

BROUILLON - UN SIMPLE (?) BILLARD À DEUX BANDES - AJOUTER LIEN AVEC PI : 3BLUE1BROWN GALPERIN

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.

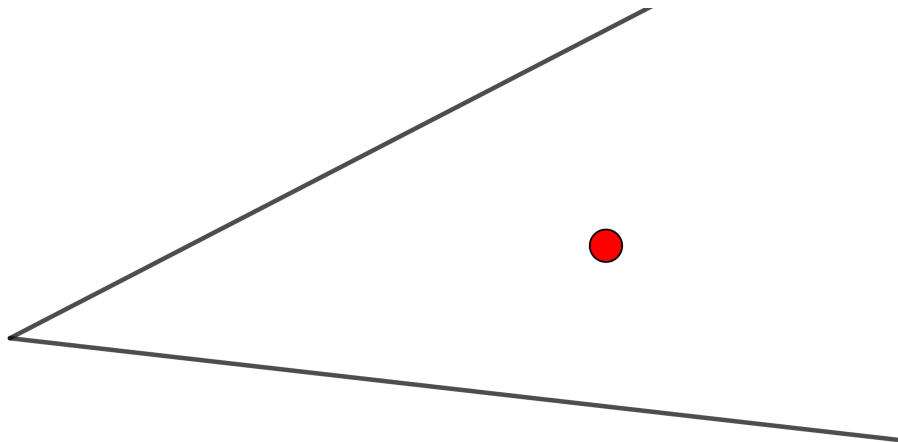


TABLE DES MATIÈRES

| | | |
|----|--------------------------------------------------------|---|
| 1. | Présentation du problème | 1 |
| 2. | Rechercher et conjecturer | 2 |
| 3. | Comprendre partiellement... | 2 |
| 4. | Notations pour la suite | 3 |
| 5. | Où se fait le 1 ^{er} rebond ? | 4 |
| 6. | Quand le 1 ^{er} rebond se fait "vers le haut" | 5 |

1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Notre billard est un peu bizarre car il est juste constitué de deux demi-droites de même origine, et notre bille est dans le secteur angulaire le "plus petit" formé par ces deux bandes. Ceci se représente comme suit.

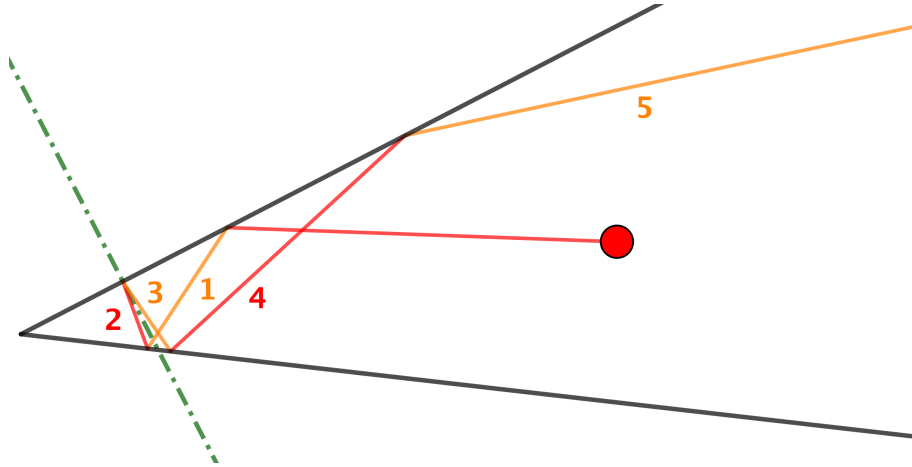


Dans la suite, nous considérons que notre bille est en fait un point, et du coup nous ne considérons pas les effets de rotation de la bille, et de plus nous ignorons les frottements, autorisant ainsi la bille à se balader vers l'infini et au-delà (*tout ceci pour plus de réalisme*).

Concrètement, on pourrait se munir de deux miroirs plans verticaux et d'une source pouvant envoyer, dans un plan horizontal, un rayon laser dans une direction donnée.

2. RECHERCHER ET CONJECTURER

Avec notre billard, est-il possible d'envoyer notre bille pile à l'intersection des deux demi-droites ? Dans l'exemple ci-dessous, on constate que notre bille s'éloigne sans plus jamais rencontrer de bandes au bout du 5^e rebond.



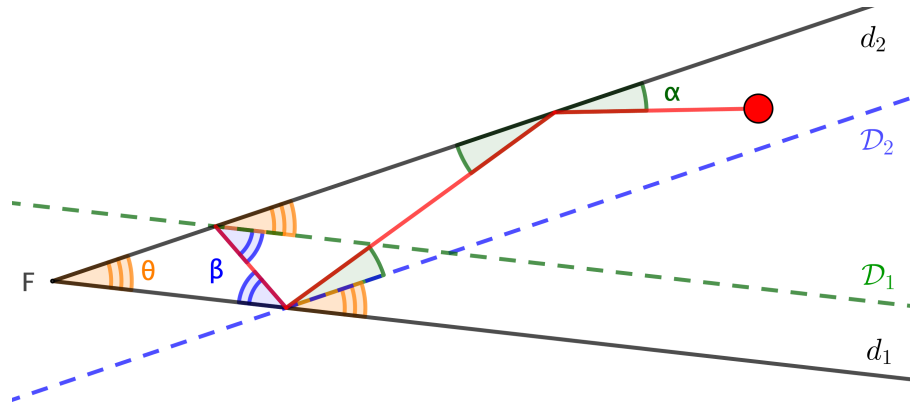
Nous avons laissé une perpendiculaire en pointillés pour les plus sceptiques.

En considérant d'autres cas, on se convainc assez vite que la seule façon d'aller au point d'intersection des deux demi-droites, c'est d'y aller directement. Dès lors que l'on fera une bande, il arrivera toujours un instant où la bille s'éloignera inexorablement. Il reste à démontrer ceci proprement. C'est le but des sections suivantes.

3. COMPRENDRE PARTIELLEMENT...

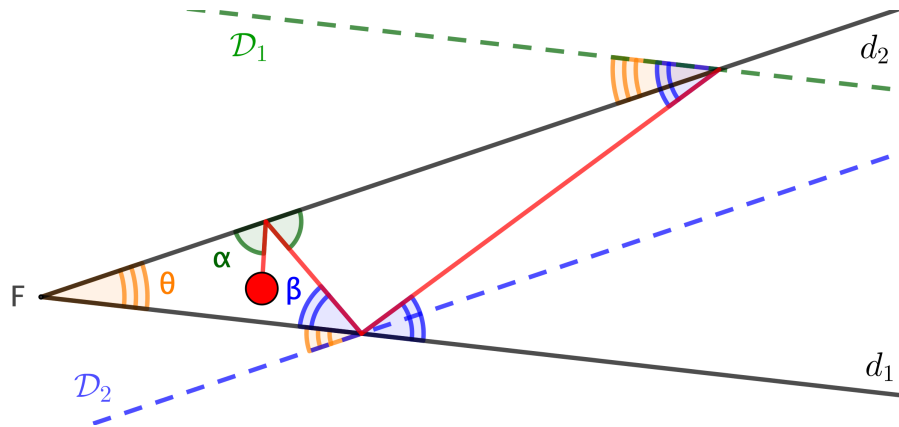
Essayons de voir, sans chercher à être trop rigoureux, la raison de ce phénomène au travers de deux situations instructives. Ci-après $\mathcal{D}_k // d_k$ pour $k \in \{1 ; 2\}$ et F est le point d'intersection des deux demi-droites.

Dans la 1^{re} situation représentée ci-dessous, nous avons un rayon initial "allant vers F " et faisant avec la direction de la demi-droite d_2 un angle géométrique $\alpha \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$, puis au bout de deux rebonds, nous obtenons un rayon "allant vers F " avec un angle géométrique de mesure $\alpha + 2\theta$ relativement à la direction de d_2 .



Situation n°1

Dans la 2^e situation ci-après, nous avons un rayon initial "allant à l'opposé de F " et faisant avec la direction de d_2 un angle géométrique $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$, puis au bout de deux rebonds, nous obtenons un rayon "allant à l'opposé de F " avec un angle géométrique mesurant $\alpha - 2\theta$ relativement à la direction de d_2 .



Situation n°2

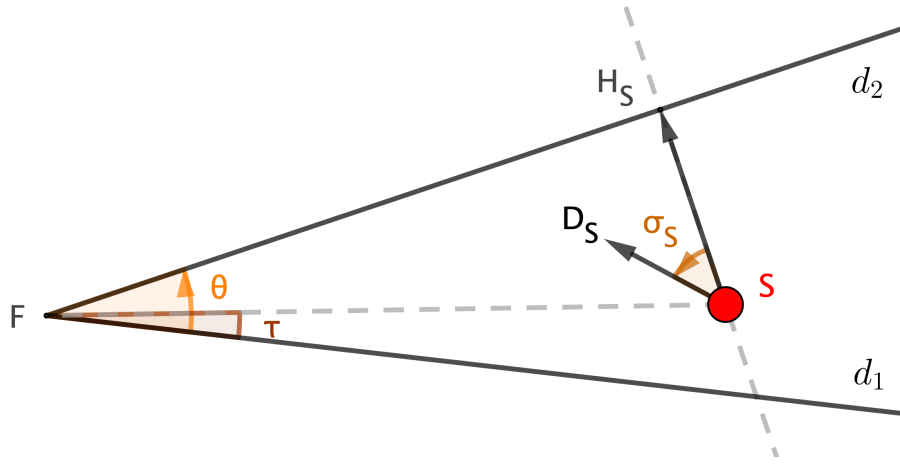
Imaginons que notre bille soit d'abord confrontée à la situation n°1. Au bout de deux rebonds, l'angle relativement à d_2 passe de $\alpha_0 = \alpha$ à $\alpha_1 = \alpha + 2\theta$. Une suite successive de situations n°1 va donc faire augmenter l'angle par rapport à la direction de d_2 . Il arrivera donc un moment où la situation n°2 arrivera, excepté si l'on obtient un rebond perpendiculaire à d_2 . Nous ignorons ici ce cas qui sera géré dans notre démonstration.

Une fois que la situation n°2 se présente, nous avons des angles de plus en plus petit relativement à d_2 jusqu'à arriver au dernier rebond possible après lequel la bille s'éloignera indéfiniment. Voilà une explication partielle du phénomène.

4. NOTATIONS POUR LA SUITE

Tous les angles sont orientés et confondus abusivement avec leur mesure principale.

- (1) d_1 et d_2 sont deux demi-droites d'origine F et telles que $\theta = \langle d_1 ; d_2 \rangle \in]0; \frac{\pi}{2}[$.
- (2) S , le point de départ, est tel que $S \notin d_1 \cup d_2$ et $\tau = \langle d_1 ; [FS] \rangle \in]0; \theta[$.
- (3) Pour tout point M du plan, nous noterons H_M sont projeté orthogonal sur d_2 .
- (4) Pour tout point M qui est sur le trajet de la bille, mais pas sur d_2 , si D_M est un point tel que $\overrightarrow{MD_M}$ indique la direction et le sens du trajet "sortant" de M , nous notons $\sigma_M = \langle \overrightarrow{MH_M} ; \overrightarrow{MD_M} \rangle$.



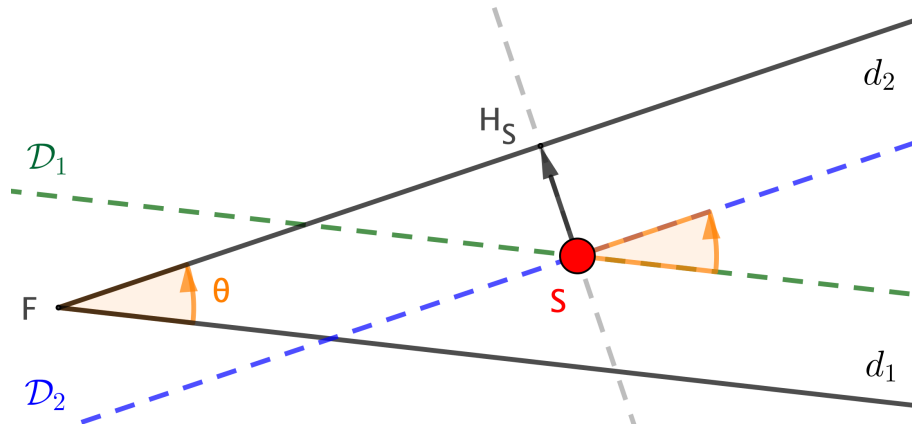
Notations pour la suite

5. OÙ SE FAIT LE 1^{ER} REBOND ?

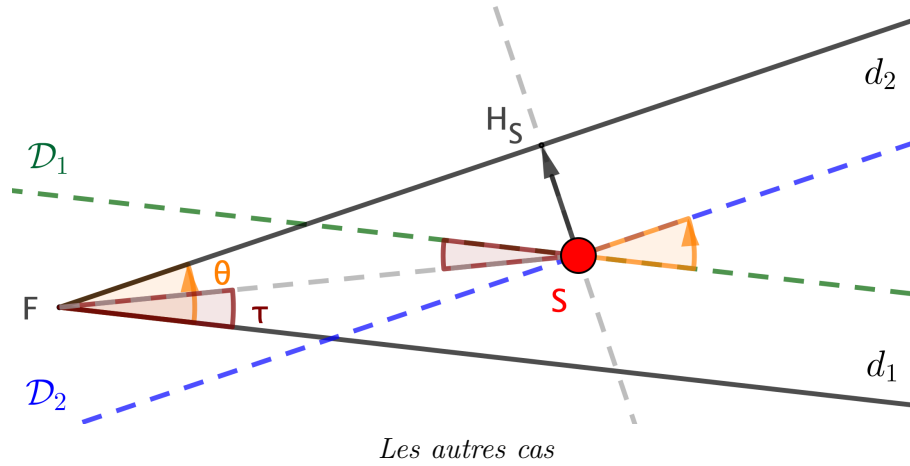
Fait 1. Nous avons les cas initiaux suivants.

- Il n'y a aucun rebond si et seulement si $\sigma_S \in \left[-\frac{\pi}{2} - \theta; -\frac{\pi}{2}\right]$.
- La bille va directement vers F si et seulement si $\sigma_S = \frac{\pi}{2} - \theta + \tau$.
- Le 1^{er} rebond se fait sur d_1 si et seulement si $\sigma_S \in \left]\frac{\pi}{2} - \theta + \tau; \pi\right] \cup \left]-\pi; -\frac{\pi}{2} - \theta\right[$.
- Le 1^{er} rebond se fait sur d_2 si et seulement si $\sigma_S \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} - \theta + \tau\right[$.

Démonstration. Tout est contenu dans les deux dessins suivants où $\mathcal{D}_k \parallel d_k$ pour $k \in \{1; 2\}$.



Aucun 1^{er} rebond



□

Il nous reste juste à traiter les cas d'un 1^{er} rebond se faisant sur d_1 et d_2 respectivement.

En fait, nous n'avons besoin de traiter que la situation d'un 1^{er} rebond sur d_2 .

En effet, une fois ceci étudié, l'autre cas s'obtiendra avec le même type de raisonnement excepté que l'on projettera S sur d_1 au lieu de d_2 .

6. QUAND LE 1^{ER} REBOND SE FAIT "VERS LE HAUT"

Fait 2. Supposons que $\sigma_S = 0$.

Notant M l'intersection de (SH_S) avec d_1 , nous avons que M est sur le trajet de la bille avec $\sigma_M < 0$ ¹.

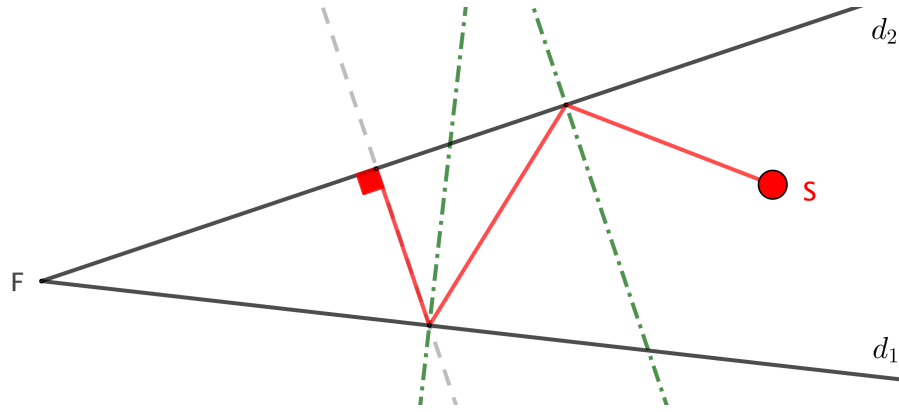
Démonstration. Évident grâce au dessin précédent.

□

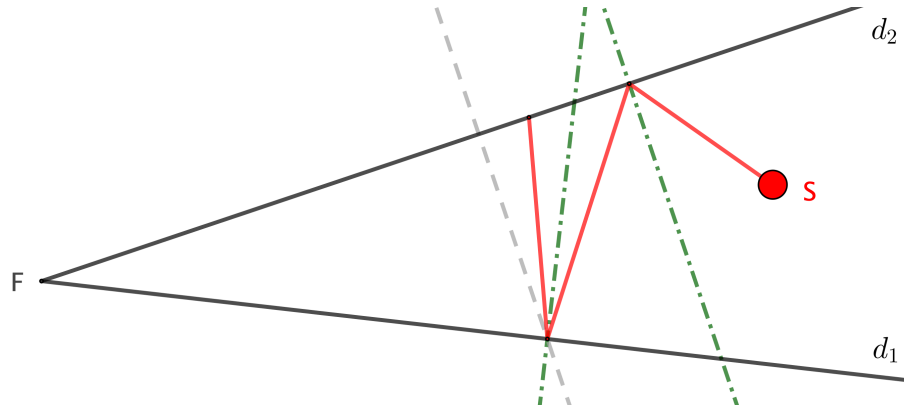
Fait 3. Supposons que $\sigma_S \in \left] 0; \frac{\pi}{2} - \theta + \tau \right[$.

Il existe un point M sur le trajet de la bille, mais pas sur d_1 , tel que $\sigma_M < 0$.

Démonstration. Au bout de deux rebonds, nous avons trois situations possibles dont les deux premières ci-après ne nécessitent aucune explication.

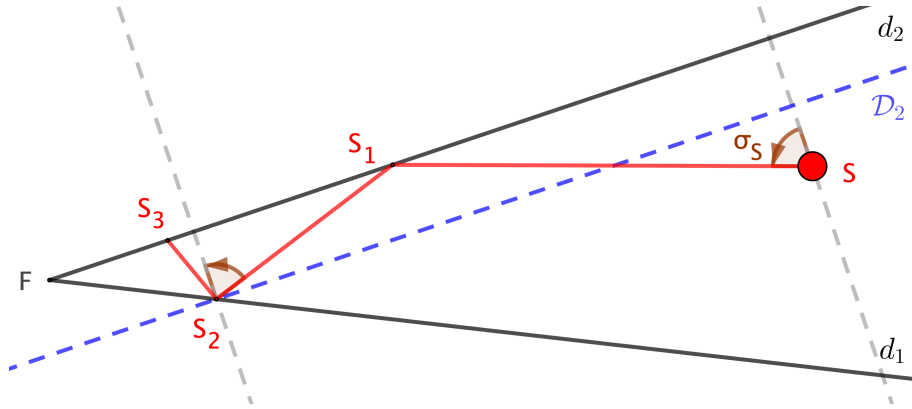


1. On pourrait avoir un résultat plus fin mais ceci ne nous serait inutile pour la suite.



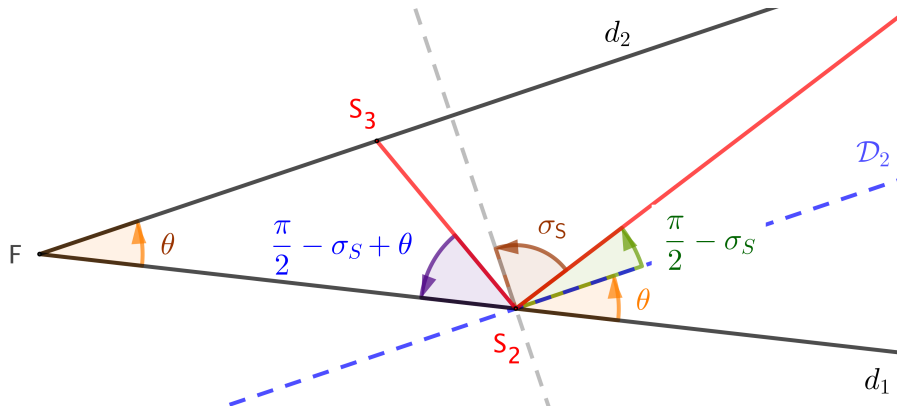
Le 2^e rebond nous ramène directement à la bonne situation.

Voici la dernière situation représentée ci-dessous où $\mathcal{D}_2 \parallel d_2$.



Le 2^e rebond nous ramène à la situation de départ mais avec une valeur de σ qui a augmenté.

Faisons un zoom sur la partie de gauche pour évaluer précisément l'évolution faisant passer de σ_S à σ_{S_2} .



Nous avons alors $\sigma_{S_2} = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \sigma_S + \theta\right) - \sigma_S = \sigma_S - 2\theta$. Ceci montre que l'on passe de σ_S à $\sigma_{S_2} = \sigma_S + \delta$ où $\delta = -2\theta < 0$. Cette dernière relation montre que l'on ne pourra pas avoir indéfiniment la dernière situation (*en toute rigueur, il faudrait faire un raisonnement par récurrence*). \square

Fait 4. Supposons que $\sigma_S \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Il existe un point M sur le trajet de la bille, mais pas sur d_1 , tel que $\sigma_M < -\frac{\pi}{2}$. En particulier, à partir de ce point M la bille s'éloignera indéfiniment loin de F .

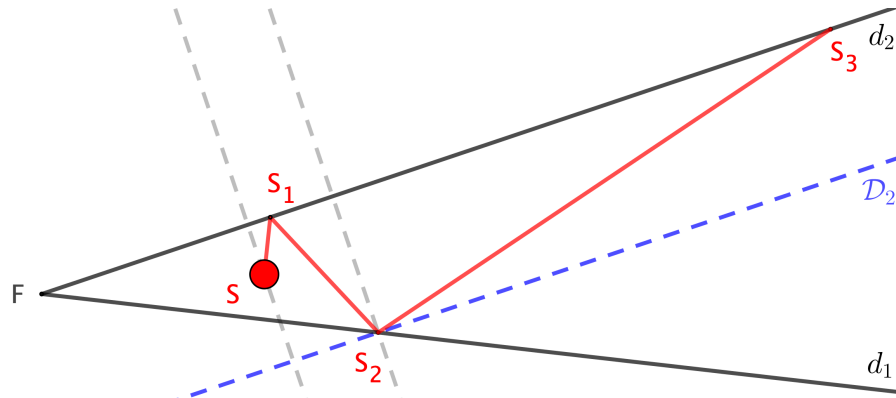
Démonstration. La démarche est similaire à la preuve précédente. Pour la situation problématique, on utilise les deux graphiques donnés dans la page suivante qui nous montrent que l'on passe de σ_S à $\sigma_{S_2} = \sigma_S + \delta$ où $\delta = -2\theta < 0$. Ceci nous permet une seconde fois de conclure puisque l'on ne pourra pas avoir indéfiniment $\sigma_{S_{2k}} \geq -\frac{\pi}{2}$. \square

Théorème. Si le 1^{er} rebond se fait sur d_2 alors il n'y aura qu'un nombre fini de rebonds et le dernier rebond amènera la bille à s'éloigner indéfiniment loin de F .

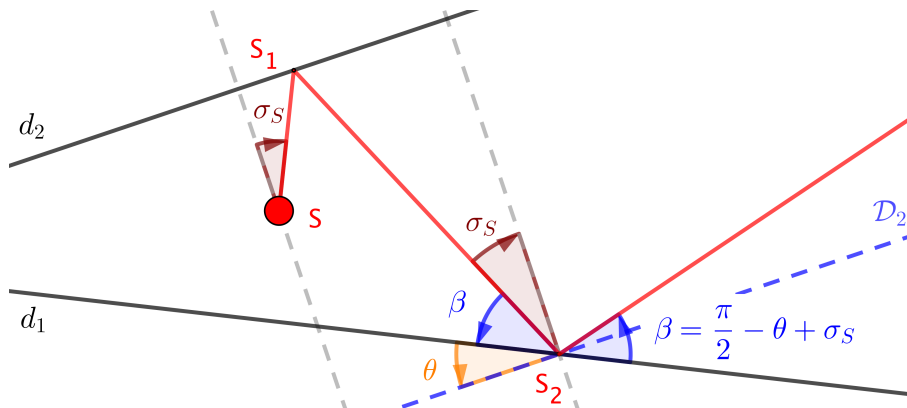
Démonstration. Distinguons trois cas.

- Si $\sigma_S \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ alors tout est donné par le fait 4.
- Si $\sigma_S = 0$ alors le fait 2 nous donne un point M sur le trajet de la bille, mais pas sur d_1 , tel que $\sigma_M < 0$.
Si $\sigma_M < -\frac{\pi}{2}$, nous savons qu'à partir de M la bille s'éloignera indéfiniment loin de F .
Sinon nous avons $\sigma_M \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Le fait 4 nous permet alors de conclure.
- Enfin si $\sigma_S \in \left]0; \frac{\pi}{2} - \theta + \tau\right]$, il suffit de raisonner comme dans le point précédent mais en invoquant le fait 3.

\square



Preuve du fait 4 – Vue large du cas problématique



Preuve du fait 4 – Vue zoomée du cas problématique