

BROUILLON - FAIRE DES PRODUITS SUR UNE HYPERBOLE

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.

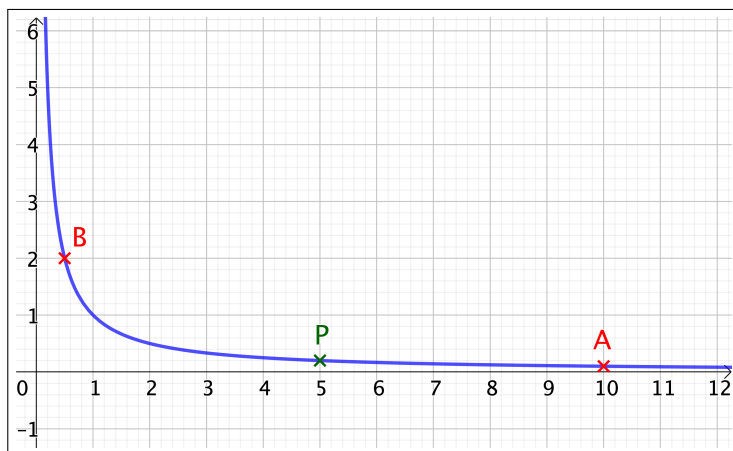


TABLE DES MATIÈRES

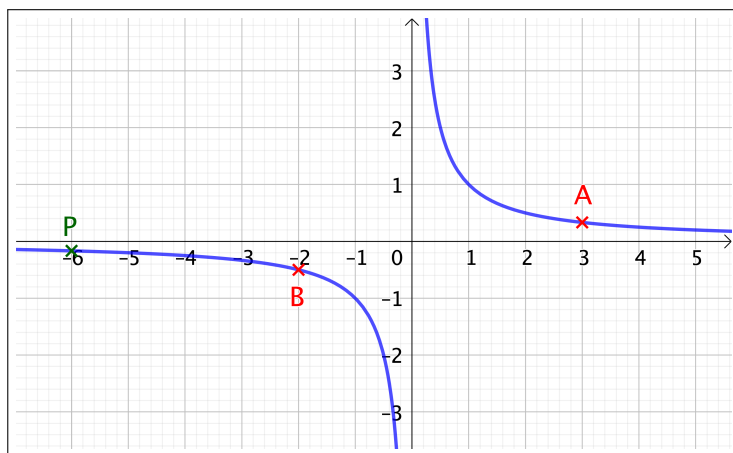
1.	Comment additionner des nombres grâce à l’hyperbole d’équation $y = \frac{1}{x}$	2
2.	Preuve de la validité de la conjecture	4
3.	Toute hyperbole d’équation $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ a une structure de groupe	4

1. COMMENT ADDITIONNER DES NOMBRES GRÂCE À L'HYPERBOLE D'ÉQUATION $y = \frac{1}{x}$

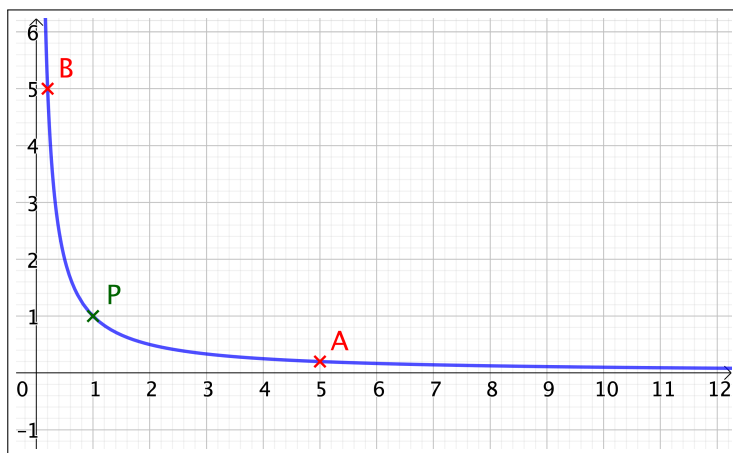
Dans un repère orthogonal, donnons nous l'hyperbole $\mathcal{H} : y = \frac{1}{x}$. Plaçons-y les points A , B et P d'abscisses respectives a , b et $p = ab$. Observez¹ les trois cas ci-dessous et essayez de conjecturer quelque chose (*la réponse est donnée dans la page suivante*)².



Cas où $a > 0$ et $b > 0$



Cas où $a < 0$ et $b > 0$

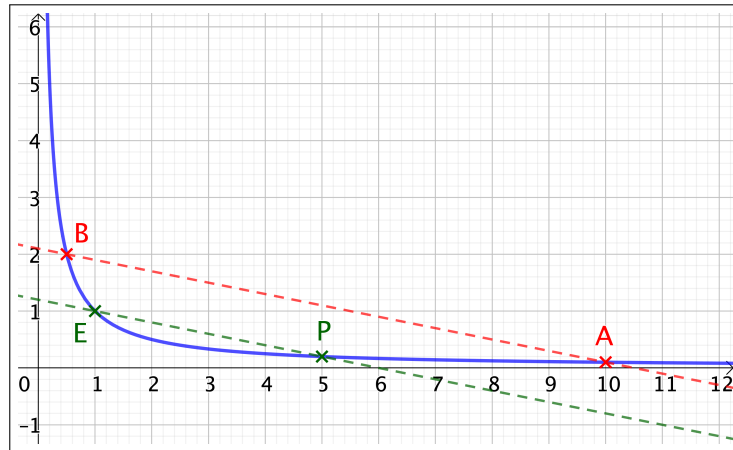


Cas où $ab = 1$

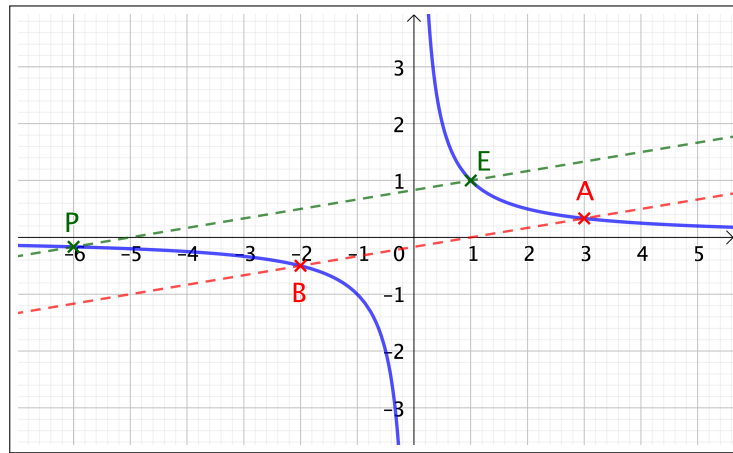
1. Pour conjecturer plus facilement quelque chose, utilisez le fichier GeoGebra **base-tool.ggb** manipulable dynamiquement qui est disponible sur le lieu de téléchargement de ce document.

2. On sait « additionner » sur un cercle et sur $\mathcal{P} : y = x^2$. Or yx , $x^2 - y^2$ et $x^2 - y$ sont des formes quadratiques qui ont des propriétés géométriques communes. Avec tout ceci en tête, la recherche proposée ici devient très naturelle.

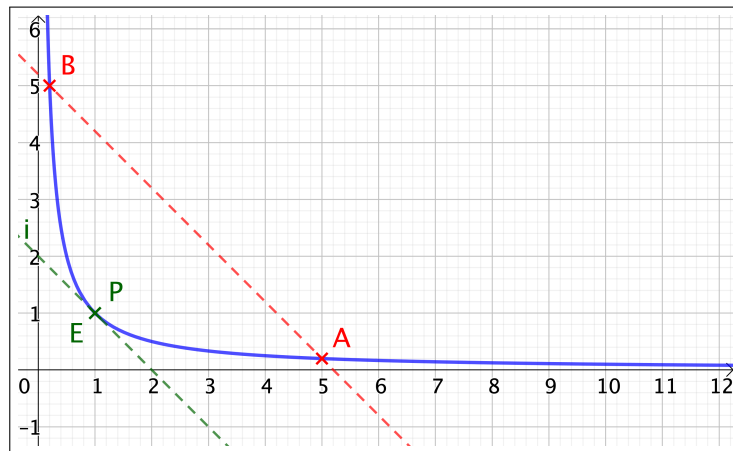
Pour mieux voir ce qu'il se passe, ajoutons $E(1;1)$, ce qui semble naturel car 1 est son propre inverse, et traçons quelques droites. Voici ce que cela donne.



Cas où $a > 0$ et $b > 0$



Cas où $a < 0$ et $b > 0$



Cas où $ab = 1$

Il devient évident de conjecturer que le point P se construit géométriquement comme suit.

- (1) Si $x_A x_B \neq 1$ et $A \neq B$ alors on construit la parallèle à (AB) passant par E . Le point P est le second point d'intersection de cette parallèle avec \mathcal{H} (notons qu'une droite coupe \mathcal{H} en au plus deux points).
- (2) Si $x_A x_B = 1$ alors $P = E$. Notons au passage que l'on peut voir ceci comme un cas limite du précédent avec un point d'intersection « double ».

- (3) Si $x_A x_B \neq 1$ et $A = B$, on procède comme au point (1) mais avec la parallèle à la tangente en A à l'hyperbole \mathcal{H} .

La section qui suit va valider cette conjecture qui donne un moyen très capillotracté de calculer un produit de deux réels non nuls via l'hyperbole \mathcal{H} . Plus sérieusement, la construction ci-dessus est une propriété géométrique très jolie de l'hyperbole \mathcal{H} .

2. PREUVE DE LA VALIDITÉ DE LA CONJECTURE

Rappelons que $\mathcal{H} : y = \frac{1}{x}$, $E(1;1)$, $A(a; \frac{1}{a})$, $B(b; \frac{1}{b})$ et $P(p; \frac{1}{p})$ où $p = ab$ avec $(a; b) \in (\mathbb{R}^*)^2$.

Cas 1. *Supposons que $x_A x_B = 1$.*

Il est clair que $P = E$ dans ce cas.

Cas 2. *Supposons que $x_A x_B \neq 1$ et $A \neq B$.*

La droite (AB) a pour pente $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = -\frac{1}{ab}$. De plus, la droite (EP) , qui existe car $p \neq 1$, a pour pente $\frac{y_P - y_E}{x_P - x_E} = \frac{1}{p-1} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) = -\frac{1}{p} = -\frac{1}{ab}$. Les droites (AB) et (EP) sont bien parallèles comme nous l'avons affirmé.

Cas 3. *Supposons que $x_A x_B \neq 1$ et $A = B$.*

Comme ici $p = a^2 \neq 1$, la droite (EP) a pour pente $(-\frac{1}{a^2})$ qui est aussi la pente de la tangente en $A(a; \frac{1}{a})$ à l'hyperbole \mathcal{H} comme annoncé.

3. TOUTE HYPERBOLE D'ÉQUATION $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ A UNE STRUCTURE DE GROUPE

Le procédé de construction que nous venons de prouver se « *conserve* » par translations, et aussi par dilatations verticales et horizontales. Il se trouve que ce sont ces transformations qui permettent d'obtenir une hyperbole $\mathcal{H}' : y = \frac{ax+b}{cx+d}$, où $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$ ³, à partir de celle de l'hyperbole $\mathcal{H} : y = \frac{1}{x}$. Nous pouvons donc munir toute hyperbole $\mathcal{H}' : y = \frac{ax+b}{cx+d}$ d'une structure de groupe isomorphe à celle de $(\mathbb{R}^*; \times)$, et ceci avec un procédé géométrique simple pour « *multiplier* » sur \mathcal{H}' . Que c'est joli !

3. La condition $ad - bc \neq 0$ évite d'avoir une simplification de $\frac{ax+b}{cx+d}$ en une fonction constante comme on peut le constater en considérant les vecteurs $\vec{u}(a; b)$ et $\vec{v}(c; d)$, puis en notant que $ad - bc = \det(\vec{u}; \vec{v})$.