

# BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTRIERS CONSÉCUTIFS

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence  
Creative Commons « Attribution – Pas d'utilisation commerciale  
– Partage dans les mêmes conditions 4.0 International ».



---

## TABLE DES MATIÈRES

1.	Ce qui nous intéresse	2
2.	Notations utilisées	2
3.	Cas 0	2
4.	Cas 1	2
5.	Cas 2	3
6.	Cas 3	3
7.	Cas 4	4
8.	AFFAIRE À SUIVRE...	6

## 1. CE QUI NOUS INTÉRESSE

Existe-t-il  $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$  tel que  $\prod_{i=0}^k (n+i)$  soit le carré d'un entier ?

## 2. NOTATIONS UTILISÉES

Dans la suite, nous utiliserons les notations suivantes.

- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$  et  ${}^2\mathbb{N}_* = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$ .
- $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ ,  $\pi_n^k = \prod_{i=0}^k (n+i)$ . Par exemple, nous avons  $\pi_n^0 = n$  et  $\pi_n^1 = n(n+1)$ .
- $\mathbb{P}$  désigne l'ensemble des nombres premiers.
- $\forall (p; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$ ,  $v_p(n) \in \mathbb{N}$  est la valuation  $p$ -adique de  $n$ , c'est-à-dire  $p^{v_p(n)} \mid n$ , autrement dit  $p^{v_p(n)}$  divise  $n$ , mais  $p^{v_p(n)+1} \nmid n$ .
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$ ,  $n \wedge m$  désigne le PGCD de  $n$  et  $m$ .
- $2\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
- $2\mathbb{N} + 1$  désigne l'ensemble des nombres naturels impairs.

## 3. CAS 0

Donnons juste un fait basique concernant l'ensemble  ${}^2\mathbb{N}$ , fait qui nous sera utile par la suite.

**Fait 3.1.**  $\forall (n, m) \in {}^2\mathbb{N}_* \times {}^2\mathbb{N}_*$ , si  $n \neq m$ , alors nous avons :

- (1)  $|n - m| = 3 \iff (n, m) \in \{(1, 4); (4, 1)\}$
- (2)  $|n - m| \geq 5$  dès que  $(n, m) \notin \{(1, 4); (4, 1)\}$ .

*Démonstration.* Quitte à échanger les rôles, on peut supposer  $n > m$ . Par hypothèse, nous avons  $(N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  tel que  $n = N^2$  et  $m = M^2$ . Comme  $n > m$ , nous avons aussi  $N > M$ . Pour conclure, il suffit de s'appuyer sur les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}
 N > M &\iff N \geq M + 1 \\
 &\iff N^2 \geq (M + 1)^2 \\
 &\iff n \geq m + 2M + 1 \\
 &\iff n - m \geq 2M + 1
 \end{aligned}$$

□

## 4. CAS 1

**Fait 4.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n(n+1) \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Démonstration.* Supposons que  $\pi_n^1 = n(n+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$ . Clairement  $\forall p \in \mathbb{P}$ ,  $v_p(\pi_n^1) \in 2\mathbb{N}$ . Or  $p \in \mathbb{P}$  ne peut diviser à la fois  $n$  et  $n+1$ . Nous savons donc que  $\forall p \in \mathbb{P}$ ,  $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$  et  $v_p(n+1) \in 2\mathbb{N}$ , autrement dit  $(n, n+1) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$ . D'après le fait 3.1, nous savons que ceci est impossible. □

*Une preuve alternative.* Supposons que  $\pi_n^1 = n(n+1) = N^2$  où  $N \in \mathbb{N}^*$ . Rappelons les deux identités classiques suivantes.

- $n(n+1) = 2 \sum_{k=1}^n k$
- $N^2 = \sum_{k=1}^N (2k-1)$

Dès lors, après avoir noté que  $N > n$ , les équivalences suivantes donnent une contradiction.

$$\begin{aligned}
 n(n+1) = N^2 &\iff 2 \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^N (2k-1) \\
 &\iff \sum_{k=1}^n 2k = \sum_{k=1}^N 2k - N \\
 &\iff \sum_{k=n}^N 2k = N \\
 &\iff \sum_{k=n}^{N-1} 2k + N = 0
 \end{aligned}$$

*Se souvenir que  $N > n > 0$ .*

□

## 5. CAS 2

**Fait 5.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2) \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Démonstration.* Supposons que  $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$ . Posant  $m = n+1$ , nous avons  $\pi_n^2 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$  où  $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Comme  $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(\pi_n^2) \in 2\mathbb{N}$ , et comme de plus  $p \in \mathbb{P}$  ne peut diviser à la fois  $m$  et  $m^2-1$ , nous savons que  $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(m) \in 2\mathbb{N}$  et  $v_p(m^2-1) \in 2\mathbb{N}$ , d'où  $(m, m^2-1) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$ . Or, d'après le fait 3.1,  $m^2-1 \in {}^2\mathbb{N}$  est impossible. □

*Une preuve alternative.* Supposons que  $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$ . Comme  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  ne peut diviser au maximum qu'un seul des trois facteurs  $n, (n+1)$  et  $(n+2)$ , nous savons que  $\forall p \in \mathbb{P}_{>2}, (v_p(n), v_p(n+1), v_p(n+2)) \in (2\mathbb{N})^3$ . Mais que se passe-t-il pour  $p=2$ ?

Supposons d'abord  $n \in 2\mathbb{N}$ .

- Posant  $n = 2m$ , nous avons  $\pi_n^2 = 4m(2m+1)(m+1)$ , d'où  $m(2m+1)(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$ .
- Comme  $v_2(n+1) = v_2(2m+1) = 0$ , nous savons que  $2m+1 = n+1 \in {}^2\mathbb{N}_*$ .
- Donc  $m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$ , mais le fait 4.1 interdit cela.

Supposons maintenant  $n \in 2\mathbb{N}+1$ .

- Nous savons que  $n \in {}^2\mathbb{N}_*$ .
- Dès lors,  $(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$ , mais de nouveau ceci contredit le fait 4.1. □

## 6. CAS 3

**Fait 6.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Démonstration.* Nous pouvons ici faire les manipulations algébriques naturelles suivantes.

$$\begin{aligned}
 \pi_n^3 &= n(n+3) \cdot (n+1)(n+2) \\
 &= (n^2+3n) \cdot (n^2+3n+2) \\
 &= (m-1)(m+1) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} m = n^2+3n+1 \\
 &= m^2-1
 \end{aligned}$$

D'après le fait 3.1,  $m^2-1 \notin {}^2\mathbb{N}$ , c'est-à-dire  $\pi_n^3 \notin {}^2\mathbb{N}$ . □

## 7. CAS 4

**Fait 7.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Démonstration.* Supposons que  $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$ . Comme  $p \in \mathbb{P}_{>3}$  ne peut diviser au maximum qu'un seul des quatre facteurs  $n, (n+1), (n+2), (n+3)$  et  $(n+4)$ , nous savons que  $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}, (v_p(n), v_p(n+1), v_p(n+2), v_p(n+3), v_p(n+4)) \in (2\mathbb{N})^5$ . Mais que se passe-t-il pour  $p = 2$  et  $p = 3$ ?

Nous avons les alternatives suivantes pour chaque facteur  $(n+i)$  de  $\pi_n^4$ .

- **[A1]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A2]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times (2\mathbb{N} + 1)$
- **[A3]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times 2\mathbb{N}$
- **[A4]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times (2\mathbb{N} + 1)$

Quatre alternatives pour cinq facteurs, il est temps d'utiliser ce bon vieux principe des tiroirs qui va nous permettre de lever des contradictions.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A4]**.

Dans ce cas, on aurait deux facteurs différents divisibles par 6, mais ceci est impossible.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A1]**.

Dans ce cas, on sait juste que  $(n+i, n+i') \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$ , mais ceci permet d'affirmer qu'au moins l'une des deux alternatives **[A2]** et **[A3]** a lieu, sinon on aurait deux entiers consécutifs qui seraient des carrés parfaits, mais ceci contredirait le fait 3.1.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A2]**.

Dans ce cas, le couple de facteurs est  $(n, n+3)$ , ou  $(n+1, n+4)$ .

- (1) Supposons d'abord que  $n$  et  $(n+3)$  vérifient **[A2]**.

Comme  $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}, v_p(n) \in 2\mathbb{N}$  et  $v_p(n+3) \in 2\mathbb{N}$ , mais aussi  $v_3(n) \in 2\mathbb{N} + 1$  et  $v_3(n+3) \in 2\mathbb{N} + 1$ , nous avons  $n = 3N^2$  et  $n+3 = 3M^2$  où  $(N, M) \in \mathbb{N}^2$ . Or, ceci donne  $3 = 3M^2 - 3N^2$ , puis  $M^2 - N^2 = 1$  qui contredit le fait 3.1.

- (2) De façon analogue, on ne peut pas avoir  $(n+1)$  et  $(n+4)$  vérifiant **[A2]**.

- Comme dans le point précédent, on vérifie qu'il n'est pas possible d'avoir deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifiant **[A3]** via  $2 = 2M^2 - 2N^2$ , ou  $4 = 2M^2 - 2N^2$ . En effet, ici les couples possibles sont  $(n, n+2), (n, n+4), (n+2, n+4)$  et  $(n+1, n+3)$ , rien n'empêchant d'avoir  $n, (n+2)$  et  $(n+4)$  vérifiant tous les trois **[A3]**.  $\square$

*Une preuve alternative.* Supposons que  $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$ . Posant  $m = n+2$ , nous avons  $\pi_n^4 = (m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) = m(m^2-1)(m^2-4)$  où  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ . On notera dans la suite  $u = m^2 - 1$  et  $q = m^2 - 4$ .

Supposons d'abord que  $m \in {}^2\mathbb{N}_*$ .

- De  $muq \in {}^2\mathbb{N}_*$ , nous déduisons  $uq \in {}^2\mathbb{N}_*$ .
- Comme  $u - q = 3$ , nous savons que  $u \wedge q \in \{1, 3\}$ .
- Si  $u \wedge q = 1$ , alors  $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(u) \in 2\mathbb{N}$  et  $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$ , d'où  $(u, q) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$ . Or ceci est impossible d'après le fait 3.1<sup>1</sup>.

---

1. On peut aussi noter que le fait 5.1 lève une contradiction car nous avons  $m \in {}^2\mathbb{N}$  et  $u \in {}^2\mathbb{N}$  qui donnent  $(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$

- Si  $u \wedge q = 3$ , alors  $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$ ,  $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$  et  $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$ , mais aussi  $v_3(u) \in 2\mathbb{N} + 1$  et  $v_3(q) \in 2\mathbb{N} + 1$ . Donc  $u = 3U^2$  et  $q = 3Q^2$  avec  $(U, Q) \in \mathbb{N}^2$ . Or  $u - q = 3$  donne  $U^2 - Q^2 = 1$ , et le fait 3.1 nous indique une contradiction.

Supposons maintenant que  $m \notin {}^2\mathbb{N}_*$ .

- Nous avons vu ci-dessus que  $u \notin {}^2\mathbb{N}$  et  $q \notin {}^2\mathbb{N}$ . On peut donc écrire  $m = \alpha M^2$ ,  $u = \beta U^2$ ,  $q = \gamma Q^2$  où  $(M, U, Q) \in \mathbb{N}^3$ , et  $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{N}_{>1})^3$  formant un triplet de naturels sans facteur carré.
- Notons que  $\beta \neq \gamma$  car, dans le cas contraire, nous aurions  $3 = u - q = \beta(U^2 - Q^2)$  qui fournirait  $0 < |U^2 - Q^2| < 3$ , et ceci contredirait le fait 3.1.
- Nous avons  $m \wedge u = 1$ ,  $m \wedge q \in \{1, 2, 4\}$  et  $u \wedge q \in \{1, 3\}$  avec  $m \wedge u = m \wedge q = u \wedge q = 1$  impossible car sinon on aurait  $(m, u, q) \in ({}^2\mathbb{N})^3$  via  $muq \in {}^2\mathbb{N}$ .
- Dès lors,  $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$ ,  $(v_p(m), v_p(u), v_p(q)) \in (2\mathbb{N})^3$ .
- Les points précédents donnent  $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$ , où  $\beta \neq \gamma$ , ainsi que  $\alpha \wedge \beta = 1$ ,  $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2\}$ ,  $\beta \wedge \gamma \in \{1, 3\}$  avec  $\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge \gamma = \beta \wedge \gamma = 1$  impossible. Ceci nous donne le tableau « mécanique » suivant qui montre que forcément  $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$  ou  $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$ . Le plus dur est fait !

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	Statut
2	3	2	1	2	1	OK
2	3	6	1	2	3	OK
3	2	3	1	3	1	KO
3	2	6	1	3	2	KO

- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$  nous donne  $m = 2M^2$ ,  $m^2 - 1 = 3U^2$  et  $m^2 - 4 = 2Q^2$ .  
Comme  $m$  est pair, posant  $m - 2 = 2r$  et notant  $s = m + 2$ , les faits suivants lèvent une contradiction.
  - $2rs = 2Q^2$  donne  $rs = Q^2$ .
  - $s \notin {}^2\mathbb{N}$ , car dans le cas contraire, nous aurions  $(m - 2)(m - 1)m(m + 1) \in {}^2\mathbb{N}$  via  $(m - 2)(m - 1)m(m + 1)(m + 2) \in {}^2\mathbb{N}$ , mais ceci ne se peut d'après le fait 6.1.
  - Les deux résultats précédents donnent  $(\pi, R, S) \in \mathbb{N}_{>1} \times \mathbb{N}^2$  tel que  $r = \pi R^2$  et  $s = \pi S^2$  avec  $\pi$  sans facteur carré.
  - $4 = s - 2r = \pi(S^2 - 2R^2)$  donne alors  $\pi = 2$ , d'où  $m + 2 = 2S^2$ .
  - Finalement,  $m = 2M^2$  et  $m + 2 = 2S^2$  contredisent le fait 3.1 via  $2 = 2(S^2 - M^2)$ .
- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$  nous donne  $m = 2M^2$ ,  $m^2 - 1 = 3U^2$  et  $m^2 - 4 = 6Q^2$ .

Les faits suivants lèvent une autre contradiction via une technique similaire à celle employée ci-dessus.

- Travaillons modulo 3. Comme  $m = 2M^2$ , nous avons  $m \equiv 0$  ou  $m \equiv -1$ . Or  $m^2 - 1 = 3U^2$  donne  $m^2 \equiv 1$ , d'où  $m \equiv -1$ , puis  $3 \mid m - 2$ , et enfin  $6 \mid m - 2$  puisque  $m$  est pair.
- Posant  $m - 2 = 6r$  et notant  $s = m + 2$ , nous avons  $6rs = 6Q^2$ , puis  $rs = Q^2$ .
- $s \notin {}^2\mathbb{N}$  reste valable ici.
- Les deux résultats précédents donnent  $(\pi, R, S) \in \mathbb{N}_{>1} \times \mathbb{N}^2$  tel que  $r = \pi R^2$  et  $s = \pi S^2$  avec  $\pi$  sans facteur carré.
- $4 = s - 6r = \pi(S^2 - 6R^2)$  donne  $\pi = 2$ , et on conclut comme avant.  $\square$

## 8. AFFAIRE À SUIVRE...

