BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS – UNE MÉTHODE EFFICACE

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page ***https://github.com/bc-writing/drafts***.

Mentions « légales »

Table des matières

1. Ce qui nous intéresse 2
2. Notations utilisées 2
3. Les carrés parfaits 3
3.1. Structure 3
3.2. Distance entre deux carrés parfaits 3
4. Prenons du recul 5
4.1. Construire des sf-tableaux 5
4.2. Construire des sf-tableaux 5
5. Structure des sf-tableaux 7
5.1. A propos des sf-tableaux partiels 7
5.2. A propos des sf-tableaux non partiels 7
6. Applications 8
6.1. Application au cas de 2 facteurs 8
6.2. Application au cas de 3 facteurs 8
6.3. Application au cas de 4 facteurs 8
6.4. Application au cas de 5 facteurs 9
7. Et après ? 11
7.1. La méthode via le cas de 6 facteurs 11
8. Sources utilisées 11
9. AFFAIRE À SUIVRE... 12

Date : 25 Jan. 2024 – 7 Fév. 2024.

1. Ce qui nous intéresse

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers » [1], Paul Erdos démontre que pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit de $(k+1)$ entiers consécutifs $n(n+1)\cdots(n+k)$ n'est jamais le carré d'un entier.

Il est facile de trouver sur le web des preuves à la main de $n(n+1)\cdots(n+k) \notin {}^2_*\mathbb{N}$ pour $k \in [\![2\,;8]\!]$. Bien que certaines de ces preuves soient très sympathiques, leur lecture ne fait pas ressortir de schéma commun de raisonnement. Dans ce document, nous allons tenter de limiter au maximum l'emploi de fourberies déductives en présentant une méthode très élémentaire [2], efficace, et semi-automatisable, pour démontrer, avec peu d'efforts cognitifs, les premiers cas d'impossibilité.

2. Notations utilisées

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- $\forall (n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\pi_n^k = \prod\limits_{i=0}^{k-1} (n+i)$.
  Par exemple, $\pi_n^1 = n$, $\pi_n^2 = n(n+1)$ et $\pi_{n+2}^4 = (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$.
- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des carrés parfaits. On note aussi ${}^2_*\mathbb{N} = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
  $\mathbb{N}_{sf}$ est l'ensemble des naturels non nuls sans facteur carré [3].
- $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
  $\forall (p\,; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p-adique de n , c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n , contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.
- $\mathbb{P}_{sc}^n$ désigne l'ensemble des suites finies strictement croissantes de n nombres premiers.
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m.
- $2\,\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
  $2\,\mathbb{N} + 1$ est l'ensemble des nombres naturels impairs.

---

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).
2. Cette méthode s'appuie sur une représentation trouvée dans un message archivé : voir la section 8.
3. En anglais, on dit « square free » .

3. Les carrés parfaits

3.1. **Structure.**

Le fait suivant est immédiat.

Fait 3.1. *$\forall n \in {}^2_*\mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$.*

Fait 3.2. *$\forall n \in {}^2_*\mathbb{N}$, s'il existe $m \in {}^2_*\mathbb{N}$ tel que $n = fm$ alors $f \in {}^2_*\mathbb{N}$.*

Démonstration. $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(fm) \in 2\mathbb{N}$, $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(fm) = v_p(f) + v_p(m)$ donnent $v_p(f) \in 2\mathbb{N}$. □

Fait 3.3. *$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $a \wedge b = 1$ et $ab \in {}^2_*\mathbb{N}$, alors $a \in {}^2_*\mathbb{N}$ et $b \in {}^2_*\mathbb{N}$.*

Démonstration. $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(ab) \in 2\mathbb{N}$, et p ne peut diviser à la fois a et b , donc $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(a) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(b) \in 2\mathbb{N}$, autrement dit $(a,b) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$. □

Fait 3.4. *Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $ab \in {}^2_*\mathbb{N}$, ainsi que $(\alpha, \beta, A, B) \in (\mathbb{N}_{sf})^2 \times \mathbb{N}^2$ tel que $a = \alpha A^2$ et $b = \beta B^2$. Nous avons alors forcément $\alpha = \beta$.*

Démonstration. Le fait 3.2 donne $\alpha\beta \in {}^2_*\mathbb{N}$. De plus, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(\alpha) \in \{0,1\}$ et $v_p(\beta) \in \{0,1\}$. Finalement, $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\alpha) = v_p(\beta)$, autrement dit $\alpha = \beta$. □

3.2. **Distance entre deux carrés parfaits.**

Fait 3.5. *Soit $(N,M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $N > M$.*

(1) $N^2 - M^2 \geq 2N - 1$.

(2) Notons nb_{sol} le nombre de solutions $(N,M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de $N^2 - M^2 = \delta$.

Pour $\delta \in [\![1\,;20]\!]$, nous avons :

(a) $nb_{sol} = 0$ si $\delta \in \{1,2,4,6,10,14,18\}$.

(b) $nb_{sol} = 1$ si $\delta \in \{3,5,7,8,9,11,12,13,16\}$.

(c) $nb_{sol} = 2$ si $\delta = 15$.

Démonstration.

(1) Comme $N - 1 \geq M$, nous obtenons : $N^2 - M^2 \geq N^2 - (N-1)^2 = 2N - 1$.

(2) Le point précédent permet d'utiliser le programme `Python` de la page suivante afin d'obtenir les nombres de solutions indiqués rapidement. □

Finissons par une jolie formule même si elle ne nous sera pas d'une grande aide dans la suite.

Fait 3.6. *$\forall (N,M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $N > M$, alors $N^2 - M^2 = \sum\limits_{k=M+1}^{N} (2k-1)$.*

Démonstration. $N^2 = \sum\limits_{k=1}^{N} (2k-1)$ donne l'identité indiquée[4]. □

4. La formule utilisée est facile à démontrer algébriquement, et évidente à découvrir géométriquement.

```python
from math import sqrt, floor

def sol(diff):
    solfound = []

    for i in range(1, (diff + 1) // 2 + 1):
        tested = i**2 - diff

        if tested < 0:
            continue

        tested = floor(sqrt(i**2 - diff))

        if tested == 0:
            continue

        if tested**2 == i**2 - diff:
            solfound.append((i, tested))

    return solfound
```

4. Prenons du recul

4.1. Construire des sf-tableaux.

L'idée de départ est simple : d'après le fait 3.2, il semble opportun de se concentrer sur les diviseurs sans facteur carré des facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^k = n(n+1)\cdots(n+k-1)$.

Définition 4.1. *Considérons* $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(a_i)_{0\leq i\leq k} \subset \mathbb{N}_{sf}$ *et* $(s_i)_{0\leq i\leq k} \subset {}^2_*\mathbb{N}$ *tels que* $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$, $n+i = a_i s_i$. *Cette situation est résumée par le tableau suivant que nous nommerons « sf-tableau »*[5].

$n+\bullet$	0	1	2	$\dots$	k
	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_k

Exemple 4.1. *Supposons avoir le sf-tableau suivant où* $n \in \mathbb{N}^*$.

$n+\bullet$	0	1	2	3
	2	5	6	1

Ceci résume la situation suivante.

- $\exists A \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n = 2A^2$.
- $\exists B \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n+1 = 5B^2$.
- $\exists C \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n+2 = 6C^2$.
- $\exists D \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n+3 = D^2$.

4.2. Construire des sf-tableaux.

Pour fabriquer des sf-tableaux, nous allons « multiplier » des sf-tableaux partiels.

Définition 4.2. *Soient* $(n,k,r) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $(p_j)_{1\leq j\leq r} \in \mathbb{P}_{sc}^r$, $(\epsilon_{i,j})_{0\leq i\leq k\,,1\leq j\leq r} \subseteq \{0,1\}$ *et aussi* $(f_i)_{0\leq i\leq k} \subset \mathbb{N}^*$ *vérifiant les conditions suivantes.*

- $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$, $n+i = f_i \cdot \prod_{j=1}^{r} p_j^{v_{p_j}(n+i)}$. *Noter que* $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$, $\forall j \in [\![1\,;r]\!]$, $f_i \wedge p_j = 1$.
- $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$, $\forall j \in [\![1\,;r]\!]$, $v_{p_j}(n+i) \equiv \epsilon_{i,j}$ *modulo* 2 .

Cette situation est résumée par le tableau suivant qui sera nommé « sf-tableau partiel » , voire « sf-tableau partiel d'ordre $(p_j)_{1\leq j\leq r}$ *»*[6].

$n+\bullet$	0	1	2	$\dots$	k
$(p_j)_{1\leq j\leq r}$	$\prod_{j=1}^{r} p_j^{\epsilon_{0,j}}$	$\prod_{j=1}^{r} p_j^{\epsilon_{1,j}}$	$\prod_{j=1}^{r} p_j^{\epsilon_{2,j}}$	$\dots$	$\prod_{j=1}^{r} p_j^{\epsilon_{k,j}}$

Exemple 4.2. *Supposons avoir le sf-tableau partiel suivant où* $n \in \mathbb{N}^*$.

$n+\bullet$	0	1	2	3
$(2,3)$	2	6	1	3

Ceci résume la situation suivante.

- $\exists(a,\alpha,A) \in \mathbb{N}^3 \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $A \wedge 6 = 1$ *et* $n = 2^{2a+1}3^{2\alpha}A$.
- $\exists(b,\beta,B) \in \mathbb{N}^3 \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $B \wedge 6 = 1$ *et* $n+1 = 2^{2b+1}3^{2\beta+1}B$.
- $\exists(c,\gamma,C) \in \mathbb{N}^3 \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $C \wedge 6 = 1$ *et* $n+2 = 2^{2c}3^{2\gamma}C$.
- $\exists(d,\delta,D) \in \mathbb{N}^3 \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $D \wedge 6 = 1$ *et* $n+3 = 2^{2d}3^{2\delta+1}D$.

Exemple 4.3. *La multiplication de deux sf-tableaux partiels est « naturelle » lorsqu'elle porte sur des suites* $(p_j)_{1\leq j\leq r} \in \mathbb{P}_{sc}^r$ *et* $(q_j)_{1\leq j\leq s} \in \mathbb{P}_{sc}^s$ *d'intersection vide, c'est-à-dire sans nombre premier commun.*

5. « sf » est pour « square free » .
6. Noter que $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$, $\forall j \in [\![1\,;r]\!]$, $p_j^{\epsilon_{i,j}} \in \{1, p_j\}$.

Considérons les deux sf*-tableaux partiels suivants où l'on note* 2 *et* 3 *au lieu de* (2) *et* (3) *.*

$n + \bullet$	0	1	2	3
2	1	2	1	2

$n + \bullet$	0	1	2	3
3	3	1	1	3

La multiplication de ces sf*-tableaux partiels est le* sf*-tableau suivant, partiel a priori, mais si l'on sait que* 2 *et* 3 *sont les seuls diviseurs premiers de* π_n^4 *, alors le* sf*-tableau est non partiel.*

$n + \bullet$	0	1	2	3
$(2,3)$	3	2	1	6

Ceci résume la situation suivante qui est équivalente à ce que donne la conjonction des deux premiers sf*-tableaux partiels (les abus de notations sont évidents).*

- $A \wedge 6 = 1$ *et* $n = 2^{2a} 3^{2\alpha+1} A$.
- $B \wedge 6 = 1$ *et* $n + 1 = 2^{2b+1} 3^{2\beta} B$.
- $C \wedge 6 = 1$ *et* $n + 2 = 2^{2c} 3^{2\gamma} C$.
- $D \wedge 6 = 1$ *et* $n + 3 = 2^{2d+1} 3^{2\delta+1} D$.

5. Structure des sf-tableaux

5.1. A propos des sf-tableaux partiels.

Fait 5.1. *Dans la deuxième ligne d'un* sf*-tableau partiel d'ordre* p *, les positions des valeurs* p *sont congrues modulo* p *.*

Démonstration. Penser aux multiples de p . ☐

Fait 5.2. $\forall (n,k,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \times \mathbb{P}$ *, si* $\pi_n^k \in {}^2\mathbb{N}$ *, alors dans le* sf*-tableau partiel d'ordre* p *associé à* π_n^k *, le nombre de valeurs* p *est forcément pair.*

Démonstration. Évident, mais très pratique, comme nous le verrons dans la suite. ☐

5.2. A propos des sf-tableaux non partiels.

Fait 5.3. *Dans les tableaux ci-dessous, où* $k \geq 2$ *, les puces* $\bullet$ *indiquent des valeurs quelconques.*

(1) Si nous avons un sf*-tableau du type suivant, alors* $\pi_n^{k-1} \in {}^2_*\mathbb{N}$ *.*

$n+\bullet$	0	1	$\dots$	$k-1$	k
	$\bullet$	$\bullet$	$\dots$	$\bullet$	1

(2) Si nous avons un sf*-tableau du type suivant, alors* $\pi_{n+1}^{k-1} \in {}^2_*\mathbb{N}$ *.*

$n+\bullet$	0	1	$\dots$	$k-1$	k
	1	$\bullet$	$\dots$	$\bullet$	$\bullet$

Démonstration. Immédiat via le fait 3.2, car nous avons soit $n+k \in {}^2_*\mathbb{N}$, soit $n \in {}^2_*\mathbb{N}$. ☐

Fait 5.4. *Soient* $(n,k,d) \in (\mathbb{N}^*)^3$ *et* $i \in \mathbb{N}$ *. Considérons le* sf*-tableau ci-après où les puces* $\bullet$ *indiquent des valeurs quelconques.*

$n+\bullet$	i	$i+1$	$\dots$	$i+k-1$	$i+k$
	d	$\bullet$	$\dots$	$\bullet$	d

Ce sf*-tableau est impossible si l'une des deux conditions suivantes est validée.*

(1) $d \nmid k$ *.*

(2) $d \mid k$ *et* $\dfrac{k}{d} \in \{1,2,4,6,10,14,18\}$ *.*

Démonstration. $n+i = dA^2$ et $n+i+k = dB^2$ nous donnent $d(B^2-A^2) = k$. On conclut directement si $d \nmid k$, et via le fait 3.5 dans le second cas. ☐

6. Applications

6.1. Application au cas de 2 facteurs.

Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1) \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$. Nous avons alors les sf-tableaux partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}$ divisant π_n^2 , car les valeurs p de la deuxième ligne doivent apparaître un nombre pair de fois tout en étant espacées par $(p-1)$ valeurs 1 (voir les faits 5.1 et 5.2).

$n+\bullet$	0	1
p	1	1

La multiplication de tous les sf-tableaux partiels précédents donne le sf-tableau, non partiel, ci-après, mais ceci contredit le fait 5.4.

$n+\bullet$	0	1
	1	1

6.2. Application au cas de 3 facteurs.

Supposons que $\pi_n^3 = n(n+1)(n+2) \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$. Nous avons alors les sf-tableaux partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}_{>2}$ divisant π_n^3 , d'après les faits 5.1 et 5.2.

$n+\bullet$	0	1	2
p	1	1	1

Pour $p = 2$, via les faits 5.1 et 5.2, seulement deux sf-tableaux partiels d'ordre 2 sont possibles. Nous utilisons un abus de notation évident pour indiquer ces deux possibilités.

$n+\bullet$	0	1	2
2	1	1	1
	2	1	2

La multiplication de tous les sf-tableaux partiels précédents donne juste les deux sf-tableaux, non partiels, suivants, mais ceci est impossible d'après le fait 5.4.

$n+\bullet$	0	1	2
	1	1	1
	2	1	2

6.3. Application au cas de 4 facteurs.

Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3) \in {}_{*}^{2}\mathbb{N}$. Nous avons alors les sf-tableaux partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}_{>3}$ divisant π_n^4 .

$n+\bullet$	0	1	2	3
p	1	1	1	1

Pour $p = 2$, nous avons les trois sf-tableaux partiels d'ordre 2 donnés ci-après.

$n+\bullet$	0	1	2	3
2	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2

Pour $p = 3$, nous obtenons les deux `sf`-tableaux partiels d'ordre 3 donnés ci-après.

$n+\bullet$	0	1	2	3
3	1	1	1	1
	3	1	1	3

La multiplication des `sf`-tableaux partiels précédents donne les `sf`-tableaux[7], suivants.

$n+\bullet$	0	1	2	3
	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2

$n+\bullet$	0	1	2	3
	3	1	1	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Le fait 5.4 rejette quatre `sf`-tableaux : voir les cellules surlignées ci-dessous.

$n+\bullet$	0	1	2	3
	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2

$n+\bullet$	0	1	2	3
	3	1	1	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Il nous reste à étudier les deux derniers tableaux reproduits ci-après.

$n+\bullet$	0	1	2	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Commençons par démontrer que l'on ne peut pas avoir $n = 6A^2$, $n+1 = B^2$, $n+2 = 2C^2$ et $n+3 = 3D^2$ où $(A, B, C, D) \in (\mathbb{N}^*)^4$.

- Posons $x = n + \frac{3}{2}$ de sorte que $x - \frac{3}{2} = 6A^2$, $x - \frac{1}{2} = B^2$, $x + \frac{1}{2} = 2C^2$ et $x + \frac{3}{2} = 3D^2$.
- Nous avons alors $\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = 2E^2$, c'est-à-dire $x^2 - \frac{9}{4} = 2E^2$, avec $E \in \mathbb{N}^*$.
- De même, $x^2 - \frac{1}{4} = 2F^2$ avec $F \in \mathbb{N}^*$.
- Par simple soustraction, nous obtenons $2F^2 - 2E^2 = 2$, puis $F^2 - E^2 = 1$, mais ceci contredit le fait 3.6.

Le même type de raisonnement[8] démontre l'impossibilité d'avoir $n = 3A^2$, $n+1 = 2B^2$, $n+2 = C^2$ et $n+3 = 6D^2$ où $(A, B, C, D) \in (\mathbb{N}^*)^4$.

6.4. **Application au cas de 5 facteurs.**

Supposons que $\pi_n^5 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2_*\mathbb{N}$. Nous avons alors les `sf`-tableaux partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}_{>4}$ divisant π_n^5.

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
p	1	1	1	1	1

7. Tableaux non partiels forcément.
8. Noter la « symétrie » respectée par les valeurs des deux tableaux.

Pour $p=2$, nous avons les sf-tableaux partiels d'ordre 2 donnés ci-après.

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
2	1	1	1	1	1
	2	1	2	1	1
	2	1	1	1	2
	1	2	1	2	1
	1	1	2	1	2

Pour $p=3$, nous obtenons les sf-tableaux partiels d'ordre 3 donnés ci-après.

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
3	1	1	1	1	1
	3	1	1	3	1
	1	3	1	1	3

La multiplication de tous les sf-tableaux partiels précédents donne les 15 cas suivants.

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
	1	1	1	1	1
	2	1	2	1	1
	2	1	1	1	2
	1	2	1	2	1
	1	1	2	1	2

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
	3	1	1	3	1
	6	1	2	3	1
	6	1	1	3	2
	3	2	1	6	1
	3	1	2	3	2

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
	1	3	1	1	3
	2	3	2	1	3
	2	3	1	1	6
	1	6	1	2	3
	1	3	2	1	6

Comme $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2_*\mathbb{N}$ et $\pi_{n+1}^4 = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2_*\mathbb{N}$ d'après la section 6.3, les tableaux commençant, ou finissant, par une valeur 1 sont à ignorer d'après le fait 5.3. Cela laisse les sf-tableaux ci-après, mais ces derniers sont rejetés par le fait 5.4.

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
	2	1	1	1	2
	6	1	1	3	2
	3	1	2	3	2
	2	3	2	1	3
	2	3	1	1	6

Remarque 6.1. *Notons qu'un cas comme* $6\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot 2$*, c'est-à-dire* $n=6A^2$, $n+1=B^2$, $n+2=C^2$, $n+3=3D^2$ *et* $n+4=2E^2$ *où* $(A,B,C,D,E)\in(\mathbb{N}^*)^4$ *peut se traiter de façon analogue à ce qui a été fait dans la section 6.3 via* $x-2=6A^2$, $x-1=B^2$, $x=C^2$, $x+1=3D^2$ *et* $x+2=2E^2$ *qui donnent* $x^2-4=3F^2$ *et* $x^2-1=3G^2$ *où* $(F,G)\in(\mathbb{N}^*)^4$.

7. Et après ?

7.1. La méthode via le cas de 6 facteurs.

La méthode présentée ci-dessus permet de faire appel à un programme pour limiter les traitements à la main, et à la sueur des neurones, de `sf`-tableaux problématiques comme nous avons dû le faire dans la section 6.3. Expliquons cette tactique semi-automatique en traitant le cas de 6 facteurs.

(1) On raisonne par l'absurde en supposant que $\pi_n^6 \in {}^2_*\mathbb{N}$.

(2) On fabrique la liste $\mathcal{P}$ des diviseurs premiers stricts de 6 : nous avons juste 2 , 3 et 5 . Notons qu'avec 7 facteurs, nous n'aurions pas garder 7 car il est forcément de valuation paire dans chaque facteur $(n+i)$ de π_n^7 si $\pi_n^7 \in {}^2_*\mathbb{N}$.

(3) Pour chaque élément p de $\mathcal{P}$, on construit la liste $\mathcal{V}_p$ des `sf`-tableaux partiels relatifs à p et $\pi_n^6 \in {}^2_*\mathbb{N}$. On s'appuie sur la section 5.1.

(4) Via les listes $\mathcal{V}_p$, on calcule toutes les multiplications de tous les `sf`-tableaux partiels relatifs à tous les nombres p différents, et pour chacune d'elles, on ne la garde que si elle ne vérifie aucune des conditions suivantes, celles du dernier cas devant être indiquées à la main au programme qui va donc évoluer au gré des démonstrations faites par un humain (démonstrations que l'on espère le plus rare possible).

    (a) Le tableau « produit » commence, ou se termine, par la valeur 1 . Dans ce cas, on sait par récurrence que le tableau produit n'est pas possible (voir le fait 5.3).

    (b) L'une des interdictions de la section 5.2 est validée par le tableau « produit » .

    (c) Le tableau « produit » contient un sous-tableau que nous savons impossible suite à un raisonnement humain fait *localement* , c'est-à-dire que seul les facteurs indiqués dans le sous-tableau, et le sous-tableau lui-même sont utilisés pour raisonner. Comme c'est ce qui a été fait en fin de section 6.3, nous pouvons indiquer les deux sous-tableaux impossibles suivants.

$m + \bullet$	0	1	2	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Deux sous-`sf`-tableaux impossibles.

YAPLUKA !

Dans le dépôt en ligne associé à ce document sont placés les fichiers `find-pb-sftab.py` et `common.py` qui nous fournissent les informations suivantes pour π_n^6 .

8. Sources utilisées

Ce document n'aurait pas vu le jour sans la source suivante.

(1) Une discussion archivée consultée le 28 janvier 2024 :
`https://web.archive.org/web/20171110144534/http://mathforum.org/library/drmath/view/65589.html` .

Cette discussion utilise ce que nous avons nommé les `sf`-tableaux, mais le côté semi-mécanisable de leur utilisation n'est pas souligné.

9. AFFAIRE À SUIVRE...