$$\prod_{n=1}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)=\prod_{n=N+1}^{2N}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-1}$$

(Src. Page 194 de "les séries div..." de B. Candelpergher)

P_N : prod. de gauche / Q_N : prod. de dte

↳ Expérience sur P_N (qui arrive naturellt dans le livre cité)

$P_1 = \frac{2}{1}\times\frac{2}{3} = \frac{2^2}{3}$

n pair : $1+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{2n-2}{2n-1}$

n impair : $1+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{2n}{2n-1}$

$P_2 = \frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7} = \frac{2^4\times 3}{5\times 7}$

$P_3 = P_2\times\frac{10}{9}\times\frac{10}{11} = \frac{2^6\times 5\times 3}{9\times 11\times 7}$

On peut noter : $\left[\begin{array}{l} P_1=\frac{4}{3} \\ P_2=\frac{6\times 8}{5\times 7} \\ P_3=\frac{10\times 12\times 8}{9\times 11\times 7}\end{array}\right.$ Intéressant...

Conjecture : $P_N = \frac{2N+2}{2N+1}\times\frac{2N+4}{2N+3}\times\cdots\times\frac{2(2N)}{2(2N)-1}$

$= Q_N$

↳ Récu.

- Init. vue avant
- Hérédité : $P_{N+1} = P_N\times\frac{4N+2}{4N+1}\times\frac{4N+2}{4N+3}$

Or, $\frac{4N+2}{4N+1}\times\frac{4N+2}{4N+3} = \frac{4N+2}{4N+1}\times\frac{4N+4}{4N+3}\times\underbrace{\frac{4N+2}{4N+4}}_{=\frac{2N+1}{2N+2}}$

D'où,

$$P_{n+1} = Q_n \boxed{\times \frac{2n+1}{2n+2}} \times \frac{4n+2}{4n+1} \times \frac{4n+4}{4n+3}$$

$$= \frac{2n+2}{2n+1} \times \dots \times \frac{4n}{4n-1} \times \frac{4n+2}{4n+1} \times \frac{4n+4}{4n+3} \times \frac{2n+1}{2n+2}$$

$$= Q_{n+1}$$