Trouver $(fg)^n = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(j)}$

Travaillons dans $\mathbb{R}[[X]]$.

↪ $f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} X^n$ et de même pour $g(X)$.

↪ $(fg)(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(fg)^{n}(0)}{n!} X^n$

ET

$$(fg)(X) = f(X)g(X)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i+j=n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot \frac{g^{(j)}(0)}{j!} X^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} f^{(i)}(0)\, g^{(j)}(0) \cdot X^n$$

↪ On considère conj. via $\tilde{f}(t+x)$ où $\tilde{f}^{(i)}(0) = f^{(i)}(t)$, puis on prouve.