Démontrons rapidement que $n \mid \left(2^n+1\right)$ dès que $n=3^k$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ car le cas $k=0$ est trivial.

Initialisation pour $k=1$.
Clairement, $3 \mid \left(2^3+1\right)$.

Étape de récurrence.
On a les implications logiques suivantes.

$$
\begin{aligned}
& \left(3^k\right) \mid \left(2^{\left(3^k\right)}+1\right) \\
\Longrightarrow\ & \exists m \in \mathbb{Z} \,.\left[2^{\left(3^k\right)}+1=m \cdot 3^k\right] \\
\Longrightarrow\ & \exists m \in \mathbb{Z} \,.\left[2^{\left(3^k\right)}=-1+m \cdot 3^k\right] \\
\Longrightarrow\ & \exists m \in \mathbb{Z} \,.\left[\left(2^{\left(3^k\right)}\right)^3=\left(-1+m \cdot 3^k\right)^3\right] \\
\Longrightarrow\ & \exists m \in \mathbb{Z} \,.\left[2^{\left(3^{k+1}\right)}=-1+3 \cdot m \cdot 3^k-3 \cdot\left(m \cdot 3^k\right)^2+\left(m \cdot 3^k\right)^3\right] \\
\Longrightarrow\ & 2^{\left(3^{k+1}\right)} \equiv -1 \mod \left(3^{k+1}\right)
\end{aligned}
$$

Besoin de $k \neq 0$ ici.

En résumé, $\left(3^k\right) \mid \left(2^{\left(3^k\right)}+1\right)$ implique $\left(3^{k+1}\right) \mid \left(2^{\left(3^{k+1}\right)}+1\right)$.

Conclusion : ...

Seul truc intéressant dans cette affaire de niveau TS de l'ancien temps : calcul d'une limite de suite dans l'anneau des entiers 3-adique.

La preuve passe en fait à l'échelle pour démontrer que si $d \mid \left(2^d+1\right)$ alors $d^k \mid \left(2^{(d^k)}+1\right)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, et aussi que si $a \mid \left(2^a+1\right)$ et $b \mid \left(2^b+1\right)$ alors $a^k \cdot b \mid \left(2^{(a^k \cdot b)}+1\right)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Une recherche brutale de solutions du type $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$, avec p_i premier, nous donne les solutions suivantes.