BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writing/drafts.

Table des matières

Date: 25 Jan. 2024 – 28 Jan. 2024.

1. Ce qui nous intéresse

Existe-t-il $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $\prod_{i=0}^{k} (n+i)$ soit le carré d'un entier ?

2. Notations utilisées

Dans la suite, nous utiliserons les notations suivantes.

- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ et ${}^2\mathbb{N}_* = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
- $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k} (n+i)$. Par exemple, nous avons $\pi_n^0 = n$ et $\pi_n^1 = n(n+1)$.
- $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
- $\forall (p\,; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p-adique de n, c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n, mais $p^{v_p(n)+1} \nmid n$.
- $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m.
- $2\,\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
- $2\,\mathbb{N}+1$ désigne l'ensemble des nombres naturels impairs.

3. Cas 0

Donnons juste un fait basique concernant l'ensemble ${}^2\mathbb{N}$, fait qui nous sera utile par la suite.

Fait 3.1. *$\forall (n,m) \in {}^2\mathbb{N}_* \times {}^2\mathbb{N}_*$, si $n \neq m$, alors nous avons :*

(1) $|n-m| = 3 \iff (n,m) \in \{(1,4)\,;(4,1)\}$

(2) $|n-m| \geq 5$ dès que $(n,m) \notin \{(1,4)\,;(4,1)\}$.

Démonstration. Quitte à échanger les rôles, on peut supposer $n > m$. Par hypothèse, nous avons $(N,M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $n = N^2$ et $m = M^2$. Comme $n > m$, nous avons aussi $N > M$. Pour conclure, il suffit de s'appuyer sur les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} N > M &\iff N \geq M+1 \\ &\iff N^2 \geq (M+1)^2 \\ &\iff n \geq m + 2M + 1 \\ &\iff n - m \geq 2M+1 \end{aligned}$$

□

4. Cas 1

Fait 4.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Clairement $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\pi_n^1) \in 2\mathbb{N}$. Or $p \in \mathbb{P}$ ne pent diviser à la fois n et $n+1$. Nous savons donc que $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+1) \in 2\mathbb{N}$, autrement dit $(n, n+1) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. D'après le fait 3.1, nous savons que ceci est impossible. □

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) = N^2$ où $N \in \mathbb{N}^*$. Rappelons les deux identités classiques suivantes.

- $n(n+1) = 2 \sum_{k=1}^{n} k$
- $N^2 = \sum_{k=1}^{N} (2k-1)$

Dès lors, après avoir noté que $N > n$, les équivalences suivantes donnent une contradiction.

$$\begin{aligned}
n(n+1) = N^2 &\iff 2\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{N} (2k-1) \\
&\iff \sum_{k=1}^{n} 2k = \sum_{k=1}^{N} 2k - N \\
&\iff \sum_{k=n+1}^{N} 2k = N \\
&\iff \sum_{k=n+1}^{N-1} 2k + N = 0
\end{aligned}$$

Se souvenir que $N > 0$.

□

5. Cas 2

Fait 5.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Posant $m = n+1$, nous avons $\pi_n^2 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Comme $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\pi_n^2) \in 2\mathbb{N}$, et comme de plus $p \in \mathbb{P}$ ne peut diviser à la fois m et $m^2 - 1$, nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(m^2-1) \in 2\mathbb{N}$, d'où $(m, m^2-1) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Or, d'après le fait 3.1, $m^2 - 1 \in {}^2\mathbb{N}$ est impossible. □

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Comme $p \in \mathbb{P}_{>2}$ ne peut diviser au maximum qu'un seul des trois facteurs n, $(n+1)$ et $(n+2)$, nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}_{>2}$, $\big(v_p(n), v_p(n+1), v_p(n+2)\big) \in \big(2\mathbb{N}\big)^3$. Mais que se passe-t-il pour $p = 2$?

Supposons d'abord $n \in 2\mathbb{N}$.

- Posant $n = 2m$, nous avons $\pi_n^2 = 4m(2m+1)(m+1)$, d'où $m(2m+1)(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Comme $v_2(2m+1) = 0$, nous savons que $2m+1 \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Donc $m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$, mais le fait 4.1 interdit cela.

Supposons maintenant $n \in 2\mathbb{N}+1$.

- Nous savons que $n \in {}^2\mathbb{N}_*$ via $v_2(n) = 0$.
- Dès lors, on obtient $(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$, mais de nouveau ceci contredit le fait 4.1. □

6. Cas 3

Fait 6.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Nous pouvons ici faire les manipulations algébriques naturelles suivantes.

$$\begin{aligned}
\pi_n^3 &= n(n+3) \cdot (n+1)(n+2) \\
&= (n^2+3n) \cdot (n^2+3n+2) \\
&= (m-1)(m+1) \\
&= m^2 - 1
\end{aligned}$$

$m = n^2 + 3n + 1$

D'après le fait 3.1, $m^2 - 1 \notin {}^2\mathbb{N}$, c'est-à-dire $\pi_n^3 \notin {}^2\mathbb{N}$. □

Une preuve alternative. Nous avons aussi les manipulations algébriques moins magiques suivantes où l'on « symétrise » certaines expressions.

$$
\begin{aligned}
\pi_n^3 &= n(n+1)(n+2)(n+3) && \\
&= \left(m-\frac{3}{2}\right)\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{3}{2}\right) && m = n+\frac{3}{2} \\
&= \left(m^2-\frac{9}{4}\right)\left(m^2-\frac{1}{4}\right) && \\
&= (x-1)(x+1) && x = m^2-\frac{5}{4} \\
&= x^2-1 && \\
&= \left(\left(n+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right)^2-1 && \\
&= \left(n^2+3n+1\right)^2-1 &&
\end{aligned}
$$

□

7. Cas 4

Fait 7.1. *$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2\mathbb{N}$.*

Démonstration. Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $\big(v_p(n), v_p(n+1), v_p(n+2), v_p(n+3), v_p(n+4)\big) \in \big(2\mathbb{N}\big)^5$. Pour $p=2$ et $p=3$, nous avons les alternatives suivantes pour chaque facteur $(n+i)$ de π_n^3.

- **[A 1]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A 2]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$
- **[A 3]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times 2\mathbb{N}$
- **[A 4]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$

Comme nous avons cinq facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions très facilement.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 1]**.

  Dans ce cas, on sait juste que $(n+i, n+i') \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Or $n \notin {}^2\mathbb{N}$ puisque sinon nous aurions $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$ via $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$, mais ceci ne se peut pas d'après le fait 6.1. De même, $n+4 \notin {}^2\mathbb{N}$. Dès lors, nous avons $\{n+i, n+i'\} \subseteq \{n+1, n+2, n+3\}$ qui donne deux carrés parfaits éloignés de moins de 3, et ceci contredit le fait 3.1.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 2]**.

  Dans ce cas, le couple de facteurs est $(n, n+3)$, ou $(n+1, n+4)$.

  1. Supposons d'abord que n et $(n+3)$ vérifient **[A 2]**.
     Comme $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+3) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(n) \in 2\mathbb{N}+1$ et $v_3(n+3) \in 2\mathbb{N}+1$, nous avons $n = 3N^2$ et $n+3 = 3M^2$ où $(N, M) \in \mathbb{N}^2$. Or, ceci donne $3 = 3M^2 - 3N^2$, puis $M^2 - N^2 = 1$ qui contredit le fait 3.1.
  2. De façon analogue, on ne peut pas avoir $(n+1)$ et $(n+4)$ vérifiant **[A 2]**.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 3]**.

  Comme dans le point précédent, c'est impossible car on aurait $2 = 2M^2 - 2N^2$, ou $4 = 2M^2 - 2N^2$. En effet, ici les couples possibles sont $(n, n+2)$, $(n, n+4)$, $(n+2, n+4)$ et $(n+1, n+3)$[1].

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 4]**.

  Ceci donne deux facteurs différents divisibles par 6, mais c'est impossible. □

1. Rien n'empêche d'avoir n, $(n+2)$ et $(n+4)$ vérifiant tous les trois **[A 3]**.

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Posant $m = n+2$, nous avons $\pi_n^4 = (m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) = m(m^2-1)(m^2-4)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. On notera dans la suite $u = m^2-1$ et $q = m^2-4$.

Supposons d'abord que $m \in {}^2\mathbb{N}_*$.

- De $muq \in {}^2\mathbb{N}_*$, nous déduisons $uq \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Comme $u - q = 3$, nous savons que $u \wedge q \in \{1, 3\}$.
- Si $u \wedge q = 1$, alors $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, d'où $(u, q) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Or ceci est impossible d'après le fait 3.1 [2].
- Si $u \wedge q = 3$, alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(u) \in 2\mathbb{N}+1$ et $v_3(q) \in 2\mathbb{N}+1$. Donc $u = 3U^2$ et $q = 3Q^2$ avec $(U, Q) \in \mathbb{N}^2$. Or $u - q = 3$ donne $U^2 - Q^2 = 1$, et le fait 3.1 nous indique une contradiction.

Supposons maintenant que $m \notin {}^2\mathbb{N}_*$.

- Nous avons vu ci-dessus que $u \notin {}^2\mathbb{N}$ et $q \notin {}^2\mathbb{N}$. On peut donc écrire $m = \alpha M^2$, $u = \beta U^2$, $q = \gamma Q^2$ où $(M, U, Q) \in \mathbb{N}^3$, et $(\alpha, \beta, \gamma) \in \left(\mathbb{N}_{>1}\right)^3$ formant un triplet de naturels sans facteur carré.
- Notons que $\beta \neq \gamma$ car, dans le cas contraire, nous aurions $3 = u - q = \beta\left(U^2 - Q^2\right)$ qui fournirait $0 < |U^2 - Q^2| < 3$, et ceci contredirait le fait 3.1.
- Nous avons $m \wedge u = 1$, $m \wedge q \in \{1, 2, 4\}$ et $u \wedge q \in \{1, 3\}$ avec $m \wedge u = m \wedge q = u \wedge q = 1$ impossible car sinon on aurait $(m, u, q) \in \left({}^2\mathbb{N}\right)^3$ via $muq \in {}^2\mathbb{N}$.
- Dès lors, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $\big(v_p(m), v_p(u), v_p(q)\big) \in \left(2\mathbb{N}\right)^3$.
- Les points précédents donnent $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$, où $\beta \neq \gamma$, ainsi que $\alpha \wedge \beta = 1$, $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2\}$, $\beta \wedge \gamma \in \{1, 3\}$ avec $\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge \gamma = \beta \wedge \gamma = 1$ impossible. Ceci nous donne le tableau « mécanique » suivant qui montre que forcément $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$ ou $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$. Le plus dur est fait !

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	Statut
2	3	2	1	2	1	OK
2	3	6	1	2	3	OK
3	2	3	1	3	1	KO
3	2	6	1	3	2	KO

- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$ nous donne $m = 2M^2$, $m^2 - 1 = 3U^2$ et $m^2 - 4 = 2Q^2$.
  Comme m est pair, posant $m - 2 = 2r$ et notant $s = m + 2$, les faits suivants lèvent une contradiction.
  - $2rs = 2Q^2$ donne $rs = Q^2$.
  - $s \notin {}^2\mathbb{N}$, car dans le cas contraire, nous aurions $(m-2)(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$ via $(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) \in {}^2\mathbb{N}$, mais ceci ne se peut d'après le fait 6.1.
  - Les deux résultats précédents donnent $(\pi, R, S) \in \mathbb{N}_{>1} \times \mathbb{N}^2$ tel que $r = \pi R^2$ et $s = \pi S^2$ avec π sans facteur carré.
  - $4 = s - 2r = \pi(S^2 - 2R^2)$ donne alors $\pi = 2$, d'où $m + 2 = 2S^2$.
  - Finalement, $m = 2M^2$ et $m + 2 = 2S^2$ contredisent le fait 3.1 via $2 = 2(S^2 - M^2)$.

2. On peut aussi noter que le fait 5.1 lève une contradiction car nous avons $m \in {}^2\mathbb{N}$ et $u \in {}^2\mathbb{N}$ qui donnent $(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$

- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$ nous donne $m = 2M^2$, $m^2 - 1 = 3U^2$ et $m^2 - 4 = 6Q^2$.
  Les faits suivants lèvent une autre contradiction via une technique similaire à celle employée ci-dessus.
  - Travaillons modulo 3. Comme $m = 2M^2$, nous avons $m \equiv 0$ ou $m \equiv -1$. Or $m^2 - 1 = 3U^2$ donne $m^2 \equiv 1$, d'où $m \equiv -1$, puis $3 \mid m - 2$, et enfin $6 \mid m - 2$ puisque m est pair.
  - Posant $m - 2 = 6r$ et notant $s = m + 2$, nous avons $6rs = 6Q^2$, puis $rs = Q^2$.
  - $s \notin {}^2\mathbb{N}$ reste valable ici.
  - Les deux résultats précédents donnent $(\pi, R, S) \in \mathbb{N}_{>1} \times \mathbb{N}^2$ tel que $r = \pi R^2$ et $s = \pi S^2$ avec π sans facteur carré.
  - $4 = s - 6r = \pi(S^2 - 6R^2)$ donne $\pi = 2$, et on conclut comme avant. $\square$

8. AFFAIRE À SUIVRE...