

BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTRIERS CONSÉCUTIFS

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence
Creative Commons « Attribution – Pas d'utilisation commerciale
– Partage dans les mêmes conditions 4.0 International ».



TABLE DES MATIÈRES

1.	Ce qui nous intéresse	2
2.	Notations utilisées	2
3.	Cas 0	2
4.	Cas 1	2
5.	Cas 2	3
6.	Cas 3	3
7.	Cas 4	4
8.	AFFAIRE À SUIVRE...	5

1. CE QUI NOUS INTÉRESSE

Existe-t-il $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $\prod_{i=0}^k (n+i)$ soit le carré d'un entier ?

2. NOTATIONS UTILISÉES

Dans la suite, nous utiliserons les notations suivantes.

- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ et ${}^2\mathbb{N}_* = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
- $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^k (n+i)$. Par exemple, nous avons $\pi_n^0 = n$ et $\pi_n^1 = n(n+1)$.
- \mathbb{P} désigne l'ensemble des nombres premiers.
- $\forall (p; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p -adique de n , c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n , mais $p^{v_p(n)+1} \nmid n$.
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m .
- $2\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
- $2\mathbb{N} + 1$ désigne l'ensemble des nombres naturels impairs.

3. CAS 0

Donnons juste un fait basique concernant l'ensemble ${}^2\mathbb{N}$, fait qui nous sera utile par la suite.

Fait 3.1. $\forall (n, m) \in {}^2\mathbb{N}_* \times {}^2\mathbb{N}_*$, si $n \neq m$, alors nous avons :

- (1) $|n - m| = 3 \iff (n, m) \in \{(1, 4); (4, 1)\}$
- (2) $|n - m| \geq 5$ dès que $(n, m) \notin \{(1, 4); (4, 1)\}$.

Démonstration. Quitte à échanger les rôles, on peut supposer $n > m$. Par hypothèse, nous avons $(N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $n = N^2$ et $m = M^2$. Comme $n > m$, nous avons aussi $N > M$. Pour conclure, il suffit de s'appuyer sur les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}
 N > M &\iff N \geq M + 1 \\
 &\iff N^2 \geq (M + 1)^2 \\
 &\iff n \geq m + 2M + 1 \\
 &\iff n - m \geq 2M + 1
 \end{aligned}$$

□

4. CAS 1

Fait 4.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Clairement $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\pi_n^1) \in 2\mathbb{N}$. Or $p \in \mathbb{P}$ ne peut diviser à la fois n et $n+1$. Nous savons donc que $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+1) \in 2\mathbb{N}$, autrement dit $(n, n+1) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. D'après le fait 3.1, nous savons que ceci est impossible. □

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) = N^2$ où $N \in \mathbb{N}^*$. Rappelons les deux identités classiques suivantes.

- $n(n+1) = 2 \sum_{k=1}^n k$
- $N^2 = \sum_{k=1}^N (2k-1)$

Dès lors, après avoir noté que $N > n$, les équivalences suivantes donnent une contradiction.

$$\begin{aligned}
 n(n+1) = N^2 &\iff 2 \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^N (2k-1) \\
 &\iff \sum_{k=1}^n 2k = \sum_{k=1}^N 2k - N \\
 &\iff \sum_{k=n}^N 2k = N \\
 &\iff \sum_{k=n}^{N-1} 2k + N = 0
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{Se souvenir que } N > n > 0.$$

□

5. CAS 2

Fait 5.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Posant $m = n+1$, nous avons $\pi_n^2 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Comme $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(\pi_n^2) \in 2\mathbb{N}$, et comme de plus $p \in \mathbb{P}$ ne peut diviser à la fois m et m^2-1 , nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(m^2-1) \in 2\mathbb{N}$, d'où $(m, m^2-1) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Or, d'après le fait 3.1, $m^2-1 \in {}^2\mathbb{N}$ est impossible. □

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Comme $p \in \mathbb{P}_{>2}$ ne peut diviser au maximum qu'un seul des trois facteurs $n, (n+1)$ et $(n+2)$, nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}_{>2}, (v_p(n), v_p(n+1), v_p(n+2)) \in (2\mathbb{N})^3$. Mais que se passe-t-il pour $p = 2$?

Supposons d'abord $n \in 2\mathbb{N}$.

- Posant $n = 2m$, nous avons $\pi_n^2 = 4m(2m+1)(m+1)$, d'où $m(2m+1)(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Comme $v_2(n+1) = v_2(2m+1) = 0$, nous savons que $2m+1 = n+1 \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Donc $m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$, mais le fait 4.1 interdit cela.

Supposons maintenant $n \in 2\mathbb{N} + 1$.

- Nous savons que $n \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Dès lors, $(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$, mais le fait 4.1 interdit cela.

□

6. CAS 3

Fait 6.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Nous pouvons ici faire les manipulations algébriques naturelles suivantes.

$$\begin{aligned}
 \pi_n^3 &= n(n+3) \cdot (n+1)(n+2) \\
 &= (n^2+3n) \cdot (n^2+3n+2) \\
 &= (m-1)(m+1) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} m = n^2+3n+1 \\
 &= m^2-1
 \end{aligned}$$

D'après le fait 3.1, $m^2-1 \notin {}^2\mathbb{N}$, c'est-à-dire $\pi_n^3 \notin {}^2\mathbb{N}$.

□

7. CAS 4

Fait 7.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Comme $p \in \mathbb{P}_{>3}$ ne peut diviser au maximum qu'un seul des quatre facteurs $n, (n+1), (n+2), (n+3)$ et $(n+4)$, nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}, (v_p(n), v_p(n+1), v_p(n+2), v_p(n+3), v_p(n+4)) \in (2\mathbb{N})^5$. Mais que se passe-t-il pour $p = 2$ et $p = 3$?

Nous avons les alternatives suivantes pour chaque facteur $(n+i)$ de π_n^4 .

- **[A1]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A2]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times (2\mathbb{N} + 1)$
- **[A3]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times 2\mathbb{N}$
- **[A4]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times (2\mathbb{N} + 1)$

Quatre alternatives pour cinq facteurs, il est temps d'utiliser ce bon vieux principe des tiroirs qui va nous permettre de lever des contradictions.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A4]**.

Dans ce cas, on aurait deux facteurs différents divisibles par 6, mais ceci est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A1]**.

Dans ce cas, on sait juste que $(n+i, n+i') \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$, mais ceci permet d'affirmer qu'au moins l'une des deux alternatives **[A2]** et **[A3]** a lieu, sinon on aurait deux entiers consécutifs de produit égal à un carré parfait, mais ceci contredirait le fait 3.1.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A2]**.

Dans ce cas, le couple de facteurs est $(n, n+3)$, ou $(n+1, n+4)$.

(1) Supposons d'abord que n et $(n+3)$ vérifient **[A2]**. Nous avons alors $n = 3N^2$ et $n+3 = 3M^2$ où $(N, M) \in \mathbb{N}^2$. Ceci donnerait alors $3 = 3M^2 - 3N^2$, puis

(2) Supposons maintenant que $(n+1)$ et $(n+4)$ vérifient **[A2]**.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A3]**.

Dans ce cas, le couple de facteurs est $(n, n+2)$, $(n, n+4)$, ou $(n+1, n+3)$. Notons qu'il est possible que $n, (n+2)$ et $(n+4)$ vérifient **[A3]** tous les trois.

□

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Posant $m = n+2$, nous avons $\pi_n^4 = (m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) = m(m^2-1)(m^2-4)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. On notera dans la suite $u = m^2 - 1$ et $q = m^2 - 4$.

Supposons d'abord que $m \in {}^2\mathbb{N}_*$.

- De $muq \in {}^2\mathbb{N}_*$, nous déduisons $uq \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Comme $u - q = 3$, nous savons que $u \wedge q \in \{1, 3\}$.
- Si $u \wedge q = 1$, alors $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, d'où $(u, q) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Or ceci est impossible d'après le fait 3.1¹.
- Si $u \wedge q = 3$, alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}, v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(u) \in 2\mathbb{N} + 1$ et $v_3(q) \in 2\mathbb{N} + 1$. Donc $u = 3U^2$ et $q = 3Q^2$ avec $(U, Q) \in \mathbb{N}^2$. Or $u - q = 3$ donne $U^2 - Q^2 = 1$, et le fait 3.1 nous indique une contradiction.

1. On peut aussi noter que le fait ?? lève une contradiction car nous avons $m \in {}^2\mathbb{N}$ et $u \in {}^2\mathbb{N}$ qui donnent $(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$

Supposons maintenant que $m \notin {}^2\mathbb{N}_*$.

- Nous avons vu ci-dessus que $u \notin {}^2\mathbb{N}$ et $q \notin {}^2\mathbb{N}$. On peut donc écrire $m = \alpha M^2$, $u = \beta U^2$, $q = \gamma Q^2$ où $(M, U, Q) \in \mathbb{N}^3$, et $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{N}_{>1})^3$ forme un triplet de naturels sans facteur carré.
- Notons que $\beta \neq \gamma$ car, dans le cas contraire, nous aurions $3 = u - q = \beta(U^2 - Q^2)$ qui fournirait $0 < |U^2 - Q^2| < 3$, et ceci contredirait le fait 3.1.
- Nous avons $m \wedge u = 1$, $m \wedge q \in \{1, 2, 4\}$ et $u \wedge q \in \{1, 3\}$ avec $m \wedge u = m \wedge q = u \wedge q = 1$ impossible car sinon on aurait $(m, u, q) \in ({}^2\mathbb{N})^3$ via $muq \in {}^2\mathbb{N}$. Dès lors, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $(v_p(m), v_p(u), v_p(q)) \in (2\mathbb{N})^3$.
- Les points précédents donnent $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$, et aussi $\alpha \wedge \beta = 1$, $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2\}$, $\beta \wedge \gamma \in \{1, 3\}$ avec $\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge \gamma = \beta \wedge \gamma = 1$ impossible. Le tableau « mécanique » ci-après nous amène à considérer juste $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$ et $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$.

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	Statut
2	3	2	1	2	1	OK
2	3	6	1	2	3	OK
3	2	3	1	3	1	KO
3	2	6	1	3	2	KO

- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$ nous donne $m = 2M^2$, $m^2 - 1 = 3U^2$ et $m^2 - 4 = 2Q^2$.
- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$ nous donne $m = 2M^2$, $m^2 - 1 = 3U^2$ et $m^2 - 4 = 6Q^2$. Modulo 3, nous avons :
 - $m \equiv 0$ ou $m \equiv -1$ via $m = 2M^2$.
 - $m^2 \equiv 1$ via $m^2 - 1 = 3U^2$.
 - Nous en déduisons que $m \equiv -1$, puis $m - 2 \equiv 0$, soit $3 \mid m - 2$.

Via $m = 2M^2$, nous obtenons $2 \mid m - 2$, et donc $6 \mid m - 2$.

□

8. AFFAIRE À SUIVRE...
