

BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTRIERS CONSÉCUTIFS – UNE MÉTHODE EFFICACE

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons « Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International ».



TABLE DES MATIÈRES

1.	Ce qui nous intéresse	2
2.	Notations utilisées	2
3.	Les carrés parfaits	2
3.1.	Structure	2
3.2.	Distance entre deux carrés parfaits	2
4.	Prenons du recul	3
4.1.	Les sf -tableaux	3
4.2.	Construire des sf -tableaux	4
5.	Structure des sf -tableaux	5
5.1.	A propos des sf -tableaux partiels	5
5.2.	A propos des sf -tableaux non partiels	5
6.	Premières applications	6
6.1.	Le cas de 2 facteurs	6
6.2.	Le cas de 3 facteurs	6
6.3.	Le cas de 4 facteurs	6
6.4.	Le cas de 5 facteurs	7
7.	Et après ?	8
7.1.	La méthode via le cas de 6 facteurs	8
8.	Sources utilisées	9
9.	AFFAIRE À SUIVRE...	10

1. CE QUI NOUS INTÉRESSE

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers »¹, Paul Erdos démontre que pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit de $(k+1)$ entiers consécutifs $n(n+1) \cdots (n+k)$ n'est jamais le carré d'un entier.

Il est facile de trouver sur le web des preuves à la main de $n(n+1) \cdots (n+k) \notin {}^2_*\mathbb{N}$ pour $k \in \llbracket 1; 7 \rrbracket$. Bien que certaines de ces preuves soient très sympathiques, leur lecture ne fait pas ressortir de schéma commun de raisonnement. Dans ce document, nous allons tenter de limiter au maximum l'emploi de fourberies déductives en présentant une méthode très élémentaire², efficace, et semi-automatisable, pour démontrer, avec peu d'efforts cognitifs, les premiers cas d'impossibilité.

2. NOTATIONS UTILISÉES

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- $\forall (n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k-1} (n+i)$.

Par exemple, $\pi_n^1 = n$, $\pi_n^2 = n(n+1)$ et $\pi_{n+2}^4 = (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$.

- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des carrés parfaits. On note aussi ${}^2_*\mathbb{N} = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
 \mathbb{N}_{sf} est l'ensemble des naturels non nuls sans facteur carré³.

- \mathbb{P} désigne l'ensemble des nombres premiers.

$\forall (p; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p -adique de n , c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n , contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.

- \mathbb{N}_{sc}^n désigne l'ensemble des suites finies strictement croissantes de n entiers naturels.
 \mathbb{P}_{sc}^n désigne l'ensemble des suites finies strictement croissantes de n nombres premiers.
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m .
- $2\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
 $2\mathbb{N} + 1$ est l'ensemble des nombres naturels impairs.

3. LES CARRÉS PARFAITS

3.1. Structure.

Le fait suivant est immédiat.

Fait 3.1. $\forall n \in {}^2_*\mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$.

Fait 3.2. $\forall n \in {}^2_*\mathbb{N}$, s'il existe $m \in {}^2_*\mathbb{N}$ tel que $n = fm$ alors $f \in {}^2_*\mathbb{N}$.

Démonstration. $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(fm) \in 2\mathbb{N}$, $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(fm) = v_p(f) + v_p(m)$ donnent $v_p(f) \in 2\mathbb{N}$. \square

3.2. Distance entre deux carrés parfaits.

Fait 3.3. Soit $(N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $N > M$.

$$(1) \quad N^2 - M^2 \geq 2N - 1.$$

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).

2. Cette méthode s'appuie sur une représentation trouvée dans un message archivé : voir la section 8.

3. En anglais, on dit « square free ».

(2) Notons nb_{sol} le nombre de solutions $(N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de $N^2 - M^2 = \delta$.

Pour $\delta \in \llbracket 1; 20 \rrbracket$, nous avons :

- (a) $nb_{sol} = 0$ si $\delta \in \{1, 2, 4, 6, 10, 14, 18\}$.
- (b) $nb_{sol} = 1$ si $\delta \in \{3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 16\}$.
- (c) $nb_{sol} = 2$ si $\delta = 15$.

Démonstration.

- (1) Comme $N - 1 \geq M$, nous obtenons : $N^2 - M^2 \geq N^2 - (N - 1)^2 = 2N - 1$.
- (2) Le point précédent permet d'utiliser le programme Python suivant afin d'obtenir les nombres de solutions indiqués rapidement.

```
from math import sqrt, floor

def sol(diff):
    solfound = []

    for i in range(1, (diff + 1) // 2 + 1):
        tested = i**2 - diff

        if tested < 0:
            continue

        tested = floor(sqrt(i**2 - diff))

        if tested == 0:
            continue

        if tested**2 == i**2 - diff:
            solfound.append((i, tested))

    return solfound
```

□

4. PRENONS DU REcul

4.1. Les **sf**-tableaux.

L'idée de départ est simple : d'après le fait 3.2, il semble opportun de se concentrer sur les diviseurs sans facteur carré des k facteurs $(n + i)$ de $\pi_n^k = n(n + 1) \cdots (n + k - 1)$.

Définition 4.1. Considérons $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(a_i)_{0 \leq i \leq k} \subset \mathbb{N}_{sf}$ et $(s_i)_{0 \leq i \leq k} \subset {}^2\mathbb{N}$ tels que $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket$, $n + i = a_i s_i$. Cette situation est résumée par le tableau suivant que nous nommerons « **sf**-tableau »⁴.

$n + \bullet$	0	1	2	...	k
	a_0	a_1	a_2	...	a_k

4. « sf » est pour « square free ».

Exemple 4.1. Supposons avoir le *sf*-tableau suivant où $n \in \mathbb{N}^*$.

$n + \bullet$	0	1	2	3
	2	5	6	1

Ceci résume la situation suivante.

- $\exists A \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2A^2$.
- $\exists B \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 1 = 5B^2$.
- $\exists C \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 2 = 6C^2$.
- $\exists D \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 3 = D^2$.

Définition 4.2. Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $(n_i)_{1 \leq i \leq r} \in \mathbb{N}_{sc}^r$, $(a_i)_{1 \leq i \leq r} \subset \mathbb{N}_{sf}$ et $(s_i)_{1 \leq i \leq r} \subset {}^2\mathbb{N}$ tels que $\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $n_i = a_i s_i$. Cette situation est résumée par le tableau suivant que nous nommerons « *sf*-tableau généralisé ».

\bullet	n_1	n_2	n_3	\dots	n_r
	a_1	a_2	a_3	\dots	a_r

4.2. Construire des *sf*-tableaux.

Pour fabriquer des *sf*-tableaux, nous allons « multiplier » des *sf*-tableaux dits partiels.

Définition 4.3. Soient $(n, k, r) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $(p_j)_{1 \leq j \leq r} \in \mathbb{P}_{sc}^r$, $(\epsilon_{i,j})_{0 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq r} \subseteq \{0, 1\}$ et aussi $(f_i)_{0 \leq i \leq k} \subset \mathbb{N}^*$ vérifiant les conditions suivantes.

- $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket$, $n + i = f_i \cdot \prod_{j=1}^r p_j^{v_{p_j}(n+i)}$. Noter que $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket$, $\forall j \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $f_i \wedge p_j = 1$.
- $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket$, $\forall j \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $v_{p_j}(n + i) \equiv \epsilon_{i,j} \text{ modulo } 2$.

Cette situation est résumée par le tableau suivant qui sera nommé « *sf*-tableau partiel », voire « *sf*-tableau partiel d'ordre $(p_j)_{1 \leq j \leq r}$ »⁵.

$n + \bullet$	0	1	2	\dots	k
$(p_j)_{1 \leq j \leq r}$	$\prod_{j=1}^r p_j^{\epsilon_{0,j}}$	$\prod_{j=1}^r p_j^{\epsilon_{1,j}}$	$\prod_{j=1}^r p_j^{\epsilon_{2,j}}$	\dots	$\prod_{j=1}^r p_j^{\epsilon_{k,j}}$

Exemple 4.2. Supposons avoir le *sf*-tableau partiel suivant où $n \in \mathbb{N}^*$.

$n + \bullet$	0	1	2	3
$(2, 3)$	2	6	1	3

Ceci résume la situation suivante.

- $\exists (a, \alpha, A) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$ tel que $A \wedge 6 = 1$ et $n = 2^{2a+1} 3^{2\alpha} A$.
- $\exists (b, \beta, B) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$ tel que $B \wedge 6 = 1$ et $n + 1 = 2^{2b+1} 3^{2\beta+1} B$.
- $\exists (c, \gamma, C) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$ tel que $C \wedge 6 = 1$ et $n + 2 = 2^{2c} 3^{2\gamma} C$.
- $\exists (d, \delta, D) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$ tel que $D \wedge 6 = 1$ et $n + 3 = 2^{2d} 3^{2\delta+1} D$.

Exemple 4.3. La multiplication de deux *sf*-tableaux partiels est « naturelle » lorsqu'elle porte sur des suites $(p_j)_{1 \leq j \leq r} \in \mathbb{P}_{sc}^r$ et $(q_j)_{1 \leq j \leq s} \in \mathbb{P}_{sc}^s$ d'intersection vide, c'est-à-dire sans nombre premier commun.

5. Noter que $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket$, $\forall j \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $p_j^{\epsilon_{i,j}} \in \{1, p_j\}$.

Considérons les deux *sf*-tableaux partiels suivants où l'on note 2 et 3 au lieu de (2) et (3).

$n + \bullet$	0	1	2	3
2	1	2	1	2

$n + \bullet$	0	1	2	3
3	3	1	1	3

La multiplication de ces *sf*-tableaux partiels est le *sf*-tableau suivant, partiel a priori, mais si l'on sait que 2 et 3 sont les seuls diviseurs premiers de π_n^4 , alors le *sf*-tableau est non partiel.

$n + \bullet$	0	1	2	3
(2, 3)	3	2	1	6

Ceci résume la situation suivante qui est équivalente à ce que donne la conjonction des deux premiers *sf*-tableaux partiels (les abus de notations sont évidents).

- $A \wedge 6 = 1$ et $n = 2^{2\alpha} 3^{2\alpha+1} A$.
- $C \wedge 6 = 1$ et $n + 2 = 2^{2c} 3^{2\gamma} C$.
- $B \wedge 6 = 1$ et $n + 1 = 2^{2b+1} 3^{2\beta} B$.
- $D \wedge 6 = 1$ et $n + 3 = 2^{2d+1} 3^{2\delta+1} D$.

5. STRUCTURE DES SF-TABLEAUX

5.1. A propos des *sf*-tableaux partiels.

Fait 5.1. Dans la deuxième ligne d'un *sf*-tableau partiel d'ordre p , les positions des valeurs p sont congrues modulo p .

Démonstration. Penser aux multiples de p . □

Fait 5.2. $\forall (n, k, p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \times \mathbb{P}$, si $\pi_n^k \in {}^2\mathbb{N}$, alors dans le *sf*-tableau partiel d'ordre p associé à π_n^k , le nombre de valeurs p est forcément pair.

Démonstration. Évident, mais très pratique, comme nous le verrons dans la suite. □

5.2. A propos des *sf*-tableaux non partiels.

Fait 5.3. Dans les tableaux ci-dessous, où $k \geq 2$, les puces \bullet indiquent des valeurs quelconques.

(1) Si nous avons un *sf*-tableau du type suivant, alors $\pi_n^{k-1} \in {}^2\mathbb{N}$.

$n + \bullet$	0	1	...	$k-1$	k
	\bullet	\bullet	...	\bullet	1

(2) Si nous avons un *sf*-tableau du type suivant, alors $\pi_{n+1}^{k-1} \in {}^2\mathbb{N}$.

$n + \bullet$	0	1	...	$k-1$	k
	1	\bullet	...	\bullet	\bullet

Démonstration. Immédiat via le fait 3.2, car nous avons soit $n + k \in {}^2\mathbb{N}$, soit $n \in {}^2\mathbb{N}$. □

Fait 5.4. Soit le *sf*-tableau généralisé ci-après où $r \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $(n_i)_{1 \leq i \leq r} \in \mathbb{N}_{sc}^r$ et $d \in \mathbb{N}_{sf}$.

\bullet	n_1	...	n_r
	d	...	d

Ce *sf*-tableau est impossible si l'une des deux conditions suivantes est validée.

- (1) $\frac{n_r - n_1}{d} \notin \mathbb{N}$.
- (2) $\frac{n_r - n_1}{d} \in \{1, 2, 4, 6, 10, 14, 18\}$.

Démonstration. $n_1 = dA^2$ et $n_r = dB^2$ nous donnent $d(B^2 - A^2) = n_r - n_1$. On conclut directement pour le premier cas, et via le fait 3.3 dans le second. □

6. PREMIÈRES APPLICATIONS

6.1. Le cas de 2 facteurs.

Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$. Nous avons alors les **sf**-tableaux partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}$ divisant π_n^2 , car les valeurs p de la deuxième ligne doivent apparaître un nombre pair de fois tout en étant espacées par $(p-1)$ valeurs 1 (voir les faits 5.1 et 5.2).

$n + \bullet$	0	1
p	1	1

La multiplication de tous les **sf**-tableaux partiels précédents donne le **sf**-tableau, non partiel, ci-après, mais ceci contredit le fait 5.4.

$n + \bullet$	0	1
	1	1

6.2. Le cas de 3 facteurs.

Supposons que $\pi_n^3 = n(n+1)(n+2) \in {}^3_*\mathbb{N}$. Nous avons alors les **sf**-tableaux partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ divisant π_n^3 , d'après les faits 5.1 et 5.2.

$n + \bullet$	0	1	2
p	1	1	1

Pour $p = 2$, via les faits 5.1 et 5.2, seulement deux **sf**-tableaux partiels d'ordre 2 sont possibles. Nous utilisons un abus de notation évident pour indiquer ces deux possibilités.

$n + \bullet$	0	1	2
2	1	1	1
	2	1	2

La multiplication de tous les **sf**-tableaux partiels précédents donne juste les deux **sf**-tableaux, non partiels, suivants, mais ceci est impossible d'après le fait 5.4.

$n + \bullet$	0	1	2
	1	1	1
	2	1	2

6.3. Le cas de 4 facteurs.

Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3) \in {}^4_*\mathbb{N}$. Nous avons alors les **sf**-tableaux partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}_{\geq 4}$ divisant π_n^4 .

$n + \bullet$	0	1	2	3
p	1	1	1	1

Pour $p = 2$, nous avons les trois **sf**-tableaux partiels d'ordre 2 donnés ci-après.

$n + \bullet$	0	1	2	3
2	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2

Pour $p = 3$, nous obtenons les deux **sf**-tableaux partiels d'ordre 3 donnés ci-après.

$n + \bullet$	0	1	2	3
3	1	1	1	1
	3	1	1	3

La multiplication des **sf**-tableaux partiels précédents donne les **sf**-tableaux⁶, suivants.

$n + \bullet$	0	1	2	3
	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2

$n + \bullet$	0	1	2	3
	3	1	1	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Le fait 5.4 rejette quatre **sf**-tableaux : voir les cellules surlignées ci-dessous.

$n + \bullet$	0	1	2	3
	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2

$n + \bullet$	0	1	2	3
	3	1	1	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Ceci nous amène à étudier les deux **sf**-tableaux généralisés suivants.

\bullet	n	$n+1$	$n+2$	$n+3$
	6	1	2	3
	3	2	1	6

En posant $x = n + \frac{3}{2} = \frac{n+(n+3)}{2}$, nous obtenons les **sf**-tableaux généralisés suivants.

\bullet	$x - \frac{3}{2}$	$x - \frac{1}{2}$	$x + \frac{1}{2}$	$x + \frac{3}{2}$
	6	1	2	3
	3	2	1	6

En multipliant les colonnes extrêmes ensemble, et celles centrales aussi, nous arrivons dans les deux cas au **sf**-tableau généralisé ci-après où le premier 2 vient de $6 \times 3 = 2 \times 3^2$.

\bullet	$x^2 - \frac{9}{4}$	$x^2 - \frac{1}{4}$
	2	2

Comme $x - \frac{1}{4} - (x - \frac{9}{4}) = 4$, le fait 5.4 nous montre que le **sf**-tableau généralisé précédent est impossible. Joli! Non?

Remarque 6.1. *Noter que la fin du raisonnement n'a fait appel à aucune hypothèse sur π_n^4 .*

6.4. Le cas de 5 facteurs.

Supposons que $\pi_n^5 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2_*\mathbb{N}$. Nous avons alors les **sf**-tableaux partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ divisant π_n^5 .

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
p	1	1	1	1	1

6. Tableaux non partiels forcément.

Pour $p = 2$, nous avons les **sf**-tableaux partiels d'ordre 2 donnés ci-après.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
2	1	1	1	1	1
	2	1	2	1	1
	2	1	1	1	2
	1	2	1	2	1
	1	1	2	1	2

Pour $p = 3$, nous obtenons les **sf**-tableaux partiels d'ordre 3 donnés ci-après.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
3	1	1	1	1	1
	3	1	1	3	1
	1	3	1	1	3

La multiplication de tous les **sf**-tableaux partiels précédents donne les 15 cas suivants.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
	1	1	1	1	1
	2	1	2	1	1
	2	1	1	1	2
	1	2	1	2	1
	1	1	2	1	2

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
3	1	1	3	1	
6	1	2	3	1	
6	1	1	3	2	
3	2	1	6	1	
3	1	2	3	2	

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
	1	3	1	1	3
	2	3	2	1	3
	2	3	1	1	6
	1	6	1	2	3
	1	3	2	1	6

Comme $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2_*\mathbb{N}$ et $\pi_{n+1}^4 = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2_*\mathbb{N}$ d'après la section 6.3, les tableaux commençant, ou finissant, par une valeur 1 sont à ignorer d'après le fait 5.3. Cela laisse les **sf**-tableaux ci-après, mais ces derniers sont rejetés par le fait 5.4.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
2	1	1	1	1	2
6	1	1	3	2	
3	1	2	3	2	
2	3	2	1	3	
2	3	1	1	6	

7. ET APRÈS ?

7.1. La méthode via le cas de 6 facteurs.

La méthode présentée ci-dessus permet de faire appel à un programme pour limiter les traitements à la main, et à la sueur des neurones, de **sf**-tableaux problématiques comme nous avons dû le faire dans la section 6.3. Expliquons cette tactique semi-automatique en traitant le cas de 6 facteurs.

- (1) On raisonne par l'absurde en supposant que $\pi_n^6 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
- (2) Comme $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 6}$, p divise au maximum un seul des facteurs $(n+i)$ de π_n^6 , nous avons juste besoin de considérer l'ensemble $\mathcal{P} = \{2, 3, 5\}$ des diviseurs premiers stricts de 6.
- (3) Pour chaque élément p de \mathcal{P} , on construit la liste \mathcal{V}_p des **sf**-tableaux partiels relatifs à p et $\pi_n^6 \in {}^2_*\mathbb{N}$ en s'appuyant sur la section 5.1.

- (4) Via les listes \mathcal{V}_p , on calcule toutes les multiplications de tous les *sf*-tableaux partiels relatifs à des nombres p différents, et pour chacune d'elles, on ne la garde que si elle ne vérifie aucune des conditions suivantes, celles du dernier cas devant être indiquées à la main au programme qui va donc évoluer au gré des démonstrations faites par un humain (démonstrations que l'on espère le plus rare possible).
- (a) Le tableau commence, ou se termine, par la valeur 1. Dans ce cas, on sait par récurrence que le tableau produit n'est pas possible (voir le fait 5.3).
 - (b) Le tableau est rejeté par le fait 5.4.
 - (c) Le tableau « produit » contient un sous-tableau que nous savons impossible suite à un raisonnement humain fait *localement*, c'est-à-dire que seul les facteurs indiqués dans le sous-tableau, et le sous-tableau lui-même sont utilisés pour raisonner. Comme c'est ce qui a été fait en fin de section 6.3, nous pouvons indiquer les deux sous-tableaux impossibles suivants.

$m + \bullet$	0	1	2	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Deux sous-sf-tableaux impossibles.

YAPLUKA!

Dans le dépôt en ligne associé à ce document sont placés les fichiers `find-pb-sftab.py` et `common.py` qui nous fournissent les informations suivantes pour π_n^6 .

8. SOURCES UTILISÉES

Ce document n'aurait pas vu le jour sans la source suivante.

- (1) Une discussion archivée consultée le 28 janvier 2024 :

<https://web.archive.org/web/20171110144534/http://mathforum.org/library/drmath/view/65589.html>.

*Cette discussion utilise ce que nous avons nommé les *sf*-tableaux, mais le côté semi-mécanisable de leur utilisation n'est pas souligné.*

9. AFFAIRE À SUIVRE...
