BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS – RÉSOLUTIONS À LA MAIN

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LaTeX, disponible sur la page ***https://github.com/bc-writing/drafts.***

Mentions « légales »

Table des matières

Date: 25 Jan. 2024 – 31 Jan. 2024.

1. Ce qui nous intéresse

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers » [1], Paul Erdos démontre que pour tout couple $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit d'entiers consécutifs $\prod_{i=0}^{k}(n+i)$ n'est jamais le carré d'un entier.

Dans ce document, nous proposons quelques cas particuliers résolues de façon « adaptative ».

2. Notations utilisées

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ et ${}^2\mathbb{N}_* = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
- $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k}(n+i)$. Par exemple, nous avons $\pi_n^0 = n$ et $\pi_n^1 = n(n+1)$.
- $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
- $\forall (p\,;n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p-adique de n, c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n, contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.
- $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m.
- $2\,\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
- $2\,\mathbb{N}+1$ désigne l'ensemble des nombres naturels impairs.

3. Avec 1 seul facteur

Via $N^2 - M^2 = (N-M)(N+M)$, il est immédiat de noter que $\forall (N,M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $N > M$, alors $N^2 - M^2 \geq 3$. Le fait suivant précise ceci.

Fait 3.1. *$\forall (N,M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $N > M$, alors $N^2 - M^2 = \sum_{k=M+1}^{N}(2k-1)$.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser $N^2 = \sum_{k=1}^{N}(2k-1)$. □

4. Avec 2 facteurs

Fait 4.1. *$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1) \notin {}^2\mathbb{N}$.*

Démonstration. Il suffit de noter que $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$. □

Preuve alternative no.1. Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Clairement $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons : $v_p(\pi_n^1) \in 2\mathbb{N}$. Or $p \in \mathbb{P}$ ne peut diviser à la fois n et $n+1$. Nous savons donc que $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+1) \in 2\mathbb{N}$, autrement dit $(n, n+1) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. D'après le fait 3.1, nous savons que ceci est impossible. □

Preuve alternative no.2. Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) = N^2$ où $N \in \mathbb{N}^*$. Les équivalences suivantes donnent alors une contradiction.

---

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).

$$\begin{aligned}
& n(n+1) = N^2 \\
\iff\ & 2\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{N} (2k-1) && n(n+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k \text{ et } N^2 = \sum_{k=1}^{N} (2k-1)\,. \\
\iff\ & \sum_{k=1}^{n} 2k = \sum_{k=1}^{N} 2k - N \\
\iff\ & \sum_{k=n+1}^{N} 2k = N && N > n \\
\iff\ & \sum_{k=n+1}^{N-1} 2k + N = 0 && N > 0 \text{ rend impossible la dernière égalité.}
\end{aligned}$$

□

5. Avec 3 facteurs

Fait 5.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Posant $m = n+1$, nous avons $\pi_n^2 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Comme $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\pi_n^2) \in 2\mathbb{N}$, et comme de plus $p \in \mathbb{P}$ ne peut diviser à la fois m et m^2-1, nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(m^2-1) \in 2\mathbb{N}$, d'où $(m, m^2-1) \in {}^2\mathbb{N}_* \times {}^2\mathbb{N}_*$. Or, d'après le fait 3.1, $m^2 - 1 \in {}^2\mathbb{N}$ est impossible. □

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Comme $p \in \mathbb{P}_{>2}$ ne peut diviser au maximum qu'un seul des trois facteurs n, $(n+1)$ et $(n+2)$, nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}_{>2}$, $\big(v_p(n), v_p(n+1), v_p(n+2)\big) \in \big(2\mathbb{N}\big)^3$. Mais que se passe-t-il pour $p = 2$?

Supposons d'abord $n \in 2\mathbb{N}$.

- Posant $n = 2m$, nous avons $\pi_n^2 = 4m(2m+1)(m+1)$, d'où $m(2m+1)(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Comme $v_2(2m+1) = 0$, nous savons que $2m+1 \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Donc $m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$, mais le fait 4.1 interdit cela.

Supposons maintenant $n \in 2\mathbb{N}+1$.

- Nous savons que $n \in {}^2\mathbb{N}_*$ via $v_2(n) = 0$.
- Dès lors, on obtient $(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$, mais de nouveau ceci contredit le fait 4.1. □

6. Avec 4 facteurs

Fait 6.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Nous pouvons ici faire les manipulations algébriques naturelles suivantes.

$$\begin{aligned}
\pi_n^3 &= n(n+3)\cdot(n+1)(n+2) \\
&= (n^2+3n)\cdot(n^2+3n+2) && m = n^2+3n \\
&= m(m+2) \\
&= m^2 + 2m \\
&= (m+1)^2 - 1
\end{aligned}$$

Comme $m > 0$, d'après le fait 3.1, $(m+1)^2 - 1 \notin {}^2\mathbb{N}$, c'est-à-dire $\pi_n^3 \notin {}^2\mathbb{N}$. □

Une preuve alternative. En « symétrisant » certaines expressions, nous obtenons les manipulations algébriques « moins magiques » suivantes.

$$
\begin{aligned}
\pi_n^3 &= n(n+1)(n+2)(n+3) && \quad x = n + \frac{3}{2} \\
&= \big(x - \frac{3}{2}\big)\big(x - \frac{1}{2}\big)\big(x + \frac{1}{2}\big)\big(x + \frac{3}{2}\big) \\
&= \big(x^2 - \frac{9}{4}\big)\big(x^2 - \frac{1}{4}\big) && \quad y = x^2 - \frac{5}{4} \\
&= (y-1)(y+1) \\
&= y^2 - 1 \\
&= \Big(\big(n + \frac{3}{2}\big)^2 - \frac{5}{4}\Big)^2 - 1 \\
&= \big(n^2 + 3n + 1\big)^2 - 1
\end{aligned}
$$

□

7. Avec 5 facteurs

Fait 7.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^4 = n(n{+}1)(n{+}2)(n{+}3)(n{+}4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $\big(v_p(n), v_p(n+1), v_p(n+2), v_p(n+3), v_p(n+4)\big) \in \big(2\mathbb{N}\big)^5$. Pour $p = 2$ et $p = 3$, nous avons les alternatives suivantes pour chaque facteur $(n+i)$ de π_n^3 .

- **[A 1]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A 2]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$
- **[A 3]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times 2\mathbb{N}$
- **[A 4]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$

Comme nous avons cinq facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions très facilement.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 1]** .

  Dans ce cas, on sait juste que $(n+i, n+i') \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Or $n \notin {}^2\mathbb{N}$ puisque sinon nous aurions $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$ via $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$, mais ceci ne se peut pas d'après le fait 6.1. De même, $n+4 \notin {}^2\mathbb{N}$. Dès lors, nous avons $\{n+i, n+i'\} \subseteq \{n+1, n+2, n+3\}$ qui donne deux carrés parfaits non nuls éloignés de moins de 3 , et ceci contredit le fait 3.1.
- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 2]** .

  Dans ce cas, le couple de facteurs est $(n, n+3)$, ou $(n+1, n+4)$.
  1. Supposons d'abord que n et $(n+3)$ vérifient **[A 2]** .

     Comme $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+3) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(n) \in 2\mathbb{N}+1$ et $v_3(n+3) \in 2\mathbb{N}+1$, nous avons $n = 3N^2$ et $n+3 = 3M^2$ où $(N, M) \in \big(\mathbb{N}^*\big)^2$. Or, ceci donne $3 = 3M^2 - 3N^2$, puis $M^2 - N^2 = 1$ qui contredit le fait 3.1.
  2. De façon analogue, on ne peut pas avoir $(n+1)$ et $(n+4)$ vérifiant **[A 2]** .
- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 3]** .

  Comme dans le point précédent, c'est impossible car on aurait $2 = 2M^2 - 2N^2$, ou $4 = 2M^2 - 2N^2$. En effet, ici les couples possibles sont $(n, n{+}2)$, $(n, n{+}4)$, $(n{+}2, n{+}4)$ et $(n+1, n+3)$ [2].

2. Rien n'empêche d'avoir n , $(n+2)$ et $(n+4)$ vérifiant tous les trois **[A 3]** .

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 4]** .

  Ceci donne deux facteurs différents divisibles par 6 , mais c'est impossible. $\square$

Bien que longue, la preuve suivante est simple à comprendre car elle ne fait que dérouler le fil des faits découverts. De plus, cette preuve utilise une technique dont nous reparlerons plus tard lors de l'exposé de la méthode efficace et généraliste.

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Posant $m = n+2$, nous avons $\pi_n^4 = (m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) = m(m^2-1)(m^2-4)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. On notera dans la suite $u = m^2 - 1$ et $q = m^2 - 4$.

Supposons d'abord que $m \in {}^2\mathbb{N}_*$.

- De $muq \in {}^2\mathbb{N}_*$, nous déduisons $uq \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Comme $u - q = 3$, nous savons que $u \wedge q \in \{1, 3\}$.
- Si $u \wedge q = 1$, alors $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, d'où $(u,q) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Le fait 3.1 impose d'avoir $(u,q) = (4,1)$, d'où $m^2 - 1 = 4$, mais ceci est impossible[3].
- Si $u \wedge q = 3$, alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(u) \in 2\mathbb{N}+1$ et $v_3(q) \in 2\mathbb{N}+1$. Donc $u = 3U^2$ et $q = 3Q^2$ avec $(U,Q) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$. Or $u - q = 3$ donne $U^2 - Q^2 = 1$, et le fait 3.1 nous indique une contradiction.

Supposons maintenant que $m \notin {}^2\mathbb{N}_*$.

- Nous avons vu ci-dessus que $u \notin {}^2\mathbb{N}$ et $q \notin {}^2\mathbb{N}$. On peut donc écrire $m = \alpha M^2$, $u = \beta U^2$, $q = \gamma Q^2$ où $(M,U,Q) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^3$, et $(\alpha,\beta,\gamma) \in \left(\mathbb{N}_{>1}\right)^3$, le dernier triplet étant formé d'entiers sans facteur carré.
- Notons que $\beta \neq \gamma$ car, dans le cas contraire, $3 = u - q = \beta\left(U^2 - Q^2\right)$ fournirait $\beta = 3$ puis $U^2 - Q^2 = 1$, et ceci contredirait le fait 3.1.
- Nous avons $m \wedge u = 1$, $m \wedge q \in \{1,2,4\}$ et $u \wedge q \in \{1,3\}$ avec $m \wedge u = m \wedge q = u \wedge q = 1$ impossible car sinon on aurait $(m,u,q) \in \left({}^2\mathbb{N}\right)^3$ via $muq \in {}^2\mathbb{N}$.
- Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $\left(v_p(m), v_p(u), v_p(q)\right) \in \left(2\mathbb{N}\right)^3$.
- Les points précédents donnent $\{\alpha,\beta,\gamma\} \subseteq \{2,3,6\}$ avec de plus $\beta \neq \gamma$, ainsi que $\alpha \wedge \beta = 1$, $\alpha \wedge \gamma \in \{1,2\}$ et $\beta \wedge \gamma \in \{1,3\}$. Notons au passage que $\alpha \wedge \beta = 1$ implique $(\alpha,\beta) = (2,3)$, ou $(\alpha,\beta) = (3,2)$. Via le tableau « mécanique » ci-après, nous obtenons que forcément $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,3,2)$ ou $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,3,6)$. Le plus dur est fait !

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	*Statut*
2	3	2	1	2	1	$\checkmark$
2	3	6	1	2	3	$\checkmark$
3	2	3	1	3	1	$\boxtimes$
3	2	6	1	3	2	$\boxtimes$

- $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,3,2)$ nous donne $m = 2M^2$, $m^2 - 1 = 3U^2$ et $m^2 - 4 = 2Q^2$, d'où la contradiction $3 \cdot 4M^2U^2Q^2 \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,3,6)$ nous donne $m = 2M^2$, $m^2 - 1 = 3U^2$ et $m^2 - 4 = 6Q^2$, mais ce qui suit lève une autre contradiction.

3. On peut aussi noter que le fait 5.1 lève une contradiction car nous avons $m \in {}^2\mathbb{N}$ et $u \in {}^2\mathbb{N}$ qui donnent $(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$

– Travaillons modulo 3. Comme $m = 2M^2$, nous avons $m \equiv 0$ ou $m \equiv -1$. Or $m^2 - 1 = 3U^2$ donne $m^2 \equiv 1$, d'où $m \equiv -1$, puis $3 \mid m - 2$, et enfin $6 \mid m - 2$ puisque m est pair.
– Posant $m - 2 = 6r$ et notant $s = m + 2$, nous avons $6rs = 6Q^2$, puis $rs = Q^2$.
– $s \notin {}^2\mathbb{N}$, car dans le cas contraire, nous aurions $(m-2)(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$ via $(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) \in {}^2\mathbb{N}$, mais ceci ne se peut pas d'après le fait 6.1.
– Les deux résultats précédents donnent $(\pi, R, S) \in \mathbb{N}_{>1} \times \left(\mathbb{N}^*\right)^2$ tel que $r = \pi R^2$ et $s = \pi S^2$ avec π sans facteur carré.
– $4 = s - 6r = \pi(S^2 - 6R^2)$ donne $\pi = 2$, d'où $m + 2 = 2S^2$.
– Finalement, $m = 2M^2$ et $m + 2 = 2S^2$ donnent $2 = 2(S^2 - M^2)$, soit $1 = S^2 - M^2$, ce qui contredit le fait 3.1. $\square$

8. Sources utilisées

Ce document n'aurait pas vu le jour sans les sources suivantes.

(1) Un échange titré *« n(n+1)...(n+k) est un carré ? »* sur le site `lesmathematiques.net`.

La démonstration du fait 7.1 via le principe des tiroirs trouve sa source dans cet échange.

(2) L'article *« Le produit de 5 entiers consécutifs n'est pas le carré d'un entier. »* de T. Hayashi, Nouvelles Annales de Mathématiques, est consultable via Numdam, la bibliothèque numérique française de mathématiques.

Cet article a inspiré la preuve alternative du fait 7.1.

9. AFFAIRE À SUIVRE...