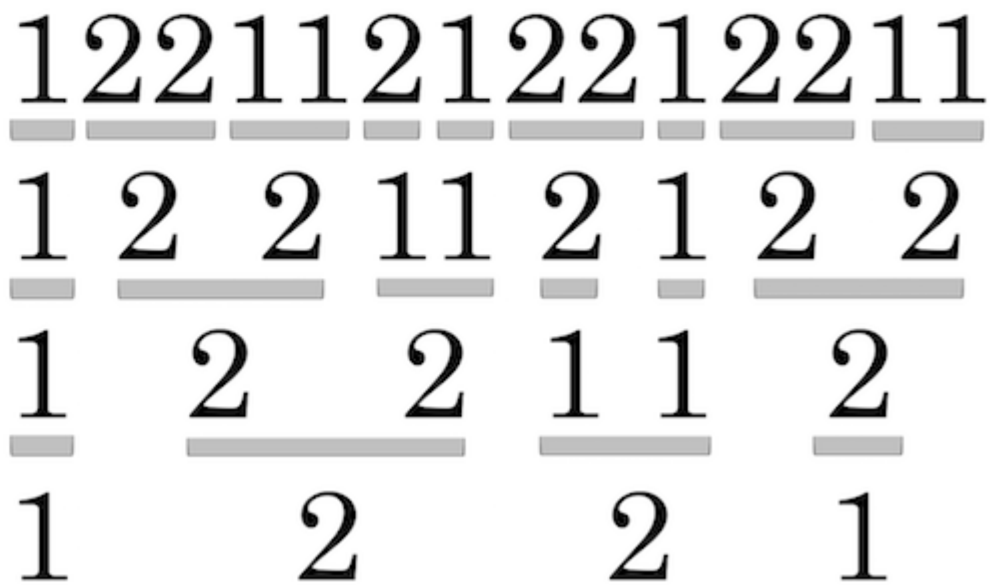
Échos de la recherche *(-Echos-de-la-recherche-.html)*

AUTOUR DU MOT DE KOLAKOSKI

et de la combinatoire des mots

Piste noire *(spip.php?page=mot&id_mot=23)* Le *17 avril 2021* - Ecrit par Jules Flin *(_Flin-Jules_.html)*, Irène Marcovici *(_Marcovici_.html)*



$\pi = 3,141592653589793\ldots$ Voilà un nombre bien familier quand on fait un peu de mathématiques ! Et pourtant, même si on dispose de nombreux outils pour calculer une valeur approchée de π aussi précise qu'on le souhaite, les décimales de π recèlent encore bien des mystères. Par exemple, on ne sait pas dire si tous les chiffres de 0 à 9 apparaissent aussi souvent les uns que les autres, même si tout laisse penser que c'est le cas.

Dans cet article, nous allons nous intéresser à une autre suite de chiffres, la suite de Kolakoski :

$$\mathbf{K} = 1221121221221121122121121221\ldots$$

malgré les outils développés dans ce champ de recherche, qui relève de ce qu'on appelle la *combinatoire des mots*.

La combinatoire des mots

Existe-t-il un mot plus long qu'« *anticonstitutionnellement* » ? Dans les dictionnaires français usuels, non. Mais en mathématiques, on peut s'autoriser des mots arbitrairement grands, voire des mots de longueur *infinie*. Au croisement entre mathématiques et informatique théorique, l'étude des propriétés de mots (finis ou infinis) s'inscrit dans un domaine qu'on nomme *combinatoire des mots*.

Mathématiquement, un mot n'est rien de plus qu'une suite de lettres, choisies dans un alphabet. Jusqu'ici, tout va bien. Pour se donner un premier exemple intuitif, le lecteur ou la lectrice pourra évidemment penser à l'alphabet

$$\{A, B, C, \ldots, X, Y, Z\}.$$

Sur ce dernier, on peut construire le mot « $IMAGES$ ». Cette définition générale confère à la combinatoire des mots un intérêt dans de nombreux domaines de recherche : en génétique, par exemple, on a plutôt l'habitude de raisonner sur l'alphabet

$$\{A, C, G, T\},$$

où chacune des lettres encode respectivement les molécules d'*adénine*, *cytosine*, *guanine* et *thymine*, entrant dans la composition de l'ADN. Un brin peut alors être vu comme un mot long (mais fini) sur cet alphabet.

La double hélice d'ADN, deux mots sur $\{A, C, G, T\}$.

Du côté de l'informatique, on utilise souvent l'alphabet binaire $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Dans le disque dur d'un ordinateur, le mot « *sciences* » peut, par exemple, être mémorisé sous la forme

$$01110011\ 01100011\ 01101001\ 01100101\ 01101110\ 01100011\ 01100101\ 01$$

ce qui correspond bien à un mot sur $\mathcal{A}$ (il s'agit ici de ce qu'on appelle un codage ASCII binaire). Que ce soit pour étudier les nucléotides d'un brin d'ADN ou pour encoder un fichier informatique volumineux, le nombre de *lettres* dans ces mots dépasse largement le milliard, ce qui justifie l'intérêt des mathématiciens et mathématiciennes pour les *mots infinis*.

Pour construire un mot infini, il suffit de partir d'un mot initial et de lui ajouter des lettres, sans s'arrêter. Par exemple, le mot

$$m_\infty = ABABABABABAB\ldots$$

sur l'alphabet $\{A, B\}$, est la limite de la suite de mots définie par

$$m_1 = AB \quad m_2 = ABAB \quad \ldots \quad m_{n+1} = m_n AB.$$

L'opération consistant à *accoler* deux mots, que nous réalisons ici, s'appelle la *concaténation*. Dans la suite, on la notera, soit par le point central $\cdot$, soit simplement en juxtaposant les deux mots. À partir de maintenant, nous allons nous focaliser sur un mot infini particulier : le mot de Kolakoski.

Le mot de Kolakoski, et comment le générer

Lorsqu'on a un mot défini sur un alphabet quelconque, on peut lui appliquer l'opération de *codage par plages* (*run-length encoding* en anglais) qui consiste à

$$\mathcal{C}(112223221333) = 231213$$

Remarquons qu'en général, rien n'impose qu'un mot sur l'alphabet $\{1, 2, 3\}$ soit codé sur ce même alphabet (par exemple, $\mathcal{C}(1111) = 4$). Nous avons désormais tous les outils pour comprendre ce qu'est le mot de Kolakoski : c'est un mot infini $\mathbf{K}$ sur l'alphabet $\{1, 2\}$ qui *(i)* est son propre codage par plages (c'est-à-dire que $\mathcal{C}(\mathbf{K}) = \mathbf{K}$), et *(ii)* dont la première lettre est un 1. Le mot $\mathbf{K}$ peut ainsi être considéré comme un mot infini *auto-décrit* [1 *(#nb1)*].

Illustration de la relation $\mathcal{C}(\mathbf{K}) = \mathbf{K}$.

Pour pouvoir étudier ce mot, nous aimerions le construire, autrement dit nous voulons écrire un programme qui, quel que soit l'entier naturel n que nous nous donnons, renvoie les n premières lettres de $\mathbf{K}$ (c'est-à-dire, le préfixe de $\mathbf{K}$ de longueur n). Une méthode astucieuse pour élaborer une telle procédure consiste à lire l'animation ci-dessus à l'envers ! En effet, si l'on dispose d'un préfixe de $\mathbf{K}$, on peut le voir comme le codage par plage d'un préfixe plus long, et comme on en connaît la première lettre, on peut déterminer sans ambiguïté ce nouveau préfixe. Formalisons cette intuition : étant donné un préfixe m de $\mathbf{K}$ (dont la longueur sera discutée dans un instant), on peut obtenir un préfixe plus long m', en lisant m de gauche à droite : à chaque symbole de m correspond alors une plage de m'. Cet argument permet donc de connaître la « structure » de m'. Il ne nous reste alors plus qu'à remplir les cases « vides » du mot m', en commençant par un 1, puis en alternant entre les deux lettres disponibles :

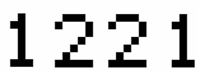


Illustration de la construction d'un préfixe de $\mathbf{K}$ à partir d'un préfixe plus court.

La question est donc de trouver un premier préfixe m_0 auquel appliquer ce processus. Puisqu'on sait que $\mathbf{K}$ doit commencer par un 1, essayons de partir de $m_0 = 1$. Malheureusement, ce préfixe ne nous donne pas assez d'information, car c'est un 1, soit c'est un 2. Commençons par supposer que c'est un 1 ou, de manière équivalente, que $\mathbf{K}$ commence par 11. Une contradiction surgit alors, car la première lettre du codage par plages ne pourra être un 1 (ce qui contredit la définition de $\mathbf{K}$). On en conclut donc que la deuxième lettre de $\mathbf{K}$ est un 2. Cette fois-ci, en appliquant la procédure décrite ci-dessus un nombre suffisant de fois au mot $m_0 = 12$, on réussit à atteindre la longueur escomptée. Voyons comment fonctionne cet algorithme sur l'exemple $n = 11$, c'est-à-dire pour construire les 11 premières lettres de $\mathbf{K}$. En appliquant un première fois notre protocole, on obtient le nouveau préfixe

$$m_1 = 122$$

qui vérifie bien $\mathcal{C}(m_1) = m_0$ et dont la première lettre est 1. Mais ce préfixe est trop court. On applique la méthode une seconde fois,

$$m_2 = 12211$$

Ce nouveau mot vérifie à nouveau $\mathcal{C}(m_2) = m_1$ et sa première lettre est bien un 1. Tant que la longueur des nouveaux préfixes m_i est inférieure à 11, on calcule le préfixe suivant. Aux trois itérations suivantes, l'algorithme nous renvoie

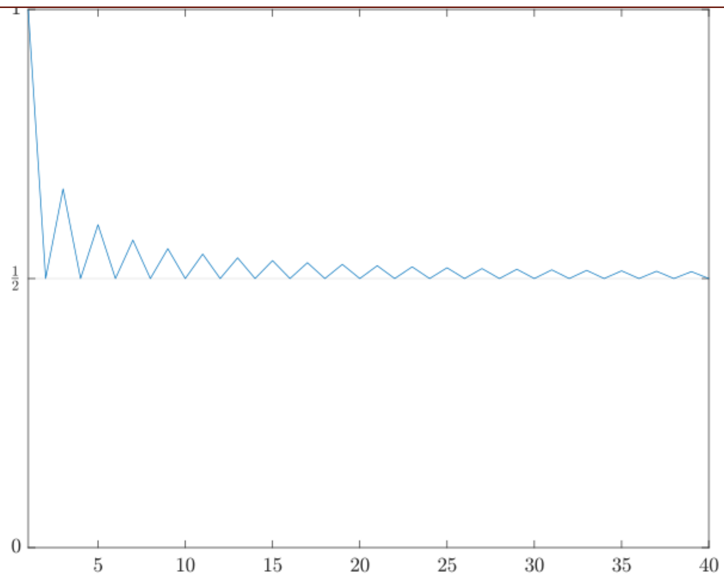
$$m_3 = 1221121 \qquad m_4 = 1221121221 \qquad m_5 = 122112122122112$$

À ce moment-là, le programme s'arrête, car la longueur de m_5 est supérieure à 11. Si on veut précisément les onze premières lettres de $\mathbf{K}$, on se contente de tronquer m_5. Au passage, cette construction nous assure l'existence et l'unicité d'un mot infini vérifiant les propriétés *(i)* et *(ii)*.

Dans un mot fini, on peut s'intéresser aux fréquences des lettres, c'est-à-dire à leurs proportions respectives dans le mot. Quand le mot est infini, la fréquence n'est plus une notion évidente. Toutefois, on se ramène naturellement au cas fini en observant la proportion du caractère qui nous intéresse dans des préfixes de plus en plus longs. Par exemple, la fréquence de la lettre A dans le mot m_∞ présenté en introduction existe et vaut $\frac{1}{2}$.

La fréquence d'apparition de A dans m_∞ existe et vaut $\frac{1}{2}$. *(javascript:;)*

> *Comme on peut le voir sur le graphe des fréquences d'apparition de A dans*



Graphe des fréquences d'apparition de A dans les préfixes de longueur n de m_∞, pour n variant de 1 à 40.

La fréquence d'apparition d'un caractère pourrait-elle ne pas exister ? (javascript:;)

Quand on ne s'intéresse qu'à des mots finis, la fréquence d'un caractère a dans un mot M existe toujours : c'est le rapport entre le nombre de a dans M et la longueur du mot M. Dans le cas infini, il s'agit de trouver le nombre a_n d'apparitions de ce caractère parmi les n premières lettres, puis d'étudier le comportement, pour des entiers n de plus en plus grands, de la suite définie par

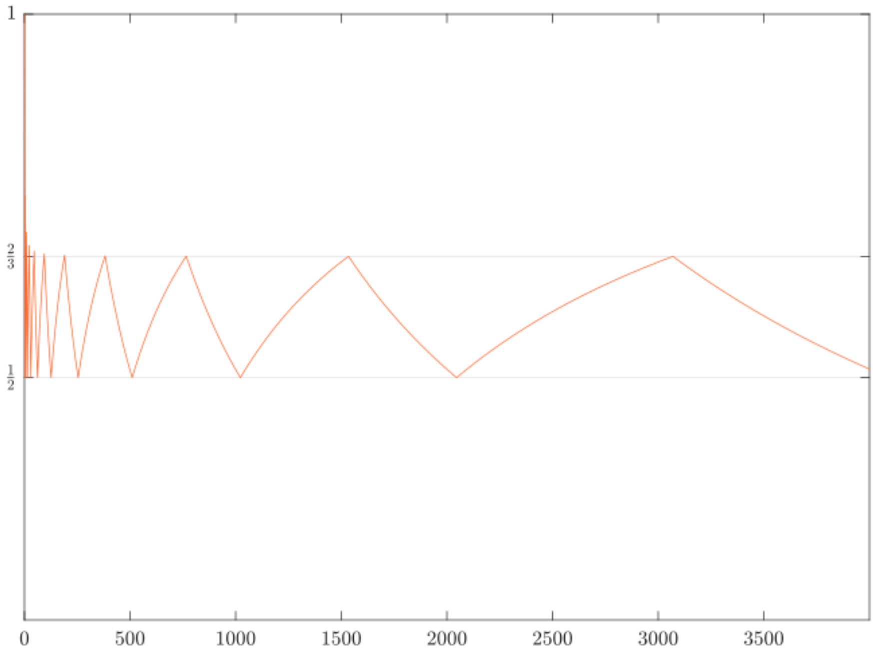
$$u_n = \frac{a_n}{n}.$$

En particulier, on cherche à savoir si les termes de la suite se rapprochent de plus en plus d'une certaine valeur, qu'on appelle alors la limite de la suite. Mais cette limite n'a aucune raison d'exister. C'est un fait général qu'il est utile de garder à l'esprit en mathématique : prudence est mère de sûreté lorsque l'on manipule des limites. Illustrons cette mise en garde avec le mot infini suivant, construit sur l'alphabet binaire $\{0, 1\}$:

$$M = 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ \ldots$$

Notons u_n le nombre de 0 dans les n premières lettres de M. Les premières valeurs de u_n sont données par le tableau suivant, et le graphe ci-dessous représente u_n en fonction de n, pour n allant de 1 à 4000.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{7}{12}$



Graphe des fréquences d'apparition de 0 dans les préfixes de longueur n de M, pour n variant de 1 à 4000.

Comme le laisse deviner le graphe ci-dessus, on peut montrer que les valeurs de la suite oscillent indéfiniment entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$, de sorte qu'il n'y a pas de limite.

Pour la suite $\mathbf{K}$, les simulations numériques laissent penser que les fréquences des lettres 1 et 2 existent et sont toutes les deux égales à $1/2$ [2 *(#nb2)*]. Mais on ne sait pas le démontrer... C'est donc pour le moment une *conjecture* (résultat mathématique attendant d'être démontré ou réfuté). Pour en comprendre l'étendue, revenons sur l'histoire qui se cache derrière cette suite.

La conjecture de Keane

Des années plus tard, l'artiste (et mathématicien à ses heures perdues) William Kolakoski redécouvrait cette suite, en proposant en 1965 l'énigme suivante aux lecteurs de l'*American Mathematical Monthly* :

> *« Décrire une règle simple permettant de construire la suite*
>
> $1\ 2\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2\ 2\ 1\ 2\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 2\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2\ 2$
>
> *Quel est son n-ième terme ? Est-elle périodique ? »*

Un mot est périodique si, à la manière d'un papier peint, un motif se répète à intervalle régulier. Cette question a vite été traitée (nous laissons le soin aux lecteurs et lectrices d'Images des Mathématiques d'y répondre aussi !), mais le mot a continué à attirer la curiosité, et le nom de *suite de Kolakoski* s'est vite imposé, même si *suite d'Oldenburger* aurait été plus légitime. Kolakoski voyait en ce mot un signe de l'univers : une règle simple le décrit parfaitement, et pourtant, on peut observer de grandes irrégularités dans la distribution des lettres qui le composent. Ce sont ces irrégularités qui rendent si compliquée la preuve (ou la réfutation) de la conjecture suivante, formulée explicitement par Keane en 1991 :

Conjecture de Keane :

> *La fréquence d'apparition de la lettre 1 dans le mot infini $\mathbf{K}$ existe et vaut $\frac{1}{2}$.*

À l'aide de la théorie des automates, différents travaux dans la lignée de ceux de Chvátal [4 *(#nb4)*] ont permis de montrer que les oscillations des fréquences restent confinées dans l'intervalle

$$I = [0.49992, 0.50008].$$

En substance, l'idée consiste à écrire plusieurs copies de la suite de Kolakoski, sur des lignes consécutives, en alignant les chiffres d'une manière judicieuse. En lisant de gauche à droite l'ensemble de ces lignes, et en étudiant les transitions possibles entre une colonne de chiffres et la suivante, on peut alors obtenir des bornes sur

Ces résultats vont dans le sens de la conjecture de Keane, mais le problème reste ouvert. Dans la suite de cet article, nous allons étudier une variante du mot de Kolakoski, pour laquelle on peut montrer que la fréquence de chaque symbole existe et même calculer leur valeur. Cela nous permettra de présenter différents outils utiles pour résoudre ce type de questions.

Une variante de $\mathbf{K}$

La règle de construction de $\mathbf{K}$ est sans ambiguïté… Il ne devrait donc pas être si compliqué d'étudier comment se comportent les nombres respectifs de 1 et de 2 qui le composent. Et pourtant, la conjecture de Keane résiste toujours aux efforts des mathématiciennes et mathématiciens.

Mais comme souvent en mathématiques, quand on ne sait pas résoudre un problème, il peut être intéressant de faire un pas de côté pour s'intéresser à un problème voisin ! Étudions donc un proche cousin de $\mathbf{K}$, qu'on notera $\mathbf{K}'$, dont les premières lettres sont données par

$$\mathbf{K}' = 3\ 3\ 3\ 1\ 1\ 1\ 3\ 3\ 3\ 1\ 3\ 1\ 3\ 3\ 3\ 1\ 1\ 1\ldots$$

Ce mot infini est analogue à $\mathbf{K}$ dans le sens où il est également point fixe de l'opérateur de codage par plages (c'est même l'unique mot écrit avec des 1 et des 3 et commençant par un 3 ayant cette propriété). À nouveau, il est naturel de se demander si la fréquence f de 1 dans $\mathbf{K}'$ existe, et cette fois, on peut répondre par l'affirmative, et même la calculer f.

La première étape consiste à grouper les lettres deux par deux, afin de considérer $\mathbf{K}'$ comme un mot sur l'alphabet $\{33, 31, 11, 13\}$:

$$\mathbf{K}' = 33\ 31\ 11\ 33\ 31\ 31\ 33\ 31\ 11\ldots$$

Pour y voir un peu plus clair, on note $A = 33$, $B = 31$, $C = 11$ et $D = 13$, de sorte que

$$\mathbf{K}' = A\ B\ C\ A\ B\ B\ A\ B\ C\ \ldots$$

Il semblerait que la lettre D n'apparaisse pas parmi les premières lettres. C'est en donné ci-dessus). En combinatoire des mots, cette opération est appelée une *substitution*, et elle va nous permettre de générer la variante de $\mathbf{K}$. En effet, en notant σ cette substitution, et en l'appliquant récursivement au mot $m_0 = A$, on obtient une suite de préfixes de plus en plus grands de $\mathbf{K}'$:

$m_1 = \sigma(m_0) = A\ B\ C$

$m_2 = \sigma(m_1) = A\ B\ C\ A\ B\ B$

$m_3 = \sigma(m_2) = A\ B\ C\ A\ B\ B\ A\ B\ C\ A\ B\ A\ B$

$\dots$

Le problème se ramène maintenant à compter les nombres de A, de B et de C dans m_n (qu'on notera respectivement a_n, b_n et c_n), et ce pour tout entier n. Par construction de la suite, on a les relations de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= a_n + b_n \\ b_{n+1} &= a_n + b_n + c_n \\ c_{n+1} &= a_n \end{cases}$$

Comme expliqué dans l'encart suivant, il est possible de « résoudre » ce système pour des grandes valeurs de n (plus précisément, on trouve des *équivalents* de ces suites, quand n tend vers $+\infty$). La valeur de f, donnée par

$$f = \lim_{n\to+\infty} \frac{\text{nombre de 1 dans } m_n}{\text{longueur de } m_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n + 2c_n}{2a_n + 2b_n + 2c_n},$$

peut alors être calculée explicitement.

Calcul de f. *(javascript:;)*

On se ramène ici à un problème d'algèbre linéaire, en écrivant les relations entre les a_n, b_n et c_n, et terme de matrices et de vecteurs : en posant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Au-delà de la concision qu'apporte cette écriture, on peut maintenant utiliser des outils empruntés à l'algèbre linéaire. Remarquons d'abord qu'en appliquant successivement la formule précédente, on trouve que, pour tout n*,*

$$X_n = A^n X_0 \text{ où } X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En calculant explicitement A^n *pour tout entier* n*, on pourra donc en déduire une formule pour* X_n*. Mais, en général, calculer les puissances d'une matrice n'est pas une mince affaire. Il existe toutefois des matrices dont on sait calculer les puissances sans difficultés : les matrices diagonales (dont les coefficients qui ne sont pas sur la diagonale sont tous nuls). Essayons de nous en convaincre sur un exemple simple*

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

Pour calculer la puissance n*-ème d'une matrice diagonale* D*, il suffit donc d'élever chacun des coefficients à la puissance* n*. Dans certains cas, on peut se ramener à cette situation, en utilisant ce qu'on appelle une méthode de diagonalisation, permettant de trouver deux matrices* P *et* P^{-1} *inverses l'une de l'autre, et une matrice diagonale* D*, telles que*

$$A = PDP^{-1}.$$

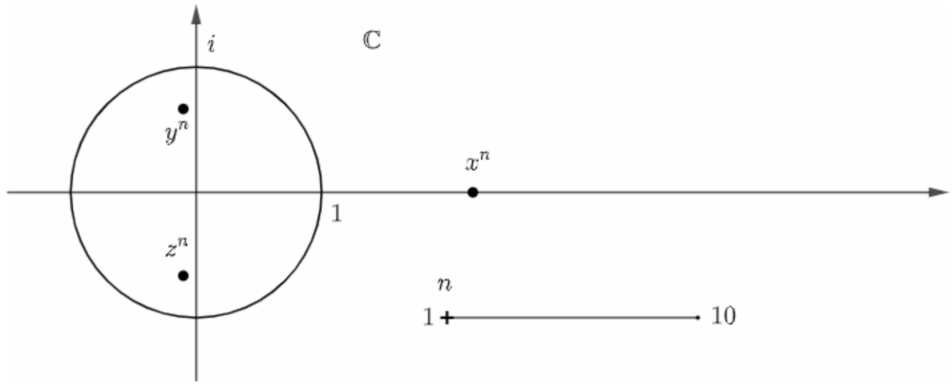
Notons que pour des raisons techniques, P, P^{-1} *et* D *sont des matrices à coefficients dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes. Cette nouvelle relation nous permet de calculer plus efficacement les puissances de* A*. En effet, nous laissons le soin aux lecteurs et lectrices de prouver que, pour tout entier* n*,*

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Ici, la matrice A *possède une propriété particulière, qui va nous aider à*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

la matrice diagonale obtenue dans la décomposition ci-dessus, les calculs montrent que x *est un nombre réel strictement supérieur à* 1, *et qu'en plaçant* y *et* z *sur le plan complexe, ils se retrouvent à l'intérieur du cercle de centre* 0 *et de rayon* 1. *Ainsi, en élevant* D *à la puissance* n, *le coefficient* x^n *va continuer de croître à mesure que* n *grandit, et les coefficients* y^n *et* z^n *vont se rapprocher très rapidement de 0, si bien qu'on pourra les négliger dans nos calculs :*



x^n reste sur la droite des réels, en devenant très grand avec n, *tandis que* y^n *et* z^n *se rapprochent de l'origine.*

Or, pour tout entier n, a_n *s'exprime sous la forme*

$$a_n = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

où les lettres grecques α *(alpha),* β *(beta) et* γ *(gamma) sont des constantes (qui ne dépendent pas de* n*), qu'on peut calculer explicitement en utilisant les valeurs de* a_n *pour* $n = 0, 1, 2$. *Donc finalement, comme* y *et* z *seront négligeables devant* x, *pour* n *suffisamment grand,* a_n *sera très proche de* αx^n *(ici* $\alpha \approx 0,4607$*). On procède de la même manière pour* b_n *et* c_n *: quand* n *tend vers* $+\infty$, b_n *sera bien approximé par* $(0,5554\ldots) \cdot x^n$ *et* c_n *par* $(0,2088\ldots) \cdot x^n$. *D'où :*

$$\begin{aligned} f &= \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n + 2c_n}{2a_n + 2b_n + 2c_n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(0,5554\ldots)\cdot x^n + 2\cdot(0,2088\ldots)\cdot x^n}{2\cdot(0,4607\ldots)\cdot x^n + 2\cdot(0,5554\ldots)\cdot x^n + 2\cdot(0,2088\ldots)\cdot x} \end{aligned}$$

$$P(x) = 4x^3 - 14x^2 + 15x - 4.$$

Une valeur approchée de f est donnée par $f \approx 0,3972$, et on obtient au passage la fréquence f' de 3 dans $\mathbf{K}'$:

$$f' = 1 - f \approx 0,6028.$$

Quid de la conjecture de Keane

Qu'avons-nous appris ? Nous avons calculé les fréquences pour la suite $\mathbf{K}'$, dont la définition semble bien proche de celle de $\mathbf{K}$. Cependant, les outils d'algèbre linéaire utilisés pour $\mathbf{K}'$ ne suffisent pas à traiter la suite $\mathbf{K}$. Des avancées récentes permettent de donner un encadrement des fréquences pour $\mathbf{K}$, avec une précision de moins d'un millième, comme nous l'avons évoqué plus haut. Mais cela ne répond pas complètement à la conjecture de Keane, qui reste donc ouverte pour le moment. Elle a peut-être encore de beaux jours devant elle...

Post-scriptum :

Les auteurs remercient Jérôme Buzzi et Laurent Bartholdi pour leurs encouragements et leurs conseils dans la rédaction de cet article. Ils remercient également les relecteurs d'Images des mathématiques dont les noms ou pseudonymes sont les suivants : Pierre Lescanne, Laurent Théry, Cidrolin, Olivier, pour l'attention qu'ils ont portée à cet article et pour leurs suggestions d'amélioration.

Article édité par Laurent Bartholdi *(_Laurent_.html)*

NOTES

[1 *(#nh1)*] La suite de Kolakoski figure sur l'OEIS *(https://oeis.org/A000002)*. Sloane a répertorié quelques autres exemples de suites auto-décrites *(http://neilsloane.com/doc/g4g7.pdf)*, comme la suite de Golomb *(https://oeis.org/A001462)*.

(1939). *Exponent Trajectories in Symbolic Dynamics*. Transactions of the American Mathematical Society, 46(3), 453. doi.org/10.1090/S0002-9947-1939-0000352-9 *(https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1939-0000352-9)*.

[4 *(#nh4)*] Chvàtal V. (1994). *Notes on the Kolakoski Sequence (http://users.encs.concordia.ca/~chvatal/93-84.pdf)*. DIMACS Technical Report 93-84 *(http://archive.dimacs.rutgers.edu/TechnicalReports/abstracts/1993/93-84.html)*.

[5 *(#nh5)*] Nilsson J. (2014). *Letter frequencies in the Kolakoski sequence*. Acta Physica Polonica A, 126(2), p. 549-552. doi.org/10.12693/APhysPolA.126.549 *(https://doi.org/10.12693/APhysPolA.126.549)*.