# BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS – UNE MÉTHODE EFFICACE

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source LATEX, disponible sur la page*
***https://github.com/bc-writing/drafts***.

## Mentions « légales »



Table des matières



*Date* : 25 Jan. 2024 – 14 Fév. 2024.

## 1. Ce qui nous intéresse

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers »[1], Paul Erdős démontre que pour tout couple $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit de $(k+1)$ entiers consécutifs $n(n+1)\cdots(n+k)$ n'est jamais le carré d'un entier. Plus précisément, l'argument général de Paul Erdős est valable pour $k+1 \geq 100$, soit à partir de 100 facteurs.

Il est facile de trouver sur le web des preuves à la main un nombre de facteurs appartenant à $[\![2\,;8]\!] \cup \{10\}$. Bien que certaines de ces preuves soient très sympathiques, leur lecture ne fait pas ressortir de schéma commun de raisonnement[2]. Dans ce document, nous allons tenter de limiter au maximum l'emploi de fourberies déductives en présentant une méthode très élémentaire[3], efficace, et semi-automatisable, pour démontrer, avec peu d'efforts cognitifs, les premiers cas d'impossibilité.

## 2. Notations utilisées

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- $\forall (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k-1} (n+i)$.
  Par exemple, $\pi_n^1 = n$, $\pi_n^2 = n(n+1)$ et $\pi_{n+2}^4 = (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$.
- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des carrés parfaits. On note aussi ${}^2_*\mathbb{N} = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
  $\mathbb{N}_{sf}$ est l'ensemble des naturels non nuls sans facteur carré[4].
- $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
  $\forall (p\,;n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation $p$-adique de $n$, c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise $n$, contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.
- $\mathbb{N}_{sc}^r$ désigne l'ensemble des suites finies strictement croissantes de $r$ entiers naturels.
  $\mathbb{P}_{sc}^r$ désigne l'ensemble des suites finies strictement croissantes de $r$ nombres premiers.
- $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de $n$ et $m$.
- $2\,\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
  $2\,\mathbb{N}+1$ est l'ensemble des nombres naturels impairs.

## 3. Les carrés parfaits

### 3.1. Structure.

**Fait 3.1.** *$n \in {}^2_*\mathbb{N}$ si, et seulement si, $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$.*

*Démonstration.* Immédiat à valider. □

**Fait 3.2.** *$\forall n \in {}^2_*\mathbb{N}$, s'il existe $m \in {}^2_*\mathbb{N}$ tel que $n = fm$ alors $f \in {}^2_*\mathbb{N}$.*

*Démonstration.* $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(fm) \in 2\mathbb{N}$, $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(fm) = v_p(f) + v_p(m)$ donnent $v_p(f) \in 2\mathbb{N}$. □

---

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).
2. Ceci est à nuancer, car à partir de 10 facteurs, une technique de type « principe des tiroirs » est envisageable numériquement ; par contre, elle n'est pas humainement efficace contrairement à ce qui va être présenté dans ce document.
3. Cette méthode s'appuie sur une représentation trouvée dans un message archivé : voir la section 8.
4. En anglais, on dit « square free ».

### 3.2. Distance entre deux carrés parfaits.

**Fait 3.3.** *Soit* $(N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $N > M$ *.*

*(1)* $N^2 - M^2 \geq 2N - 1$ *.*

*(2) Notons* $nb_{sol}$ *le nombre de solutions* $(N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *de* $N^2 - M^2 = \delta$ *.*

*Par exemple, pour* $\delta \in [\![1\,;20]\!]$*, nous avons :*

*(a)* $nb_{sol} = 0$ *si* $\delta \in \{1, 2, 4, 6, 10, 14, 18\}$ *.*

*(b)* $nb_{sol} = 1$ *si* $\delta \in \{3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 16, 17, 19, 20\}$ *.*

*(c)* $nb_{sol} = 2$ *si* $\delta \in \{15\}$ *.*

*Démonstration.*

(1) Comme $N - 1 \geq M$ , nous obtenons : $N^2 - M^2 \geq N^2 - (N-1)^2 = 2N - 1$ .

(2) Le point précédent permet d'utiliser le programme `Python` suivant afin d'obtenir rapidement les longues listes de nombres indiquées.

```python
from collections import defaultdict
from math        import sqrt, floor

def sol(diff):
    solfound = []

    for i in range(1, (diff + 1) // 2 + 1):
        tested = i**2 - diff

        if tested < 0:
            continue

        tested = floor(sqrt(i**2 - diff))

        if tested == 0:
            continue

        if tested**2 == i**2 - diff:
            solfound.append((i, tested))

    return solfound

all_nbsol = defaultdict(list)

for d in range(1, 101):
    all_nbsol[len(sol(d))].append(d)

print(all_nbsol)
```

□

## 4. Prenons du recul

### 4.1. Les sf-tableaux.

L'idée de départ est simple : d'après le fait 3.2, il semble opportun de se concentrer sur les diviseurs sans facteur carré des $k$ facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^k = n(n+1)\cdots(n+k-1)$ .

**Définition 4.1.** *Considérons* $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , $(a_i)_{0 \leq i \leq k} \subset \mathbb{N}_{sf}$ *et* $(s_i)_{0 \leq i \leq k} \subset {}^2_*\mathbb{N}$ *tels que* $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$ , $n+i = a_i s_i$ . *Cette situation est résumée par le tableau suivant que nous nommerons « sf-tableau »*[5].

| $n + \bullet$ | $0$ | $1$ | $2$ | $\ldots$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $\ldots$ | $a_k$ |

**Exemple 4.1.** *Supposons avoir le sf-tableau suivant où* $n \in \mathbb{N}^*$.

| $n + \bullet$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 5 | 6 | 1 |

*Ceci résume la situation suivante.*

- $\exists A \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n = 2A^2$ .
- $\exists B \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n+1 = 5B^2$ .
- $\exists C \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n+2 = 6C^2$ .
- $\exists D \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n+3 = D^2$ .

**Définition 4.2.** *Soient* $r \in \mathbb{N}^*$, $(n_i)_{1 \leq i \leq r} \in \mathbb{N}_{sc}^r$ , $(a_i)_{1 \leq i \leq r} \subset \mathbb{N}_{sf}$ *et* $(s_i)_{1 \leq i \leq r} \subset {}^2_*\mathbb{N}$ *tels que* $\forall i \in [\![1\,;r]\!]$ , $n_i = a_i s_i$ . *Cette situation est résumée par le tableau suivant que nous nommerons « sf-tableau généralisé »* .

| $\bullet$ | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | $\ldots$ | $n_r$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $\ldots$ | $a_r$ |

### 4.2. Construire des sf-tableaux.

Pour fabriquer des sf-tableaux, nous allons « multiplier » des sf-tableaux dits partiels.

**Définition 4.3.** *Soient* $(n,k,r) \in (\mathbb{N}^*)^3$ , $(p_j)_{1 \leq j \leq r} \in \mathbb{P}_{sc}^r$ , $(\epsilon_{i,j})_{0 \leq i \leq k\,, 1 \leq j \leq r} \subseteq \{0,1\}$ *et aussi* $(f_i)_{0 \leq i \leq k} \subset \mathbb{N}^*$ *vérifiant les conditions suivantes.*

- $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$ , $n+i = f_i \cdot \prod_{j=1}^{r} p_j^{v_{p_j}(n+i)}$ . *Noter que* $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$ , $\forall j \in [\![1\,;r]\!]$ , $f_i \wedge p_j = 1$ .
- $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$ , $\forall j \in [\![1\,;r]\!]$ , $v_{p_j}(n+i) \equiv \epsilon_{i,j}$ *modulo* $2$ .

*Cette situation est résumée par le tableau suivant qui sera nommé « sf-tableau partiel », voire « sf-tableau partiel d'ordre* $(p_j)_{1 \leq j \leq r}$ *»*[6].

| $n + \bullet$ | $0$ | $1$ | $2$ | $\ldots$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(p_j)_{1 \leq j \leq r}$ | $\prod_{j=1}^{r} p_j^{\epsilon_{0,j}}$ | $\prod_{j=1}^{r} p_j^{\epsilon_{1,j}}$ | $\prod_{j=1}^{r} p_j^{\epsilon_{2,j}}$ | $\ldots$ | $\prod_{j=1}^{r} p_j^{\epsilon_{k,j}}$ |

**Exemple 4.2.** *Supposons avoir le sf-tableau partiel suivant où* $n \in \mathbb{N}^*$.

| $n + \bullet$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $(2,3)$ | 2 | 6 | 1 | 3 |

5. « sf » est pour « square free » .
6. Noter que $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$ , $\forall j \in [\![1\,;r]\!]$ , $p_j^{\epsilon_{i,j}} \in \{1, p_j\}$ .

*Ceci résume la situation suivante.*

- $\exists(a, \alpha, A) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $A \wedge 6 = 1$ *et* $n = 2^{2a+1}3^{2\alpha}A$ .
- $\exists(b, \beta, B) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $B \wedge 6 = 1$ *et* $n + 1 = 2^{2b+1}3^{2\beta+1}B$ .
- $\exists(c, \gamma, C) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $C \wedge 6 = 1$ *et* $n + 2 = 2^{2c}3^{2\gamma}C$ .
- $\exists(d, \delta, D) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $D \wedge 6 = 1$ *et* $n + 3 = 2^{2d}3^{2\delta+1}D$ .

**Exemple 4.3.** *La multiplication de deux* sf*-tableaux partiels est « naturelle » lorsqu'elle porte sur des suites* $(p_j)_{1\leq j\leq r} \in \mathbb{P}^r_{sc}$ *et* $(q_j)_{1\leq j\leq s} \in \mathbb{P}^s_{sc}$ *d'intersection vide, c'est-à-dire sans nombre premier commun.*

*Considérons les deux* sf*-tableaux partiels suivants où l'on note* $2$ *et* $3$ *au lieu de* $(2)$ *et* $(3)$ .

| $n+\bullet$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |

| $n+\bullet$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 1 | 1 | 3 |

*La multiplication de ces* sf*-tableaux partiels est le* sf*-tableau suivant, partiel a priori, mais si l'on sait que* $2$ *et* $3$ *sont les seuls diviseurs premiers de* $\pi^4_n$ *, alors le* sf*-tableau est non partiel.*

| $n+\bullet$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $(2,3)$ | 3 | 2 | 1 | 6 |

*Ceci résume la situation suivante qui est équivalente à ce que donne la conjonction des deux premiers* sf*-tableaux partiels (les abus de notations sont évidents).*

- $A \wedge 6 = 1$ *et* $n = 2^{2a}3^{2\alpha+1}A$ .
- $B \wedge 6 = 1$ *et* $n + 1 = 2^{2b+1}3^{2\beta}B$ .
- $C \wedge 6 = 1$ *et* $n + 2 = 2^{2c}3^{2\gamma}C$ .
- $D \wedge 6 = 1$ *et* $n + 3 = 2^{2d+1}3^{2\delta+1}D$ .

## 5. Structure des sf-tableaux

### 5.1. **A propos des sf-tableaux partiels.**

**Fait 5.1.** *Dans la deuxième ligne d'un* sf*-tableau partiel d'ordre* $p$ *, les positions des valeurs* $p$ *sont congrues modulo* $p$ *.*

*Démonstration.* Penser aux multiples de $p$ . ☐

**Fait 5.2.** $\forall(n, k, p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \times \mathbb{P}$ *, si* $\pi^k_n \in {}^2\mathbb{N}$ *, alors dans le* sf*-tableau partiel d'ordre* $p$ *associé à* $\pi^k_n$ *, le nombre de valeurs* $p$ *est forcément pair.*

*Démonstration.* Évident, mais très pratique, comme nous le verrons dans la suite. ☐

### 5.2. **A propos des sf-tableaux non partiels.**

**Fait 5.3.** *Dans les tableaux ci-dessous, où* $k \geq 2$ *, les puces* $\bullet$ *indiquent des valeurs quelconques.*

*(1) Si nous avons un* sf*-tableau du type suivant, alors* $\pi^{k-1}_n \in {}^2_*\mathbb{N}$ .

| $n+\bullet$ | 0 | 1 | … | $k-1$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\bullet$ | $\bullet$ | … | $\bullet$ | 1 |

*(2) Si nous avons un* sf*-tableau du type suivant, alors* $\pi^{k-1}_{n+1} \in {}^2_*\mathbb{N}$ .

| $n+\bullet$ | 0 | 1 | … | $k-1$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | $\bullet$ | … | $\bullet$ | $\bullet$ |

*Démonstration.* Immédiat via le fait 3.2, car nous avons soit $n + k \in {}^2_*\mathbb{N}$ , soit $n \in {}^2_*\mathbb{N}$ . ☐

**Fait 5.4.** *Soit le* sf*-tableau généralisé ci-après où* $r \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ , $(n_i)_{1 \leq i \leq r} \in \mathbb{N}_{sc}^{r}$ *et* $d \in \mathbb{N}_{sf}$ .

| $\bullet$ | $n_1$ | $\dots$ | $n_r$ |
|---|---|---|---|
| | $d$ | $\dots$ | $d$ |

*Ce* sf*-tableau est impossible si l'une des deux conditions suivantes est validée.*

(1) $\dfrac{n_r - n_1}{d} \notin \mathbb{N}$ .

(2) $\dfrac{n_r - n_1}{d} \in \{1, 2, 4, 6, 10, 14, 18\}$ .

*Démonstration.* $n_1 = dA^2$ et $n_r = dB^2$ nous donnent $d(B^2 - A^2) = n_r - n_1$ . On conclut directement pour le premier cas, et via le fait 3.3 dans le second. □

## 6. Premières applications

### 6.1. Le cas de 2 facteurs.

Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1) \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$ . Nous avons alors les sf-tableaux partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}$ divisant $\pi_n^2$ , car les valeurs $p$ de la deuxième ligne doivent apparaître un nombre pair de fois tout en étant espacées par $(p-1)$ valeurs 1 (voir les faits 5.1 et 5.2).

| $n + \bullet$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p$ | 1 | 1 |

La multiplication de tous les sf-tableaux partiels précédents donne le sf-tableau, non partiel, ci-après, mais ceci contredit le fait 5.4.

| $n + \bullet$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| | 1 | 1 |

### 6.2. Le cas de 3 facteurs.

Supposons que $\pi_n^3 = n(n+1)(n+2) \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$ . Nous avons alors les sf-tableaux partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ divisant $\pi_n^3$ , d'après les faits 5.1 et 5.2.

| $n + \bullet$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p$ | 1 | 1 | 1 |

Pour $p = 2$ , via les faits 5.1 et 5.2, seulement deux sf-tableaux partiels d'ordre 2 sont possibles. Nous utilisons un abus de notation évident pour indiquer ces deux possibilités.

| $n + \bullet$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 |
| | 2 | 1 | 2 |

La multiplication de tous les sf-tableaux partiels précédents donne juste les deux sf-tableaux, non partiels, suivants, mais ceci est impossible d'après le fait 5.4.

| $n + \bullet$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 |
| | 2 | 1 | 2 |

### 6.3. **Le cas de 4 facteurs.**

Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3) \in {}^2_*\mathbb{N}$ . Nous avons alors les $\mathsf{sf}$-tableaux partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}_{\geq 4}$ divisant $\pi_n^4$ .

| $n+\bullet$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | 1 | 1 | 1 | 1 |

Pour $p = 2$ , nous avons les trois $\mathsf{sf}$-tableaux partiels d'ordre 2 donnés ci-après.

| $n+\bullet$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 2 | 1 | 2 | 1 |
| | 1 | 2 | 1 | 2 |

Pour $p = 3$ , nous obtenons les deux $\mathsf{sf}$-tableaux partiels d'ordre 3 donnés ci-après.

| $n+\bullet$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 3 | 1 | 1 | 3 |

La multiplication des $\mathsf{sf}$-tableaux partiels précédents donne les $\mathsf{sf}$-tableaux[7], suivants.

| $n+\bullet$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 2 | 1 | 2 | 1 |
| | 1 | 2 | 1 | 2 |

| $n+\bullet$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | 1 | 1 | 3 |
| | 6 | 1 | 2 | 3 |
| | 3 | 2 | 1 | 6 |

Le fait 5.4 rejette quatre $\mathsf{sf}$-tableaux : voir les cellules surlignées ci-dessous.

| $n+\bullet$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 2 | 1 | 2 | 1 |
| | 1 | 2 | 1 | 2 |

| $n+\bullet$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | 1 | 1 | 3 |
| | 6 | 1 | 2 | 3 |
| | 3 | 2 | 1 | 6 |

Ceci nous amène à étudier les deux $\mathsf{sf}$-tableaux généralisés suivants.

| $\bullet$ | $n$ | $n+1$ | $n+2$ | $n+3$ |
|---|---|---|---|---|
| | 6 | 1 | 2 | 3 |
| | 3 | 2 | 1 | 6 |

En posant $x = n + \frac{3}{2} = \frac{n+(n+3)}{2}$ , nous obtenons les $\mathsf{sf}$-tableaux généralisés suivants.

| $\bullet$ | $x-\frac{3}{2}$ | $x-\frac{1}{2}$ | $x+\frac{1}{2}$ | $x+\frac{3}{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| | 6 | 1 | 2 | 3 |
| | 3 | 2 | 1 | 6 |

En multipliant les colonnes 1 et 4 , et aussi la 2 et la 3 , nous arrivons, dans chaque cas, au même $\mathsf{sf}$-tableau généralisé ci-dessous après avoir noté que $6 \times 3 = 2 \times 3^2$.

| $\bullet$ | $x^2-\frac{9}{4}$ | $x^2-\frac{1}{4}$ |
|---|---|---|
| | 2 | 2 |

7. Tableaux non partiels forcément.

Comme $x^2 - \frac{1}{4} - \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) = 2$ , le fait 5.4 nous montre que le sf-tableau généralisé précédent est impossible. Joli ! Non ?

Noter que la fin du raisonnement n'a fait appel à aucune hypothèse sur $\pi_n^4$ . Ceci nous donne donc le fait suivant.

**Fait 6.1.** *Aucun sf-tableau ne peut contenir l'un des deux sf-tableaux suivants.*

| $m + \bullet$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| | 6 | 1 | 2 | 3 |
| | 3 | 2 | 1 | 6 |

6.4. **Le cas de 5 facteurs.**

Supposons que $\pi_n^5 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2_*\mathbb{N}$ . Nous avons alors les sf-tableaux partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ divisant $\pi_n^5$ .

| $n + \bullet$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Pour $p = 2$ , nous avons les sf-tableaux partiels d'ordre 2 donnés ci-après.

| $n + \bullet$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |

Pour $p = 3$ , nous obtenons les sf-tableaux partiels d'ordre 3 donnés ci-après.

| $n + \bullet$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 |

La multiplication de tous les sf-tableaux partiels précédents donne les 15 cas suivants.

| $n + \bullet$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |

| $n + \bullet$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| | 6 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| | 6 | 1 | 1 | 3 | 2 |
| | 3 | 2 | 1 | 6 | 1 |
| | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 |

| $n + \bullet$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 |
| | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 |
| | 2 | 3 | 1 | 1 | 6 |
| | 1 | 6 | 1 | 2 | 3 |
| | 1 | 3 | 2 | 1 | 6 |

Comme $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2_*\mathbb{N}$ et $\pi_{n+1}^4 = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2_*\mathbb{N}$ d'après la section 6.3, les tableaux commençant, ou finissant, par une valeur 1 sont à ignorer d'après le fait 5.3. Cela laisse les sf-tableaux ci-après, mais ces derniers sont rejetés par le fait 5.4.

| $n + \bullet$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| | 6 | 1 | 1 | 3 | 2 |
| | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 |
| | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 |
| | 2 | 3 | 1 | 1 | 6 |

## 7. Et après ?

### 7.1. La méthode via le cas de 6 facteurs.

La méthode présentée ci-dessus permet de faire appel à des programmes informatiques pour limiter les traitements à la main, et à la sueur des neurones, de `sf`-tableaux problématiques comme nous avons dû le faire dans la section 6.3. Expliquons cette tactique semi-automatique en traitant le cas de 6 facteurs.

(1) On raisonne par l'absurde en supposant que $\pi_n^6 \in {}_*^2\mathbb{N}$ .
(2) Comme $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 6}$ , $p$ divise au maximum un seul des facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^6$ , nous avons juste besoin de considérer l'ensemble $\mathcal{P} = \{2, 3, 5\}$ des diviseurs premiers stricts de $6$ .
(3) Pour chaque élément $p$ de $\mathcal{P}$ , on construit la liste $\mathcal{V}_p$ des `sf`-tableaux partiels relatifs à $p$ et $\pi_n^6 \in {}_*^2\mathbb{N}$ en s'appuyant sur la section 5.1.
(4) Via les listes $(\mathcal{V}_p)_{p \in \mathcal{P}}$ , on calcule toutes les multiplications de tous les `sf`-tableaux partiels relatifs à des nombres $p$ différents, et pour chacune d'elles, on ne la garde que si elle ne vérifie aucune des conditions suivantes, celles du dernier cas devant être indiquées à la main au programme qui va donc évoluer au gré des démonstrations faites par un humain (démonstrations que l'on espère le plus rare possible).
    (a) Le tableau commence, ou se termine, par la valeur $1$ . Dans ce cas, on sait par récurrence que le tableau produit n'est pas possible (voir le fait 5.3).
    (b) Le tableau est rejeté par le fait 5.4.
    (c) Le tableau « produit » contient un sous-tableau que nous savons impossible suite à un raisonnement humain fait *localement* , c'est-à-dire que seul les facteurs indiqués dans le sous-tableau, et le sous-tableau lui-même sont utilisés pour raisonner. C'est le cas des `sf`-tableaux du fait 6.1.

Dans le dépôt en ligne associé à ce document sont placés des fichiers `Pyhon` [8] qui nous amènent à analyser les deux `sf`-tableaux problématiques suivants pour lesquels nous allons justifier que les valeurs 1 posent problème [9].

| $n + \bullet$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 30 | 1 | 2 | 3 | 1 | 5 |
| | 5 | 1 | 3 | 2 | 1 | 30 |

Ces deux cas sont rapides à gérer puisque, d'après le fait 3.3, 1 et 4 sont les seuls carrés distants de $3$ , d'où $n + 1 = 1$ , mais ceci contredit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous savons donc que $\pi_n^6 \in {}_*^2\mathbb{N}$ sans effort. Notons au passage un nouveau cas problématique « local » pour nos futures recherches (le fait suivant généralise la technique que nous venons d'utiliser).

8. L'emploi de scripts codés rapidement est totalement fonctionnel ici.
9. Toutes les règles 4-a, 4-b et 4-c sont utilisées pour n'arriver qu'aux deux `sf`-tableaux à analyser à la main.

**Fait 7.1.** *Soit le* $\texttt{sf}$*-tableau généralisé ci-après où* $r \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ , $(n_i)_{1 \leq i \leq r} \in \mathbb{N}_{sc}^r$ *et* $d \in \mathbb{N}_{sf}$ .

| $\bullet$ | $n_1$ | $\ldots$ | $n_r$ |
|---|---|---|---|
| | $d$ | $\ldots$ | $d$ |

*Ce* $\texttt{sf}$*-tableau est impossible si* $n_1 \geq d + 1$ *et* $\frac{n_r - n_1}{d} \in \{3, 8\}$ .

*Démonstration.* Ceci vient des équivalences logiques suivantes en posant $n_1 = dA^2$ et $n_r = dB^2$ avec $(A, B) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\begin{aligned}
& \frac{n_r - n_1}{d} \in \{3, 8\} \\
\iff\ & B^2 - A^2 \in \{3, 8\} \\
\iff\ & (A, B) \in \{(1, 2), (1, 3)\} \quad \text{Voir le fait 3.3.} \\
\iff\ & (n_1, n_r) \in \{(d, 4d), (d, 9d)\}
\end{aligned}$$

□

**Remarque 7.1.** *On peut gérer les cas problématiques du cas 6 via des manipulations algébriques similaires à celles qui avaient donné le fait 6.1. En effet,* $x = n + \frac{5}{2}$ *nous donne ce qui suit avec un abus de notation évident.*

| $x + \bullet$ | $-\frac{5}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 30 | 1 | 2 | 3 | 1 | 5 |
| | 5 | 1 | 3 | 2 | 1 | 30 |

*La multiplication des colonnes* 1 *et* 6 *, ainsi que celle des colonnes* 3 *et* 4 *, nous amènent au même* $\texttt{sf}$*-tableau généralisé suivant après avoir noté que* $5 \times 30 = 6 \times 5^2$ .

| $\bullet$ | $x^2 - \frac{25}{4}$ | $x^2 - \frac{1}{4}$ |
|---|---|---|
| | 6 | 6 |

*Comme* $x^2 - \frac{1}{4} - \left(x^2 - \frac{25}{4}\right) = 6$ *, le fait 5.4 nous permet de conclure.*

### 7.2. **Au-delà de 6 facteurs ?**

Voici ce que donnent nos programmes `Pyhon` sans trop d'efforts, mais avec du temps de calcul [10]. Rappelons que chaque nouveau cas problématique est indiqué au programme qui évolue donc au gré de l'intervention humaine.

*Sans intervention humaine.*

Pour $k \in \{7, 8\}$ , nous avons $\pi_n^k \notin {}^2\mathbb{N}$ sans aucun effort cognitif.

*De nouveaux cas problématiques*

$\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$ demande de gérer les $\texttt{sf}$-tableaux suivants.

| $n + \bullet$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 14 | 1 | 6 | 5 | 2 | 3 | 1 | 7 | 10 |
| | 10 | 7 | 1 | 3 | 2 | 5 | 6 | 1 | 14 |

Extrayons du premier $\texttt{sf}$-tableau, le $\texttt{sf}$-tableau généralisé suivant.

| $\bullet$ | $n + 1$ | $n + 2$ | $n + 4$ | $n + 5$ |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 6 | 2 | 3 |

10. Nous commençons à entrer dans un monde à la combinatoire élevée.

En posant $m = n + 3$, nous obtenons le tableau ci-après.

| $\bullet$ | $m-2$ | $m-1$ | $m+1$ | $m+2$ |
|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $6$ | $2$ | $3$ |

En multipliant les colonnes $1$ et $4$, et aussi la $2$ et la $3$, nous obtenons le sf-tableau généralisé ci-dessous après avoir noté que $6 \times 2 = 3 \times 2^2$.

| $\bullet$ | $m^2-4$ | $m^2-1$ |
|---|---|---|
| | $3$ | $3$ |

Comme $m^2 - 4 - (m^2 - 1) = 3$, le fait 5.4 nous montre que le premier sf-tableau, celui commençant par 14, est impossible. Le cas du deuxième se traite de façon analogue, d'où finalement $\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$. Notons au passage un nouveau fait.

**Fait 7.2.** *Aucun* sf*-tableau ne peut contenir l'un des deux* sf*-tableaux généralisés suivants.*

| $m+\bullet$ | $0$ | $1$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $6$ | $2$ | $3$ |
| | $3$ | $2$ | $6$ | $1$ |

*Sans intervention humaine.*

Pour $k \in [\![10\,;17]\!]$, nous avons $\pi_n^k \notin {}^2\mathbb{N}$ sans aucun effort cognitif. Au-delà, un programme basique n'est plus utilisable car il y a trop de tableaux à construire...

## 8. Sources utilisées

Ce document n'aurait pas vu le jour sans la source suivante.

(1) Une discussion archivée consultée le 28 janvier 2024 :
`https://web.archive.org/web/20171110144534/http://mathforum.org/library/drmath/view/65589.html`.

*Cette discussion utilise ce que nous avons nommé les* sf*-tableaux, mais le côté semi-mécanisable de leur utilisation n'est pas souligné.*

## 9. AFFAIRE À SUIVRE...