RÉFLEXION SUR UN PROBLÈME D'OPTIMISATION

Question

On note $f(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - a_k|$ où l'on suppose :

i/ $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$

ii/ les a_k sont deux à deux distincts. Autrement dit, dans les a_k il n'y a pas deux fois la même valeur.

f admet-elle un minimum sur $\mathbb{R}$?

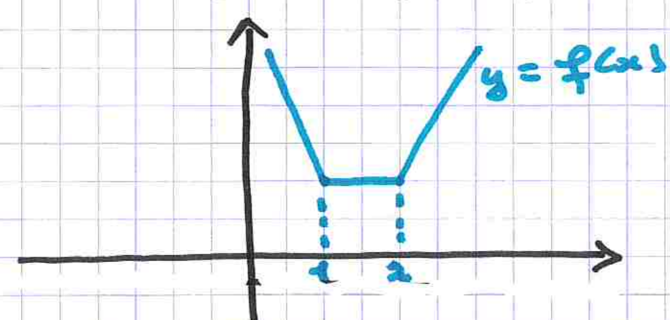
⚠ Résoudre directement cette question n'est pas immédiat pour tout le monde. On va donc considérer des cas particuliers !

Cas $n = 2$

$f(x) = |x - a_1| + |x - a_2|$ où $a_1 \neq a_2$.

On choisit $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$ d'où $f(x) = |x-1| + |x-2|$.

La calculatrice nous donne :



On peut conjecturer que ...

... $\forall x \in]-\infty ; 1]$, $f(x) = ax + b$ où $a < 0$

... $\forall x \in [1 ; 2]$, $f(x) = k$

... $\forall x \in [2 ; +\infty[$, $f(x) = mx + p$ où $m > 0$

Prouvons la validité de cette conjecture (en la précisant).

<u>Cas 1</u> : $x \in]-\infty ; 1]$ $\qquad |a| = -a$ si $a \leq 0$

$x \leq 1 \Rightarrow x-1 \leq 0 \quad \Rightarrow |x-1| = -(x-1)$

$x \leq 1 \Rightarrow x-2 \leq -1 \leq 0 \Rightarrow |x-2| = -(x-2)$

On a donc sur $]-\infty ; 1]$:

$f(x) = -x+1-x+2 = -2x+3$

<u>Cas 2</u> : $x \in [1 ; 2]$ $\qquad |a| = a$ si $a \geq 0$

$x \geq 1 \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow |x-1| = x-1$

$x \leq 2 \Rightarrow x-2 \leq 0 \Rightarrow |x-2| = -x+2$

On a donc sur $[1 ; 2]$:

$f(x) = x-1-x+2 = 1$

<u>Cas 3</u> : $x \in [2 ; +\infty[$

$x \geq 2 \Rightarrow x-1 \geq 1 \geq 0 \Rightarrow |x-1| = x-1$

$x \geq 2 \Rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow |x-2| = x-2$

On a donc sur $[2 ; +\infty[$:

$f(x) = x-1+x-2 = 2x-3$

<u>Résumé</u>

$$f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 2x-3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

On en déduit le tableau des variations suivant.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\rightarrow$	1	$\nearrow$	

$\underbrace{\hspace{3cm}}$ Du type $ax+b$ avec $a<0$

$\underbrace{\hspace{3cm}}$ Du type $mx+p$ avec $m>0$

Ceci démontre que f admet 1 comme minimum qui est atteint sur $[1;2]$

Retour à a_1 et a_2 quelconques ⚠

On peut adapter ce qui a été fait ci-dessus à condition de supposer $a_1<a_2$ (pourquoi peut-on le faire ?)

$x \leq a_1 \Rightarrow f(x) = -(x-a_1)-(x-a_2)$ $\quad x \leq a_1 < a_2$

$\Rightarrow f(x) = -2x+a_1+a_2$

$a_1 \leq x \leq a_2 \Rightarrow f(x) = (x-a_1)-(x-a_2)$

$\Rightarrow f(x) = a_2-a_1$

$x \geq a_2 \Rightarrow f(x) = (x-a_1)+(x-a_2)$ $\quad x \geq a_2 > a_1$

$\Rightarrow f(x) = 2x-a_1-a_2$

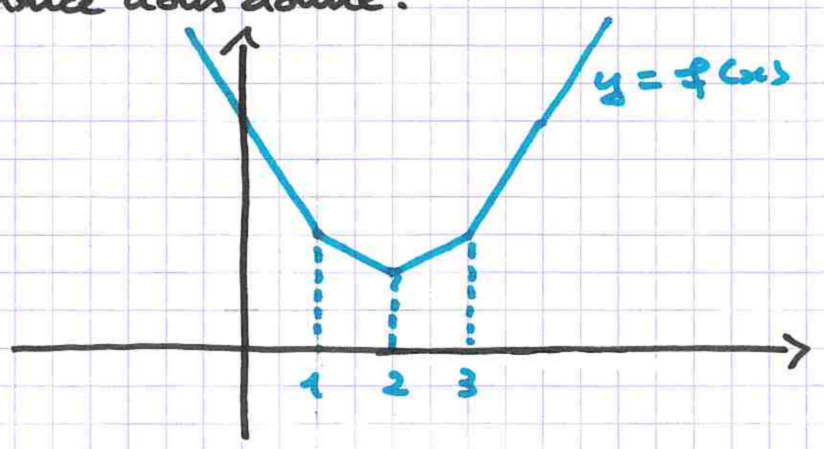
$$\text{Donc } f(x) = \begin{cases} -2x+a_1+a_2 & \text{si } x \leq a_1 \\ a_2-a_1 & \text{si } a_1 \leq x \leq a_2 \\ 2x-a_1-a_2 & \text{si } x \geq a_2 \end{cases}, \text{ où } a_1<a_2$$

On en déduit que f admet (a_2-a_1) comme minimum qui est atteint sur $[a_1;a_2]$ si $a_1<a_2$.

$\boxed{\text{Cas } n = 3}$

$f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3|$ où $a_1 \neq a_2$, $a_1 \neq a_3$ et $a_2 \neq a_3$. On peut en fait supposer que $a_1 < a_2 < a_3$ (pourquoi peut-on faire ce choix ?)

Choisissons pour commencer $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ et $a_3 = 3$, d'où $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3|$. La calculatrice nous donne :

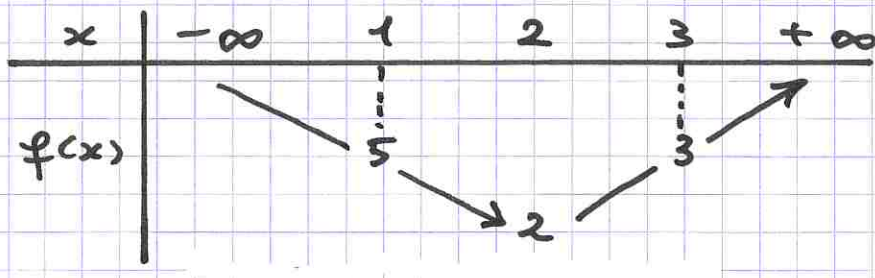


On peut raisonner comme dans le cas "$n = 2$" mais considérer les différents sous-cas va devenir pénible à rédiger. On va utiliser un tableau très efficace basé sur le résultat suivant

$$|x-a| = \begin{cases} -(x-a) = -x+a & \text{si } x \leq a \\ x-a & \text{sinon} \end{cases}$$

x	$-\infty$ ... 1	1 ... 2	2 ... 3	3 ... $+\infty$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$x-1$	$x-1$	$x-1$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$	$x-2$
$\lvert x-3\rvert$	$-x+3$	$-x+3$	$-x+3$	$x-3$
$f(x)$	$-3x+6$	$-x+4$	x	$3x-6$

On en déduit le tableau des variations suivant.



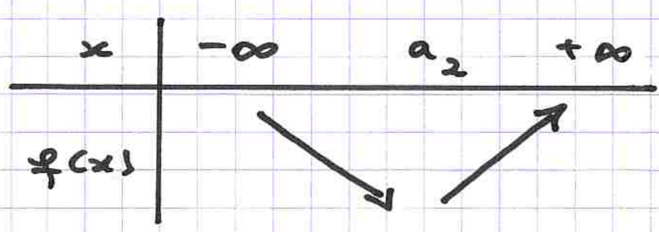
Ceci démontre que f admet 2 comme minimum en 2 uniquement. Le choix de 1, 2 et 3 est mauvais car parti-culier.

On généralise comme suit où $a_1 < a_2 < a_3$ par hypothèse.

x	$-\infty$	a_1	a_2	a_3
$\lvert x-a_1\rvert$	$-x+a_1$	$x-a_1$	$x-a_1$	$x-a_1$
$\lvert x-a_2\rvert$	$-x+a_2$	$-x+a_2$	$x-a_2$	$x-a_2$
$\lvert x-a_3\rvert$	$-x+a_3$	$-x+a_3$	$-x+a_3$	$x-a_3$
$f(x)$	$-3x+b_1$	$-x+b_2$	$x+b_3$	$3x+b_4$

On a noté :
- $b_1 = a_1+a_2+a_3$
- $b_2 = -a_1+a_2+a_3$
- $b_3 = -a_1-a_2+a_3$
- $b_4 = -a_1-a_2-a_3$

On a ensuite :



f admet $f(a_2) = a_2+b_3 = a_3-a_1$ comme minimum en $x = a_2$.

$\boxed{\text{Cas général}}$

Pas besoin de se lancer dans de longs calculs !!!

On peut supposer que $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$. Imaginons le tableau introduit dans le cas précédent.

La $1^{\text{ère}}$ colonne va contenir n fois le terme $(-x+\dots)$ d'où $f(x) = -nx + b_1$ où b_1 n'a pas besoin d'être connu.

Ensuite sur $[a_1 ; a_2]$, on a un signe moins qui "disparait" par rapport à la $1^{\text{ère}}$ colonne.

Sur $[a_2 ; a_3]$, on a deux.

Sur $[a_3 ; a_4]$, on a trois.

... etc.

<u>Cas $n = 2p$ est pair</u> : sur $[a_p ; a_{p+1}]$, il y a $n-p$ signes moins devant x soit $n-p = p$, et autant de signes plus.

On en déduit que $f(x) = k$ sur $[a_p ; a_{p+1}]$.

Sur $]-\infty ; a_p]$, il y a au minimum $p+1$ fois $(-x)$, et sur $[a_{p+1} ; +\infty[$, il y en a au maximum $p-1$.

On a alors :

x	$-\infty$		a_p		a_{p+1}		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$		$\rightarrow$		$\nearrow$	

f admet $f(a_p)$ pour minimum sur $[a_p ; a_{p+1}]$.

$$f(a_p) = \underbrace{\sum_{k=1}^{p-1} |a_p - a_k|}_{p-1 \text{ termes}} + \underbrace{\sum_{k=p+1}^{n} |a_p - a_k|}_{n-p=p \text{ termes}}$$

$$f(a_p) = \sum_{k=p+1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{p} a_k$$

<u>Cas $n = 2p+1$ est impair</u> : on raisonne de même pour montrer $f(a_{p+1})$ est le minimum de f en a_{p+1} uniquement.

$$f(a_{p+1}) = \sum_{k=1}^{p} |a_{p+1} - a_k| + \underbrace{\sum_{k=p+2}^{n} |a_{p+1} - a_k|}_{n-p-1 = p \text{ termes}}$$

$$f(a_{p+1}) = \sum_{k=p+2}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{p} a_k$$

Médiane

On note que les minimums sont atteints aux valeurs médianes de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.