

À PROPOS DE L'EXERCICE DE SPÉ MATHS DU BAC DE JUIN 2024 (MÉTROPOLE)

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writing/drafts>.

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



Sachant que $\ln \alpha = 2(2 - \alpha)$ où $\alpha \in [1; 2]$, nous allons calculer $\mathcal{I} = \int_{1/\alpha}^1 x^2 \ln x \, dx$ sans faire d’intégration par parties.

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_{1/\alpha}^1 x^2 \int_1^x \frac{1}{t} \, dt \, dx \\ &= - \int_{1/\alpha}^1 \int_x^1 \frac{x^2}{t} \, dt \, dx \\ &= - \int_{1/\alpha}^1 \int_{1/\alpha}^t \frac{x^2}{t} \, dx \, dt \\ &= \int_1^{1/\alpha} \left[\frac{x^3}{3t} \right]_{1/\alpha}^t \, dt \\ &= \int_1^{1/\alpha} \left(\frac{t^2}{3} - \frac{1}{3\alpha^3 t} \right) \, dt \\ &= \left[\frac{t^3}{9} - \frac{1}{3\alpha^3} \ln t \right]_1^{1/\alpha} \\ &= \frac{1}{9\alpha^3} - \frac{1}{3\alpha^3} \ln \left(\frac{1}{\alpha} \right) - \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{9\alpha^3} + \frac{2(2-\alpha)}{3\alpha^3} - \frac{1}{9} \\ &= \frac{1 + 6(2-\alpha) - \alpha^3}{9\alpha^3} \\ &= \frac{13 - 6\alpha - \alpha^3}{9\alpha^3}\end{aligned}$$

On veut une intégrale positive pour faciliter la suite.

Faire un schéma pour la permutation des intégrales.

$\ln \alpha = 2(2 - \alpha)$