

BROUILLON - EN FINIR AVEC LA FORME CANONIQUE DU TRINÔME... MANQUE DES DESSINS !

CHRISTOPHE BAL

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



TABLE DES MATIÈRES

- | | | |
|----|---|---|
| 1. | Critère pour la non existence d’une racine réelle | 2 |
| 2. | Quand au moins une racine réelle existe | 3 |

1. CRITÈRE POUR LA NON EXISTENCE D'UNE RACINE RÉELLE

Soient $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$ et \mathcal{C}_f la représentation graphique de f vue comme fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Graphiquement on constate vite que \mathcal{C}_f possède un axe de symétrie $d : x = m$ où m se calcule comme suit où $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(\alpha) = f(\beta) &\iff a\alpha^2 + b\alpha + c = a\beta^2 + b\beta + c \\ &\iff a(\alpha^2 - \beta^2) + b(\alpha - \beta) = 0 \\ &\iff (\alpha - \beta)(a(\alpha + \beta) + b) = 0 \quad \boxed{1} \\ &\iff \frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

Nécessairement $m = -\frac{b}{2a}$ ¹. Il est aussi aisé de conjecturer que $f(m)$ est un extremum de f vue comme fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Ceci rend naturel le calcul suivant qui part de la factorisation $\boxed{1}$ précédente.

$$\begin{aligned} f(x) - f(m) &= (x - m)(ax + am + b) \quad \left\{ \begin{array}{l} m = -\frac{b}{2a} \iff 2am = -b \\ \iff am + b = -am \end{array} \right. \\ &= (x - m)(ax - am) \\ &= a(x - m)^2 \end{aligned}$$

Ce qui précède montre aussi que si $a > 0$ alors $f(m)$ est un minimum et si $a < 0$ alors $f(m)$ est un maximum. On peut maintenant savoir quand f n'admet aucun zéro réel.

(1) **Cas 1 : $a > 0$**

f n'a pas de zéro si et seulement si $f(m) > 0$. Voyons ce que cela implique.

$$\begin{aligned} f(m) > 0 &\iff am^2 + bm + c > 0 \\ &\iff a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - b \cdot \frac{b}{2a} + c > 0 \\ &\iff -\frac{b^2}{4a} + c > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 4a > 0 \\ \iff -b^2 + 4ac > 0 \end{array} \right. \\ &\iff -b^2 + 4ac > 0 \end{aligned}$$

(2) **Cas 2 : $a < 0$**

f n'a pas de zéro si et seulement si $f(m) < 0$. Cela implique ce qui suit.

$$\begin{aligned} f(m) < 0 &\iff -\frac{b^2}{4a} + c < 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 4a < 0 \\ \iff -b^2 + 4ac > 0 \end{array} \right. \\ &\iff -b^2 + 4ac > 0 \end{aligned}$$

Nous retombons sur le critère classique suivant : $ax^2 + bx + c$ n'a pas de zéro réel si et seulement si $-b^2 + 4ac > 0$, soit de façon équivalente si et seulement si $b^2 - 4ac < 0$.

Notons que notre mode de raisonnement ne permet pas de privilégier le 2^e critère, ce dernier est en fait naturel uniquement si l'on passe via la forme canonique, ou bien lorsque l'on trouvera des formules calculant les zéros de f lorsque ces derniers existent (*c'est ce que nous allons faire dans la section suivante*).

1. Nous n'avons pas prouver la propriété de symétrie car nous n'en aurons pas besoin. Ceci se fait en montrant que $\forall \delta \in \mathbb{R}, f(m - \delta) = f(m + \delta)$. Cette égalité est évidente dès lors que l'on a $f(x) - f(m) = a(x - m)^2$, une identité que nous allons prouver bientôt.

2. QUAND AU MOINS UNE RACINE RÉELLE EXISTE

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$ tel qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ annulant f . La section précédente implique que nécessairement $b^2 - 4ac \geq 0$.

La factorisation 1 de $f(\alpha) - f(\beta)$ vue dans la section précédente nous donne ici sans effort : $f(x) - f(\alpha) = (x - \alpha)(a(x + \alpha) + b)$. On en déduit l'existence d'un autre zéro $\beta \in \mathbb{R}$, éventuellement égal à α , tel que $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$. Ceci implique, après développement, que $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ et $\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$.

Exploitions ici aussi l'usage de $m = -\frac{b}{2a}$ de sorte que $\frac{\alpha + \beta}{2} = m$ (*ceci est aussi une conséquence de l'égalité $f(\alpha) = f(\beta)$*). On va paramétrer notre problème via une seule inconnue² grâce à m . Pour cela posons $\delta = \frac{\beta - \alpha}{2}$ de sorte que $\alpha = m - \delta$ et $\beta = m + \delta$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} &\iff (m - \delta)(m + \delta) = \frac{c}{a} \\
 &\iff m^2 - \delta^2 = \frac{c}{a} \\
 &\iff \delta^2 = m^2 - \frac{c}{a} \\
 &\iff \delta^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
 &\iff \delta^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
 &\iff \delta = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \left. \vphantom{\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \right\} b^2 - 4ac \geq 0
 \end{aligned}$$

Nous avons donc établi que si α et β sont deux zéros, éventuellement confondus, de f alors $b^2 - 4ac \geq 0$ et les zéros sont $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. La réciproque est immédiate.

2. Cette astuce permet en fait de diminuer par deux le nombre d'inconnues lorsque l'on cherche les racines d'un polynôme p , de degré pair forcément, tel que \mathcal{C}_p ait un axe de symétrie.