	0	1	2	$\dots$	k
$(p_j)_{1\leq j\leq r}$	$\prod_{j=1}^{r} p_j^{\epsilon_{0,j}}$	$\prod_{j=1}^{r} p_j^{\epsilon_{1,j}}$	$\prod_{j=1}^{r} p_j^{\epsilon_{2,j}}$	$\dots$	$\prod_{j=1}^{r} p_j^{\epsilon_{k,j}}$

Exemple 4.2. *Supposons avoir le tableau de Vogler partiel suivant où* $n \in \mathbb{N}^*$.

$n+\bullet$	0	1	2	3
$(2,3)$	2	6	1	3

Ceci résume la situation suivante.

- $\exists (a,\alpha,A) \in \mathbb{N}^3 \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $A \wedge 6 = 1$ *et* $n = 2^{2a+1}3^{2\alpha}A$.
- $\exists (b,\beta,B) \in \mathbb{N}^3 \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $B \wedge 6 = 1$ *et* $n+1 = 2^{2b+1}3^{2\beta+1}B$.
- $\exists (c,\gamma,C) \in \mathbb{N}^3 \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $C \wedge 6 = 1$ *et* $n+2 = 2^{2c}3^{2\gamma}C$.
- $\exists (d,\delta,D) \in \mathbb{N}^3 \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $D \wedge 6 = 1$ *et* $n+3 = 2^{2d}3^{2\delta+1}D$.

Exemple 4.3. *La multiplication de deux tableaux de Vogler partiels est « naturelle » lorsqu'elle porte sur des suites* $(p_j)_{1\leq j\leq r} \subseteq \mathbb{P}^n_{sc}$ *et* $(q_j)_{1\leq j\leq r} \subseteq \mathbb{P}^n_{sc}$ *d'intersection vide, c'est-à-dire sans nombre premier commun. Considérons les deux tableaux de Vogler partiels suivants où l'on note* 2 *et* 3 *au lieu de* (2) *et* (3).

$n+\bullet$	0	1	2	3
2	1	2	1	2

$n+\bullet$	0	1	2	3
3	3	1	1	3

La multiplication de ces tableaux de Vogler partiels est le tableau de Vogler partiel suivant.

$n+\bullet$	0	1	2	3
$(2,3)$	3	2	1	6

Ceci résume la situation suivante, avec des notations « évidentes », qui est équivalente à ce que donnent les deux premiers tableaux de Vogler partiels.

- $A \wedge 6 = 1$ *et* $n = 2^{2a}3^{2\alpha+1}A$.
- $B \wedge 6 = 1$ *et* $n+1 = 2^{2b+1}3^{2\beta}B$.
- $C \wedge 6 = 1$ *et* $n+2 = 2^{2c}3^{2\gamma}C$.
- $D \wedge 6 = 1$ *et* $n+3 = 2^{2d+1}3^{2\delta+1}D$.

Fait 4.3. *Dans la deuxième ligne d'un tableau de Vogler partiel relatif à un unique nombre premier* p, *les valeurs* p *sont séparées par exactement* $(p-1)$ *valeurs* 1.

Démonstration. Penser aux multiples de p. ☐

Fait 4.4. $\forall (n,k,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \times \mathbb{P}$, *si* $\pi^k_n \in {}^2\mathbb{N}$, *alors dans le tableau de Vogler partiel relatif uniquement au nombre premier* p, *et associé à* π^k_n, *le nombre de valeurs* p *est forcément pair.*

Démonstration. Évident, mais très pratique, comme nous le verrons dans la suite. ☐

5. Noter que $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$, $\forall j \in [\![1\,;r]\!]$, $p_j^{\epsilon_{i,j}} \in \{1, p_j\}$.

5. Application au cas de 2 facteurs

Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$. Nous avons alors les tableaux de Vogler partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}$ divisant π_n^1 , car les valeurs p de la deuxième ligne doivent apparaître un nombre pair de fois tout en étant espacées par $(p-1)$ valeurs 1 (voir les faits 4.3 et 4.4).

$n + \bullet$	0	1
p	1	1

La multiplication de tous les tableaux de Vogler partiels précédents donne le tableau de Vogler, non partiel, ci-après, mais ceci contredit le fait **??**.

$n + \bullet$	0	1
	1	1

6. Application au cas de 3 facteurs

Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2_*\mathbb{N}$. Nous avons alors les tableaux de Vogler partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}_{>2}$ divisant π_n^2 , d'après les faits 4.3 et 4.4.

$n + \bullet$	0	1	2
p	1	1	1

Pour $p = 2$, via les faits 4.3 et 4.4, seulement deux tableaux de Vogler partiels relatifs à 2 sont possibles. Nous utilisons un abus de notation évident pour indiquer ces deux possibilités.

$n + \bullet$	0	1	2
2	1	1	1
	2	1	2

La multiplication de tous les tableaux de Vogler partiels précédents donne juste les deux tableaux de Vogler, non partiels, suivants, mais ceci est impossible d'après le fait 4.2.

$n + \bullet$	0	1	2
	1	1	1
	2	1	2

7. Application au cas de 4 facteurs

Supposons que $\pi_n^3 = n(n+1)(n+2)(n+3) \in {}^2_*\mathbb{N}$. Nous avons alors les tableaux de Vogler partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}_{>3}$ divisant π_n^3 .

$n + \bullet$	0	1	2	3
p	1	1	1	1

Pour $p = 2$, nous avons les trois tableaux de Vogler partiels relatifs à 2 donnés ci-après.

$n + \bullet$	0	1	2	3
2	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2

Pour $p = 3$, nous obtenons les deux tableaux de Vogler partiels relatifs à 3 donnés ci-après.

$n+\bullet$	0	1	2	3
3	1	1	1	1
	3	1	1	3

La multiplication des tableaux de Vogler partiels précédents donne les tableaux de Vogler, non partiels, suivants.

$n+\bullet$	0	1	2	3
	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2

$n+\bullet$	0	1	2	3
	3	1	1	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Le fait 4.2 rejette quatre tableaux de Vogler : voir les cellules surlignées ci-dessous.

$n+\bullet$	0	1	2	3
	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2

$n+\bullet$	0	1	2	3
	3	1	1	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Il nous reste à étudier les deux derniers tableaux reproduits ci-après.

$n+\bullet$	0	1	2	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Commençons par démontrer que l'on ne peut pas avoir $n = 6A^2$, $n+1 = B^2$, $n+2 = 2C^2$ et $n+3 = 3D^2$ où $(A,B,C,D) \in (\mathbb{N}^*)^4$.

- Posons $x = n + \frac{3}{2}$ de sorte que $x - \frac{3}{2} = 6A^2$, $x - \frac{1}{2} = B^2$, $x + \frac{1}{2} = 2C^2$ et $x + \frac{3}{2} = 3D^2$.
- Nous avons alors $\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = 2E^2$, c'est-à-dire $x^2 - \frac{9}{4} = 2E^2$, avec $E \in \mathbb{N}^*$.
- De même, $x^2 - \frac{1}{4} = 2F^2$ avec $F \in \mathbb{N}^*$.
- Par simple soustraction, nous obtenons $2F^2 - 2E^2 = 2$, puis $F^2 - E^2 = 1$, mais ceci contredit le fait 3.5.

Le même type de raisonnement [6] démontre l'impossibilité d'avoir $n = 3A^2$, $n+1 = 2B^2$, $n+2 = C^2$ et $n+3 = 6D^2$ où $(A,B,C,D) \in (\mathbb{N}^*)^4$.

8. Application au cas de 5 facteurs

Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2_*\mathbb{N}$. Nous avons alors les tableaux de Vogler partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}_{>4}$ divisant π_n^4 .

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
p	1	1	1	1	1

Pour $p = 2$, nous avons les tableaux de Vogler partiels relatifs à 2 donnés ci-après.

6. Noter la « symmétrie » respectée par les valeurs des deux tableaux.

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
2	1	1	1	1	1
	2	1	2	1	1
	2	1	1	1	2
	1	2	1	2	1
	1	1	2	1	2

Pour $p = 3$, nous obtenons les tableaux de Vogler partiels relatifs à 3 donnés ci-après.

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
3	1	1	1	1	1
	3	1	1	3	1
	1	3	1	1	3

La multiplication de tous les tableaux de Vogler partiels précédents donne les 15 cas suivants.

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
	1	1	1	1	1
	2	1	2	1	1
	2	1	1	1	2
	1	2	1	2	1
	1	1	2	1	2

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
	3	1	1	3	1
	6	1	2	3	1
	6	1	1	3	2
	3	2	1	6	1
	3	1	2	3	2

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
	1	3	1	1	3
	2	3	2	1	3
	2	3	1	1	6
	1	6	1	2	3
	1	3	2	1	6

Comme $\pi_n^3 = n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2_*\mathbb{N}$ et $\pi_{n+1}^3 = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2_*\mathbb{N}$ d'après la section 7, nous pouvons ignorer tous les tableaux commençant, ou finissant, par une valeur 1 d'après le fait 4.1. Cela laisse les tableaux de Vogler ci-après, mais ces derniers sont rejetés par le fait 4.2.

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
	2	1	1	1	2
	6	1	1	3	2
	3	1	2	3	2
	2	3	2	1	3
	2	3	1	1	6

Remarque 8.1. *Notons qu'un cas comme* $6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2$, *c'est-à-dire* $n = 6A^2$, $n+1 = B^2$, $n+2 = C^2$, $n+3 = 3D^2$ *et* $n+4 = 2E^2$ *où* $(A, B, C, D, E) \in (\mathbb{N}^*)^4$ *peut se traiter de façon analogue à ce qui a été fait dans la section 7 via* $x-2 = 6A^2$, $x-1 = B^2$, $x = C^2$, $x+1 = 3D^2$ *et* $x+2 = 2E^2$ *qui donnent* $x^2 - 4 = 3F^2$ *et* $x^2 - 1 = 3G^2$ *où* $(F, G) \in (\mathbb{N}^*)^4$.

9. Sources utilisées

Ce document n'aurait pas vu le jour sans la source suivante.

(1) Une discussion archivée consultée le 28 janvier 2024 : `https://web.archive.org/web/20171110144534/http://mathforum.org/library/drmath/view/65589.html`.

Cette discussion utilise ce que nous avons nommé les tableaux de Vogler, mais le côté semi-mécanisable de leur utilisation n'est pas souligné.

10. AFFAIRE À SUIVRE...