Ressources pédagogiques : « pour aller moins loin » *(-Ressources-pedagogiques-pour-aller-moins-loin-.html)*

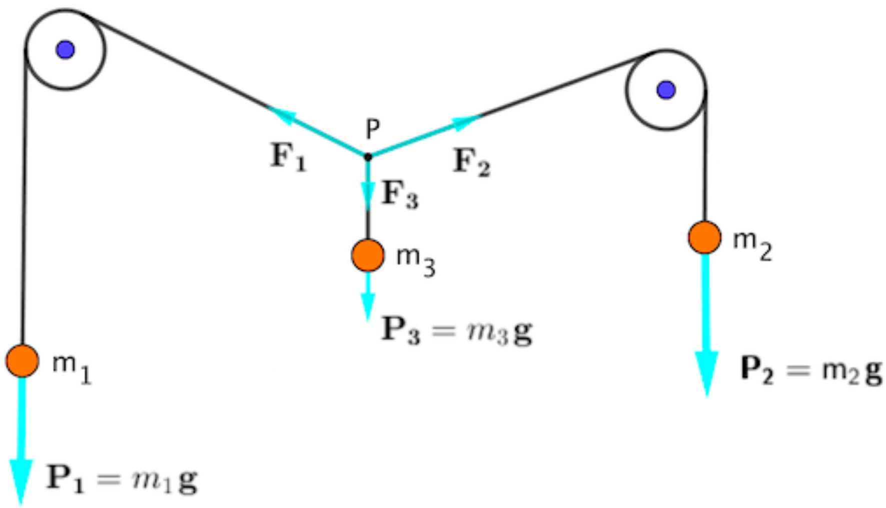
Rediffusion d'un article publié le 4 octobre 2018

MESURER UN ANGLE AVEC UNE BALANCE

Une version mécaniste du théorème de Pythagore

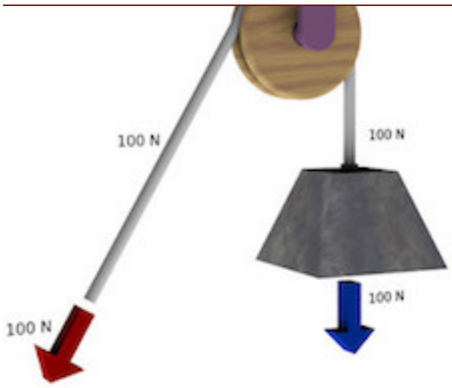
Piste rouge *(spip.php?page=mot&id_mot=22)* Le *24 mars 2023* - Ecrit par Aurélien Alvarez

(_Alvarez-Aurelien_.html)



Dans les trousses des écoliers, on trouve bien souvent des crayons, une règle, un compas mais aussi un rapporteur. Ce petit instrument, facile à utiliser, est très pratique pour mesurer des angles. Dans la suite, nous allons voir qu'il est parfois possible de mesurer aussi des angles avec une balance ! Nous déduirons de nos expérimentations une version mécaniste du théorème de Pythagore

Rediffusion d'un article publié le 4 octobre 2018



un mouvement ou plus généralement une force. L'intensité de la force transmise est préservée, seule la direction de la force est modifiée, comme l'illustre le dessin ci-contre.

En notant $\mathbf{g}$ le vecteur accélération de la pesanteur, la force verticale qu'exerce une masse m s'appelle le poids et on la représente mathématiquement par le vecteur $\mathbf{P} = m\,\mathbf{g}$ [1 *(#nb1)*]. En approximant l'intensité de $\mathbf{g}$ à environ $g = ||\mathbf{g}|| = 10\,\mathrm{m} \cdot s^{-2}$, une masse de 10 kilogrammes exerce donc une force de 100 newtons et les vecteurs bleu et rouge sur le dessin sont des vecteurs de même norme, bien qu'indiquant des directions différentes.

Problème

> *Quel est l'angle supérieur θ en P ? Peut-on le mesurer quand on ne dispose pas de rapporteur mais seulement d'une balance ?*

Un angle, des masses et une formule

Les trois masses exercent des forces verticales : ce sont respectivement les poids $\mathbf{P_1} = m_1\mathbf{g}$, $\mathbf{P_2} = m_2\mathbf{g}$ et $\mathbf{P_3} = m_3\mathbf{g}$. Ainsi, en notant $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ et $\mathbf{F_3}$, les forces qui s'exercent au niveau du point P, on a bien entendu $\mathbf{F_3} = \mathbf{P_3}$ mais seulement

$$||\mathbf{F_1}|| = ||\mathbf{P_1}|| = m_1 g \quad \text{et} \quad ||\mathbf{F_2}|| = ||\mathbf{P_2}|| = m_2 g,$$

comme nous l'avons rappelé précédemment. D'après le principe fondamental de la statique *(https://fr.wikipedia.org/wiki/Principe_fondamental_de_la_statique)*, le système étant à l'équilibre, la résultante des forces au point P de jonction des trois fils est nulle, autrement dit

$$\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3} = \mathbf{0}.$$

On en déduit la jolie formule suivante

$$\cos\theta = \frac{m_3^2 - (m_1^2 + m_2^2)}{2\, m_1 m_2}.$$

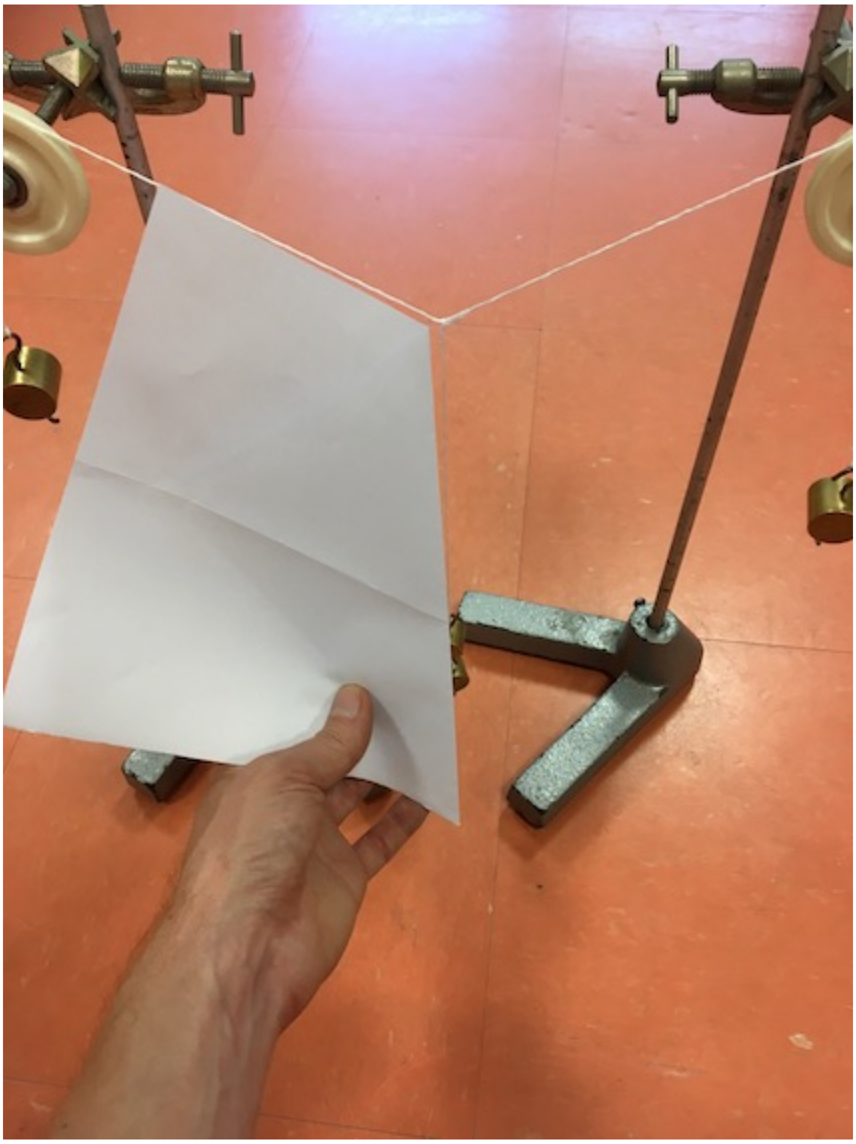
Démonstration *(javascript:;)*

> *Réécrivons l'équation vectorielle ci-dessus sous la forme $\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = -\mathbf{F_3}$, et calculons la norme au carré de chacun des deux membres. On obtient*
>
> $$||\mathbf{F_1}||^2 + ||\mathbf{F_2}||^2 + 2\,\mathbf{F_1}\cdot\mathbf{F_2} = ||\mathbf{F_3}||^2.$$
>
> *On trouve finalement la formule annoncée puisque par définition de θ, on a*

valeur précise de l'accélération de la pesanteur est sans importance sur le résultat final. S'il vous prenait donc l'envie, non seulement de réaliser l'expérience sur Terre mais également d'aller la reproduire sur la Lune ou Mars, attendez-vous à mesurer le même angle pour trois masses données 😃.

Nous pouvons à présent faire plusieurs remarques et soumettre la formule ci-dessus à notre intuition physique 🤔.

- Si les trois masses sont égales, quelle que soit cette valeur, on s'attend à ce que les trois angles en P soient égaux, autrement dit $\theta = 120^{\circ}$. Or, après simplification, la formule se réduit justement à $\cos\theta = -\frac{1}{2}$.



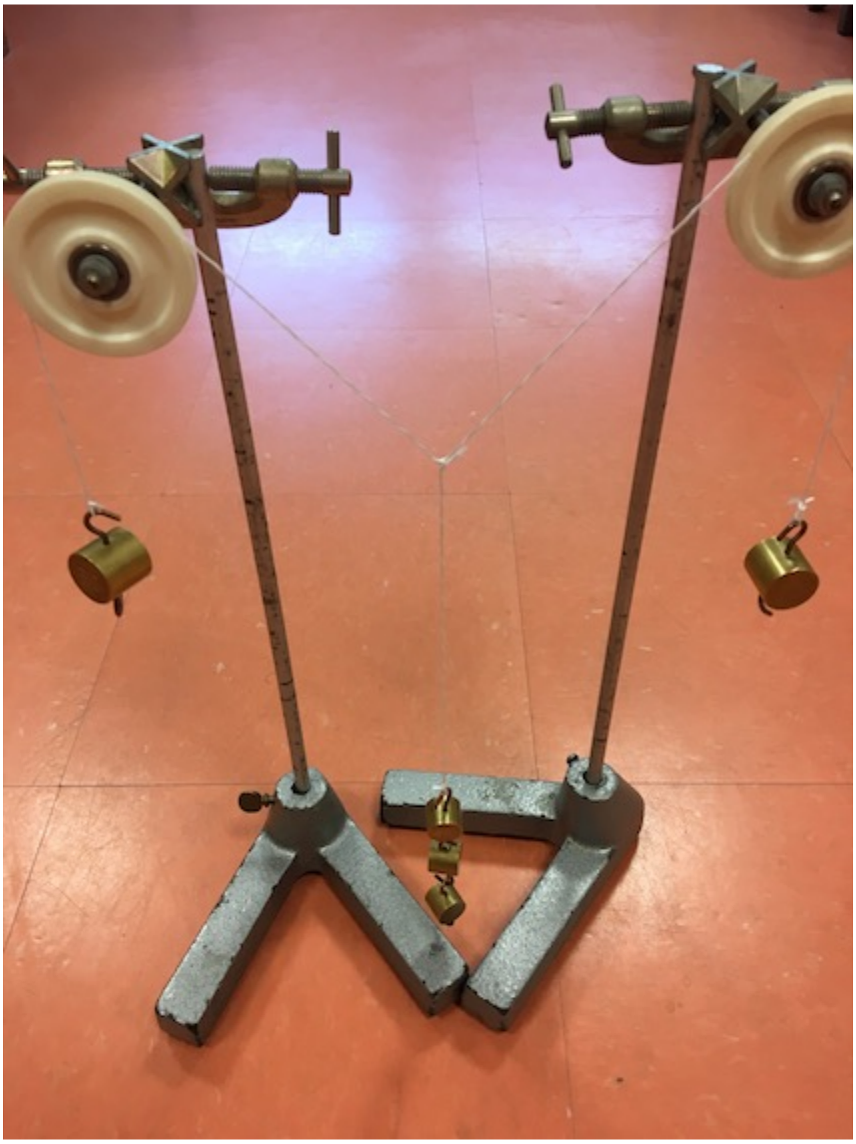
Le cosinus d'un angle étant compris -1 et +1, remarquons que

$$m_1^2 + m_2^2 - 2\,m_1 m_2 \leq m_3^2 \leq m_1^2 + m_2^2 + 2\,m_1 m_2,$$

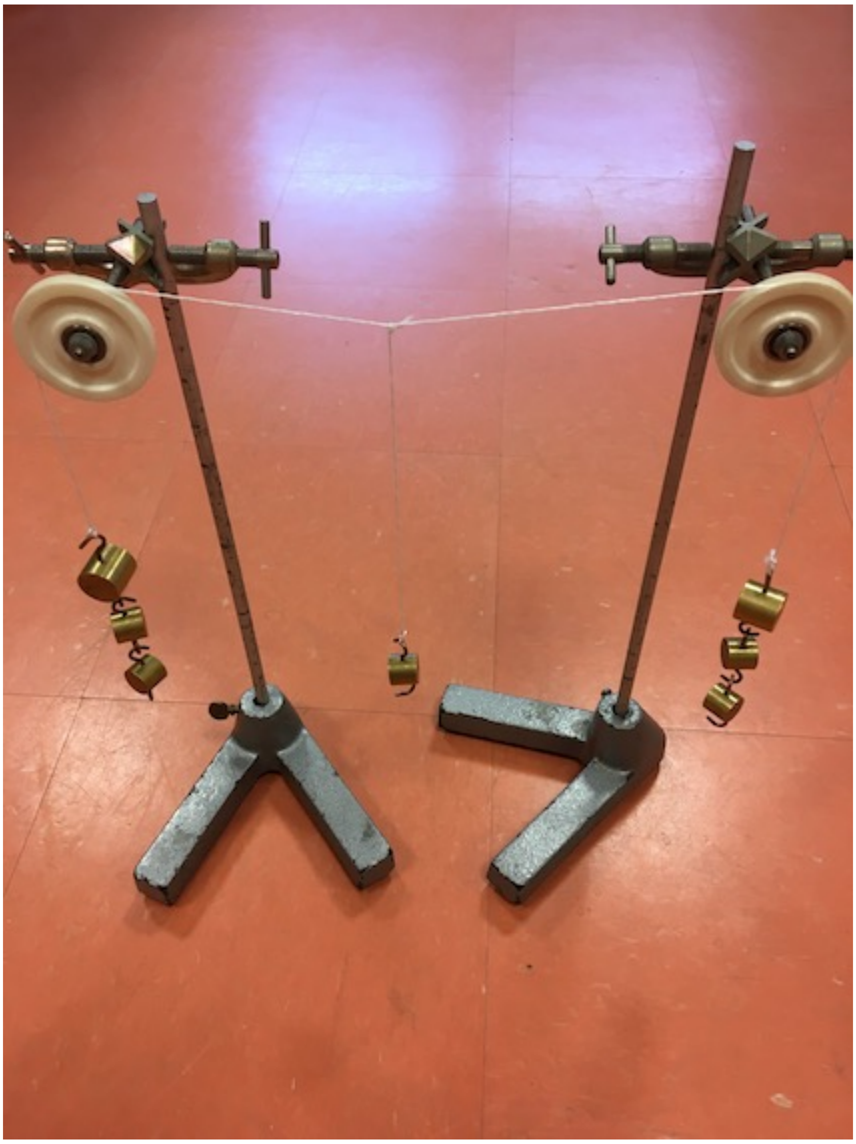
puis finalement, en utilisant les identités remarquables,

$$|m_1 - m_2| \leq m_3 \leq (m_1 + m_2).$$

- Plus la masse m_3 est pesante par rapport aux masses m_1 et m_2, plus celle-ci « s'enfonce » et plus l'angle θ est proche de 0 degré. Compte-tenu de la remarque précédente, si la masse m_3 vient à être supérieure à la somme des masses m_1 et m_2, l'équilibre ne peut plus être maintenu, la masse m_3 entraîne dans sa chute les deux autres masses.



$m_3 = 0$, alors $m_1 = m_2$.



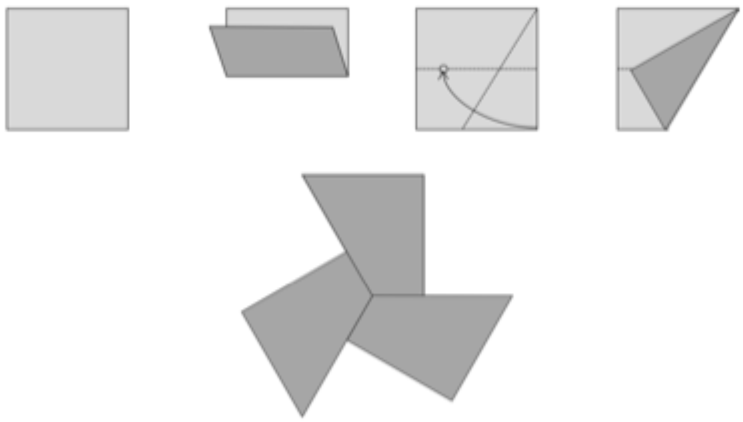
- Une dernière remarque encore. Dire que l'angle supérieur en P est droit, c'est dire que $\cos\theta = 0$. On déduit ainsi de notre formule une version « mécaniste » du théorème de Pythagore, où les distances sont remplacées par des masses [3 *(#nb3)*].

Version mécaniste du théorème de Pythagore

> *L'angle supérieur en P est droit si et seulement $m_1^2 + m_2^2 = m_3^2$.*

Un gabarit de 120 degrés en papier

moitié pour ramener un côté sur son côté opposé. On déplie la feuille pour revenir au carré de départ. On plie une deuxième fois la feuille afin d'amener l'un des sommets du carré sur le pli du milieu de la feuille. On obtient ainsi un quadrilatère avec deux angles droits, un angle aigu et un angle obtus. Un petit dessin valant mieux qu'un long discours…



Un bel exercice de géométrie

> *L'angle obtus du quadrilatère mesure 120 degrés. Sauriez-vous le démontrer ? [4 (#nb4)]*

Si ces expérimentations vous ont amusé, alors l'article Poids, poulies et point de Fermat-Steiner *(Poids-poulies-et-point-de-Fermat-Steiner.html)* qui paraîtra fin octobre vous amusera peut-être tout autant [5 *(#nb5)*]. Ce deuxième article débute d'ailleurs par une démonstration du fait que l'angle de notre gabarit est bien de 120 degrés.

Post-scriptum :

L'auteur et la rédaction de IdM remercient également Christian Mercat et les relecteurs François Brunault et Jean-Louis Poss pour leur relecture attentive et leurs commentaires constructifs.

Article édité par Christian Mercat *(_Mercat-Christian_.html)*

NOTES

[1 *(#nh1)*] Nous utilisons la convention de noter en **gras** les vecteurs, plutôt que de les surmonter d'une flèche. Ainsi, $\mathbf{g}$ désigne le vecteur accélération de la pesanteur, alors que $g = ||\mathbf{g}||$ désigne sa norme qui est un scalaire. Avec cette convention, le vecteur nul sera donc noté $\mathbf{0}$ plutôt que $\overrightarrow{0}$ et on a bien entendu $||\mathbf{0}|| = 0$.

[2 *(#nh2)*] On imagine mal le point P se positionner naturellement au-dessus des deux poulies…

[3 *(#nh3)*] Ce tweet *(https://twitter.com/naofumi_i/status/995624134485753856)* de @naofumi_i *(https://twitter.com/naofumi_i)* illustre le cas du triplet pythagoricien (3,4,5).

[4 *(#nh4)*] Si vous séchez, c'est normal, ce n'est pas si évident que cela. Nous en donnons une démonstration dans cet article *(Poids-poulies-et-point-de-Fermat-Steiner.html)*.

[5 *(#nh5)*] Les amateurs de linge mouillé et d'étendoir auront plaisir à réfléchir au problème du jean *(http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/IMG/pdf/principedebac949.pdf)* proposé par Marc Legrand, Thomas Lecorre, Liouba Leroux, Anne Parreau de l'IREM de Grenoble à propos du « débat scientifique dans l'amphi » (voir page 214).