BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS – UNE MÉTHODE EFFICACE

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LaTeX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writing/drafts.

Mentions « légales »

Table des matières

1. Application au cas de 5 facteurs

Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$. Nous avons alors les tableaux de Vogler partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}_{>4}$ divisant π_n^4 .

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
p	1	1	1	1	1

Pour $p = 2$, nous avons les tableaux de Vogler partiels relatifs à 2 donnés ci-après.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
2	1	1	1	1	1
	2	1	2	1	1
	2	1	1	1	2
	1	2	1	2	1
	1	1	2	1	2

Pour $p = 3$, nous obtenons les tableaux de Vogler partiels relatifs à 3 donnés ci-après.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
3	1	1	1	1	1
	3	1	1	3	1
	1	3	1	1	3

La multiplication de tous les tableaux de Vogler partiels précédents donne les 15 cas suivants.

Date : 25 Jan. 2024 – 7 Fév. 2024.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
	1	1	1	1	1
	2	1	2	1	1
	2	1	1	1	2
	1	2	1	2	1
	1	1	2	1	2

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
	3	1	1	3	1
	6	1	2	3	1
	6	1	1	3	2
	3	2	1	6	1
	3	1	2	3	2

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
	1	3	1	1	3
	2	3	2	1	3
	2	3	1	1	6
	1	6	1	2	3
	1	3	2	1	6

Comme $\pi_n^3 = n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2_*\mathbb{N}$ et $\pi_{n+1}^3 = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2_*\mathbb{N}$ d'après la section **??**, nous pouvons ignorer tous les tableaux commençant, ou finissant, par une valeur 1 d'après le fait **??**. Cela laisse les tableaux de Vogler ci-après, mais ces derniers sont rejetés par le fait **??**.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
	2	1	1	1	2
	6	1	1	3	2
	3	1	2	3	2
	2	3	2	1	3
	2	3	1	1	6

Remarque 1.1. *Notons qu'un cas comme* $6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2$ *, c'est-à-dire* $n = 6A^2$ *,* $n+1 = B^2$ *,* $n+2 = C^2$ *,* $n+3 = 3D^2$ *et* $n+4 = 2E^2$ *où* $(A,B,C,D,E) \in (\mathbb{N}^*)^4$ *peut se traiter de façon analogue à ce qui a été fait dans la section* **??** *via* $x-2 = 6A^2$ *,* $x-1 = B^2$ *,* $x = C^2$ *,* $x+1 = 3D^2$ *et* $x+2 = 2E^2$ *qui donnent* $x^2-4 = 3F^2$ *et* $x^2-1 = 3G^2$ *où* $(F,G) \in (\mathbb{N}^*)^4$ *.*

2. Et après ?

La méthode présentée ci-dessus permet de faire appel à un programme pour ne traiter à la main, et à la sueur des neurones, que certains tableaux de Vogler problématiques comme nous avons dû le faire dans la section **??**. Expliquons cette tactique semi-automatique en traitant le cas de 6 facteurs.

(1) On raisonne par l'absurde en supposant que $\pi_n^6 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
(2) On fabrique la liste $\mathcal{P}$ des diviseurs premiers stricts de 6 : nous avons juste 2 , 3 et 5 . Notons qu'avec 7 facteurs, nous n'aurions pas garder 7 car il est forcément de valuation paire dans chaque facteur $(n+i)$ de π_n^7 si $\pi_n^7 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
(3) Pour chaque élément p de $\mathcal{P}$, on construit la liste $\mathcal{V}_p$ des tableaux de Vogler partiels relatifs à p et $\pi_n^6 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
(4) Via les listes $\mathcal{V}_p$, on calcule toutes les multiplications de tous les tableaux de Vogler partiels relatifs à tous les nombres p différents, et pour chacune d'elles, on ne la garde que si elle ne vérifie aucune des conditions suivantes, celles du dernier cas devant être indiquées à la main au programme.
   (a) Le tableau « produit » commence, ou se termine, par la valeur 1 . Dans ce cas, on sait par récurrence que le tableau produit n'est pas possible (voir le fait **??**).
   (b) L'une des interdictions du fait **??** est validée par le tableau « produit » .
   (c) Le tableau « produit » contient un sous-tableau que nous savons impossible suite à un raisonnement humain fait *localement* , c'est-à-dire que seul les facteurs indiqués dans le sous-tableau, et le sous-tableau lui-même sont utilisés pour raisonner. Comme c'est ce qui a été fait en fin de section **??**, nous pouvons indiquer les deux sous-tableaux impossibles suivants.

$m + \bullet$	0	1	2	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Deux sous-tableaux de Vogler impossibles.

YAPLUKA !

Dans le dépôt en ligne associé à ce document est placé un programme nommé `vogler-6.py` qui nous fournit les informations suivantes.

3. Sources utilisées

Ce document n'aurait pas vu le jour sans la source suivante.

(1) Une discussion archivée consultée le 28 janvier 2024 :
`https://web.archive.org/web/20171110144534/http://mathforum.org/library/drmath/view/65589.html` .

Cette discussion utilise ce que nous avons nommé les tableaux de Vogler, mais le côté semi-mécanisable de leur utilisation n'est pas souligné.

4. AFFAIRE À SUIVRE...