Ressources pédagogiques : « pour aller moins loin » *(-Ressources-pedagogiques-pour-aller-moins-loin-.html)*

Rediffusion d'un article publié le 5 novembre 2018

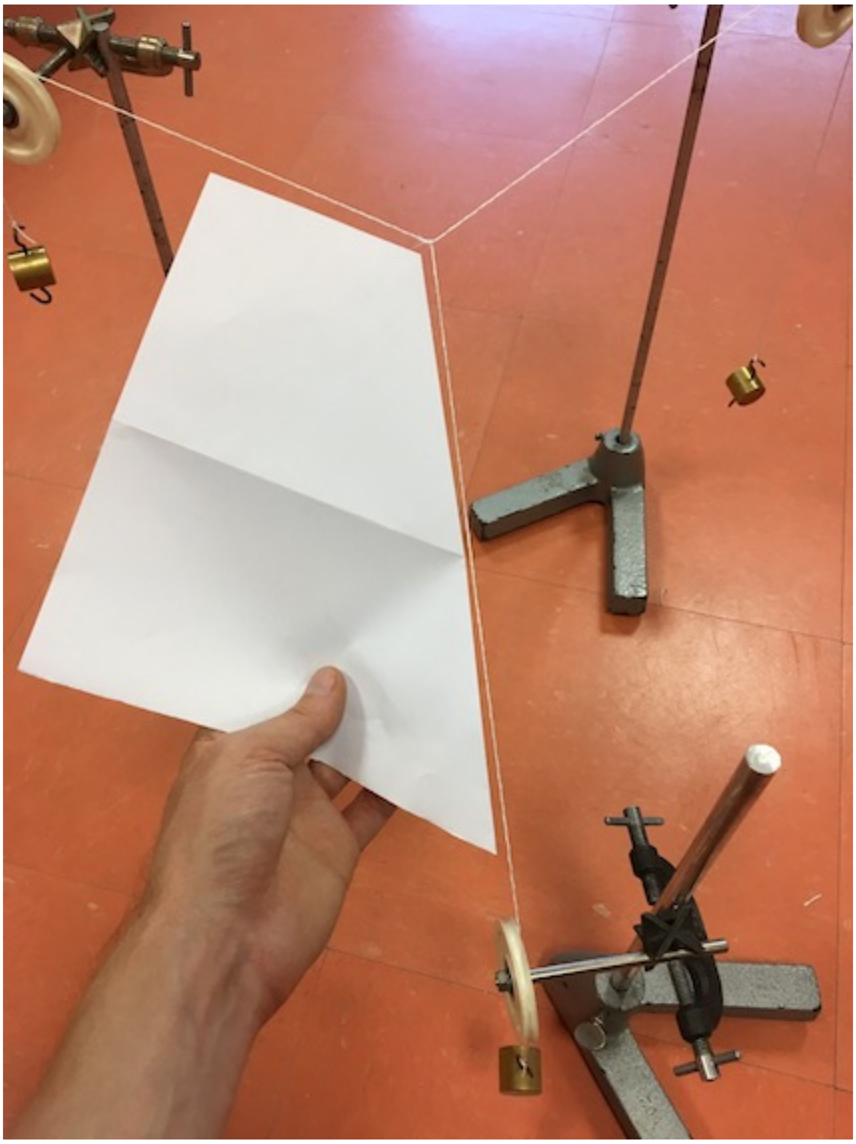
# POIDS, POULIES ET POINT DE FERMAT-STEINER

Piste rouge *(spip.php?page=mot&id_mot=22)* Le *4 avril 2023* - Ecrit par Aurélien Alvarez *(_Alvarez-Aurelien_.html)*

**Dans un article précédent, nous avons vu comment il était possible de mesurer un angle avec une balance** *(Mesurer-un-angle-avec-une-balance.html)*. **Lorsque nous prenions trois masses égales, nous avions noté l'apparition d'un angle particulier de 120 degrés, indépendamment des masses. Nous proposons de nous pencher une deuxième fois sur cette situation remarquable.**

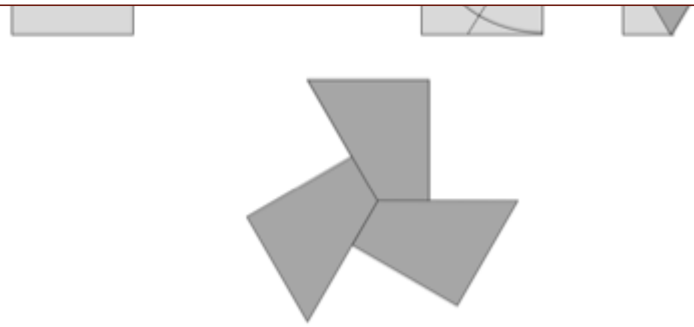
**[Rediffusion d'un article publié le 5 novembre 2018]**

Le montage expérimental illustré sur la photo ci-dessus est très simple : trois masses égales sont reliées entre elles par des fils, et chacune des masses est suspendue à une poulie [1 *(#nb1)*]. Lorsqu'on lâche les trois masses, après *un-angle-avec-une-balance.html)* déjà mentionné.



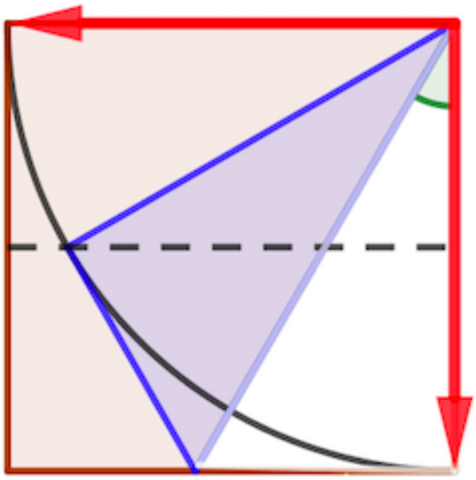
## Un gabarit de 120 degrés en papier

On part d'une feuille de papier carrée que l'on plie par sa moitié pour ramener un côté sur son côté opposé. On déplie la feuille pour revenir au carré de départ. On plie une deuxième fois la feuille afin d'amener l'un des sommets du carré sur le pli du milieu de la feuille. On obtient ainsi un quadrilatère avec deux angles droits, un angle aigu et un angle obtus comme sur la figure ci-dessous.

Nous allons démontrer que l'angle obtus du quadrilatère mesure 120 degrés.

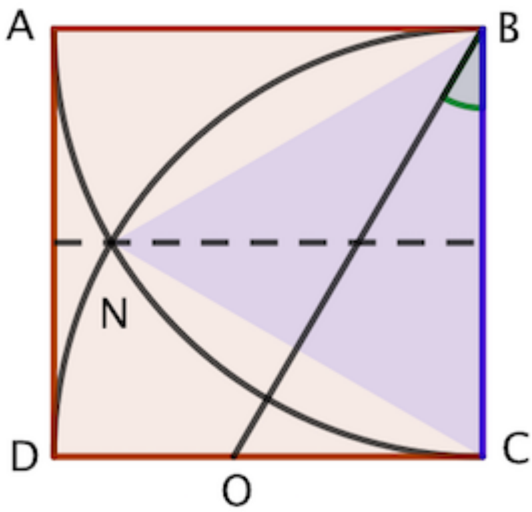
- Un argument trigonométrique



Dessinons comme sur la figure ci-contre un repère. Le point de repliement de la feuille dessine un point mobile le long d'un arc de cercle : on peut repérer le point mobile par l'angle $\alpha$. Par définition de ce qu'est un pli, l'angle $\alpha$ est égal à deux fois l'angle du pli.

Quelles sont les coordonnées du point mobile dans le repère que nous avons dessiné ? Convenons que l'axe des abscisses est indiqué par la flèche vers le bas, et l'axe des ordonnées par la flèche vers la gauche. Ainsi les coordonnées du point mobile sont exactement $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Le quadrilatère qui nous intéresse est obtenu lorsque l'abscisse du point mobile est égale à $1/2$, autrement dit $\alpha$ est tel que $\cos\alpha = 1/2$. On en déduit donc que $\alpha = \tau/6$, où pour mémoire $\tau = 2\pi$ [3 (#nb3)]. L'angle du pli qui, rappelons-le, vaut la moitié de $\alpha$ est donc de $\tau/12$. On en déduit finalement que l'angle obtus du quadrilatère est

$$\frac{\tau}{2} - \left(\frac{\tau}{4} - \frac{\tau}{12}\right) = \frac{\tau}{3}.$$




Soit ABCD un carré. Le triangle BCN est équilatéral. En effet, par définition du pliage, N appartient à la médiatrice du segment BC, si bien que BN = CN et, par construction même, BN = BC. Notons O le point d'intersection de la droite de pliage avec le côté CD. Par construction, les triangles BCO et BNO sont images l'un de l'autre par la symétrie d'axe BO, les points B et O étant invariants, les points C et N étant images l'un de l'autre. La droite BO est donc la médiatrice du côté CN. Puisque le triangle BCN est équilatéral, cette médiatrice est aussi la bissectrice de l'angle en B. Les angles d'un triangle équilatéral étant de 60 degrés, on en déduit que l'angle en B du triangle BCO est de 30 degrés. Or, le triangle BCO est rectangle en C, donc son angle en O mesure $90 - 30 = 60^\circ$. On en déduit finalement que l'angle DOB mesure $180 - 60 = 120^\circ$. CQFD.

**Remarque: :** Dans les deux démonstrations que nous avons données, l'argument clé est le fait que le triangle BCN est équilatéral. Dans le premier cas, on le démontre en utilisant un arc de cercle et un argument de trigonométrie, dans le second cas, on utilise deux arcs de cercle. Affaire de goût 😃.

## Pourquoi un angle de 120 degrés ?

Les trois masses étant égales, elles exercent au niveau de chacune des trois poulies la même force verticale, le même poids $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, où $\mathbf{g}$ désigne le vecteur accélération de la pesanteur et $m$ la valeur commune des trois masses. Ainsi, les forces $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ et $\mathbf{F_3}$ qui s'exercent au niveau du point $P$ de jonction des trois ficelles, sont toutes de même intensité, seules leurs directions sont différentes. On a donc

$$||\mathbf{F_1}|| = ||\mathbf{F_2}|| = ||\mathbf{F_3}|| = mg.$$

D'après le principe fondamental de la statique *(https://fr.wikipedia.org/wiki/Principe_fondamental_de_la_statique)*, le système étant à l'équilibre, la est désormais le suivant.

**Exercice**

*Montrer que si trois vecteurs unitaires* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ *sont tels que* $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}=\mathbf{0}$, *alors l'angle entre deux d'entre eux est de 120 degrés.*

Démonstration *(javascript:;)*

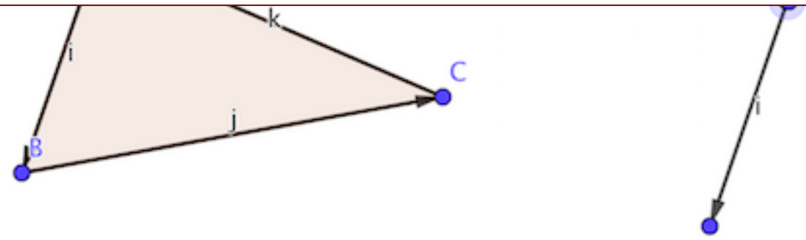
*Soit* $A$ *un point du plan affine euclidien. Notons* $B$ *et* $C$ *les deux points suivants :*

- $B=A+\mathbf{i}$ *;*
- $C=B+\mathbf{j}=A+\mathbf{i}+\mathbf{j}$.

*Puisque la somme vectorielle* $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ *des trois vecteurs est nulle, c'est que le point*

$$C+\mathbf{k}=A+\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

*n'est autre que le point* $A$. *On construit ainsi un triangle ABC qui a la propriété remarquable d'être équilatéral puisque les trois vecteurs* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ *et* $\mathbf{k}$ *sont unitaires, donc de même norme. L'angle en chaque sommet d'un triangle équilatéral étant de* $180/3=60^\circ$, *on en déduit donc que l'angle entre les vecteurs* $\mathbf{i}$ *et* $\mathbf{j}$ *est de* $180-60=120^\circ$, *et de même pour les deux autres couples de vecteurs.*

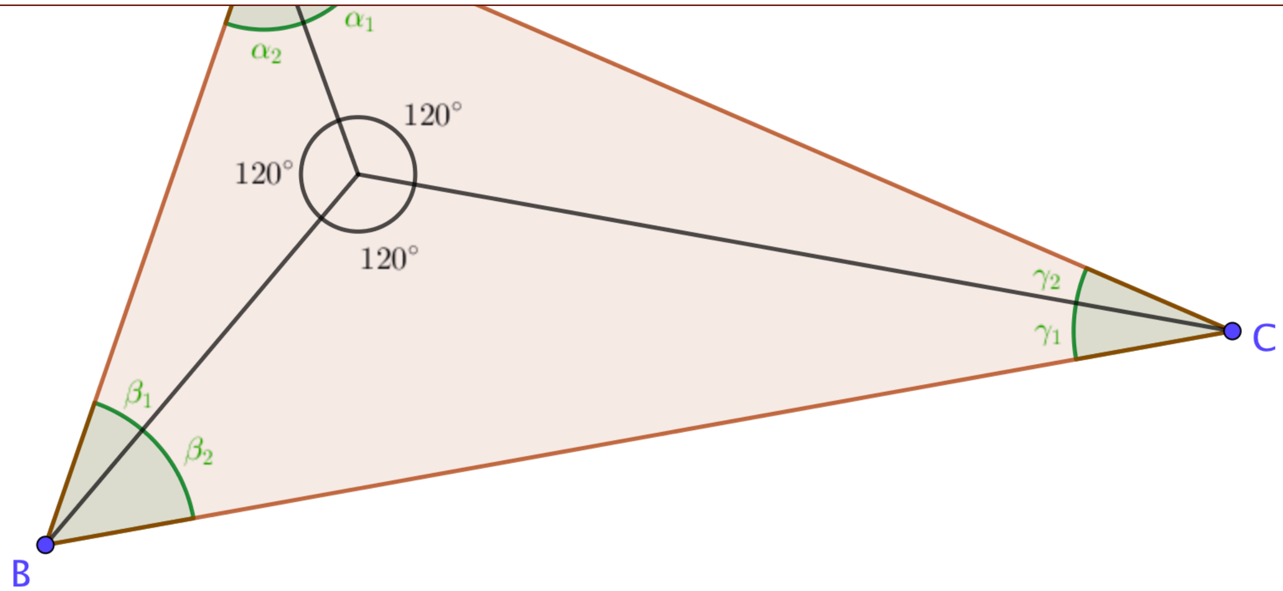



Si l’on s’amuse à déplacer un peu trop une poulie, on remarque que le point de jonction des trois ficelles vient se positionner sur l’une des poulies.

Après plusieurs essais, on comprend que le phénomène se produit dès lors que l’un des angles du triangle formé par les trois poulies devient un peu trop obtus. Et en effet, étant donné un triangle ABC ayant un angle d’au moins 120 degrés, il n’existe pas de point P distinct de A, B et C tel que les angles APB, BPC et CPA soient tous égaux à 120 degrés.

### Exercice

*Pour tout triangle ABC, si P est un point distinct de A, B et C tel que les angles APB, BPC et CPA sont tous égaux à 120 degrés, alors les angles aux sommets du triangle ABC sont tous les trois strictement inférieurs à 120 degrés.*




*Avec les notations de la figure ci-dessus, en écrivant que la somme des angles d'un triangle est égale à 180 degrés pour chacun des trois triangles APB, BPC et CPA, on en déduit les trois équations*

$$\alpha_1 + \gamma_2 = 60^\circ \quad \beta_1 + \alpha_2 = 60^\circ \quad \gamma_1 + \beta_2 = 60^\circ.$$

*En sommant les deux premières équations, on a alors*

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 120^\circ - (\beta_1 + \gamma_2) < 120^\circ.$$

*De même, en combinant les équations 2 et 3 (respectivement 1 et 3), on montre que l'angle en B (respectivement C) est de mesure strictement inférieure à 120 degrés.*

## La nature ne choisit pas le point d'équilibre du système au hasard

Si on s'amuse à perturber le système des trois masses, par exemple en tirant sur l'une d'entre elles, après quelques instants, le système reprend exactement la même position d'équilibre : le point $P$ de jonction des trois ficelles se repositionne dans l'espace exactement au même endroit. De même, si on s'amuse à déplacer horizontalement les poulies, le point d'équilibre se déplace jusqu'à une nouvelle position bien précise.

Afin d'aider notre intuition à résoudre la question ci-dessus, imaginons que nous remplacions les trois poulies par trois villes et que l'on se pose la question de placer un château d'eau pour alimenter les trois villes. Où placer le château d'eau ? S'il n'y avait que deux villes, on le placerait au milieu, c'est-à-dire à l'endroit « le plus proche des deux villes en même temps ». Dans le cas de trois villes, il semble naturel d'essayer de généraliser cette idée et donc de placer le château d'eau à un endroit « le plus proche des trois villes en même temps ». Qu'entend-on exactement par là ? Pourquoi pas un endroit qui minimise la somme des trois distances du château d'eau à chacune des villes ? Cela semble assez naturel, non ?

Eh bien, c'est exactement le choix fait par la nature pour équilibrer notre système de poids et de poulies : le point $P$ de jonction des trois ficelles est celui qui minimise la somme des trois distances aux poulies. En effet, le système se place dans **un état d'équilibre qui minimise son énergie potentielle**. Or cette énergie potentielle est d'autant plus basse que les masses sont proches du sol. Dans le cas de trois masses égales, cela revient donc à maximiser la somme des longueurs des trois ficelles verticales. Or, les longueurs totales des ficelles étant fixées dès le départ, maximiser la somme des longueurs verticales, cela revient à minimiser la somme des longueurs « horizontales », c'est-à-dire la somme des trois distances du point $P$ aux poulies.

Pour terminer ce paragraphe et fort de cette interprétation du problème physique en terme de distance aux poulies, on aimerait bien comprendre comment retrouver l'équation $\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3} = \mathbf{0}$ par un argument mathématique ?

Notons $P_1$, $P_2$ et $P_3$ les trois poulies ; ces trois points appartiennent au plan formé par les parties « horizontales » des trois ficelles. Soit $Q$ un point quelconque du plan. On considère enfin la fonction « somme des trois distances à $Q$ »

$$f(Q) = QP_1 + QP_2 + QP_3.$$

Un point $P_0$ est un *minimum* global (respectivement local) de la fonction $f$ si, pour tout point $Q$ du plan (respectivement dans un voisinage de $P_0$), $f(Q) \geq f(P_0)$. Le calcul différentiel *(https://fr.wikipedia.org/wiki/Dérivée)*, inventé du temps de Leibniz *(https://fr.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz)* (1646-1716) et Newton *(https://fr.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton)* (1643-1727), est un outil

$$\frac{\mathbf{P_0P_1}}{P_0P_1} + \frac{\mathbf{P_0P_2}}{P_0P_2} + \frac{\mathbf{P_0P_3}}{P_0P_3} = \mathbf{0}.$$

Démonstration (javascript:;)

> *Soit* $\mathbf{u}$ *un vecteur de coordonnées* $(x, y)$ *dans le plan euclidien* $\mathbf{R}^2$. *Notons* $g$ *la fonction norme, c'est-à-dire*
>
> $$g(\mathbf{u}) = ||\mathbf{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$
>
> *Puisque la dérivée de* $\sqrt{\cdot}$ *est* $\frac{1}{2\sqrt{\cdot}}$, *on a alors*
>
> $$\mathrm{d}g = \frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y.$$
>
> *Ainsi, on a bien montré que* $\mathrm{d}g(\mathbf{u}) : \mathbf{v} \mapsto \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{u}||}$, *et le résultat s'en suit pour la fonction* $f$ *par linéarité de la différentielle.*

Quitte à multiplier cette dernière équation par $mg$, on retrouve exactement l'équation dérivée du principe fondamental de la statique

$$\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3} = \mathbf{0}.$$

Ainsi, la physique nous enseigne que le point d'équilibre $P$ où se rejoignent les trois ficelles est exactement un point qui minimise la distance aux trois poulies, et nous venons de voir comment mathématiquement retrouver l'équation de la physique qui caractérise ce point [5 *(#nb5)*]. Si les poulies étaient des villes, c'est là qu'il faudrait placer le château d'eau.

## Dans le cas de trois villes de taille différente

Reprenons notre problème de château d'eau pour trois villes mais supposons que ces villes sont de taille différente. Les besoins en eau d'une mégalopolis ne sont pas les mêmes que ceux d'un petit village et il semble naturel de vouloir rapprocher le château d'eau des grandes villes. Du point de vue mathématique, on peut donc chercher à minimiser non plus la fonction « somme des trois distances au château d'eau » mais une fonction « somme pondérée » où on donne un

Le même calcul différentiel que précédemment nous permet de dire que le château devra être placé en un point $P_0$ tel que

$$m_1 \frac{\mathbf{P_0P_1}}{P_0P_1} + m_2 \frac{\mathbf{P_0P_2}}{P_0P_2} + m_3 \frac{\mathbf{P_0P_3}}{P_0P_3} = \mathbf{0}.$$

Là encore, c'est exactement le contenu de l'équation dérivée du principe fondamental de la statique

$$\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3} = \mathbf{0},$$

dans le cas de trois masses distinctes où $||\mathbf{F_1}|| = m_1 g$, $||\mathbf{F_2}|| = m_2 g$ et $||\mathbf{F_3}|| = m_3 g$.

**Challenge**

*Où placer un château d'eau pour les trois villes Lyon, Orléans et Paris ? D'après Wikipédia, Lyon compte environ 500 000 habitants, Orléans environ 100 000 et Paris environ 2 200 000. Quant aux distances à vol d'oiseau, comptons 400 km pour Lyon-Orléans, 500 km pour Lyon-Paris et 100 km pour Orléans-Paris.*

## Un joli théorème en guise de conclusion

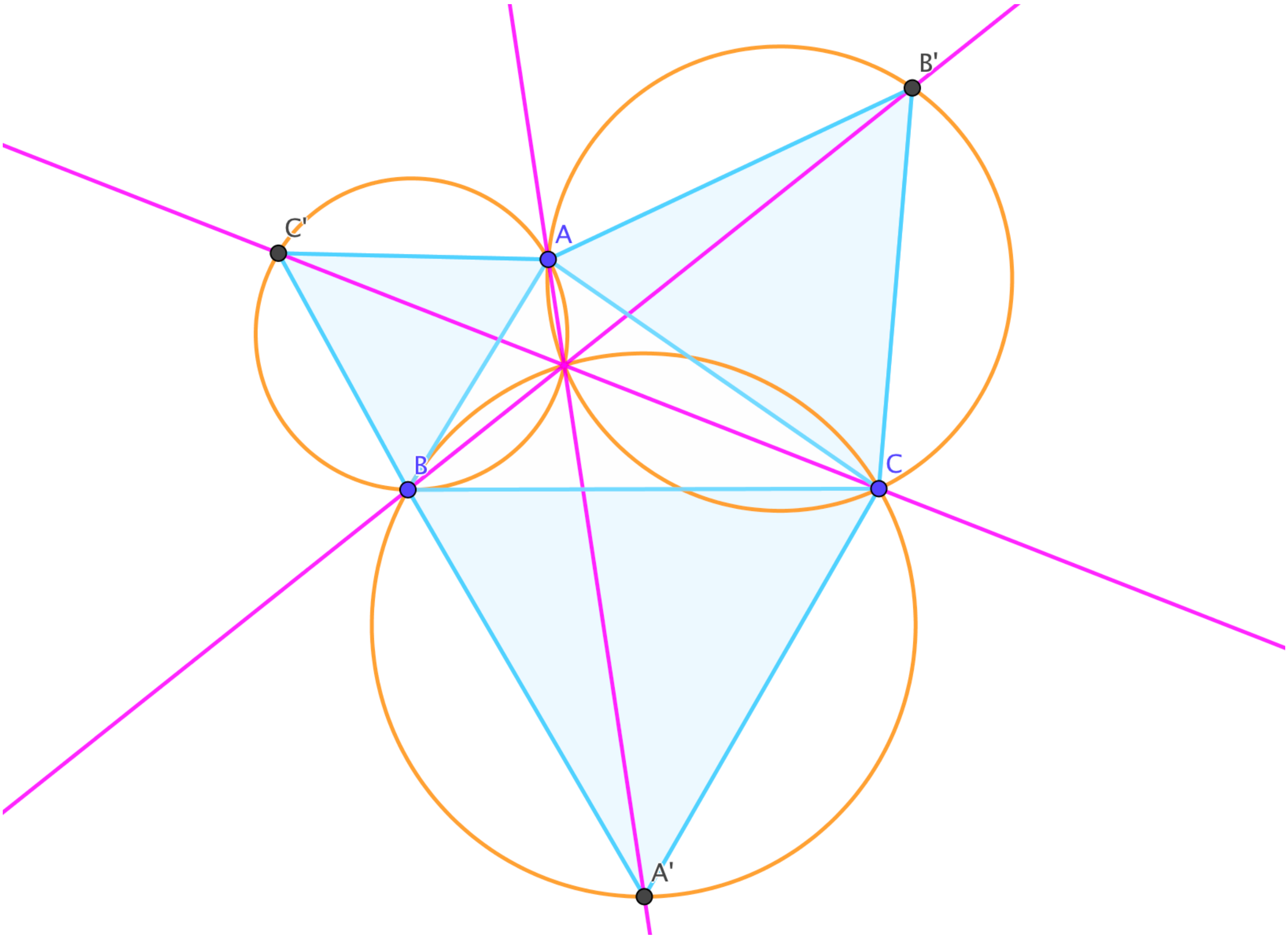
En 1636, Pierre de Fermat *(https://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat)* défie les lecteurs de son mémoire *Méthode du maximum et du minimum* de trouver une méthode plus efficace que la méthode du maximum qu'il venait de mettre au point pour résoudre le problème suivant :

> « Étant donnés trois points en trouver un quatrième tel que la somme de ses distances aux trois points donnés soit minima. »

Si les méthodes analytiques restent des outils redoutablement efficaces dans de très nombreuses situations, il n'en demeure pas moins que, dès 1640, Evangelista Torricelli *(https://fr.wikipedia.org/wiki/Evangelista_Torricelli)* trouva une solution géométrique de ce problème…

**Théorème de Fermat**

> - *Si l'un des angles du triangle est supérieur ou égal à 120 degrés, alors le point de Fermat-Steiner est le sommet en question.*
> - *Si tous les angles du triangle sont strictement inférieurs à 120 degrés, alors le point de Fermat-Steiner est contenu dans l'intérieur du triangle.*




## Construction géométrique du point de Fermat-Steiner

Pour chaque côté du triangle ABC [6 *(#nb6)*], on construit à l'extérieur du triangle ABC le triangle équilatéral s'appuyant sur le côté en question. Notons A' (respectivement B' et C') le troisième sommet du triangle équilatéral s'appuyant sur le côté BC (respectivement AC et AB). Le point de Fermat-Steiner est à la fois

- l'intersection des droites de Simpson AA', BB' et CC' ;
- ou l'intersection des cercles circonscrits aux triangles équilatéraux A'BC, B'AC,

présentées sur ce site dans l'article Mathématiques savonneuses *(Mathematiques-savonneuses.html)* de Paul Laurain.

**Post-scriptum :**

L'idée d'écrire cet article doit pour beaucoup à Jean-Luc Pernette *(https://twitter.com/JLP_71)* que je remercie chaleureusement 🙏 C'est en effet lui qui m'a enseigné la construction en papier du gabarit de 120 degrés et m'a suggéré l'idée de visualiser le point de Fermat-Steiner avec un système de poids et de poulies. Merci également à Frédéric Pérez avec qui nous aimons expérimenter les mathématiques comme illustré dans cet article en formation de professeurs dans le cadre de La main à la pâte *(http://www.fondation-lamap.org)*. Enfin, merci à Pierre-Sylvain Allaume du département de physique de l'université d'Orléans pour le prêt du matériel.

La rédaction d'Images des Mathématiques ainsi que l'auteur, remercient François Brunault et Jean-Louis Poss pour leur relecture attentive et leurs suggestions.

Article édité par Christian Mercat *(_Mercat-Christian_.html)*

## NOTES

[1 *(#nh1)*] Notons d'ailleurs que les poulies ne sont pas nécessairement toutes les trois à la même hauteur.

[2 *(#nh2)*] Notons que si les trois poulies sont à la même hauteur, les trois ficelles se retrouvent à l'horizontale. Plus généralement, que les poulies soient à la même hauteur ou à des hauteurs différentes, les trois ficelles sont toujours contenues dans un même plan.

[3 *(#nh3)*] À ce sujet, on pourra lire cet article-plaidoyer *(La-valeur-de-pi-n-est-pas-la-bonne.html)* pour une reconnaissance de $\tau$ à sa juste valeur 😁.

[4 *(#nh4)*] Si l'on voulait être très précis, on ferait attention au fait que la fonction $f$ n'est pas différentiable en $P_1$, $P_2$, $P_3$ et qu'il est donc illégitime de calculer une

[6 *(#nh6)*] dont tous les angles sont strictement inférieurs à 120 degrés