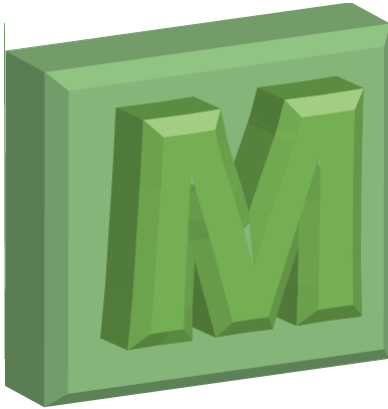


[Mon compte \(https://www.mathweb.fr/euclide/mon-compte/\)](https://www.mathweb.fr/euclide/mon-compte/)[▶ \(https://www.youtube.com/channel/UCuwEQNaFyCYP41NPuTK3AYA\)](https://www.youtube.com/channel/UCuwEQNaFyCYP41NPuTK3AYA)[\(https://www.mathweb.fr/euclide/\)](https://www.mathweb.fr/euclide/)[Articles \(https://www.mathweb.fr/euclide/tous-les-posts/\)](https://www.mathweb.fr/euclide/tous-les-posts/)

Mathématiques ▼





 $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  ▼

Python ▼

[Cours par webcam \(https://courspasquet.fr/\)](https://courspasquet.fr/)[Boutique \(https://mathweb.fr/euclide/vente\)](https://mathweb.fr/euclide/vente)**Mathématiques***Les carrés de Dirichlet*

# *Les carrés de Dirichlet*



-  Stéphane Pasquet  
([https://www.mathweb.fr/euclide/author/evariste\\_galois1973/](https://www.mathweb.fr/euclide/author/evariste_galois1973/)) |
-  14 avril 2022 |
-  LaTeX (<https://www.mathweb.fr/euclide/category/informatique/latex/>)  
/ Mathématiques  
(<https://www.mathweb.fr/euclide/category/mathematiques/>) / Python  
(<https://www.mathweb.fr/euclide/category/informatique/python/>) |
-  0 commentaire  
(<https://www.mathweb.fr/euclide/2022/04/14/les-carres-de-dirichlet/#respond>)

Les carrés de Dirichlet constituent une famille de carrés mathématiquement intéressants.

Nulle question ici de géométrie, mais plutôt d'arithmétique...

## *Carrés de Dirichlet: définition*

En une phrase, on pourrait définir un carré de Dirichlet comme une grille (carrée) de nombres où chacun des nombres est la moyenne des nombres se trouvant au-dessus, en dessous, à droite et à gauche. Par exemple:

$$\begin{array}{ccc} & 7 & \\ 3 & 4 & 0 \\ & 2 & \end{array}$$

Le nombre "4" est la moyenne



arithmétique des quatre nombres 7, 3,  
0 et 2:

$$4 = \frac{7 + 3 + 0 + 2}{4}.$$

Bien entendu, vous vous en doutez, il y  
aura un léger soucis aux bords de la  
grille; c'est la raison pour laquelle  
figurent des nombres à l'extérieur du  
carré.

Voici un exemple complet:

	7	9	9	
0	5	7	8	9
9	6	6	7	8
0	4	4	6	4
	6	0	9	

Exemple de carré  
de Dirichlet

```
\documentc
lass{artic
le}
```

```
\usepackag
e{array,ce
llspace}
```

```
\setlength
{\cellspac
etoplimit}
{4pt}
```

```
\setlength
{\cellspac
ebottomlim
it}{4pt}
```

```
\begin{doc
ument}
```

```
\begin{tab
ular}
{c|Sc|Sc|S
c|c}
```

```
\multicolu
mn{1}{c}{}
&
\multicolu
mn{1}
{c}{7} &
\multicolu
mn{1}
{c}{9} &
```



```

\multicolu
mn{1}
{c}{9} &
\\cline{2
-4}
0 & 5 & 7
& 8 & 9
\\cline{2
-4}
9& 6 & 6 &
7 & 8
\\cline{2
-4}
0 & 4 & 4
& 6 & 4
\\cline{2
-4}

\multicolu
mn{1}{c}{}
&
\multicolu
mn{1}
{c}{6} &
\multicolu
mn{1}
{c}{0} &
\multicolu
mn{1}
{c}{9} &
\\

\end{tabul
ar}

\end{docum
ent}

```

*Un premier  
résultat sur les  
carrés de  
Dirichlet*

---



*Tous les  
nombres à  
l'intérieur du  
carré de  
Dirichlet sont  
inférieurs ou  
égaux au  
maximum de  
ceux qui se  
trouvent à  
l'extérieur.*

---

Si l'on regarde l'exemple précédent, le maximum des nombres se trouvant à l'extérieur est égal à 9. On constate bien que tous les nombres à l'intérieur du carré sont inférieurs ou égaux à 9.

Pourquoi est-ce vrai ? On peut raisonner par l'absurde. Supposons que le maximum soit à l'intérieur, et notons-le "M". Pour plus de facilité dans les explications, je vais désigner par "les nombres autour" ceux qui se trouvent au-dessus, en dessous, à droite et à gauche.

Alors, comme moyenne de quatre nombres, M est inférieur ou égal aux nombres qui l'entourent. Mais comme il est le maximum de la grille, il est nécessairement égal à tous les nombres qui l'entourent. On se retrouve donc localement avec un



schéma comme celui-ci:

	M	
M	M	M
	M	

Par un raisonnement analogue sur les autres cases (qui contiennent M), on arrive à voir que nécessairement, le carré de Dirichlet ne comporterait que des M.

## *Unicité du carré de Dirichlet*

---

*Étant  
donnés des  
nombres à  
l'extérieur du  
carré de  
Dirichlet, il  
n'existe  
qu'une seule  
façon de le  
compléter.*




---

Pour s'en convaincre, on va considérer deux carrés de Dirichlet d'ordre 2 ayant les mêmes nombres extérieurs, mais

pas nécessairement les mêmes  
nombres intérieurs:

	A	B	
H	$x$	$y$	C
G	$z$	$t$	D
	F	E	

	A	B	
H	$x'$	$y'$	C
G	$z'$	$t'$	D
	F	E	

Considérons maintenant un autre carré  
de mêmes dimensions où tous les  
nombres sont les différences de ceux  
du deuxième et ceux du premier :

	0		0
0	$x - x'$	$y - y'$	0
0	$z - z'$	$t - t'$	0
	0		0

Souvenons-nous maintenant que nous  
avons les égalités suivantes:

$$\begin{cases} x = \frac{A+B+y+z}{4} \\ x' = \frac{A+H+y'+z'}{4} \end{cases}$$

Donc:

$$x - x' = \frac{0 + 0 + (y - y') + (z - z')}{4}.$$

Donc  $x - x'$  est la moyenne des  
quatre nombres qui l'entourent dans le  
dernier carré.

Il en est de même pour les trois autres  
nombres intérieurs de ce dernier carré.  
Donc c'est un carré de Dirichlet.

D'après le "principe du maximum" vu  
dans la section précédente, cela  
signifie que "0" est le maximum de tous  
les nombres de ce carré, et donc que  
 $x = x'$ ,  $y = y'$ ,  $z = z'$  et  $t = t'$ .



Cela montre donc que la solution d'un  
carré de Dirichlet est unique.

# Une méthode pour compléter un carré de Dirichlet

## Étape initiale pour la résolution des carrés de Dirichlet

Nous allons chercher à compléter le carré de Dirichlet suivant :

	6	0	4	
5	0	0	0	5
5	0	0	0	5
3	0	0	0	4
	2	2	3	

J'ai inséré des "0" à l'intérieur par défaut, mais ils vont très vite disparaître.

L'idée est de se dire que ceci n'est que l'étape initiale d'un (long) processus. Appelons-la l'étape 0.

## Étape 1

L'étape suivante consiste à transformer le premier "0" (en haut à gauche) en la moyenne des nombres qui l'entourent.

Il devient alors  $(6 + 5 + 0 + 0)/4 = 2,75$ .





On passe alors au “0” qui se trouve à sa droite, qui se transforme en  $(0 + 2,75 + 0 + 0)/4 = 0,5375$ .

Ensuite, on passe au “0” à sa droite, qui devient :  $(4 + 0,5375 + 0 + 5)/4$ .

On parcourt ainsi toute la grille de haut en bas, de gauche à droite.

## Étape 2

Si les nombres intérieurs obtenus à l'étape précédente ne sont pas tous égaux à la moyenne des nombres qui les entourent, on recommence... jusqu'à obtenir ce que l'on veut.

## Implémentation en Python

**Partie réservée  
aux abonné·e·s  
de ce site.**

**Pour un  
abonnement à  
vie (10 €), allez  
dans la  
[boutique](https://www.mathweb.fr/euclide/produit/abonnement/)  
([https://www.m](https://www.mathweb.fr/euclide/produit/abonnement/)  
[athweb.fr](https://www.mathweb.fr/euclide/produit/abonnement/)  
[/euclide](https://www.mathweb.fr/euclide/produit/abonnement/)  
[/produit](https://www.mathweb.fr/euclide/produit/abonnement/)  
[/abonnement/](https://www.mathweb.fr/euclide/produit/abonnement/)).**



	0	6	0	4
0				
	5	4.5	3.0	4.0
5				
	5	4.0	3.5	4.0
5				
	3	3.0	3.0	3.5
4				
	0	2	2	3
0				

## Pourquoi cette méthode

### fonctionne ?

Notons  $x_n^{(k)}$  les suites de nombres définies ainsi:

	6	0	4	
5	$x_n^{(1)}$	$x_n^{(2)}$	$x_n^{(3)}$	5
5	$x_n^{(4)}$	$x_n^{(5)}$	$x_n^{(6)}$	5
3	$x_n^{(7)}$	$x_n^{(8)}$	$x_n^{(9)}$	4
	2	2	3	

$x_1^{(k)}$  est la moyenne des nombres qui l'entourent, donc sa valeur sera nécessairement plus grande que 0. Donc à la fin de l'étape 1, toutes les valeurs intérieures seront plus grandes que les valeurs initiales.

On comprend alors qu'à la fin de l'étape  $n$ , toutes les valeurs de  $x_n^{(k)}$  seront supérieures à celles de l'étape précédente et ainsi de suite (un raisonnement par récurrence peut nous en convaincre).



Les suites  $(x_n^{(k)})$  sont donc croissantes. De plus, elles sont toutes majorées (par le maximum, qui est à l'extérieur du carré). Donc, elles convergent vers des limites finies, nécessairement la moyenne des nombres qui les entourent. Ainsi, le carré des valeurs limites est bien un carré de Dirichlet.

## Épilogue

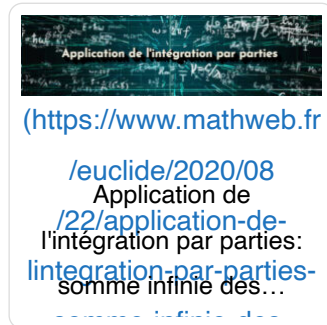
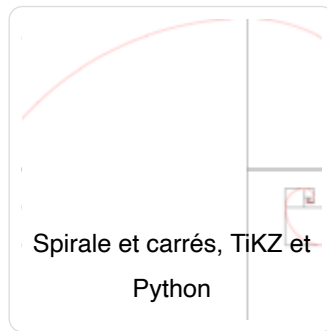
Je me suis fortement inspiré de la vidéo (<https://video.math.cnrs.fr/carres-magiques-de-dirichlet/>) d'Olivier Druet, directeur de recherches au CNRS (Institut Camille Jordan, Université Lyon 1).

Vous comprendrez, à travers l'introduction cette vidéo, l'histoire de ce problème, qui n'est autre qu'une histoire de températures.

En effet, supposons que la grille initiale (où l'on ne connaît que les nombres extérieurs) représente un groupe de pièces et que les nombres extérieurs représentent la température dans chacune des pièces "extérieures". Alors, le carré de Dirichlet représente les températures de chacune des pièces une fois que toutes les pièces aient une température constante, moyenne des températures des pièces qui l'entourent avec lesquelles elle a un mur en commun... Ouais, je sais, je n'explique pas super bien... les transferts thermiques ne sont clairement pas ma spécialité !...



## Articles relatifs:



### ÉTIQUETTES : DIRICHLET

([HTTPS://WWW.MATHWEB.FR/EUCLIDE/TAG/DIRICHLET/](https://www.mathweb.fr/euclide/tag/dirichlet/)), MOYENNE  
([HTTPS://WWW.MATHWEB.FR/EUCLIDE/TAG/MOYENNE/](https://www.mathweb.fr/euclide/tag/moyenne/)), PYTHON  
([HTTPS://WWW.MATHWEB.FR/EUCLIDE/TAG/PYTHON/](https://www.mathweb.fr/euclide/tag/python/))

← Article  
précédent

Article →  
suivant

Déterminer la  
mesure d'un  
angle dans  
cette  
configuration  
(<https://www.mathweb.fr/euclide/2022/04/01/determiner-la-mesure-dun-angle-dans-cette-configuration/>)

Périmètre  
d'une ellipse  
(<https://www.mathweb.fr/euclide/2022/04/15/perimetre-dune-ellipse/>)



## Laisser un commentaire

Votre commentaire ici...

Nom (n

E-mai

Site

**PUBLIER LE COMMENTAIRE**

## Contact

*Merci d'envoyer un message clair. Tout message incompréhensible sera ignoré.*

Nom

Email

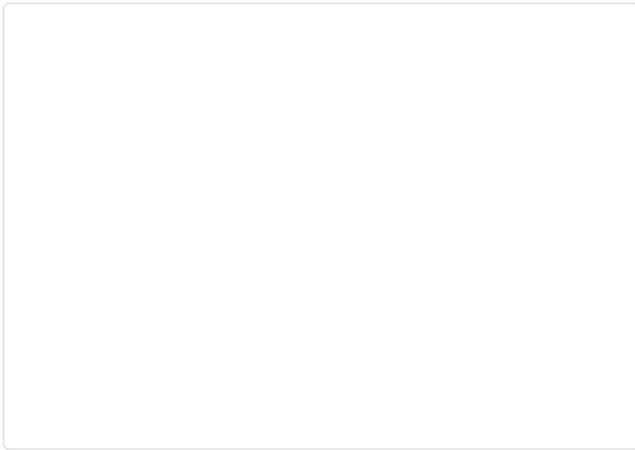
Objet

Message

## Dernières modifications

- Carré magique en Python (<https://www.mathweb.fr/euclide/classe-carre-magique-en-python/>) 22 avril 2022
- Un MasterMind en Python (<https://www.mathweb.fr/euclide/2022/04/19/un-mastermind-en-python/>) 19 avril 2022
- Périmètre d'une ellipse (<https://www.mathweb.fr/euclide/2022/04/15/perimetre-dune-ellipse/>) 15 avril 2022
- Les carrés de Dirichlet (<https://www.mathweb.fr/euclide/2022/04/14/les-carres-de-dirichlet/>) 14 avril 2022
- Vente (<https://www.mathweb.fr/euclide/vente/>) 7 avril 2022
- Déterminer la mesure d'un angle dans cette configuration (<https://www.mathweb.fr/euclide/2022/04/01/determiner-la-mesure-dun-angle-dans-cette-configuration/>) 1 avril 2022
- Gifs animés (<https://www.mathweb.fr/euclide/latex->





ENVOYER

créer-gifs-animes/) 22 mars 2022

- Ressources mathématiques, python et LaTeX  
(https://www.mathweb.fr/euclide/) 22 mars 2022
- Ticket de caisse et Python: extraire les données  
(https://www.mathweb.fr/euclide/2022/03/21/ticket-de-caisse-et-python-extraire-les-donnees/) 21 mars 2022
- Ajout dans une liste en Python: différence entre + et append (https://www.mathweb.fr/euclide/2022/03/15/ajout-dans-une-liste-en-python-difference-entre-operateur-plus-et-append/) 21 mars 2022
- Les packages personnels (https://www.mathweb.fr/euclide/les-packages-personnels-latex-stephane-pasquet/) 17 mars 2022
- Dessiner un échiquier en LaTeX  
(https://www.mathweb.fr/euclide/2022/03/14/dessiner-un-echiquier-en-latex/) 15 mars 2022
- Python et les listes (https://www.mathweb.fr/euclide/python-et-les-listes/) 15 mars 2022
- Plusieurs façons de calculer une factorielle en Python (https://www.mathweb.fr/euclide/plusieurs-facons-de-calculer-une-factorielle-en-python/) 12 mars 2022
- Palindrome en Python: comment savoir si une chaîne de caractères en est?  
(https://www.mathweb.fr/euclide/2019/07/14/reconnaitre-une-chaine-de-caracteres-palindrome-avec-python/) 11 mars 2022
- Anagrammes et Python (https://www.mathweb.fr/euclide/2020/08/27/anagrammes-et-python/) 6 mars 2022
- Ressources Python pour le lycée  
(https://www.mathweb.fr/euclide/ressources-python/) 3 mars 2022
- Nuage de points d'une suite numérique avec Python (https://www.mathweb.fr/euclide/nuage-de-points-dune-suite-numerique-avec-python/) 3 mars 2022
- Effectuer un tri en Python (https://www.mathweb.fr/euclide/effectuer-un-tri-en-python/) 24 février 2022
- Créer un jeu "trouver l'intrus" à l'aide de Python  
(https://www.mathweb.fr/euclide/2022/02



/17/trouver-intrus-python/) 17 février 2022

SIRET 441 673 258 RCS Bordeaux - Confidentialité (<https://www.mathweb.fr/euclide/confidentialite/>)

