BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS – RÉSOLUTIONS À LA MAIN

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writing/drafts.

Mentions « légales »

Table des matières

Date: 25 Jan. 2024 – 2 Fév. 2024.

1. Ce qui nous intéresse

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers » [1], Paul Erdos démontre que pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit de $(k+1)$ entiers consécutifs $n(n+1)\cdots(n+k)$ n'est jamais le carré d'un entier.

Dans ce document, nous proposons quelques cas particuliers résolus de façon « adaptative » à la sueur des neurones ; le but recherché est de fournir différentes approches même si parfois cela peut prendre plus de temps.

2. Notations utilisées

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des carrés parfaits.
- ${}^2\mathbb{N}_* = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
- $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k} (n+i)$. Par exemple, nous avons $\pi_n^0 = n$ et $\pi_n^1 = n(n+1)$.
- $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
- $\forall (p\,; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p-adique de n, c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n, contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m.
- $2\,\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
- $2\,\mathbb{N} + 1$ désigne l'ensemble des nombres naturels impairs.
- $(a \pm b)$ est un raccourci pour $(a+b)(a-b)$.

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).

3. Avec un seul facteur - Du basique très utile

Bien que simple, le fait suivant va être régulièrement utilisé dans la suite.

Fait 3.1. *$\forall n \in {}^2\mathbb{N}_*$, s'il existe $m \in {}^2\mathbb{N}_*$ tel que $n = fm$ alors $f \in {}^2\mathbb{N}_*$.*

Démonstration. Il suffit de passer via les décompositions en facteurs premiers de n , m et f . □

Nous allons souvent être amené à étudier des différences de carrés parfaits. Commençons par indiquer une jolie formule.

Fait 3.2. *$\forall (N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $N > M$, alors $N^2 - M^2 = \sum_{k=M+1}^{N} (2k - 1)$.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser $N^2 = \sum_{k=1}^{N} (2k - 1)$, une formule facile à démontrer algébriquement, et évidente à découvrir géométriquement. □

L'identité précédente permet d'éliminer beaucoup de situations en s'aidant, si besoin, d'un petit programme informatique comme celui donné à la fin de cette section.

Fait 3.3. *Soit $(N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $N > M$.*

(1) $N^2 - M^2 \geq 2M + 1$.
(2) $N^2 - M^2 < 3$ est impossible.

Démonstration.

(1) $N^2 - M^2 = \sum_{k=M+1}^{N} (2k - 1) \geq 2(M + 1) - 1 = 2M + 1$

On peut aussi juste procéder comme suit.

$N^2 - M^2 = (N - M)(N + M) \geq 1 \cdot (M + 1 + M) = 2M + 1$

(2) Immédiat puisque $2M + 1 \geq 3$.

□

4. Sources utilisées

(1) Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré *« n(n+1)...(n+k) est un carré ? »* sur le site `lesmathematiques.net` .

La démonstration du fait **??** *via le principe des tiroirs trouve sa source dans cet échange.*

(2) L'article *« Le produit de 5 entiers consécutifs n'est pas le carré d'un entier. »* de T. Hayashi, Nouvelles Annales de Mathématiques, est consultable via Numdam , la bibliothèque numérique française de mathématiques.

Cet article a inspiré la preuve alternative du fait **??***.*

(3) Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré *« product of six consecutive integers being a perfect numbers »* sur le site `https://math.stackexchange.com` .

La démonstration courte du fait **??** *est donné dans cet échange. Vous y trouverez aussi un très joli argument basé sur les courbes elliptiques rationnelles.*

5. AFFAIRE À SUIVRE...