

BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTRIERS CONSÉCUTIFS – RÉOLUTIONS À LA MAIN

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons « Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International ».



TABLE DES MATIÈRES

1. Ce qui nous intéresse	2
2. Notations utilisées	2
3. Avec 1 seul facteur	2
4. Avec 2 facteurs	2
5. Avec 3 facteurs	3
6. Avec 4 facteurs	3
7. Avec 5 facteurs	4
8. Sources utilisées	6
9. AFFAIRE À SUIVRE...	7

1. CE QUI NOUS INTÉRESSE

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers »¹, Paul Erdos démontre que pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit d'entiers consécutifs $\prod_{i=0}^k (n+i)$ n'est jamais le carré d'un entier.

Dans ce document, nous proposons quelques cas particuliers résolues de façon « adaptative ».

2. NOTATIONS UTILISÉES

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ et ${}^2\mathbb{N}_* = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
- $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^k (n+i)$. Par exemple, nous avons $\pi_n^0 = n$ et $\pi_n^1 = n(n+1)$.
- \mathbb{P} désigne l'ensemble des nombres premiers.
- $\forall (p; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p -adique de n , c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n , contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m .
- $2\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
- $2\mathbb{N} + 1$ désigne l'ensemble des nombres naturels impairs.

3. AVEC 1 SEUL FACTEUR

Via $N^2 - M^2 = (N - M)(N + M)$, il est immédiat de noter que $\forall (N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $N > M$, alors $N^2 - M^2 \geq 3$. Le fait suivant précise ceci.

Fait 3.1. $\forall (N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $N > M$, alors $N^2 - M^2 = \sum_{k=M+1}^N (2k-1)$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser $N^2 = \sum_{k=1}^N (2k-1)$. □

4. AVEC 2 FACTEURS

Fait 4.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Il suffit de noter que $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$. □

Preuve alternative no.1. Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Clairement $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons : $v_p(\pi_n^1) \in 2\mathbb{N}$. Or $p \in \mathbb{P}$ ne peut diviser à la fois n et $n+1$. Nous savons donc que $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+1) \in 2\mathbb{N}$, autrement dit $(n, n+1) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. D'après le fait 3.1, nous savons que ceci est impossible. □

Preuve alternative no.2. Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) = N^2$ où $N \in \mathbb{N}^*$. Les équivalences suivantes donnent alors une contradiction.

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).

$$\begin{aligned}
 & n(n+1) = N^2 \\
 \iff & 2 \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^N (2k-1) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} n(n+1) = 2 \sum_{k=1}^n k \text{ et } N^2 = \sum_{k=1}^N (2k-1). \\
 \iff & \sum_{k=1}^n 2k = \sum_{k=1}^N 2k - N \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} N > n \\
 \iff & \sum_{k=n+1}^N 2k - N = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} N > 0 \text{ rend impossible la dernière égalité.} \\
 \iff & \sum_{k=n+1}^{N-1} 2k + N = 0
 \end{aligned}$$

□

5. AVEC 3 FACTEURS

Fait 5.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Posant $m = n+1$, nous avons $\pi_n^2 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Comme $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(\pi_n^2) \in 2\mathbb{N}$, et comme de plus $p \in \mathbb{P}$ ne peut diviser à la fois m et m^2-1 , nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(m^2-1) \in 2\mathbb{N}$, d'où $(m, m^2-1) \in {}^2\mathbb{N}_* \times {}^2\mathbb{N}_*$. Or, d'après le fait 3.1, $m^2-1 \in {}^2\mathbb{N}$ est impossible. □

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Comme $p \in \mathbb{P}_{>2}$ ne peut diviser au maximum qu'un seul des trois facteurs n , $(n+1)$ et $(n+2)$, nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}_{>2}, (v_p(n), v_p(n+1), v_p(n+2)) \in (2\mathbb{N})^3$. Mais que se passe-t-il pour $p=2$?

Supposons d'abord $n \in 2\mathbb{N}$.

- Posant $n = 2m$, nous avons $\pi_n^2 = 4m(2m+1)(m+1)$, d'où $m(2m+1)(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Comme $v_2(2m+1) = 0$, nous savons que $2m+1 \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Donc $m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$, mais le fait 4.1 interdit cela.

Supposons maintenant $n \in 2\mathbb{N}+1$.

- Nous savons que $n \in {}^2\mathbb{N}_*$ via $v_2(n) = 0$.
- Dès lors, on obtient $(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$, mais de nouveau ceci contredit le fait 4.1. □

6. AVEC 4 FACTEURS

Fait 6.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Nous pouvons ici faire les manipulations algébriques naturelles suivantes.

$$\begin{aligned}
 \pi_n^3 &= n(n+3) \cdot (n+1)(n+2) \\
 &= (n^2+3n) \cdot (n^2+3n+2) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} m = n^2+3n \\
 &= m(m+2) \\
 &= m^2+2m \\
 &= (m+1)^2-1
 \end{aligned}$$

Comme $m > 0$, d'après le fait 3.1, $(m+1)^2-1 \notin {}^2\mathbb{N}$, c'est-à-dire $\pi_n^3 \notin {}^2\mathbb{N}$. □

Une preuve alternative. En « symétrisant » certaines expressions, nous obtenons les manipulations algébriques « moins magiques » suivantes.

$$\begin{aligned}
\pi_n^3 &= n(n+1)(n+2)(n+3) \\
&= \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} x = n + \frac{3}{2} \\
&= \left(x^2 - \frac{9}{4}\right)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} y = x^2 - \frac{5}{4} \\
&= (y-1)(y+1) \\
&= y^2 - 1 \\
&= \left(\left(n + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right)^2 - 1 \\
&= (n^2 + 3n + 1)^2 - 1
\end{aligned}$$

□

7. AVEC 5 FACTEURS

Fait 7.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $(v_p(n), v_p(n+1), v_p(n+2), v_p(n+3), v_p(n+4)) \in (2\mathbb{N})^5$. Pour $p = 2$ et $p = 3$, nous avons les alternatives suivantes pour chaque facteur $(n+i)$ de π_n^3 .

- **[A1]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A2]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times (2\mathbb{N} + 1)$
- **[A3]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times 2\mathbb{N}$
- **[A4]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times (2\mathbb{N} + 1)$

Comme nous avons cinq facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions très facilement.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A1]**.

Dans ce cas, on sait juste que $(n+i, n+i') \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Or $n \notin {}^2\mathbb{N}$ puisque sinon nous aurions $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$ via $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$, mais ceci ne se peut pas d'après le fait 6.1. De même, $n+4 \notin {}^2\mathbb{N}$. Dès lors, nous avons $\{n+i, n+i'\} \subseteq \{n+1, n+2, n+3\}$ qui donne deux carrés parfaits non nuls éloignés de moins de 3, et ceci contredit le fait 3.1.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A2]**.

Dans ce cas, le couple de facteurs est $(n, n+3)$, ou $(n+1, n+4)$.

- (1) Supposons d'abord que n et $(n+3)$ vérifient **[A2]**.

Comme $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+3) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(n) \in 2\mathbb{N} + 1$ et $v_3(n+3) \in 2\mathbb{N} + 1$, nous avons $n = 3N^2$ et $n+3 = 3M^2$ où $(N, M) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Or, ceci donne $3 = 3M^2 - 3N^2$, puis $M^2 - N^2 = 1$ qui contredit le fait 3.1.

- (2) De façon analogue, on ne peut pas avoir $(n+1)$ et $(n+4)$ vérifiant **[A2]**.

- Deux facteurs différents $(n + i)$ et $(n + i')$ vérifient **[A3]**.

Comme dans le point précédent, c'est impossible car on aurait $2 = 2M^2 - 2N^2$, ou $4 = 2M^2 - 2N^2$. En effet, ici les couples possibles sont $(n, n+2)$, $(n, n+4)$, $(n+2, n+4)$ et $(n+1, n+3)^2$.

- Deux facteurs différents $(n + i)$ et $(n + i')$ vérifient **[A4]**.

Ceci donne deux facteurs différents divisibles par 6, mais c'est impossible. \square

Bien que longue, la preuve suivante est simple à comprendre car elle ne fait que dérouler le fil des faits découverts.

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Posant $m = n+2$, nous avons $\pi_n^4 = (m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) = m(m^2-1)(m^2-4)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. On notera dans la suite $u = m^2 - 1$ et $q = m^2 - 4$.

Supposons d'abord que $m \in {}^2\mathbb{N}_*$.

- De $muq \in {}^2\mathbb{N}_*$, nous déduisons $uq \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Comme $u - q = 3$, nous savons que $u \wedge q \in \{1, 3\}$.
- Si $u \wedge q = 1$, alors $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, d'où $(u, q) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Le fait 3.1 impose d'avoir $(u, q) = (4, 1)$, d'où $m^2 - 1 = 4$, mais ceci est impossible³.
- Si $u \wedge q = 3$, alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(u) \in 2\mathbb{N} + 1$ et $v_3(q) \in 2\mathbb{N} + 1$. Donc $u = 3U^2$ et $q = 3Q^2$ avec $(U, Q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Or $u - q = 3$ donne $U^2 - Q^2 = 1$, et le fait 3.1 nous indique une contradiction.

Supposons maintenant que $m \notin {}^2\mathbb{N}_*$.

- Nous avons vu ci-dessus que $u \notin {}^2\mathbb{N}$ et $q \notin {}^2\mathbb{N}$. On peut donc écrire $m = \alpha M^2$, $u = \beta U^2$, $q = \gamma Q^2$ où $(M, U, Q) \in (\mathbb{N}^*)^3$, et $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{N}_{>1})^3$, le dernier triplet étant formé d'entiers sans facteur carré.
- Notons que $\beta \neq \gamma$ car, dans le cas contraire, $3 = u - q = \beta(U^2 - Q^2)$ fournirait $\beta = 3$ puis $U^2 - Q^2 = 1$, et ceci contredirait le fait 3.1.
- Nous avons $m \wedge u = 1$, $m \wedge q \in \{1, 2, 4\}$ et $u \wedge q \in \{1, 3\}$ avec $m \wedge u = m \wedge q = u \wedge q = 1$ impossible car sinon on aurait $(m, u, q) \in ({}^2\mathbb{N})^3$ via $muq \in {}^2\mathbb{N}$.
- Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $(v_p(m), v_p(u), v_p(q)) \in (2\mathbb{N})^3$.
- Les points précédents donnent $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$ avec de plus $\beta \neq \gamma$, ainsi que $\alpha \wedge \beta = 1$, $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2\}$ et $\beta \wedge \gamma \in \{1, 3\}$. Notons au passage que $\alpha \wedge \beta = 1$ implique $(\alpha, \beta) = (2, 3)$, ou $(\alpha, \beta) = (3, 2)$. Via le tableau « mécanique » ci-après, nous obtenons que forcément $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$ ou $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$. Le plus dur est fait !

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	Statut
2	3	2	1	2	1	✓
2	3	6	1	2	3	✓
3	2	3	1	3	1	✗
3	2	6	1	3	2	✗

2. Rien n'empêche d'avoir n , $(n+2)$ et $(n+4)$ vérifiant tous les trois **[A3]**.

3. On peut aussi noter que le fait 5.1 lève une contradiction car nous avons $m \in {}^2\mathbb{N}$ et $u \in {}^2\mathbb{N}$ qui donnent $(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$

- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$ nous donne $m = 2M^2$, $u = 3U^2$ et $q = 2Q^2$, d'où la contradiction $3 \cdot 4M^2U^2Q^2 \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$ nous donne $m = 2M^2$, $m^2 - 1 = 3U^2$ et $m^2 - 4 = 6Q^2$, mais ce qui suit lève une autre contradiction.
 - Travaillons modulo 3. Comme $m = 2M^2$, nous avons $m \equiv 0$ ou $m \equiv -1$. Or $m^2 - 1 = 3U^2$ donne $m^2 \equiv 1$, d'où $m \equiv -1$, puis $3 \mid m - 2$, et enfin $6 \mid m - 2$ puisque m est pair.
 - Posant $m - 2 = 6r$ et notant $s = m + 2$, nous avons $6rs = 6Q^2$, puis $rs = Q^2$.
 - $s \notin {}^2\mathbb{N}$, car dans le cas contraire, nous aurions $(m - 2)(m - 1)m(m + 1) \in {}^2\mathbb{N}$ via $(m - 2)(m - 1)m(m + 1)(m + 2) \in {}^2\mathbb{N}$, mais ceci ne se peut pas d'après le fait 6.1.
 - Les deux résultats précédents donnent $(\pi, R, S) \in \mathbb{N}_{>1} \times (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $r = \pi R^2$ et $s = \pi S^2$ avec π sans facteur carré.
 - $4 = s - 6r = \pi(S^2 - 6R^2)$ donne $\pi = 2$, d'où $m + 2 = 2S^2$.
 - Finalement, $m = 2M^2$ et $m + 2 = 2S^2$ donnent $2 = 2(S^2 - M^2)$, soit $1 = S^2 - M^2$, ce qui contredit le fait 3.1. □

8. SOURCES UTILISÉES

- (1) Un échange titré « $n(n+1)\dots(n+k)$ est un carré ? » sur le site lesmathematiques.net.
La démonstration du fait 7.1 via le principe des tiroirs trouve sa source dans cet échange.
- (2) L'article « *Le produit de 5 entiers consécutifs n'est pas le carré d'un entier.* » de T. Hayashi, Nouvelles Annales de Mathématiques, est consultable via Numdam, la bibliothèque numérique française de mathématiques.
Cet article a inspiré la preuve alternative du fait 7.1.

9. AFFAIRE À SUIVRE...
