$q : A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}(A^2) \in \mathbb{R}$ définie ? Positive ? Négative ?

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & * \\ * & bc+d^2 \end{pmatrix}$

$\implies q(A) = a^2 + d^2 + 2bc$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies q(A) = 2$
- $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies q(A) = -2$
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies q(A) = 0$

$q$ ni déf., ni positive, ni négative.

$q : A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tA A) \in \mathbb{R}^2$ définie ? Positive ?

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ d'où ${}^tAA = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & * \\ * & c^2+d^2 \end{pmatrix}$

puis $q(A) = \underbrace{a^2+b^2+c^2+d^2}$ . Facile de conclure.

On fait le lien avec le prod. scalaire "canonique" dans $\mathbb{R}^4$.