Non Fini

$$\prod_{i=0}^{k} (n+i) \notin \mathbb{N}^2 \quad (k \geq 1 \text{ et } n \geq 1)$$

RECHERCHE

Nota$^{\circ}$: $P_n = \prod_{i=0}^{k} (n+i)$

$\mathbb{P}$: ens. des nbres premiers

$v_p(m)$: valua$^{\circ}$ p-adique de $m \in \mathbb{N}$

$k=1$ $\quad P_n = n(n+1)$

Supposons $P_n = N^2$ avec $N \in \mathbb{N}^*$.

Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(P_n) \in 2\mathbb{N}$.

Or $p \in \mathbb{P}$ ne peut pas diviser à la fois n et $(n+1)$.
On a donc $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+1) \in 2\mathbb{N}$,
ie n et $(n+1)$ sont deux carrés parfaits. Impossible
car $\forall \tilde{k} \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{(\tilde{k}+1)^2 - \tilde{k}^2}_{2\tilde{k}+1 \geq 3} > 1$.

$k=2$ $\quad P_n = n(n+1)(n+2)$

On part de nouveau de $P_n = N^2$.

Pour $p \in \mathbb{P}$ tq $p > 2$, de nouveau $v_p(n)$, $v_p(n+1)$ et $v_p(n+2)$ sont pairs.

Que dire de $p = 2$?

- Si $n+1 \equiv 0\ [2]$ alors $v_2(n) = 0 = v_2(n+2)$ et $v_2(n+1)$ pair. On conclut comme avant!

- Sinon $n \equiv n+2 \equiv 0\ [2]$.

$$\frac{P_n}{4} = \underbrace{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}_{\text{Parités différentes}} \underbrace{(n+1)}_{\text{Impair}} \in \mathbb{N}^2 \text{ car } 2 \mid N.$$

De nouveau, $v_2\left(\frac{n}{2}\right)$, $v_2\left(\frac{n}{2}+1\right)$ et $v_2(n+1)$ sont pairs, et une nouvelle contradic° apparait avec $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2}+1$ deux carrés parfaits.

<u>$k=3$</u> $P_n = n(n+1)(n+2)(n+3)$ avec $P_n = N^2$.

$\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $v_p(n+i)$ est pair.

Par contre, que dire de $p=2$ et $p=3$?

Une tentative d'adapta° de ce qui précède va échouer à une éventuelle généralisa° !

Par contre, gardons l'idée des valua°s p-adiques pour $p=2$ et $p=3$ qui posent pb ici. Voici les situa° possibles pour chaque facteur $(n+i)$.

- $v_2(n+i)$ pair, $v_3(n+i)$ pair. $\mathbb{C}_1$
- ——— pair, ——— impair. $\mathbb{C}_2$
- ——— impair, ——— impair. $\mathbb{C}_3$
- ——— impair, ——— pair. $\mathbb{C}_4$

Ensuite si $v_2(n+i)$ est impair, on doit avoir $n+i'$, $i \neq i'$, tq $v_2(n+i')$. De m̂ si $v_3(n+i)$ impair.

$\mathbb{C}_2$, $\mathbb{C}_3$ ou $\mathbb{C}_4$ a lieu sinon on aurait des carrés parfaits consécutifs !

Supposons $\mathbb{C}_3$ impossible pour commencer.

$\mathcal{C}_2$ donne alors $n+i = 2^{2k} 3^{2\ell+1} p^2$ et $n+i' = 2^{2r} 3^{2s+1} q^2$

puis $n = 3 \cdot \tilde{p}^2$ et $n+3 = 3\tilde{q}^2$. Impossible car on a :

$(k+1)^2 - k^2 \geq 3$ si $k \in \mathbb{N}^*$.

$\mathcal{C}_4$ donne $n, n+2$ ou $n+1, n+3$ du type $2\tilde{p}^2$ et $2\tilde{q}^2$, ce qui est impossible ($2 \times 3 > 3$).

Mq $\mathcal{C}_3$ est effectivement impossible. D'après ce qui précède,

$\mathcal{C}_3$ donne : $n+i = 6\tilde{p}^2$
forcé !

$n+i' = 3\tilde{q}^2$

$n+i'' = 2\tilde{r}^2$

⚠ $6\tilde{q}^2$ impossible car $6 > 4$ le nbre de facteurs !

3 fact. ≠ dans $n, n+1, n+2, n+3$

On doit avoir deux fact. consécutifs.

La seule possibilité est d'avoir $N = 3\tilde{q}^2$ et $N+1 = 2\tilde{r}^2$, ou

$\underbrace{N = 2\tilde{r}^2 \text{ et } N+1 = 3\tilde{q}^2}_{\text{Facteurs consécutifs.}}$

$2 \times 1^2 + 1 = 3 \times 1^2$ fonctionne mais cela donnerait les P_n suivants : • $\underbrace{2 \times 3} \times 4 \times \underbrace{5} \notin \mathbb{N}^2$

• $1 \times \underbrace{2 \times 3} \times 4 \notin \mathbb{N}^2$

A-t-on d'autres sol^{ons} pour $3a^2 + 1 = 2b^2$ et $2a^2 + 1 = 3b^2$?

- Modulo 3, on voit que $3a^2 + 1 = 2b^2$ est sans sol. entière.
- Pour $2a^2 + 1 = 3b^2$, moins immédiat ! ?

On sait aussi que $6\tilde{p}^2$ "à 3 pas" de $3b^2$

et on a les cas suivants.

n	$n+1$	$n+2$	$n+3$
$2a^2$	$3b^2$		
	$2a^2$	$3b^2$	
→ $6c^2$	?	$2a^2$	$3b^2$

On arrive à $6c^2 + 2 = 2a^2$ ie $a^2 - 3c^2 = 1$.

Nous voilà avec une équation de Pell-Fermat.

On a aussi $b^2 - 2c^2 = 1$.

$Eq^2 - Eq^1$ donne : $-a^2 + b^2 + c^2 = 0$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Nous voilà avec des triplets Pythagoriciens. Encore mieux ! Que faire de tout ceci ?

Tentons autre chose en notant que les facteurs $(n+i)$ sont du type p^2, $2q^2$, $3r^2$ ou $6s^2$.

On sait donc que :

$6s^2, p^2, 2q^2, 3r^2$ consécutifs.

↳ Pas le choix !

De nouveau, on retombe sur Pell-Fermat avec des éq. de plus :

- $6s^2 + 1 = p^2 \iff p^2 - 6s^2 = 1$
- $6s^2 + 2 = 2q^2 \iff q^2 - 3s^2 = 1$
- $6s^2 + 3 = 3r^2 \iff r^2 - 2s^2 = 1$

- $p^2 + 1 = 2q^2 \iff p^2 - 2q^2 = -1$
- $p^2 + 2 = 3r^2 \iff p^2 - 3r^2 = -2$

⚠

- $2q^2 + 1 = 3r^2 \iff 3r^2 - 2q^2 = 1$ en plus !

On peut résoudre directᵗ comme suit.

$$P_n = n(n+3)\cdot(n+1)(n+2)$$

$$= (\underbrace{n^2+3n}_{})(\underbrace{n^2+3n}_{}+2) \qquad \text{Facile à repérer !}$$

$$= (a-1)(a+1)$$

$$= a^2-1$$

On peut traiter $P_n = \underbrace{n}_{2q^2}(n+1)\underbrace{(n+2)}_{2p^2}$ avec $n+1 \not\equiv 0\ [2]$ via $2q^2, \dots, 2p^2$ impossible.

$\underline{k=4}$ $P_n = \prod_{i=0}^{4} (n+i)$

On commence comme pour $k=3$ mais ici on a un gros avantage : le principe des tiroirs !

C_1 au moins deux fois $\Rightarrow$ q^2 et p^2 espacé au max. de 4, ce qui ne se peut pas.

C_2 ou C_4 au moins deux fois $\Rightarrow$ Impossible comme pour $k=3$.

C_3 au moins deux fois $\Rightarrow$ deux fact. divisibles par 6, ce qui ne se peut pas.