

FORMULE BINÔME NEWTON "GÉNÉRALISÉE"

Th. (Gaule via mes récs.)

$(A, +, \cdot)$ un anneau.

Si $ab = ba$ alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ avec des notat^{ns} évidentes.

Appel. 1

Binôme Newton dans $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Appel. 2

Dér. de Leibniz via:

- $A = \text{End}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$ ou équivalent.
- $+$: addit^{ive} pt par pt "usuelle"
- \circ : composition

Donc si $a \in A$, alors $a^n = \underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_n$.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \circ \frac{\partial^{n-k}}{\partial y^{n-k}}$$

Th. Schwarz
 $\frac{\partial}{\partial x} \circ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \circ \frac{\partial}{\partial x}$

on applique à $H(x, y) = f(x)g(y)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)(H) = f'(x)g(y) + f(x)g'(y)$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)(H)(x, x) = (fg)'(x)$$

OK si $\text{diag} : H(x, y) \mapsto H(x, x)$

commute avec $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$. On a bien:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \circ \text{diag}(H) = \text{diag} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)(H) \right). \text{ OUF! }$$

Appli 3

$$F_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k$$

↑ suite sur \mathbb{Z} et non \mathbb{N} ; non gêné car on pose

$$F_k = 0 \text{ si } k \leq 0$$

$$\bullet A = \text{End}(\mathcal{L}(\mathbb{Z}; \mathbb{R}))$$

$\bullet +$ et 0 comme avant

On considère $\sigma_i : (F_m) \rightarrow (F_{m+i}) \rightarrow$ décalage d' i -dixes

$$\begin{aligned} (\sigma_0 + \sigma_1)((F_m)_m) &= (F_m + F_{m+1})_m \\ &= (F_{m+2})_m \\ &= \sigma_2((F_m)_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (F_{m+2n})_m &= (\sigma_2)^n((F_m)_m) \\ &= (\sigma_0 + \sigma_1)^n((F_m)_m) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sigma_1^k \sigma_0^{n-k}((F_m)_m) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sigma_k((F_m)_m) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (F_{m+k})_m \\ &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{m+k} \right)_m \end{aligned}$$

) $\sigma_1 \sigma_0 = \sigma_0 \sigma_1$ clairement.

Appli 4

loi binomiale, et oui!

Epreuve de Bernoulli : $P(X=0) = 1-p=q$

$$P(X=1) = p$$

X_1, X_2, \dots, X_n var. indé. de loi

Quelle est la loi de $X_1 + X_2 + \dots + X_n$? Cas général $X_i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ } n=2 \quad & P(X_1 + X_2 = k) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} P(X_1 = m) P(X_2 = k-m) \quad \text{Par indé.} \end{aligned}$$

Notant $f_{X_1+X_2} : k \rightarrow P(X_1 + X_2 = k) \dots$

On écrit $f_{X_1} * f_{X_2}$ prod. convoluée

DEB!

On choisit donc :

- $A = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ (appl. de \mathbb{Z} dans \mathbb{R} à support minoré)
SuppMin.
- $+$ et $*$

→ convolution porte sur une soc. lin.

$$\begin{aligned} f_{x_1 + \dots + x_n} &= f_{x_1} * \dots * f_{x_n} \\ &= f_{x_1}^n \leftarrow \text{Puis. n-ième de convolution} \\ &= (p\delta_0 + q\delta_1)^n \rightarrow \delta_i : \text{symbole de Kronecker} \end{aligned}$$

A-t-on $\delta_0 * \delta_1 = \delta_1 * \delta_0$?

$$\begin{aligned} \delta_0 * \delta_1(k) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(m) \delta_1(k-m) \\ &= \delta_0(0) \delta_1(k) \end{aligned}$$

Donc $\delta_0 * \delta_1 = \delta_1$
De même, $\delta_1 * \delta_0 = \delta_1$ } Au passage, δ_0 est neutre.

On a alors :

$$f_{x_1 + \dots + x_n} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} p^\ell q^{n-\ell} \delta_0^\ell \delta_1^{n-\ell}$$

Que vaut $\delta_0^\ell = \underbrace{\delta_0 * \dots * \delta_0}_{\ell \text{ fois}}$? $\delta_0^\ell = \delta_0$ (on avait)

"Idem" pour δ_1^ℓ : $\delta_1 * \delta_1(k) = \delta_1(1) \delta_1(k-1) = \delta_1(k)$

... etc

$$f_{x_1 + \dots + x_n} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} p^\ell q^{n-\ell} \delta_{n-\ell} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} p^{n-\ell} q^\ell \delta_\ell$$

→ loi binom. que c'est joli !