

# CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTRIERS CONSÉCUTIFS – DES PREUVES HUMAINES FACILES

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons « Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International ».



---

## TABLE DES MATIÈRES

1.	Ce qui nous intéresse	2
2.	Notations utilisées	2
3.	Les carrés parfaits	3
3.1.	Structure	3
3.2.	Distance entre deux carrés parfaits	3
4.	Avec 2 facteurs	4
5.	Avec 3 facteurs	4
6.	Avec 4 facteurs	4
7.	Avec 5 facteurs	4
8.	Avec 6 facteurs	5
9.	Avec 7 facteurs	6
10.	Avec 8 facteurs	7
11.	Avec 9 facteurs	8
12.	Avec 10 facteurs	9
13.	Avec 11 facteurs	11
14.	Avec 12 facteurs	11
15.	Avec 13 facteurs	12
16.	Sources utilisées	13

## 1. CE QUI NOUS INTÉRESSE

Dans l'article « *Note on Products of Consecutive Integers* »<sup>1</sup>, Paul Erdős démontre que pour tout couple  $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , le produit de  $(k+1)$  entiers consécutifs  $n(n+1) \cdots (n+k)$  n'est jamais le carré d'un entier. Plus précisément, l'argument général de Paul Erdős est valable pour  $k+1 \geq 100$ , soit à partir de 100 facteurs.

Dans ce document, nous donnons les preuves les plus simples possibles de quelques cas particuliers. Quitte à nous répéter, nous avons rédigé au complet chaque preuve jusqu'au cas de 10 facteurs, ceci permettant au lecteur de piocher des preuves au gré de ses envies.

**Remarque 1.1.** *Vous trouverez dans mon document « Carrés parfaits et produits d'entiers consécutifs – Des solutions à la main » d'autres preuves, plus ou moins efficaces, mais toutes intéressantes dans leur approche.*

## 2. NOTATIONS UTILISÉES

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- $\forall (n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2, \pi_n^k = \prod_{i=0}^{k-1} (n+i)$ .

Par exemple,  $\pi_n^1 = n$ ,  $\pi_n^2 = n(n+1)$  et  $\pi_{n+2}^4 = (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$ .

- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$  est l'ensemble des carrés parfaits. On note aussi  ${}^2_*\mathbb{N} = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$ .  
 $\mathbb{N}_{sf}$  est l'ensemble des naturels non nuls sans facteur carré<sup>2</sup>.
- $\mathbb{P}$  désigne l'ensemble des nombres premiers.  
 $\forall (p; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*, v_p(n) \in \mathbb{N}$  est la valuation  $p$ -adique de  $n$ , c'est-à-dire  $p^{v_p(n)} \mid n$  et  $p^{v_p(n)+1} \nmid n$ , autrement dit  $p^{v_p(n)}$  divise  $n$ , contrairement à  $p^{v_p(n)+1}$ .
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, n \wedge m$  désigne le PGCD de  $n$  et  $m$ .
- $2\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.  
 $2\mathbb{N} + 1$  est l'ensemble des nombres naturels impairs.
- $(a \pm b)$  est un raccourci pour  $(a+b)(a-b)$ .

---

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).

2. En anglais, on dit « square free ».

## 3. LES CARRÉS PARFAITS

## 3.1. Structure.

**Fait 3.1.**  $n \in {}^2\mathbb{N}$  si, et seulement si,  $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ .

*Démonstration.* Immédiat à valider. □

**Fait 3.2.**  $\forall n \in {}^2\mathbb{N}$ , s'il existe  $m \in {}^2\mathbb{N}$  tel que  $n = fm$  alors  $f \in {}^2\mathbb{N}$ .

*Démonstration.*  $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(fm) \in 2\mathbb{N}, v_p(m) \in 2\mathbb{N}$  et  $v_p(fm) = v_p(f) + v_p(m)$  donnent  $v_p(f) \in 2\mathbb{N}$ . □

**Fait 3.3.**  $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , si  $a \wedge b = 1$  et  $ab \in {}^2\mathbb{N}$ , alors  $a \in {}^2\mathbb{N}$  et  $b \in {}^2\mathbb{N}$ .

*Démonstration.*  $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(ab) \in 2\mathbb{N}$ , et  $p$  ne peut diviser à la fois  $a$  et  $b$ , donc  $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(a) \in 2\mathbb{N}$  et  $v_p(b) \in 2\mathbb{N}$ , autrement dit  $(a, b) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$ . □

**Fait 3.4.** Soit  $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  tel que  $ab \in {}^2\mathbb{N}$ , ainsi que  $(\alpha, \beta, A, B) \in (\mathbb{N}_{sf})^2 \times \mathbb{N}^2$  tel que  $a = \alpha A^2$  et  $b = \beta B^2$ . Nous avons alors forcément  $\alpha = \beta$ .

*Démonstration.* Le fait 3.2 donne  $\alpha\beta \in {}^2\mathbb{N}$ . De plus,  $\forall p \in \mathbb{P}$ , nous avons  $v_p(\alpha) \in \{0, 1\}$  et  $v_p(\beta) \in \{0, 1\}$ . Finalement,  $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(\alpha) = v_p(\beta)$ , autrement dit  $\alpha = \beta$ . □

## 3.2. Distance entre deux carrés parfaits.

**Fait 3.5.** Soit  $(M, N) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  tel que  $N > M$ .

(1)  $N^2 - M^2 \geq 2N - 1$ , d'où l'impossibilité d'avoir  $N^2 - M^2 < 3$ .

(2) Notons  $nb_{sol}$  le nombre de solutions  $(M, N) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  de  $N^2 - M^2 = \delta$ .

Pour  $\delta \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$ , nous avons :

(a)  $nb_{sol} = 0$  si  $\delta \in \{1, 2, 4, 6, 10\}$ .

(b)  $nb_{sol} = 1$  si  $\delta \in \{3, 5, 7, 8, 9\}$ . Ainsi,  $N^2 - M^2 = 3$  uniquement si  $(M, N) = (1, 2)$ .

*Démonstration.*

(1) Comme  $N - 1 \geq M$ , nous obtenons :  $N^2 - M^2 \geq N^2 - (N - 1)^2 = 2N - 1$ .

(2) Nous avons  $2N - 1 \leq \delta$ , soit  $N \leq \frac{\delta + 1}{2}$ . Ceci permet de comprendre le programme Python donné dans la page suivante qui sert à obtenir facilement les nombres de solutions indiqués. □

```
from math import sqrt, floor

# N**2 - M**2 = diff ?
def sol(diff):
    solfound = []

    for N in range(1, (diff + 1) // 2 + 1):
        M_square = N**2 - diff

        if M_square > 0:
            M = floor(sqrt(M_square))

            if M != 0 and M**2 == M_square:
                solfound.append((M, N))

    return solfound
```

## 4. AVEC 2 FACTEURS

**Fait 4.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1) \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Preuve.* Il suffit de noter que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$ .  $\square$

## 5. AVEC 3 FACTEURS

**Fait 5.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2) \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Preuve.* Supposons que  $\pi_n^3 \in {}^2\mathbb{N}$ .

Posons  $m = n+1$  pour « symétriser » la formule. Ceci donne  $\pi_n^3 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$  où  $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Comme  $m \wedge (m^2-1) = 1$ , le fait 3.3 donne  $(m, m^2-1) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$ . Or,  $m^2-1 \in {}^2\mathbb{N}$  est impossible d'après le fait 3.5.  $\square$

## 6. AVEC 4 FACTEURS

**Fait 6.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Preuve.* En « symétrisant » la formule, nous obtenons les manipulations algébriques naturelles suivantes qui vont nous permettre de conclure

$$\begin{aligned}
 \pi_n^4 &= n(n+1)(n+2)(n+3) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} x = n + \frac{3}{2} \\
 &= \left(x \pm \frac{3}{2}\right) \left(x \pm \frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} y = x^2 - \frac{5}{4} \text{ où } \frac{5}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{4}\right) \\
 &= (y \pm 1) \\
 &= y^2 - 1 \\
 &= (n^2 + 3n + 1)^2 - 1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = \left(n + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = n^2 + 3n + 1 \\ m = n^2 + 3n + 1 \end{array} \\
 &= m^2 - 1
 \end{aligned}$$

Comme  $m > 0$ ,  $m^2 - 1 \notin {}^2\mathbb{N}$  d'après le fait 3.5, donc  $\pi_n^4 \notin {}^2\mathbb{N}$ .  $\square$

## 7. AVEC 5 FACTEURS

**Fait 7.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2\mathbb{N}$ .

La preuve suivante s'inspire directement d'une démonstration citée via une source dans un échange sur <https://math.stackexchange.com> (voir la section 16).

*Preuve.* Supposons que  $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}$ .

Clairement,  $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 5}, \forall i \in \llbracket 0; 4 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ . D'après le fait 3.2, on doit s'intéresser à  $p \in \{2, 3\}$ , mais on peut observer très grossièrement qu'au maximum deux facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^5$  sont divisibles par 3, donc au moins 3 facteurs sont de valuation  $p$ -adique paire dès que  $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ . Ces facteurs vérifient alors l'une des deux alternatives suivantes, chacune d'elles levant une contradiction.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  sont de valuations 2-adiques impairs.

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (2M^2, 2N^2)$  avec  $|2(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$ , c'est-à-dire  $|N^2 - M^2| \in \{1, 2\}$ , mais c'est impossible d'après le fait 3.5.

- Deux facteurs différents  $(n + i)$  et  $(n + i')$  sont de valuations 2-adiques pairs.

Dans ce cas,  $(n + i, n + i') = (M^2, N^2)$  avec  $|N^2 - M^2| \in \llbracket 1 ; 4 \rrbracket$ , mais ceci n'est possible que si  $|N^2 - M^2| = 3$  d'après le fait 3.5 qui donne aussi que soit  $(M, N) = (1, 2)$ , soit  $(M, N) = (2, 1)$ . Ceci impose d'avoir  $n = 1$ , mais  $\pi_1^5 = 5! \notin {}^2\mathbb{N}$  car  $v_5(5!) = 1$ .  $\square$

## 8. AVEC 6 FACTEURS

**Fait 8.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^6 \notin {}^2\mathbb{N}$ .

La démonstration suivante se trouve dans l'article « Solution of a Problem »<sup>3</sup> de G. W. Hill et J. E. Oliver. Une petite simplification a été faite pour arriver à  $\pi_n^6 = (a - 4)a(a + 2)$ .

*Preuve.* Supposons que  $\pi_n^6 \in {}^2\mathbb{N}$ .

Commençons par de petites manipulations algébriques où la première modification fait apparaître le même coefficient pour  $n$  dans chaque parenthèse.

$$\begin{aligned} \pi_n^6 &= n(n + 5) \cdot (n + 1)(n + 4) \cdot (n + 2)(n + 3) \\ &= (n^2 + 5n)(n^2 + 5n + 4)(n^2 + 5n + 6) \\ &= x(x + 4)(x + 6) \\ &= (a - 4)a(a + 2) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = n^2 + 5n \in \mathbb{N}_{\geq 6} \\ a = x + 4 \in \mathbb{N}_{\geq 10} \end{array} \end{array}$$

Nous avons  $a \in \mathbb{N}_{\geq 10}$  vérifiant  $a(a + 2)(a - 4) \in {}^2_*\mathbb{N}$ . Posons  $a = \alpha A^2$  où  $(\alpha, A) \in \mathbb{N}_{sf} \times \mathbb{N}^*$ , de sorte que  $\alpha(\alpha A^2 + 2)(\alpha A^2 - 4) \in {}^2_*\mathbb{N}$  via le fait 3.2. Or  $\alpha \in \mathbb{N}_{sf}$  donne  $\alpha \mid (\alpha A^2 + 2)(\alpha A^2 - 4)$ , d'où  $\alpha \mid 8$ , et ainsi  $\alpha \in \{1, 2\}$ <sup>4</sup>. Nous allons voir que ceci est impossible.

Supposons que  $\alpha = 1$ .

- Notons les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} &(A^2 + 2)(A^2 - 4) \in {}^2_*\mathbb{N} \\ \iff (u + 3)(u - 3) \in {}^2_*\mathbb{N} &\quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} u = A^2 - 1 \text{ où } -1 = \frac{2 - 4}{2}. \\ \iff u^2 - 9 \in {}^2_*\mathbb{N} \end{aligned}$$

- Ensuite, prenant  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m^2 = u^2 - 9$ , le fait 3.5 donne  $(m, u) = (4, 5)$  d'où la contradiction suivante.

$$\begin{aligned} u = 5 &\iff A^2 - 1 = 5 \\ &\iff A^2 = 6 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 6 \notin {}^2\mathbb{N}.$$

Supposons que  $\alpha = 2$ .

- Notons l'équivalence suivante.

$$\begin{aligned} &2(2A^2 + 2)(2A^2 - 4) \in {}^2_*\mathbb{N} \\ \iff 2(A^2 + 1)(A^2 - 2) \in {}^2_*\mathbb{N} &\quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Via } 4 \cdot 2(A^2 + 1)(A^2 - 2). \end{aligned}$$

- Ensuite, en travaillant modulo 3, nous avons  $2(A^2 + 1)(A^2 - 2) \equiv -4 \equiv -1$  qui ne correspond pas à un carré modulo 3.  $\square$

3. The Analyst (1874).

4. On comprend ici le choix d'avoir  $\pi_n^6 = (a - 4)a(a + 2)$ .

## 9. AVEC 7 FACTEURS

**Fait 9.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$ .

La preuve suivante s'inspire directement d'une démonstration citée via une source dans un échange sur <https://math.stackexchange.com> (voir la section 16).

*Preuve.* Supposons que  $\pi_n^7 \in {}^2\mathbb{N}$ .

Clairement,  $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 7}, \forall i \in \llbracket 0; 6 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ . D'après le fait 3.2, on doit s'intéresser à  $p \in \{2, 3, 5\}$ . Mais on note très grossièrement qu'au maximum deux facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^7$  sont divisibles par 5. Autrement dit, nous avons au moins 5 facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^7$  de valuation  $p$ -adique paire dès que  $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ , ceux-ci vérifiant l'une des alternatives suivantes.

- **[A1]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A2]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times (2\mathbb{N} + 1)$
- **[A3]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times 2\mathbb{N}$
- **[A4]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times (2\mathbb{N} + 1)$

Comme nous avons cinq facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions<sup>5</sup>.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A1]**.

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$  avec  $(M, N) \in \mathbb{N}^*$ . Par symétrie des rôles, on peut supposer  $N > M$ , de sorte que  $N^2 - M^2 \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$ . Selon le fait 3.5, seuls les cas suivants sont possibles mais ils lèvent tous une contradiction.

- (1)  $N^2 - M^2 = 3$  donne  $(M, N) = (1, 3)$ , puis nécessairement  $n = 1$ , mais  $\pi_1^7 = 7! \notin {}^2\mathbb{N}$  via  $v_7(7!) = 1$ .
- (2)  $N^2 - M^2 = 5$  donne  $(M, N) = (2, 3)$ , puis nécessairement  $n \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$ , et  $n \in \llbracket 2; 4 \rrbracket$  d'après le cas précédent. Mais  $\forall n \in \llbracket 2; 4 \rrbracket, v_7(\pi_n^7) = 1$  donne  $\pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$  si  $n \in \llbracket 2; 4 \rrbracket$ .

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A2]**.

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (3M^2, 3N^2)$  avec  $|3(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$ , mais c'est impossible d'après le fait 3.5.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A3]**.

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (2M^2, 2N^2)$  avec  $|2(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$ , puis nécessairement  $|N^2 - M^2| = 3$  qui implique  $n \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$ , mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A4]**.

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (6M^2, 6N^2)$  avec  $|6(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$ , mais c'est impossible d'après le fait 3.5.  $\square$

---

5. Notons qu'en considérant 3, il resterait au minimum 2 facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^7$  de valuation  $p$ -adique paire dès que  $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ . Or, en considérant la parité de  $v_2(n+i)$ , nous aurions deux alternatives, ceci rendant impossible l'usage du principe des tiroirs.

## 10. AVEC 8 FACTEURS

**Fait 10.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$ .

La démonstration très astucieuse suivante est proposée dans un échange sur <https://math.stackexchange.com> (voir la section 16). Comme pour le cas de quatre facteurs, l'algèbre va nous permettre d'aller très vite.

*Preuve.*

- L'une des preuves du fait 6.1 nous donne  $n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1$ .  
En particulier,  $(n+4)(n+5)(n+6)(n+7) = (n^2 + 11n + 29)^2 - 1$ .
- L'idée astucieuse va être de considérer les deux expressions suivantes qui viennent de  $\pi_n^8 = (f(n)^2 - 1)(g(n)^2 - 1)$ .  
(1)  $f(n) = n^2 + 3n + 1$ .  
(2)  $g(n) = n^2 + 11n + 29$ .

- Nous avons les manipulations algébriques naturelles suivantes.

$$\begin{aligned}
 \pi_n^8 &= (f(n)^2 - 1)(g(n)^2 - 1) && \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} a = f(n) \text{ et } b = g(n). \\
 &= (a^2 - 1)(b^2 - 1) \\
 &= a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 \\
 &= a^2b^2 - (a - b)^2 - 2ab + 1 && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Choisir } (a - b)^2 \text{ au lieu de } (a + b)^2 \text{ va nous permettre,} \\
 &= (ab - 1)^2 - (a - b)^2 && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{un plus bas, de ne pas trop nous éloigner de } \pi_n^8. \\
 &< (ab - 1)^2 && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} b - a \neq 0.
 \end{aligned}$$

Donc  $\pi_n^8 < (f(n)g(n) - 1)^2$ .

- Le point précédent rend naturel de tenter de démontrer que  $(f(n)g(n) - 2)^2 < \pi_n^8$ , car, si tel est le cas,  $\pi_n^8$  sera encadré par les carrés de deux entiers consécutifs, et forcément nous aurons  $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$ . Ce qui suit montre que notre pari est gagnant dès que  $n \geq 4$ . Que c'est joli !

$$\begin{aligned}
 &(f(n)g(n) - 2)^2 < \pi_n^8 \\
 \iff &(ab - 2)^2 < (a^2 - 1)(b^2 - 1) && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} a = f(n) \text{ et } b = g(n). \\
 \iff &a^2b^2 - 4ab + 4 < a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 \\
 \iff &a^2 + b^2 - 4ab + 3 < 0
 \end{aligned}$$

Le site <https://www.wolframalpha.com> nous donne sans effort cognitif<sup>6</sup> ce qui suit (les « transhumanophobes » se reporteront à la remarque 10.1 qui suit).

$$\begin{aligned}
 &a^2 + b^2 - 4ab + 3 \\
 &= -2(n^2 + 7n)^2 + 36(n^2 + 7n) + 729 && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} m = n^2 + 7n \\
 &= -2m^2 + 36m + 729 \\
 &= -2(m - 9)^2 + 891
 \end{aligned}$$

Or,  $n^2 + 7n - 9 = 0$  admet pour unique racine positive  $n = \frac{-7+\sqrt{85}}{2} \approx 1,1$ , donc  $a^2 + b^2 - 4ab + 3$  décroît en fonction de  $n$  à partir de  $n = 2$ . Les calculs suivants donnent alors que  $a^2 + b^2 - 4ab + 3 < 0$  pour  $n \geq 4$ .

6. Il faut vivre avec son temps...

$n$	1	2	3	4
$-2(n^2 + 7n)^2 + 36(n^2 + 7n) + 729$	889	729	9	-1559

- Nous venons de voir que  $(ab - 2)^2 < \pi_n^8 < (ab - 1)^2$  sur  $\mathbb{N}_{\geq 4}$ , donc  $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$  dès que  $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ , mais pour  $n \in \{1, 2, 3\}$ ,  $v_7(\pi_n^8) = 1$  donne  $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

**Remarque 10.1.** *Voici comment obtenir une preuve 100 % non silliconé. Pour cela, commençons par les manipulations algébriques naturelles suivantes qui cherchent à obtenir le même coefficient pour  $n$  dans chaque parenthèse, tout en passant d'un polynôme de degré 8 à un polynôme de degré 4.*

$$\begin{aligned}
\pi_n^8 &= n(n+7) \cdot (n+1)(n+6) \cdot (n+2)(n+5) \cdot (n+3)(n+4) \\
&= (n^2 + 7n) \cdot (n^2 + 7n + 6) \cdot (n^2 + 7n + 10) \cdot (n^2 + 7n + 12) \\
&= m(m+6)(m+10)(m+12) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} m = n^2 + 7n
\end{aligned}$$

Nous décidons d'offrir un 1<sup>er</sup> rôle à la variable  $m = n^2 + 7n$ . Voyons où cela nous mène...

$$\begin{aligned}
&a^2 + b^2 - 4ab + 3 \\
&= a(a - 4b) + b^2 + 3 \\
&= (m - 4n + 1)(-3m - 20n - 115) + (m + 4n + 29)^2 + 3 \quad \left. \begin{array}{l} a = n^2 + 3n + 1 = m - 4n + 1 \\ b = n^2 + 11n + 29 = m + 4n + 29 \end{array} \right\} \\
&= -3m^2 - (8n + 118)m + (4n - 1)(20n + 115) + m^2 + 2(4n + 29)m + (4n + 29)^2 + 3 \\
&= -2m^2 - 60m + 729 + 672n + 96n^2 \\
&= -2m^2 - 60m + 729 + 96(n^2 + 7n) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Ici, la magie opère...} \\
&= -2m^2 - 60m + 729 + 96m \\
&= -2m^2 + 36m + 729
\end{aligned}$$

## 11. AVEC 9 FACTEURS

**Fait 11.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$ .

La preuve suivante s'inspire directement d'une démonstration citée via une source dans un échange sur <https://math.stackexchange.com> (voir la section 16).

*Preuve.* Supposons que  $\pi_n^9 \in {}^2\mathbb{N}$ .

Clairement,  $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 9}, \forall i \in \llbracket 0; 8 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ . D'après le fait 3.2, on doit s'intéresser à  $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ . Voici ce que l'on peut observer très grossièrement.

- Au maximum deux facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^9$  sont divisibles par 5.
- Au maximum deux facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^9$  sont divisibles par 7.
- Les points précédents donnent au moins 5 facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^9$  de valuation  $p$ -adique paire dès que  $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ .

Nous avons alors l'une des alternatives suivantes pour chacun des 5 facteurs  $(n+i)$  vérifiant  $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$  pour  $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ .

- [A1]  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- [A2]  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times (2\mathbb{N} + 1)$
- [A3]  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times 2\mathbb{N}$
- [A4]  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times (2\mathbb{N} + 1)$



Comme nous avons cinq facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions<sup>7</sup>.

- Deux facteurs différents  $(n + i)$  et  $(n + i')$  vérifient **[A1]**.

Dans ce cas,  $(n + i, n + i') = (M^2, N^2)$  avec  $(M, N) \in \mathbb{N}^*$ . Par symétrie des rôles, on peut supposer  $N > M$ , de sorte que  $N^2 - M^2 \in \llbracket 1; 8 \rrbracket$ . Selon le fait 3.5, seuls les cas suivants sont possibles mais ils lèvent tous une contradiction.

- (1)  $N^2 - M^2 = 3$  donne  $(M, N) = (1, 3)$ , puis nécessairement  $n = 1$ , mais  $\pi_1^9 = 9! \notin {}^2\mathbb{N}$  via  $v_7(9!) = 1$ .
- (2)  $N^2 - M^2 = 5$  donne  $(M, N) = (2, 3)$ , puis nécessairement  $n \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$ , et  $n \in \llbracket 2; 4 \rrbracket$  d'après le cas précédent. Mais  $\forall n \in \llbracket 2; 4 \rrbracket$ ,  $v_7(\pi_n^9) = 1$  donne  $\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$  si  $n \in \llbracket 2; 4 \rrbracket$ .
- (3)  $N^2 - M^2 = 7$  donne  $(M, N) = (3, 4)$ , puis nécessairement  $n \in \llbracket 1; 9 \rrbracket$ , et  $n \in \llbracket 5; 9 \rrbracket$  d'après les cas précédents. Mais  $\forall n \in \llbracket 5; 9 \rrbracket$ ,  $v_{11}(\pi_n^9) = 1$  donne  $\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$  si  $n \in \llbracket 5; 9 \rrbracket$ .
- (4)  $N^2 - M^2 = 8$  donne  $(M, N) = (1, 3)$ , puis nécessairement  $n = 1$ , mais ceci est impossible.

- Deux facteurs différents  $(n + i)$  et  $(n + i')$  vérifient **[A2]**.

Dans ce cas,  $(n + i, n + i') = (3M^2, 3N^2)$  avec  $|3(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 8 \rrbracket$ , mais c'est impossible d'après le fait 3.5.

- Deux facteurs différents  $(n + i)$  et  $(n + i')$  vérifient **[A3]**.

Dans ce cas,  $(n + i, n + i') = (2M^2, 2N^2)$  avec  $|2(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 8 \rrbracket$ , puis nécessairement  $|N^2 - M^2| = 3$  qui implique  $n \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$ , mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents  $(n + i)$  et  $(n + i')$  vérifient **[A4]**.

Dans ce cas,  $(n + i, n + i') = (6M^2, 6N^2)$  avec  $|6(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 8 \rrbracket$ , mais c'est impossible d'après le fait 3.5.  $\square$

## 12. AVEC 10 FACTEURS

**Fait 12.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^{10} \notin {}^2\mathbb{N}$ .

La démonstration suivante est citée via une source dans un échange sur <https://math.stackexchange.com> (voir la section 16).

*Preuve.* Supposons que  $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$ .

Clairement,  $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 10}, \forall i \in \llbracket 0; 9 \rrbracket, v_p(n + i) \in 2\mathbb{N}$ . D'après le fait 3.2, on doit s'intéresser à  $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ . Voici ce que l'on peut observer très grossièrement.

- Au maximum deux facteurs  $(n + i)$  de  $\pi_n^{10}$  sont divisibles par 5.
- Au maximum deux facteurs  $(n + i)$  de  $\pi_n^{10}$  sont divisibles par 7.
- Les points précédents donnent au moins 6 facteurs  $(n + i)$  de  $\pi_n^{10}$  de valuation  $p$ -adique paire dès que  $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ .

Nous avons alors l'une des alternatives suivantes pour chacun des 6 facteurs  $(n + i)$  vérifiant  $v_p(n + i) \in 2\mathbb{N}$  pour  $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ .

---

7. Notons qu'en considérant 3, il resterait au minimum 2 facteurs  $(n + i)$  de  $\pi_n^9$  de valuation  $p$ -adique paire dès que  $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ . Or, en considérant la parité de  $v_2(n + i)$ , nous aurions deux alternatives, ceci rendant impossible l'usage du principe des tiroirs.

- **[A1]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A2]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times (2\mathbb{N} + 1)$
- **[A3]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times 2\mathbb{N}$
- **[A4]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times (2\mathbb{N} + 1)$

Comme nous avons six facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions<sup>8</sup>.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A1]**.

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$  avec  $(M, N) \in \mathbb{N}^*$ . Par symétrie des rôles, on peut supposer  $N > M$ , de sorte que  $N^2 - M^2 \in \llbracket 1; 9 \rrbracket$ . Selon le fait 3.5, seuls les cas suivants sont possibles mais ils lèvent tous une contradiction.

- (1)  $N^2 - M^2 = 3$  avec  $(M, N) = (1, 2)$  est possible, mais ceci donne  $n = 1^2 = 1$ , puis  $\pi_1^{10} = 10! \in {}^2\mathbb{N}$ , or ceci est faux car  $v_7(10!) = 1$ .
- (2)  $N^2 - M^2 = 5$  avec  $(M, N) = (2, 3)$  est possible d'où  $n \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$ . Nous venons de voir que  $n = 1$  est impossible. De plus, pour  $n \in \llbracket 2; 4 \rrbracket$ ,  $v_7(\pi_n^{10}) = 1$  montre que  $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$  est faux.
- (3)  $N^2 - M^2 = 7$  avec  $(M, N) = (3, 4)$  est possible d'où  $n \in \llbracket 1; 9 \rrbracket$ , puis  $n \in \llbracket 5; 9 \rrbracket$  d'après ce qui précède. Mais ici,  $\forall n \in \llbracket 5; 9 \rrbracket$ ,  $v_{11}(\pi_n^{10}) = 1$  montre que  $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$  est faux.
- (4)  $N^2 - M^2 = 8$  avec  $(M, N) = (1, 3)$  est possible d'où  $n = 1$ , mais ceci est impossible comme nous l'avons vu ci-dessus.
- (5)  $N^2 - M^2 = 9$  avec  $(M, N) = (4, 5)$  est possible d'où  $n \in \llbracket 10; 16 \rrbracket$  d'après ce qui précède. Or  $\forall n \in \llbracket 10; 16 \rrbracket$ ,  $v_{17}(\pi_n^{10}) = 1$ , donc  $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$  est faux.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A2]**.

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (3M^2, 3N^2)$  avec  $(M, N) \in \mathbb{N}^*$ . Par symétrie des rôles, on peut supposer  $N > M$ , de sorte que  $3(N^2 - M^2) \in \llbracket 1; 9 \rrbracket$ , puis  $N^2 - M^2 \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ . Selon le fait 3.5, nécessairement  $N^2 - M^2 = 3$  avec  $(M, N) = (1, 2)$ , d'où  $n \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ , mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A3]**.

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (2M^2, 2N^2)$  avec  $(M, N) \in \mathbb{N}^*$ . Par symétrie des rôles, on peut supposer  $N > M$ , de sorte que  $2(N^2 - M^2) \in \llbracket 1; 9 \rrbracket$ , puis  $N^2 - M^2 \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$ . Selon le fait 3.5, nécessairement  $N^2 - M^2 = 3$  avec  $(M, N) = (1, 2)$ , d'où  $n \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$ , mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A4]**.

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (6M^2, 6N^2)$  avec  $(M, N) \in \mathbb{N}^*$ . Par symétrie des rôles, on peut supposer  $N > M$ , de sorte que  $6(N^2 - M^2) \in \llbracket 1; 9 \rrbracket$ , puis  $N^2 - M^2 = 1$ , mais c'est impossible d'après le fait 3.5.  $\square$

---

8. Notons qu'en considérant 3, il resterait au minimum 2 facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^7$  de valuation  $p$ -adique paire dès que  $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ . Or, en considérant la parité de  $v_2(n+i)$ , nous aurions deux alternatives, ceci rendant impossible l'usage du principe des tiroirs.

## 13. AVEC 11 FACTEURS

**Fait 13.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^{11} \notin {}^2\mathbb{N}$ .

La démonstration suivante est très similaire à celle du cas 12.1, donc nous indiquons juste les adaptations à apporter.

*Preuve.* Ici nous avons moins 6 facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^{11}$  de valuation  $p$ -adique paire dès que  $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ , en notant qu'ici il y a au maximum trois facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^{11}$  divisibles par 5. Ceci nous amène aux cas suivants.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient [A1].

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$  avec  $|N^2 - M^2| \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$ . Ce qui suit lève des contradictions.

(1)  $|N^2 - M^2| = 3$  donne  $n = 1$ , mais  $\pi_1^{11} = 11! \notin {}^2\mathbb{N}$  via  $v_{11}(11!) = 1$ .

(2)  $|N^2 - M^2| = 5$  donne  $n \in \llbracket 2; 4 \rrbracket$ , mais  $\forall n \in \llbracket 2; 4 \rrbracket, v_{11}(\pi_n^{11}) = 1$  donne  $\pi_n^{11} \notin {}^2\mathbb{N}$ .

(3)  $|N^2 - M^2| = 7$  donne  $n \in \llbracket 5; 9 \rrbracket$ , mais  $\forall n \in \llbracket 5; 9 \rrbracket, v_{11}(\pi_n^{11}) = 1$  donne  $\pi_n^{11} \notin {}^2\mathbb{N}$ .

(4)  $|N^2 - M^2| = 8$  donne  $n = 1$ , mais ceci est impossible.

(5)  $|N^2 - M^2| = 9$  donne  $n \in \llbracket 10; 16 \rrbracket$ , mais  $\forall n \in \llbracket 10; 16 \rrbracket, v_{17}(\pi_n^{11}) = 1$  implique que  $\pi_n^{11} \in {}^2\mathbb{N}$  est faux.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient [A2].

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (3M^2, 3N^2)$  avec  $|3(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$ , d'où  $n \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$  que nous savons impossible.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient [A3].

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (2M^2, 2N^2)$  avec  $|2(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$ , puis nécessairement  $|N^2 - M^2| \in \{3, 5\}$ , d'où  $n \in \llbracket 1; 8 \rrbracket$ , mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient [A4].

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (6M^2, 6N^2)$  avec  $|6(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$ , mais c'est impossible d'après le fait 3.5.  $\square$

## 14. AVEC 12 FACTEURS

**Fait 14.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^{12} \notin {}^2\mathbb{N}$ .

La démonstration suivante est très similaire à celle du cas 12.1, donc nous indiquons juste les adaptations à apporter.

*Preuve.* Ici nous avons moins 5 facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^{12}$  de valuation  $p$ -adique paire dès que  $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$  avec ici 11 un nouveau compagnon premier à prendre en compte. Ceci nous amène juste à adapter le cas où deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient [A1]. Dans ce cas, nous avons  $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$  avec  $|N^2 - M^2| \in \llbracket 1; 11 \rrbracket$ . Ce qui suit lève des contradictions.

(1)  $|N^2 - M^2| \in \{3, 5, 7, 8, 9\}$  se traite comme pour le cas 13.1. On sait alors que  $n > 9$ .

(2) Un nouveau cas est à gérer car  $|N^2 - M^2| = 11$  est possible. Ceci ne se peut que si  $(M, N) = (5, 6)$  ou  $(M, N) = (6, 5)$ , d'où  $n \in \llbracket 10; 25 \rrbracket$ , mais nous arrivons aux contradictions suivantes.

•  $\forall n \in \llbracket 10; 20 \rrbracket, v_{17}(\pi_n^{12}) = 1$ , donc  $\pi_n^{12} \in {}^2\mathbb{N}$  est faux.

•  $\forall n \in \llbracket 20; 25 \rrbracket, v_{29}(\pi_n^{12}) = 1$ , donc  $\pi_n^{12} \in {}^2\mathbb{N}$  est faux.  $\square$

## 15. AVEC 13 FACTEURS

**Fait 15.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^{13} \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Preuve.* Les arguments de la preuve du cas 14.1 s'adaptent immédiatement.  $\square$

**Remarque 15.1.** *Que donnerait l'analyse du cas suivant  $\pi_n^{14} \notin {}^2\mathbb{N}$  ? Nous avons ce qui suit.*

- $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 14}, \forall i \in \llbracket 0; 13 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ .
- Au maximum trois facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^{14}$  sont divisibles par 5.
- Au maximum deux facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^{14}$  sont divisibles par 7.
- Au maximum deux facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^{14}$  sont divisibles par 11.
- Au maximum deux facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^{14}$  sont divisibles par 13. Un nouveau venu !
- Les points précédents nous donnent qu'au moins 5 facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^{14}$  sont de valuation  $p$ -adique paire dès que  $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ . On peut donc tenter de mettre en route la même machinerie que pour le cas 14.1.

Nous sentons donc ici la possibilité d'automatiser l'analyse de certaines situations. Ceci a été fait dans mon document « Carrés parfaits et produits d'entiers consécutifs – Jusqu'à 100 facteurs ? » qui propose une approche informatique se basant principalement sur l'idée précédente afin de traiter les cas jusqu'à 100 facteurs, c'est-à-dire ceux supposés connus dans la démonstration de Paul Erdős.

## 16. SOURCES UTILISÉES

**Faits 7.1, 9.1, 11.1, 12.1, 13.1, 14.1 et 15.1.**

Un échange consulté le 13 février 2024, et titré « *Product of 10 consecutive integers can never be a perfect square* » sur le site <https://math.stackexchange.com>.

*La démonstration indiquée est celle du fait 12.1, une preuve venant d'une source Wordpress donnée dans une réponse de cet échange, mais cette source est très expéditive...*

**Fait 8.1.**

Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré « *product of six consecutive integers being a perfect numbers* » sur le site <https://math.stackexchange.com>.

**Fait 9.1.**

Un échange consulté le 3 février 2024, et titré « *Proof that the product of 7 successive positive integers is not a square* » sur le site <https://math.stackexchange.com>.

*Il manque certaines justifications dans la démonstration donnée dans cet échange.*

**Fait 10.1.**

Un échange consulté le 4 février 2024, et titré « *How to prove that the product of eight consecutive numbers can't be a number raised to exponent 4?* » sur le site <https://math.stackexchange.com>.

*La démonstration vient de l'une des réponses de cet échange, mais la justification des deux inégalités n'est pas donnée.*