$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{3}(n+1)(n+\tfrac{1}{2})n$$

Deux Méthodes Sympathiques
(+ Une)

Méthode 1 (vue sur Myriogon : Bernoulli vs Ada Lovelace)

×	1	2	3	4	....	n
1	1	2	3	4	...	n
2	2	4	6	8	...	2n
3	3	6	9	12	...	3n
4	4	8	12	16	...	4n
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
n	n	2n	3n	4n	...	n^2

Σ' := somme des produits

$\Sigma' = (1+2+\dots+n)^2$ via la double distributivité.

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

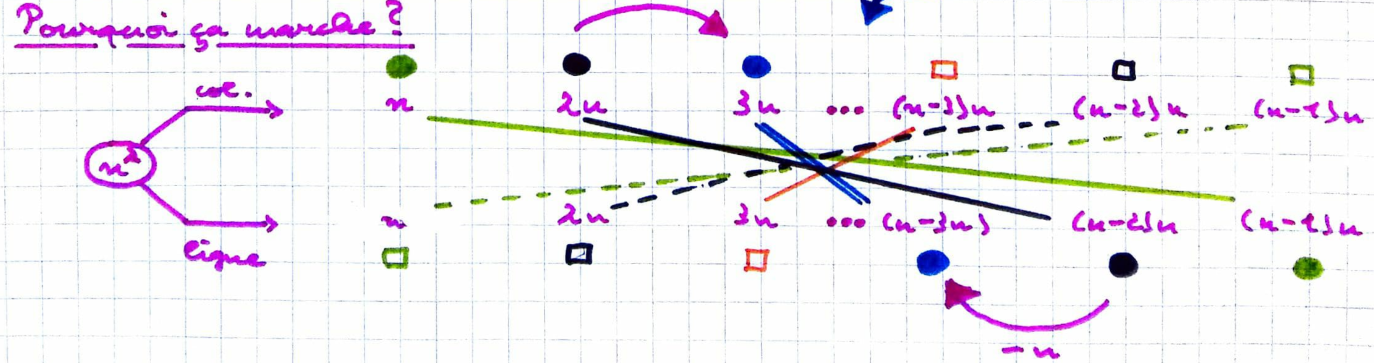
$$\Sigma' = 1 + 2\times2+4 + 2(3+6)+9 + (4+12)+(8\times2)+(4+12)+16 + \dots$$

$$= 1^3 + 2\times2^2 + 3\times3^2 + 4\times4^2 + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^3$$

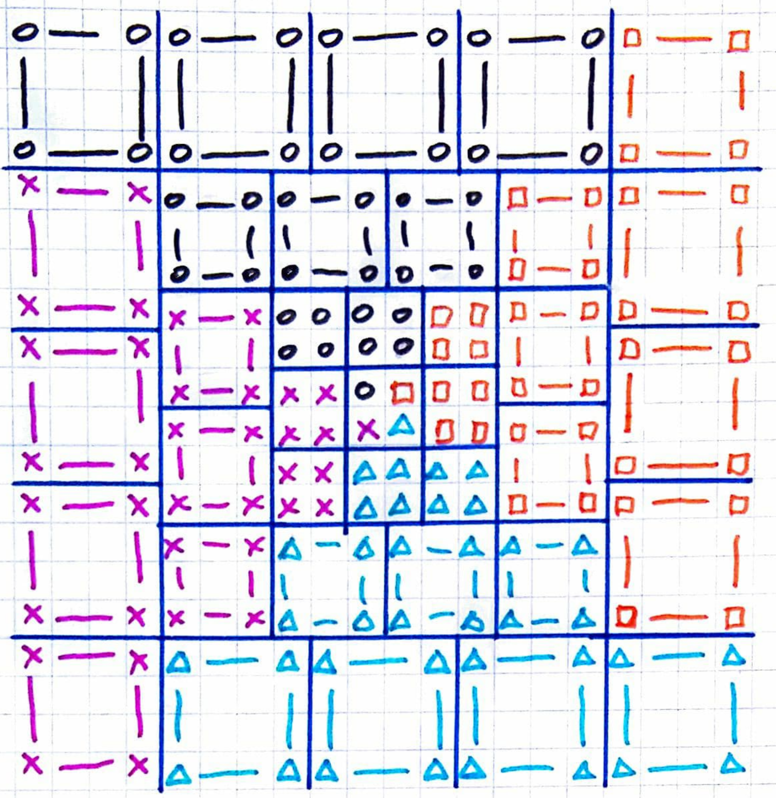
Moche ! Passer via étape où on retourne la ligne.

Pourquoi ça marche ?



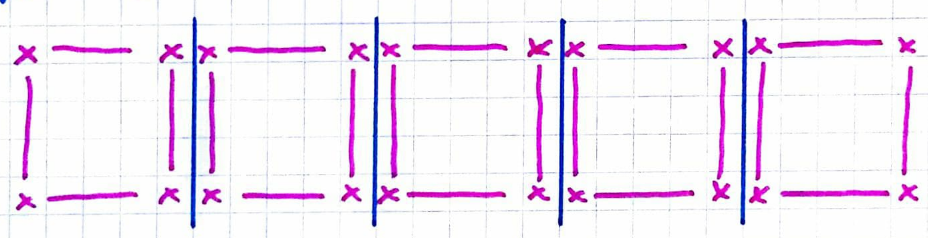
ⓘ À mettre en regard avec la méthode de Gauss pour $\sum_{k=1}^{n} k$.

MÉTHODE 2 (vue sur MathStack)



$k^3 = k \times k^2$

On peut poursuivre car on a :



Cette construct° donne $4 \sum_{k=1}^{n} k^3 = N^2$.

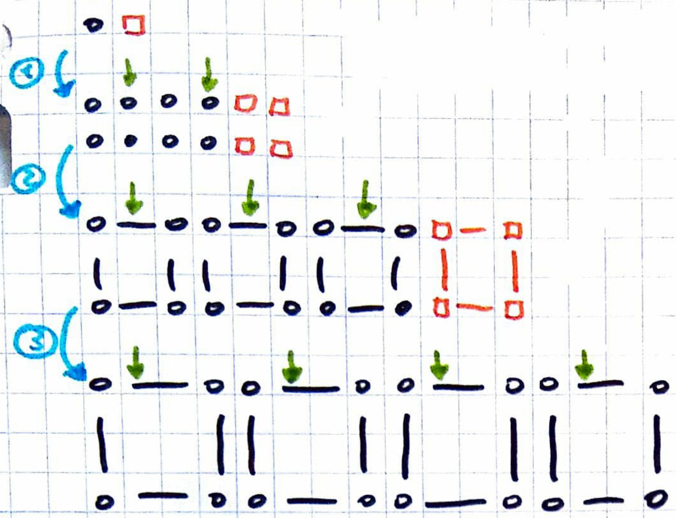
Que vaut N ?

- $N_1 = 2 = 2 \times 1$
- $N_2 = 6 = 3 \times 2$
- $N_3 = 4 \times 3$
- $N_4 = 5 \times 4$

... etc

On arrive à $N = (n+1)n$ puis $\frac{N^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Pourquoi ça marche ?



① • On part de 2×1 u.e. $= 1\times2$ u.e.

• On ajoute 2 u.e. du $\hat{\text{m}}^{\text{t}}$ type.

• On complète avec 2 u.e. d'un autre type.

② • Init : 3×2 u.e. $= 2\times3$ u.e.

• En plus : 3 u.e. du $\hat{\text{m}}^{\text{t}}$ type

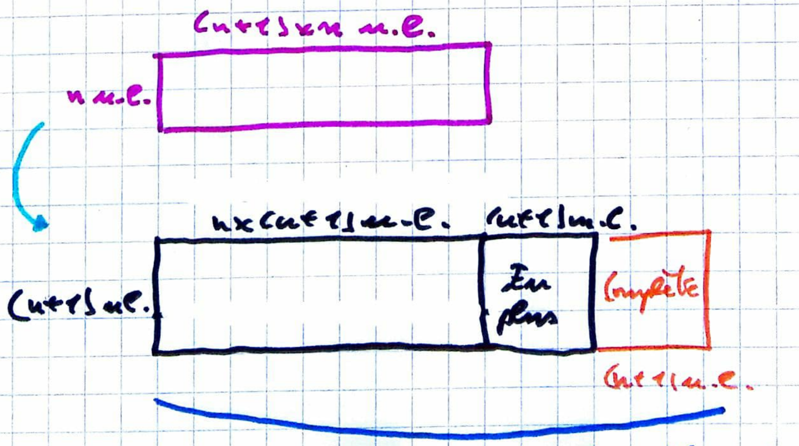
• Complète : 3 u.e. type $\neq$

③ • Init : 4×3 u.e. $= 3\times4$ u.e.

• En plus : 4 u.e. du $\hat{\text{m}}^{\text{t}}$ type

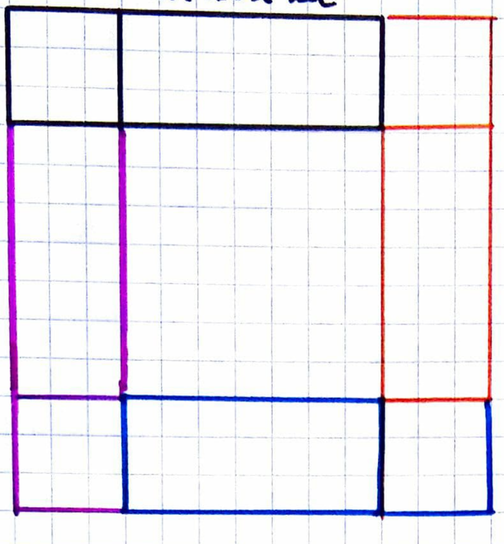
• Complète : 4 u.e. type $\neq$

On peut faire une récurrence "côté long".



$$n(n+1)+2(n+1)=(n+2)(n+1)$$

Il reste à valider que l'on a des carrés à chaque étape.



↳ Evidence "patronale" !

MÉTHODE 3 (cf. source de la 1 : un commentaire sous du live)

On sait que $\sum_{1\leq k\leq n} k^3 = \left(\sum_{1\leq k\leq n} k\right)^2$, et on va voir que l'on a aussi $\sum_{1\leq k\leq n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$. (i) 3 formules d'un coup !

On considère 4 copies de la table de multiplic° (rota° de quart de tour).

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

5	4	3	2	1
10	8	6	4	2
15	12	9	6	3
20	16	12	8	4
25	20	15	10	5

$\oplus$

5	10	15	20	25
4	8	12	16	20
3	6	9	12	15
2	4	6	8	10
1	2	3	4	5

25	20	15	10	5
20	16	12	8	4
15	12	9	6	3
10	8	6	4	2
5	4	3	2	1

On somme ces 4 tables "cellule à cellule".

36	36	36	36	36
36	36	36	36	36
36	36	36	36	36
36	36	36	36	36
36	36	36	36	36

On obtient 5^2 (dim. du carré) $\times\ 6^2$ (nbre magique).

Pourquoi ça marche ?

Tab. 1 - ligne k : $k, 2k, 3k, \dots, nk$

Tab. 2 - ligne k : $nk, (n-1)k, (n-2)k, \dots, k$

Tab. 3 - ligne k : $n(n+1-k), (n-1)(n+1-k), \dots, n+1-k$

Tab. 4 - ligne k : $n+1-k, 2(n+1-k), \dots, n(n+1-k)$

En sommant les cellules ligne k, col. j, on arrive à :

$$\underbrace{jk + j(n+1-k)} + \underbrace{(n+1-j)k + (n+1-j)(n+1-k)}$$

$$= j(n+1) + (n+1-j)(n+1)$$

$$= (n+1)^2 \longrightarrow \text{Nbre magique démasqué !}$$

ⓘ Une fois $(1+2+\dots+n)^2$ dév., on a fait deux manipulat° d'indices. Quelle belle "coïncidence" !