

SUITES DE GOODSTEIN

Source: "Théor. des Ens. et Log. Math."
J. P. P. chez ellipses

Mode de construction

$$42 = 32 + 8 + 2$$

$$= 2^5 + 2^3 + 2$$

$$= 2^{2^2+1} + 2^{2+1} + 2$$

Ecriture "nauxi-binaire".

$$42 \rightsquigarrow 42_0 := 2^{2^2+1} + 2^{2+1} + 2$$

$$42'_1 = 3^{3^3+1} + 3^{3+1} + 3 - 1$$

On remplace les 2 par des 3, et on enlève 1.

$$42_1 := 3^{3^3+1} + 3^{3+1} + 2$$

OK: écriture qui est "nauxi-triadique"

$$42'_2 = 4^{4^4+1} + 4^{4+1} + 2 - 1 \quad (3 \rightsquigarrow 4)$$

$$42_2 := 4^{4^4+1} + 4^{4+1} + 1$$

$$42_3 := 5^{5^5+1} + 5^{5+1}$$

$$42'_4 = 6^{6^6+1} + 6^{6+1} - 1$$

← KO à cause du (-1).

on $6^{6+1} = 1 + 5(1 + \dots + 6^6)$. Donc on arrive à

$$42_4 := 6^{6^6+1} + 5 \cdot 6^6 + 5 \cdot 6^5 + \dots + 5 \cdot 6 + 5$$

$$42_5 := 7^{7^7+1} + 5 \cdot 7^7 + 5 \cdot 7^5 + \dots + 5 \cdot 7 + 5$$

...

Définition

$\forall u \in \mathbb{N}^*$, on définit $(g_E^{(u)})_{E \in \mathbb{N}}$ la u ème suite de Goodstein comme suit.

- $g_0^{(u)}$: écriture "maxi-binaire" de u .
- $g_{E+1}^{(u)}$ s'obtient récursivement à partir de $g_E^{(u)}$ comme suit.

(i) $g_E^{(u)}$ est donné sous forme d'une écriture "maxi- $(E+2)$ -adique".

On remplace tous les $(E+2)$ par des $(E+3)$.

(ii) Si on a une écriture "maxi- $(E+3)$ -adique", on a obtenu $g_{E+1}^{(u)}$.

Si non, via la classique formule $\sum_{r=1}^n a^r = \frac{a^{n+1} - a}{a - 1}$, on obtient $g_{E+1}^{(u)}$.

① le cas problématique sera toujours du type $\dots - 1$.

A priori, $(g_E^{(u)})_E$ grandit vite. En fait, nous d'après le th. de Goodstein donné plus bas. Toutefois, pour $(g_E^{(u)})_E$, on a déjà "une suite qui initialement croît très vite". La r ème val. de E telle que $g_E^{(u)} = 0$ est $3 \cdot 2^{402653211} - 3 \approx 10^{121210700}$ (selon la source).

Th. de Goodstein

$\forall u \in \mathbb{N}^*$, $\exists E_0 \in \mathbb{N} \forall E \geq E_0 \Rightarrow g_E^{(u)} = 0$

Démon. par C'absurde (via les ordinaux: voir remarque finale)

Supposons avoir $u \in \mathbb{N}^* \forall E, g_E^{(u)} > 0$.

$\forall E, V_E$ est l'ordinal obtenu comme suit.

- On ordonne les procéd. du type $a \cdot (E+2)^b$ où $a \in \llbracket 1, E+2 \rrbracket$ sous la forme $(E+2)^b \cdot a$.
- $E+2 \rightsquigarrow w$ (ordinal associé à \mathbb{N}).

$$\begin{aligned} 2 \cdot w &= w \\ w \cdot 2 &> w \end{aligned}$$

Par exemple, 42_5 deviendrait $\tilde{V}_5 = w^{w^w + 1} + w^{w \cdot 5} + w^{5 \cdot 5} + \dots + w \cdot 5 + 4$.

On veut que $(V_E)_E$ est nt. \forall , or ceci est impossible.

• Par d'ès., $\forall R, g_R^{(u)} = f_R(u) + \sum c_E$
 Partie avec des puissances de $(u+2)$.
 $c_E \in \llbracket 0; u+2 \rrbracket$

• Si $c_E > 0$, alors $V_{E+1} = \underbrace{f_R(w) + c_E - 1}_{\text{Attention à l'ordre!}} < V_E$.

• Si $c_E = 0$, alors $f_E(w) = e_E(w) + w^d \cdot c$
 Somme de termes $w^{d'} \cdot c'$ avec $d' > d$.
 $c \in \llbracket 1; u+2 \rrbracket$

Via la formule de somme de puissances, on aura :

$$f_{E+r}(w) = e_E(w) + \sum_{d' < d} \text{terme } w^{d'} \cdot c'$$

Donc $V_{E+r} < V_E$

- Pourquoi arrive-t-on à une impossibilité logique?
 Voir Th. 8 page 80 de la source citée.

Plus Fou!

Le Th. de Goodstein n'est pas démontrable dans l'arithmétique de Peano : voir "Accessible Independence Results for Peano Arithmetic", Bull. of London Math. Soc., 1982.