

CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTRIERS CONSÉCUTIFS – DES SOLUTIONS À LA MAIN

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons « Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International ».



TABLE DES MATIÈRES

1.	Ce qui nous intéresse	2
2.	Notations utilisées	2
3.	Les carrés parfaits	3
3.1.	Structure	3
3.2.	Distance entre deux carrés parfaits	3
4.	Avec 2 facteurs	5
5.	Avec 3 facteurs	6
6.	Avec 4 facteurs	7
7.	Avec 5 facteurs	8
8.	Avec 6 facteurs	10
9.	Avec 7 facteurs	13
10.	Avec 8 facteurs	14
11.	Sources utilisées	16

1. CE QUI NOUS INTÉRESSE

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers »¹, Paul Erdos démontre que pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit de $(k+1)$ entiers consécutifs $n(n+1) \cdots (n+k)$ n'est jamais le carré d'un entier.

Dans ce document, nous proposons quelques cas particuliers résolus de façon « adaptative » à la sueur des neurones ; le but recherché est de fournir différentes approches même si parfois cela peut prendre plus de temps.

2. NOTATIONS UTILISÉES

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \pi_n^k = \prod_{i=0}^k (n+i)$.
Par exemple, $\pi_n^0 = n$, $\pi_n^1 = n(n+1)$ et $\pi_{n+2}^3 = (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$.
- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des carrés parfaits. On note aussi ${}^2_*\mathbb{N} = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
 \mathbb{N}_{sf} est l'ensemble des naturels non nuls sans facteur carré².
- \mathbb{P} désigne l'ensemble des nombres premiers.
 $\forall (p; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*, v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p -adique de n , c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n , contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m .
- $2\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
 $2\mathbb{N} + 1$ est l'ensemble des nombres naturels impairs.
- $(a \pm b)$ est un raccourci pour $(a+b)(a-b)$.

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).

2. En anglais, on dit « square free ».

3. LES CARRÉS PARFAITS

3.1. Structure.

Fait 3.1. $\forall n \in {}^2\mathbb{N}_*$, s'il existe $m \in {}^2\mathbb{N}$ tel que $n = fm$ alors $f \in {}^2\mathbb{N}_*$.

Démonstration. Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(fm) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ qui donnent $v_p(f) \in 2\mathbb{N}$ car $v_p(fm) = v_p(f) + v_p(m)$. \square

Fait 3.2. $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $a \wedge b = 1$ et $ab \in {}^2\mathbb{N}_*$, alors $a \in {}^2\mathbb{N}_*$ et $b \in {}^2\mathbb{N}_*$.

Démonstration. Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(ab) \in 2\mathbb{N}$. Or $p \in \mathbb{P}$ ne peut diviser à la fois a et b , donc $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(a) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(b) \in 2\mathbb{N}$, autrement dit $(a, b) \in {}^2\mathbb{N}_* \times {}^2\mathbb{N}_*$. \square

Fait 3.3. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $ab \in {}^2\mathbb{N}_*$, ainsi que $(\alpha, \beta, A, B) \in (\mathbb{N}_{sf})^2 \times \mathbb{N}^2$ tel que $a = \alpha A^2$ et $b = \beta B^2$. Nous avons alors forcément $\alpha = \beta$.

Démonstration. Le fait 3.1 donne $\alpha\beta \in {}^2\mathbb{N}_*$. De plus, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(\alpha) \in \{0, 1\}$ et $v_p(\beta) \in \{0, 1\}$. Finalement, $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\alpha) = v_p(\beta)$, autrement dit $\alpha = \beta$. \square

3.2. Distance entre deux carrés parfaits.

Fait 3.4. $\forall (N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $N > M$, alors $N^2 - M^2 = \sum_{k=M+1}^N (2k - 1)$.

Démonstration. $N^2 = \sum_{k=1}^N (2k - 1)$ donne l'identité indiquée³. \square

L'identité précédente permet d'éliminer beaucoup de situations en s'aidant, si besoin, d'un petit programme informatique (voir un peu plus bas).

Fait 3.5. Soit $(N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $N > M$.

(1) $N^2 - M^2 \geq 2M + 1$.

(2) $N^2 - M^2 < 3$ est impossible.

(3) $N^2 - M^2 = 3$ uniquement si $(N, M) = (2, 1)$.

(4) Notons nb_{sol} le nombre de solutions $(N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de $N^2 - M^2 = \delta$. Pour $\delta \in \llbracket 1; 20 \rrbracket$, nous avons :

(a) $nb_{sol} = 0$ si $\delta \in \{1, 2, 4, 6, 10, 14, 18\}$.

(b) $nb_{sol} = 1$ si $\delta \in \{3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 16\}$.

(c) $nb_{sol} = 2$ si $\delta = 15$.

Démonstration.

(1) $N^2 - M^2 = \sum_{k=M+1}^N (2k - 1) \geq 2(M + 1) - 1 = 2M + 1$

On peut aussi juste procéder comme suit.

$$N^2 - M^2 = (N - M)(N + M) \geq 1 \cdot (M + 1 + M) = 2M + 1$$

(2) Immédiat puisque $2M + 1 \geq 3$.

(3) Notant $\delta = N^2 - M^2$, nous avons $2N - 1 \leq \sum_{k=M+1}^N (2k - 1) = \delta$, soit $N \leq \frac{\delta + 1}{2}$. Ceci permet de limiter notre zone de recherche à $N \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$, ce qui permet de conclure.

3. La formule utilisée est facile à démontrer algébriquement, et évidente à découvrir géométriquement.

(4) Il suffit de s'appuyer sur le programme Python donné ci-dessous. □

```
from math import sqrt, floor

def sol(diff):
    solfound = []

    for i in range(1, (diff + 1) // 2 + 1):
        tested = i**2 - diff

        if tested < 0:
            continue

        tested = floor(sqrt(i**2 - diff))

        if tested == 0:
            continue

        if tested**2 == i**2 - diff:
            solfound.append((i, tested))

    return solfound
```

4. AVEC 2 FACTEURS

Fait 4.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve 1. Il suffit de noter que $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$. □

Preuve 2. Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$.

Comme $n \wedge (n+1) = 1$, le fait 3.2 donne $(n, n+1) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$, d'où l'existence de deux carrés parfaits non nuls distants de 1. D'après le fait 3.5, ceci est impossible. □

Preuve 3. Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) = N^2$ où $N \in \mathbb{N}^*$.

Les équivalences suivantes donnent une contradiction.

$$\begin{aligned}
 & n(n+1) = N^2 \\
 \iff & 2 \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^N (2k-1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} n(n+1) = 2 \sum_{k=1}^n k \text{ et } N^2 = \sum_{k=1}^N (2k-1). \\
 \iff & \sum_{k=1}^n 2k = \sum_{k=1}^N 2k - N \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} N > n \\
 \iff & \sum_{k=n+1}^N 2k - N = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} N > 0 \text{ rend impossible la dernière égalité.} \\
 \iff & \sum_{k=n+1}^{N-1} 2k + N = 0
 \end{aligned}$$

□

5. AVEC 3 FACTEURS

Fait 5.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve 1. Supposons que $\pi_n^2 \in {}^2_*\mathbb{N}$.

Posant $m = n + 1$, nous avons $\pi_n^2 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Comme $m \wedge (m^2-1) = 1$, le fait 3.2 donne $(m, m^2-1) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$. Or, $m^2-1 \in {}^2_*\mathbb{N}$ est impossible d'après le fait 3.5. \square

Preuve 2. Supposons que $\pi_n^2 \in {}^2_*\mathbb{N}$.

Comme $p \in \mathbb{P}_{>2}$ ne peut diviser au maximum qu'un seul des trois facteurs n , $(n+1)$ et $(n+2)$, nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}_{>2}, \forall i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$. Mais que se passe-t-il pour $p = 2$?

Supposons d'abord $n \in 2\mathbb{N}$.

- Posant $n = 2m$, nous avons $\pi_n^2 = 4m(2m+1)(m+1)$, d'où $m(2m+1)(m+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$.
- Comme $v_2(2m+1) = 0$, nous savons que $2m+1 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
- Donc $m(m+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$ via le fait 3.1, mais le fait 4.1 interdit cela.

Supposons maintenant $n \in 2\mathbb{N} + 1$.

- Nous savons que $n \in {}^2_*\mathbb{N}$ via $v_2(n) = 0$.
- On conclut comme dans le cas précédent mais en passant via $(n+1)(n+2)$. \square

6. AVEC 4 FACTEURS

Fait 6.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve 1. Nous pouvons ici faire les manipulations algébriques naturelles suivantes qui cherchent à obtenir le même coefficient pour n dans chaque parenthèse.

$$\begin{aligned}
 \pi_n^3 &= n(n+3) \cdot (n+1)(n+2) \\
 &= (n^2 + 3n) \cdot (n^2 + 3n + 2) \quad \left. \vphantom{(n^2 + 3n)} \right\rbrace m = n^2 + 3n \\
 &= m(m+2) \\
 &= m^2 + 2m \\
 &= (m+1)^2 - 1
 \end{aligned}$$

Comme $m > 0$, $(m+1)^2 - 1 \notin {}^2\mathbb{N}$ d'après le fait 3.5, c'est-à-dire $\pi_n^3 \notin {}^2\mathbb{N}$. □

Preuve 2. En « symétrisant » certaines expressions, nous obtenons les manipulations algébriques suivantes.

$$\begin{aligned}
 \pi_n^3 &= n(n+1)(n+2)(n+3) \quad \left. \vphantom{(n(n+1)(n+2)(n+3))} \right\rbrace x = n + \frac{3}{2} \\
 &= \left(x \pm \frac{3}{2}\right) \left(x \pm \frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \quad \left. \vphantom{(x^2 - \frac{9}{4})(x^2 - \frac{1}{4})} \right\rbrace y = x^2 - \frac{5}{4} \text{ où } \frac{5}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{4}\right) \\
 &= (y \pm 1) \\
 &= y^2 - 1 \\
 &= \left(\left(n + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right)^2 - 1 \\
 &= (n^2 + 3n + 1)^2 - 1
 \end{aligned}$$

On conclut comme dans la première preuve. □

7. AVEC 5 FACTEURS

Fait 7.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve 1. Supposons que $\pi_n^4 \in {}^2\mathbb{N}$.

Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}, \forall i \in \llbracket 0; 4 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$. Pour $p = 2$ et $p = 3$, nous avons les alternatives suivantes pour chaque facteur $(n+i)$ de π_n^4 .

- **[A1]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A2]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times (2\mathbb{N} + 1)$
- **[A3]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times 2\mathbb{N}$
- **[A4]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times (2\mathbb{N} + 1)$

Comme nous avons cinq facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions très facilement.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A1]**.

Dans ce cas, on sait juste que $(n+i, n+i') \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Or $n \notin {}^2\mathbb{N}$ puisque sinon $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$ donne $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$ via le fait 3.1, mais ceci contredit le fait 6.1. De même, $n+4 \notin {}^2\mathbb{N}$. Dès lors, nous avons $\{n+i, n+i'\} \subseteq \{n+1, n+2, n+3\}$, d'où l'existence de deux carrés parfaits non nuls éloignés de moins de 3, et ceci contredit le fait 3.5.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A2]**.

Dans ce cas, le couple de facteurs est $(n, n+3)$, ou $(n+1, n+4)$.

(1) Supposons d'abord que n et $(n+3)$ vérifient **[A2]**.

Comme $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}, v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+3) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(n) \in 2\mathbb{N} + 1$ et $v_3(n+3) \in 2\mathbb{N} + 1$, nous avons $n = 3N^2$ et $n+3 = 3M^2$ où $(N, M) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Or, ceci donne $3 = 3M^2 - 3N^2$, puis $M^2 - N^2 = 1$ qui contredit le fait 3.5.

(2) De façon analogue, on ne peut pas avoir $(n+1)$ et $(n+4)$ vérifiant **[A2]**.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A3]**.

Comme dans le point précédent, c'est impossible car on aurait $2 = 2M^2 - 2N^2$, ou $4 = 2M^2 - 2N^2$ qui contredirait le fait 3.5.

En effet, ici les couples possibles sont $(n, n+2)$, $(n, n+4)$, $(n+2, n+4)$ et $(n+1, n+3)$ ⁴.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A4]**.

Ceci donne deux facteurs différents divisibles par 6, mais c'est impossible. \square

Bien que longue, la preuve suivante se comprend bien, car nous ne faisons qu'avancer à vue, mais avec rigueur.

Preuve 2. Supposons que $\pi_n^4 \in {}^2\mathbb{N}$.

Posant $m = n+2$, nous avons $\pi_n^4 = m(m \pm 2)(m \pm 1) = m(m^2 - 1)(m^2 - 4)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Pour la suite, on pose $u = m^2 - 1$ et $q = m^2 - 4$.

Supposons d'abord que $m \in {}^2\mathbb{N}$.

- De $muq \in {}^2\mathbb{N}$, nous déduisons que $uq \in {}^2\mathbb{N}$ via le fait 3.1.

4. A priori, rien n'empêche d'avoir n , $(n+2)$ et $(n+4)$ vérifiant tous les trois **[A3]**.

- Comme $u - q = 3$, nous savons que $u \wedge q \in \{1, 3\}$.
- Si $u \wedge q = 1$, alors $(u, q) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$ d'après le fait 3.2. Ensuite, le fait 3.5 impose d'avoir $(u, q) = (4, 1)$, d'où $m^2 - 1 = 4$, mais ceci est impossible⁵.
- Si $u \wedge q = 3$, alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(u) \in 2\mathbb{N} + 1$ et $v_3(q) \in 2\mathbb{N} + 1$. Donc $u = 3U^2$ et $q = 3Q^2$ avec $(U, Q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Or $u - q = 3$ donne $U^2 - Q^2 = 1$, et le fait 3.5 nous indique une contradiction.

Supposons maintenant que $m \notin {}^2\mathbb{N}$.

- Montrons que $u \notin {}^2\mathbb{N}$ et $q \notin {}^2\mathbb{N}$.
 - (1) $u \in {}^2\mathbb{N}$ donne $m^2 - 1 \in {}^2\mathbb{N}$, puis $m = 1$ via le fait 3.5, mais ceci est impossible puisque $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.
 - (2) $q \in {}^2\mathbb{N}$ donne $m^2 - 4 \in {}^2\mathbb{N}$, puis la contradiction $m = 2$ via le fait 3.5.
- Donc $m = \alpha M^2$, $u = \beta U^2$, $q = \gamma Q^2$ où $(M, U, Q) \in (\mathbb{N}^*)^3$ et $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathbb{N}_{sf} \cap \mathbb{N}_{>1}$.
- Notons que $\beta \neq \gamma$, car, dans le cas contraire, $3 = u - q = \beta(U^2 - Q^2)$ fournirait $\beta = 3$ puis $U^2 - Q^2 = 1$, et ceci contredirait le fait 3.5.
- Nous avons $m \wedge u = 1$, $m \wedge q \in \{1, 2, 4\}$ et $u \wedge q \in \{1, 3\}$ avec $m \wedge u = m \wedge q = u \wedge q = 1$ impossible car sinon on aurait $(m, u, q) \in ({}^2\mathbb{N})^3$ via $muq \in {}^2\mathbb{N}$ et le fait 3.2.
- Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $(v_p(m), v_p(u), v_p(q)) \in (2\mathbb{N})^3$.
- Les points précédents donnent $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$ avec de plus $\beta \neq \gamma$, ainsi que $\alpha \wedge \beta = 1$, $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2\}$ et $\beta \wedge \gamma \in \{1, 3\}$. Notons au passage que $\alpha \wedge \beta = 1$ implique $(\alpha, \beta) = (2, 3)$, ou $(\alpha, \beta) = (3, 2)$. Via le tableau « mécanique » ci-après, nous obtenons que forcément $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$ ou $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$. Le plus dur est fait !

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	Statut
2	3	2	1	2	1	✓
2	3	6	1	2	3	✓
3	2	3	1	3	1	✗
3	2	6	1	3	2	✗

- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$ nous donne $m = 2M^2$, $u = 3U^2$ et $q = 2Q^2$, d'où la contradiction $3 \cdot 4M^2U^2Q^2 \in {}^2\mathbb{N}$.
- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$ nous donne $m = 2M^2$, $m^2 - 1 = 3U^2$ et $m^2 - 4 = 6Q^2$, mais ce qui suit lève une autre contradiction.
 - Travaillons modulo 3. Nous avons $m \equiv 2M^2 \equiv 0$ ou -1 . Or $m^2 - 1 = 3U^2$ donne $m^2 \equiv 1$, d'où $m \equiv -1$, puis $3 \mid m - 2$, et enfin $6 \mid m - 2$ puisque m est pair.
 - Posant $m - 2 = 6r$ et notant $s = m + 2$, nous avons $6rs = 6Q^2$, puis $rs = Q^2$.
 - $s \notin {}^2\mathbb{N}$. Sinon $(m-2)(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$ via $(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) \in {}^2\mathbb{N}$ et le fait 3.1, mais ceci ne se peut pas d'après le fait 6.1.
 - Les deux résultats précédents et le fait 3.3 donnent $(\pi, R, S) \in \mathbb{N}_{sf} \times (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $r = \pi R^2$ et $s = \pi S^2$ avec $\pi \in \mathbb{N}_{>1}$.
 - Dès lors, $4 = s - 6r = \pi(S^2 - 6R^2)$ donne $\pi = 2$, d'où $m + 2 = 2S^2$.
 - Finalement, $m = 2M^2$ et $m + 2 = 2S^2$ donnent $2 = 2(S^2 - M^2)$, soit $1 = S^2 - M^2$, ce qui contredit le fait 3.5. \square

5. On peut aussi noter que le fait 5.1 lève une contradiction car nous avons $m \in {}^2\mathbb{N}$ et $u \in {}^2\mathbb{N}$ qui donnent $(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$.

8. AVEC 6 FACTEURS

Fait 8.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^5 \notin {}^2\mathbb{N}$.

La démonstration suivante se trouve dans l'article « Solution of a Problem »⁶ de G. W. Hill et J. E. Oliver. Une petite simplification a été faite pour arriver à $\pi_n^5 = (a-4)a(a+2)$.

Preuve 1. Supposons que $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}$.

Commençons par de petites manipulations algébriques où la première modification fait apparaître le même coefficient pour n dans chaque parenthèse.

$$\begin{aligned} \pi_n^5 &= n(n+5) \cdot (n+1)(n+4) \cdot (n+2)(n+3) \\ &= (n^2+5n)(n^2+5n+4)(n^2+5n+6) \\ &= x(x+4)(x+6) \\ &= (a-4)a(a+2) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = n^2 + 5n \in \mathbb{N}_{\geq 6} \\ a = x + 4 \in \mathbb{N}_{\geq 10} \end{array} \end{array}$$

Nous avons $a \in \mathbb{N}_{\geq 10}$ vérifiant $a(a+2)(a-4) \in {}^2\mathbb{N}$. Posons $a = \alpha A^2$ où $(\alpha, A) \in \mathbb{N}_{sf} \times \mathbb{N}^*$, de sorte que $\alpha(\alpha A^2+2)(\alpha A^2-4) \in {}^2\mathbb{N}$ via le fait 3.1. De plus, $\alpha \in \mathbb{N}_{sf}$, donc $\alpha \mid (\alpha A^2+2)(\alpha A^2-4)$, d'où $\alpha \mid 8$, et ainsi $\alpha \in \{1, 2\}$ ⁷. Nous allons voir que ceci est impossible.

Supposons que $\alpha = 1$.

- Notons les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} &(A^2+2)(A^2-4) \in {}^2\mathbb{N} \\ \iff (u+3)(u-3) \in {}^2\mathbb{N} &\quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} u = A^2 - 1 \text{ où } -1 = \frac{2-4}{2}. \\ \iff u^2 - 9 \in {}^2\mathbb{N} \end{aligned}$$

- Ensuite, prenant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = u^2 - 9$, le fait 3.5 donne $(u, m) = (5, 4)$ d'où la contradiction suivante.

$$\begin{aligned} u = 5 &\iff A^2 - 1 = 5 \\ &\iff A^2 = 6 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 6 \notin {}^2\mathbb{N}.$$

Supposons que $\alpha = 2$.

- Notons l'équivalence suivante.

$$\begin{aligned} &2(2A^2+2)(2A^2-4) \in {}^2\mathbb{N} \\ \iff 2(A^2+1)(A^2-2) \in {}^2\mathbb{N} &\quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Via } 4 \cdot 2(A^2+1)(A^2-2). \end{aligned}$$

- Ensuite, en travaillant modulo 3, nous avons $2(A^2+1)(A^2-2) \equiv -4 \equiv -1$ qui ne correspond pas à un carré modulo 3. \square

Bien que très longue⁸, la preuve suivante est simple à comprendre car elle ne fait que dérouler le fil des faits découverts.

Preuve 2. Supposons que $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \pi_n^5 &= n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \\ \iff \pi_n^5 &= \left(x \pm \frac{5}{2}\right)\left(x \pm \frac{3}{2}\right)\left(x \pm \frac{1}{2}\right) \\ \iff 2^6 \pi_n^5 &= (y \pm 5)(y \pm 3)(y \pm 1) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = n + 2 + \frac{1}{2} \text{ (on symétrise la formule).} \\ y = 2x \text{ (on chasse les fractions).} \end{array} \end{array}$$

6. The Analyst (1874).

7. On comprend ici le choix d'avoir $\pi_n^5 = (a-4)a(a+2)$.

8. Ce sera notre dernière tentative de démonstration à faible empreinte cognitive.

$$\begin{aligned}
2^6 \pi_n^5 &= (y \pm 5)(y \pm 3)(y \pm 1) \\
\iff 2^6 \pi_n^5 &= (z - 25)(z - 9)(z - 1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} z = y^2 \\
\iff 2^6 \pi_n^5 &= (u - 8)(u + 8)(u + 16) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} u = z - 17 \text{ où } 17 = \frac{25 + 9}{2}.
\end{aligned}$$

Notant $a = u - 8$, $b = u + 8$ et $c = u + 16$, où $u = (2n + 5)^2 - 17 \in 2\mathbb{N}$, nous avons les faits suivants.

- $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$ car $(2 + 5)^2 - 17 = 32$.
- $(a, b, c) \in (\mathbb{N}_{\geq 24})^3$ avec $abc \in {}^2\mathbb{N}$ puisque $2^6 \pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}$.
- $a \wedge b \mid 16$ via $b - a = 16$.
- $a \wedge c \mid 24$ via $c - a = 24$.
- $b \wedge c \mid 8$ via $c - b = 8$.
- En particulier, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) \in (2\mathbb{N})^3$.

Démontrons qu'aucun des trois entiers a , b et c ne peut être un carré parfait.

- Commençons par supposer que $(a, b, c) \in {}^2\mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Dans ce cas, $bc \in {}^2\mathbb{N}$ via le fait 3.1, soit $(u + 8)(u + 16) \in {}^2\mathbb{N}$. En posant $w = u + 12$, on arrive à $(w - 4)(w + 4) \in {}^2\mathbb{N}$, soit $w^2 - 16 \in {}^2\mathbb{N}$, d'où $(w, m) = (5, 3)$ grâce au fait 3.5. Or $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$ donne $w \in \mathbb{N}_{\geq 20}$, d'où une contradiction.

- Supposons maintenant que $(a, b, c) \in \mathbb{N}^* \times {}^2\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

Dans ce cas, $ac \in {}^2\mathbb{N}$, soit $(u - 8)(u + 16) \in {}^2\mathbb{N}$. En posant $w = u + 4$, on arrive à $(w - 12)(w + 12) \in {}^2\mathbb{N}$, soit $w^2 - 144 \in {}^2\mathbb{N}$. Notant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = w^2 - 144$, nous arrivons à $w^2 - m^2 = 144$, d'où $(w, m) \in \{(13, 5), (15, 9), (20, 16), (37, 35)\}^9$. Comme $u \in 2\mathbb{N}$ donne $w \in 2\mathbb{N}$, nécessairement $(w, m) = (20, 16)$, mais les équivalences suivantes lèvent une contradiction.

$$\begin{aligned}
u + 4 = 20 &\iff u = 16 \\
&\iff (2n + 5)^2 - 17 = 16 \\
&\iff (2n + 5)^2 = 33 \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} 33 \notin {}^2\mathbb{N}
\end{aligned}$$

- Supposons enfin que $(a, b, c) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times {}^2\mathbb{N}$.

Dans ce cas, $ab \in {}^2\mathbb{N}$, soit $(u - 8)(u + 8) \in {}^2\mathbb{N}$, c'est-à-dire $u^2 - 64 \in {}^2\mathbb{N}$. Notant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = u^2 - 64$, nous arrivons à $u^2 - m^2 = 64$. Ceci n'est possible que si $(u, m) \in \{(10, 6), (17, 15)\}$. Or $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$ donne une contradiction.

Donc $a = \alpha A^2$, $b = \beta B^2$ et $c = \gamma C^2$ avec $(A, B, C) \in (\mathbb{N}^*)^3$ et $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathbb{N}_{sf} \cap \mathbb{N}_{>1}$, ceci nous donnant les faits suivants.

- $\alpha \wedge \beta \in \{1, 2\}$ d'après $a \wedge b \mid 16$.
- $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2, 3\}$ d'après $a \wedge c \mid 24$.
- $\beta \wedge \gamma \in \{1, 2\}$ d'après $b \wedge c \mid 8$.
- $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$ car $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) \in (2\mathbb{N})^3$.

9. Le programme reproduit après la preuve du fait 3.5 donne rapidement cet ensemble de couples.

En fait, α , β et γ sont différents deux à deux.

- Démontrons que $\alpha \neq \beta$.

Dans le cas contraire, $16 = b - a = \alpha(B^2 - A^2)$ et $\alpha > 1$ donnent $B^2 - A^2 \in \{1, 2, 4, 8\}$, puis forcément $B^2 - A^2 = 8$ avec $(B, A) = (3, 1)$ d'après le fait 3.5. Comme de plus, $\alpha = 2$, nous obtenons $a = 2$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.

- Nous avons aussi $\beta \neq \gamma$.

Dans le cas contraire, $8 = c - b = \beta(C^2 - B^2)$ et $\beta > 1$ donnent $C^2 - B^2 \in \{1, 2, 4\}$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5.

- Enfin, $\alpha \neq \gamma$.

Dans le cas contraire, $C^2 - A^2 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ car $24 = c - a = \alpha(C^2 - A^2)$ et $\alpha > 1$. Le fait 3.5 ne laisse plus que les possibilités suivantes.

- (1) $C^2 - A^2 = 3$ n'est possible que si $(C, A) = (2, 1)$. Comme de plus $\alpha = 8$, nous avons $a = 8$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.
- (2) $C^2 - A^2 = 8$ n'est possible que si $(C, A) = (3, 1)$. Comme de plus $\alpha = 3$, nous avons $a = 3$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.
- (3) $C^2 - A^2 = 12$ n'est possible que si $(C, A) = (4, 2)$. Comme de plus $\alpha = 2$, nous avons $a = 8$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.

Comme $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$, $\alpha \wedge \beta \in \{1, 2\}$, $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2, 3\}$ et $\beta \wedge \gamma \in \{1, 2\}$, et comme de plus α , β et γ sont différents deux à deux, il ne nous reste plus qu'à analyser les cas suivants. La lumière est proche...

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	Statut
2	3	6	1	2	3	☒
2	6	3	2	1	3	☒
3	2	6	1	3	2	✓
3	6	2	3	1	2	☒
6	2	3	2	3	1	✓
6	3	2	3	2	1	☒

Traisons les deux cas restants en nous souvenant que $a = u - 8$, $b = u + 8$ et $c = u + 16$.

- Supposons $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, 2, 6)$, autrement dit $a = 3A^2$, $b = 2B^2$ et $c = 6C^2$.

Travaillons modulo 3 afin de lever une contradiction.

- (1) $a \equiv u - 2$ et $a \equiv 3A^2 \equiv 0$ donnent $u \equiv 2$.

- (2) D'autre part, $b \equiv 2B^2 \equiv 0$ ou 2 . Or $b \equiv u + 2 \equiv 1$ lève une contradiction.

- Supposons $(\alpha, \beta, \gamma) = (6, 2, 3)$, autrement dit $a = 6A^2$, $b = 2B^2$ et $c = 3C^2$.

La preuve précédente s'adapte directement car $a \equiv 6A^2 \equiv 0$ et $b \equiv 2B^2$ modulo 3.

□

9. AVEC 7 FACTEURS

Fait 9.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^6 \notin {}^2\mathbb{N}$.

La très jolie démonstration suivante vient d'un échange sur <https://math.stackexchange.com> (voir la section 11). Nous avons juste comblé quelques rares oublis, et apporté de petites simplifications.

Preuve. Supposons que $\pi_n^6 \in {}^2\mathbb{N}$.

Commençons par quelques observations immédiates.

- $\forall p \in \mathbb{P}_{>5}, \forall i \in \llbracket 0; 6 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$.
- $\exists u \in \{0, 1, 2\}$ tel que $\{u, u+2, u+4\} \subset 2\mathbb{N}+1$.
 Nous avons alors $\forall p \in \mathbb{P}_{>5} - \{2\}, (v_p(u), v_p(u+2), v_p(u+4)) \in (2\mathbb{N})^3$. Donc, pour tout naturel $m \in \{u, u+2, u+4\}$, il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = M^2, m = 3M^2, m = 5M^2$ ou $m = 15M^2$.
- Parmi les trois naturels $u, u+2$ et $u+4, \dots$
 - il en existe un, et un seul, divisible par 3, comme on le constate vite en raisonnant modulo 3,
 - au plus un est divisible par 5,
 - au plus un est un carré parfait d'après le fait 3.5.

Donc, il existe $(M, P, Q) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $\{u, u+2, u+4\} = \{M^2, 3P^2, 5Q^2\}$. Ceci permet de considérer les trois cas suivants qui lèvent tous une contradiction.

- Supposons avoir $u = M^2$.
 - (1) Comme $\{u+2, u+4\} = \{3P^2, 5Q^2\}$, nous savons que $3 \nmid (u+3)$ et $5 \nmid (u+3)$, d'où $u+3 = 2^a T^2$ avec $(a, T) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.
 - (2) Modulo 4, $u \equiv M^2 \equiv 1$ car $u \in 2\mathbb{N}+1$, donc $u+3 \equiv 0$, d'où $a \geq 2$.
 - (3) Modulo 8, $u \equiv M^2 \equiv 1$ car $u \in 2\mathbb{N}+1$, donc $u+3 \equiv 4$, d'où $a = 2$.
 - (4) Dès lors, $u+3 \in {}^2\mathbb{N}$, puis $(u+3, u) = (4, 1)$ via le fait 3.5.
 - (5) Forcément $n = u = 1$, mais $v_7(\pi_1^6) = 1$ contredit $\pi_n^6 \in {}^2\mathbb{N}$.
- Supposons maintenant que $u+4 = M^2$.
 Comme $\{u, u+2\} = \{3P^2, 5Q^2\}$, la preuve précédente s'adapte à $(u+1, u+4)$.
- Supposons enfin que $u+2 = M^2$.
 $\{u, u+4\} = \{3P^2, 5Q^2\}$ est impossible d'après ce qui suit en travaillant modulo 4.
 - (1) Si $(u, u+4) = (3P^2, 5Q^2)$, alors $u \equiv 0$ ou 3 , $u+4 \equiv 0$ ou 1 , et $u \equiv \pm 1$ se contredisent.
 - (2) Si $(u, u+4) = (5Q^2, 3P^2)$, on obtient une contradiction comme ci-dessus.

□

10. AVEC 8 FACTEURS

Fait 10.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$.

La démonstration très astucieuse suivante est proposée dans un échange sur <https://math.stackexchange.com> (voir la section 11). Comme pour le cas de quatre facteurs, l'algèbre va nous permettre d'aller très vite.

Preuve.

- L'une des preuves du fait 6.1 nous donne $n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1$. En particulier, $(n+4)(n+5)(n+6)(n+7) = (n^2 + 11n + 29)^2 - 1$.
- L'idée astucieuse va être de considérer les deux expressions suivantes qui viennent de $\pi_n^7 = (f(n)^2 - 1)(g(n)^2 - 1)$.
 - (1) $f(n) = n^2 + 3n + 1$.
 - (2) $g(n) = n^2 + 11n + 29$.

- Nous avons les manipulations algébriques naturelles suivantes.

$$\begin{aligned}
 \pi_n^7 &= (f(n)^2 - 1)(g(n)^2 - 1) \\
 &= (a^2 - 1)(b^2 - 1) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} a = f(n) \text{ et } b = g(n). \\
 &= a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 \\
 &= a^2b^2 - (a - b)^2 - 2ab + 1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Choisir } (a - b)^2 \text{ au lieu de } (a + b)^2 \text{ va nous permettre,} \\
 &= a^2b^2 - 2ab + 1 - (a - b)^2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{un plus bas, de ne pas trop nous éloigner de } \pi_n^7. \\
 &= (ab - 1)^2 - (a - b)^2 \\
 &< (ab - 1)^2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} b - a = 8n + 28 > 0.
 \end{aligned}$$

Donc $\pi_n^7 < (f(n)g(n) - 1)^2$.

- Le point précédent rend naturel de tenter de démontrer que $(f(n)g(n) - 2)^2 < \pi_n^7$, car, si tel est le cas, π_n^7 sera encadré par les carrés de deux entiers consécutifs, et forcément nous aurons $\pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$. Ce qui suit montre que notre pari est gagnant dès que $n \geq 4$. Que c'est joli !

$$\begin{aligned}
 &(f(n)g(n) - 2)^2 < \pi_n^7 \\
 \iff &(ab - 2)^2 < (a^2 - 1)(b^2 - 1) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} a = f(n) \text{ et } b = g(n). \\
 \iff &a^2b^2 - 4ab + 4 < a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 \\
 \iff &a^2 + b^2 - 4ab + 3 < 0
 \end{aligned}$$

Le site <https://www.wolframalpha.com> nous donne sans effort cognitif¹⁰ ce qui suit (les « transhumanophobes » se reporteront à la remarque qui suit).

$$\begin{aligned}
 &a^2 + b^2 - 4ab + 3 \\
 &= -2(n^2 + 7n)^2 + 36(n^2 + 7n) + 729 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} m = n^2 + 7n \\
 &= -2m^2 + 36m + 729 \\
 &= 2(m - 9)^2 + 891
 \end{aligned}$$

Or, $n^2 + 7n - 9 = 0$ admet pour unique racine positive $n = \frac{-7 + \sqrt{85}}{2} \approx 1,1$, donc $a^2 + b^2 - 4ab + 3$ décroît en fonction de n à partir de $n = 2$. Les calculs suivants donnent alors que $a^2 + b^2 - 4ab + 3 < 0$ pour $n \geq 4$.

10. Il faut vivre avec son temps...

n	1	2	3	4
$-2(n^2 + 7n)^2 + 36(n^2 + 7n) + 729$	889	729	9	-1559

- Nous venons de voir que $(ab - 2)^2 < \pi_n^7 < (ab - 1)^2$ sur $\mathbb{N}_{\geq 4}$, donc $\pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$ dès que $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$, mais pour $n \in \{1, 2, 3\}$, $v_7(\pi_n^7) = 1$ donne $\pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$, ce qui permet de conclure.

□

Remarque 10.1. *Voici comment obtenir une preuve 100 % non silliconé. Pour cela, commençons par les manipulations algébriques naturelles suivantes qui cherchent à obtenir le même coefficient pour n dans chaque parenthèse, tout en passant d'un polynôme de degré 8 à un polynôme de degré 4.*

$$\begin{aligned}
\pi_n^7 &= n(n+7) \cdot (n+1)(n+6) \cdot (n+2)(n+5) \cdot (n+3)(n+4) \\
&= (n^2 + 7n) \cdot (n^2 + 7n + 6) \cdot (n^2 + 7n + 10) \cdot (n^2 + 7n + 12) \\
&= m(m+6)(m+10)(m+12) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} m = n^2 + 7n
\end{aligned}$$

Nous décidons d'offrir un 1^{er} rôle à la variable $m = n^2 + 7n$. Voyons où cela nous mène...

$$\begin{aligned}
&a^2 + b^2 - 4ab + 3 \\
&= a(a - 4b) + b^2 + 3 \\
&= (m - 4n + 1)(-3m - 20n - 115) + (m + 4n + 29)^2 + 3 \quad \left. \begin{array}{l} a = n^2 + 3n + 1 = m - 4n + 1 \\ b = n^2 + 11n + 29 = m + 4n + 29 \end{array} \right\} \\
&= -3m^2 - (8n + 118)m + (4n - 1)(20n + 115) + m^2 + 2(4n + 29)m + (4n + 29)^2 + 3 \\
&= -2m^2 - 60m + 729 + 672n + 96n^2 \\
&= -2m^2 - 60m + 729 + 96(n^2 + 7n) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Là, cela devient magique !} \\
&= -2m^2 - 60m + 729 + 96m \\
&= -2m^2 + 36m + 729
\end{aligned}$$

11. SOURCES UTILISÉES

Fait 7.1.

- Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré « $n(n+1)\dots(n+k)$ est un carré ? » sur le site lesmathematiques.net.

La démonstration via le principe des tiroirs trouve sa source dans cet échange.

- L'article « *Le produit de 5 entiers consécutifs n'est pas le carré d'un entier.* » de T. Hayashi, Nouvelles Annales de Mathématiques, est consultable via Numdam, la bibliothèque numérique française de mathématiques.

Cet article a fortement inspiré la longue preuve.

Fait 8.1.

Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré « *product of six consecutive integers being a perfect numbers* » sur le site <https://math.stackexchange.com>.

La courte démonstration est donnée dans cet échange. Vous y trouverez aussi un très joli argument basé sur les courbes elliptiques rationnelles.

Fait 9.1.

Un échange consulté le 3 février 2024, et titré « *Proof that the product of 7 successive positive integers is not a square* » sur le site <https://math.stackexchange.com>.

La courte démonstration est donnée dans cet échange, mais certaines justifications manquent.

Fait 10.1.

Un échange consulté le 4 février 2024, et titré « *How to prove that the product of eight consecutive numbers can't be a number raised to exponent 4 ?* » sur le site <https://math.stackexchange.com>.

La démonstration astucieuse vient de l'une des réponses de cet échange, mais la justification des deux inégalités n'est pas donnée.