Le conjugué $z \mapsto \bar{z}$ est une fct de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, continue sur $\mathbb{C}$ ($\leadsto$ app. linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$)

$\overline{e^z} = \overline{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(z)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \overline{S_n(z)}$ par continuité

$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ car $\overline{S_n(z)} = \overline{\sum\limits_0^n \frac{z^k}{k!}} = \sum\limits_0^n \frac{\bar{z}^k}{k!}$

c) $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)\ |e^{x+iy}| = e^x$

$|e^z| = \sqrt{e^z . \overline{e^z}} = (e^{z+\bar{z}})^{1/2} = (e^{2x})^{1/2} = |e^x| = e^x$

b) $(\forall t \in \mathbb{R}), |e^{it}| = 1$

$x = 0$ dans le c).

Rq.

Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, a^z avec $z \in \mathbb{C}$ défini par $e^{\ln a . z}$

2) Fonctions circulaires (sinus, cosinus)

cos et sin construits à l'aide de séries entières, et de exp complexe.

Déf.

On pose $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ si $x \in \mathbb{R}$.

(Formules d'Euler)

$2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$

$\pm$ $2i \sin x = e^{ix} - e^{ix}$

$\cos x + i \sin x = e^{ix}$

$\cos x - i \sin x = e^{-ix}$

$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \overline{e^{ix}} = e^{-ix}$,

donc $\cos(x)$ est réel, et $\sin x$ est réel

$\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix})$

$\sin x = \mathrm{Im}(e^{ix})$

$x \longrightarrow -x \quad \left| \begin{array}{l} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} \cos x &= \mathrm{Re}(e^{ix}) \\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_0^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_0^{+\infty} (i)^n \frac{x^n}{n!}\right) \end{aligned} \quad \text{or } i^n = \begin{cases} (-1)^p & \text{si } n = 2p \\ (-1)^p\, i & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

$$\cos x = \sum_0^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

De même,

$$\sin x = \sum_0^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

On a deux séries entières de R.C $= +\infty$, donc c.f. généraux $\sin$ et $\cos$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$x = 0 \qquad \cos 0 = 1$

$\qquad\qquad \sin 0 = 0$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |e^{ix}| = 1 \quad (\text{cf. } 4e)$$

$$|\cos x + i \sin x| = 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$\cos x \in \mathbb{R}$, $\sin x \in \mathbb{R}$

$(\forall x \in \mathbb{R})\quad -1 \leq \cos x \leq 1$

$\qquad\qquad\qquad -1 \leq \sin x \leq 1$

$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = e^{ia} . e^{ib}$

$= \cos(a+b) + i \sin(a+b)$

On identifie.

$\cos(a+b) = \cos a . \cos b - \sin a . \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a . \cos b + \sin b . \cos a$

On retrouve ainsi toutes les formules usuelles :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

Moivre : $\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos\theta + i \sin\theta)^n$

$(\forall x \in \mathbb{R})\quad (\sin x)' = \left(\sum_0^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \ldots = \cos x$

De même, $(\cos x)' = -\sin x$

$(\forall x \in \mathbb{R})\quad \sin' x = \cos x$

$\qquad\qquad\quad \cos' x = -\sin x$

$$\cos x = \sum_0^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_0^{+\infty} u_n(x)$$

$u_n(x) = (-1)^n v_n(x)$ avec $v_n \geq 0$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} \leq 1$ à partir d'un certain rang.

$x^2 \leq (2n+1)(2n+2)$

La suite v_n ↘ à partir de $n=0$ sur l'intervalle $[0,\sqrt{2}]$

——————————————— $n=1$ ——————————————— $[0,\sqrt{12}]$

$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\simeq 3{,}464\ldots$

Sur $[0,\sqrt{12}]$, on peut appliquer le th. spécial des séries alternées à partir de $n=1$.

$(\forall x \in [0,\sqrt{12}])$ $|S(x) - S_n(x)| \leq v_{n+1}(x)$, $n \geq 1$

$\cos x$ est compris entre $S_1(x)$ et $S_2(x)$

$(\forall x \in [0,\sqrt{12}])$ $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

$x = 2$ $\cos 2 \leq -\frac{1}{3} < 0$

$\cos(0) = 1 > 0$

T.V.I : la fct cos s'annule sur $]0;2[$

$\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$

$\cos^{-1}\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ car cos continue.

$\{x \in \mathbb{R} / \cos x = 0\}$

$\mathbb{R}_+$ est un fermé de $\mathbb{R}$,

donc,

$A = \{x \in \mathbb{R}_+^* / \cos x = 0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$,

A fermé, $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A minoré par 0,

donc A possède une borne inf.

A fermé, donc $\operatorname{Inf} A \in A$, $\operatorname{Inf} A = \operatorname{Min} A$

Déf. : $\pi = 2 \times \min A$

$\cos(0) = 1 \Rightarrow 0 \notin A$
$\Rightarrow \frac{\pi}{2} > 0$

$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[, \ \cos x \neq 0 \\ \text{Or } \cos \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et } \cos(0) = 1 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \cos(x) > 0$ sur $[0; \frac{\pi}{2}[$

Or $\sin'(x) = \cos x$

x	0		$\pi/2$
$\cos x$		$+$	0
$\sin x$	0	$\nearrow$	1

$\cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$

$\Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{2} = \pm 1$

$\Rightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 1$ (tab. de variaᵒ)

$\cos' x = -\sin x$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$-\sin x$		$-$	
$\cos x$	1	$\searrow$	0

$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\sin x$
$= \cos x$

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin\frac{\pi}{2}\sin x + \cos\frac{\pi}{2}\cos x$
$= \sin x$

$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ (de la m̄ façon)
$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$
etc.....

$\left.\begin{array}{l} \sin(x + \pi) = -\sin x \\ \cos(x + \pi) = -\cos x \end{array}\right\} \Rightarrow \pi$ antipériode $\Rightarrow 2\pi$ période.

On peut tracer la courbe.

$(\forall x \in \mathbb{R})\ \ -1 \le \cos x \le 1$

$\cos \pi = -1$ et $\cos 0 = 1$

Le T.V.I donne : tout réel $\in [-1;1]$ est atteint par le cosinus / sinus.

$\underline{\cos(\mathbb{R}) = [-1;1]}$

Résolution de l'équation $\cos x = a$, $a \in [-1;1]$ fixé

cos $\searrow$ st sur $[0;\pi]$

x	0		π
$\cos$	1	$\searrow$	-1

$\exists!\, x_0$ tq $\cos(x_0) = a$ $\quad (x_0 = \text{Arccos}\, a)$

cos étant pair $\exists!\, x_0' \in [-\pi;0]$ $\cos(x_0') = +a$, $x_0' = -x_0$

Ainsi de suite.

$x = \pm x_0 + 2k\pi \iff \cos x = a$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

De même pour $\sin x = a$

$\exists!\, x_0 \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ $\sin x_0 = a$ $\quad (x_0 = \text{Arcsin}\, a)$

$\exists!\, x_0' \in [\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ $\sin x'_0 = a$, $x'_0 = \pi - x_0$

$$\sin x = a \iff x = \begin{cases} x_0 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \pi - x_0 + 2k\pi \end{cases}$$

Résolution de $e^{i\theta} = u$ avec $|u| = 1$ $\quad (\theta \in \mathbb{R}$ inconnu$)$

$e^{i\theta} = a + ib$ avec $a^2 + b^2 = 1$

$$\begin{cases} \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 = \cos^2\theta \end{cases}$$

$\theta = \theta_0 \pm 2k\pi$ (cère éq.)

$\Rightarrow$ $\sin \theta_0 = \pm b$

$\left.\begin{array}{l} \theta_0 \in [0;\pi] \\ \theta_0 \text{ si } b>0 \\ -\theta_0 \text{ si } b<0 \\ 0 \text{ si } b=0 \end{array}\right\} \theta = \theta_0' + 2k\pi$

$e^{i\theta} = u \iff \theta = \theta_0' + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ \theta_0' \in]-\pi;\pi]$

θ est dit un argument de u

$e^z = 1 \iff z = 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$e^z = e^a e^{ib}$ $\qquad$ $\mathrm{Ker}\ (\exp) = 2i\pi\mathbb{Z}$

$2i\pi$ est une période de l'exp. complexe.

$e^z e^{2i\pi} = e^z = e^{z+2i\pi}$

On a vu plus haut que $(\forall z \in \mathbb{C})$ $e^z \neq 0$

Prenons $Z \in \mathbb{C}^*$ $\qquad$ $Z = |Z|\, u = r e^{i\theta}$

$u = \dfrac{Z}{|Z|}$,

$\theta = \theta_0 + 2k\pi$

$Z = e^{\ln|Z| + i\theta} = e^{a+ib}$

$\mathrm{Im}\ (\exp) = \mathbb{C}^*$

(suite ...)