BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writing/drafts.

Mentions « légales »

Table des matières

Date: 25 Jan. 2024.

1. Ce qui nous intéresse

Existe-t-il $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $\prod_{i=0}^{k}(n+i)$ soit le carré d'un entier ?

2. Notations utilisées

Dans la suite, nous utiliserons les notations suivantes.

- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ et ${}^2\mathbb{N}_* = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
- $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k}(n+i)$. Par exemple, nous avons $\pi_n^0 = n$ et $\pi_n^1 = n(n+1)$.
- $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
- $\forall (p\,;n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p-adique de n , c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$, mais $p^{v_p(n)+1} \nmid n$.

3. Cas 0

Donnons juste un fait basique concernant l'ensemble ${}^2\mathbb{N}$, fait qui nous sera utile par la suite.

Fait 3.1. *$\forall (n,m) \in {}^2\mathbb{N}_* \times {}^2\mathbb{N}_*$, si $n \neq m$, alors $|n-m| \geq 3$.*

Démonstration. Quitte à échanger les rôles, on peut supposer $n > m$. Par hypothèse, nous avons $(N,M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $n = N^2$ et $m = M^2$. Comme $n > m$, nous avons aussi $N > M$. Les implications suivantes permettent de conclure.

$$\begin{aligned}
& N > M \\
\Longrightarrow\ & N \geq M+1 \\
\Longrightarrow\ & N^2 \geq (M+1)^2 \\
\Longrightarrow\ & n \geq m + 2M + 1 \\
\Longrightarrow\ & n - m \geq 2M + 1 \\
\Longrightarrow\ & n - m \geq 3
\end{aligned}$$

□

4. Cas 1

Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$.

Clairement $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\pi_n^1) \in 2\mathbb{N}$. Or $p \in \mathbb{P}$ ne pent diviser à la fois n et $n+1$. Nous savons donc que $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+1) \in 2\mathbb{N}$, autrement dit $n \in {}^2\mathbb{N}$ et $n+1 \in {}^2\mathbb{N}$. D'après le fait 3.1, nous savons que ceci est impossible. Nous arrivons donc au fait suivant.

Fait 4.1. *$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1) \notin {}^2\mathbb{N}$.*

5. Cas 2

Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$.

Posant $m = n+1$, nous avons $\pi_n^2 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Comme $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\pi_n^2) \in 2\mathbb{N}$, et comme de plus $p \in \mathbb{P}$ ne pent diviser à la fois m et m^2-1 , nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(m^2-1) \in 2\mathbb{N}$, autrement dit $m \in {}^2\mathbb{N}$ et $m^2-1 \in {}^2\mathbb{N}$. D'après le fait 3.1, nous savons que $m^2-1 \in {}^2\mathbb{N}$ est impossible. Nous arrivons donc au fait suivant.

Fait 5.1. *$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2) \notin {}^2\mathbb{N}$.*

6. Cas 3

Nous pouvons ici faire les manipulations algébriques naturelles suivantes.

$$\begin{aligned}
\pi_n^3 &= n(n+3) \cdot (n+1)(n+2) \\
&= (n^2+3n) \cdot (n^2+3n+2) \qquad m = n^2+3n+1 \\
&= (m-1)(m+1) \\
&= m^2 - 1
\end{aligned}$$

De nouveau, le fait 3.1 nous permet d'aboutir au fait suivant.

Fait 6.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$.

7. Cas 4

Nous allons démontrer le fait suivant de deux façons différentes, toutes les deux étant intéressantes dans leur approche.

Fait 7.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. XXX □

Démonstration. XXX □

---

8. AFFAIRE À SUIVRE...
