BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS – RÉSOLUTIONS À LA MAIN

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LaTeX, disponible sur la page ***https://github.com/bc-writing/drafts.***

Mentions « légales »

Table des matières

Date: 25 Jan. 2024 – 1^er^ Fév. 2024.

1. Ce qui nous intéresse

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers » [1], Paul Erdos démontre que pour tout couple $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit de $(k+1)$ entiers consécutifs $\prod_{i=0}^{k}(n+i)$ n'est jamais le carré d'un entier.

Dans ce document, nous proposons quelques cas particuliers résolus de façon « adaptative » à la sueur des neurones.

2. Notations utilisées

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ et ${}^2\mathbb{N}_* = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
- $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k}(n+i)$. Par exemple, nous avons $\pi_n^0 = n$ et $\pi_n^1 = n(n+1)$.
- $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
- $\forall (p\,;n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p-adique de n, c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n, contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.
- $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m.
- $2\,\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
- $2\,\mathbb{N}+1$ désigne l'ensemble des nombres naturels impairs.
- $(a \pm b)$ est un raccourci pour $(a+b)(a-b)$.

3. Avec 1 seul facteur

Via $N^2 - M^2 = (N-M)(N+M)$, il est immédiat de noter que $\forall (N,M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $N > M$, alors $N^2 - M^2 \geq 3$. Le fait suivant précise ceci.

Fait 3.1. *$\forall (N,M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $N > M$, alors $N^2 - M^2 = \sum_{k=M+1}^{N}(2k-1)$.*
En particulier, $N^2 - M^2 \geq 3$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser $N^2 = \sum_{k=1}^{N}(2k-1)$. □

Bien que simple, le fait suivant va nous rendre de grands services dans la suite.

Fait 3.2. *$\forall n \in {}^2\mathbb{N}_*$, s'il existe $m \in {}^2\mathbb{N}_*$ tel que $n = fm$ alors $f \in {}^2\mathbb{N}_*$.*

Démonstration. Il suffit de passer via les décompositions en facteurs premiers de n, m et f. □

4. Avec 2 facteurs

Fait 4.1. *$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1) \notin {}^2\mathbb{N}$.*

Démonstration. Il suffit de noter que $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$. □

Preuve alternative no.1. Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Clairement $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons : $v_p(\pi_n^1) \in 2\mathbb{N}$. Or $p \in \mathbb{P}$ ne peut diviser à la fois n et $n+1$. Nous savons donc que $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+1) \in 2\mathbb{N}$, autrement dit $(n, n+1) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. D'après le fait 3.1, nous savons que ceci est impossible. □

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).

Preuve alternative no.2. Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) = N^2$ où $N \in \mathbb{N}^*$. Les équivalences suivantes donnent alors une contradiction.

$$
\begin{aligned}
& n(n+1) = N^2 \\
\iff\ & 2\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{N} (2k-1) && n(n+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k \text{ et } N^2 = \sum_{k=1}^{N} (2k-1)\,. \\
\iff\ & \sum_{k=1}^{n} 2k = \sum_{k=1}^{N} 2k - N \\
\iff\ & \sum_{k=n+1}^{N} 2k - N = 0 && N > n \\
\iff\ & \sum_{k=n+1}^{N-1} 2k + N = 0 && N > 0 \text{ rend impossible la dernière égalité.}
\end{aligned}
$$

□

5. Avec 3 facteurs

Fait 5.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Posant $m = n+1$, nous avons $\pi_n^2 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Comme $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\pi_n^2) \in 2\mathbb{N}$, et comme de plus $p \in \mathbb{P}$ ne peut diviser à la fois m et m^2-1 , nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(m^2-1) \in 2\mathbb{N}$, d'où $(m, m^2-1) \in {}^2\mathbb{N}_* \times {}^2\mathbb{N}_*$. Or, d'après le fait 3.1, $m^2 - 1 \in {}^2\mathbb{N}$ est impossible. □

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Comme $p \in \mathbb{P}_{>2}$ ne peut diviser au maximum qu'un seul des trois facteurs n , $(n+1)$ et $(n+2)$, nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}_{>2}$, $\forall i \in [\![0\,;2]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$. Mais que se passe-t-il pour $p = 2$?

Supposons d'abord $n \in 2\mathbb{N}$.

- Posant $n = 2m$, nous avons $\pi_n^2 = 4m(2m+1)(m+1)$, d'où $m(2m+1)(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Comme $v_2(2m+1) = 0$, nous savons que $2m+1 \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Donc $m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$ via le fait 3.2, mais le fait 4.1 interdit cela.

Supposons maintenant $n \in 2\mathbb{N}+1$.

- Nous savons que $n \in {}^2\mathbb{N}_*$ via $v_2(n) = 0$.
- Dès lors, on obtient $(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$, mais de nouveau ceci contredit le fait 4.1. □

6. Avec 4 facteurs

Fait 6.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Nous pouvons ici faire les manipulations algébriques naturelles suivantes qui cherchent à obtenir le même coefficient pour n dans chaque parenthèse.

$$
\begin{aligned}
\pi_n^3 &= n(n+3) \cdot (n+1)(n+2) \\
&= (n^2+3n) \cdot (n^2+3n+2) \\
&= m(m+2) && m = n^2 + 3n \\
&= m^2 + 2m \\
&= (m+1)^2 - 1
\end{aligned}
$$

Comme $m > 0$, d'après le fait 3.1, $(m+1)^2 - 1 \notin {}^2\mathbb{N}$, c'est-à-dire $\pi_n^3 \notin {}^2\mathbb{N}$. □

Une preuve alternative. En « symétrisant » certaines expressions, nous obtenons les manipulations algébriques suivantes.

$$
\begin{aligned}
\pi_n^3 &= n(n+1)(n+2)(n+3) \\
&= \left(x \pm \frac{3}{2}\right)\left(x \pm \frac{1}{2}\right) && x = n + \frac{3}{2} \\
&= \left(x^2 - \frac{9}{4}\right)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \\
&= (y \pm 1) && y = x^2 - \frac{5}{4} \text{ où } \frac{5}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} + \frac{1}{4}\right). \\
&= y^2 - 1 \\
&= \left(\left(n + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right)^2 - 1 \\
&= \left(n^2 + 3n + 1\right)^2 - 1
\end{aligned}
$$

□

7. Avec 5 facteurs

Fait 7.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $\forall i \in [\![0\,;4]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$. Pour $p = 2$ et $p = 3$, nous avons les alternatives suivantes pour chaque facteur $(n+i)$ de π_n^3 .

- **[A 1]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A 2]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$
- **[A 3]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times 2\mathbb{N}$
- **[A 4]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$

Comme nous avons cinq facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions très facilement.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 1]** .

  Dans ce cas, on sait juste que $(n+i, n+i') \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Or $n \notin {}^2\mathbb{N}$ puisque sinon nous aurions $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$ via $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$, mais ceci ne se peut pas d'après le fait 6.1. De même, $n+4 \notin {}^2\mathbb{N}$. Dès lors, nous avons $\{n+i, n+i'\} \subseteq \{n+1, n+2, n+3\}$ qui donne deux carrés parfaits non nuls éloignés de moins de 3 , et ceci contredit le fait 3.1.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 2]** .

  Dans ce cas, le couple de facteurs est $(n, n+3)$, ou $(n+1, n+4)$.

  (1) Supposons d'abord que n et $(n+3)$ vérifient **[A 2]** .
  Comme $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+3) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(n) \in 2\mathbb{N}+1$ et $v_3(n+3) \in 2\mathbb{N}+1$, nous avons $n = 3N^2$ et $n+3 = 3M^2$ où $(N, M) \in \big(\mathbb{N}^*\big)^2$. Or, ceci donne $3 = 3M^2 - 3N^2$, puis $M^2 - N^2 = 1$ qui contredit le fait 3.1.

  (2) De façon analogue, on ne peut pas avoir $(n+1)$ et $(n+4)$ vérifiant **[A 2]** .

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 3]**.

  Comme dans le point précédent, c'est impossible car on aurait $2 = 2M^2 - 2N^2$, ou $4 = 2M^2 - 2N^2$. En effet, ici les couples possibles sont $(n, n+2)$, $(n, n+4)$, $(n+2, n+4)$ et $(n+1, n+3)$ [2].

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 4]**.

  Ceci donne deux facteurs différents divisibles par 6, mais c'est impossible. □

Bien que longue, la preuve suivante est simple à comprendre car elle ne fait que dérouler le fil des faits découverts.

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Posant $m = n+2$, nous avons $\pi_n^4 = (m \pm 2)(m \pm 1)m = m(m^2-1)(m^2-4)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. On notera dans la suite $u = m^2 - 1$ et $q = m^2 - 4$.

Supposons d'abord que $m \in {}^2\mathbb{N}_*$.

- De $muq \in {}^2\mathbb{N}_*$, nous déduisons $uq \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Comme $u - q = 3$, nous savons que $u \wedge q \in \{1, 3\}$.
- Si $u \wedge q = 1$, alors $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, d'où $(u, q) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Le fait 3.1 impose d'avoir $(u, q) = (4, 1)$, d'où $m^2 - 1 = 4$, mais ceci est impossible [3].
- Si $u \wedge q = 3$, alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(u) \in 2\mathbb{N}+1$ et $v_3(q) \in 2\mathbb{N}+1$. Donc $u = 3U^2$ et $q = 3Q^2$ avec $(U, Q) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$. Or $u - q = 3$ donne $U^2 - Q^2 = 1$, et le fait 3.1 nous indique une contradiction.

Supposons maintenant que $m \notin {}^2\mathbb{N}_*$.

- Montrons que $u \notin {}^2\mathbb{N}$ et $q \notin {}^2\mathbb{N}$.

  (1) $u \in {}^2\mathbb{N}$ donne les équivalences logiques suivantes qui lèvent une contradiction.

  $$\begin{aligned} m^2 - 1 \in {}^2\mathbb{N} &\iff \exists r \in \mathbb{N} \,.\, \left(m^2 - 1 = r^2\right) \\ &\iff \exists r \in \mathbb{N} \,.\, \left(m^2 - r^2 = 1\right) \\ &\iff m = 1 \end{aligned}$$

  Via le fait 3.1, mais ceci contredit $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

  (2) $q \in {}^2\mathbb{N}$ donne les équivalences logiques suivantes qui lèvent une contradiction.

  $$\begin{aligned} m^2 - 4 \in {}^2\mathbb{N} &\iff \exists r \in \mathbb{N} \,.\, \left(m^2 - r^2 = 4\right) \\ &\iff m = 2 \end{aligned}$$

  Voir le fait 3.1, mais ceci contredit $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

- Donc $m = \alpha M^2$, $u = \beta U^2$, $q = \gamma Q^2$ où $(M, U, Q) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^3$, et $(\alpha, \beta, \gamma) \in \left(\mathbb{N}_{>1}\right)^3$, le dernier triplet étant formé d'entiers sans facteur carré.
- Notons que $\beta \neq \gamma$ car, dans le cas contraire, $3 = u - q = \beta\left(U^2 - Q^2\right)$ fournirait $\beta = 3$ puis $U^2 - Q^2 = 1$, et ceci contredirait le fait 3.1.
- Nous avons $m \wedge u = 1$, $m \wedge q \in \{1, 2, 4\}$ et $u \wedge q \in \{1, 3\}$ avec $m \wedge u = m \wedge q = u \wedge q = 1$ impossible car sinon on aurait $(m, u, q) \in \left({}^2\mathbb{N}\right)^3$ via $muq \in {}^2\mathbb{N}$.
- Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $\left(v_p(m), v_p(u), v_p(q)\right) \in \left(2\mathbb{N}\right)^3$.

2. Rien n'empêche d'avoir n, $(n+2)$ et $(n+4)$ vérifiant tous les trois **[A 3]**.

3. On peut aussi noter que le fait 5.1 lève une contradiction car nous avons $m \in {}^2\mathbb{N}$ et $u \in {}^2\mathbb{N}$ qui donnent $(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$

- Les points précédents donnent $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$ avec de plus $\beta \neq \gamma$, ainsi que $\alpha \wedge \beta = 1$, $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2\}$ et $\beta \wedge \gamma \in \{1, 3\}$. Notons au passage que $\alpha \wedge \beta = 1$ implique $(\alpha, \beta) = (2, 3)$, ou $(\alpha, \beta) = (3, 2)$. Via le tableau « mécanique » ci-après, nous obtenons que forcément $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$ ou $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$. Le plus dur est fait !

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	*Statut*
2	3	2	1	2	1	✓
2	3	6	1	2	3	✓
3	2	3	1	3	1	☒
3	2	6	1	3	2	☒

- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$ nous donne $m = 2M^2$, $u = 3U^2$ et $q = 2Q^2$, d'où la contradiction $3 \cdot 4M^2U^2Q^2 \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$ nous donne $m = 2M^2$, $m^2 - 1 = 3U^2$ et $m^2 - 4 = 6Q^2$, mais ce qui suit lève une autre contradiction.
  - Travaillons modulo 3. Comme $m = 2M^2$, nous avons $m \equiv 0$ ou $m \equiv -1$. Or $m^2 - 1 = 3U^2$ donne $m^2 \equiv 1$, d'où $m \equiv -1$, puis $3 \mid m - 2$, et enfin $6 \mid m - 2$ puisque m est pair.
  - Posant $m - 2 = 6r$ et notant $s = m + 2$, nous avons $6rs = 6Q^2$, puis $rs = Q^2$.
  - $s \notin {}^2\mathbb{N}$, car dans le cas contraire, nous aurions $(m-2)(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$ via $(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) \in {}^2\mathbb{N}$, mais ceci ne se peut pas d'après le fait 6.1.
  - Les deux résultats précédents donnent $(\pi, R, S) \in \mathbb{N}_{>1} \times \left(\mathbb{N}^*\right)^2$ tel que $r = \pi R^2$ et $s = \pi S^2$ avec π sans facteur carré.
  - $4 = s - 6r = \pi(S^2 - 6R^2)$ donne $\pi = 2$, d'où $m + 2 = 2S^2$.
  - Finalement, $m = 2M^2$ et $m + 2 = 2S^2$ donnent $2 = 2(S^2 - M^2)$, soit $1 = S^2 - M^2$, ce qui contredit le fait 3.1. □

8. Avec 6 facteurs

Fait 8.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^5 \notin {}^2\mathbb{N}$.

La démonstration suivante se trouve dans l'article « Solution of a Problem »[4] de G. W. Hill et J. E. Oliver. Une petite simplification a été faite pour arriver à $\pi_n^5 = (a-4)a(a+2)$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}$. Commençons par de petites manipulations algébriques où l'on cherche à faire apparaître le même coefficient pour n dans chaque parenthèse.

$$\begin{aligned} \pi_n^5 &= n(n+5) \cdot (n+1)(n+4) \cdot (n+2)(n+3) \\ &= (n^2+5n)(n^2+5n+4)(n^2+5n+6) && x = n^2 + 5n \in \mathbb{N}_{\geq 6} \\ &= x(x+4)(x+6) && a = x + 4 \in \mathbb{N}_{\geq 10} \\ &= (a-4)a(a+2) \end{aligned}$$

Nous avons donc $a \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $a(a+2)(a-4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Posons alors $a = \alpha A^2$ où $(\alpha, A) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$ avec α sans facteur carré. Nous avons alors $a = \alpha(\alpha A^2+2)(\alpha A^2-4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Comme α est sans facteur carré, nous devons avoir $\alpha \mid (\alpha A^2+2)(\alpha A^2-4)$, d'où $\alpha \mid 8$, et finalement $\alpha \in \{1, 2\}$[5].
Nous allons voir que ceci est impossible.
Supposons avoir $\alpha = 1$.

4. The Analyst (1874).
5. On comprend ici le choix d'avoir $\pi_n^5 = (a-4)a(a+2)$.

- Notons les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} & (A^2+2)(A^2-4) \in {}^2\mathbb{N}_* \\ \iff & (u+3)(u-3) \in {}^2\mathbb{N}_* \quad \text{\textit{u} = A^2 - 1 \textit{ où } -1 = \frac{2-4}{2}} \\ \iff & u^2 - 9 \in {}^2\mathbb{N}_* \end{aligned}$$

- Ensuite, prenant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = u^2 - 9$, comme $u^2 - m^2 = \sum_{k=m+1}^{w} (2k-1)$, on a $(u, m) = (5, 4)$ [6]. On aboutit alors à la contradiction suivante.

$$\begin{aligned} & u = 5 \\ \iff & A^2 - 1 = 5 \\ \iff & A^2 = 6 \quad 6 \notin {}^2\mathbb{N} \,. \end{aligned}$$

Supposons avoir $\alpha = 2$.

- Notons l'équivalence suivante.

$$\begin{aligned} & 2(2A^2+2)(2A^2-4) \in {}^2\mathbb{N}_* \\ \iff & 2(A^2+1)(A^2-2) \in {}^2\mathbb{N}_* \quad \textit{Via } 4 \cdot 2(A^2+1)(A^2-2) \,. \end{aligned}$$

- Ensuite, en travaillant modulo 3, nous avons $2(A^2+1)(A^2-2) \equiv -4 \equiv -1$ qui ne correspond pas à un carré modulo 3. □

Bien que très longue, la preuve suivante est simple à comprendre car elle ne fait que dérouler le fil des faits découverts.

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} & \pi_n^5 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \\ \iff & \pi_n^5 = \left(x \pm \frac{5}{2}\right)\left(x \pm \frac{3}{2}\right)\left(x \pm \frac{1}{2}\right) && x = n + 2 + \frac{1}{2} \\ \iff & 2^6\pi_n^5 = (y \pm 5)(y \pm 3)(y \pm 1) && y = 2x \\ \iff & 2^6\pi_n^5 = (z-25)(z-9)(z-1) && z = y^2 \\ \iff & 2^6\pi_n^5 = (u-8)(u+8)(u+16) && u = z - 17 \textit{ où } 17 = \frac{25+9}{2} \,. \end{aligned}$$

Notant $a = u - 8$, $b = u + 8$ et $c = u + 16$, où $u = (2n+5)^2 - 17 \in 2\mathbb{N}$, nous avons les faits suivants.

- $(a, b, c) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^3$ et $abc \in {}^2\mathbb{N}_*$ car $(2^6, \pi_n^5) \in \left({}^2\mathbb{N}_*\right)^2$.
- $a \wedge b \mid 16$ via $b - a = 16$.
- $a \wedge c \mid 24$ via $c - a = 24$.
- $b \wedge c \mid 8$ via $c - b = 8$.
- En particulier, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) \in \left(2\mathbb{N}\right)^3$.

Démontrons qu'aucun des trois entiers a, b et c ne peut être un carré parfait.

6. Noter que $2u - 1 \leq 9$ implique $u \in [\![0\,;5]\!]$. Ceci permet d'analyser tous les cas mentalement.

- Commençons par supposer que $(a,b,c) \in {}^2\mathbb{N}_* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

  Dans ce cas, $bc \in {}^2\mathbb{N}_*$, soit $(u+8)(u+16) \in {}^2\mathbb{N}_*$. En posant $w = u+12$, on arrive à $(w-4)(w+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$, soit $w^2 - 16 \in {}^2\mathbb{N}_*$. Notant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = w^2 - 16$, nous arrivons à $w^2 - m^2 = 16$. D'après le fait 3.1, $w^2 - m^2 = \sum\limits_{k=m+1}^{w} (2k-1)$. Ceci n'est possible que si $(w,m) = (5,3)$ [7]. Or $u \in 2\mathbb{N}$ donne $w \in 2\mathbb{N}$, d'où une contradiction.

- Supposons maintenant que $(a,b,c) \in \mathbb{N}^* \times {}^2\mathbb{N}_* \times \mathbb{N}^*$.

  Dans ce cas, $ac \in {}^2\mathbb{N}_*$, soit $(u-8)(u+16) \in {}^2\mathbb{N}_*$. En posant $w = u+4$, on arrive à $(w-12)(w+12) \in {}^2\mathbb{N}_*$, soit $w^2 - 144 \in {}^2\mathbb{N}_*$. Notant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = w^2 - 144$, nous arrivons à $w^2 - m^2 = 144$, d'où $w^2 - m^2 = \sum\limits_{k=m+1}^{w} (2k-1)$. Ceci n'est possible que si $(w,m) \in \{(13,5), (15,9), (20,16), (37,35)\}$ [8]. Ici aussi, $u \in 2\mathbb{N}$ donne $w \in 2\mathbb{N}$, donc $(w,m) = (20,16)$, mais les équivalences suivantes lèvent une contradiction.

  $$\begin{aligned} u+4 = 20 &\iff (2n+5)^2 - 17 = 24 \\ &\iff (2n+5)^2 = 41 \end{aligned} \quad 41 \notin {}^2\mathbb{N}$$

- Supposons enfin que $(a,b,c) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times {}^2\mathbb{N}_*$.

  Dans ce cas, $ab \in {}^2\mathbb{N}_*$, soit $(u-8)(u+8) \in {}^2\mathbb{N}_*$, c'est-à-dire $u^2 - 64 \in {}^2\mathbb{N}_*$. Notant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = u^2 - 64$, nous arrivons à $u^2 - m^2 = 64$. Ceci n'est possible que si $(u,m) \in \{(10,6), (17,15)\}$. Comme $u \in 2\mathbb{N}$, forcément $(u,m) = (10,6)$, mais les équivalences suivantes lèvent une contradiction.

  $$\begin{aligned} u = 10 &\iff (2n+5)^2 - 17 = 10 \\ &\iff (2n+5)^2 = 27 \end{aligned} \quad 27 \notin {}^2\mathbb{N}$$

Nous avons donc $a = \alpha A^2$, $b = \beta B^2$ et $c = \gamma C^2$ avec $(A,B,C) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^3$, et $(\alpha,\beta,\gamma) \in \left(\mathbb{N}_{>1}\right)^3$ un triplet d'entiers sans facteurs carrés. Nous avons les faits suivants.

- $\alpha \wedge \beta \in \{1,2\}$ d'après $a \wedge b \mid 16$.
- $\alpha \wedge \gamma \in \{1,2,3\}$ d'après $a \wedge c \mid 24$.
- $\beta \wedge \gamma \in \{1,2\}$ d'après $b \wedge c \mid 8$.
- $\{\alpha,\beta,\gamma\} \subseteq \{2,3,6\}$ car $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) \in \left(2\mathbb{N}\right)^3$.

En fait, α, β et γ sont différents deux à deux.

- Démontrons que $\alpha \neq \beta$.
  Dans le cas contraire, $16 = b - a = \alpha(B^2 - A^2)$ et $\alpha > 1$ donnent $B^2 - A^2 \in \{1,2,4,8\}$. Or nous avons les impossibilités suivantes.
  (1) $B^2 - A^2 = 1$ et $B^2 - A^2 = 2$ contredisent le fait 3.1.
  (2) $B^2 - A^2 = 4$ n'est possible que si $(B,A) = (2,0)$.
  (3) $B^2 - A^2 = 8$ n'est possible que si $(B,A) = (3,1)$ et $\alpha = 2$. Ceci donne $a = 2$, puis $u = 10$, mais nous avons vu que ceci était impossible.

7. Noter que l'on doit avoir $2w - 1 \leq 16$, d'où $w \in [\![0\,;8]\!]$.
8. Comme $2w - 1 \leq 144$ donne $w \in [\![0\,;72]\!]$, il suffit de faire appel à un petit programme pour obtenir brutalement toutes les valeurs possibles.

- Nous avons aussi $\beta \neq \gamma$.
  Dans le cas contraire, $8 = c - b = \beta(C^2 - B^2)$ et $\beta > 1$ donnent $C^2 - B^2 \in \{1, 2, 4\}$, mais ce qui précède ne laisse aucun choix possible.
- Enfin, $\alpha \neq \gamma$.
  Dans le cas contraire, $C^2 - A^2 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ car $24 = c - a = \alpha(C^2 - A^2)$ et $\alpha > 1$. Nous obtenons alors les impossibilités suivantes.
  (1) $C^2 - A^2 \in \{1, 2, 4\}$ est à rejeter comme précédemment.
  (2) $C^2 - A^2 = 3$ n'est possible que si $(C, A) = (2, 1)$ et $\alpha = 8$, mais les équivalences suivantes lèvent une contradiction.

$$\begin{aligned} a = 8 &\iff u = 16 \\ &\iff (2n+5)^2 - 17 = 16 \\ &\iff (2n+5)^2 = 33 \end{aligned}$$

$33 \notin {}^2\mathbb{N}$

  (3) $C^2 - A^2 = 6$ est impossible.
  (4) $C^2 - A^2 = 8$ n'est possible que si $(C, A) = (3, 1)$ et $\alpha = 3$, mais les équivalences suivantes lèvent une contradiction.

$$\begin{aligned} a = 3 &\iff u = 11 \\ &\iff (2n+5)^2 - 17 = 11 \\ &\iff (2n+5)^2 = 28 \end{aligned}$$

$28 \notin {}^2\mathbb{N}$

  (5) $C^2 - A^2 = 12$ n'est possible que si $(C, A) = (4, 2)$ et $\alpha = 2$, mais ceci donnerait $a = 8$, or nous savons que cela est impossible.

Comme $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$, $\alpha \wedge \beta \in \{1, 2\}$, $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2, 3\}$ et $\beta \wedge \gamma \in \{1, 2\}$, et comme de plus α , β et γ sont différents deux à deux, il ne nous reste plus qu'à analyser les cas suivants.

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	*Statut*
2	3	6	1	2	3	⊠
2	6	3	2	1	3	⊠
3	2	6	1	3	2	✓
3	6	2	3	1	2	⊠
6	2	3	2	3	1	✓
6	3	2	3	2	1	⊠

Traitons les deux cas restants en nous souvenant que $a = u - 8$, $b = u + 8$ et $c = u + 16$, où $u = (2n+5)^2 - 17 \in 2\mathbb{N}$.

- Supposons $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, 2, 6)$, autrement dit $a = 3A^2$, $b = 2B^2$ et $c = 6C^2$.
  Travaillons modulo 3 afin de lever une contradiction.
  (1) $a \equiv u - 2$ et $a \equiv 3A^2 \equiv 0$ donnent $u \equiv 2$.
  (2) D'autre part, $b \equiv 2B^2 \equiv 0$ ou 2 via les carrés modulo 3 . Or $b \equiv u + 2 \equiv 1$ lève une contradiction.
- Supposons $(\alpha, \beta, \gamma) = (6, 2, 3)$, autrement dit $a = 6A^2$, $b = 2B^2$ et $c = 3C^2$.
  La preuve précédente s'adapte sans difficulté puisque que $a \equiv 6A^2 \equiv 0$ et $b \equiv 2B^2$ modulo 3 .

□

9. Sources utilisées

(1) Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré *« n(n+1)...(n+k) est un carré ? »* sur le site `lesmathematiques.net` .

La démonstration du fait 7.1 via le principe des tiroirs trouve sa source dans cet échange.

(2) L'article *« Le produit de 5 entiers consécutifs n'est pas le carré d'un entier. »* de T. Hayashi, Nouvelles Annales de Mathématiques, est consultable via Numdam , la bibliothèque numérique française de mathématiques.

Cet article a inspiré la preuve alternative du fait 7.1.

(3) Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré *« product of six consecutive integers being a perfect numbers »* sur le site `https://math.stackexchange.com` .

La démonstration courte du fait 8.1 est donné dans cet échange. Vous y trouverez aussi un très joli argument basé sur les courbes elliptiques rationnelles.

10. AFFAIRE À SUIVRE...