M. Bal !

Preuve binaire, ne manquant pas d'aire, de $\sum_{k=0}^{n} c^k = \frac{c^{n+1}-1}{c-1}$ si $c \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

$c \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

r_μ : "réduc° de facteur $\mu > 0$"

● = 1 u.a.

$\downarrow r_{\sqrt{c/2}}$

● = $\frac{c}{2}$ u.a.

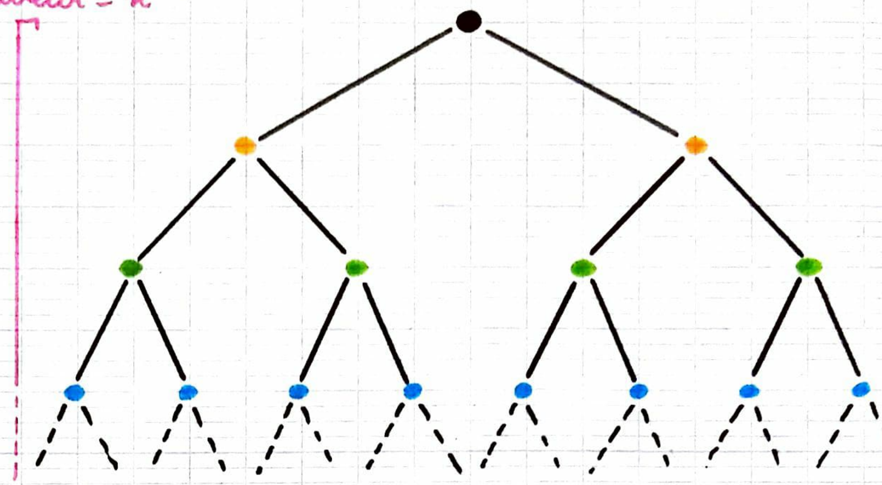
$\downarrow r_{\sqrt{c/2}}$

● = $\left(\frac{c}{2}\right)^2$ u.a.

$\downarrow r_{\sqrt{c/2}}$

● = $\left(\frac{c}{2}\right)^3$ u.a.

Hauteur = n



S_n = Somme de ttes les aires pour une hauteur n.

Ci-dessus, on voit S_4.

1) $S_n = 1 + 2 \times \frac{c}{2} + 2^2 \times \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2^3 \times \left(\frac{c}{2}\right)^3 + \dots + 2^n \times \left(\frac{c}{2}\right)^n$

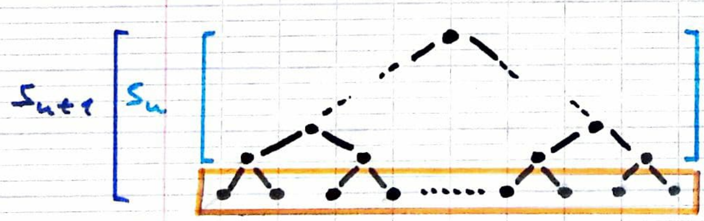
$= \sum_{k=0}^{n} c^k$

2) $S_{n+1} = S_n + \underbrace{2^{n+1}} \times \underbrace{\left(\frac{c}{2}\right)^{n+1}}$

$= S_n + c^{n+1}$

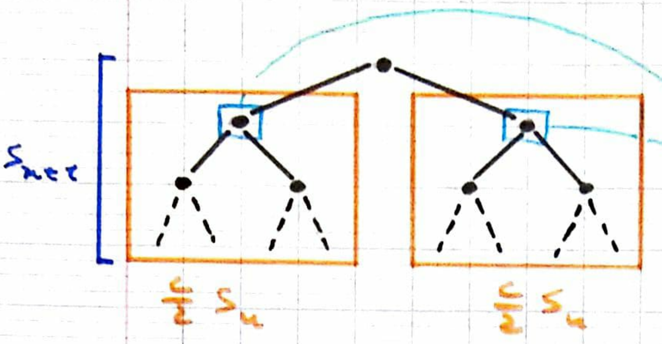
2^{n+1} = nbre de feuilles

$\left(\frac{c}{2}\right)^{n+1}$ = aire de chaque feuille



3) $S_{n+1} = 1 + 2 \times \frac{c}{2} S_n$

$\phantom{S_{n+1}} = 1 + c S_n$



On part d'une aire de $\frac{c}{2}$ u.a au lieu de 1 u.a.

4) $\forall c \in \mathbb{R}_+^*$, $S_n + c^{n+1} = 1 + c S_n$

$c = 1$ sans intérêt mais $c \neq 1$ donne $S_n = \dfrac{c^{n+1} - 1}{c - 1}$.

$c \in \mathbb{R}_-^*$

Même principe MAIS...

- on considère des aires orientées en partant de $+1$ u.a.o (unité d'aire orientée).
- on remplace "$r_{\sqrt{c/2}}$" par $r^{opp}_{\sqrt{|c|/2}}$ la composée de $r_{\sqrt{|c|/2}}$ avec un changement d'orientation de l'aire algébrique.

That's all! Folks!