Good, 1

Suites de Goodstein

Source : "Théo. des Ens. et Log. Math."
J. Patarin chez ellipses

Mode de construc°

$$42 = 32 + 8 + 2$$
$$= 2^5 + 2^3 + 2$$
$$= 2^{2^2+1} + 2^{2+1} + 2$$

Ecriture "maxi-binaire".

$$42 \rightsquigarrow 42_0 := 2^{2^2+1} + 2^{2+1} + 2$$

On remplace les 2 par des 3, et on enlève 1.

$$42_1' = 3^{3^3+1} + 3^{3+1} + 3 - 1$$

$$42_1 := 3^{3^3+1} + 3^{3+1} + 2$$ ← OK : Ecriture qui est "maxi-triadique"

$$42_2' = 4^{4^4+1} + 4^{4+1} + 2 - 1 \quad (3 \rightsquigarrow 4)$$

$$42_2 := 4^{4^4+1} + 4^{4+1} + 1$$

$$42_3 := 5^{5^5+1} + 5^{5+1}$$

$$42_4' = 6^{6^6+1} + 6^{6+1} - 1$$ ← KO à cause du (-1).

Or $6^{6+1} = 1 + 5(1 + \dots + 6^6)$. Donc on arrive à

$$42_4 := 6^{6^6+1} + 5.6^6 + 5.6^5 + \dots + 5.6 + 5$$

$$42_5 := 7^{7^7+1} + 5.7^7 + 5.7^5 + \dots + 5.7 + 4$$

...

Définition

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on définit $(g_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ la $n^{\text{ième}}$ suite de Goodstein comme suit.

- $g_0^{(n)}$: écriture "maxi-binaire" de n.
- $g_{k+1}^{(n)}$ s'obtient récursivt à partir de $g_k^{(n)}$ comme suit.

  (i) $g_k^{(n)}$ est donné ss forme d'une écriture "maxi-$(k+2)$-adique".
  On remplace tous les $(k+2)$ par des $(k+3)$.

  (ii) Si on a une écriture "maxi-$(k+3)$-adique", on a obtenu $g_{k+1}^{(n)}$.
  Sinon, via la classique formule $\sum_1^n q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, on obtient $g_{k+1}^{(n)}$.

  (i) Le cas problématique sera toujours du type $\dots - 1$.

A priori, $(g_k^{(n)})_k$ grandit vite. En fait, non d'après le th. de Goodstein donné plus bas. Toutefois, pour $(g_k^{(4)})_k$, on a "déjà" une suite qui initialt croît très vite. La 1ère val. de k telle que $g_k^{(4)} = 0$ est $3 \cdot 2^{402653211} - 3 \simeq 10^{121210700}$ (selon la source).

Th. de Goodstein

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tq $k \geq k_0 \Rightarrow g_k^{(n)} = 0$

Démo. par l'absurde (via les ordinaux : voir remarque finale)

Supposons avoir $n \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall k$, $g_k^{(n)} > 0$.

$\forall k$, v_k est l'ordinal obtenu comme suit.

- On ordonne les prod. du type $a \cdot (k+2)^b$ où $a \in [\![1 ; k+2[\![$ sous la forme $(k+2)^b \cdot a$.
- $k+2 \rightsquigarrow \omega$ (ordinal associé à $\mathbb{N}$).

$2 \cdot \omega = \omega$
$\omega \cdot 2 > \omega$

Par exemple, 42_5 deviendrait $\tilde{V}_5 = \omega^{\omega^{\omega}+1} + \omega^{\omega}\cdot 5 + \omega^{5}\cdot 5 + \dots + \omega\cdot 5 + 4$.

On va mq $(V_k)_k$ est str. $\downarrow$, or ceci est impossible.

- Par déf., $\forall k$, $g_k^{(n)} = \underbrace{f_k(n)}_{\text{Partie avec les puissances de } (n+2).} + \underbrace{c_k}_{c_k \in [\![0; n+2 [\![}$

- Si $c_k > 0$, alors $V_{k+1} = \underbrace{f_k(\omega) + c_k - 1}_{\text{Attention à l'ordre!}} < V_k$.

- Si $c_k = 0$, alors $f_k(\omega) = \underbrace{e_k(\omega)}_{\text{Somme de termes } \omega^{\alpha'}\cdot c' \text{ avec } \alpha' > \alpha.} + \underbrace{\omega^{\alpha}\cdot c}_{c \in [\![1; n+2 [\![}$

  Via la formule de somme de puissances, on aura :

  $f_{k+1}(\omega) = e_k(\omega) + \sum_{\alpha' < \alpha} \text{terme } \omega^{\alpha'}\cdot c'$

  Donc $V_{k+1} < V_k$

- Pourquoi arrive-t-on à une impossibilité logique ?
  Voir th. 8 page 80 de la source utilisée.

<u>**Plus Fou !**</u>

Le th. de Goodstein n'est pas démontrable dans l'arithmétique de Peano : voir "Accessible Independance Results for Peano Arithmetic", Bull. of London Math. Soc., 1982.