

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{3} (n+1)(n+\frac{1}{2})n$$

Deux Méthodes Sympathiques  
(+ une)

Méthode 1 (une sur Myriogon : Bernoulli vs Ada Lovelace)

x	1	2	3	4	...	n
1	1	2	3	4	...	n
2	2	4	6	8	...	2n
3	3	6	9	12	...	3n
4	4	8	12	16	...	4n
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	n	2n	3n	4n	...	n <sup>2</sup>

$\Sigma'$  := somme des produits

$$\Sigma' = (1+2+\dots+n)^2 \text{ via la double distributivité.}$$

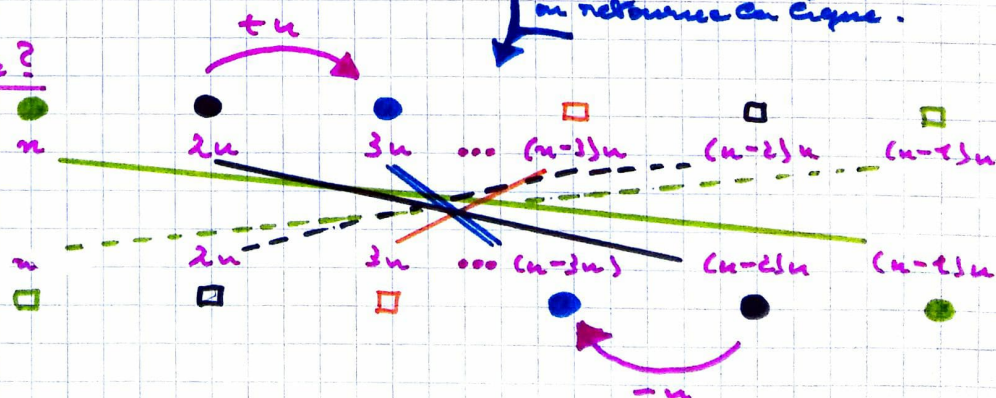
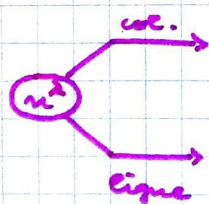
$$= \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$\Sigma' = 1 + 2 \times 2 + 4 + 2(3+6) + 9 + (4+12) + (8 \times 2) + (4+12) + 16 + \dots$$

$$= 1^3 + 2 \times 2^2 + 3 \times 3^2 + 4 \times 4^2 + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^n k^3$$

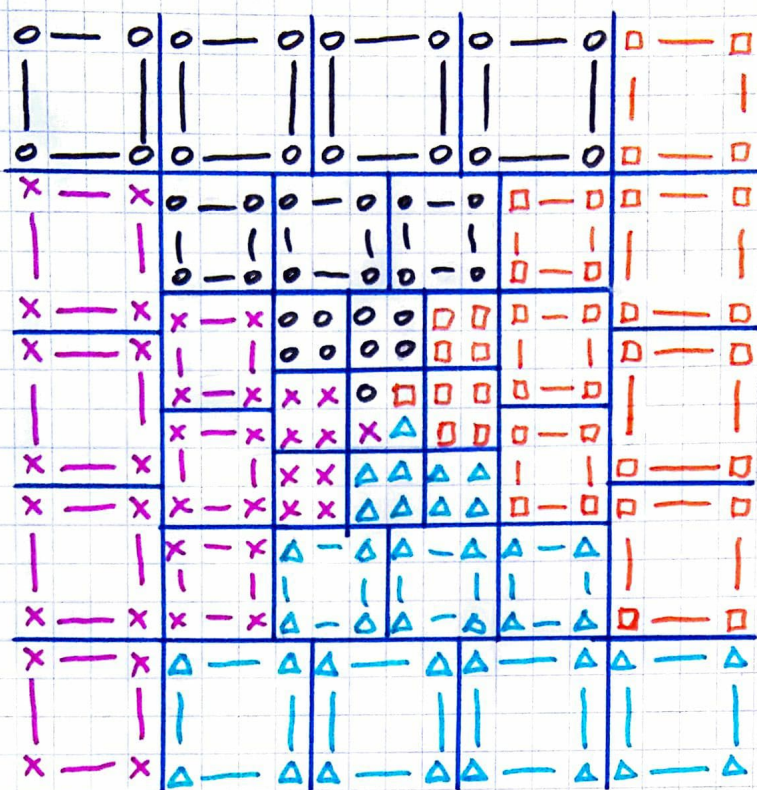
Pourquoi ça marche ?



① À mettre en regard avec la méthode de Gauss pour  $\sum_{k=1}^n k$ .

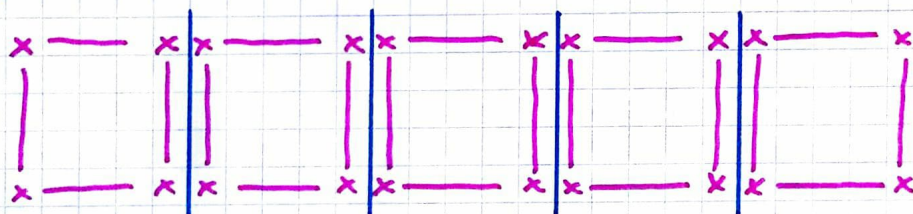


## MÉTHODE 2 (ou sur MathStack)



$$R^3 = R \times R^2$$

On peut poursuivre car on a :



Cette construction donne  $4 \sum_{k=1}^n k^2 = N^2$ .

Que vaut  $N$  ?

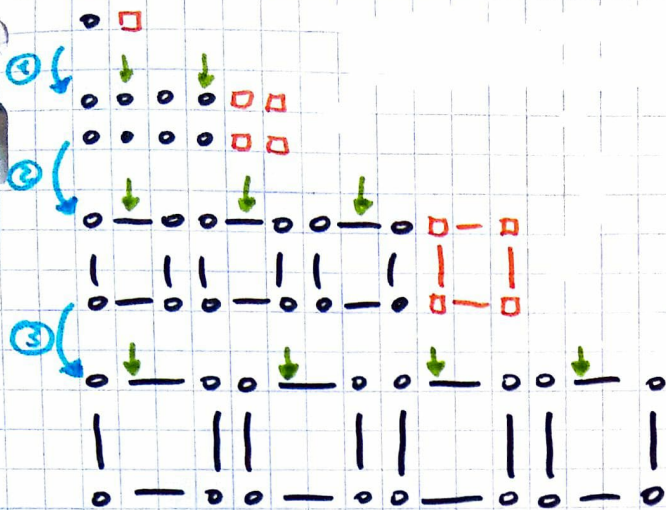
- $N_1 = 2 = 2 \times 1$
- $N_2 = 6 = 3 \times 2$
- $N_3 = 12 = 4 \times 3$
- $N_4 = 20 = 5 \times 4$

... etc

On arrive à  $N = (n+1)n$  puis  $\frac{N^2}{4} = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$ .

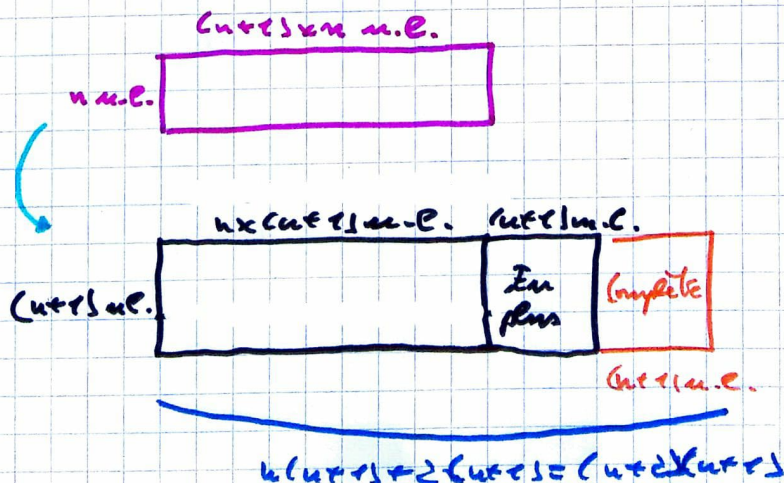


## Pourquoi ça marche ?



- ① • On part de  $2 \times 1 \text{ u.e.} = 1 \times 2 \text{ u.e.}$ .  
 • On ajoute 2 u.e. du 1<sup>er</sup> type.  
 • On complète avec 2 u.e. d'un autre type.
- ② • Init:  $3 \times 2 \text{ u.e.} = 2 \times 3 \text{ u.e.}$ .  
 • En plus: 3 u.e. du 1<sup>er</sup> type.  
 • Complète: 3 u.e. type  $\neq$
- ③ • Init:  $4 \times 3 \text{ u.e.} = 3 \times 4 \text{ u.e.}$ .  
 • En plus: 4 u.e. du 1<sup>er</sup> type.  
 • Complète: 4 u.e. type  $\neq$

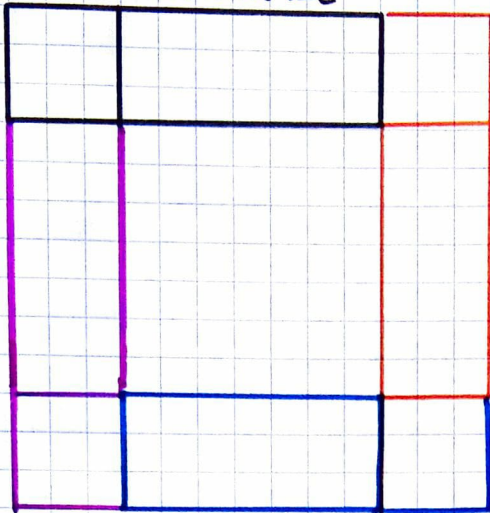
On peut faire une récurrence "côté long".





Il reste à valider que P' ou a des carrés à chaque type.

initial initial-ne




↳ Evidence "patronale" !



### METHODE 3

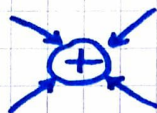
(cf. source de Ca 1 : un commutative Corps des Cnt)

On sait que  $\sum_{1 \leq k \leq n} k^3 = \left( \sum_{1 \leq k \leq n} k \right)^2$ , et on va voir que l'on a aussi  $\sum_{1 \leq k \leq n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$ .  Formules d'un corp!

On considère 4 copies de la table de multiplication (noté de quart de tour).

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

5	4	3	2	1
10	8	6	4	2
15	12	9	6	3
20	16	12	8	4
25	20	15	10	5



5	10	15	20	25
4	8	12	16	20
3	6	9	12	15
2	4	6	8	10
1	2	3	4	5

25	20	15	10	5
20	16	12	8	4
15	12	9	6	3
10	8	6	4	2
5	4	3	2	1

On somme ces 4 tables "cellule à cellule".

36	36	36	36	36
36	36	36	36	36
36	36	36	36	36
36	36	36	36	36
36	36	36	36	36

On obtient  $5^2$  (dim. du carré)  $\times 6^2$  (valeur magique).



Pourquoi ça marche ?

Tab. 1 - ligne  $k$  :  $k, 2k, 3k, \dots, nk$

Tab. 2 - ligne  $k$  :  $nk, (n-1)k, (n-2)k, \dots, k$

Tab. 3 - ligne  $k$  :  $n(n+1-k), (n-1)(n+1-k), \dots, n+1-k$

Tab. 4 - ligne  $k$  :  $n+1-k, 2(n+1-k), \dots, n(n+1-k)$

En sommant les cellules ligne  $k$ , col.  $j$ , on arrive à :

$$\underline{j k} + \underline{(n+1-j) k} + \underline{(n+1-j)(n+1-k)} + \underline{j(n+1-k)}$$

$$= j(n+1) + (n+1-j)(n+1)$$

$$= (n+1)^2 \rightarrow \text{Nbre magique d'encre !}$$

① Une fois  $(1+2+\dots+n)^2$  dev., on a fait deux manipulations d'indices. Quelle belle "coïncidence" !