Ecriture en base k et $\sum_{i=0}^{n} k^i$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Combien d'écritures en base k avec n chiffres ?

↳ k^n : direct.

↳ 1 chiffre (zéro ignoré) : $k-1$

2 ——— : $(k-1)\times k$

3 ——— : $(k-1)\times k^2$

⋮

n ——— : $(k-1)\times k^{n-1}$

n chiffres !

$\neq 0$ libre

↳ $1+(k-1)\sum_{0}^{n-1} k^i = k^n$

$\Leftrightarrow \sum_{0}^{n-1} k^i = \dfrac{k^n-1}{k-1}$

$\sum_{0}^{n} 2^k$ via des surjections !

$S_n = \{\text{surjec° de } \underbrace{[\![n^*]\!]}_{[\![1;n]\!]} \text{ dans } [\![2^*]\!]\}$

φ surjec°

↳ $\varphi(n)=1$

- $\varphi_{|[\![1,n-1]\!]} = 2$ ie cte
- $\varphi_{|[\![1;n-1]\!]}$ surjec° sur $[\![2^*]\!]$

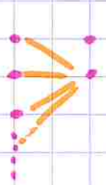
↳ $\varphi(n)=2$ (idem)

↳ D'où $S_n = 2(S_{n-1}+1)$

$S_2 = 2$ via

$$= 2\cdot \underbrace{2(S_{n-2}+1)} + 2 \qquad 2^{n-1}$$

$$= \dots = 2+2^2+\dots+\underbrace{2^{n-2}+2^{n-2}S_2}$$

↳ $S_n = 2^n - 2$ car on enlève  et 

↳ Conclusion : $2^n - 2 = 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}$

ie $2^n - 1 = \sum_{0}^{n-1} 2^k$