BROUILLON - A PROPOS DE LA RÉCURRENCE

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source $\LaTeX$, disponible sur la page
https://github.com/bc-writing/drafts.

Fait 0.1. *La preuve par récurrence s'exprime comme suit où $\mathcal{P}(k)$ désignera n'importe quelle proposition dépendant d'un paramètre naturel $k \in \mathbb{N}$.*

On suppose avoir démontré les deux faits suivants.

- ***Initialisation :*** *$\mathcal{P}(0)$ est vraie.*
- ***Hérédité :*** $\forall k \in \mathbb{N}$, $\left[\mathcal{P}(k) \implies \mathcal{P}(k+1)\right]$.

Sous ces hypothèses, nous pouvons affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Démonstration. Par l'absurde, en considérant le plus petit naturel n_0 tel que $\mathcal{P}(n_0)$ soit fausse, et en notant que $n_0 > 0$. ☐

Dès lors, le schéma de preuve suivant ne reprend pas le schéma précédent.

- **Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité bis :** supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, puis déduisons-en que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

L'hérédité bis est de la forme : $\left[\exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \mathcal{P}(k) \text{ vraie}\right] \implies \left[\mathcal{P}(k+1) \text{ vraie}\right]$.
Ceci peut se réécrire : $\exists k \in \mathbb{N}$, $\left[\mathcal{P}(k) \text{ vraie}\right] \implies \left[\mathcal{P}(k+1) \text{ vraie}\right]$.
De façon équivalente, on a : $\exists k \in \mathbb{N}$, $\left[\mathcal{P}(k)\right] \implies \left[\mathcal{P}(k+1)\right]$.

La deuxième proposition est clairement fausse contrairement à la suivante utilisable au lycée.

- **Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité bis OK :** supposons avoir $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$, montrons alors que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Date: 11 Nov. 2023.