À rendre pour le vendredi 24 novembre.

Problème 1. Autour de la suite de Fibonacci.

On s'intéresse dans ce problème à la suite de Fibonacci, ainsi qu'à certaines de ses propriétés variées.

On définit la suite de Fibonacci, notée $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Partie I : Premières propriétés

1. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \in \mathbb{N}$ et $\forall n \geq 5,\ F_n \geq n$.
2. Préciser la monotonie de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. À partir de quel rang est-elle strictement croissante ?
3. Montrer par récurrence simple l'identité de Cassini :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n.$$

Qu'en déduire sur le fait que la fraction $\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$ est ou non irréductible ?

4. Prouver la formule de Binet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right).$$

où $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.

***Remarque** : Il est fortement conseillé de ne pas utiliser, dans les prochaines questions, l'expression du terme général de F_n qui vient d'être trouvée. Il sera plus utile d'utiliser les relations de récurrence vérifiées par (F_n).*

Partie II : Calculs de somme

Soit $n \in \mathbb{N}$.

5. En faisant apparaître une somme télescopique, calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} F_k$.
6. De même, calculer $I_n = \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1}$.
7. Soit $P_n = \sum_{k=0}^{n} F_{2k}$. Exprimer à l'aide d'une terme de la suite (S_n) la somme $P_n + I_n$. En déduire que $P_n = F_{2n+1} - 1$.
8. Simplifier $F_{n+2}F_{n+1} - F_{n+1}F_n$.

   En déduire une expression simple de $\sum_{k=0}^{n} F_{k+1}^2$ puis de $C_n = \sum_{k=0}^{n} F_k^2$.

10. Calculer la somme double $D_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} F_j$ de deux manières différentes.

En déduire la valeur de $E_n = \sum_{k=0}^{n} kF_k$.

Partie III : Fibonacci et Pascal

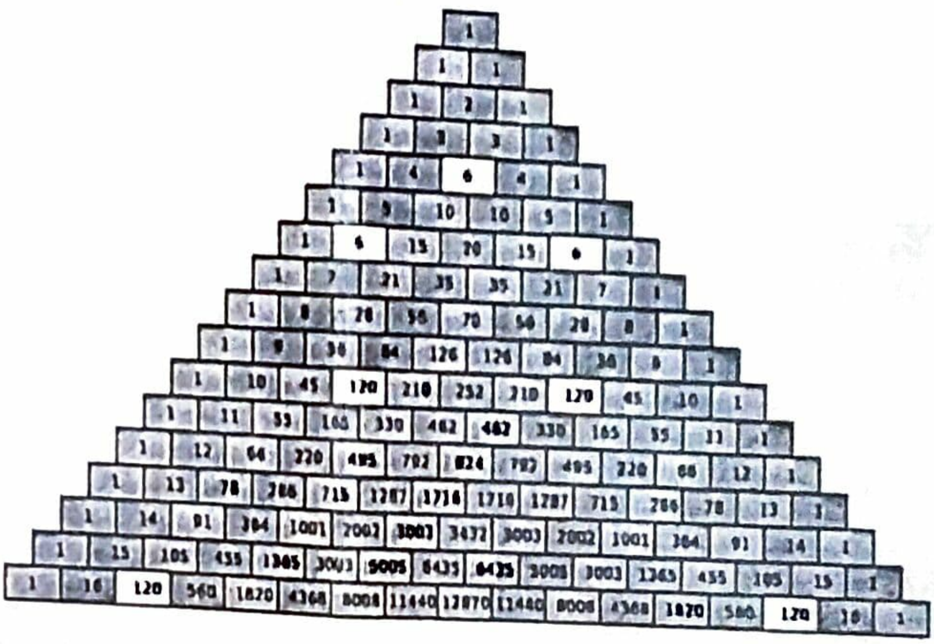
12. Pour $k \geq 3$, on pose $a = F_k F_{k+1}$ et $b = F_k F_{k-1}$.

(a) Simplifier $\dfrac{\binom{a}{b-1}}{\binom{a-1}{b}}$.

(b) À quelle condition sur k a-t-on $\binom{a}{b-1} = \binom{a-1}{b}$?

13. **Comptage dans le triangle de Pascal.**

On rappelle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1, n-1]\!]$ $\binom{n}{k} \geq k$. On pourra utiliser ce résultat sans le redémontrer



(a) Prouver que 1 est le seul nombre qui apparaît une infinité de fois dans le triangle de Pascal.

(b) Déterminer tous les nombres qui n'apparaissent qu'une seule fois dans le triangle.

(c) Donner 2 exemples de nombres qui apparaissent exactement 2 fois dans le triangle de Pascal.

(d) Donner un exemple de nombre qui apparaît exactement 3 fois dans le triangle de Pascal.

(e) Donner 2 exemples de nombre qui apparaissent exactement 4 fois dans le triangle de Pascal.

(f) Donner un exemple de nombre qui apparaît au moins 6 fois dans le triangle.

(g) Calculer $\binom{78}{2}$. Qu'en déduire?

On pourra se rappeler de la question 12b.

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer par récurrence double, et à l'aide de la relation de Pascal que $F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1-k}{k}$.

Illustrer graphiquement cette propriété dans le triangle de Pascal.

On rappelle que $\binom{n}{k} = 0$ pour $n < k$ et pour $k < 0$.

15. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Montrer par récurrence et à l'aide de la relation de Pascal que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{m+k} = F_{m+2n}$.

Partie IV : Théorème de Zeckendorf

Cette partie est facultative.

On souhaite ici démontrer le théorème suivant :

Théorème de Zeckendorf.
Tout entier naturel n non nul s'écrit de manière unique sous la forme :

$$n = F_{k_1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_p},$$

où $p \in \mathbb{N}^*$ et $k_1 \geq k_2 + 2$, $k_2 \geq k_3 + 2$, ..., $k_{p-1} \geq k_p + 2$ et $k_p \geq 2$.
Une suite $(F_{k_1}, F_{k_2}, \ldots, F_{k_p})$ est alors appelée une Z-décomposition de n.

Rappel des premières valeurs de la suite de Fibonacci :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
F_k	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584

Pour déterminer la décomposition d'un nombre n, on applique un algorithme de type glouton.
Exemple : Prenons $n = 2023$. Dans la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on prend le plus grand terme inférieur ou égal à 2023, à savoir $F_{17} = 1597$. On retranche alors F_{17} à 2023, ce qui donne $2023 - F_{17} = 426$ et on itère le processus. $F_{14} = 377 \leq 426 < F_{15} = 610$, puis $426 - F_{14} = 49$, etc.
On trouve ainsi $2023 = F_{17} + F_{14} + F_9 + F_7 + F_3$.

16. Déterminer la Z-décomposition de $n = 1152$ et de $n = 1789$.
17. **Existence.** En suivant la démarche développée dans l'exemple, montrer l'existence de la Z-décomposition de tout nombre n de $\mathbb{N}^*$.
Ne pas oublier la condition de non-consécutivité des indices k_1, ..., k_p.
18. **Unicité.**
    (a) Prouver à l'aide de la partie II que la somme de nombres de Fibonacci d'une Z-décomposition d'un entier n, dont le plus grand élément est F_{k_1}, est strictement inférieure à F_{k_1+1}.
    (b) En déduire l'unicité de la décomposition.

Exercice 1. Bonus : Les organisateurs têtes en l'air.

Cet exercice n'est pas évalué.

Une récente compétition d'athlétisme n'a eu que trois participants : Alphonse, Bobette et Charlotte.
Pour chacune des épreuves, les organisateurs ont attribués p_1 points au vainqueur, p_2 points au deuxième et p_3 points au troisième, où p_1, p_2 et p_3 sont trois entiers vérifiant $p_1 > p_2 > p_3 > 0$. Il n'y a jamais d'égalité.
Malheureusement, les organisateurs ont perdus leurs dossiers, et n'ont plus les valeurs de p_1, p_2 et p_3. Toutefois, on sait qu'au total, Alphonse a eu 22 points, et Bobette et Charlotte ont fini chacune avec 9 points.
Sachant que Bobette a gagné l'épreuve du 100m, qui a fini second à l'épreuve de saut en hauteur? Combien d'épreuves la compétition a-t-elle comportées ?