BROUILLON - MIROIR SPHÉRIQUE

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page *https://github.com/bc-writing/drafts.*

Mentions « légales »

On souhaite déterminer le point de contact R d'un rayon partant d'une source S et passant par un point d'incidence I après réflexion sur un miroir sphérique $\mathscr{S}$ de centre Ω. Il est évident que l'on peut raisonner dans le plan formé par les points Ω, S et I, et considérer le cercle $\mathscr{C}$ intersection de $\mathscr{S}$ avec ce plan.

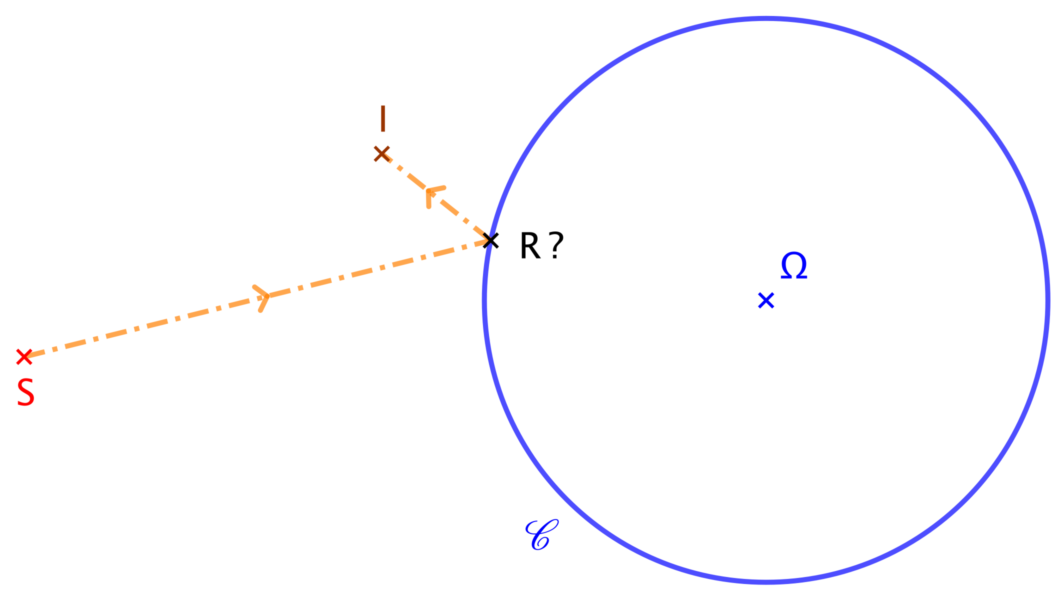


Table des matières

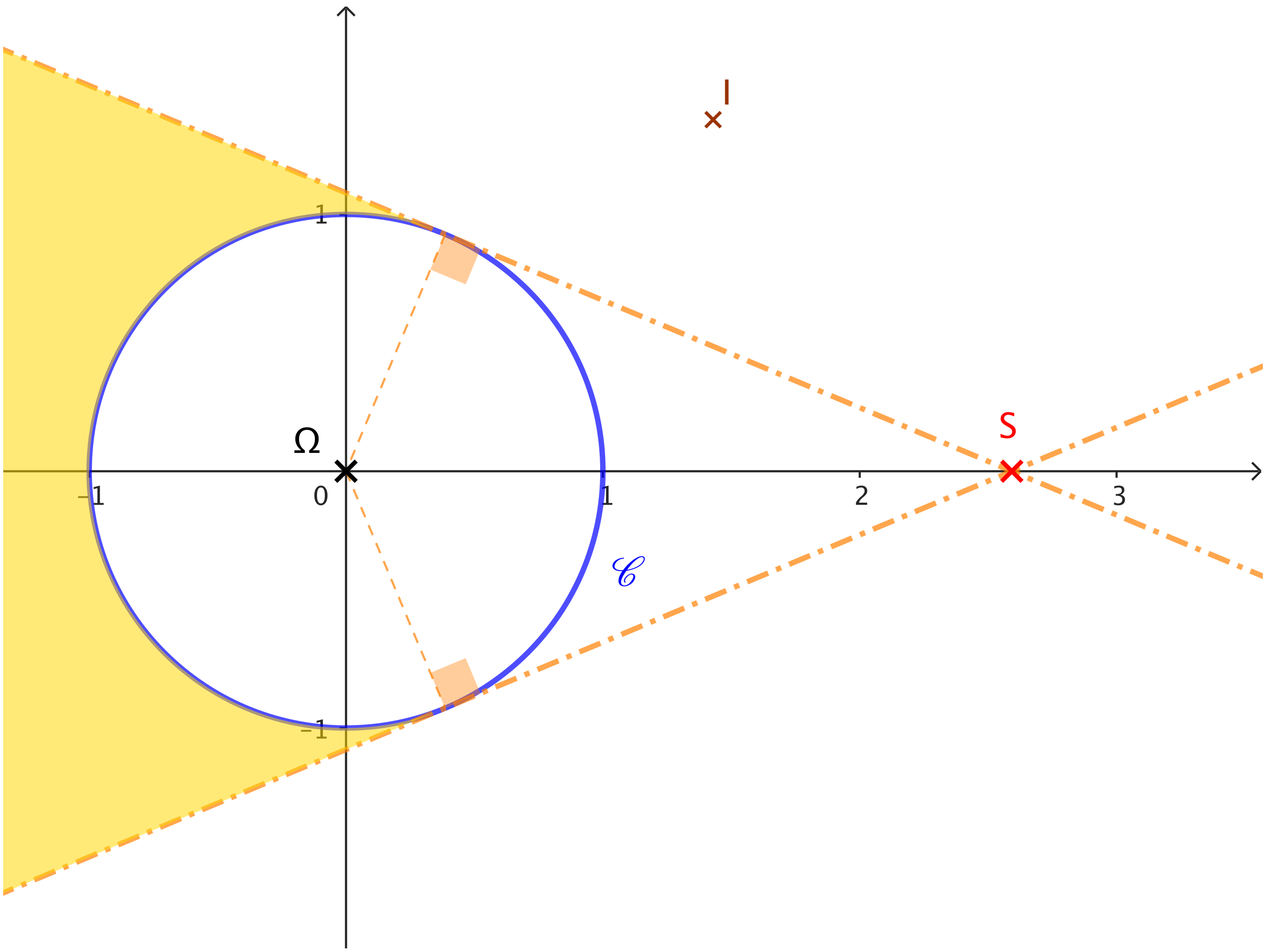
Date: 9 Juillet 2023.

1. Lumineuses géodésiques

2. Projection fine et réfléchie

3. Une approche polynômiale

3.1. **Une paramétrisation standard du problème.** Il est immédiat que l'on peut utiliser une repère orthonormé tel que l'on ait la situation suivante où la zone jaune indique les points non atteignables depuis la source S.



On utilise donc dans la suite les notations suivantes.

- $\mathscr{C} : x^2 + y^2 = 1$
- $S\,(\,s\,;0\,)$ avec $s > 1$
- $I\,(\,i\,;j\,)$ est sur un rayon issu de S après réflexion sur le miroir sphérique.
- $R\,(\,x_R\,;y_R\,)$ est le point de contact recherché. Avec les choix faits ci-dessus, il est immédiat que $x_R > 0$ d'où $x_R = \sqrt{1 - y_R^2}$. Notre inconnue sera donc y_R et non x_R. Notons que $y_R \in \,]-1\,;1[$.

3.2. **Lumineuses géodésiques.** La Physique nous indique que la lumière va parcourir le chemin le plus court, donc on cherche le point $M \in \mathscr{C}$ tel que la distance $MS + MI$ soit minimale avec $x_M > 0$. Calculons donc cette distance en fonction de y_M.

$$
\begin{aligned}
& MS + MI \\
&= \sqrt{\left(x_M - s\right)^2 + y_M^2} + \sqrt{\left(x_M - i\right)^2 + \left(y_M - j\right)^2} \\
&= \sqrt{x_M^2 + s^2 - 2sx_M + y_M^2} + \sqrt{x_M^2 + i^2 - 2ix_M + y_M^2 + j^2 - 2jy_M} && \big\downarrow\ x_M^2 + y_M^2 = 1 \\
&= \sqrt{1 + s^2 - 2sx_M} + \sqrt{1 + i^2 + j^2 - 2ix_M - 2jy_M} && \big\downarrow\ t \overset{nota}{=} OI \\
&= \sqrt{1 + s^2 - 2sx_M} + \sqrt{1 + t^2 - 2ix_M - 2jy_M} && \big\downarrow\ x_M^2 + y_M^2 = 1 \ et\ x_M > 0 \\
&= \sqrt{1 + s^2 - 2s\sqrt{1 - y_M^2}} + \sqrt{1 + t^2 - 2i\sqrt{1 - y_M^2} - 2jy_M} && \big\downarrow\ 2\alpha \overset{nota}{=} 1 + s^2,\ 2\beta \overset{nota}{=} 1 + t^2 \\
&= \sqrt{2\alpha - 2s\sqrt{1 - y_M^2}} + \sqrt{2\beta - 2i\sqrt{1 - y_M^2} - 2jy_M}
\end{aligned}
$$

On doit donc commencer à chercher toutes les racines $y \in \left]-1\,;1\right[$ de l'équation $f'(y) = 0$ où $f(y) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{2\alpha - 2s\sqrt{1-y^2}} + \sqrt{2\beta - 2i\sqrt{1-y^2} - 2jy}$. Or nous avons :

$$
\begin{aligned}
f'(y) &= \frac{2sy}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2\alpha - 2s\sqrt{1-y^2}}} \\
&\quad + \left(\frac{2iy}{\sqrt{1-y^2}} - 2j\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2\beta - 2i\sqrt{1-y^2} - 2jy}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \left(\frac{sy}{\sqrt{2\alpha - 2s\sqrt{1-y^2}}} + \frac{iy - j\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{2\beta - 2i\sqrt{1-y^2} - 2jy}} \right)
\end{aligned}
$$

Nous avons alors :

$$
\begin{aligned}
& f'(y) = 0 \\
\overset{\text{donc}}{\Longrightarrow}\ & sy\sqrt{2\beta - 2i\sqrt{1-y^2} - 2jy} + \left(iy - j\sqrt{1-y^2}\right)\sqrt{2\alpha - 2s\sqrt{1-y^2}} = 0 \\
\overset{\text{donc}}{\Longrightarrow}\ & sy\sqrt{2\beta - 2i\sqrt{1-y^2} - 2jy} = \left(j\sqrt{1-y^2} - iy\right)\sqrt{2\alpha - 2s\sqrt{1-y^2}} \\
\overset{\text{donc}}{\Longrightarrow}\ & s^2y^2\left(\beta - i\sqrt{1-y^2} - jy\right) = \left(j\sqrt{1-y^2} - iy\right)^2 \left(\alpha - s\sqrt{1-y^2}\right)
\end{aligned}
$$

Concentrons-nous 2 min sur la partie droite de la dernière équation.

$$
\begin{aligned}
& \left(j\sqrt{1-y^2} - iy\right)^2 \left(\alpha - s\sqrt{1-y^2}\right) \\
&= \left(j^2(1-y^2) + i^2y^2 - 2ijy\sqrt{1-y^2}\right)\left(\alpha - s\sqrt{1-y^2}\right) \\
&= \left(j^2 + (i^2 - j^2)y^2 - 2ijy\sqrt{1-y^2}\right)\left(\alpha - s\sqrt{1-y^2}\right) \\
&= j^2\alpha - j^2s\sqrt{1-y^2} \\
&+ (i^2 - j^2)y^2\alpha - (i^2 - j^2)y^2s\sqrt{1-y^2} \\
&-2\alpha ijy\sqrt{1-y^2} + 2ijsy(1-y^2)
\end{aligned}
$$

Nous devons de nouveau introduire des notations pour les constantes. Nous posons donc XXX , et YYY , afin d'obtenir :

$$f'(y) = 0$$

$$\overset{\text{donc}}{\Longrightarrow} Ay^3 + By^2 + Cy = (Dy^2 + Ey + F)\sqrt{1 - y^2}$$

$$\overset{\text{donc}}{\Longrightarrow} A^2y^6 + B^2y^4 + C^2y^2 + 2ABy^5 + 2ACy^4 + 2BCy^3$$

$$= \big(D^2y^4 + E^2y^2 + F^2 + 2DEy^3 + 2DFy^2 + 2EFy\big)(1 - y^2)$$

$$\overset{\text{donc}}{\Longrightarrow} XXXy^6 + XXXy^5 + XXXy^4 + XXXy^3 + XXXy^2 + XXXy + XXX = 0$$

Il est de temps de passer à quelques applications numériques puisqu'il est bien connu que seules les équations polynomiales de degré au plus 4 peuvent être résolues par radicaux de façon générique [1].

4. AFFAIRE À SUIVRE...

1. Par exemple, il est très simple de résoudre $x^{2048} = 2$ via des racines carrées successives.