$q : A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}(A^2) \in \mathbb{R}$ définie ? Positive ?

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & cb+d^2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow q(A) = a^2 + d^2 + 2bc$

$q\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -2$ et $q\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2$ donc q ni positive, ni négative.

En prenant $b = a$ et $c = -d$, on a :
$q(A) = a^2 + d^2 - 2ad = (a-d)^2$.

Donc $b = a = d$ et $c = -d$ donne $q(A) = 0$, ce qui correspond à $A = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & a \end{pmatrix}$, d'où q non déf. (via $a \neq 0$).

ⓘ Pour avoir $A \neq 0_2$ tel que $q(A) = 0$, on peut partir de $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $a \neq 0$. On fait un pari ! On a alors $A^2 = 0_2$ (évident en regardant A comme la matrice d'un endomorphisme).

$q : A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}({}^tA A) \in \mathbb{R}^2$ définie ? Positive ?

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ d'où ${}^tAA = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & * \\ * & c^2+d^2 \end{pmatrix}$

puis $q(A) = a^2+b^2+c^2+d^2$. Facile de conclure.

On fait le lien avec le prod. scalaire "canonique" dans $\mathbb{R}^4$.