BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS – UNE MÉTHODE EFFICACE

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page ***https://github.com/bc-writing/drafts***.

Mentions « légales »

Table des matières

Date : 25 Jan. 2024 – 7 Fév. 2024.

1. Ce qui nous intéresse

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers » [1], Paul Erdos démontre que pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit de $(k+1)$ entiers consécutifs $n(n+1)\cdots(n+k)$ n'est jamais le carré d'un entier.

Il est facile de trouver sur le web des preuves à la main de $n(n+1)\cdots(n+k) \notin {}^2_*\mathbb{N}$ pour $k \in [\![2\,;8]\!]$. Bien que certaines de ces preuves soient très sympathiques, leur lecture ne fait pas ressortir de schéma commun de raisonnement. Dans ce document, nous allons tenter de limiter au maximum l'emploi de fourberies déductives en présentant une méthode très élémentaire [2], efficace, et semi-automatisable, pour démontrer, avec peu d'efforts cognitifs, les premiers cas d'impossibilité.

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).
2. Cette méthode s'appuie sur une représentation trouvée dans un message archivé : voir la section 3.

2. Et après ?

La méthode présentée ci-dessus permet de faire appel à un programme pour ne traiter à la main, et à la sueur des neurones, que certains tableaux de Vogler problématiques comme nous avons dû le faire dans la section **??**. Expliquons cette tactique semi-automatique en traitant le cas de 6 facteurs.

(1) On raisonne par l'absurde en supposant que $\pi_n^6 \in {}^2_*\mathbb{N}$.

(2) On fabrique la liste $\mathcal{P}$ des diviseurs premiers stricts de 6 : nous avons juste 2 , 3 et 5 . Notons qu'avec 7 facteurs, nous n'aurions pas garder 7 car il est forcément de valuation paire dans chaque facteur $(n+i)$ de π_n^7 si $\pi_n^7 \in {}^2_*\mathbb{N}$.

(3) Pour chaque élément p de $\mathcal{P}$, on construit la liste $\mathcal{V}_p$ des tableaux de Vogler partiels relatifs à p et $\pi_n^6 \in {}^2_*\mathbb{N}$.

(4) Via les listes $\mathcal{V}_p$, on calcule toutes les multiplications de tous les tableaux de Vogler partiels relatifs à tous les nombres p différents, et pour chacune d'elles, on ne la garde que si elle ne vérifie aucune des conditions suivantes, celles du dernier cas devant être indiquées à la main au programme.

   (a) Le tableau « produit » commence, ou se termine, par la valeur 1 . Dans ce cas, on sait par récurrence que le tableau produit n'est pas possible (voir le fait **??**).

   (b) L'une des interdictions du fait **??** est validée par le tableau « produit » .

   (c) Le tableau « produit » contient un sous-tableau que nous savons impossible suite à un raisonnement humain fait *localement* , c'est-à-dire que seul les facteurs indiqués dans le sous-tableau, et le sous-tableau lui-même sont utilisés pour raisonner. Comme c'est ce qui a été fait en fin de section **??**, nous pouvons indiquer les deux sous-tableaux impossibles suivants.

$m + \bullet$	0	1	2	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Deux sous-tableaux de Vogler impossibles.

YAPLUKA !

Dans le dépôt en ligne associé à ce document est placé un programme nommé `vogler-6.py` qui nous fournit les informations suivantes.

3. Sources utilisées

Ce document n'aurait pas vu le jour sans la source suivante.

(1) Une discussion archivée consultée le 28 janvier 2024 :
`https://web.archive.org/web/20171110144534/http://mathforum.org/library/drmath/view/65589.html` .

Cette discussion utilise ce que nous avons nommé les tableaux de Vogler, mais le côté semi-mécanisable de leur utilisation n'est pas souligné.

4. AFFAIRE À SUIVRE...