

PARLER DE TAB RÉDUIT OU NON CÀD SANS FACTAVER CARRÉ, DU COUP MULTIPLICATION MÉCANIQUE ET ON RÉDUIT BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTRIERS CONSÉCUTIFS – UNE MÉTHODE EFFICACE

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons « Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International ».



TABLE DES MATIÈRES

1. Prenons du recul	2
1.1. Tableaux de Vogler	2
1.2. Construire des tableaux de Vogler	3
2. Sources utilisées	4
3. AFFAIRE À SUIVRE...	5

1. PRENONS DU RECU

L'idée de départ est simple : il faut se concentrer sur les diviseurs sans facteur carré des facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^k = n(n+1) \cdots (n+k)$.

1.1. Tableaux de Vogler.

Définition 1.1. Considérons $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $(a_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq \mathbb{N}^*$ et $(s_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq {}^2\mathbb{N}$ tels que $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket$, $n+i = a_i s_i$. Ce type de situation sera résumé par le tableau suivant que nous nommerons tableau de Vogler en référence à la discussion où l'auteur a vu ce concept.

$n + \bullet$	0	1	2	...	k
	a_0	a_1	a_2	...	a_k

Exemple 1.1. Supposons avoir le tableau de Vogler suivant où $n \in \mathbb{N}^*$.

$n + \bullet$	0	1	2	3
	2	5	6	1

Ceci résume la situation suivante.

- $\exists A \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2A^2$.
- $\exists B \in \mathbb{N}^*$ tel que $n+1 = 5B^2$.
- $\exists C \in \mathbb{N}^*$ tel que $n+2 = 6C^2$.
- $\exists D \in \mathbb{N}^*$ tel que $n+3 = D^2$.

Fait 1.1. Dans les tableaux ci-dessous, les puces \bullet indiquent des valeurs quelconques.

(1) Si nous avons un tableau de Vogler du type suivant, alors $\pi_n^{k-1} \in {}^2\mathbb{N}$.

$n + \bullet$	0	1	...	$k-1$	k
	\bullet	\bullet	...	\bullet	1

(2) Si nous avons un tableau de Vogler du type suivant, alors $\pi_{n+1}^{k-1} \in {}^2\mathbb{N}$.

$n + \bullet$	0	1	...	$k-1$	k
	1	\bullet	...	\bullet	\bullet

Démonstration. Immédiat via le fait ??, car nous avons soit $n+k \in {}^2\mathbb{N}$, soit $n \in {}^2\mathbb{N}$. \square

Fait 1.2. Soit $(n, d, a) \in (\mathbb{N}^*)^3$ et $i \in \mathbb{N}$. Les tableaux de Vogler ci-après sont impossibles (les puces \bullet indiquent des valeurs quelconques).

(1) Pas de facteurs carrés trop près.

$n + \bullet$	i	i+1	...	i+d-1	i+d
	ad	\bullet	...	\bullet	ad

(2) Pas de facteurs carrés pas trop loin.

$n + \bullet$	i	i+1	...	i+2d-1	i+2d
	ad	\bullet	...	\bullet	ad

Démonstration. Tout est contenu dans le fait ??.

- (1) Ici, $n+i = adA^2$ et $n+i+d = adB^2$ donnent $ad(B^2 - A^2) = d$, puis $a(B^2 - A^2) = 1$, d'où $B^2 - A^2 = 1$ qui ne se peut pas car $B^2 > A^2 \geq 1$.

- (2) Ici, $n + i = adA^2$ et $n + i + 2d = adB^2$ donnent $ad(B^2 - A^2) = 2d$, i.e. $a(B^2 - A^2) = 2$, d'où $B^2 - A^2 \in \{1, 2\}$ qui est impossible.

□

1.2. Construire des tableaux de Vogler. Pour fabriquer des tableaux de Vogler, nous allons « multiplier » des d -tableaux de Vogler qui sont moins restrictifs ; ils sont définis comme suit.

Définition 1.2. Soient $(n, k, d) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $(q_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq \mathbb{N}$, $(\epsilon_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq \{0, 1\}$ et $(f_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq \mathbb{N}^*$ tels que $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket$, $n + i = d^{2q_i + \epsilon_i} f_i$ avec $f_i \wedge d = 1$. Ce type de situation sera résumé par le tableau suivant que nous nommerons d -tableau de Vogler où $d^{\epsilon_i} \in \{1, d\}$.

$n + \bullet$	0	1	2	...	k
d	d^{ϵ_0}	d^{ϵ_1}	d^{ϵ_2}	...	d^{ϵ_k}

Exemple 1.2. Supposons avoir le 5-tableau de Vogler suivant où $n \in \mathbb{N}^*$.

$n + \bullet$	0	1	2	3
5	1	5	1	1

Ceci résume la situation suivante.

- $\exists (a, A) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $A \wedge 5 = 1$ et $n = 5^{2a} A$.
- $\exists (b, B) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $B \wedge 5 = 1$ et $n + 1 = 5^{2b+1} B$.
- $\exists (c, C) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $C \wedge 5 = 1$ et $n + 2 = 5^{2c} C$.
- $\exists (d, D) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $D \wedge 5 = 1$ et $n + 3 = 5^{2d} D$.

Exemple 1.3. La multiplication de deux d -tableaux de Vogler est « naturelle » lorsqu'elle porte sur des nombres d premiers entre eux. Considérons le 2-tableau de Vogler et le 3-tableau de Vogler suivants.

$n + \bullet$	0	1	2	3
2	1	2	1	2

$n + \bullet$	0	1	2	3
3	3	1	1	3

La multiplication de ces d -tableaux de Vogler est le 6-tableau de Vogler suivant.

$n + \bullet$	0	1	2	3
6	3	2	1	6

Ceci résume la situation suivante avec des notations « évidentes ».

- $A \wedge 6 = 1$ et $n = 2^{2a} 3^{2\alpha+1} A$.
- $B \wedge 6 = 1$ et $n + 1 = 2^{2b+1} 3^{2\beta} B$.
- $C \wedge 6 = 1$ et $n + 2 = 2^{2c} 3^{2\gamma} C$.
- $D \wedge 6 = 1$ et $n + 3 = 2^{2d+1} 3^{2\delta+1} D$.

Fait 1.3. Dans la deuxième ligne d'un d -tableau de Vogler, les valeurs d sont séparées par exactement $(d - 1)$ valeurs 1.

Démonstration. Penser aux multiples de d .

□

Fait 1.4. $\forall p \in \mathbb{P}$, si $\pi_n^k \in {}^2\mathbb{N}$, alors dans le p -tableau de Vogler associé à π_n^k , le nombre de valeurs p est forcément pair.

Démonstration. Évident, mais très pratique, comme nous le verrons dans la suite.

□

2. SOURCES UTILISÉES

Ce document n'aurait pas vu le jour sans la source suivante.

- (1) Une discussion archivée consultée le 28 janvier 2024 :

<https://web.archive.org/web/20171110144534/http://mathforum.org/library/drmath/view/65589.html>.

Cette discussion utilise ce que nous avons nommé les tableaux de Vogler, mais le côté semi-mécanisable de leur utilisation n'est pas souligné.

3. AFFAIRE À SUIVRE...
