$$\prod_{k=0}^{n} (n+k) \notin \mathbb{N}^2 \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*$$

<u>Source</u> : "Le prod. de 5 entiers consécutifs n'est pas le carré d'un nombre entier" de T. Hayashi / Nlles Ann. Math.

Soit $P_n = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ où $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, d'où

$P_n = n(n^2-1)(n^2-4)$.

$$1^2 \xrightarrow{+3} 2^2 \xrightarrow{+5} 3^2 \xrightarrow{+7} 4^2 \cdots$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, $n^2 - 1 \notin \mathbb{N}^2$ et $n^2 - 4 \notin \mathbb{N}^2$.

<u>Cas 1</u> : $n = m^2 \in \mathbb{N}^2$

Dans ce cas, $\underbrace{(n^2-1)}_{a \geq 1}\underbrace{(n^2-4)}_{b \geq 1} = k^2 \in \mathbb{N}^2$

$a = A^2 \cdot \alpha$ où α est sans facteur carré.

$b = B^2 \cdot \beta$ où β ———————

Comme $A^2 \cdot B^2 \cdot \alpha\beta = k^2$, on a forcément $\alpha = \beta$, et ensuite $3 = a - b = (A^2 - B^2)\alpha$.

Soit $A^2 - B^2 = 3$, ie $A = 2$ et $B = 1$, et $\alpha = 1$. On a ensuite $a = 4$, ie $n^2 = 5$. Impossible !

Soit $A^2 - B^2 = 1$, ie $A^2 = B^2 + 1$. Impossible !

<u>Cas 2</u> : $n = N^2 \cdot \gamma$ où γ est sans facteur carré, $\gamma > 1$.

On a comme avant $a = A^2 \cdot \alpha$ et $b = B^2 \cdot \beta$. Ce qui précède mq forcément $\alpha \neq \beta$.

En fait, $\alpha > 1$ et $\beta > 1$. Vu avant !

$n \wedge (n^2-1) = 1$

$n \wedge (n^2-4) \in \{1; 2; 4\}$

$(n^2-1) \wedge (n^2-4) \in \{1; 3\}$

Voir $p \in \mathbb{P}$ divisant n, a, ou b via les $(n+k)$.

(On sait que $\gamma \in \{2, 3, 6\}$ et $\{\alpha; \beta\} \subseteq \{1, 2, 3, 6\}$, puis ce qui précède donne $\gamma \wedge \alpha = 1$, $\gamma \wedge \beta = 2$ ou 1, $\alpha \wedge \beta = 3$ ou 1. Ceci donne les cas suivants.

γ	α	β
2	1	2
2	3	6

→ 1 impossible pour β car on veut un carré.

Géréable en amont!

Soit $n = 2N^2$, $n^2-1 = A^2$, $n^2-4 = 2B^2$. Or on sait que $n^2-1 = A^2$ n'est pas possible !

Soit $n = 2N^2$, $n^2-1 = 3A^2$ et $n^2-4 = 6B^2$.

- $3 \mid (n^2-1)$

$\Rightarrow n^2 \equiv 1 \, [3]$

$\Rightarrow n \equiv \pm 1 \, [3]$

- Modulo 3, on a aussi : $n \equiv 2N^2 \, [3]$

$\Rightarrow n \equiv 2 \times \left(\begin{smallmatrix}0 \\ \text{ou} \\ 1\end{smallmatrix}\right) \, [3]$

$\Rightarrow n \equiv 0$ ou $-1 \, [3]$

Donc $n = -1 + 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

- On a donc $n-2 = -3+3k = 3(k-1)$ d'où $3 \mid n-2$, puis $6 \mid (n-2)$ via $n = 2N^2$.

- $(n-2)(n+2) = 6B^2$

$6p \times q = 6B^2$

Notons que $n+2 \notin \mathbb{N}^2$ car un prod. de 4 entiers n'est jamais le carré d'un entier. On arrive à

$p = P^2 \cdot \pi$ et $q = Q^2 \cdot \pi$ avec π sans fact. carré.

Via $4 = n+2-(n-2) = \pi\,(6P^2 - Q^2)$,

on doit avoir $\pi = 2$.

$n+2 = 2 \cdot Q^2$ et $n = 2N^2$

$\Rightarrow N^2 + 1 = Q^2$ Impossible !

ⓘ La preuve de la source utilisée ne note pas la nécessité d'avoir $3 \mid (n-2)$: une disjonc° de cas est faite.