

REPRENDRE EN DÉTAILLANT CAS IMPOSSIBLE DIST CARRÉ +  
COMMENCER CHAQUE CAS SUR NELLE PAGE + INDIQUER QUE LES  
PREUVES MÊME LONGUES SONT LÀ À TITRE PEDAGO <—  
BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERES  
CONSÉCUTIFS – RÉSOLUTIONS À LA MAIN

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons « Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International ».



---

## TABLE DES MATIÈRES

1. Ce qui nous intéresse	2
2. Notations utilisées	2
3. Avec 1 seul facteur	2
4. Avec 2 facteurs	2
5. Avec 3 facteurs	3
6. Avec 4 facteurs	3
7. Avec 5 facteurs	4
8. Avec 6 facteurs	6
9. Sources utilisées	10
10. AFFAIRE À SUIVRE...	11

## 1. CE QUI NOUS INTÉRESSE

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers »<sup>1</sup>, Paul Erdos démontre que pour tout couple  $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , le produit de  $(k + 1)$  entiers consécutifs  $\prod_{i=0}^k (n + i)$  n'est jamais le carré d'un entier.

Dans ce document, nous proposons quelques cas particuliers résolus de façon « adaptative » à la sueur des neurones.

## 2. NOTATIONS UTILISÉES

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$  et  ${}^2\mathbb{N}_* = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$ .
- $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ ,  $\pi_n^k = \prod_{i=0}^k (n + i)$ . Par exemple, nous avons  $\pi_n^0 = n$  et  $\pi_n^1 = n(n + 1)$ .
- $\mathbb{P}$  désigne l'ensemble des nombres premiers.
- $\forall (p; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$ ,  $v_p(n) \in \mathbb{N}$  est la valuation  $p$ -adique de  $n$ , c'est-à-dire  $p^{v_p(n)} \mid n$  et  $p^{v_p(n)+1} \nmid n$ , autrement dit  $p^{v_p(n)}$  divise  $n$ , contrairement à  $p^{v_p(n)+1}$ .
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$ ,  $n \wedge m$  désigne le PGCD de  $n$  et  $m$ .
- $2\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
- $2\mathbb{N} + 1$  désigne l'ensemble des nombres naturels impairs.
- $(a \pm b)$  est un raccourci pour  $(a + b)(a - b)$ .

## 3. AVEC 1 SEUL FACTEUR

Via  $N^2 - M^2 = (N - M)(N + M)$ , il est immédiat de noter que  $\forall (N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , si  $N > M$ , alors  $N^2 - M^2 \geq 3$ . Le fait suivant précise ceci.

**Fait 3.1.**  $\forall (N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , si  $N > M$ , alors  $N^2 - M^2 = \sum_{k=M+1}^N (2k - 1)$ .

En particulier,  $N^2 - M^2 \geq 3$ .

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser  $N^2 = \sum_{k=1}^N (2k - 1)$ . □

Bien que simple, le fait suivant va nous rendre de grands services dans la suite.

**Fait 3.2.**  $\forall n \in {}^2\mathbb{N}_*$ , s'il existe  $m \in {}^2\mathbb{N}_*$  tel que  $n = fm$  alors  $f \in {}^2\mathbb{N}_*$ .

*Démonstration.* Il suffit de passer via les décompositions en facteurs premiers de  $n$ ,  $m$  et  $f$ . □

## 4. AVEC 2 FACTEURS

**Fait 4.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n(n + 1) \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Démonstration.* Il suffit de noter que  $n^2 < n(n + 1) < (n + 1)^2$ . □

*Preuve alternative no.1.* Supposons que  $\pi_n^1 = n(n + 1) \in {}^2\mathbb{N}_*$ . Clairement  $\forall p \in \mathbb{P}$ , nous avons :  $v_p(\pi_n^1) \in 2\mathbb{N}$ . Or  $p \in \mathbb{P}$  ne peut diviser à la fois  $n$  et  $n + 1$ . Nous savons donc que  $\forall p \in \mathbb{P}$ ,  $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$  et  $v_p(n + 1) \in 2\mathbb{N}$ , autrement dit  $(n, n + 1) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$ . D'après le fait 3.1, nous savons que ceci est impossible. □

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).

*Preuve alternative no.2.* Supposons que  $\pi_n^1 = n(n+1) = N^2$  où  $N \in \mathbb{N}^*$ . Les équivalences suivantes donnent alors une contradiction.

$$\begin{aligned}
 & n(n+1) = N^2 \\
 \iff & 2 \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^N (2k-1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} n(n+1) = 2 \sum_{k=1}^n k \text{ et } N^2 = \sum_{k=1}^N (2k-1). \\
 \iff & \sum_{k=1}^n 2k = \sum_{k=1}^N 2k - N \\
 \iff & \sum_{k=n+1}^N 2k - N = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} N > n \\
 \iff & \sum_{k=n+1}^{N-1} 2k + N = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} N > 0 \text{ rend impossible la dernière égalité.}
 \end{aligned}$$

□

## 5. AVEC 3 FACTEURS

**Fait 5.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2) \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Démonstration.* Supposons que  $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$ . Posant  $m = n+1$ , nous avons  $\pi_n^2 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$  où  $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Comme  $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(\pi_n^2) \in 2\mathbb{N}$ , et comme de plus  $p \in \mathbb{P}$  ne peut diviser à la fois  $m$  et  $m^2-1$ , nous savons que  $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(m) \in 2\mathbb{N}$  et  $v_p(m^2-1) \in 2\mathbb{N}$ , d'où  $(m, m^2-1) \in {}^2\mathbb{N}_* \times {}^2\mathbb{N}_*$ . Or, d'après le fait 3.1,  $m^2-1 \in {}^2\mathbb{N}$  est impossible. □

*Une preuve alternative.* Supposons que  $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$ . Comme  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  ne peut diviser au maximum qu'un seul des trois facteurs  $n, (n+1)$  et  $(n+2)$ , nous savons que  $\forall p \in \mathbb{P}_{>2}, \forall i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ . Mais que se passe-t-il pour  $p=2$ ?

Supposons d'abord  $n \in 2\mathbb{N}$ .

- Posant  $n = 2m$ , nous avons  $\pi_n^2 = 4m(2m+1)(m+1)$ , d'où  $m(2m+1)(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$ .
- Comme  $v_2(2m+1) = 0$ , nous savons que  $2m+1 \in {}^2\mathbb{N}_*$ .
- Donc  $m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$  via le fait 3.2, mais le fait 4.1 interdit cela.

Supposons maintenant  $n \in 2\mathbb{N}+1$ .

- Nous savons que  $n \in {}^2\mathbb{N}_*$  via  $v_2(n) = 0$ .
- Dès lors, on obtient  $(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$ , mais de nouveau ceci contredit le fait 4.1. □

## 6. AVEC 4 FACTEURS

**Fait 6.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Démonstration.* Nous pouvons ici faire les manipulations algébriques naturelles suivantes qui cherchent à obtenir le même coefficient pour  $n$  dans chaque parenthèse.

$$\begin{aligned}
 \pi_n^3 &= n(n+3) \cdot (n+1)(n+2) \\
 &= (n^2+3n) \cdot (n^2+3n+2) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} m = n^2+3n \\
 &= m(m+2) \\
 &= m^2+2m \\
 &= (m+1)^2-1
 \end{aligned}$$

Comme  $m > 0$ , d'après le fait 3.1,  $(m+1)^2-1 \notin {}^2\mathbb{N}$ , c'est-à-dire  $\pi_n^3 \notin {}^2\mathbb{N}$ . □

*Une preuve alternative.* En « symétrisant » certaines expressions, nous obtenons les manipulations algébriques suivantes.

$$\begin{aligned}
\pi_n^3 &= n(n+1)(n+2)(n+3) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} x = n + \frac{3}{2} \\
&= \left(x \pm \frac{3}{2}\right) \left(x \pm \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} y = x^2 - \frac{5}{4} \text{ où } \frac{5}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{4}\right) \\
&= (y \pm 1) \\
&= y^2 - 1 \\
&= \left(\left(n + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right)^2 - 1 \\
&= (n^2 + 3n + 1)^2 - 1
\end{aligned}$$

□

## 7. AVEC 5 FACTEURS

**Fait 7.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Démonstration.* Supposons que  $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$ . Clairement,  $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}, \forall i \in \llbracket 0; 4 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ . Pour  $p = 2$  et  $p = 3$ , nous avons les alternatives suivantes pour chaque facteur  $(n+i)$  de  $\pi_n^3$ .

- **[A1]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A2]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times (2\mathbb{N} + 1)$
- **[A3]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times 2\mathbb{N}$
- **[A4]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times (2\mathbb{N} + 1)$

Comme nous avons cinq facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions très facilement.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A1]**.

Dans ce cas, on sait juste que  $(n+i, n+i') \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$ . Or  $n \notin {}^2\mathbb{N}$  puisque sinon nous aurions  $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$  via  $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$ , mais ceci ne se peut pas d'après le fait 6.1. De même,  $n+4 \notin {}^2\mathbb{N}$ . Dès lors, nous avons  $\{n+i, n+i'\} \subseteq \{n+1, n+2, n+3\}$  qui donne deux carrés parfaits non nuls éloignés de moins de 3, et ceci contredit le fait 3.1.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A2]**.

Dans ce cas, le couple de facteurs est  $(n, n+3)$ , ou  $(n+1, n+4)$ .

- (1) Supposons d'abord que  $n$  et  $(n+3)$  vérifient **[A2]**.

Comme  $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}, v_p(n) \in 2\mathbb{N}$  et  $v_p(n+3) \in 2\mathbb{N}$ , mais aussi  $v_3(n) \in 2\mathbb{N} + 1$  et  $v_3(n+3) \in 2\mathbb{N} + 1$ , nous avons  $n = 3N^2$  et  $n+3 = 3M^2$  où  $(N, M) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . Or, ceci donne  $3 = 3M^2 - 3N^2$ , puis  $M^2 - N^2 = 1$  qui contredit le fait 3.1.

- (2) De façon analogue, on ne peut pas avoir  $(n+1)$  et  $(n+4)$  vérifiant **[A2]**.

- Deux facteurs différents  $(n + i)$  et  $(n + i')$  vérifient **[A3]**.

Comme dans le point précédent, c'est impossible car on aurait  $2 = 2M^2 - 2N^2$ , ou  $4 = 2M^2 - 2N^2$ . En effet, ici les couples possibles sont  $(n, n+2)$ ,  $(n, n+4)$ ,  $(n+2, n+4)$  et  $(n+1, n+3)^2$ .

- Deux facteurs différents  $(n + i)$  et  $(n + i')$  vérifient **[A4]**.

Ceci donne deux facteurs différents divisibles par 6, mais c'est impossible.  $\square$

Bien que longue, la preuve suivante est simple à comprendre car elle ne fait que dérouler le fil des faits découverts.

*Une preuve alternative.* Supposons que  $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$ . Posant  $m = n+2$ , nous avons  $\pi_n^4 = (m \pm 2)(m \pm 1)m = m(m^2 - 1)(m^2 - 4)$  où  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ . On notera dans la suite  $u = m^2 - 1$  et  $q = m^2 - 4$ .

Supposons d'abord que  $m \in {}^2\mathbb{N}_*$ .

- De  $muq \in {}^2\mathbb{N}_*$ , nous déduisons  $uq \in {}^2\mathbb{N}_*$ .
- Comme  $u - q = 3$ , nous savons que  $u \wedge q \in \{1, 3\}$ .
- Si  $u \wedge q = 1$ , alors  $\forall p \in \mathbb{P}$ ,  $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$  et  $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$ , d'où  $(u, q) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$ . Le fait 3.1 impose d'avoir  $(u, q) = (4, 1)$ , d'où  $m^2 - 1 = 4$ , mais ceci est impossible<sup>3</sup>.
- Si  $u \wedge q = 3$ , alors  $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$ ,  $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$  et  $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$ , mais aussi  $v_3(u) \in 2\mathbb{N} + 1$  et  $v_3(q) \in 2\mathbb{N} + 1$ . Donc  $u = 3U^2$  et  $q = 3Q^2$  avec  $(U, Q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . Or  $u - q = 3$  donne  $U^2 - Q^2 = 1$ , et le fait 3.1 nous indique une contradiction.

Supposons maintenant que  $m \notin {}^2\mathbb{N}_*$ .

- Montrons que  $u \notin {}^2\mathbb{N}$  et  $q \notin {}^2\mathbb{N}$ .

(1)  $u \in {}^2\mathbb{N}$  donne les équivalences logiques suivantes qui lèvent une contradiction.

$$\begin{aligned} m^2 - 1 \in {}^2\mathbb{N} &\iff \exists r \in \mathbb{N}. (m^2 - 1 = r^2) \\ &\iff \exists r \in \mathbb{N}. (m^2 - r^2 = 1) \\ &\iff m = 1 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Via le fait 3.1, mais} \\ \text{ceci contredit } m \in \mathbb{N}_{\geq 3}. \end{array}$$

(2)  $q \in {}^2\mathbb{N}$  donne les équivalences logiques suivantes qui lèvent une contradiction.

$$\begin{aligned} m^2 - 4 \in {}^2\mathbb{N} &\iff \exists r \in \mathbb{N}. (m^2 - r^2 = 4) \\ &\iff m = 2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Voir le fait 3.1, mais} \\ \text{ceci contredit } m \in \mathbb{N}_{\geq 3}. \end{array}$$

- Donc  $m = \alpha M^2$ ,  $u = \beta U^2$ ,  $q = \gamma Q^2$  où  $(M, U, Q) \in (\mathbb{N}^*)^3$ , et  $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{N}_{>1})^3$ , le dernier triplet étant formé d'entiers sans facteur carré.
- Notons que  $\beta \neq \gamma$  car, dans le cas contraire,  $3 = u - q = \beta(U^2 - Q^2)$  fournirait  $\beta = 3$  puis  $U^2 - Q^2 = 1$ , et ceci contredirait le fait 3.1.
- Nous avons  $m \wedge u = 1$ ,  $m \wedge q \in \{1, 2, 4\}$  et  $u \wedge q \in \{1, 3\}$  avec  $m \wedge u = m \wedge q = u \wedge q = 1$  impossible car sinon on aurait  $(m, u, q) \in ({}^2\mathbb{N})^3$  via  $muq \in {}^2\mathbb{N}$ .
- Clairement,  $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$ ,  $(v_p(m), v_p(u), v_p(q)) \in (2\mathbb{N})^3$ .

2. Rien n'empêche d'avoir  $n$ ,  $(n+2)$  et  $(n+4)$  vérifiant tous les trois **[A3]**.

3. On peut aussi noter que le fait 5.1 lève une contradiction car nous avons  $m \in {}^2\mathbb{N}$  et  $u \in {}^2\mathbb{N}$  qui donnent  $(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$

- Les points précédents donnent  $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$  avec de plus  $\beta \neq \gamma$ , ainsi que  $\alpha \wedge \beta = 1$ ,  $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2\}$  et  $\beta \wedge \gamma \in \{1, 3\}$ . Notons au passage que  $\alpha \wedge \beta = 1$  implique  $(\alpha, \beta) = (2, 3)$ , ou  $(\alpha, \beta) = (3, 2)$ . Via le tableau « mécanique » ci-après, nous obtenons que forcément  $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$  ou  $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$ . Le plus dur est fait !

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	Statut
2	3	2	1	2	1	✓
2	3	6	1	2	3	✓
3	2	3	1	3	1	✗
3	2	6	1	3	2	✗

- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$  nous donne  $m = 2M^2$ ,  $u = 3U^2$  et  $q = 2Q^2$ , d'où la contradiction  $3 \cdot 4M^2U^2Q^2 \in {}^2\mathbb{N}_*$ .
- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$  nous donne  $m = 2M^2$ ,  $m^2 - 1 = 3U^2$  et  $m^2 - 4 = 6Q^2$ , mais ce qui suit lève une autre contradiction.
  - Travaillons modulo 3. Comme  $m = 2M^2$ , nous avons  $m \equiv 0$  ou  $m \equiv -1$ . Or  $m^2 - 1 = 3U^2$  donne  $m^2 \equiv 1$ , d'où  $m \equiv -1$ , puis  $3 \mid m - 2$ , et enfin  $6 \mid m - 2$  puisque  $m$  est pair.
  - Posant  $m - 2 = 6r$  et notant  $s = m + 2$ , nous avons  $6rs = 6Q^2$ , puis  $rs = Q^2$ .
  - $s \notin {}^2\mathbb{N}$ , car dans le cas contraire, nous aurions  $(m - 2)(m - 1)m(m + 1) \in {}^2\mathbb{N}$  via  $(m - 2)(m - 1)m(m + 1)(m + 2) \in {}^2\mathbb{N}$ , mais ceci ne se peut pas d'après le fait 6.1.
  - Les deux résultats précédents donnent  $(\pi, R, S) \in \mathbb{N}_{>1} \times (\mathbb{N}^*)^2$  tel que  $r = \pi R^2$  et  $s = \pi S^2$  avec  $\pi$  sans facteur carré.
  - $4 = s - 6r = \pi(S^2 - 6R^2)$  donne  $\pi = 2$ , d'où  $m + 2 = 2S^2$ .
  - Finalement,  $m = 2M^2$  et  $m + 2 = 2S^2$  donnent  $2 = 2(S^2 - M^2)$ , soit  $1 = S^2 - M^2$ , ce qui contredit le fait 3.1.  $\square$

## 8. AVEC 6 FACTEURS

**Fait 8.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^5 \notin {}^2\mathbb{N}$ .

La démonstration suivante se trouve dans l'article « Solution of a Problem »<sup>4</sup> de G. W. Hill et J. E. Oliver. Une petite simplification a été faite pour arriver à  $\pi_n^5 = (a - 4)a(a + 2)$ .

*Démonstration.* Supposons que  $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}$ . Commençons par de petites manipulations algébriques où l'on cherche à faire apparaître le même coefficient pour  $n$  dans chaque parenthèse.

$$\begin{aligned}
 \pi_n^5 &= n(n + 5) \cdot (n + 1)(n + 4) \cdot (n + 2)(n + 3) \\
 &= (n^2 + 5n)(n^2 + 5n + 4)(n^2 + 5n + 6) \\
 &= x(x + 4)(x + 6) \\
 &= (a - 4)a(a + 2)
 \end{aligned}
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = n^2 + 5n \in \mathbb{N}_{\geq 6} \\ a = x + 4 \in \mathbb{N}_{\geq 10} \end{array}
 \end{array}$$

Nous avons donc  $a \in \mathbb{N}^*$  vérifiant  $a(a + 2)(a - 4) \in {}^2\mathbb{N}_*$ . Posons alors  $a = \alpha A^2$  où  $(\alpha, A) \in (\mathbb{N}^*)^2$  avec  $\alpha$  sans facteur carré. Nous avons alors  $a = \alpha(\alpha A^2 + 2)(\alpha A^2 - 4) \in {}^2\mathbb{N}_*$ . Comme  $\alpha$  est sans facteur carré, nous devons avoir  $\alpha \mid (\alpha A^2 + 2)(\alpha A^2 - 4)$ , d'où  $\alpha \mid 8$ , et finalement  $\alpha \in \{1, 2\}$ <sup>5</sup>. Nous allons voir que ceci est impossible.

4. The Analyst (1874).

5. On comprend ici le choix d'avoir  $\pi_n^5 = (a - 4)a(a + 2)$ .

Supposons avoir  $\alpha = 1$ .

- Notons les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} & (A^2 + 2)(A^2 - 4) \in {}^2\mathbb{N}_* \\ \iff & (u + 3)(u - 3) \in {}^2\mathbb{N}_* \quad \left. \begin{array}{l} \nearrow u = A^2 - 1 \text{ où } -1 = \frac{2-4}{2} \\ \searrow \end{array} \right\} \\ \iff & u^2 - 9 \in {}^2\mathbb{N}_* \end{aligned}$$

- Ensuite, prenant  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m^2 = u^2 - 9$ , comme  $u^2 - m^2 = \sum_{k=m+1}^w (2k - 1)$ , on a  $(u, m) = (5, 4)^6$ . On aboutit alors à la contradiction suivante.

$$\begin{aligned} & u = 5 \\ \iff & A^2 - 1 = 5 \\ \iff & A^2 = 6 \quad \left. \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right\} 6 \notin {}^2\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Supposons avoir  $\alpha = 2$ .

- Notons l'équivalence suivante.

$$\begin{aligned} & 2(2A^2 + 2)(2A^2 - 4) \in {}^2\mathbb{N}_* \\ \iff & 2(A^2 + 1)(A^2 - 2) \in {}^2\mathbb{N}_* \quad \left. \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right\} \text{Via } 4 \cdot 2(A^2 + 1)(A^2 - 2). \end{aligned}$$

- Ensuite, en travaillant modulo 3, nous avons  $2(A^2 + 1)(A^2 - 2) \equiv -4 \equiv -1$  qui ne correspond pas à un carré modulo 3.  $\square$

Bien que très longue, la preuve suivante est simple à comprendre car elle ne fait que dérouler le fil des faits découverts.

*Une preuve alternative.* Supposons que  $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} & \pi_n^5 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \\ \iff & \pi_n^5 = \left(x \pm \frac{5}{2}\right)\left(x \pm \frac{3}{2}\right)\left(x \pm \frac{1}{2}\right) \\ \iff & 2^6 \pi_n^5 = (y \pm 5)(y \pm 3)(y \pm 1) \\ \iff & 2^6 \pi_n^5 = (z - 25)(z - 9)(z - 1) \\ \iff & 2^6 \pi_n^5 = (u - 8)(u + 8)(u + 16) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \nearrow x = n + 2 + \frac{1}{2} \\ \searrow y = 2x \\ \searrow z = y^2 \\ \searrow u = z - 17 \text{ où } 17 = \frac{25+9}{2} \end{array} \right\}$$

Notant  $a = u - 8$ ,  $b = u + 8$  et  $c = u + 16$ , où  $u = (2n + 5)^2 - 17 \in 2\mathbb{N}$ , nous avons les faits suivants.

- $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$  et  $abc \in {}^2\mathbb{N}_*$  car  $(2^6, \pi_n^5) \in ({}^2\mathbb{N}_*)^2$ .
- $a \wedge b \mid 16$  via  $b - a = 16$ .
- $a \wedge c \mid 24$  via  $c - a = 24$ .
- $b \wedge c \mid 8$  via  $c - b = 8$ .
- En particulier,  $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$ ,  $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) \in (2\mathbb{N})^3$ .

Démontrons qu'aucun des trois entiers  $a$ ,  $b$  et  $c$  ne peut être un carré parfait.

---

6. Noter que  $2u - 1 \leq 9$  implique  $u \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$ . Ceci permet d'analyser tous les cas mentalement.

- Commençons par supposer que  $(a, b, c) \in {}^2\mathbb{N}_* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ .

Dans ce cas,  $bc \in {}^2\mathbb{N}_*$ , soit  $(u+8)(u+16) \in {}^2\mathbb{N}_*$ . En posant  $w = u+12$ , on arrive à  $(w-4)(w+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$ , soit  $w^2 - 16 \in {}^2\mathbb{N}_*$ . Notant  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m^2 = w^2 - 16$ , nous arrivons à  $w^2 - m^2 = 16$ . D'après le fait 3.1,  $w^2 - m^2 = \sum_{k=m+1}^w (2k-1)$ . Ceci n'est possible que si  $(w, m) = (5, 3)$ <sup>7</sup>. Or  $u \in 2\mathbb{N}$  donne  $w \in 2\mathbb{N}$ , d'où une contradiction.

- Supposons maintenant que  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^* \times {}^2\mathbb{N}_* \times \mathbb{N}^*$ .

Dans ce cas,  $ac \in {}^2\mathbb{N}_*$ , soit  $(u-8)(u+16) \in {}^2\mathbb{N}_*$ . En posant  $w = u+4$ , on arrive à  $(w-12)(w+12) \in {}^2\mathbb{N}_*$ , soit  $w^2 - 144 \in {}^2\mathbb{N}_*$ . Notant  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m^2 = w^2 - 144$ , nous arrivons à  $w^2 - m^2 = 144$ , d'où  $w^2 - m^2 = \sum_{k=m+1}^w (2k-1)$ . Ceci n'est possible que si  $(w, m) \in \{(13, 5), (15, 9), (20, 16), (37, 35)\}$ <sup>8</sup>. Ici aussi,  $u \in 2\mathbb{N}$  donne  $w \in 2\mathbb{N}$ , donc  $(w, m) = (20, 16)$ , mais les équivalences suivantes lèvent une contradiction.

$$\begin{aligned} u+4=20 &\iff (2n+5)^2 - 17 = 24 \\ &\iff (2n+5)^2 = 41 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} u+4=20 \\ &\iff (2n+5)^2 = 41 \end{aligned}} \right\} 41 \notin {}^2\mathbb{N}$$

- Supposons enfin que  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times {}^2\mathbb{N}_*$ .

Dans ce cas,  $ab \in {}^2\mathbb{N}_*$ , soit  $(u-8)(u+8) \in {}^2\mathbb{N}_*$ , c'est-à-dire  $u^2 - 64 \in {}^2\mathbb{N}_*$ . Notant  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m^2 = u^2 - 64$ , nous arrivons à  $u^2 - m^2 = 64$ . Ceci n'est possible que si  $(u, m) \in \{(10, 6), (17, 15)\}$ . Comme  $u \in 2\mathbb{N}$ , forcément  $(u, m) = (10, 6)$ , mais les équivalences suivantes lèvent une contradiction.

$$\begin{aligned} u=10 &\iff (2n+5)^2 - 17 = 10 \\ &\iff (2n+5)^2 = 27 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} u=10 \\ &\iff (2n+5)^2 = 27 \end{aligned}} \right\} 27 \notin {}^2\mathbb{N}$$

Nous avons donc  $a = \alpha A^2$ ,  $b = \beta B^2$  et  $c = \gamma C^2$  avec  $(A, B, C) \in (\mathbb{N}^*)^3$ , et  $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{N}_{>1})^3$  un triplet d'entiers sans facteurs carrés. Nous avons les faits suivants.

- $\alpha \wedge \beta \in \{1, 2\}$  d'après  $a \wedge b \mid 16$ .
- $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2, 3\}$  d'après  $a \wedge c \mid 24$ .
- $\beta \wedge \gamma \in \{1, 2\}$  d'après  $b \wedge c \mid 8$ .
- $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$  car  $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$ ,  $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) \in (2\mathbb{N})^3$ .

En fait,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont différents deux à deux.

- Démontrons que  $\alpha \neq \beta$ .

Dans le cas contraire,  $16 = b - a = \alpha(B^2 - A^2)$  et  $\alpha > 1$  donnent  $B^2 - A^2 \in \{1, 2, 4, 8\}$ . Or nous avons les impossibilités suivantes.

- (1)  $B^2 - A^2 = 1$  et  $B^2 - A^2 = 2$  contredisent le fait 3.1.
- (2)  $B^2 - A^2 = 4$  n'est possible que si  $(B, A) = (2, 0)$ .
- (3)  $B^2 - A^2 = 8$  n'est possible que si  $(B, A) = (3, 1)$  et  $\alpha = 2$ . Ceci donne  $a = 2$ , puis  $u = 10$ , mais nous avons vu que ceci était impossible.

7. Noter que l'on doit avoir  $2w - 1 \leq 16$ , d'où  $w \in \llbracket 0; 8 \rrbracket$ .

8. Comme  $2w - 1 \leq 144$  donne  $w \in \llbracket 0; 72 \rrbracket$ , il suffit de faire appel à un petit programme pour obtenir brutalement toutes les valeurs possibles.



- Nous avons aussi  $\beta \neq \gamma$ .

Dans le cas contraire,  $8 = c - b = \beta(C^2 - B^2)$  et  $\beta > 1$  donnent  $C^2 - B^2 \in \{1, 2, 4\}$ , mais ce qui précède ne laisse aucun choix possible.

- Enfin,  $\alpha \neq \gamma$ .

Dans le cas contraire,  $C^2 - A^2 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$  car  $24 = c - a = \alpha(C^2 - A^2)$  et  $\alpha > 1$ . Nous obtenons alors les impossibilités suivantes.

(1)  $C^2 - A^2 \in \{1, 2, 4\}$  est à rejeter comme précédemment.

(2)  $C^2 - A^2 = 3$  n'est possible que si  $(C, A) = (2, 1)$  et  $\alpha = 8$ , mais les équivalences suivantes lèvent une contradiction.

$$\begin{aligned} a = 8 &\iff u = 16 \\ &\iff (2n + 5)^2 - 17 = 16 \\ &\iff (2n + 5)^2 = 33 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 33 \notin {}^2\mathbb{N}$$

(3)  $C^2 - A^2 = 6$  est impossible.

(4)  $C^2 - A^2 = 8$  n'est possible que si  $(C, A) = (3, 1)$  et  $\alpha = 3$ , mais les équivalences suivantes lèvent une contradiction.

$$\begin{aligned} a = 3 &\iff u = 11 \\ &\iff (2n + 5)^2 - 17 = 11 \\ &\iff (2n + 5)^2 = 28 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 28 \notin {}^2\mathbb{N}$$

(5)  $C^2 - A^2 = 12$  n'est possible que si  $(C, A) = (4, 2)$  et  $\alpha = 2$ , mais ceci donnerait  $a = 8$ , or nous savons que cela est impossible.

Comme  $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$ ,  $\alpha \wedge \beta \in \{1, 2\}$ ,  $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2, 3\}$  et  $\beta \wedge \gamma \in \{1, 2\}$ , et comme de plus  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont différents deux à deux, il ne nous reste plus qu'à analyser les cas suivants.

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	Statut
2	3	6	1	2	3	☒
2	6	3	2	1	3	☒
3	2	6	1	3	2	✓
3	6	2	3	1	2	☒
6	2	3	2	3	1	✓
6	3	2	3	2	1	☒

Traisons les deux cas restants en nous souvenant que  $a = u - 8$ ,  $b = u + 8$  et  $c = u + 16$ , où  $u = (2n + 5)^2 - 17 \in 2\mathbb{N}$ .

- Supposons  $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, 2, 6)$ , autrement dit  $a = 3A^2$ ,  $b = 2B^2$  et  $c = 6C^2$ .

Travaillons modulo 3 afin de lever une contradiction.

(1)  $a \equiv u - 2$  et  $a \equiv 3A^2 \equiv 0$  donnent  $u \equiv 2$ .

(2) D'autre part,  $b \equiv 2B^2 \equiv 0$  ou 2 via les carrés modulo 3. Or  $b \equiv u + 2 \equiv 1$  lève une contradiction.

- Supposons  $(\alpha, \beta, \gamma) = (6, 2, 3)$ , autrement dit  $a = 6A^2$ ,  $b = 2B^2$  et  $c = 3C^2$ .

La preuve précédente s'adapte sans difficulté puisque que  $a \equiv 6A^2 \equiv 0$  et  $b \equiv 2B^2$  modulo 3.

□

## 9. SOURCES UTILISÉES

- (1) Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré «  $n(n+1)\dots(n+k)$  est un carré ? » sur le site [lesmathematiques.net](https://lesmathematiques.net).

*La démonstration du fait 7.1 via le principe des tiroirs trouve sa source dans cet échange.*

- (2) L'article « *Le produit de 5 entiers consécutifs n'est pas le carré d'un entier.* » de T. Hayashi, Nouvelles Annales de Mathématiques, est consultable via Numdam, la bibliothèque numérique française de mathématiques.

*Cet article a inspiré la preuve alternative du fait 7.1.*

- (3) Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré « *product of six consecutive integers being a perfect numbers* » sur le site <https://math.stackexchange.com>.

*La démonstration courte du fait 8.1 est donné dans cet échange. Vous y trouverez aussi un très joli argument basé sur les courbes elliptiques rationnelles.*

---

## 10. AFFAIRE À SUIVRE...

---