La loi de Pascal

Loi de Pascal : définition et exemple

Disons-le tout de suite, la loi de Pascal n'est pas la loi de probabilité la plus utilisée, loin de là. D'ailleurs, les manuels de statistiques qui en font état ne sont pas légion, et encore moins avec exemple à l'appui !

Parmi les multiples apports philosophiques et scientifiques de Blaise Pascal figure l'invention de la « géométrie du hasard », c'est-à-dire le calcul des probabilités comme branche à part entière des mathématiques. Démarche particulièrement révolutionnaire au dix-septième siècle puisque le hasard était précisément considéré comme opposé aux mathématiques. Ce n'est que justice si une loi de probabilité porte aujourd'hui son nom…

Présentation

Soit un schéma de Bernoulli, c'est-à-dire une expérience aléatoire dont le résultat est soit un succès soit un échec (avec p la probabilité de succès et q la probabilité d'échec). Si ce schéma se répète n fois de façon identique et indépendante, on peut déterminer la probabilité d'obtenir k succès grâce à la loi binomiale. On peut aussi déterminer, pour chaque tirage, la probabilité qu'il corresponde à un premier succès grâce à la loi géométrique. On peut enfin probabiliser le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention d'un énième succès grâce à la loi de Pascal.

Soit X la variable aléatoire de Pascal.

$$X \leadsto \mathcal{P}(n\,,p)$$

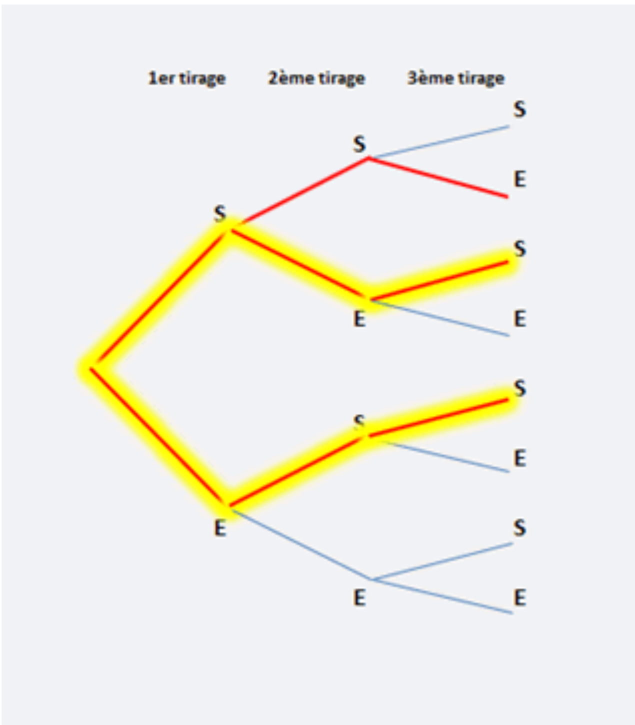
On nommera *k* le nombre de tirages nécessaires pour obtenir les *n* succès. Donc $k \geq n$. Attention à ne pas confondre *k* avec le *n* de la loi binomiale puisque celui-ci n'est pas connu à l'avance.

$$P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$$

Quelle est la logique de cette formule, proche de celle de la loi binomiale ?

Pour la comprendre, il est pratique d'avoir en tête l'arbre pondéré. Le coefficient binomial compte les branches à prendre en compte. Ici, on se situe juste avant le bon tirage. Nous en sommes donc à $n - 1$ sur un total de $k - 1$. C'est là la différence de calcul avec la formule de la loi binomiale (on prend moins de branches puisque les seules qui nous intéressent sont celles qui se terminent par un succès). La suite de la formule est simple à comprendre : il y a *n* succès, les autres tirages étant des échecs (donc $k - n$ tirages affectés de la probabilité *q*).

Illustration avec un arbre de dénombrement. Nous avons trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes et nous voulons deux succès (S). Les branches en rouge sont celles qui satisfont à cette exigence dans le cadre de la loi binomiale mais seules celles qui sont surlignées en jaune sont prises en compte par la loi de Pascal (on termine par un succès).



La loi géométrique est donc le cas particulier de la loi de Pascal pour laquelle $n = 1$.

Espérance :

$$E(X) = \frac{n}{p}$$

Variance :

$$V(X) = \frac{nq}{p^2}$$

Évidemment, écart-type :

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{nq}}{p}$$

Asymétrie :

$$\gamma_1 = \frac{2-p}{\sqrt{nq}}$$

Aplatissement :

$$\gamma_2 = 3 + \frac{p^2 + 6q}{nq}$$

Exercice

Un sondeur doit interroger les 120 participants à un colloque pour le compte d'une agence de tourisme. Il leur remet un bref questionnaire. Seuls ceux qui déclarent avoir déjà voyagé en Grèce doivent le remplir, après quoi notre sondeur leur posera quelques questions. Pour des raisons pratiques, il aimerait que ce soit le cas de dix personnes. Et pour d'autres raisons, il aimerait que la participante n°120, particulièrement séduisante, soit la dixième personne à interroger. On considère que 15 % des congressistes ont déjà voyagé en Grèce. Quelle est la probabilité que le sondeur remplisse sa mission comme il le souhaite ?

Corrigé

Nous pouvons modéliser la situation par une loi de Pascal. En effet, comme ce sont des participants à un colloque et non de simples passants qui pourraient se trouver en famille, nous supposons que les tirages sont indépendants. La situation s'apparente donc à une succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes et l'on cherche la probabilité que le dernier succès survienne à un rang déterminé.

La probabilité de succès est 0,15 et *n* est égal à 10.

$$P(X = 120) = \binom{120-1}{10-1} 0,15^{10} 0,85^{120-10}$$

$$P(X = 120) = \binom{119}{9} 0,15^{10} 0,85^{110}$$

Soit $P(X = 120) \approx 0,00096$.

Même pas une chance sur mille ! Pauvre sondeur…