BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS – RÉSOLUTIONS À LA MAIN

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writing/drafts.

Mentions « légales »

Table des matières

Date : 25 Jan. 2024 – 3 Fév. 2024.

1. Avec 7 facteurs

Fait 1.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^6 \notin {}^2\mathbb{N}$.

La très jolie démonstration suivante vient d'un échange sur `https://math.stackexchange.com` (voir la section 3). Nous avons juste comblé quelques rares oublis, et apporté de petites simplifications.

Preuve. Supposons que $\pi_n^6 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Commençons par quelques observations immédiates.

- $\forall p \in \mathbb{P}_{>5}$, $\forall i \in [\![0\,;6]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$.
- $\exists u \in \{0,1,2\}$ tel que $\{u, u+2, u+4\} \subset 2\mathbb{N}+1$.
  Nous avons alors $\forall p \in \mathbb{P}_{>5} - \{2\}$, $(v_p(u), v_p(u+2), v_p(u+4)) \in (2\mathbb{N})^3$. Donc, pour tout naturel $m \in \{u, u+2, u+4\}$, il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = M^2$, $m = 3M^2$, $m = 5M^2$ ou $m = 15M^2$.
- Parmi les trois naturels u , $u+2$ et $u+4$, ...
  - il en existe un, et un seul, divisible par 3 , comme on le constate vite en raisonnant modulo 3 ,
  - au plus un est divisible par 5 ,
  - au plus un est un carrée parfait d'après le fait **??**.

Donc, il existe $(M, P, Q) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $\{u, u+2, u+4\} = \{M^2, 3P^2, 5Q^2\}$. Ceci permet de considérer les trois cas suivants qui lèvent tous une contradiction.

- Supposons avoir $u = M^2$.
  (1) Comme $\{u+2, u+4\} = \{3P^2, 5Q^2\}$, nous savons que $3 \nmid (u+3)$ et $5 \nmid (u+3)$, d'où $u+3 = 2^a T^2$ avec $(a, T) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.
  (2) Modulo 4 , $u \equiv M^2 \equiv 1$ car $u \in 2\mathbb{N}+1$, donc $u+3 \equiv 0$, d'où $a \geq 2$.
  (3) Modulo 8 , $u \equiv M^2 \equiv 1$ car $u \in 2\mathbb{N}+1$, donc $u+3 \equiv 4$, d'où $a = 2$.
  (4) Dès lors, $u+3 \in {}^2\mathbb{N}$, puis $(u+3, u) = (4, 1)$ via le fait **??**.
  (5) Forcément $n = u = 1$, mais $v_7(\pi_1^6) = 1$ contredit $\pi_n^6 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
- Supposons maintenant que $u+4 = M^2$.
  Comme $\{u, u+2\} = \{3P^2, 5Q^2\}$, la preuve précédente s'adapte à $(u+1, u+4)$.
- Supposons enfin que $u+2 = M^2$.
  $\{u, u+4\} = \{3P^2, 5Q^2\}$ est impossible d'après ce qui suit en travaillant modulo 4 .
  (1) Si $(u, u+4) = (3P^2, 5Q^2)$, alors $u \equiv 0$ ou 3 , $u+4 \equiv 0$ ou 1 , et $u \equiv \pm 1$ se contredisent.
  (2) Si $(u, u+4) = (5Q^2, 3P^2)$, on obtient une contradiction de façon analogue à la précédente.

$\square$

2. 8 facteurs ?

Fait 2.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$.

3. Sources utilisées

(1) Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré *« n(n+1)...(n+k) est un carré ? »* sur le site `lesmathematiques.net` .

La démonstration du fait **??** *via le principe des tiroirs trouve sa source dans cet échange.*

(2) L'article *« Le produit de 5 entiers consécutifs n'est pas le carré d'un entier. »* de T. Hayashi, Nouvelles Annales de Mathématiques, est consultable via Numdam , la bibliothèque numérique française de mathématiques.

Cet article a inspiré la preuve alternative du fait **??***.*

(3) Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré *« product of six consecutive integers being a perfect numbers »* sur le site `https://math.stackexchange.com` .

La démonstration courte du fait **??** *est donné dans cet échange. Vous y trouverez aussi un très joli argument basé sur les courbes elliptiques rationnelles.*

(4) Un échange consulté le 3 février 2024, et titré *« Proof that the product of 7 successive positive integers is not a square »* sur le site `https://math.stackexchange.com` .

La démonstration courte du fait 1.1 est donné dans cet échange, mais certaines justifications manquent.

4. AFFAIRE À SUIVRE...