A la recherche des naturels n forcément impair tels que $n \mid \left(2^n + 1\right)$.

1 Les puissances de 3 sont dans la place

Démontrons rapidement que $n \mid \left(2^n + 1\right)$ dès que $n = 3^k$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ car le cas $k = 0$ est trivial.

Initialisation pour $k = 1$.
Clairement, $3 \mid \left(2^3 + 1\right)$.

Étape de récurrence.
On a les implications logiques suivantes.

$$
\begin{aligned}
& (3^k) \mid \left(2^{(3^k)} + 1\right) \\
\implies & \exists m \in \mathbb{Z} \,.\, \left[2^{(3^k)} + 1 = m \cdot 3^k\right] \\
\implies & \exists m \in \mathbb{Z} \,.\, \left[2^{(3^k)} = -1 + m \cdot 3^k\right] \\
\implies & \exists m \in \mathbb{Z} \,.\, \left[\left(2^{(3^k)}\right)^3 = \left(-1 + m \cdot 3^k\right)^3\right] \\
\implies & \exists m \in \mathbb{Z} \,.\, \left[2^{\left(3^{k+1}\right)} = -1 + 3 \cdot m \cdot 3^k - 3 \cdot \left(m \cdot 3^k\right)^2 + \left(m \cdot 3^k\right)^3\right] \\
\implies & 2^{\left(3^{k+1}\right)} \equiv -1 \mod \left(3^{k+1}\right)
\end{aligned}
$$

Besoin de $k \neq 0$ ici.

En résumé, $(3^k) \mid \left(2^{(3^k)} + 1\right)$ implique $\left(3^{k+1}\right) \mid \left(2^{\left(3^{k+1}\right)} + 1\right)$.

Conclusion : ...

Seul truc intéressant dans cette affaire de niveau TS de l'ancien temps : calcul d'une limite de suite dans l'anneau des entiers 3-adique.

2 A la recherche d'autres solutions

Supposons que $d \mid \left(2^d + 1\right)$.
Alors pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\left(-1 + m \cdot d^k\right)^d = -1 + d \cdot m \cdot d^k + x \cdot d^{k+1}$ car d est impair et $2k \geq k + 1$. Ceci permet de voir que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $d^k \mid \left(2^{(d^k)} + 1\right)$ via une récurrence.

Une recherche brutale de solutions du type $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$, avec p_i premier, nous donne les solutions suivantes.