

Démontrons rapidement que  $n \mid (2^n + 1)$  dès que  $n = 3^k$  par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}^*$  car le cas  $k = 0$  est trivial.

**Initialisation pour  $k = 1$ .**

Clairement,  $3 \mid (2^3 + 1)$ .

**Étape de récurrence.**

On a les implications logiques suivantes.

$$\begin{aligned}
 & (3^k) \mid (2^{(3^k)} + 1) \\
 \implies & \exists m \in \mathbb{Z}. [2^{(3^k)} + 1 = m \cdot 3^k] \\
 \implies & \exists m \in \mathbb{Z}. [2^{(3^k)} = -1 + m \cdot 3^k] \\
 \implies & \exists m \in \mathbb{Z}. \left[ \left( 2^{(3^k)} \right)^3 = (-1 + m \cdot 3^k)^3 \right] \\
 \implies & \exists m \in \mathbb{Z}. [2^{(3^{k+1})} = -1 + 3 \cdot m \cdot 3^k - 3 \cdot (m \cdot 3^k)^2 + (m \cdot 3^k)^3] \\
 \implies & 2^{(3^{k+1})} \equiv -1 \pmod{3^{k+1}}
 \end{aligned}$$

) *Besoin de*  
 $\downarrow$   *$k \neq 0$  ici.*

En résumé,  $(3^k) \mid (2^{(3^k)} + 1)$  implique  $(3^{k+1}) \mid (2^{(3^{k+1})} + 1)$ .

**Conclusion : ...**

**Seul truc intéressant dans cette affaire de niveau TS de l'ancien temps :** calcul d'une limite de suite dans l'anneau des entiers 3-adiques.