

# BROUILLON - CANDIDAT - NOMBRE DE SOUS-ENSEMBLES D'UN ENSEMBLE FINI UNE PREUVE TRÈS ÉLÉMENTAIRE.

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



Voici comment expliquer rapidement à un lycéen<sup>1</sup> qu’un ensemble  $\mathcal{E}$  de  $n$  éléments permet de fabriquer  $2^n$  sous-ensembles ayant de 0 à  $n$  éléments. Sans entrer dans le détail d’une récurrence, ni même faire appel à la notion de suite géométrique, voici comment faire.

- (1)  $\emptyset$  est le seul ensemble à 0 élément. Son seul sous-ensemble est  $\emptyset$ . On a bien  $1 = 2^0$ .
- (2) Soit  $\mathcal{E} = \{\spadesuit\}$  un ensemble avec un seul élément. Cet ensemble contient 2 sous-ensembles, à savoir  $\emptyset$  et  $\{\spadesuit\}$ . On a bien  $2 = 2^1$ .
- (3) Soit  $\mathcal{E} = \{\spadesuit; \diamondsuit\}$  un ensemble avec deux éléments. Cet ensemble contient les  $4 = 2^2$  sous-ensembles  $\emptyset$ ,  $\{\spadesuit\}$ ,  $\{\diamondsuit\}$  et  $\{\spadesuit; \diamondsuit\}$ .  
Le point clé est de noter que  $\{\spadesuit\} = \emptyset \cup \{\diamondsuit\}$  et  $\{\spadesuit; \diamondsuit\} = \{\spadesuit\} \cup \{\diamondsuit\}$ .
- (4) Soit maintenant  $\mathcal{E} = \{\spadesuit_1; \dots; \spadesuit_n; \diamondsuit\}$  un ensemble avec  $(n+1)$  éléments. Les sous-ensembles de  $\mathcal{E}$  se classent en deux catégories.
  - (a) **Catégorie 1** : les sous-ensembles ne contenant pas  $\diamondsuit$ .  
Il y en a autant que de sous-ensembles de  $\mathcal{F} = \{\spadesuit_1; \dots; \spadesuit_n\}$ .
  - (b) **Catégorie 2** : les sous-ensembles contenant  $\diamondsuit$ .  
De tels sous-ensembles s’obtiennent à partir de sous-ensembles de  $\mathcal{F}$  en leur adjoignant  $\diamondsuit$ . Ceci démontre qu’il y a autant de sous-ensembles de catégorie 2 que de sous-ensembles de  $\mathcal{F}$ .

Donc le nombre de sous-ensembles de  $\mathcal{E}$  est deux fois plus grand que celui de  $\mathcal{F}$ .

- (5) Finalement de proche en proche<sup>2</sup> nous avons sans effort qu’un ensemble  $\mathcal{E}$  de  $n$  éléments permet de fabriquer  $2^n$  sous-ensembles ayant de 0 à  $n$  éléments.

---

*Date*: 19 Octobre 2020 – 19 Novembre 2020.

1. Bien entendu on adaptera le formalisme pour rendre digeste les principes élémentaires utilisés et surtout faire apparaître la formule sans la parachuter !

2. En toute rigueur, il faudrait soit faire une récurrence, soit s’appuyer sur la notion de suite géométrique.