BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS – JUSQU'À 100 FACTEURS ?

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page ***https://github.com/bc-writing/drafts****.*

Mentions « légales »

Table des matières

Date : 14 Fév. 2024 – 19 Fév. 2024.

1. Ce qui nous intéresse

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers »[1], Paul Erdős démontre que pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit de $(k+1)$ entiers consécutifs $n(n+1)\cdots(n+k)$ n'est jamais le carré d'un entier. Plus précisément, l'argument général de Paul Erdős est valable pour $k+1 \geq 100$, soit à partir de 100 facteurs.

Dans ce document, via l'outil informatique principalement, nous nous proposons de traiter les cas laissés de côté par Paul Erdős.

2. Notations utilisées

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- $\forall (n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k-1} (n+i)$.
  Par exemple, $\pi_n^1 = n$, $\pi_n^2 = n(n+1)$ et $\pi_{n+2}^4 = (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$.
- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des carrés parfaits. On note aussi ${}^2_*\mathbb{N} = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
  $\mathbb{N}_{sf}$ est l'ensemble des naturels non nuls sans facteur carré[2].
- $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
  $\forall (p\,; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p-adique de n, c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n, contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.
- $2\,\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
  $2\,\mathbb{N}+1$ est l'ensemble des nombres naturels impairs.
- $\mathrm{reste}(a, b)$ désigne le reste de la division euclidienne de $a \in \mathbb{N}$ par $b \in \mathbb{N}^*$.
  $\mathrm{quot}(a, b)$ désigne le quotient de la division euclidienne de $a \in \mathbb{N}$ par $b \in \mathbb{N}^*$.

3. Les carrés parfaits

3.1. Structure.

Fait 3.1. *$n \in {}^2_*\mathbb{N}$ si, et seulement si, $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$.*

Démonstration. Immédiat à valider. □

3.2. Distance entre deux carrés parfaits.

Fait 3.2. *Soit $(N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $N > M$.*

(1) $N^2 - M^2 \geq 2N - 1$.

(2) Notons nb_{sol} le nombre de solutions $(N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de $N^2 - M^2 = \delta$.

Par exemple, pour $\delta \in [\![1\,; 20]\!]$, nous avons :

(a) $nb_{sol} = 0$ si $\delta \in \{1, 2, 4, 6, 10, 14, 18\}$.

(b) $nb_{sol} = 1$ si $\delta \in \{3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 16, 17, 19, 20\}$.

(c) $nb_{sol} = 2$ si $\delta = 15$.

Démonstration.

(1) Comme $N - 1 \geq M$, nous obtenons : $N^2 - M^2 \geq N^2 - (N-1)^2 = 2N - 1$.

---

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).
2. En anglais, on dit « square free ».

(2) Le point précédent permet d'utiliser le programme `Python` suivant afin d'obtenir rapidement les listes de nombres indiquées.

```
from collections import defaultdict
from math        import sqrt, floor

def sol(diff):
    solfound = []

    for i in range(1, (diff + 1) // 2 + 1):
        tested = i**2 - diff

        if tested < 0:
            continue

        tested = floor(sqrt(i**2 - diff))

        if tested == 0:
            continue

        if tested**2 == i**2 - diff:
            solfound.append((i, tested))

    return solfound

all_nbsol = defaultdict(list)

for d in range(1, 101):
    all_nbsol[len(sol(d))].append(d)

print(all_nbsol)
```

□

4. Une démonstration intéressante

Nous allons présenter dans cette section une démonstration qui va nous donner sans effort un algorithme permettant de valider, ou rejeter, la proposition $\pi_n^k \notin {}^2\mathbb{N}$ au cas par cas[3].

Dans un échange sur `https://math.stackexchange.com`, voir la section 6, il est indiqué une preuve de $\pi_n^{10} \notin {}^2\mathbb{N}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Voici cette preuve complétée avec certains arguments laissés sous silence dans la source utilisée. Noter au passage que l'essentiel consiste en des actes algorithmiques basiques permettant d'appliquer le fait 3.2 sans user de fourberies déductives. Ennuyeux, mais efficace !

Preuve. Supposons que $\pi_n^{10} \in {}^2_*\mathbb{N}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 10}$, $\forall i \in [\![0\,;9]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$. Concentrons-nous sur les nombres premiers dans $\{2,3,5,7\}$. Voici ce que l'on peut observer très grossièrement.

- Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^{10} sont divisibles par 5.
- Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de π_n^{10} sont divisibles par 7.

3. Ou au k par k...

- Les points précédents donnent au moins 6 facteurs $(n+i)$ de π_n^{10} de valuation p-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$.

Nous avons alors l'une des alternatives suivantes pour chacun des 6 facteurs $(n+i)$ vérifiant $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$.

- **[A 1]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A 2]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$
- **[A 3]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times 2\mathbb{N}$
- **[A 4]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$

Comme nous avons six facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 1]** .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (N^2, M^2)$ avec $(N, M) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $N^2 - M^2 \in [\![1\,;9]\!]$. Selon le fait 3.2, seuls les cas suivants sont possibles mais ils lèvent tous une contradiction.

  (1) $N^2 - M^2 = 3$ avec $(N, M) = (2, 1)$ est possible, mais ceci donne $n = 1^2 = 1$, puis $\pi_1^{10} = 10! \in {}^2\mathbb{N}$, or ceci est faux car $v_7(10!) = 1$.
  (2) $N^2 - M^2 = 5$ avec $(N, M) = (3, 2)$ est possible d'où $n \in [\![1\,;4]\!]$. Nous venons de voir que $n = 1$ est impossible. De plus, pour $n \in [\![2\,;4]\!]$, $v_7(\pi_n^{10}) = 1$ montre que $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.
  (3) $N^2 - M^2 = 7$ avec $(N, M) = (4, 3)$ est possible d'où $n \in [\![1\,;9]\!]$, puis $n \in [\![5\,;9]\!]$ d'après ce qui précède. Mais ici, $\forall n \in [\![5\,;9]\!]$, $v_{11}(\pi_n^{10}) = 1$ montre que $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.
  (4) $N^2 - M^2 = 8$ avec $(N, M) = (3, 1)$ est possible d'où $n = 1$, mais ceci est impossible comme nous l'avons vu ci-dessus.
  (5) $N^2 - M^2 = 9$ avec $(N, M) = (5, 4)$ est possible d'où $n \in [\![10\,;16]\!]$ d'après ce qui précède. Or $\forall n \in [\![10\,;16]\!]$, $v_{17}(\pi_n^{10}) = 1$, donc $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 2]** .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (3N^2, 3M^2)$ avec $(N, M) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $3(N^2 - M^2) \in [\![1\,;9]\!]$, puis $N^2 - M^2 \in [\![1\,;3]\!]$. Selon le fait 3.2, nécessairement $N^2 - M^2 = 3$ avec $(N, M) = (2, 1)$, d'où $n \in [\![1\,;3]\!]$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 3]** .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (2N^2, 2M^2)$ avec $(N, M) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $2(N^2 - M^2) \in [\![1\,;9]\!]$, puis $N^2 - M^2 \in [\![1\,;4]\!]$. Selon le fait 3.2, nécessairement $N^2 - M^2 = 3$ avec $(N, M) = (2, 1)$, d'où $n \in [\![1\,;2]\!]$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 4]** .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (6N^2, 6M^2)$ avec $(N, M) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $6(N^2 - M^2) \in [\![1\,;9]\!]$, puis $N^2 - M^2 = 1$, mais c'est impossible d'après le fait 3.2. □

Ce qui est intéressant avec la preuve précédente est qu'avec quelques adaptations « mécaniques » , on démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^k \notin {}^2\mathbb{N}$ dès que $k \in \{5, 7, 9, 11, 12, 13\}$.[4] Ces preuves semblant peu gourmandes informatiquement, il semble opportun de tenter un traitement numérique des cas absents dans l'article de Paul Erdős.

5. Une tactique informatique

5.1. **Deux algorithmes basiques.**

La démonstration donnée dans la section 4 s'appuie sur deux idées simples que nous allons transformer en algorithme.

5.1.1. *Sélection de potentiels bons candidats.*

La première phase consiste à tenter de trouver le moins possible de nombres premiers p tel que tous les facteurs $(n+i)$ de π_n^k soient de valuation p-adique non nécessairement paire. Pour ce faire, on procède grosso modo comme suit.

(1) On suppose par l'absurde que $\pi_n^k \in {}^2_*\mathbb{N}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

(2) On fabrique $\mathscr{P} = \mathbb{P}_{<k}$. Ce choix vient de ce que pour $p \in \mathbb{P}_{\geq k}$, nous savons que p divise au maximum un facteur $(n+i)$ de π_n^k , et donc $\forall i \in [\![0\,;k-1]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\,\mathbb{N}$ puisque $\pi_n^k \in {}^2_*\mathbb{N}$ par hypothèse.

(3) On pose $\mathscr{C} = \emptyset$. Cet ensemble sera celui des nombres premiers « candidats » qui seront utilisés dans notre second algorithme.

(4) On pose $f = k$. Cette variable va nous servir à compter les facteurs $(n+i)$ de π_n^k ayant un « maximum » de valuations p-adiques pairs.

(5) **Début des actions répétitives.**
Si $\mathscr{P} = \emptyset$, on renvoie $\mathscr{C}$.

(6) On considère $p_m = \max(\mathscr{P})$, et on retire p_m de $\mathscr{P}$, de sorte que $\mathscr{P} = \mathbb{P}_{<p_m}$. Le choix du maximum va permettre d'éliminer le moins possible de facteurs gênants dans les étapes suivantes.

(7) On compte alors f_m le nombre maximum de facteurs $(n+i)$ de π_n^k pouvant être divisibles par p_m . Le calcul de f_m est simple puisqu'il suffit de considérer le cas où p divise n : on obtient $f_m = 1 + \mathrm{quot}(k-1, p)$ car $\pi_n^k = n(n+1)\cdots(n+k-1)$.

(8) f devient $f - f_m$: on sait ici qu'il y a au moins f facteurs $(n+i)$ de π_n^k tels que $v_p(n+i) \in 2\,\mathbb{N}$ dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq p_m}$.

(9) Nous avons $2^{\mathrm{card}(\mathscr{P})}$ alternatives $[\mathbf{A}_j]$ possibles relativement aux parités des valuations p-adiques pour les nombres premiers p dans $\mathscr{P} = \mathbb{P}_{<p_m}$, les valuations p-adiques restantes étant paires. De l'autre côté, nous avons au moins f facteurs $(n+i)$ de π_n^k tels que $v_p(n+i) \in 2\,\mathbb{N}$ dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq p_m}$. Finalement, si $f > 2^{\mathrm{card}(\mathscr{P})}$, nous aurons au moins deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifiant la même alternative $[\mathbf{A}_j]$, d'où nous déduirons que cM^2 et cN^2 avec $(c, N, M) \in \mathbb{N}_{sf} \times (\mathbb{N}^*)^2$, une information qui sera utilisée par notre second algorithme pour « localiser » des π_n^k à tester brutalement.

(10) Si $f > 2^{\mathrm{card}(\mathscr{P})}$, on pose $\mathscr{C} = \mathscr{P}$.

(11) XXX

(12) XXX

(13) XXX

4. Voir mon document *« Carrés parfaits et produits d'entiers consécutifs – Des solutions à la main »* disponible dans le dépôt associé au présent document.

(14) XXX

(15) XXX ??? sinon on reprend les étapes à partir du point 5.

(16) Si $\mathscr{C} = \emptyset$, alors on a perdu, sinon on pourra continuer avec l'algorithme présentée dans la section 5.1.2 suivante.

Tout ceci nous amène au premier algorithme suivant.

Idée : on compte grossièrement des nombres de valuation p adiques paires avec le plus de p différents, dison en avoir k, il reste alors d priemirs et on veut juste que d > 2**d, on fait en sorte d'aller vers d le plus petit possible.
une fois ceci faitn on se ramène à des eq du type $N^2 - M^2 = d$ ou d w= nbre de facteurs
De 2 à 100
5 cas KO : 2, 3, 4, 6, 8
1 cas avec 1 premier gênant : 5
27 cas avec 2 premier gênants : 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 37
66 cas avec 3 premier gênants (tous les autres)
par exemple
pour 5 on a 2 nbrs premires
pour 37 on a 11 nbrs premires

p	31	29	23	19	17	13	11	7	5	3
Occu. max.	2	2	2	2	3	3	4	6	8	13
Occu. libres.	35	33	31	29	26	23	19	13	5	0
Alternatives.	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2

pour 40

p	37	31	29	23	19	17	13	11	7	5	3
Occu. max.	2	2	2	2	3	3	4	4	6	8	14
Occu. libres.	38	36	34	32	29	26	22	18	12	4	0
Alternatives.	2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2

ne pas rêver : 824 FAILS !

5.1.2. *XXX.*

YYYY

5.2. **Les cas gagnants.**

TODO
il reste avoir que les cas seléctionnés via l'laogirthme valident $\pi_n^k \notin {}^2\mathbb{N}$
???
Une fois les deux algos codés en Python, cf sur le dépôt, on valide $\pi_n^k \notin {}^2\mathbb{N}$ pour $k \in [\![9\,;100]\!] \cup \{5, 7\}$

5.3. **Que faire des cas perdants ?**

Voir mon doc *« Carrés parfaits et produits d'entiers consécutifs – Une méthode efficace »*.

6. Sources utilisées

L'idée centrale de ce document vient d'une source citée dans un échange consulté le 13 février 2024, et titré *« Product of 10 consecutive integers can never be a perfect square »* sur le site `https://math.stackexchange.com`.

7. AFFAIRE À SUIVRE...