

BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTRIERS CONSÉCUTIFS – UNE MÉTHODE EFFICACE

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons « Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International ».



TABLE DES MATIÈRES

1.	Ce qui nous intéresse	2
2.	Notations utilisées	2
3.	Les carrés parfaits	3
3.1.	Structure	3
3.2.	Distance entre deux carrés parfaits	3
4.	Prenons du recul	4
4.1.	Les sf -tableaux	4
4.2.	Construire des sf -tableaux	4
5.	Structure des sf -tableaux	5
5.1.	A propos des sf -tableaux partiels	5
5.2.	A propos des sf -tableaux non partiels	5
6.	Premières applications	6
6.1.	Le cas de 2 facteurs	6
6.2.	Le cas de 3 facteurs	6
6.3.	Le cas de 4 facteurs	7
6.4.	Le cas de 5 facteurs	8
7.	Et après ?	9
7.1.	La méthode via le cas de 6 facteurs	9
7.2.	Au-delà de 6 facteurs ?	10
8.	Nombre de sf -tableaux	11
9.	Sources utilisées	13
10.	AFFAIRE À SUIVRE...	14

1. CE QUI NOUS INTÉRESSE

Dans l'article « *Note on Products of Consecutive Integers* »¹, Paul Erdős démontre que pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit de $(k+1)$ entiers consécutifs $n(n+1) \cdots (n+k)$ n'est jamais le carré d'un entier. Plus précisément, l'argument général de Paul Erdős est valable pour $k+1 \geq 100$, soit à partir de 100 facteurs.

Il est facile de trouver sur le web des preuves à la main un nombre de facteurs appartenant à $\llbracket 2; 8 \rrbracket \cup \{10\}$. Bien que certaines de ces preuves soient très sympathiques, leur lecture ne fait pas ressortir de schéma commun de raisonnement². Dans ce document, nous allons tenter de limiter au maximum l'emploi de fourberies déductives en présentant une méthode très élémentaire³, efficace, et semi-automatisable, pour démontrer, avec peu d'efforts cognitifs, les premiers cas d'impossibilité.

2. NOTATIONS UTILISÉES

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- $\forall (n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k-1} (n+i)$.

Par exemple, $\pi_n^1 = n$, $\pi_n^2 = n(n+1)$ et $\pi_{n+2}^4 = (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$.

- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des carrés parfaits. On note aussi ${}^2_*\mathbb{N} = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
 \mathbb{N}_{sf} est l'ensemble des naturels non nuls sans facteur carré⁴.
- \mathbb{P} désigne l'ensemble des nombres premiers.
 $\forall (p; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p -adique de n , c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n , contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.
- \mathbb{N}_{sc}^r désigne l'ensemble des suites finies strictement croissantes de r entiers naturels.
 \mathbb{P}_{sc}^r désigne l'ensemble des suites finies strictement croissantes de r nombres premiers.
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m .
- $2\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
 $2\mathbb{N} + 1$ est l'ensemble des nombres naturels impairs.

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).

2. Ceci est à nuancer, car à partir de 10 facteurs, une technique de type « principe des tiroirs » est envisageable numériquement ; par contre, elle n'est pas humainement efficace contrairement à ce qui va être présenté dans ce document.

3. Cette méthode s'appuie sur une représentation trouvée dans un message archivé : voir la section 9.

4. En anglais, on dit « square free ».

3. LES CARRÉS PARFAITS

3.1. Structure.

Fait 3.1. $n \in {}^2\mathbb{N}$ si, et seulement si, $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(n) \in 2\mathbb{N}$.

Démonstration. Immédiat à valider. □

Fait 3.2. $\forall n \in {}^2\mathbb{N}$, s'il existe $m \in {}^2\mathbb{N}$ tel que $n = fm$ alors $f \in {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(fm) \in 2\mathbb{N}, v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(fm) = v_p(f) + v_p(m)$ donnent $v_p(f) \in 2\mathbb{N}$. □

3.2. Distance entre deux carrés parfaits.

Fait 3.3. Soit $(M, N) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $N > M$.

(1) $N^2 - M^2 \geq 2N - 1$.

(2) Notons nb_{sol} le nombre de solutions $(M, N) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de $N^2 - M^2 = \delta$.

Pour $\delta \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$, nous avons :

(a) $nb_{sol} = 0$ si $\delta \in \{1, 2, 4, 6, 10\}$.

(b) $nb_{sol} = 1$ si $\delta \in \{3, 5, 7, 8, 9\}$. Ainsi, $N^2 - M^2 = 3$ uniquement si $(M, N) = (1, 2)$.

Démonstration.

(1) Comme $N - 1 \geq M$, nous obtenons : $N^2 - M^2 \geq N^2 - (N - 1)^2 = 2N - 1$.

(2) Le point précédent permet d'utiliser le programme Python suivant afin d'obtenir rapidement les longues listes de nombres indiquées. □

```
from collections import defaultdict
from math          import sqrt, floor

def sol(diff):
    solfound = []

    for N in range(1, (diff + 1) // 2 + 1):
        M_square = N**2 - diff

        if M_square > 0:
            M = floor(sqrt(M_square))

            if M != 0 and M**2 == M_square:
                solfound.append((M, N))

    return solfound

all_nbsol = defaultdict(list)

for d in range(1, 101):
    all_nbsol[len(sol(d))].append(d)
```

4. PRENONS DU RECU

4.1. Les **sf**-tableaux.

L'idée de départ est simple : d'après le fait 3.2, il semble opportun de se concentrer sur les diviseurs sans facteur carré des k facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^k = n(n+1) \cdots (n+k-1)$.

Définition 4.1. *Considérons $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(a_i)_{0 \leq i \leq k} \subset \mathbb{N}_{sf}$ et $(s_i)_{0 \leq i \leq k} \subset {}^2\mathbb{N}$ tels que $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket$, $n+i = a_i s_i$. Cette situation est résumée par le tableau suivant que nous nommerons « **sf**-tableau »⁵.*

$n + \bullet$	0	1	2	...	k
	a_0	a_1	a_2	...	a_k

Exemple 4.1. *Supposons avoir le **sf**-tableau suivant où $n \in \mathbb{N}^*$.*

$n + \bullet$	0	1	2	3
	2	5	6	1

Ceci résume la situation suivante.

- $\exists A \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2A^2$.
- $\exists B \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 1 = 5B^2$.
- $\exists C \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 2 = 6C^2$.
- $\exists D \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 3 = D^2$.

Définition 4.2. *Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $(n_i)_{1 \leq i \leq r} \in \mathbb{N}_{sc}^r$, $(a_i)_{1 \leq i \leq r} \subset \mathbb{N}_{sf}$ et $(s_i)_{1 \leq i \leq r} \subset {}^2\mathbb{N}$ tels que $\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $n_i = a_i s_i$. Cette situation est résumée par le tableau suivant que nous nommerons « **sf**-tableau généralisé ».*

\bullet	n_1	n_2	n_3	...	n_r
	a_1	a_2	a_3	...	a_r

4.2. Construire des **sf**-tableaux.

Pour fabriquer des **sf**-tableaux, nous allons « multiplier » des **sf**-tableaux dits partiels.

Définition 4.3. *Soient $(n, k, r) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $(p_j)_{1 \leq j \leq r} \in \mathbb{P}_{sc}^r$, $(\epsilon_{i,j})_{0 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq r} \subseteq \{0, 1\}$ et aussi $(f_i)_{0 \leq i \leq k} \subset \mathbb{N}^*$ vérifiant les conditions suivantes.*

- $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket$, $n + i = f_i \cdot \prod_{j=1}^r p_j^{v_{p_j}(n+i)}$. Noter que $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket$, $\forall j \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $f_i \wedge p_j = 1$.
- $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket$, $\forall j \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $v_{p_j}(n+i) \equiv \epsilon_{i,j} \text{ modulo } 2$.

*Cette situation est résumée par le tableau suivant qui sera nommé « **sf**-tableau partiel », voire « **sf**-tableau partiel d'ordre $(p_j)_{1 \leq j \leq r}$ »⁶.*

$n + \bullet$	0	1	2	...	k
$(p_j)_{1 \leq j \leq r}$	$\prod_{j=1}^r p_j^{\epsilon_{0,j}}$	$\prod_{j=1}^r p_j^{\epsilon_{1,j}}$	$\prod_{j=1}^r p_j^{\epsilon_{2,j}}$...	$\prod_{j=1}^r p_j^{\epsilon_{k,j}}$

Exemple 4.2. *Supposons avoir le **sf**-tableau partiel suivant où $n \in \mathbb{N}^*$.*

$n + \bullet$	0	1	2	3
$(2, 3)$	2	6	1	3

5. « sf » est pour « square free ».

6. Noter que $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket$, $\forall j \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $p_j^{\epsilon_{i,j}} \in \{1, p_j\}$.

Ceci résume la situation suivante.

- $\exists(a, \alpha, A) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$ tel que $A \wedge 6 = 1$ et $n = 2^{2a+1}3^{2\alpha}A$.
- $\exists(b, \beta, B) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$ tel que $B \wedge 6 = 1$ et $n + 1 = 2^{2b+1}3^{2\beta+1}B$.
- $\exists(c, \gamma, C) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$ tel que $C \wedge 6 = 1$ et $n + 2 = 2^{2c}3^{2\gamma}C$.
- $\exists(d, \delta, D) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$ tel que $D \wedge 6 = 1$ et $n + 3 = 2^{2d}3^{2\delta+1}D$.

Exemple 4.3. La multiplication de deux *sf*-tableaux partiels de deux suites $(p_j)_{1 \leq j \leq r} \in \mathbb{P}_{sc}^r$ et $(q_j)_{1 \leq j \leq s} \in \mathbb{P}_{sc}^s$ d'intersection vide, c'est-à-dire sans nombre premier commun, est « naturelle ». Considérons les deux *sf*-tableaux partiels suivants où l'on note 2 et 3 au lieu de (2) et (3).

$n + \bullet$	0	1	2	3
2	1	2	1	2

$n + \bullet$	0	1	2	3
3	3	1	1	3

La multiplication de ces *sf*-tableaux partiels est le *sf*-tableau suivant, partiel a priori, mais si l'on sait que 2 et 3 sont les seuls diviseurs premiers de π_n^4 , alors le *sf*-tableau est non partiel.

$n + \bullet$	0	1	2	3
(2, 3)	3	2	1	6

Ceci résume la situation suivante qui est équivalente à ce que donne la conjonction des deux premiers *sf*-tableaux partiels (les abus de notations sont évidents).

- $A \wedge 6 = 1$ et $n = 2^{2a}3^{2\alpha+1}A$.
- $B \wedge 6 = 1$ et $n + 1 = 2^{2b+1}3^{2\beta}B$.
- $C \wedge 6 = 1$ et $n + 2 = 2^{2c}3^{2\gamma}C$.
- $D \wedge 6 = 1$ et $n + 3 = 2^{2d+1}3^{2\delta+1}D$.

5. STRUCTURE DES SF-TABLEAUX

5.1. A propos des *sf*-tableaux partiels.

Fait 5.1. Dans la deuxième ligne d'un *sf*-tableau partiel d'ordre p , les positions des valeurs p sont congrues modulo p .

Démonstration. Penser aux multiples de p . □

Fait 5.2. $\forall(n, k, p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \times \mathbb{P}$, si $\pi_n^k \in {}^2\mathbb{N}$, alors dans le *sf*-tableau partiel d'ordre p associé à π_n^k , le nombre de valeurs p est forcément pair.

Démonstration. Évident, mais très pratique, comme nous le verrons dans la suite. □

5.2. A propos des *sf*-tableaux non partiels.

Fait 5.3. Dans les tableaux ci-dessous, où $k \geq 2$, les puces \bullet indiquent des valeurs quelconques.

(1) Si nous avons un *sf*-tableau du type suivant, alors $\pi_n^{k-1} \in {}^2_*\mathbb{N}$.

$n + \bullet$	0	1	...	$k-1$	k
	\bullet	\bullet	...	\bullet	1

(2) Si nous avons un *sf*-tableau du type suivant, alors $\pi_{n+1}^{k-1} \in {}^2_*\mathbb{N}$.

$n + \bullet$	0	1	...	$k-1$	k
	1	\bullet	...	\bullet	\bullet

Démonstration. Immédiat via le fait 3.2, car nous avons soit $n + k \in {}^2_*\mathbb{N}$, soit $n \in {}^2_*\mathbb{N}$. □

Fait 5.4. Soit le *sf*-tableau généralisé ci-après où $r \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $(n_i)_{1 \leq i \leq r} \in \mathbb{N}_{sc}^r$ et $d \in \mathbb{N}_{sf}$.

•	n_1	...	n_r
	d	...	d

Ce *sf*-tableau est impossible si l'une des deux conditions suivantes est validée.

$$(1) \frac{n_r - n_1}{d} \notin \mathbb{N}.$$

$$(2) \frac{n_r - n_1}{d} \in \{1, 2, 4, 6, 10, 14, 18\}.$$

Démonstration. $n_1 = dA^2$ et $n_r = dB^2$ nous donnent $d(B^2 - A^2) = n_r - n_1$. On conclut directement pour le premier cas, et via le fait 3.3 dans le second. \square

6. PREMIÈRES APPLICATIONS

6.1. Le cas de 2 facteurs.

Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$. Nous avons alors les *sf*-tableaux partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}$ divisant π_n^2 , car les valeurs p de la deuxième ligne doivent apparaître un nombre pair de fois tout en étant espacées par $(p-1)$ valeurs 1 (voir les faits 5.1 et 5.2).

$n + \bullet$	0	1
p	1	1

La multiplication de tous les *sf*-tableaux partiels précédents donne le *sf*-tableau, non partiel, ci-après, mais ceci contredit le fait 5.4.

$n + \bullet$	0	1
	1	1

6.2. Le cas de 3 facteurs.

Supposons que $\pi_n^3 = n(n+1)(n+2) \in {}^3_*\mathbb{N}$. Nous avons alors les *sf*-tableaux partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ divisant π_n^3 , d'après les faits 5.1 et 5.2.

$n + \bullet$	0	1	2
p	1	1	1

Pour $p = 2$, via les faits 5.1 et 5.2, seulement deux *sf*-tableaux partiels d'ordre 2 sont possibles. Nous utilisons un abus de notation évident pour indiquer ces deux possibilités.

$n + \bullet$	0	1	2
2	1	1	1
	2	1	2

La multiplication de tous les *sf*-tableaux partiels précédents donne juste les deux *sf*-tableaux, non partiels, suivants, mais ceci est impossible d'après le fait 5.4.

$n + \bullet$	0	1	2
	1	1	1
	2	1	2

6.3. Le cas de 4 facteurs.

Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3) \in {}^2_*\mathbb{N}$. Nous avons alors les **sf**-tableaux partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}_{\geq 4}$ divisant π_n^4 .

$n + \bullet$	0	1	2	3
p	1	1	1	1

Pour $p = 2$, nous avons les trois **sf**-tableaux partiels d'ordre 2 donnés ci-après.

$n + \bullet$	0	1	2	3
2	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2

Pour $p = 3$, nous obtenons les deux **sf**-tableaux partiels d'ordre 3 donnés ci-après.

$n + \bullet$	0	1	2	3
3	1	1	1	1
	3	1	1	3

La multiplication des **sf**-tableaux partiels précédents donne les **sf**-tableaux⁷, suivants.

$n + \bullet$	0	1	2	3
	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2

$n + \bullet$	0	1	2	3
	3	1	1	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Le fait 5.4 rejette quatre **sf**-tableaux : voir les cellules surlignées ci-dessous.

$n + \bullet$	0	1	2	3
	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2

$n + \bullet$	0	1	2	3
	3	1	1	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Ceci nous amène à étudier les deux **sf**-tableaux généralisés suivants.

\bullet	n	$n+1$	$n+2$	$n+3$
	6	1	2	3
	3	2	1	6

En posant $x = n + \frac{3}{2} = \frac{n+(n+3)}{2}$, nous obtenons les **sf**-tableaux généralisés suivants.

\bullet	$x - \frac{3}{2}$	$x - \frac{1}{2}$	$x + \frac{1}{2}$	$x + \frac{3}{2}$
	6	1	2	3
	3	2	1	6

En multipliant les colonnes 1 et 4, et aussi la 2 et la 3, nous arrivons, dans chaque cas, au même **sf**-tableau généralisé ci-dessous après avoir noté que $6 \times 3 = 2 \times 3^2$.

\bullet	$x^2 - \frac{9}{4}$	$x^2 - \frac{1}{4}$
	2	2

7. Tableaux non partiels forcément.

Comme $x^2 - \frac{1}{4} - (x^2 - \frac{9}{4}) = 2$, le fait 5.4 nous montre que le **sf**-tableau généralisé précédent est impossible. Joli! Non?

Noter que la fin du raisonnement n'a fait appel à aucune hypothèse sur π_n^4 . Ceci nous donne donc le fait suivant.

Fait 6.1. *Aucun **sf**-tableau ne peut contenir l'un des deux **sf**-tableaux suivants.*

$m + \bullet$	0	1	2	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

6.4. Le cas de 5 facteurs.

Supposons que $\pi_n^5 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2_*\mathbb{N}$. Nous avons alors les **sf**-tableaux partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ divisant π_n^5 .

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
p	1	1	1	1	1

Pour $p = 2$, nous avons les **sf**-tableaux partiels d'ordre 2 donnés ci-après.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
2	1	1	1	1	1
	2	1	2	1	1
	2	1	1	1	2
	1	2	1	2	1
	1	1	2	1	2

Pour $p = 3$, nous obtenons les **sf**-tableaux partiels d'ordre 3 donnés ci-après.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
3	1	1	1	1	1
	3	1	1	3	1
	1	3	1	1	3

La multiplication de tous les **sf**-tableaux partiels précédents donne les 15 cas suivants.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
	1	1	1	1	1
	2	1	2	1	1
	2	1	1	1	2
	1	2	1	2	1
	1	1	2	1	2

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
	3	1	1	3	1
	6	1	2	3	1
	6	1	1	3	2
	3	2	1	6	1
	3	1	2	3	2

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
	1	3	1	1	3
	2	3	2	1	3
	2	3	1	1	6
	1	6	1	2	3
	1	3	2	1	6

Comme $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2_*\mathbb{N}$ et $\pi_{n+1}^4 = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2_*\mathbb{N}$ d'après la section 6.3, les tableaux commençant, ou finissant, par une valeur 1 sont à ignorer d'après le fait 5.3. Cela laisse les **sf**-tableaux ci-après, mais ces derniers sont rejetés par le fait 5.4.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
2		1	1	1	2
6		1	1	3	2
3		1	2	3	2
2		3	2	1	3
2		3	1	1	6

7. ET APRÈS ?

7.1. La méthode via le cas de 6 facteurs.

La méthode présentée ci-dessus permet de faire appel à des programmes informatiques pour limiter les traitements à la main, et à la sueur des neurones, de **sf**-tableaux problématiques comme nous avons dû le faire dans la section 6.3. Expliquons cette tactique semi-automatique en traitant le cas de 6 facteurs⁸.

- (1) On raisonne par l'absurde en supposant que $\pi_n^6 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
- (2) Comme $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 6}$, p divise au maximum un seul des facteurs $(n+i)$ de π_n^6 , nous avons juste besoin de considérer l'ensemble $\mathcal{P} = \{2, 3, 5\}$ des diviseurs premiers stricts de 6.
- (3) Pour chaque élément p de \mathcal{P} , on construit la liste \mathcal{V}_p des **sf**-tableaux partiels relatifs à p et $\pi_n^6 \in {}^2_*\mathbb{N}$ en s'appuyant sur la section 5.1.
- (4) Via les listes $(\mathcal{V}_p)_{p \in \mathcal{P}}$, on calcule toutes les multiplications de tous les **sf**-tableaux partiels relatifs à des nombres p différents, et pour chacune d'elles, on ne la garde que si elle ne vérifie aucune des conditions suivantes, celles du dernier cas devant être indiquées à la main au programme qui va donc évoluer au gré des démonstrations faites par un humain (démonstrations que l'on espère le plus rare possible).
 - (a) Le tableau commence, ou se termine, par la valeur 1. Dans ce cas, on sait par récurrence que le tableau produit n'est pas possible (voir le fait 5.3).
 - (b) Le tableau est rejeté par le fait 5.4.
 - (c) Le tableau « produit » contient un sous-tableau que nous savons impossible suite à un raisonnement humain fait *localement*, c'est-à-dire que seul les facteurs indiqués dans le sous-tableau, et le sous-tableau lui-même sont utilisés pour raisonner. C'est le cas des **sf**-tableaux du fait 6.1.

Dans le dépôt en ligne associé à ce document sont placés des fichiers **Python**⁹ qui nous amènent à analyser les deux **sf**-tableaux problématiques suivants pour lesquels nous allons justifier que les valeurs 1 posent problème¹⁰.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4	5
30		1	2	3	1	5
5		1	3	2	1	30

Ces deux cas sont rapides à gérer puisque, d'après le fait 3.3, 1 et 4 sont les seuls carrés distants de 3, d'où $n+1=1$, mais ceci contredit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous savons donc que $\pi_n^6 \in {}^2_*\mathbb{N}$ sans effort. Notons au passage un nouveau cas problématique « local » pour nos futures recherches (le fait suivant généralise la technique que nous venons d'utiliser).

8. Dans mon document « *Carrés parfaits et produits d'entiers consécutifs – Des solutions à la main* », les curieuses et les curieux trouveront la preuve complète du cas $k=6$ faite sans outil informatique.

9. L'emploi de scripts codés rapidement est totalement fonctionnel ici.

10. Toutes les règles 4-a, 4-b et 4-c sont utilisées pour n'arriver qu'aux deux **sf**-tableaux à analyser à la main.

Fait 7.1. Soit le *sf*-tableau généralisé ci-après où $r \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $(n_i)_{1 \leq i \leq r} \in \mathbb{N}_{sc}^r$ et $d \in \mathbb{N}_{sf}$.

•	n_1	...	n_r
	d	...	d

Ce *sf*-tableau est impossible si $n_1 \geq d + 1$ et $\frac{n_r - n_1}{d} \in \{3, 8\}$.

Démonstration. Ceci vient des équivalences logiques suivantes en posant $n_1 = dA^2$ et $n_r = dB^2$ avec $(A, B) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\begin{aligned}
 & \frac{n_r - n_1}{d} \in \{3, 8\} \\
 \iff & B^2 - A^2 \in \{3, 8\} \\
 \iff & (A, B) \in \{(1, 2), (1, 3)\} \quad \left. \vphantom{\frac{n_r - n_1}{d} \in \{3, 8\}} \right\} \text{ Voir le fait 3.3.} \\
 \iff & (n_1, n_r) \in \{(d, 4d), (d, 9d)\}
 \end{aligned}$$

□

Remarque 7.1. On peut gérer les cas problématiques du cas 6 via des manipulations algébriques similaires à celles qui avaient donné le fait 6.1. En effet, $x = n + \frac{5}{2}$ nous donne ce qui suit avec un abus de notation évident.

$x + \bullet$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
	30	1	2	3	1	5
	5	1	3	2	1	30

La multiplication des colonnes 1 et 6, ainsi que celle des colonnes 3 et 4, nous amènent au même *sf*-tableau généralisé suivant après avoir noté que $5 \times 30 = 6 \times 5^2$.

•	$x^2 - \frac{25}{4}$	$x^2 - \frac{1}{4}$
	6	6

Comme $x^2 - \frac{1}{4} - (x^2 - \frac{25}{4}) = 6$, le fait 5.4 nous permet de conclure.

7.2. Au-delà de 6 facteurs ?

Voici ce que donnent, sans trop d'efforts, nos programmes `Pyhon` codés sans subtilité, mais ceci demande un peu de patience.¹¹ Rappelons que chaque nouveau cas problématique est indiqué au programme qui évolue donc au gré de l'intervention humaine.

Sans intervention humaine.

Pour $k \in \{7, 8\}$, nous avons $\pi_n^k \notin {}^2\mathbb{N}$ sans aucun effort cognitif.

De nouveaux cas problématiques

$\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$ demande de gérer les *sf*-tableaux suivants.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	14	1	6	5	2	3	1	7	10
	10	7	1	3	2	5	6	1	14

Extrayons du premier *sf*-tableau, le *sf*-tableau généralisé suivant.

•	$n + 1$	$n + 2$	$n + 4$	$n + 5$
	1	6	2	3

11. Nous commençons à entrer dans un monde à la combinatoire élevée.

En posant $m = n + 3$, nous obtenons le tableau ci-après.

•	$m - 2$	$m - 1$	$m + 1$	$m + 2$
	1	6	2	3

En multipliant les colonnes 1 et 4, et aussi la 2 et la 3, nous obtenons le **sf**-tableau généralisé ci-dessous après avoir noté que $6 \times 2 = 3 \times 2^2$.

•	$m^2 - 4$	$m^2 - 1$
	3	3

Comme $m^2 - 4 - (m^2 - 1) = 3$, le fait 5.4 nous montre que le premier **sf**-tableau, celui commençant par 14, est impossible. Le cas du deuxième se traite de façon analogue, d'où finalement $\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$. Notons au passage un nouveau fait.

Fait 7.2. *Aucun sf-tableau ne peut contenir l'un des deux sf-tableaux généralisés suivants.*

$m + \bullet$	0	1	3	4
	1	6	2	3
	3	2	6	1

Sans intervention humaine.

Pour $k \in \llbracket 10; 17 \rrbracket$, nous avons $\pi_n^k \notin {}^2\mathbb{N}$ sans aucun effort cognitif. Au-delà, un programme basique n'est plus utilisable car il y a trop de tableaux à construire comme nous allons le voir dans la section suivante.

8. NOMBRE DE SF-TABLEAUX

Voyons à quoi ressemblent les **sf**-tableaux partiels pour $k \in \llbracket 3; 7 \rrbracket$ et $p \in \mathbb{P}_{<k}$ (seulement, $k = 6$ et $k = 7$ sont des nouveautés). Noter l'emploi d'une méthode de construction automatisable.

$n + \bullet$	0	1
	1	1

$n + \bullet$	0	1	2
2	1	1	1
	2	1	2

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
2	1	1	1	1	1
ou	2	1	2	1	1
3	1	2	1	2	1
	3	1	1	3	1
	1	1	2	1	2
	1	3	1	1	3
	2	1	1	1	2

$n + \bullet$	0	1	2	3
2	1	1	1	1
ou	2	1	2	1
3	1	2	1	2
	3	1	1	3

$n + \bullet$	0	1	2	3	4	5
2	1	1	1	1	1	1
ou	2	1	2	1	1	1
3	1	2	1	2	1	1
ou	1	1	2	1	2	1
5	2	1	1	1	2	1
	3	1	1	3	1	1
	1	3	1	1	3	1
	1	1	1	2	1	2
	1	2	1	1	1	2
	1	1	3	1	1	3
	5	1	1	1	1	5

$n + \bullet$	0	1	2	3	4	5	6
2	1	1	1	1	1	1	1
ou	2	1	2	1	1	1	1
3	1	2	1	2	1	1	1
ou	1	1	2	1	2	1	1
5	1	1	1	2	1	2	1
	2	1	1	1	2	1	1
	1	2	1	1	1	2	1
	3	1	1	3	1	1	1
	1	3	1	1	3	1	1
	1	1	3	1	1	3	1
	5	1	1	1	1	5	1
	1	1	1	1	2	1	2
	1	1	2	1	1	1	2
	1	1	1	3	1	1	3
	1	5	1	1	1	1	5
	2	1	1	1	1	1	2
	2	1	2	1	2	1	2
	3	1	1	1	1	1	3

9. SOURCES UTILISÉES

Ce document n'aurait pas vu le jour sans la source suivante.

- (1) Une discussion archivée consultée le 28 janvier 2024 :

<https://web.archive.org/web/20171110144534/http://mathforum.org/library/drmath/view/65589.html>.

Cette discussion utilise ce que nous avons nommé les sf -tableaux, mais le côté semi-mécanisable de leur utilisation n'est pas souligné.

10. AFFAIRE À SUIVRE...
