

# BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTRIERS CONSÉCUTIFS – UNE MÉTHODE EFFICACE

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons « Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International ».



---

## TABLE DES MATIÈRES

1.	Ce qui nous intéresse	2
2.	Notations utilisées	2
3.	Les carrés parfaits	2
3.1.	Structure	2
3.2.	Distance entre deux carrés parfaits	3
4.	Prenons du recul	4
4.1.	Les <b>sf</b> -tableaux	4
4.2.	Construire des <b>sf</b> -tableaux	4
5.	Structure des <b>sf</b> -tableaux	5
5.1.	A propos des <b>sf</b> -tableaux partiels	5
5.2.	A propos des <b>sf</b> -tableaux non partiels	5
6.	Premières applications	6
6.1.	Le cas de 2 facteurs	6
6.2.	Le cas de 3 facteurs	6
6.3.	Le cas de 4 facteurs	7
6.4.	Le cas de 5 facteurs	8
7.	Et après ?	9
7.1.	La méthode via le cas de 6 facteurs	9
7.2.	Au-delà de 6 facteurs ?	10
8.	Sources utilisées	11
9.	AFFAIRE À SUIVRE...	12

## 1. CE QUI NOUS INTÉRESSE

Dans l'article « *Note on Products of Consecutive Integers* »<sup>1</sup>, Paul Erdős démontre que pour tout couple  $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , le produit de  $(k+1)$  entiers consécutifs  $n(n+1) \cdots (n+k)$  n'est jamais le carré d'un entier. Plus précisément, l'argument général de Paul Erdős est valable pour  $k+1 \geq 100$ , soit à partir de 100 facteurs.

Il est facile de trouver sur le web des preuves à la main un nombre de facteurs appartenant à  $\llbracket 2; 8 \rrbracket \cup \{10\}$ . Bien que certaines de ces preuves soient très sympathiques, leur lecture ne fait pas ressortir de schéma commun de raisonnement<sup>2</sup>. Dans ce document, nous allons tenter de limiter au maximum l'emploi de fourberies déductives en présentant une méthode très élémentaire<sup>3</sup>, efficace, et semi-automatisable, pour démontrer, avec peu d'efforts cognitifs, les premiers cas d'impossibilité.

## 2. NOTATIONS UTILISÉES

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- $\forall (n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k-1} (n+i)$ .  
Par exemple,  $\pi_n^1 = n$ ,  $\pi_n^2 = n(n+1)$  et  $\pi_{n+2}^4 = (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$ .
- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$  est l'ensemble des carrés parfaits. On note aussi  ${}^2_*\mathbb{N} = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$ .  
 $\mathbb{N}_{sf}$  est l'ensemble des naturels non nuls sans facteur carré<sup>4</sup>.
- $\mathbb{P}$  désigne l'ensemble des nombres premiers.  
 $\forall (p; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$ ,  $v_p(n) \in \mathbb{N}$  est la valuation  $p$ -adique de  $n$ , c'est-à-dire  $p^{v_p(n)} \mid n$  et  $p^{v_p(n)+1} \nmid n$ , autrement dit  $p^{v_p(n)}$  divise  $n$ , contrairement à  $p^{v_p(n)+1}$ .
- $\mathbb{N}_{sc}^r$  désigne l'ensemble des suites finies strictement croissantes de  $r$  entiers naturels.  
 $\mathbb{P}_{sc}^r$  désigne l'ensemble des suites finies strictement croissantes de  $r$  nombres premiers.
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$ ,  $n \wedge m$  désigne le PGCD de  $n$  et  $m$ .
- $2\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.  
 $2\mathbb{N} + 1$  est l'ensemble des nombres naturels impairs.

## 3. LES CARRÉS PARFAITS

### 3.1. Structure.

**Fait 3.1.**  $n \in {}^2_*\mathbb{N}$  si, et seulement si,  $\forall p \in \mathbb{P}$ ,  $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ .

*Démonstration.* Immédiat à valider. □

**Fait 3.2.**  $\forall n \in {}^2_*\mathbb{N}$ , s'il existe  $m \in {}^2_*\mathbb{N}$  tel que  $n = fm$  alors  $f \in {}^2_*\mathbb{N}$ .

*Démonstration.*  $\forall p \in \mathbb{P}$ ,  $v_p(fm) \in 2\mathbb{N}$ ,  $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$  et  $v_p(fm) = v_p(f) + v_p(m)$  donnent  $v_p(f) \in 2\mathbb{N}$ . □

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).

2. Ceci est à nuancer, car à partir de 10 facteurs, une technique de type « principe des tiroirs » est envisageable numériquement ; par contre, elle n'est pas humainement efficace contrairement à ce qui va être présenté dans ce document.

3. Cette méthode s'appuie sur une représentation trouvée dans un message archivé : voir la section 8.

4. En anglais, on dit « square free ».

### 3.2. Distance entre deux carrés parfaits.

**Fait 3.3.** Soit  $(M, N) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  tel que  $N > M$ .

(1)  $N^2 - M^2 \geq 2N - 1$ .

(2) Notons  $nb_{sol}$  le nombre de solutions  $(M, N) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  de  $N^2 - M^2 = \delta$ .

Par exemple, pour  $\delta \in \llbracket 1; 20 \rrbracket$ , nous avons :

(a)  $nb_{sol} = 0$  si  $\delta \in \{1, 2, 4, 6, 10, 14, 18\}$ .

(b)  $nb_{sol} = 1$  si  $\delta \in \{3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 16, 17, 19, 20\}$ .

(c)  $nb_{sol} = 2$  si  $\delta \in \{15\}$ .

*Démonstration.*

(1) Comme  $N - 1 \geq M$ , nous obtenons :  $N^2 - M^2 \geq N^2 - (N - 1)^2 = 2N - 1$ .

(2) Le point précédent permet d'utiliser le programme Python suivant afin d'obtenir rapidement les longues listes de nombres indiquées.

```
from collections import defaultdict
from math import sqrt, floor

# N**2 - M**2 = diff ?
def sol(diff):
    solfound = []

    for N in range(1, (diff + 1) // 2 + 1):
        M_square = N**2 - diff

        if M_square > 0:
            M = floor(sqrt(M_square))

            if M != 0 and M**2 == M_square:
                solfound.append((M, N))

    return solfound

all_nbsol = defaultdict(list)

for d in range(1, 101):
    all_nbsol[len(sol(d))].append(d)

print(all_nbsol)
```

□

## 4. PRENONS DU RECU

4.1. Les **sf**-tableaux.

L'idée de départ est simple : d'après le fait 3.2, il semble opportun de se concentrer sur les diviseurs sans facteur carré des  $k$  facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^k = n(n+1) \cdots (n+k-1)$ .

**Définition 4.1.** Considérons  $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $(a_i)_{0 \leq i \leq k} \subset \mathbb{N}_{sf}$  et  $(s_i)_{0 \leq i \leq k} \subset {}^2\mathbb{N}$  tels que  $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket$ ,  $n+i = a_i s_i$ . Cette situation est résumée par le tableau suivant que nous nommerons « **sf**-tableau »<sup>5</sup>.

$n + \bullet$	0	1	2	...	k
	$a_0$	$a_1$	$a_2$	...	$a_k$

**Exemple 4.1.** Supposons avoir le **sf**-tableau suivant où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$n + \bullet$	0	1	2	3
	2	5	6	1

Ceci résume la situation suivante.

- $\exists A \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n = 2A^2$ .
- $\exists B \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n + 1 = 5B^2$ .
- $\exists C \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n + 2 = 6C^2$ .
- $\exists D \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n + 3 = D^2$ .

**Définition 4.2.** Soient  $r \in \mathbb{N}^*$ ,  $(n_i)_{1 \leq i \leq r} \in \mathbb{N}_{sc}^r$ ,  $(a_i)_{1 \leq i \leq r} \subset \mathbb{N}_{sf}$  et  $(s_i)_{1 \leq i \leq r} \subset {}^2\mathbb{N}$  tels que  $\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ ,  $n_i = a_i s_i$ . Cette situation est résumée par le tableau suivant que nous nommerons « **sf**-tableau généralisé ».

$\bullet$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	...	$n_r$
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	...	$a_r$

4.2. Construire des **sf**-tableaux.

Pour fabriquer des **sf**-tableaux, nous allons « multiplier » des **sf**-tableaux dits partiels.

**Définition 4.3.** Soient  $(n, k, r) \in (\mathbb{N}^*)^3$ ,  $(p_j)_{1 \leq j \leq r} \in \mathbb{P}_{sc}^r$ ,  $(\epsilon_{i,j})_{0 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq r} \subseteq \{0, 1\}$  et aussi  $(f_i)_{0 \leq i \leq k} \subset \mathbb{N}^*$  vérifiant les conditions suivantes.

- $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket$ ,  $n + i = f_i \cdot \prod_{j=1}^r p_j^{v_{p_j}(n+i)}$ . Noter que  $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket$ ,  $\forall j \in \llbracket 1; r \rrbracket$ ,  $f_i \wedge p_j = 1$ .
- $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket$ ,  $\forall j \in \llbracket 1; r \rrbracket$ ,  $v_{p_j}(n+i) \equiv \epsilon_{i,j} \text{ modulo } 2$ .

Cette situation est résumée par le tableau suivant qui sera nommé « **sf**-tableau partiel », voire « **sf**-tableau partiel d'ordre  $(p_j)_{1 \leq j \leq r}$  »<sup>6</sup>.

$n + \bullet$	0	1	2	...	k
$(p_j)_{1 \leq j \leq r}$	$\prod_{j=1}^r p_j^{\epsilon_{0,j}}$	$\prod_{j=1}^r p_j^{\epsilon_{1,j}}$	$\prod_{j=1}^r p_j^{\epsilon_{2,j}}$	...	$\prod_{j=1}^r p_j^{\epsilon_{k,j}}$

**Exemple 4.2.** Supposons avoir le **sf**-tableau partiel suivant où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$n + \bullet$	0	1	2	3
$(2, 3)$	2	6	1	3

5. « sf » est pour « square free ».

6. Noter que  $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket$ ,  $\forall j \in \llbracket 1; r \rrbracket$ ,  $p_j^{\epsilon_{i,j}} \in \{1, p_j\}$ .

Ceci résume la situation suivante.

- $\exists(a, \alpha, A) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$  tel que  $A \wedge 6 = 1$  et  $n = 2^{2a+1}3^{2\alpha}A$ .
- $\exists(b, \beta, B) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$  tel que  $B \wedge 6 = 1$  et  $n + 1 = 2^{2b+1}3^{2\beta+1}B$ .
- $\exists(c, \gamma, C) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$  tel que  $C \wedge 6 = 1$  et  $n + 2 = 2^{2c}3^{2\gamma}C$ .
- $\exists(d, \delta, D) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$  tel que  $D \wedge 6 = 1$  et  $n + 3 = 2^{2d}3^{2\delta+1}D$ .

**Exemple 4.3.** La multiplication de deux *sf*-tableaux partiels est « naturelle » lorsqu'elle porte sur des suites  $(p_j)_{1 \leq j \leq r} \in \mathbb{P}_{sc}^r$  et  $(q_j)_{1 \leq j \leq s} \in \mathbb{P}_{sc}^s$  d'intersection vide, c'est-à-dire sans nombre premier commun.

Considérons les deux *sf*-tableaux partiels suivants où l'on note 2 et 3 au lieu de (2) et (3).

$n + \bullet$	0	1	2	3
2	1	2	1	2

$n + \bullet$	0	1	2	3
3	3	1	1	3

La multiplication de ces *sf*-tableaux partiels est le *sf*-tableau suivant, partiel a priori, mais si l'on sait que 2 et 3 sont les seuls diviseurs premiers de  $\pi_n^4$ , alors le *sf*-tableau est non partiel.

$n + \bullet$	0	1	2	3
(2, 3)	3	2	1	6

Ceci résume la situation suivante qui est équivalente à ce que donne la conjonction des deux premiers *sf*-tableaux partiels (les abus de notations sont évidents).

- $A \wedge 6 = 1$  et  $n = 2^{2a}3^{2\alpha+1}A$ .
- $B \wedge 6 = 1$  et  $n + 1 = 2^{2b+1}3^{2\beta}B$ .
- $C \wedge 6 = 1$  et  $n + 2 = 2^{2c}3^{2\gamma}C$ .
- $D \wedge 6 = 1$  et  $n + 3 = 2^{2d+1}3^{2\delta+1}D$ .

## 5. STRUCTURE DES SF-TABLEAUX

### 5.1. A propos des *sf*-tableaux partiels.

**Fait 5.1.** Dans la deuxième ligne d'un *sf*-tableau partiel d'ordre  $p$ , les positions des valeurs  $p$  sont congrues modulo  $p$ .

*Démonstration.* Penser aux multiples de  $p$ . □

**Fait 5.2.**  $\forall(n, k, p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \times \mathbb{P}$ , si  $\pi_n^k \in {}^2\mathbb{N}$ , alors dans le *sf*-tableau partiel d'ordre  $p$  associé à  $\pi_n^k$ , le nombre de valeurs  $p$  est forcément pair.

*Démonstration.* Évident, mais très pratique, comme nous le verrons dans la suite. □

### 5.2. A propos des *sf*-tableaux non partiels.

**Fait 5.3.** Dans les tableaux ci-dessous, où  $k \geq 2$ , les puces  $\bullet$  indiquent des valeurs quelconques.

(1) Si nous avons un *sf*-tableau du type suivant, alors  $\pi_n^{k-1} \in {}^2_*\mathbb{N}$ .

$n + \bullet$	0	1	...	$k-1$	$k$
	$\bullet$	$\bullet$	...	$\bullet$	1

(2) Si nous avons un *sf*-tableau du type suivant, alors  $\pi_{n+1}^{k-1} \in {}^2_*\mathbb{N}$ .

$n + \bullet$	0	1	...	$k-1$	$k$
	1	$\bullet$	...	$\bullet$	$\bullet$

*Démonstration.* Immédiat via le fait 3.2, car nous avons soit  $n + k \in {}^2_*\mathbb{N}$ , soit  $n \in {}^2_*\mathbb{N}$ . □

**Fait 5.4.** Soit le *sf*-tableau généralisé ci-après où  $r \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ,  $(n_i)_{1 \leq i \leq r} \in \mathbb{N}_{sc}^r$  et  $d \in \mathbb{N}_{sf}$ .

•	$n_1$	...	$n_r$
	$d$	...	$d$

Ce *sf*-tableau est impossible si l'une des deux conditions suivantes est validée.

$$(1) \frac{n_r - n_1}{d} \notin \mathbb{N}.$$

$$(2) \frac{n_r - n_1}{d} \in \{1, 2, 4, 6, 10, 14, 18\}.$$

*Démonstration.*  $n_1 = dA^2$  et  $n_r = dB^2$  nous donnent  $d(B^2 - A^2) = n_r - n_1$ . On conclut directement pour le premier cas, et via le fait 3.3 dans le second.  $\square$

## 6. PREMIÈRES APPLICATIONS

### 6.1. Le cas de 2 facteurs.

Supposons que  $\pi_n^2 = n(n+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$ . Nous avons alors les *sf*-tableaux partiels suivants pour  $p \in \mathbb{P}$  divisant  $\pi_n^2$ , car les valeurs  $p$  de la deuxième ligne doivent apparaître un nombre pair de fois tout en étant espacées par  $(p-1)$  valeurs 1 (voir les faits 5.1 et 5.2).

$n + \bullet$	0	1
$p$	1	1

La multiplication de tous les *sf*-tableaux partiels précédents donne le *sf*-tableau, non partiel, ci-après, mais ceci contredit le fait 5.4.

$n + \bullet$	0	1
	1	1

### 6.2. Le cas de 3 facteurs.

Supposons que  $\pi_n^3 = n(n+1)(n+2) \in {}^3_*\mathbb{N}$ . Nous avons alors les *sf*-tableaux partiels suivants pour  $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$  divisant  $\pi_n^3$ , d'après les faits 5.1 et 5.2.

$n + \bullet$	0	1	2
$p$	1	1	1

Pour  $p = 2$ , via les faits 5.1 et 5.2, seulement deux *sf*-tableaux partiels d'ordre 2 sont possibles. Nous utilisons un abus de notation évident pour indiquer ces deux possibilités.

$n + \bullet$	0	1	2
2	1	1	1
	2	1	2

La multiplication de tous les *sf*-tableaux partiels précédents donne juste les deux *sf*-tableaux, non partiels, suivants, mais ceci est impossible d'après le fait 5.4.

$n + \bullet$	0	1	2
	1	1	1
	2	1	2

### 6.3. Le cas de 4 facteurs.

Supposons que  $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3) \in {}^2_*\mathbb{N}$ . Nous avons alors les **sf**-tableaux partiels suivants pour  $p \in \mathbb{P}_{\geq 4}$  divisant  $\pi_n^4$ .

$n + \bullet$	0	1	2	3
$p$	1	1	1	1

Pour  $p = 2$ , nous avons les trois **sf**-tableaux partiels d'ordre 2 donnés ci-après.

$n + \bullet$	0	1	2	3
2	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2

Pour  $p = 3$ , nous obtenons les deux **sf**-tableaux partiels d'ordre 3 donnés ci-après.

$n + \bullet$	0	1	2	3
3	1	1	1	1
	3	1	1	3

La multiplication des **sf**-tableaux partiels précédents donne les **sf**-tableaux<sup>7</sup>, suivants.

$n + \bullet$	0	1	2	3
	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2

$n + \bullet$	0	1	2	3
	3	1	1	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Le fait 5.4 rejette quatre **sf**-tableaux : voir les cellules surlignées ci-dessous.

$n + \bullet$	0	1	2	3
	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2

$n + \bullet$	0	1	2	3
	3	1	1	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Ceci nous amène à étudier les deux **sf**-tableaux généralisés suivants.

$\bullet$	$n$	$n+1$	$n+2$	$n+3$
	6	1	2	3
	3	2	1	6

En posant  $x = n + \frac{3}{2} = \frac{n+(n+3)}{2}$ , nous obtenons les **sf**-tableaux généralisés suivants.

$\bullet$	$x - \frac{3}{2}$	$x - \frac{1}{2}$	$x + \frac{1}{2}$	$x + \frac{3}{2}$
	6	1	2	3
	3	2	1	6

En multipliant les colonnes 1 et 4, et aussi la 2 et la 3, nous arrivons, dans chaque cas, au même **sf**-tableau généralisé ci-dessous après avoir noté que  $6 \times 3 = 2 \times 3^2$ .

$\bullet$	$x^2 - \frac{9}{4}$	$x^2 - \frac{1}{4}$
	2	2

7. Tableaux non partiels forcément.

Comme  $x^2 - \frac{1}{4} - (x^2 - \frac{9}{4}) = 2$ , le fait 5.4 nous montre que le **sf**-tableau généralisé précédent est impossible. Joli! Non?

Noter que la fin du raisonnement n'a fait appel à aucune hypothèse sur  $\pi_n^4$ . Ceci nous donne donc le fait suivant.

**Fait 6.1.** *Aucun **sf**-tableau ne peut contenir l'un des deux **sf**-tableaux suivants.*

$m + \bullet$	0	1	2	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

#### 6.4. Le cas de 5 facteurs.

Supposons que  $\pi_n^5 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2_*\mathbb{N}$ . Nous avons alors les **sf**-tableaux partiels suivants pour  $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$  divisant  $\pi_n^5$ .

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
$p$	1	1	1	1	1

Pour  $p = 2$ , nous avons les **sf**-tableaux partiels d'ordre 2 donnés ci-après.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
2	1	1	1	1	1
	2	1	2	1	1
	2	1	1	1	2
	1	2	1	2	1
	1	1	2	1	2

Pour  $p = 3$ , nous obtenons les **sf**-tableaux partiels d'ordre 3 donnés ci-après.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
3	1	1	1	1	1
	3	1	1	3	1
	1	3	1	1	3

La multiplication de tous les **sf**-tableaux partiels précédents donne les 15 cas suivants.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
	1	1	1	1	1
	2	1	2	1	1
	2	1	1	1	2
	1	2	1	2	1
	1	1	2	1	2

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
	3	1	1	3	1
	6	1	2	3	1
	6	1	1	3	2
	3	2	1	6	1
	3	1	2	3	2

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
	1	3	1	1	3
	2	3	2	1	3
	2	3	1	1	6
	1	6	1	2	3
	1	3	2	1	6

Comme  $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2_*\mathbb{N}$  et  $\pi_{n+1}^4 = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2_*\mathbb{N}$  d'après la section 6.3, les tableaux commençant, ou finissant, par une valeur 1 sont à ignorer d'après le fait 5.3. Cela laisse les **sf**-tableaux ci-après, mais ces derniers sont rejetés par le fait 5.4.



$n + \bullet$	0	1	2	3	4
2		1	1	1	2
6		1	1	3	2
3		1	2	3	2
2		3	2	1	3
2		3	1	1	6

## 7. ET APRÈS ?

### 7.1. La méthode via le cas de 6 facteurs.

La méthode présentée ci-dessus permet de faire appel à des programmes informatiques pour limiter les traitements à la main, et à la sueur des neurones, de **sf**-tableaux problématiques comme nous avons dû le faire dans la section 6.3. Expliquons cette tactique semi-automatique en traitant le cas de 6 facteurs.

- (1) On raisonne par l'absurde en supposant que  $\pi_n^6 \in {}^2_*\mathbb{N}$ .
- (2) Comme  $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 6}$ ,  $p$  divise au maximum un seul des facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^6$ , nous avons juste besoin de considérer l'ensemble  $\mathcal{P} = \{2, 3, 5\}$  des diviseurs premiers stricts de 6.
- (3) Pour chaque élément  $p$  de  $\mathcal{P}$ , on construit la liste  $\mathcal{V}_p$  des **sf**-tableaux partiels relatifs à  $p$  et  $\pi_n^6 \in {}^2_*\mathbb{N}$  en s'appuyant sur la section 5.1.
- (4) Via les listes  $(\mathcal{V}_p)_{p \in \mathcal{P}}$ , on calcule toutes les multiplications de tous les **sf**-tableaux partiels relatifs à des nombres  $p$  différents, et pour chacune d'elles, on ne la garde que si elle ne vérifie aucune des conditions suivantes, celles du dernier cas devant être indiquées à la main au programme qui va donc évoluer au gré des démonstrations faites par un humain (démonstrations que l'on espère le plus rare possible).
  - (a) Le tableau commence, ou se termine, par la valeur 1. Dans ce cas, on sait par récurrence que le tableau produit n'est pas possible (voir le fait 5.3).
  - (b) Le tableau est rejeté par le fait 5.4.
  - (c) Le tableau « produit » contient un sous-tableau que nous savons impossible suite à un raisonnement humain fait *localement*, c'est-à-dire que seul les facteurs indiqués dans le sous-tableau, et le sous-tableau lui-même sont utilisés pour raisonner. C'est le cas des **sf**-tableaux du fait 6.1.

Dans le dépôt en ligne associé à ce document sont placés des fichiers **Python**<sup>8</sup> qui nous amènent à analyser les deux **sf**-tableaux problématiques suivants pour lesquels nous allons justifier que les valeurs 1 posent problème<sup>9</sup>.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4	5
30		1	2	3	1	5
5		1	3	2	1	30

Ces deux cas sont rapides à gérer puisque, d'après le fait 3.3, 1 et 4 sont les seuls carrés distants de 3, d'où  $n+1=1$ , mais ceci contredit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Nous savons donc que  $\pi_n^6 \in {}^2_*\mathbb{N}$  sans effort. Notons au passage un nouveau cas problématique « local » pour nos futures recherches (le fait suivant généralise la technique que nous venons d'utiliser).

8. L'emploi de scripts codés rapidement est totalement fonctionnel ici.

9. Toutes les règles 4-a, 4-b et 4-c sont utilisées pour n'arriver qu'aux deux **sf**-tableaux à analyser à la main.

**Fait 7.1.** Soit le *sf*-tableau généralisé ci-après où  $r \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ,  $(n_i)_{1 \leq i \leq r} \in \mathbb{N}_{sc}^r$  et  $d \in \mathbb{N}_{sf}$ .

•	$n_1$	$\dots$	$n_r$
	$d$	$\dots$	$d$

Ce *sf*-tableau est impossible si  $n_1 \geq d + 1$  et  $\frac{n_r - n_1}{d} \in \{3, 8\}$ .

*Démonstration.* Ceci vient des équivalences logiques suivantes en posant  $n_1 = dA^2$  et  $n_r = dB^2$  avec  $(A, B) \in (\mathbb{N}^*)^2$ .

$$\begin{aligned}
 & \frac{n_r - n_1}{d} \in \{3, 8\} \\
 \iff & B^2 - A^2 \in \{3, 8\} \\
 \iff & (A, B) \in \{(1, 2), (1, 3)\} \quad \left. \vphantom{\frac{n_r - n_1}{d} \in \{3, 8\}} \right\} \text{ Voir le fait 3.3.} \\
 \iff & (n_1, n_r) \in \{(d, 4d), (d, 9d)\}
 \end{aligned}$$

□

**Remarque 7.1.** On peut gérer les cas problématiques du cas 6 via des manipulations algébriques similaires à celles qui avaient donné le fait 6.1. En effet,  $x = n + \frac{5}{2}$  nous donne ce qui suit avec un abus de notation évident.

$x + \bullet$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
	30	1	2	3	1	5
	5	1	3	2	1	30

La multiplication des colonnes 1 et 6, ainsi que celle des colonnes 3 et 4, nous amènent au même *sf*-tableau généralisé suivant après avoir noté que  $5 \times 30 = 6 \times 5^2$ .

•	$x^2 - \frac{25}{4}$	$x^2 - \frac{1}{4}$
	6	6

Comme  $x^2 - \frac{1}{4} - (x^2 - \frac{25}{4}) = 6$ , le fait 5.4 nous permet de conclure.

## 7.2. Au-delà de 6 facteurs ?

Voici ce que donnent nos programmes **Pyhon** sans trop d'efforts, mais avec du temps de calcul<sup>10</sup>. Rappelons que chaque nouveau cas problématique est indiqué au programme qui évolue donc au gré de l'intervention humaine.

*Sans intervention humaine.*

Pour  $k \in \{7, 8\}$ , nous avons  $\pi_n^k \notin {}^2\mathbb{N}$  sans aucun effort cognitif.

*De nouveaux cas problématiques*

$\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$  demande de gérer les *sf*-tableaux suivants.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	14	1	6	5	2	3	1	7	10
	10	7	1	3	2	5	6	1	14

Extrayons du premier *sf*-tableau, le *sf*-tableau généralisé suivant.

•	$n + 1$	$n + 2$	$n + 4$	$n + 5$
	1	6	2	3

10. Nous commençons à entrer dans un monde à la combinatoire élevée.

En posant  $m = n + 3$ , nous obtenons le tableau ci-après.

•	$m - 2$	$m - 1$	$m + 1$	$m + 2$
	1	6	2	3

En multipliant les colonnes 1 et 4, et aussi la 2 et la 3, nous obtenons le *sf*-tableau généralisé ci-dessous après avoir noté que  $6 \times 2 = 3 \times 2^2$ .

•	$m^2 - 4$	$m^2 - 1$
	3	3

Comme  $m^2 - 4 - (m^2 - 1) = 3$ , le fait 5.4 nous montre que le premier *sf*-tableau, celui commençant par 14, est impossible. Le cas du deuxième se traite de façon analogue, d'où finalement  $\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$ . Notons au passage un nouveau fait.

**Fait 7.2.** *Aucun sf-tableau ne peut contenir l'un des deux sf-tableaux généralisés suivants.*

$m + \bullet$	0	1	3	4
	1	6	2	3
	3	2	6	1

*Sans intervention humaine.*

Pour  $k \in \llbracket 10; 17 \rrbracket$ , nous avons  $\pi_n^k \notin {}^2\mathbb{N}$  sans aucun effort cognitif. Au-delà, un programme basique n'est plus utilisable car il y a trop de tableaux à construire...

## 8. SOURCES UTILISÉES

Ce document n'aurait pas vu le jour sans la source suivante.

- (1) Une discussion archivée consultée le 28 janvier 2024 :

<https://web.archive.org/web/20171110144534/http://mathforum.org/library/drmath/view/65589.html>.

*Cette discussion utilise ce que nous avons nommé les sf-tableaux, mais le côté semi-mécanisable de leur utilisation n'est pas souligné.*

---

## 9. AFFAIRE À SUIVRE...

---