

BROUILLON - COURBES POLYNOMIALES SIMILAIRES

CHRISTOPHE BAL

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



TABLE DES MATIÈRES

1.	Où allons-nous ?	2
1.1.	Une preuve visuelle ou presque	2
2.	Cas des polynômes de degré 3	2
2.1.	Une approche visuelle, ou presque	2
2.2.	Une approche via les calculs différentiel et intégral	3
3.	AFFAIRE À SUIVRE...	5

1. OÙ ALLONS-NOUS ?

1.1. Une preuve visuelle ou presque.

Il est connu que les courbes des fonctions affines sont toutes des droites non verticales, et celles représentant des trinômes du 2^e degré sont toutes des paraboles¹. Laissant de côté le cas des fonctions constantes, nous constatons plus précisément les propriétés suivantes.

- (1) Au lycée, on explique que l'on peut passer de la représentation de la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$ à celle du trinôme du 2^e degré $g : x \mapsto ax^2 + bx + c$ via une translation, une dilatation verticale et/ou une dilatation horizontale.
- (2) De même, on peut passer de la représentation de la fonction identité $f : x \mapsto x$ à celle d'une fonction affine non constante $g : x \mapsto ax + b$ via une translation, une dilatation verticale et/ou une dilatation horizontale.

Une fois ceci noté, il devient naturel de se poser les questions suivantes.

- (1) Peut-on passer de la courbe de la fonction cube $f : x \mapsto x^3$ à celle du polynôme du 3^e degré $g : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ via une translation, une dilatation verticale et/ou une dilatation horizontale ?
- (2) Que se passe-t-il plus généralement pour les polynômes de degré $k \geq 4$?

2. CAS DES POLYNÔMES DE DEGRÉ 3

2.1. Une approche visuelle, ou presque.

Soit \mathcal{C}_g la courbe de la fonction $g : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $a \neq 0$. Nous allons démontrer que \mathcal{C}_g s'obtient à partir de l'une des courbes suivantes en utilisant une translation, une dilatation verticale et/ou une dilatation horizontale.

- (1) Γ_1 représente $f_1 : x \mapsto x^3$.
- (2) Γ_2 représente $f_2 : x \mapsto x^3 - x$ de sorte que $f_2(x) = x(x-1)(x+1)$.
- (3) Γ_3 représente $f_3 : x \mapsto x^3 + x$ de sorte que $f_3(x) = x(x-i)(x+i)$ où $i \in \mathbb{C}$.

Démonstration.

- (1) **On peut supposer que $(a; b; d) = (1; 0; 0)$.**

- Il est immédiat que l'on peut supposer que $a = 1$.

Dans la suite, on supposera donc que $g(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$.

- En considérant \mathcal{C}_g , on observe un centre de symétrie qui semble être l'unique point d'inflexion de \mathcal{C}_g dont l'abscisse m se calcule comme suit.

$$\begin{aligned} g''(m) = 0 &\iff 6m + 2b = 0 \\ &\iff m = -\frac{b}{3} \end{aligned}$$

Il devient naturel de faire le changement de variable $x = m + t$.

$$\begin{aligned} g(x) &= g(m + t) \\ &= (m + t)^3 + b(m + t)^2 + c(m + t) + d \\ &= t^3 + 3mt^2 + 3m^2t + m^3 + bt^2 + 2bmt + bm^2 + ct + cm + d \end{aligned}$$

Le coefficient de t^3 reste égal à 1 et celui de t^2 est $3m + b = 0$. Ceci montre que l'on peut supposer $(a; b) = (1; 0)$.

Dans la suite, on supposera donc $g(x) = x^3 + cx + d$.

1. La définition géométrique des grecs anciens restent la meilleure.

(2) On peut clairement supposer que $g(x) = x^3 + cx$, puis on conclut comme suit.

• **Cas 1 :** $c = 0$

Nous n'avons rien à faire de plus, car ici $\mathcal{C}_g = \Gamma_1$.

• **Cas 2 :** $c = -k^2$ avec $k > 0$

Ici $g(x) = x^3 - k^2 x$, soit $g(x) = x(x - k)(x + k)$.

Nous avons donc $g(kx) = k^3 x(x - 1)(x + 1) = k^3 f_2(x)$, puis $f_2(x) = \frac{1}{k^3} g(kx)$.

On peut passer de \mathcal{C}_g à Γ_2 , *i.e.* de Γ_2 à \mathcal{C}_g , à l'aide des transformations autorisées.

• **Cas 3 :** $c = k^2$ avec $k > 0$

Ici $g(x) = x^3 - (k\mathbf{i})^2 x$, soit $g(x) = x(x - k\mathbf{i})(x + k\mathbf{i})$.

Nous avons donc $g(kx) = k^3 x(x - \mathbf{i})(x + \mathbf{i}) = k^3 f_3(x)$, puis comme dans le cas précédent on peut passer de Γ_3 à \mathcal{C}_g à l'aide des transformations autorisées.

□

Remarque 2.1. On notera que la preuve précédente est constructive : on peut donner les applications à appliquer en fonction des coefficients a, b, c , et d de $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Pour $i \neq j$, il est évident qu'il n'est pas possible de passer de Γ_i à Γ_j à l'aide des transformations autorisées (*penser à la conservation géométrique du nombre de tangentes horizontales*). Ceci permet de parler de trois types de courbe pour les polynômes de degré 3, contre un seul pour les fonctions affines, et de même pour les trinômes du 2^e degré. Joli !

2.2. Une approche via les calculs différentiel et intégral.

Soit \mathcal{C}_g la courbe de la fonction $g : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $a \neq 0$. Nous allons démontrer que \mathcal{C}_g s'obtient à partir de l'une des courbes suivantes en utilisant une translation, une dilatation verticale et/ou une dilatation horizontale.

(1) Λ_1 représente $f_1 : x \mapsto x^3$.

(2) Λ_2 représente $f_2 : x \mapsto x^3 - 3x$ de sorte que $f_2'(x) = 3(x^2 - 1)$.

(3) Λ_3 représente $f_3 : x \mapsto x^3 + 3x$ de sorte que $f_3'(x) = 3(x^2 + 1)$.

Démonstration. Distinguons trois cas en notant que l'on peut supposer que $a = 1$.

(1) $g'(x)$ a une unique racine réelle.

Nous avons $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g'(x) = 3(x - \alpha)^2$, et donc $g(x) = (x - \alpha)^3 + k$. Il est immédiat que l'on peut passer de Λ_1 à \mathcal{C}_g à l'aide des transformations autorisées.

(2) $g'(x)$ a deux racines réelles.

Nous avons $\alpha \neq \beta$ deux réels tels que $g'(x) = 3(x - \alpha)(x - \beta)$. Les faits suivants montrent que l'on peut passer de \mathcal{C}_g à Λ_2 , *i.e.* de Λ_2 à \mathcal{C}_g , à l'aide des transformations autorisées.

- En posant $\delta = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $g'(x + \delta) = 3\left(x + \frac{\beta - \alpha}{2}\right)\left(x + \frac{\alpha - \beta}{2}\right)$. Ceci nous fournit alors $g'(x + \delta) = 3(x - \lambda)(x + \lambda)$ avec $\lambda \neq 0$, puis $g'(\lambda x + \delta) = \lambda^2 f_2'(x)$.
- En résumé, $f_2'(x) = \frac{1}{\lambda^2} g'(\lambda x + \delta)$, puis par intégration $f_2(x) = \frac{1}{\lambda^3} g(\lambda x + \delta) + k$.

(3) $g'(x)$ n'a pas de racine réelle.

La forme canonique semi-développée de $g'(x)$ est $g'(x) = 3(x - p)^2 + m$ où les réels p et m sont tels que $m > 0$. Les faits suivants montrent que l'on peut passer de \mathcal{C}_g à Λ_3 , *i.e.* de Λ_3 à \mathcal{C}_g , à l'aide des transformations autorisées.

- $g'(x + p) = 3x^2 + m$.
- Notant $\mu = \sqrt{\frac{m}{3}}$, on a ensuite $g'(\mu x + p) = mx^2 + m$, soit $g'(\mu x + p) = \frac{m}{3}f_3'(x)$.
- En résumé, $f_3'(x) = \frac{3}{m}g'(\mu x + p)$, puis par intégration $f_3(x) = \frac{3}{\mu m}g(\mu x + p) + k$.

□

Comme pour les courbes Γ_k de la section 2.1, il n'est pas possible de passer de Λ_i à Λ_j à l'aide des transformations autorisées dès que $i \neq j$.

Remarque 2.2. *La preuve précédente reste constructive, mais obtenir les bons coefficients est plus complexe qu'avec la première preuve : nous devons passer via les théorèmes classiques des polynômes du 2^e degré, et aussi calculer une constante d'intégration.*

3. AFFAIRE À SUIVRE...
