

PARLER DE TAB RÉDUIT OU NON CÀD SANS FACTAVER CARRÉ, DU COUP MULTIPLICATION MÉCANIQUE ET ON RÉDUIT BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTRIERS CONSÉCUTIFS – UNE MÉTHODE EFFICACE

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source $L^A T^E X$, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons « Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International ».



TABLE DES MATIÈRES

1.	Ce qui nous intéresse	2
2.	Notations utilisées	2
3.	Les carrés parfaits	2
3.1.	Structure	2
3.2.	Distance entre deux carrés parfaits	3
4.	Prenons du recul	4
4.1.	Tableaux de Vogler	4
4.2.	Construire des tableaux de Vogler	5
5.	Sources utilisées	6
6.	AFFAIRE À SUIVRE...	7

1. CE QUI NOUS INTÉRESSE

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers »¹, Paul Erdos démontre que pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit de $(k+1)$ entiers consécutifs $n(n+1) \cdots (n+k)$ n'est jamais le carré d'un entier.

Il est facile de trouver sur le web des preuves à la main de $n(n+1) \cdots (n+k) \notin {}^2_*\mathbb{N}$ pour $k \in \llbracket 2; 8 \rrbracket$. Bien que certaines de ces preuves soient très sympathiques, leur lecture ne fait pas ressortir de schéma commun de raisonnement. Dans ce document, nous allons tenter de limiter au maximum l'emploi de fourberies déductives en présentant une méthode très élémentaire², efficace, et semi-automatisable, pour démontrer, avec peu d'efforts cognitifs, les premiers cas d'impossibilité.

2. NOTATIONS UTILISÉES

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^k (n+i)$.

Par exemple, $\pi_n^0 = n$, $\pi_n^1 = n(n+1)$ et $\pi_{n+2}^3 = (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$.

Par convention, nous posons $\pi_n^{-1} = 1$.

- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des carrés parfaits. On note aussi ${}^2_*\mathbb{N} = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.

\mathbb{N}_{sf} est l'ensemble des naturels non nuls sans facteur carré³.

- \mathbb{P} désigne l'ensemble des nombres premiers.

$\forall (p; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p -adique de n , c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n , contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.

- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m .

- $2\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.

$2\mathbb{N} + 1$ est l'ensemble des nombres naturels impairs.

3. LES CARRÉS PARFAITS

3.1. Structure.

Fait 3.1. $\forall n \in {}^2_*\mathbb{N}$, s'il existe $m \in {}^2_*\mathbb{N}$ tel que $n = fm$ alors $f \in {}^2_*\mathbb{N}$.

Démonstration. Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(fm) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ qui donnent $v_p(f) \in 2\mathbb{N}$ car $v_p(fm) = v_p(f) + v_p(m)$. \square

Fait 3.2. $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $a \wedge b = 1$ et $ab \in {}^2_*\mathbb{N}$, alors $a \in {}^2_*\mathbb{N}$ et $b \in {}^2_*\mathbb{N}$.

Démonstration. Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(ab) \in 2\mathbb{N}$. Or $p \in \mathbb{P}$ ne peut diviser à la fois a et b , donc $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(a) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(b) \in 2\mathbb{N}$, autrement dit $(a, b) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$. \square

Fait 3.3. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $ab \in {}^2_*\mathbb{N}$, ainsi que $(\alpha, \beta, A, B) \in (\mathbb{N}_{sf})^2 \times \mathbb{N}^2$ tel que $a = \alpha A^2$ et $b = \beta B^2$. Nous avons alors forcément $\alpha = \beta$.

Démonstration. Le fait 3.1 donne $\alpha\beta \in {}^2_*\mathbb{N}$. De plus, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(\alpha) \in \{0, 1\}$ et $v_p(\beta) \in \{0, 1\}$. Finalement, $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\alpha) = v_p(\beta)$, autrement dit $\alpha = \beta$. \square

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).

2. Cette méthode s'appuie sur une représentation trouvée dans un message archivé : voir la section 5.

3. En anglais, on dit « square free ».

3.2. Distance entre deux carrés parfaits.

Fait 3.4. Soit $(N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $N > M$.

(1) $N^2 - M^2 \geq 2N - 1$.

(2) Notons nb_{sol} le nombre de solutions $(N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de $N^2 - M^2 = \delta$.

Pour $\delta \in \llbracket 1; 20 \rrbracket$, nous avons :

(a) $nb_{sol} = 0$ si $\delta \in \{1, 2, 4, 6, 10, 14, 18\}$.

(b) $nb_{sol} = 1$ si $\delta \in \{3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 16\}$.

(c) $nb_{sol} = 2$ si $\delta = 15$.

Démonstration.

(1) Comme $N - 1 \geq M$, nous obtenons : $N^2 - M^2 \geq N^2 - (N - 1)^2 = 2N - 1$.

(2) Le point précédent permet d'utiliser le programme Python suivant afin d'obtenir les nombres de solutions indiqués.

```
from math import sqrt, floor

def sol(diff):
    solfound = []

    for i in range(1, (diff + 1) // 2 + 1):
        tested = i**2 - diff

        if tested < 0:
            continue

        tested = floor(sqrt(i**2 - diff))

        if tested == 0:
            continue

        if tested**2 == i**2 - diff:
            solfound.append((i, tested))

    return solfound
```

□

Finissons par une jolie formule même si elle ne nous sera pas d'une grande aide dans la suite.

Fait 3.5. $\forall (N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $N > M$, alors $N^2 - M^2 = \sum_{k=M+1}^N (2k - 1)$.

Démonstration. $N^2 = \sum_{k=1}^N (2k - 1)$ donne l'identité indiquée⁴.

□

4. La formule utilisée est facile à démontrer algébriquement, et évidente à découvrir géométriquement.

4. PRENONS DU REcul

4.1. Tableaux de Vogler.

L'idée de départ est simple : d'après le fait 3.1, il semble opportun de se concentrer sur les diviseurs sans facteur carré des facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^k = n(n+1) \cdots (n+k)$.

Définition 4.1. Considérons $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $(a_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq \mathbb{N}_{sf}$ et $(s_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq {}^2\mathbb{N}$ tels que $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket$, $n+i = a_i s_i$. Cette situation est résumée par le tableau suivant que nous nommerons tableau de Vogler en référence à la discussion où l'auteur a rencontré ce concept.

$n + \bullet$	0	1	2	...	k
	a_0	a_1	a_2	...	a_k

Exemple 4.1. Supposons avoir le tableau de Vogler suivant où $n \in \mathbb{N}^*$.

$n + \bullet$	0	1	2	3
	2	5	6	1

Ceci résume la situation suivante.

- $\exists A \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2A^2$.
- $\exists B \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 1 = 5B^2$.
- $\exists C \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 2 = 6C^2$.
- $\exists D \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 3 = D^2$.

Fait 4.1. Dans les tableaux ci-dessous, les puces \bullet indiquent des valeurs quelconques.

(1) Si nous avons un tableau de Vogler du type suivant, alors $\pi_n^{k-1} \in {}^2\mathbb{N}$.

$n + \bullet$	0	1	...	k-1	k
	\bullet	\bullet	...	\bullet	1

(2) Si nous avons un tableau de Vogler du type suivant, alors $\pi_{n+1}^{k-1} \in {}^2\mathbb{N}$.

$n + \bullet$	0	1	...	k-1	k
	1	\bullet	...	\bullet	\bullet

Démonstration. Immédiat via le fait 3.1, car nous avons soit $n+k \in {}^2\mathbb{N}$, soit $n \in {}^2\mathbb{N}$. \square

Fait 4.2. Soit $(n, d, a) \in (\mathbb{N}^*)^3$ et $i \in \mathbb{N}$. Les tableaux de Vogler ci-après sont impossibles (les puces \bullet indiquent des valeurs quelconques).

(1) Pas de facteurs carrés trop près.

$n + \bullet$	i	i+1	...	i+d-1	i+d
	ad	\bullet	...	\bullet	ad

(2) Pas de facteurs carrés pas trop loin.

$n + \bullet$	i	i+1	...	i+2d-1	i+2d
	ad	\bullet	...	\bullet	ad

Démonstration. Tout est contenu dans le fait 3.4.

- (1) $n+i = adA^2$ et $n+i+d = adB^2$ donnent $ad(B^2 - A^2) = d$, puis $a(B^2 - A^2) = 1$, d'où $B^2 - A^2 = 1$ qui ne se peut pas car $B^2 > A^2 \geq 1$.
- (2) $n+i = adA^2$ et $n+i+2d = adB^2$ donnent $ad(B^2 - A^2) = 2d$, i.e. $a(B^2 - A^2) = 2$, d'où $B^2 - A^2 \in \{1, 2\}$ qui est impossible.

\square

4.2. Construire des tableaux de Vogler.

Pour fabriquer des tableaux de Vogler, nous allons « multiplier » des \underline{d} -tableaux de Vogler qui sont définis comme suit.

Définition 4.2. Soient $(n, k, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\geq 2}$, $(\epsilon_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq \{0, 1\}$ et $(f_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq \mathbb{N}^*$ tels que $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket$, $n + i = d^{v_d(n+i)} f_i$ avec $v_d(n+i) \equiv \epsilon_i \text{ modulo } 2$. Cette situation est résumée par le tableau suivant que nous nommerons d -tableau de Vogler⁵.

$n + \bullet$	0	1	2	...	k
d	d^{ϵ_0}	d^{ϵ_1}	d^{ϵ_2}	...	d^{ϵ_k}

Exemple 4.2. Supposons avoir le 5-tableau de Vogler suivant où $n \in \mathbb{N}^*$.

$n + \bullet$	0	1	2	3
5	1	5	1	5

Ceci résume la situation suivante.

- $\exists (a, A) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $A \wedge 5 = 1$ et $n = 5^{2a} A$.
- $\exists (b, B) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $B \wedge 5 = 1$ et $n + 1 = 5^{2b+1} B$.
- $\exists (c, C) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $C \wedge 5 = 1$ et $n + 2 = 5^{2c} C$.
- $\exists (d, D) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $D \wedge 5 = 1$ et $n + 3 = 5^{2d+1} D$.

Exemple 4.3. La multiplication de deux d -tableaux de Vogler est « naturelle » lorsqu'elle porte sur des nombres d premiers entre eux. Considérons le 2-tableau de Vogler et le 3-tableau de Vogler suivants.

$n + \bullet$	0	1	2	3
2	1	2	1	2

$n + \bullet$	0	1	2	3
3	3	1	1	3

La multiplication de ces d -tableaux de Vogler est le 6-tableau de Vogler suivant.

$n + \bullet$	0	1	2	3
6	3	2	1	6

Ceci résume la situation suivante avec des notations « évidentes ».

- $A \wedge 6 = 1$ et $n = 2^{2a} 3^{2\alpha+1} A$.
- $C \wedge 6 = 1$ et $n + 2 = 2^{2c} 3^{2\gamma} C$.
- $B \wedge 6 = 1$ et $n + 1 = 2^{2b+1} 3^{2\beta} B$.
- $D \wedge 6 = 1$ et $n + 3 = 2^{2d+1} 3^{2\delta+1} D$.

Cette situation correspond aussi au tableau de Vogler réduit suivant.

XXX

Fait 4.3. Dans la deuxième ligne d'un d -tableau de Vogler, les valeurs d sont séparées par exactement $(d-1)$ valeurs 1.

Démonstration. Penser aux multiples de d . □

Fait 4.4. $\forall p \in \mathbb{P}$, si $\pi_n^k \in {}^2\mathbb{N}$, alors dans le p -tableau de Vogler associé à π_n^k , le nombre de valeurs p est forcément pair.

Démonstration. Évident, mais très pratique, comme nous le verrons dans la suite. □

5. Noter que $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket$, $d^{\epsilon_i} \in \{1, d\}$.

5. SOURCES UTILISÉES

Ce document n'aurait pas vu le jour sans la source suivante.

- (1) Une discussion archivée consultée le 28 janvier 2024 :

<https://web.archive.org/web/20171110144534/http://mathforum.org/library/drmath/view/65589.html>.

Cette discussion utilise ce que nous avons nommé les tableaux de Vogler, mais le côté semi-mécanisable de leur utilisation n'est pas souligné.

6. AFFAIRE À SUIVRE...
