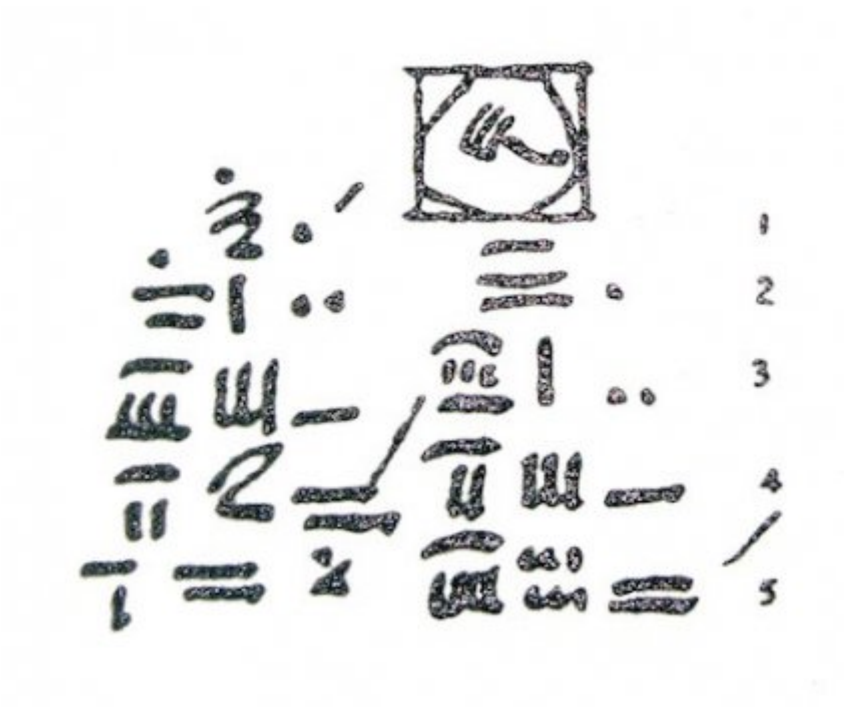
IMAGES DES MATHÉMATIQUES

Ressources pédagogiques : « pour aller moins loin » *(-Ressources-pedagogiques-pour-aller-moins-loin-.html)*

COMMENT MULTIPLIER EN NE CONNAISSANT QUE LA TABLE DE 2 ?

Piste verte *(spip.php?page=mot&id_mot=20)* Le *23 janvier 2021* - Ecrit par Julie Levrault ***(_Julie-Levrault_.html)***, Andrés Navas ***(_Navas-Andres_.html)***
Lire l'article en *(Como-multiplicar-conociendo-apenas-la-tabla-del-2.html)*

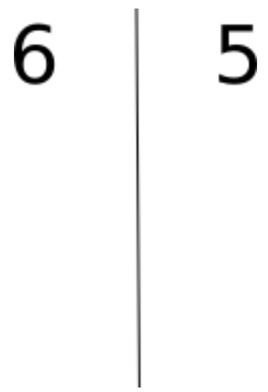


Dans cet autre article ***(Comment-multiplier-sans-connaitre-les-tables-de-multiplication.html)*** nous expliquons que, contrairement à ce que l'on apprend à l'école (tout du moins pour la plupart), il est possible de multiplier sans apprendre par coeur les tables de multiplication (et sans calculatrice...). On évoque alors une méthode ludique et géométrique où le simple fait de savoir additionner nous permet de multiplier. Ici, nous souhaitons parler d'une autre méthode, enseignée encore de nos jours dans les écoles éthiopiennes [1 *(#nb1)*] et jusqu'il y a quelques années dans certaines écoles russes [2 *(#nb2)*].

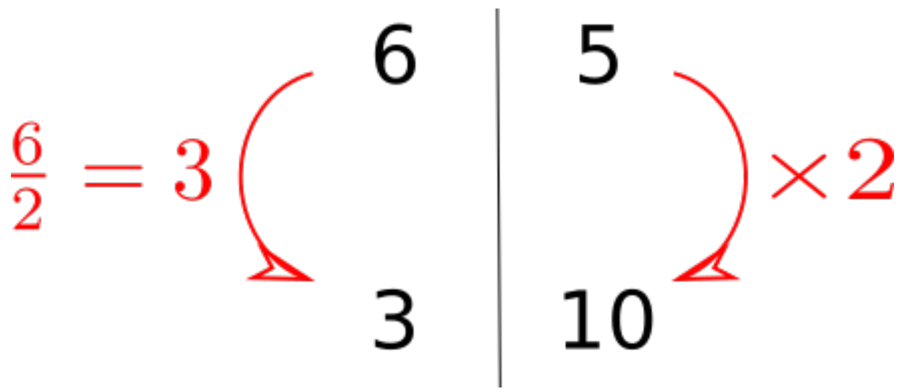
Il suffit de savoir additionner, multiplier par deux et diviser par deux, pour pouvoir multiplier n'importe quels nombres !

Cette méthode, qui nous vient d'Éthiopie et d'Egypte, est décrite dans le papyrus Rhind (écrit par le scribe Ahmès et conservé depuis le XIX siècle au British Museum de Londres). Ce papyrus, dont on voit en tête de l'article la reproduction correspondante, date de quelques siècles avant J.C., et il est considéré comme le document mathématique le plus ancien !

Commençons simplement : 6×5. On fait deux colonnes : on met le premier chiffre dans la colonne de gauche et le deuxième dans celle de droite.



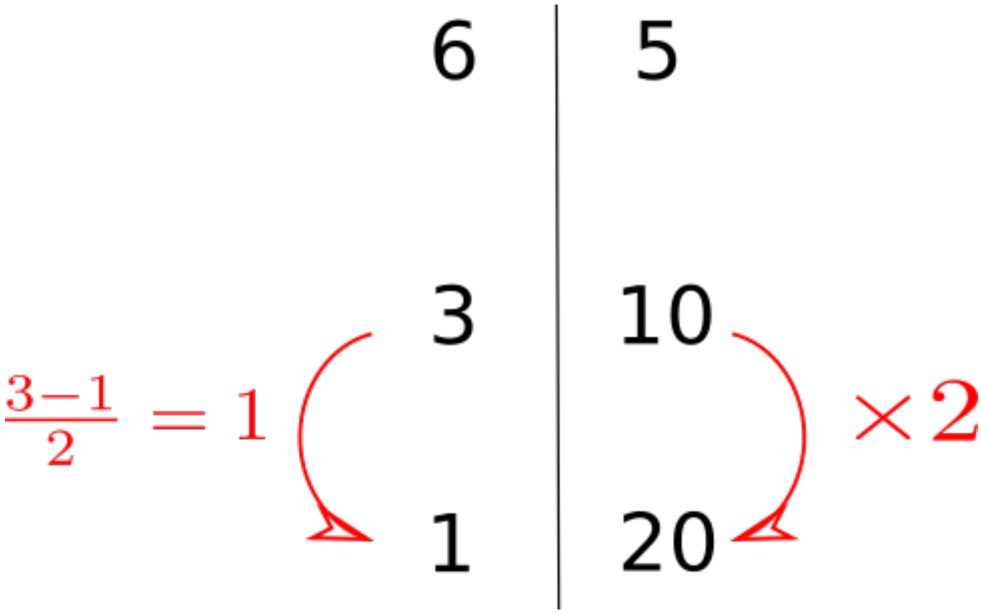
Dans la colonne de gauche on divise par 2, et dans la colonne de droite on multiplie par 2. Cela donne :



Le nombre 3 est impair : il n'est pas divisible par 2 ! Ce que l'on fait alors, c'est qu'on lui retire 1, puis on le divise par 2 :

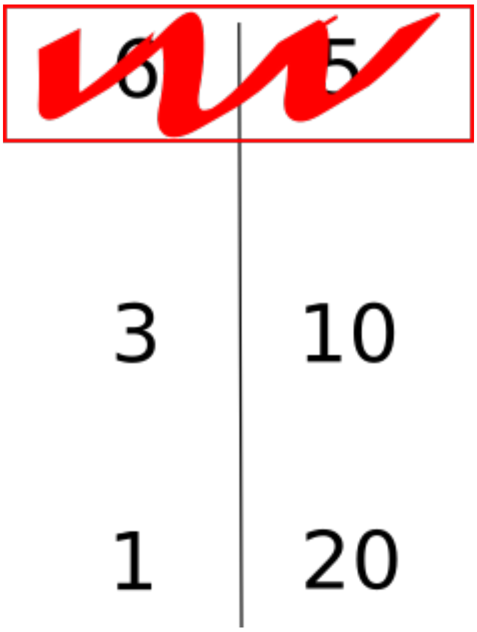
$$\frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Dans la colonne de droite, on continue à multiplier par 2 :



Et maintenant, que vais-je faire ?

Puisqu'on est arrivé à 1, nous regardons toute la colonne de gauche. Il y a des nombres pairs (6) et des nombres impairs (3 et 1). On « enlève » alors toute la ligne qui correspond au nombre pair :



Finalement, on additionne tous les membres restants de la colonne de droite :

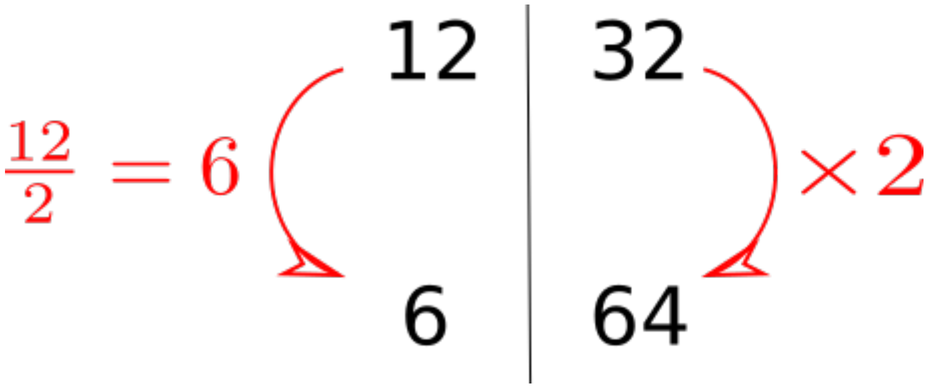
$$10 + 20 = 30.$$

Et voilà !

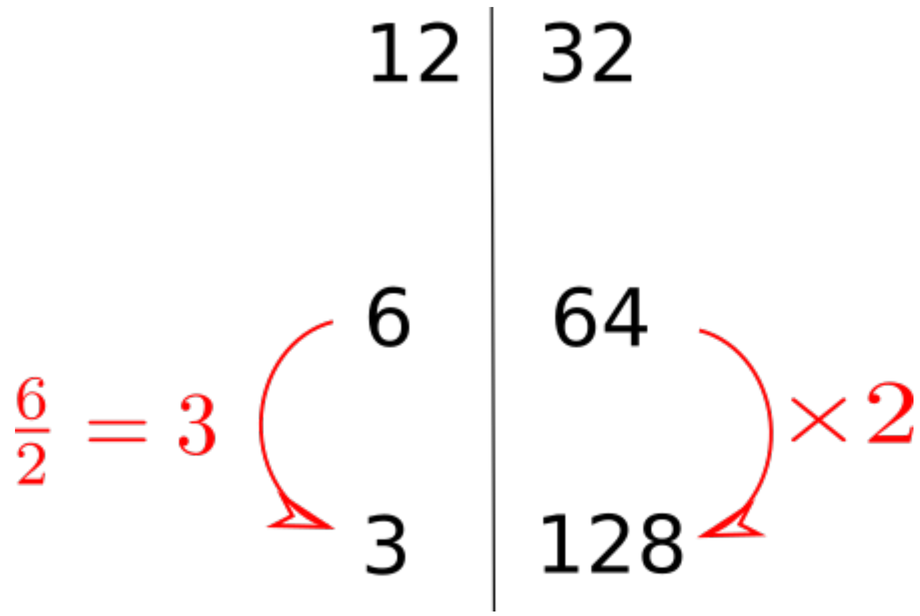
$$6 \times 5 = 30.$$

Cette méthode fonctionne en fait de manière générale.

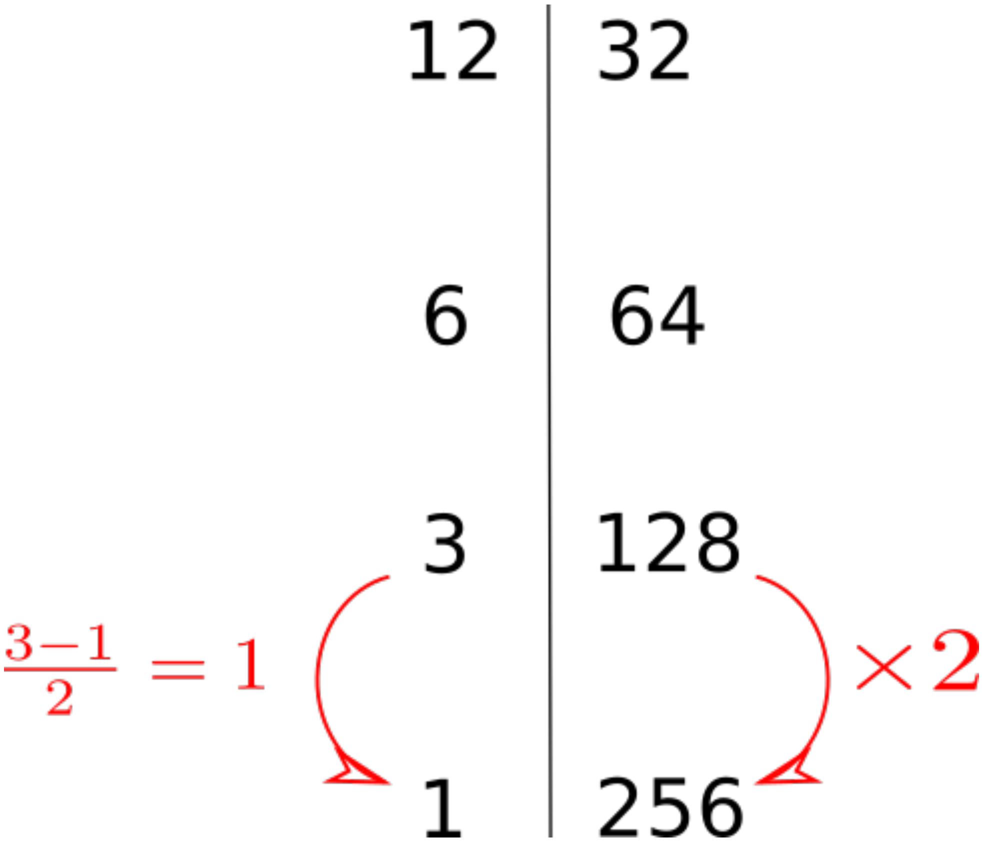
Par exemple, si l'on veut calculer 12×32 :



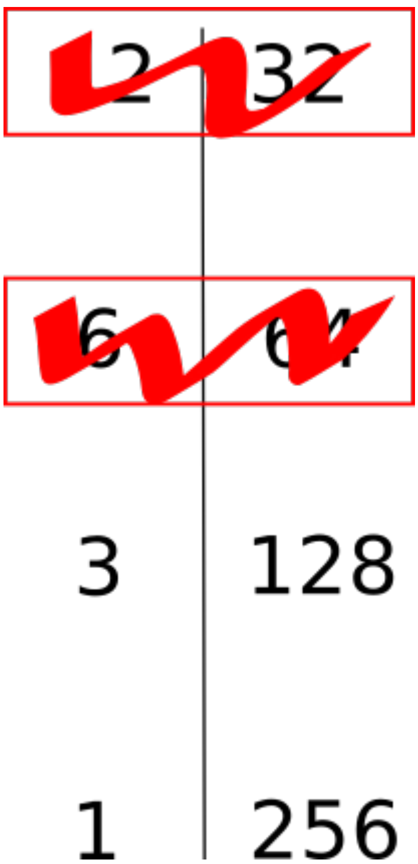
Nous divisons 6 par deux et multiplions 64 par deux :



Nous divisons $3 - 1$ par deux et multiplions 128 par deux :



Et finalement nous supprimons les lignes sur lesquelles le nombre de gauche est pair :



Il nous reste à sommer les nombres restant de la colonne de droite : $128 + 256 = 384$, Donc $12 \times 32 = 384$.

Voici un autre exemple 18×37 :

$$\frac{18}{2}=9 \qquad \begin{array}{c|c} 18 & 37 \\ 9 & 74 \end{array} \qquad \times 2$$

Le chiffre 9 n'étant pas divisible par deux, on lui retire un puis on le divise par deux :

$$\frac{9-1}{2}=4 \qquad \begin{array}{c|c} 18 & 37 \\ 9 & 74 \\ 4 & 148 \end{array} \qquad \times 2$$

On arrive au chiffre 4 qui est une puissance de deux, donc il ne reste plus qu'à diviser successivement par deux jusqu'à obtenir un :

$$\begin{array}{c|c} 18 & 37 \\ 9 & 74 \\ 4 & 148 \\ 2 & 296 \\ 1 & 592 \end{array}$$

On « barre » les lignes dont le nombre de la colonne de gauche est pair :

~~18~~	~~37~~
9	74
~~4~~	~~148~~
~~2~~	~~296~~
1	592

Et on finit par additionner les nombres 74 et 592, donc $18 \times 37 = 74 + 592 = 666$! La multiplication du diable !

Nous vous laissons un exemple plus compliqué en fenêtre cachée, pour vous laisser essayer seuls :

233×121 (javascript:;)

> *Puisque nous devons diviser par deux dans la colonne de gauche, il est plus rapide de calculer* 121×233 *que* 233×121.
>
> | | |
> |---|---|
> | 121 | 233 |
> | 60 | 466 |
> | 30 | 932 |
> | 15 | 1864 |
> | 7 | 3728 |
> | 3 | 7456 |
> | 1 | 14912 |
>
> *Donc* $233 \times 121 = 233 + 1864 + 3728 + 7456 + 14912 = 28193$.

Enfin, dans ce site *(http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/mult_russe.htm)* vous trouverez un simulateur automatique pour tester vos multiplications et en faire encore plus.

Mais pourquoi cela fonctionne-t-il ?

Nous allons l'expliquer sur un exemple, mais bien sûr le même raisonnement fonctionne de manière générale. Regardons à nouveau 12×32. Si nous décomposons 12 en somme de puissances de deux, cela nous donne $12 = 2^2 + 2^3$. Comment peut-on obtenir cette décomposition ? C'est en fait équivalent à la décomposition binaire des nombres, mais nous allons ici expliquer comment la trouver.

Nous savons que $2^3 = 8 < 12 < 2^4 = 16$ donc la décomposition de 12 en somme de puissances de deux s'écrit

$$a2^0 + b2^1 + c2^2 + d2^3.$$

avec a, b, c, d qui valent 0 ou 1. Le nombre 12 est pair, donc 2^0 n'apparaît pas dans sa décomposition, d'où $a = 0$ et

$$12 = b2^1 + c2^2 + d2^3.$$

.

Divisons 12 par deux. Cela nous donne

$$6 = \frac{12}{2} = b2^0 + c2^1 + d2^2.$$

Le chiffre 6 étant pair, $b = 0$ et $12 = c2^2 + d2^3$, c'est-à-dire $6 = c2^1 + d2^2$.

Divisons 6 par deux. Cela nous donne $3 = \frac{6}{2} = c2^0 + d2^1$, et trois est impair donc $c = 1$! Nous avons donc $12 = 2^2 + d2^3$ et $3 = 2^0 + d2^1 = 1 + d2^1$.

Maintenant, puisque 3 est impair, divisons $3 - 1$ par deux, ce qui nous donne

$$\frac{3-1}{2} = \frac{d2^1}{2} = d.$$

Donc $d = 1$ et $12 = 2^2 + 2^3$.

Tout à l'heure, lorsque nous divisions par deux d'un côté et multiplions par deux de l'autre, nous finissions par « barrer » les lignes dont les nombres de la colonne de gauche sont pairs. Vous l'avez compris, lorsque nous « barrons » les lignes dont les nombres de la colonne de gauche sont pairs, nous « barrons » les puissances de deux qui n'apparaissent pas dans la décomposition de 12 en somme de puissances de deux !

Nous gardons les lignes qui correspondent à 2^2 et 2^3, les seules puissances de deux qui apparaissent dans la décomposition de 12 !

Donc lorsque nous sommons 128 et 256, en fait nous sommons 32×2^2 et 32×2^3. Nous effectuons donc l'opération $32 \times 2^2 + 32 \times 2^3 = 32 \times (2^2 + 2^3) = 32 \times 12$. C'est pour cela que ça marche !

Nous terminerons avec un dernier exemple en fenêtre cachée, essayez le !

8263×3802 *(javascript:;)*

✗	3802	8263
	1901	16526
✗	950	33052
	475	66104
	237	132208
✗	118	264416
	59	528832
	29	1057664
✗	14	2115328
	7	4230656
	3	8461312
	1	16922624

On somme tout ce qu'il y a à sommer et cela nous donne $8263 \times 3802 = 31415926$. *Oh ! Mais* $\pi = 3,1415926...$

Post-scriptum :

La rédaction d'Images des Mathématiques et les auteurs de l'article remercient les relecteurs dont les noms ou les pseudos sont Eric Heurtain, Mario et Clément Caubel pour leur relecture attentive et leurs commentaires constructifs.

Article édité par Philippe Colliard *(_Philippe-Colliard_.html)*

NOTES

[1 *(#nh1)*] Voir par exemple cette vidéo *(https://www.youtube.com/watch?v=Nc4yrFXw20Q)* (en anglais).

[2 *(#nh2)*] Voir cette vidéo *(https://www.youtube.com/watch?v=HJ_PP5rqLg0)* (aussi en anglais).