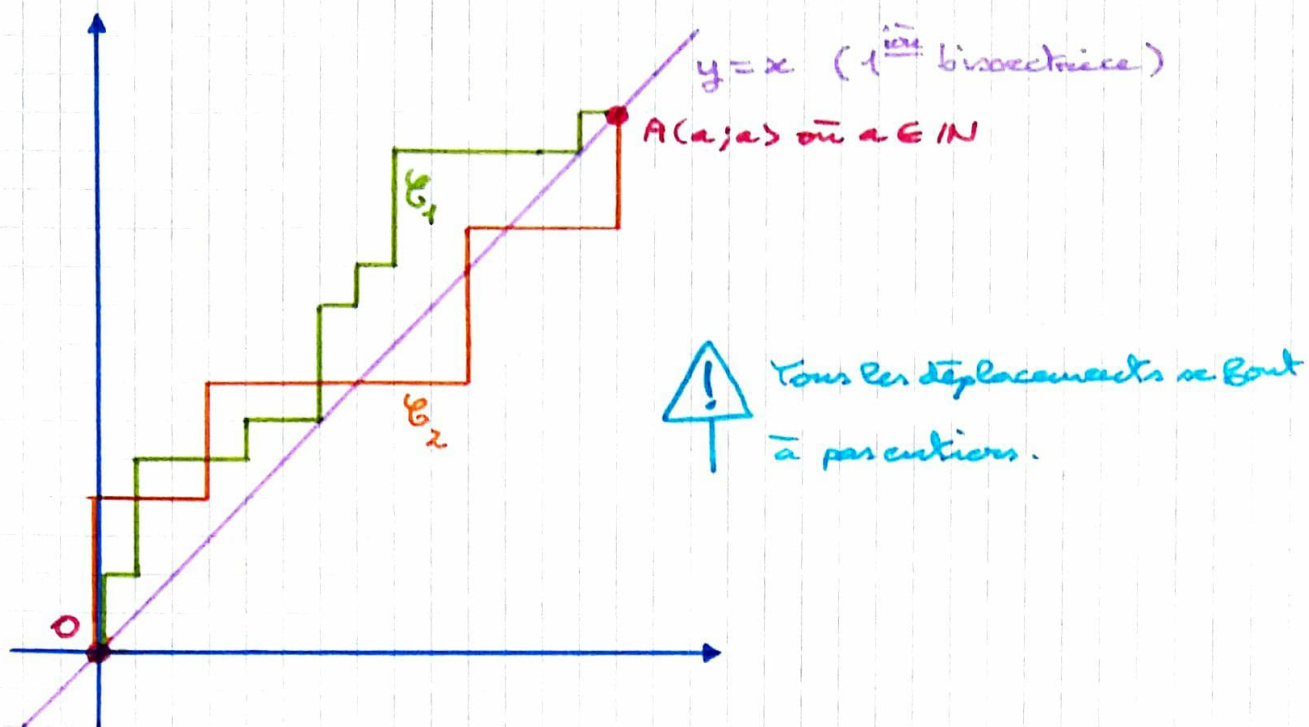


# CHÉMINES DE DYCK...



Chemin équilibré de  $O(0;0)$  à  $A(a;a)$  ( $a \in \mathbb{N}$ )

Chemin où  $\# \{ \text{déplace<sup>ts</sup> verticaux ascendants} \} = \# \{ \text{déplace<sup>ts</sup> horizontaux vers la drc} \}$ .

Chemin de Dyck de  $O(0;0)$  à  $A(a;a)$  ( $a \in \mathbb{N}$ )

Chemin équilibré tq pour  $\forall$  sous-chemin de  $O$  à  $M(x;y)$  avec  $(x;y) \in \mathbb{N}^2$  et  $\pi$  sur le chemin, le nbre de déplace<sup>ts</sup> horizontaux ne dépasse jamais le nbre de déplace<sup>ts</sup> verticaux.

Codage d'un chemin équilibré de  $O(0;0)$  à  $A(a;a)$

on utilise un mot  $w_1 w_2 \dots w_{2a}$  de taille  $2a$  où  $w_i \in \{ \uparrow, \rightarrow \}$  avec autant de lettres  $\uparrow$  que de  $\rightarrow$ .

Comme le place<sup>t</sup> des  $\uparrow$  caractérise le chemin équilibré, on a  $\binom{2a}{a}$  chemins équilibrés de  $O(0;0)$  à  $A(a;a)$ .

## Caractérisation "géo." des chemins de Dyck

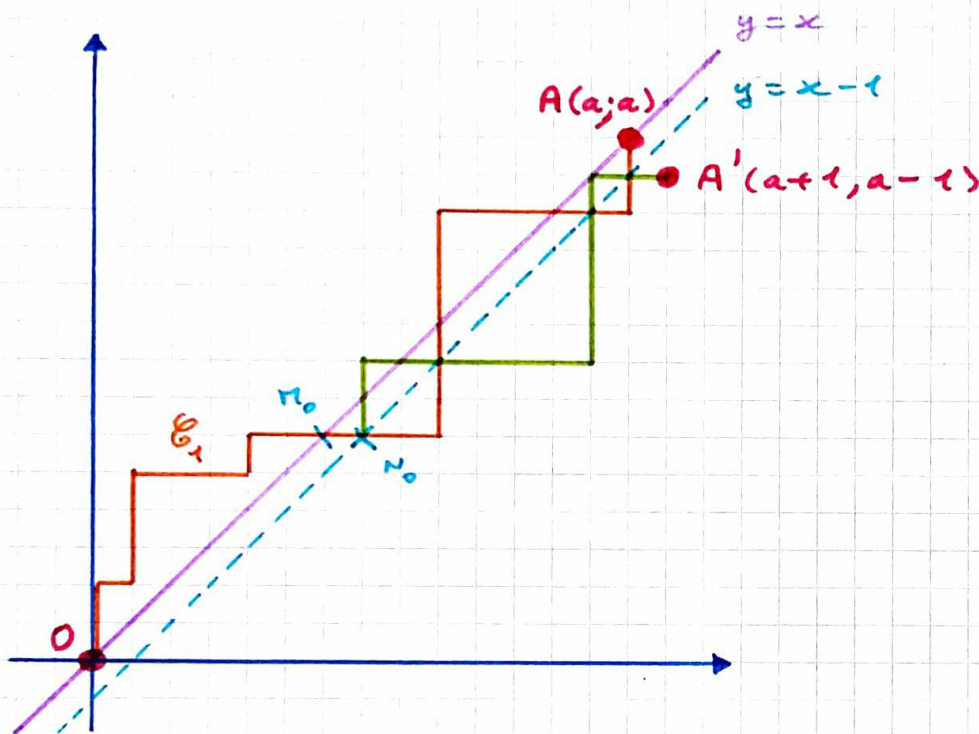
Parmi les chemins équilibrés, les chemins de Dyck sont ceux qui ne passent jamais sous la  $i^{\text{ème}}$  bissectrice.

En effet,

on montre par réc. sur  $l \in \llbracket 1; 2a \rrbracket$  que le sous-chemin partant de  $0(0;0)$  et codé par  $w_1 \dots w_l$  vérifie  $y_n \geq x_n$  où  $n$  désigne la fin du  $n$ -chemin pour  $l$  chemin de Dyck, et "réciproque" (particuliers mais facile).

Que dire des chemins équilibrés "traversant" la  $i^{\text{ème}}$  bissectrice ?

La traversée se fait horizontale. On considère le  $i^{\text{ème}}$  point de traversée horizontale de la  $i^{\text{ème}}$  bissectrice. Notons-le  $N_0$ .



$N_0(x_{N_0}+1; y_{N_0})$  est juste après  $N_0$  sur le chemin. On décide de modifier le chemin à partir de  $N_0$  en échangeant  $\uparrow$  et  $\rightarrow$ . Le mot associé à ce nouveau chemin possède alors  $(a+1)$  symboles  $\rightarrow$  pour  $(a-1)$  symboles  $\uparrow$ . Réciproquement, un tel chemin doit croiser la  $i^{\text{ème}}$  bissectrice, et l'on peut faire une construc-



tion inverse aboutissant à un chemin équilibré.

① Même si cela n'est pas utile, on peut noter l'utilisation d'une symétrie par rapport à  $d: y = x - 1$ .

On a donc  $\binom{2a}{a+1} = \binom{2a}{a-1}$  chemins équilibrés qui traversent la  $1^{\text{ère}}$  bissectrice.

Nombre de chemins de Dyck de  $O(0;0)$  à  $A(a;a)$

$$\binom{2a}{a} - \binom{2a}{a+1}.$$

lien avec les nombres de Catalan  $(C_a)_{a \in \mathbb{N}}$

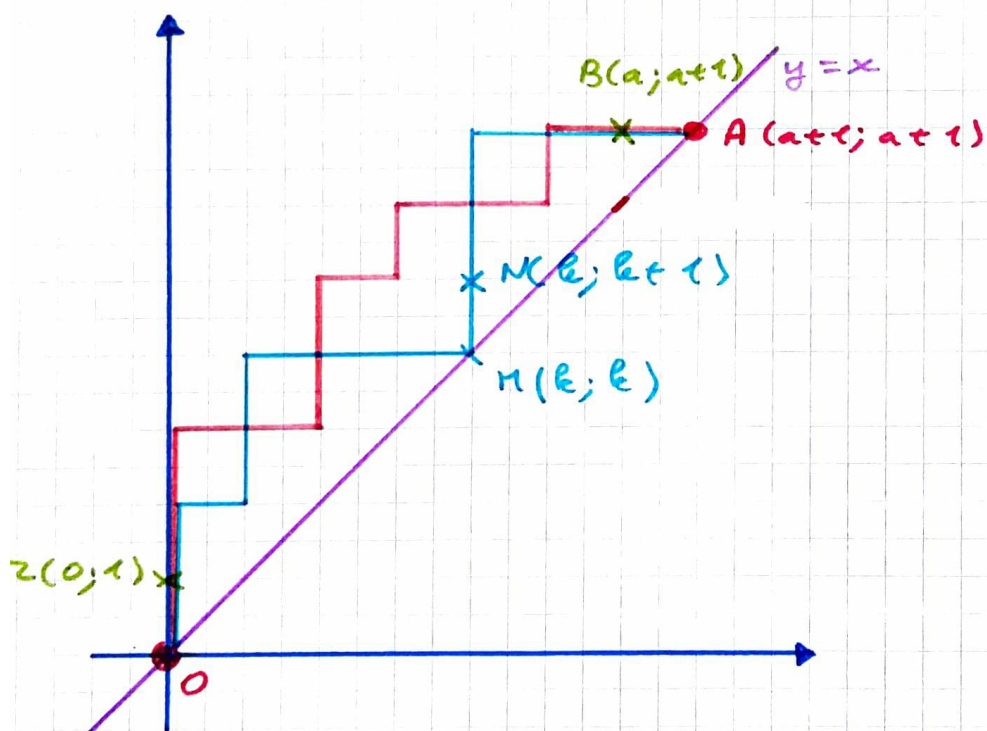
$$\forall a \in \mathbb{N}, C_a = \binom{2a}{a} - \binom{2a}{a+1}.$$

On peut aussi passer via  $\forall a \in \mathbb{N}, C_{a+1} = \sum_{k=0}^a C_k C_{a-k}$ .

Ceci est aussi valide pour  $D_a$  le nombre de chemins de Dyck de  $O(0;0)$  à  $A(a;a)$ .

En effet,

⚠ On pose, par commodité,  $C_0 = 1$  et aussi  $D_0 = 1$ .



On a deux types de chemins de Dyck allant de  $O(0;0)$  à  $A(a+1; a+1)$ .

↳ Type 1 •

les chemins ne coupant la  $i^{\text{ème}}$  bissectrice qui en  $O$  et  $A$ .  
 Claire<sup>t</sup> ces chemins sont en biject<sup>°</sup> avec les chemins de  
 Dyck de  $\Omega(0;1) \rightarrow B(a; a+1)$  : il y en a  $D_a$ .

↳ Type 2 •

3 fois au moins

les chemins coupant la  $i^{\text{ème}}$  bissectrice : on note  $\pi(k; k)$   
 le  $i^{\text{ème}}$  pt d'intersec<sup>°</sup> ( $0 < k < a+1$ ). Fixant  $k$ , on a  
 $D_k$  chemins de Dyck de  $O \rightarrow \pi$ , et ensuite  $D_{a-k}$  autres  
 allant forcé<sup>t</sup> de  $\pi \rightarrow B$ .

Au total, on aura  $\sum_{k=1}^a D_k D_{a-k}$  chemins de Dyck  
 passant au moins 3 fois par la  $i^{\text{ème}}$  bissectrice.

$$\begin{aligned} \text{Au final, on a : } D_{a+1} &= D_a + \sum_{k=1}^a D_k D_{a-k} \\ &= \sum_{k=0}^a D_k D_{a-k} \end{aligned}$$

↓  $D_0 = 1$