Non Fini

$$\prod_{i=0}^{k} (n+i) \notin \mathbb{N}^2 \quad (k \geq 1 \text{ et } n \geq 1)$$

RECHERCHE

__Nota°__ : $P_n = \prod_{i=0}^{k} (n+i)$

$\mathbb{P}$: ens. des nbres premiers

$v_p(m)$: valua° p-adique de $m \in \mathbb{N}$

__$k=1$__ $P_n = n(n+1)$

Supposons $P_n = N^2$ avec $N \in \mathbb{N}^*$.

Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(P_n) \in 2\mathbb{N}$.

Or $p \in \mathbb{P}$ ne peut pas diviser à la fois n et $(n+1)$.

On a donc $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+1) \in 2\mathbb{N}$,

ie n et $(n+1)$ sont deux carrés parfaits. Impossible

car $\forall \tilde{k} \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{(\tilde{k}+1)^2 - \tilde{k}^2}_{2\tilde{k}+1 \geq 3} > 1$.

__$k=2$__ $P_n = n(n+1)(n+2)$

On part de nouveau de $P_n = N^2$.

Pour $p \in \mathbb{P}$ tq $p > 2$, de nouveau $v_p(n)$, $v_p(n+1)$ et $v_p(n+2)$ sont pairs.

Que dire de $p = 2$?

- Si $n+1 \equiv 0 \, [2]$ alors $v_2(n) = 0 = v_2(n+2)$ et $v_2(n+1)$ pair. On conclut comme avant!

- Sinon $n \equiv n+2 \equiv 0\ [2]$.

$$\frac{P_n}{4} = \underbrace{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}_{\text{Parités différentes}} \underbrace{(n+1)}_{\text{Impair}} \in \mathbb{N}^2 \text{ car } 2 \mid N.$$

De nouveau, $v_2(\frac{n}{2})$, $v_2(\frac{n}{2}+1)$ et $v_2(n+1)$ sont pairs, et une nouvelle contradic° apparait avec $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2}+1$ deux carrés parfaits.

<u>$k=3$</u> $P_n = n(n+1)(n+2)(n+3)$ avec $P_n = N^2$.

$\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $v_p(n+i)$ est pair.

Par contre, que dire de $p=2$ et $p=3$?

Une tentative d'adapta° de ce qui précède va échouer à une éventuelle généralisa° !

Par contre, gardons l'idée des valua°s p-adiques pour $p=2$ et $p=3$ qui posent pb ici. Voici les situa°s possibles pour chaque facteur $(n+i)$.

- $v_2(n+i)$ pair, $v_3(n+i)$ pair. C1
- ——— pair, ——— impair. C2
- ——— impair, ——— impair. C3
- ——— impair, ——— pair. C4

C1 : $n+i \in \mathbb{N}^2$

C2 : on a alors $n+i'$ avec $i \neq i'$ et $v_3(n+i')$ impair existe. Possible uniquement pour n et $n+3$!

C3 : $n+i'$ ici aussi mais c'est impossible car 6 diviserait $n+i$ et $n+i'$!

C4 : $n+i'$ avec $i \neq i'$ et $v_2(n+i')$ impair. Possible unique^t pour $n, n+2$, ou $n+1, n+3$.

Juste $[C_1$ est impossible car on aurait des entiers consécutifs qui seraient des carrés parfaits. On doit donc avoir a minima $[C_2$ ou $[C_4$.

Creusons $[C_2$: on a donc $n = 2^{2k} \cdot 3^{2l+1} \cdot p^2$ avec $p \wedge 6 = 1$

et $n+3 = 2^{2r} \cdot 3^{2s+1} \cdot q^2$ avec $q \wedge 6 = 1$.

les nbres du type $2^{2a} 3^{2b+1} c$ avec a, b, c des naturels $(c \neq 0)$ sont séparés

2^2 vs 3^{2+1} ⟵ d'au moins 4 si a ou b change. Donc

$n+3 = 2^{2k} 3^{2l+1} \cdot q^2$ ($k = r$ et $l = s$).

Via $3 = n+3-n$, on aboutit à

$2^{2k} 3^{2l+1} (q^2 - p^2) = 3$ d'où $k = 0$,

$l = 0$ et $q^2 - p^2 = 1$. La dernière égalité est impossible !

Creusons $[C_4$: comme "en $[C_2$", $n = 2^{2k+1} 3^{2l} p^2$ et

2^{2+1} vs 3^2 ⟵ $n+2 = 2^{2k+1} 3^{2l} q^2$ avec $p \wedge 6 = 1 = q \wedge 6$.

De nouveau on a une impossibilité ; de même pour $n+1, n+3$.

(i) On peut aller plus vite mais c'est très particulier.

$$
\begin{aligned}
P_n &= n(n+3) \cdot (n+1)(n+2) \\
&= (\underbrace{n^2+3n}) \cdot (\underbrace{n^2+3n} + 2) \\
&= (a-1)(a+1) \\
&= a^2 - 1
\end{aligned}
$$

Facile à repérer !

$\underline{k=4}$ $P_n = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

On reprend la démarche du cas précédent avec $\subseteq_1$, $\subseteq_2$, $\subseteq_3$ et $\subseteq_4$.

De nouveau, juste $\subseteq_1$ est impossible, tout comme $\subseteq_3$.

Creusons $\subseteq_2$: possible unique^t pour $n, n+3$, <u>ou</u> $n+1, n+4$. Cela reste impossible.

Creusons $\subseteq_4$: possible unique^t pour $n, n+2, n+4$, <u>ou</u> $n+1, n+3$, <u>ou</u> $n+2, n+4$.

Les deux derniers cas restent impossibles.

Le 1^{er} aussi en se restreignant à $n, n+2$.