COMBINATOIRE GÉNÉRATRICE

k dés classiques, combien de façons d'obtenir une somme égale à n ?

↳ **Analyse**

Prenons $k=4$.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{array} \xrightarrow{\oplus} \begin{array}{l} 1+1+1+1 \\ 1+1+1+2 \\ \ldots \text{ etc} \end{array}$$

On va modéliser ceci via des poly. en X car on note le parallèle suivant (et surtout, on a en tête les séries génératrices).

$$\underbrace{1}_{\text{dé n°}1}+\underbrace{1}_{2}+\underbrace{1}_{3}+\underbrace{1}_{4} \to x^1 x^1 x^1 x^1 = x^{1+1+1+1}$$

$$5+1+3+4 \to \underbrace{x^5}_{\text{dé n°}1}\underbrace{x^1}_{2}\underbrace{x^3}_{3}\underbrace{x^4}_{4} = x^{5+1+3+4}$$

... etc

Il suffit de considérer $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4$ et de compter le nbre de monômes de degrés $4,5,6,\ldots$ après dév.

Fastidieux mais bien plus efficace que la méthode directe !

↳ **Cas général**

A-t-on accès au dév. de $(x+x^2+\cdots+x^6)^k$, soit de

$P_k(x) = x^k(1+x+\cdots+x^5)^k$?

Notant $s(k;n)$ la quantité cherchée, on a clairement

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} s(k,n)\, x^n$$

Mais on a aussi :

$$P_k(x) = x^k\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^k$$

$$= x^k(1-x^6)^k(1-x)^{-k}$$

$$P_k(x) = x^k \cdot \sum_{n \geq 0} \binom{k}{n} (-x^6)^n \cdot \underbrace{\sum_{n \geq 0} \frac{[k]_n}{n!} x^n}_{\substack{\text{Via dériva° formelle en notant} \\ [k]_n = k(k+1)\cdots(k+n-1)}}$$

$$= x^k \cdot \sum_{n \geq 0} \sum_{6i+j=n} \binom{k}{i} (-1)^i \times \frac{[k]_j}{j!} \cdot x^n$$