

Combien de zéros à la fin de $1000!$?

Par définition, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = \prod_{k=1}^n k$.

Avant de nous attaquer à $1000!$, regardons ce qu'il se passe pour $30!$. Nous donnons ci-dessous pour chaque nombre k de $\prod_{k=1}^n k$ ses facteurs premiers.

1 \rightarrow Pas de facteurs premiers	11 \rightarrow 11	21 \rightarrow 3×7
2 \rightarrow 2 lui-même	12 \rightarrow $2^2 \times 3$	22 \rightarrow 2×11
3 \rightarrow 3	13 \rightarrow 13	23 \rightarrow 23
4 \rightarrow $2 \times 2 = 2^2$	14 \rightarrow 2×7	24 \rightarrow $2^3 \times 3$
5 \rightarrow 5	15 \rightarrow 3×5	25 \rightarrow 5^2
6 \rightarrow 2×3	16 \rightarrow 2^4	26 \rightarrow 2×13
7 \rightarrow 7	17 \rightarrow 17	27 \rightarrow 3^3
8 \rightarrow 2^3	18 \rightarrow 2×3^2	28 \rightarrow $2^2 \times 7$
9 \rightarrow 3^2	19 \rightarrow 19	29 \rightarrow 29
10 \rightarrow 2×5	20 \rightarrow $2^2 \times 5$	30 \rightarrow $2 \times 3 \times 5$

Combien "fabrique-t-on" des zéros à la fin de $30!$? Il faut partir à la recherche des 10 que l'on peut former à l'aide des facteurs premiers donnés ci-dessus.

car $10 = 5 \times 2$

Commençons par chercher les cinq 5. Ils apparaissent dans 5, 10, 15, 20, 25 et 30, autrement dit dans les multiples de 5 compris entre 1 et 30 au sens large. Cela nous fournit $6 + 1 = 7$

facteurs premiers égaux à 5 dans notre tableau ci-dessus (le $(+1)$ vient de ce que $25 = 5^2$).

Pour obtenir un 10, chaque 5 doit être multiplié par un 2.

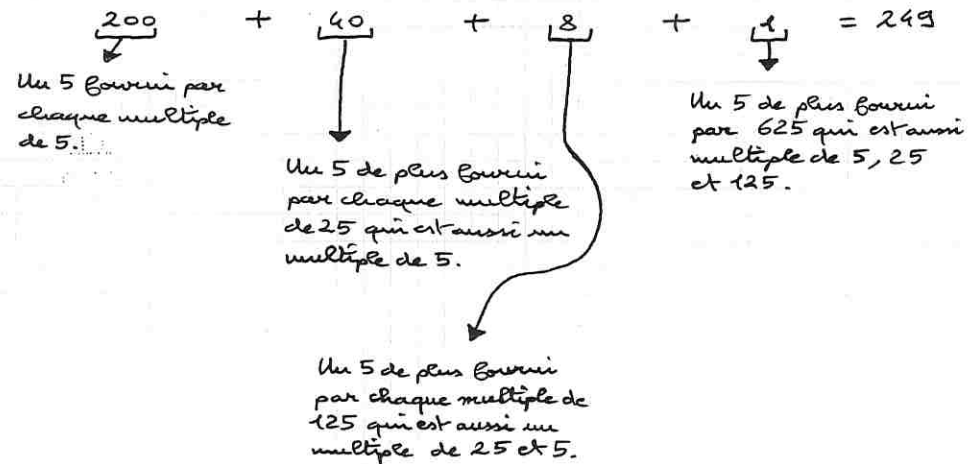
①

A-t-on assez de 2 ? Clairement oui ! Par exemple, il y a $\frac{30}{2} = 15$ multiples de 2 appartenant à $\{1, 2, \dots, 30\}$.

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour répondre à notre question hautement métaphysique.

• Cherchons les 5 apparaissant dans $\prod_{k=1}^{1000} k$. Il y a $\frac{1000}{5} = 200$ multiples de 5 dans $\{1, 2, \dots, 1000\}$. Chacun d'eux va fournir un 5 au moins. En fait, il faut ensuite considérer les multiples de $25 = 5^2$: chacun d'eux va fournir un 5 de plus. Il y a $\frac{1000}{25} = 40$ multiples de 25. Ensuite, les multiples de $125 = 5^3$ vont fournir $\frac{1000}{125} = 8$ facteurs premiers égaux à 5 de plus. Enfin, comme $5^4 = 625$ et $\frac{1000}{625} = 1,6$, nous avons juste 625 comme multiple de 625 dans $[1, 1000]$ (bien entendu, on peut voir cela directement).

En total, cela nous fait :



• A-t-on assez de 2 ? Oui car il y a $\frac{1000}{2} = 500$ multiples de 2 dans $[1, 1000]$.

②

Finissons avec une solution de passionnée informatique. Ce qui suit a été fait à l'aide de SAGE (voir [sagemath](http://sagemath.org) sur Google).

③