CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS – DES SOLUTIONS À LA MAIN

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page *https://github.com/bc-writing/drafts.*

Table des matières

Date : 25 Jan. 2024 – 7 Fév. 2024.

1. Ce qui nous intéresse

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers » [1], Paul Erdos démontre que pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit de $(k+1)$ entiers consécutifs $n(n+1)\cdots(n+k)$ n'est jamais le carré d'un entier.

Dans ce document, nous proposons quelques cas particuliers résolus de façon « adaptative » à la sueur des neurones ; le but recherché est de fournir différentes approches même si parfois cela peut prendre plus de temps.

2. Notations utilisées

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k} (n+i)$.
  Par exemple, $\pi_n^0 = n$, $\pi_n^1 = n(n+1)$ et $\pi_{n+2}^3 = (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$.
- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des carrés parfaits. On note aussi ${}^2_*\mathbb{N} = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
  $\mathbb{N}_{sf}$ est l'ensemble des naturels non nuls sans facteur carré [2].
- $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
  $\forall (p\,; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p-adique de n , c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n , contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m.
- $2\,\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
  $2\,\mathbb{N} + 1$ est l'ensemble des nombres naturels impairs.
- $(a \pm b)$ est un raccourci pour $(a+b)(a-b)$.

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).
2. En anglais, on dit « square free » .

3. Les carrés parfaits

3.1. Structure.

Fait 3.1. *$\forall n \in {}^2_*\mathbb{N}$, s'il existe $m \in {}^2_*\mathbb{N}$ tel que $n = fm$ alors $f \in {}^2_*\mathbb{N}$.*

Démonstration. Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(fm) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ qui donnent $v_p(f) \in 2\mathbb{N}$ car $v_p(fm) = v_p(f) + v_p(m)$. ☐

Fait 3.2. *$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $a \wedge b = 1$ et $ab \in {}^2_*\mathbb{N}$, alors $a \in {}^2_*\mathbb{N}$ et $b \in {}^2_*\mathbb{N}$.*

Démonstration. Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(ab) \in 2\mathbb{N}$. Or $p \in \mathbb{P}$ ne peut diviser à la fois a et b , donc $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(a) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(b) \in 2\mathbb{N}$, autrement dit $(a,b) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$. ☐

Fait 3.3. *Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $ab \in {}^2_*\mathbb{N}$, ainsi que $(\alpha, \beta, A, B) \in (\mathbb{N}_{sf})^2 \times \mathbb{N}^2$ tel que $a = \alpha A^2$ et $b = \beta B^2$. Nous avons alors forcément $\alpha = \beta$.*

Démonstration. Le fait 3.1 donne $\alpha\beta \in {}^2_*\mathbb{N}$. De plus, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(\alpha) \in \{0,1\}$ et $v_p(\beta) \in \{0,1\}$. Finalement, $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\alpha) = v_p(\beta)$, autrement dit $\alpha = \beta$. ☐

3.2. Distance entre deux carrés parfaits.

Fait 3.4. *Soit $(N,M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $N > M$.*

(1) $N^2 - M^2 \geq 2N - 1$, d'où l'impossibilité d'avoir $N^2 - M^2 < 3$.

(2) $N^2 - M^2 = 3$ uniquement si $(N,M) = (2,1)$.

(3) Notons nb_{sol} le nombre de solutions $(N,M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de $N^2 - M^2 = \delta$.

Pour $\delta \in [\![1\,;20]\!]$, nous avons :

(a) $nb_{sol} = 0$ si $\delta \in \{1,2,4,6,10,14,18\}$.

(b) $nb_{sol} = 1$ si $\delta \in \{3,5,7,8,9,11,12,13,16\}$.

(c) $nb_{sol} = 2$ si $\delta = 15$.

Démonstration.

(1) Comme $N - 1 \geq M$, nous obtenons : $N^2 - M^2 \geq N^2 - (N-1)^2 = 2N - 1$.

(2) Notant $\delta = N^2 - M^2$, nous avons $2N - 1 \leq \delta$, soit $N \leq \dfrac{\delta + 1}{2}$. Ceci permet de limiter notre zone de recherche à $N \in [\![1\,;2]\!]$, ce qui permet de conclure.

(3) Il suffit de s'appuyer sur le programme `Python` donné dans la page suivante. ☐

Finissons par une jolie formule même si elle ne nous sera pas d'une grande aide dans la suite.

Fait 3.5. *$\forall (N,M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $N > M$, alors $N^2 - M^2 = \sum_{k=M+1}^{N} (2k-1)$.*

Démonstration. $N^2 = \sum_{k=1}^{N} (2k-1)$ donne l'identité indiquée[3]. ☐

3. La formule utilisée est facile à démontrer algébriquement, et évidente à découvrir géométriquement.

```python
from math import sqrt, floor

def sol(diff):
    solfound = []

    for i in range(1, (diff + 1) // 2 + 1):
        tested = i**2 - diff

        if tested < 0:
            continue

        tested = floor(sqrt(i**2 - diff))

        if tested == 0:
            continue

        if tested**2 == i**2 - diff:
            solfound.append((i, tested))

    return solfound
```

4. Avec 2 facteurs

Fait 4.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve 1. Il suffit de noter que $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$. □

Preuve 2. Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Comme $n \wedge (n+1) = 1$, le fait 3.2 donne $(n, n+1) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$, d'où l'existence de deux carrés parfaits non nuls distants de 1 . D'après le fait 3.4, ceci est impossible. □

Preuve 3. Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) = N^2$ où $N \in \mathbb{N}^*$.
Nous obtenons une contradiction comme suit.

$$
\begin{aligned}
& n(n+1) = N^2 \\
\iff\ & 2\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{N}(2k-1) && \textit{$n(n+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k$ et $N^2 = \sum_{k=1}^{N}(2k-1)$.} \\
\iff\ & \sum_{k=1}^{n} 2k = \sum_{k=1}^{N} 2k - N \\
\iff\ & \sum_{k=n+1}^{N} 2k - N = 0 && \textit{$N > n$ car $N^2 - n^2 = n > 0$.} \\
\iff\ & \sum_{k=n+1}^{N-1} 2k + N = 0 && \textit{$N > 0$ rend impossible la dernière égalité.}
\end{aligned}
$$

□

5. Avec 3 facteurs

Fait 5.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve 1. Supposons que $\pi_n^2 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Posant $m = n+1$, nous avons $\pi_n^2 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Comme $m \wedge (m^2-1) = 1$, le fait 3.2 donne $(m, m^2-1) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$. Or, $m^2 - 1 \in {}^2_*\mathbb{N}$ est impossible d'après le fait 3.4. □

Preuve 2. Supposons que $\pi_n^2 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Comme $p \in \mathbb{P}_{>2}$ ne peut diviser au maximum qu'un seul des trois facteurs n , $(n+1)$ et $(n+2)$, nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}_{>2}$, $\forall i \in [\![0\,;2]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$. Mais que se passe-t-il pour $p = 2$?

Supposons d'abord $n \in 2\mathbb{N}$.

- Posant $n = 2m$, nous avons $\pi_n^2 = 4m(2m+1)(m+1)$, d'où $m(2m+1)(m+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$.
- Comme $v_2(2m+1) = 0$, nous savons que $2m+1 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
- Donc $m(m+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$ via le fait 3.1, mais le fait 4.1 interdit cela.

Supposons maintenant $n \in 2\mathbb{N}+1$.

- Nous savons que $n \in {}^2_*\mathbb{N}$ via $v_2(n) = 0$.
- On conclut comme dans le cas précédent mais en passant via $(n+1)(n+2)$. □

6. Avec 4 facteurs

Fait 6.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve 1. Nous pouvons ici faire les manipulations algébriques naturelles suivantes qui cherchent à obtenir le même coefficient pour n dans chaque parenthèse.

$$\begin{aligned}
\pi_n^3 &= n(n+3) \cdot (n+1)(n+2) \\
&= (n^2+3n) \cdot (n^2+3n+2) \qquad m = n^2+3n \\
&= m(m+2) \\
&= m^2+2m \\
&= (m+1)^2-1
\end{aligned}$$

Comme $m > 0$, $(m+1)^2 - 1 \notin {}^2\mathbb{N}$ d'après le fait 3.4, donc $\pi_n^3 \notin {}^2\mathbb{N}$. □

Preuve 2. En « symétrisant » certaines expressions, nous obtenons d'autres manipulations algébriques qui permettent de conclure comme ci-dessus.

$$\begin{aligned}
\pi_n^3 &= n(n+1)(n+2)(n+3) \qquad x = n + \frac{3}{2} \\
&= \left(x \pm \frac{3}{2}\right)\left(x \pm \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(x^2 - \frac{9}{4}\right)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \qquad y = x^2 - \frac{5}{4} \text{ où } \frac{5}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}+\frac{1}{4}\right) . \\
&= (y \pm 1) \\
&= y^2 - 1 \\
&= \left(\left(n+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right)^2 - 1 \\
&= \left(n^2+3n+1\right)^2 - 1
\end{aligned}$$

□

Un échange sur `https://math.stackexchange.com` a inspiré la démonstration non algébrique suivante (voir la section 11).

Preuve 3. Supposons que $\pi_n^3 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Clairement, nous avons les faits suivants.

- $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $\forall i \in [\![0\,;3]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$.
- $\exists u \in \{n, n+1\}$ tel que $\{u, u+2\} \subset 2\mathbb{N}+1$.
  Nous avons alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $(v_p(u), v_p(u+2)) \in (2\mathbb{N})^2$, donc, pour tout naturel $m \in \{u, u+2\}$, il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = M^2$ ou $m = 3M^2$.
- Forcément, il existe $(A,B) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\{u, u+2\} = \{A^2, 3B^2\}$. Voici pourquoi.
  - $\{u, u+2\} = \{A^2, B^2\}$ donne deux carrés distants de 2 , ceci contredit le fait 3.4.
  - $\{u, u+2\} = \{3A^2, 3B^2\}$ donne $3A^2 - 3B^2 = \pm 2$, ce qui est impossible.

Nous savons donc que l'un des facteurs $(n+i)$ de π_n^3 possède une valuation 3-adique impaire. Ceci n'est possible que si n et $(n+3)$ ont une valuation 3-adique impaire. Dès lors, comme ci-dessus, nous avons $(Q,R) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\{n+1, n+2\} = \{Q^2, 2R^2\}$. Ceci nous amène aux deux situations contradictoires suivantes où $(A,B,C,D) \in (\mathbb{N}^*)^4$.

- Cas 1 : $(n, n+1, n+2, n+3) = (6A^2, B^2, 2C^2, 3D^2)$.
  - Posons $x = n + \frac{3}{2}$ de sorte que $x - \frac{3}{2} = 6A^2$, $x - \frac{1}{2} = B^2$, $x + \frac{1}{2} = 2C^2$ et $x + \frac{3}{2} = 3D^2$.

  - Nous avons alors $\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = 2E^2$, c'est-à-dire $x^2 - \frac{9}{4} = 2E^2$, avec $E \in \mathbb{N}^*$.
  - De même, $x^2 - \frac{1}{4} = 2F^2$ avec $F \in \mathbb{N}^*$.
  - Par simple soustraction, nous obtenons $2F^2 - 2E^2 = 2$, puis $F^2 - E^2 = 1$, mais ceci contredit le fait 3.4.

- Cas 2 : $(n, n+1, n+2, n+3) = (3A^2, 2B^2, C^2, 6D^2)$.

  Un raisonnement similaire au précédent montre que ce cas aussi est impossible.

$\square$

7. Avec 5 facteurs

Fait 7.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve 1. Supposons que $\pi_n^4 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $\forall i \in [\![0\,;4]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$. Pour $p=2$ et $p=3$, nous avons les alternatives suivantes pour chaque facteur $(n+i)$ de π_n^4.

- **[A 1]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A 2]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$
- **[A 3]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times 2\mathbb{N}$
- **[A 4]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$

Comme nous avons cinq facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions très facilement.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 1]**.

  Dans ce cas, on sait juste que $(n+i, n+i') \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Or $n \notin {}^2\mathbb{N}$ puisque sinon $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$ donne $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$ via le fait 3.1, mais ceci contredit le fait 6.1. De même, $n+4 \notin {}^2\mathbb{N}$. Dès lors, nous avons $\{n+i, n+i'\} \subseteq \{n+1, n+2, n+3\}$, d'où l'existence de deux carrés parfaits non nuls éloignés de moins de 3, et ceci contredit le fait 3.4.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 2]**.

  Dans ce cas, le couple de facteurs est $(n, n+3)$, ou $(n+1, n+4)$.

  (1) Supposons d'abord que n et $(n+3)$ vérifient **[A 2]**.
  Comme $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+3) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(n) \in 2\mathbb{N}+1$ et $v_3(n+3) \in 2\mathbb{N}+1$, nous avons $n = 3N^2$ et $n+3 = 3M^2$ où $(N,M) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
  Or, ceci donne $3 = 3M^2 - 3N^2$, puis $M^2 - N^2 = 1$ qui contredit le fait 3.4.

  (2) De façon analogue, on ne peut pas avoir $(n+1)$ et $(n+4)$ vérifiant **[A 2]**.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 3]**.

  Comme dans le point précédent, c'est impossible car on aurait $2 = 2M^2 - 2N^2$, ou $4 = 2M^2 - 2N^2$ qui contredirait le fait 3.4.

  En effet, ici les couples possibles sont $(n, n+2)$, $(n, n+4)$, $(n+2, n+4)$ et $(n+1, n+3)$ [4].

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 4]**.

  Ceci donne deux facteurs différents divisibles par 6, mais c'est impossible. □

Voici une approche similaire à la dernière preuve du cas 6.1.

Preuve 2. Supposons que $\pi_n^4 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $\forall i \in [\![0\,;3]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$, ceci nous amène à considérer deux alternatives.

Supposons d'abord $\{n, n+2, n+4\} \subset 2\mathbb{N}+1$.

- Nous avons alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $(v_p(n), v_p(n+2), v_p(n+4)) \in (2\mathbb{N})^3$, donc, pour tout naturel $m \in \{n, n+2, n+4\}$, il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = M^2$ ou $m = 3M^2$.

4. A priori, rien n'empêche d'avoir n, $(n+2)$ et $(n+4)$ vérifiant tous les trois **[A 3]**.

- Comme 3 divise au maximum un seul des trois éléments de $\{n, n+2, n+4\}$, le fait 3.4 lève une contradiction (deux carrés parfaits ne sont jamais distants de 2 ou 4).

Supposons maintenant $\{n+1, n+3\} \subset 2\mathbb{N}+1$.

- Comme ci-dessus, soit $(n+1, n+3) = (A^2, 3B^2)$, soit $(n+1, n+3) = (3A^2, B^2)$, avec $(A, B) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
- Supposons $(n+1, n+3) = (A^2, 3B^2)$. Ce qui suit lève alors une contradiction.
  - Forcément, $n = 3C^2$ ou $n = 6C^2$ avec $C \in \mathbb{N}^*$. Le fait 3.4 impose d'avoir $n = 6C^2$.
  - Donc $\{n+2, n+4\} \subset 2\mathbb{N} - 3\mathbb{N}$, puis, via le fait 3.4, $\{n+2, n+4\} = \{D^2, 2E^2\}$ avec $(D, E) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
  - $(n+1)$ et $(n+2)$ étant trop proches pour être tous les deux des carrés parfaits, nous arrivons à $(n+2, n+4) = (2D^2, E^2)$.
  - Or $n+4 \in {}^2_*\mathbb{N}$ et $\pi_n^4 \in {}^2_*\mathbb{N}$ donnent $\pi_n^3 \in {}^2_*\mathbb{N}$ d'après le fait 3.1, mais ceci contredit le fait 6.1.
- Forcément, $(n+1, n+3) = (3A^2, B^2)$, mais ce qui suit lève une nouvelle contradiction via une démarche similaire à la précédente.
  - Forcément, $n+4 = 6C^2$ avec $C \in \mathbb{N}^*$.
  - Ensuite, $(n, n+2) = (D^2, 2E^2)$ avec $(D, E) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
  - $n \in {}^2_*\mathbb{N}$ et $\pi_n^4 \in {}^2_*\mathbb{N}$ donnent $\pi_n^3 \in {}^2_*\mathbb{N}$, ce qui est faux.

$\square$

Bien que longue, la preuve suivante se comprend bien, car nous ne faisons qu'avancer à vue, mais avec rigueur.

Preuve 3. Supposons que $\pi_n^4 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Posant $m = n+2$, nous avons $\pi_n^4 = m(m \pm 2)(m \pm 1) = m(m^2-1)(m^2-4)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Pour la suite, on pose $u = m^2 - 1$ et $q = m^2 - 4$.

Supposons d'abord que $m \in {}^2_*\mathbb{N}$.

- De $muq \in {}^2_*\mathbb{N}$, nous déduisons que $uq \in {}^2_*\mathbb{N}$ via le fait 3.1.
- Comme $u - q = 3$, nous savons que $u \wedge q \in \{1, 3\}$.
- Si $u \wedge q = 1$, alors $(u, q) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$ d'après le fait 3.2. Ensuite, le fait 3.4 impose d'avoir $(u, q) = (4, 1)$, d'où $m^2 - 1 = 4$, mais ceci est impossible [5].
- Si $u \wedge q = 3$, alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(u) \in 2\mathbb{N}+1$ et $v_3(q) \in 2\mathbb{N}+1$. Donc $u = 3U^2$ et $q = 3Q^2$ avec $(U, Q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Or $u - q = 3$ donne $U^2 - Q^2 = 1$, et le fait 3.4 nous indique une contradiction.

Supposons maintenant que $m \notin {}^2_*\mathbb{N}$.

- Montrons que $u \notin {}^2\mathbb{N}$ et $q \notin {}^2\mathbb{N}$.
  (1) $u \in {}^2\mathbb{N}$ donne $m^2 - 1 \in {}^2\mathbb{N}$, puis $m = 1$ via le fait 3.4, mais ceci est impossible puisque $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.
  (2) $q \in {}^2\mathbb{N}$ donne $m^2 - 4 \in {}^2\mathbb{N}$, puis la contradiction $m = 2$ via le fait 3.4.
- Donc $m = \alpha M^2$, $u = \beta U^2$, $q = \gamma Q^2$ où $(M, U, Q) \in (\mathbb{N}^*)^3$ et $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathbb{N}_{sf} \cap \mathbb{N}_{>1}$.

5. On peut aussi noter que le fait 5.1 lève une contradiction car nous avons $m \in {}^2\mathbb{N}$ et $u \in {}^2\mathbb{N}$ qui donnent $(m-1)m(m+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$.

- Notons que $\beta \neq \gamma$, car, dans le cas contraire, $3 = u - q = \beta\big(U^2 - Q^2\big)$ fournirait $\beta = 3$ puis $U^2 - Q^2 = 1$, et ceci contredirait le fait 3.4.
- Nous avons $m \wedge u = 1$, $m \wedge q \in \{1, 2, 4\}$ et $u \wedge q \in \{1, 3\}$ avec $m \wedge u = m \wedge q = u \wedge q = 1$ impossible car sinon on aurait $(m, u, q) \in ({}^2\mathbb{N})^3$ via $muq \in {}^2\mathbb{N}$ et le fait 3.2.
- Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $\big(v_p(m), v_p(u), v_p(q)\big) \in (2\mathbb{N})^3$.
- Les points précédents donnent $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$ avec de plus $\beta \neq \gamma$, ainsi que $\alpha \wedge \beta = 1$, $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2\}$ et $\beta \wedge \gamma \in \{1, 3\}$. Notons au passage que $\alpha \wedge \beta = 1$ implique $(\alpha, \beta) = (2, 3)$, ou $(\alpha, \beta) = (3, 2)$. Via le tableau « mécanique » ci-après, nous obtenons que forcément $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$ ou $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$. Le plus dur est fait !

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	*Statut*
2	3	2	1	2	1	✓
2	3	6	1	2	3	✓
3	2	3	1	3	1	☒
3	2	6	1	3	2	☒

- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$ nous donne $m = 2M^2$, $u = 3U^2$ et $q = 2Q^2$, d'où la contradiction $3 \cdot 4M^2U^2Q^2 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$ nous donne $m = 2M^2$, $m^2 - 1 = 3U^2$ et $m^2 - 4 = 6Q^2$, mais ce qui suit lève une autre contradiction.
  - Travaillons modulo 3 . Nous avons $m \equiv 2M^2 \equiv 0$ ou -1 . Or $m^2 - 1 = 3U^2$ donne $m^2 \equiv 1$, d'où $m \equiv -1$, puis $3 \mid m - 2$, et enfin $6 \mid m - 2$ puisque m est pair.
  - Posant $m - 2 = 6r$ et notant $s = m + 2$, nous avons $6rs = 6Q^2$, puis $rs = Q^2$.
  - $s \notin {}^2\mathbb{N}$. Sinon $(m-2)(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$ via $(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) \in {}^2\mathbb{N}$ et le fait 3.1, mais ceci ne se peut pas d'après le fait 6.1.
  - Les deux résultats précédents et le fait 3.3 donnent $(\pi, R, S) \in \mathbb{N}_{sf} \times (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $r = \pi R^2$ et $s = \pi S^2$ avec $\pi \in \mathbb{N}_{>1}$.
  - Dès lors, $4 = s - 6r = \pi(S^2 - 6R^2)$ donne $\pi = 2$, d'où $m + 2 = 2S^2$.
  - Finalement, $m = 2M^2$ et $m+2 = 2S^2$ donnent $2 = 2(S^2 - M^2)$, soit $1 = S^2 - M^2$, ce qui contredit le fait 3.4. $\square$

8. Avec 6 facteurs

Fait 8.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^5 \notin {}^2\mathbb{N}$.

La démonstration suivante se trouve dans l'article « Solution of a Problem »[6] de G. W. Hill et J. E. Oliver. Une petite simplification a été faite pour arriver à $\pi_n^5 = (a-4)a(a+2)$.

Preuve 1. Supposons que $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}$.

Commençons par de petites manipulations algébriques où la première modification fait apparaître le même coefficient pour n dans chaque parenthèse.

$$\begin{aligned}\pi_n^5 &= n(n+5)\cdot(n+1)(n+4)\cdot(n+2)(n+3)\\ &= (n^2+5n)(n^2+5n+4)(n^2+5n+6) && \big\rangle\ x = n^2+5n \in \mathbb{N}_{\geq 6}\\ &= x(x+4)(x+6) && \big\rangle\ a = x+4 \in \mathbb{N}_{\geq 10}\\ &= (a-4)a(a+2)\end{aligned}$$

Nous avons $a \in \mathbb{N}_{\geq 10}$ vérifiant $a(a+2)(a-4) \in {}^2_*\mathbb{N}$. Posons $a = \alpha A^2$ où $(\alpha, A) \in \mathbb{N}_{sf} \times \mathbb{N}^*$, de sorte que $\alpha(\alpha A^2+2)(\alpha A^2-4) \in {}^2_*\mathbb{N}$ via le fait 3.1. De plus, $\alpha \in \mathbb{N}_{sf}$, donc $\alpha \mid (\alpha A^2+2)(\alpha A^2-4)$, d'où $\alpha \mid 8$, et ainsi $\alpha \in \{1, 2\}$[7]. Nous allons voir que ceci est impossible.

Supposons que $\alpha = 1$.

- Notons les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} & (A^2+2)(A^2-4) \in {}^2_*\mathbb{N} && \big\rangle\ u = A^2-1 \ \textit{où}\ -1 = \frac{2-4}{2}\,.\\ \iff & (u+3)(u-3) \in {}^2_*\mathbb{N}\\ \iff & u^2-9 \in {}^2_*\mathbb{N}\end{aligned}$$

- Ensuite, prenant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = u^2-9$, le fait 3.4 donne $(u, m) = (5, 4)$ d'où la contradiction suivante.

$$\begin{aligned} u = 5 \iff & A^2-1 = 5 && \big\rangle\ 6 \notin {}^2\mathbb{N}\,.\\ \iff & A^2 = 6\end{aligned}$$

Supposons que $\alpha = 2$.

- Notons l'équivalence suivante.

$$\begin{aligned} & 2(2A^2+2)(2A^2-4) \in {}^2_*\mathbb{N} && \big\rangle\ \textit{Via}\ 4\cdot 2(A^2+1)(A^2-2)\,.\\ \iff & 2(A^2+1)(A^2-2) \in {}^2_*\mathbb{N}\end{aligned}$$

- Ensuite, en travaillant modulo 3 , nous avons $2(A^2+1)(A^2-2) \equiv -4 \equiv -1$ qui ne correspond pas à un carré modulo 3 . □

Preuve 2. Se reporter à la preuve du cas 9.1 qui s'adapte mot pour mot au cas présent mais en considérant $u \in \{n, n+1\}$ tel que $\{u, u+2, u+4\} \subset 2\mathbb{N}+1$. □

Bien que très longue[8], la preuve suivante est simple à comprendre car elle ne fait que dérouler le fil des faits découverts.

---

6. The Analyst (1874).
7. On comprend ici le choix d'avoir $\pi_n^5 = (a-4)a(a+2)$.
8. Ce sera notre dernière tentative de démonstration à faible empreinte cognitive.

Preuve 3. Supposons que $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
& \pi_n^5 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) && x = n + 2 + \frac{1}{2} \textit{ (on symétrise la formule).} \\
\iff & \pi_n^5 = \Big(x \pm \frac{5}{2}\Big)\Big(x \pm \frac{3}{2}\Big)\Big(x \pm \frac{1}{2}\Big) && y = 2x \textit{ (on chasse les fractions).} \\
\iff & 2^6\pi_n^5 = (y \pm 5)(y \pm 3)(y \pm 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 2^6\pi_n^5 = (y \pm 5)(y \pm 3)(y \pm 1) && z = y^2 \\
\iff & 2^6\pi_n^5 = (z - 25)(z - 9)(z - 1) && u = z - 17 \textit{ où } 17 = \frac{25+9}{2}\,. \\
\iff & 2^6\pi_n^5 = (u - 8)(u + 8)(u + 16)
\end{aligned}
$$

Notant $a = u - 8$, $b = u + 8$ et $c = u + 16$, où $u = (2n+5)^2 - 17 \in 2\mathbb{N}$, nous avons les faits suivants.

- $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$ car $(2+5)^2 - 17 = 32$.
- $(a, b, c) \in \big(\mathbb{N}_{\geq 24}\big)^3$ avec $abc \in {}^2_*\mathbb{N}$ puisque $2^6\pi_n^5 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
- $a \wedge b \mid 16$ via $b - a = 16$.
- $a \wedge c \mid 24$ via $c - a = 24$.
- $b \wedge c \mid 8$ via $c - b = 8$.
- En particulier, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) \in (2\mathbb{N})^3$.

Démontrons qu'aucun des trois entiers a , b et c ne peut être un carré parfait.

- Commençons par supposer que $(a, b, c) \in {}^2_*\mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

  Dans ce cas, $bc \in {}^2_*\mathbb{N}$ via le fait 3.1, soit $(u+8)(u+16) \in {}^2_*\mathbb{N}$. En posant $w = u + 12$, on arrive à $(w-4)(w+4) \in {}^2_*\mathbb{N}$, soit $w^2 - 16 \in {}^2_*\mathbb{N}$, d'où $(w, m) = (5, 3)$ grâce au fait 3.4. Or $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$ donne $w \in \mathbb{N}_{\geq 20}$, d'où une contradiction.

- Supposons maintenant que $(a, b, c) \in \mathbb{N}^* \times {}^2_*\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

  Dans ce cas, $ac \in {}^2_*\mathbb{N}$, soit $(u-8)(u+16) \in {}^2_*\mathbb{N}$. En posant $w = u + 4$, on arrive à $(w - 12)(w + 12) \in {}^2_*\mathbb{N}$, soit $w^2 - 144 \in {}^2_*\mathbb{N}$. Notant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = w^2 - 144$, nous arrivons à $w^2 - m^2 = 144$, d'où $(w, m) \in \{(13,5), (15,9), (20,16), (37,35)\}$ [9]. Comme $u \in 2\mathbb{N}$ donne $w \in 2\mathbb{N}$, nécessairement $(w, m) = (20, 16)$, mais les équivalences suivantes lèvent une contradiction.

  $$
  \begin{aligned}
  u + 4 = 20 \iff\ & u = 16 \\
  \iff\ & (2n+5)^2 - 17 = 16 && 33 \notin {}^2\mathbb{N} \\
  \iff\ & (2n+5)^2 = 33
  \end{aligned}
  $$

- Supposons enfin que $(a, b, c) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times {}^2_*\mathbb{N}$.

  Dans ce cas, $ab \in {}^2_*\mathbb{N}$, soit $(u-8)(u+8) \in {}^2_*\mathbb{N}$, c'est-à-dire $u^2 - 64 \in {}^2_*\mathbb{N}$. Notant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = u^2 - 64$, nous arrivons à $u^2 - m^2 = 64$. Ceci n'est possible que si $(u, m) \in \{(10, 6), (17, 15)\}$. Or $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$ donne une contradiction.

Donc $a = \alpha A^2$, $b = \beta B^2$ et $c = \gamma C^2$ avec $(A, B, C) \in (\mathbb{N}^*)^3$ et $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathbb{N}_{sf} \cap \mathbb{N}_{>1}$, ceci nous donnant les faits suivants.

- $\alpha \wedge \beta \in \{1, 2\}$ d'après $a \wedge b \mid 16$.
- $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2, 3\}$ d'après $a \wedge c \mid 24$.

9. Le programme reproduit après la preuve du fait 3.4 donne rapidement cet ensemble de couples.

- $\beta \wedge \gamma \in \{1,2\}$ d'après $b \wedge c \mid 8$.
- $\{\alpha,\beta,\gamma\} \subseteq \{2,3,6\}$ car $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) \in (2\mathbb{N})^3$.

En fait, α , β et γ sont différents deux à deux.

- Démontrons que $\alpha \neq \beta$.
  Dans le cas contraire, $16 = b - a = \alpha(B^2 - A^2)$ et $\alpha > 1$ donnent $B^2 - A^2 \in \{1,2,4,8\}$, puis forcément $B^2 - A^2 = 8$ avec $(B,A) = (3,1)$ d'après le fait 3.4. Comme de plus, $\alpha = 2$, nous obtenons $a = 2$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.
- Nous avons aussi $\beta \neq \gamma$.
  Dans le cas contraire, $8 = c - b = \beta(C^2 - B^2)$ et $\beta > 1$ donnent $C^2 - B^2 \in \{1,2,4\}$, mais c'est impossible d'après le fait 3.4.
- Enfin, $\alpha \neq \gamma$.
  Dans le cas contraire, $C^2 - A^2 \in \{1,2,3,4,6,8,12\}$ car $24 = c - a = \alpha(C^2 - A^2)$ et $\alpha > 1$. Le fait 3.4 ne laisse plus que les possibilités suivantes.
  (1) $C^2 - A^2 = 3$ n'est possible que si $(C,A) = (2,1)$. Comme de plus $\alpha = 8$, nous avons $a = 8$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.
  (2) $C^2 - A^2 = 8$ n'est possible que si $(C,A) = (3,1)$. Comme de plus $\alpha = 3$, nous avons $a = 3$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.
  (3) $C^2 - A^2 = 12$ n'est possible que si $(C,A) = (4,2)$. Comme de plus $\alpha = 2$, nous avons $a = 8$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.

Comme $\{\alpha,\beta,\gamma\} \subseteq \{2,3,6\}$, $\alpha \wedge \beta \in \{1,2\}$, $\alpha \wedge \gamma \in \{1,2,3\}$ et $\beta \wedge \gamma \in \{1,2\}$, et comme de plus α , β et γ sont différents deux à deux, il ne nous reste plus qu'à analyser les cas suivants. La lumière est proche...

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	*Statut*
2	3	6	1	2	3	☒
2	6	3	2	1	3	☒
3	2	6	1	3	2	✓
3	6	2	3	1	2	☒
6	2	3	2	3	1	✓
6	3	2	3	2	1	☒

Traitons les deux cas restants en nous souvenant que $a = u - 8$, $b = u + 8$ et $c = u + 16$.

- Supposons $(\alpha,\beta,\gamma) = (3,2,6)$, autrement dit $a = 3A^2$, $b = 2B^2$ et $c = 6C^2$.
  Travaillons modulo 3 afin de lever une contradiction.
  (1) $a \equiv u - 2$ et $a \equiv 3A^2 \equiv 0$ donnent $u \equiv 2$.
  (2) D'autre part, $b \equiv 2B^2 \equiv 0$ ou 2 . Or $b \equiv u + 2 \equiv 1$ lève une contradiction.
- Supposons $(\alpha,\beta,\gamma) = (6,2,3)$, autrement dit $a = 6A^2$, $b = 2B^2$ et $c = 3C^2$.
  La preuve précédente s'adapte directement car $a \equiv 6A^2 \equiv 0$ et $b \equiv 2B^2$ modulo 3 .

□

9. Avec 7 facteurs

Fait 9.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^6 \notin {}^2\mathbb{N}$.

La très jolie démonstration suivante vient d'un échange sur `https://math.stackexchange.com` (voir la section 11). Nous avons juste comblé quelques rares oublis, et apporté de petites simplifications.

Preuve. Supposons que $\pi_n^6 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Commençons par quelques observations immédiates.

- $\forall p \in \mathbb{P}_{>5}$, $\forall i \in [\![0\,;6]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$.
- $\exists u \in \{n, n+1, n+2\}$ tel que $\{u, u+2, u+4\} \subset 2\mathbb{N}+1$.
  Nous avons alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3, 5\}$, $(v_p(u), v_p(u+2), v_p(u+4)) \in (2\mathbb{N})^3$. Cette astuce permet de passer de la gestion des trois nombres premiers 2 , 3 et 5 à celle de 3 et 5 . Donc, pour tout naturel $m \in \{u, u+2, u+4\}$, il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = M^2$, $m = 3M^2$, $m = 5M^2$ ou $m = 15M^2$.
- Parmi les trois naturels u , $u+2$ et $u+4$, ...
  - il en existe un, et un seul, divisible par 3 , comme on le constate vite en raisonnant modulo 3 ,
  - au plus un est divisible par 5 ,
  - au plus un est un carrée parfait d'après le fait 3.4.

Donc, il existe $(M, P, Q) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $\{u, u+2, u+4\} = \{M^2, 3P^2, 5Q^2\}$. Ceci permet de considérer les trois cas suivants qui lèvent tous une contradiction.

- Supposons avoir $u = M^2$.
  (1) Comme $\{u+2, u+4\} = \{3P^2, 5Q^2\}$, nous savons que $3 \nmid (u+3)$ et $5 \nmid (u+3)$, d'où $u+3 = 2^a T^2$ avec $(a, T) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.
  (2) Modulo 4 , $u \equiv M^2 \equiv 1$ car $u \in 2\mathbb{N}+1$, donc $u+3 \equiv 0$, d'où $a \geq 2$.
  (3) Modulo 8 , $u \equiv M^2 \equiv 1$ car $u \in 2\mathbb{N}+1$, donc $u+3 \equiv 4$, d'où $a = 2$.
  (4) Dès lors, $u+3 \in {}^2\mathbb{N}$, puis $(u, u+3) = (1, 4)$ via le fait 3.4.
  (5) Forcément $n = u = 1$, mais $v_7(\pi_1^6) = 1$ contredit $\pi_n^6 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
- Supposons maintenant que $u+4 = M^2$.
  Comme $\{u, u+2\} = \{3P^2, 5Q^2\}$, la preuve précédente s'adapte à $(u+1, u+4)$ pour obtenir la contradiction $n = 0$.
- Supposons enfin que $u+2 = M^2$.
  Démontrons qu'en fait $\{u, u+4\} = \{3P^2, 5Q^2\}$ est impossible en travaillant modulo 4 .
  (1) Si $(u, u+4) = (3P^2, 5Q^2)$, alors $u \equiv 0$ ou 3 et $u+2 \equiv 1$ se contredisent.
  (2) Si $(u, u+4) = (5Q^2, 3P^2)$, on obtient une contradiction comme ci-dessus.

□

10. Avec 8 facteurs

Fait 10.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$.

La démonstration très astucieuse suivante est proposée dans un échange sur `https://math.stackexchange.com` (voir la section 11). Comme pour le cas de quatre facteurs, l'algèbre va nous permettre d'aller très vite.

Preuve.

- L'une des preuves du fait 6.1 nous donne $n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n+1)^2 - 1$.
  En particulier, $(n+4)(n+5)(n+6)(n+7) = (n^2+11n+29)^2 - 1$.
- L'idée astucieuse va être de considérer les deux expressions suivantes qui viennent de $\pi_n^7 = \big(f(n)^2-1\big)\big(g(n)^2-1\big)$.
  (1) $f(n) = n^2+3n+1$.
  (2) $g(n) = n^2+11n+29$.
- Nous avons les manipulations algébriques naturelles suivantes.

$$\begin{aligned}
\pi_n^7 &= \big(f(n)^2-1\big)\big(g(n)^2-1\big) && a = f(n) \text{ et } b = g(n)\,. \\
&= (a^2-1)(b^2-1) \\
&= a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 && \textit{Choisir } (a-b)^2 \textit{ au lieu de } (a+b)^2 \textit{ va nous permettre,} \\
&= a^2b^2 - (a-b)^2 - 2ab + 1 && \textit{un plus bas, de ne pas trop nous éloigner de } \pi_n^7\,. \\
&= a^2b^2 - 2ab + 1 - (a-b)^2 \\
&= (ab-1)^2 - (a-b)^2 && b - a = 8n+28 > 0\,. \\
&< (ab-1)^2
\end{aligned}$$

  Donc $\pi_n^7 < \big(f(n)g(n)-1\big)^2$.
- Le point précédent rend naturel de tenter de démontrer que $\big(f(n)g(n)-2\big)^2 < \pi_n^7$, car, si tel est le cas, π_n^7 sera encadré par les carrés de deux entiers consécutifs, et forcément nous aurons $\pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$. Ce qui suit montre que notre pari est gagnant dès que $n \geq 4$. Que c'est joli !

$$\begin{aligned}
& \big(f(n)g(n)-2\big)^2 < \pi_n^7 && a = f(n) \text{ et } b = g(n)\,. \\
\iff\ & (ab-2)^2 < (a^2-1)(b^2-1) \\
\iff\ & a^2b^2 - 4ab + 4 < a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 \\
\iff\ & a^2 + b^2 - 4ab + 3 < 0
\end{aligned}$$

  Le site `https://www.wolframalpha.com` nous donne sans effort cognitif[10] ce qui suit (les « transhumanophobes » se reporteront à la remarque 10.1 qui suit).

$$\begin{aligned}
& a^2 + b^2 - 4ab + 3 \\
=\ & -2(n^2+7n)^2 + 36(n^2+7n) + 729 && m = n^2 + 7n \\
=\ & -2m^2 + 36m + 729 \\
=\ & -2(m-9)^2 + 891
\end{aligned}$$

  Or, $n^2+7n-9 = 0$ admet pour pour unique racine positive $n = \frac{-7+\sqrt{85}}{2} \approx 1{,}1$, donc $a^2+b^2-4ab+3$ décroît en fonction de n à partir de $n = 2$. Les calculs suivants donnent alors que $a^2+b^2-4ab+3 < 0$ pour $n \geq 4$.

10. Il faut vivre avec son temps...

n	1	2	3	4
$-2(n^2+7n)^2+36(n^2+7n)+729$	889	729	9	-1559

- Nous venons de voir que $(ab-2)^2 < \pi_n^7 < (ab-1)^2$ sur $\mathbb{N}_{\geq 4}$, donc $\pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$ dès que $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$, mais pour $n \in \{1,2,3\}$, $v_7(\pi_n^7) = 1$ donne $\pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$, ce qui permet de conclure.

$\square$

Remarque 10.1. *Voici comment obtenir une preuve* 100 % *non silliconé. Pour cela, commençons par les manipulations algébriques naturelles suivantes qui cherchent à obtenir le même coefficient pour* n *dans chaque parenthèse, tout en passant d'un polynôme de degré* 8 *à un polynôme de degré* 4 *.*

$$\begin{aligned}
\pi_n^7 &= n(n+7)\cdot(n+1)(n+6)\cdot(n+2)(n+5)\cdot(n+3)(n+4) \\
&= (n^2+7n)\cdot(n^2+7n+6)\cdot(n^2+7n+10)\cdot(n^2+7n+12) \\
&= m(m+6)(m+10)(m+12)
\end{aligned}$$

$m = n^2 + 7n$

Nous décidons d'offrir un 1[er] *rôle à la variable* $m = n^2+7n$ *. Voyons où cela nous mène...*

$$\begin{aligned}
&\ a^2+b^2-4ab+3 \\
=&\ a(a-4b)+b^2+3 \\
=&\ (m-4n+1)(-3m-20n-115)+(m+4n+29)^2+3 \\
=&\ -3m^2-(8n+118)m+(4n-1)(20n+115)+m^2+2(4n+29)m+(4n+29)^2+3 \\
=&\ -2m^2-60m+729+672n+96n^2 \\
=&\ -2m^2-60m+729+96(n^2+7n) \\
=&\ -2m^2-60m+729+96m \\
=&\ -2m^2+36m+729
\end{aligned}$$

$a = n^2+3n+1 = m-4n+1$
$b = n^2+11n+29 = m+4n+29$

Là, cela devient magique !

11. Sources utilisées

Fait 6.1.

La démonstration non algébrique a été impulsée par la source du fait 9.1 donnée plus bas.

Fait 7.1.

- Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré *« n(n+1)...(n+k) est un carré ? »* sur le site `lesmathematiques.net`.

  La démonstration via le principe des tiroirs trouve sa source dans cet échange.
- L'article *« Le produit de 5 entiers consécutifs n'est pas le carré d'un entier. »* de T. Hayashi, Nouvelles Annales de Mathématiques, est consultable via Numdam, la bibliothèque numérique française de mathématiques.

  Cet article a fortement inspiré la longue preuve.

Fait 8.1.

Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré *« product of six consecutive integers being a perfect numbers »* sur le site `https://math.stackexchange.com`.

La courte démonstration est donnée dans cet échange. Vous y trouverez aussi un très joli argument basé sur les courbes elliptiques rationnelles.

Fait 9.1.

Un échange consulté le 3 février 2024, et titré *« Proof that the product of 7 successive positive integers is not a square »* sur le site `https://math.stackexchange.com`.

La courte démonstration est donnée dans cet échange, mais certaines justifications manquent.

Fait 10.1.

Un échange consulté le 4 février 2024, et titré *« How to prove that the product of eight consecutive numbers can't be a number raised to exponent 4 ? »* sur le site `https://math.stackexchange.com`.

La démonstration astucieuse vient de l'une des réponses de cet échange, mais la justification des deux inégalités n'est pas donnée.