BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS – RÉSOLUTIONS À LA MAIN

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page ***https://github.com/bc-writing/drafts***.

Mentions « légales »

Table des matières

Date : 25 Jan. 2024 – 3 Fév. 2024.

1. Ce qui nous intéresse

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers » [1], Paul Erdos démontre que pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit de $(k+1)$ entiers consécutifs $n(n+1)\cdots(n+k)$ n'est jamais le carré d'un entier.

Dans ce document, nous proposons quelques cas particuliers résolus de façon « adaptative » à la sueur des neurones ; le but recherché est de fournir différentes approches même si parfois cela peut prendre plus de temps.

2. Notations utilisées

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k} (n+i)$.
  Par exemple, $\pi_n^0 = n$, $\pi_n^1 = n(n+1)$ et $\pi_{n+2}^3 = (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$.
- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des carrés parfaits. On note aussi ${}^2_*\mathbb{N} = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
  $\mathbb{N}_{sf}$ est l'ensemble des naturels non nuls sans facteur carré [2].
- $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
  $\forall (p\,; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p-adique de n, c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n, contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m.
- $2\,\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
  $2\,\mathbb{N} + 1$ est l'ensemble des nombres naturels impairs.
- $(a \pm b)$ est un raccourci pour $(a+b)(a-b)$.

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).
2. En anglais, on dit « square free ».

3. Les carrés parfaits

3.1. Structure.

Fait 3.1. *$\forall n \in {}^2_*\mathbb{N}$, s'il existe $m \in {}^2_*\mathbb{N}$ tel que $n = fm$ alors $f \in {}^2_*\mathbb{N}$.*

Démonstration. Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(fm) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ qui donnent $v_p(f) \in 2\mathbb{N}$ car $v_p(fm) = v_p(f) + v_p(m)$. □

Fait 3.2. *$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $a \wedge b = 1$ et $ab \in {}^2_*\mathbb{N}$, alors $a \in {}^2_*\mathbb{N}$ et $b \in {}^2_*\mathbb{N}$.*

Démonstration. Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(ab) \in 2\mathbb{N}$. Or $p \in \mathbb{P}$ ne peut diviser à la fois a et b, donc $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(a) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(b) \in 2\mathbb{N}$, autrement dit $(a, b) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$. □

Fait 3.3. *Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $ab \in {}^2_*\mathbb{N}$, ainsi que $(\alpha, \beta, A, B) \in (\mathbb{N}_{sf})^2 \times \mathbb{N}^2$ tel que $a = \alpha A^2$ et $b = \beta B^2$. Nous avons alors forcément $\alpha = \beta$.*

Démonstration. Le fait 3.1 donne $\alpha\beta \in {}^2_*\mathbb{N}$. De plus, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(\alpha) \in \{0, 1\}$ et $v_p(\beta) \in \{0, 1\}$. Finalement, $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\alpha) = v_p(\beta)$, autrement dit $\alpha = \beta$. □

3.2. Distance entre deux carrés parfaits.

Fait 3.4. *$\forall (N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $N > M$, alors $N^2 - M^2 = \sum_{k=M+1}^{N} (2k - 1)$.*

Démonstration. $N^2 = \sum_{k=1}^{N} (2k - 1)$ donne l'identité indiquée [3]. □

L'identité précédente permet d'éliminer beaucoup de situations en s'aidant, si besoin, d'un petit programme informatique (voir un peu plus bas).

Fait 3.5. *Soit $(N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $N > M$.*

(1) $N^2 - M^2 \geq 2M + 1$.
(2) $N^2 - M^2 < 3$ est impossible.
(3) $N^2 - M^2 = 3$ uniquement si $(N, M) = (2, 1)$.
(4) Notons nb_{sol} le nombre de solutions $(N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de $N^2 - M^2 = \delta$. Pour $\delta \in [\![1\,;20]\!]$, nous avons :
  (a) $nb_{sol} = 0$ si $\delta \in \{1, 2, 4, 6, 10, 14, 18\}$.
  (b) $nb_{sol} = 1$ si $\delta \in \{3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 16\}$.
  (c) $nb_{sol} = 2$ si $\delta = 15$.

Démonstration.

(1) $N^2 - M^2 = \sum_{k=M+1}^{N} (2k - 1) \geq 2(M + 1) - 1 = 2M + 1$

On peut aussi juste procéder comme suit.

$N^2 - M^2 = (N - M)(N + M) \geq 1 \cdot (M + 1 + M) = 2M + 1$

(2) Immédiat puisque $2M + 1 \geq 3$.

(3) Notant $\delta = N^2 - M^2$, nous avons $2N - 1 \leq \sum_{k=M+1}^{N} (2k - 1) = \delta$, soit $N \leq \dfrac{\delta + 1}{2}$. Ceci permet de limiter notre zone de recherche à $N \in [\![1\,;2]\!]$, ce qui permet de conclure.

3. La formule utilisée est facile à démontrer algébriquement, et évidente à découvrir géométriquement.

(4) Il suffit de s'appuyer sur le programme `Python` donné ci-dessous. □

```python
from math import sqrt, floor

def sol(diff):
    solfound = []

    for i in range(1, (diff + 1) // 2 + 1):
        tested = i**2 - diff

        if tested < 0:
            continue

        tested = floor(sqrt(i**2 - diff))

        if tested == 0:
            continue

        if tested**2 == i**2 - diff:
            solfound.append((i, tested))

    return solfound
```

4. Avec 2 facteurs

Fait 4.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1) \notin {}^{2}\mathbb{N}$.

Preuve 1. Il suffit de noter que $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$. □

Preuve 2. Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$.
Comme $n \wedge (n+1) = 1$, le fait 3.2 donne $(n, n+1) \in {}^{2}_{*}\mathbb{N} \times {}^{2}_{*}\mathbb{N}$, d'où l'existence de deux carrés parfaits non nuls distants de 1 . D'après le fait 3.5, ceci est impossible. □

Preuve 3. Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) = N^2$ où $N \in \mathbb{N}^*$.
Les équivalences suivantes donnent une contradiction.

$$
\begin{aligned}
& n(n+1) = N^2 \\
& && \textit{$n(n+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k$ et $N^2 = \sum_{k=1}^{N} (2k-1)$.} \\
\iff & 2\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{N} (2k-1) \\
\iff & \sum_{k=1}^{n} 2k = \sum_{k=1}^{N} 2k - N \\
& && N > n \\
\iff & \sum_{k=n+1}^{N} 2k - N = 0 \\
& && \textit{$N > 0$ rend impossible la dernière égalité.} \\
\iff & \sum_{k=n+1}^{N-1} 2k + N = 0
\end{aligned}
$$

□

5. Avec 3 facteurs

Fait 5.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve 1. Supposons que $\pi_n^2 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Posant $m = n+1$, nous avons $\pi_n^2 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Comme $m \wedge (m^2-1) = 1$, le fait 3.2 donne $(m, m^2-1) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$. Or, $m^2-1 \in {}^2_*\mathbb{N}$ est impossible d'après le fait 3.5. □

Preuve 2. Supposons que $\pi_n^2 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Comme $p \in \mathbb{P}_{>2}$ ne peut diviser au maximum qu'un seul des trois facteurs n , $(n+1)$ et $(n+2)$, nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}_{>2}$, $\forall i \in [\![0\,;2]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$. Mais que se passe-t-il pour $p = 2$?

Supposons d'abord $n \in 2\mathbb{N}$.

- Posant $n = 2m$, nous avons $\pi_n^2 = 4m(2m+1)(m+1)$, d'où $m(2m+1)(m+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$.
- Comme $v_2(2m+1) = 0$, nous savons que $2m+1 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
- Donc $m(m+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$ via le fait 3.1, mais le fait 4.1 interdit cela.

Supposons maintenant $n \in 2\mathbb{N}+1$.

- Nous savons que $n \in {}^2_*\mathbb{N}$ via $v_2(n) = 0$.
- On conclut comme dans le cas précédent mais en passant via $(n+1)(n+2)$. □

6. Avec 4 facteurs

Fait 6.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve 1. Nous pouvons ici faire les manipulations algébriques naturelles suivantes qui cherchent à obtenir le même coefficient pour n dans chaque parenthèse.

$$
\begin{aligned}
\pi_n^3 &= n(n+3)\cdot(n+1)(n+2) \\
&= (n^2+3n)\cdot(n^2+3n+2) \qquad m = n^2+3n \\
&= m(m+2) \\
&= m^2+2m \\
&= (m+1)^2-1
\end{aligned}
$$

Comme $m > 0$, $(m+1)^2 - 1 \notin {}^2\mathbb{N}$ d'après le fait 3.5, c'est-à-dire $\pi_n^3 \notin {}^2\mathbb{N}$. □

Preuve 2. En « symétrisant » certaines expressions, nous obtenons les manipulations algébriques suivantes.

$$
\begin{aligned}
\pi_n^3 &= n(n+1)(n+2)(n+3) \qquad x = n + \frac{3}{2} \\
&= \left(x \pm \frac{3}{2}\right)\left(x \pm \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(x^2 - \frac{9}{4}\right)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \qquad y = x^2 - \frac{5}{4} \text{ où } \frac{5}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} + \frac{1}{4}\right) . \\
&= (y \pm 1) \\
&= y^2 - 1 \\
&= \left(\left(n + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right)^2 - 1 \\
&= \left(n^2 + 3n + 1\right)^2 - 1
\end{aligned}
$$

On conclut comme dans la première preuve. □

7. Avec 5 facteurs

Fait 7.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve 1. Supposons que $\pi_n^4 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $\forall i \in [\![0\,;4]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$. Pour $p = 2$ et $p = 3$, nous avons les alternatives suivantes pour chaque facteur $(n+i)$ de π_n^4.

- **[A 1]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A 2]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$
- **[A 3]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times 2\mathbb{N}$
- **[A 4]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$

Comme nous avons cinq facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions très facilement.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 1]**.

  Dans ce cas, on sait juste que $(n+i, n+i') \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Or $n \notin {}^2\mathbb{N}$ puisque sinon $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$ donne $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$ via le fait 3.1, mais ceci contredit le fait 6.1. De même, $n+4 \notin {}^2\mathbb{N}$. Dès lors, nous avons $\{n+i, n+i'\} \subseteq \{n+1, n+2, n+3\}$, d'où l'existence de deux carrés parfaits non nuls éloignés de moins de 3, et ceci contredit le fait 3.5.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 2]**.

  Dans ce cas, le couple de facteurs est $(n, n+3)$, ou $(n+1, n+4)$.
  1. Supposons d'abord que n et $(n+3)$ vérifient **[A 2]**.
     Comme $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+3) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(n) \in 2\mathbb{N}+1$ et $v_3(n+3) \in 2\mathbb{N}+1$, nous avons $n = 3N^2$ et $n+3 = 3M^2$ où $(N, M) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
     Or, ceci donne $3 = 3M^2 - 3N^2$, puis $M^2 - N^2 = 1$ qui contredit le fait 3.5.
  2. De façon analogue, on ne peut pas avoir $(n+1)$ et $(n+4)$ vérifiant **[A 2]**.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 3]**.

  Comme dans le point précédent, c'est impossible car on aurait $2 = 2M^2 - 2N^2$, ou $4 = 2M^2 - 2N^2$ qui contredirait le fait 3.5.

  En effet, ici les couples possibles sont $(n, n+2)$, $(n, n+4)$, $(n+2, n+4)$ et $(n+1, n+3)$ [4].

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 4]**.

  Ceci donne deux facteurs différents divisibles par 6, mais c'est impossible. □

Bien que longue, la preuve suivante se comprend bien, car nous ne faisons qu'avancer à vue, mais avec rigueur.

Preuve 2. Supposons que $\pi_n^4 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Posant $m = n+2$, nous avons $\pi_n^4 = m(m \pm 2)(m \pm 1) = m(m^2-1)(m^2-4)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.
Pour la suite, on pose $u = m^2 - 1$ et $q = m^2 - 4$.

Supposons d'abord que $m \in {}^2_*\mathbb{N}$.

- De $muq \in {}^2_*\mathbb{N}$, nous déduisons que $uq \in {}^2_*\mathbb{N}$ via le fait 3.1.

4. A priori, rien n'empêche d'avoir n, $(n+2)$ et $(n+4)$ vérifiant tous les trois **[A 3]**.

- Comme $u-q=3$, nous savons que $u \wedge q \in \{1,3\}$.
- Si $u \wedge q = 1$, alors $(u,q) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$ d'après le fait 3.2. Ensuite, le fait 3.5 impose d'avoir $(u,q) = (4,1)$, d'où $m^2-1=4$, mais ceci est impossible [5].
- Si $u \wedge q = 3$, alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(u) \in 2\mathbb{N}+1$ et $v_3(q) \in 2\mathbb{N}+1$. Donc $u = 3U^2$ et $q = 3Q^2$ avec $(U,Q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Or $u-q=3$ donne $U^2-Q^2=1$, et le fait 3.5 nous indique une contradiction.

Supposons maintenant que $m \notin {}^2_*\mathbb{N}$.

- Montrons que $u \notin {}^2\mathbb{N}$ et $q \notin {}^2\mathbb{N}$.
  (1) $u \in {}^2\mathbb{N}$ donne $m^2-1 \in {}^2\mathbb{N}$, puis $m=1$ via le fait 3.5, mais ceci est impossible puisque $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.
  (2) $q \in {}^2\mathbb{N}$ donne $m^2-4 \in {}^2\mathbb{N}$, puis la contradiction $m=2$ via le fait 3.5.
- Donc $m = \alpha M^2$, $u = \beta U^2$, $q = \gamma Q^2$ où $(M,U,Q) \in (\mathbb{N}^*)^3$ et $\{\alpha,\beta,\gamma\} \subset \mathbb{N}_{sf} \cap \mathbb{N}_{>1}$.
- Notons que $\beta \neq \gamma$, car, dans le cas contraire, $3 = u-q = \beta\big(U^2-Q^2\big)$ fournirait $\beta = 3$ puis $U^2-Q^2=1$, et ceci contredirait le fait 3.5.
- Nous avons $m \wedge u = 1$, $m \wedge q \in \{1,2,4\}$ et $u \wedge q \in \{1,3\}$ avec $m \wedge u = m \wedge q = u \wedge q = 1$ impossible car sinon on aurait $(m,u,q) \in ({}^2\mathbb{N})^3$ via $muq \in {}^2\mathbb{N}$ et le fait 3.2.
- Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $\big(v_p(m), v_p(u), v_p(q)\big) \in (2\mathbb{N})^3$.
- Les points précédents donnent $\{\alpha,\beta,\gamma\} \subseteq \{2,3,6\}$ avec de plus $\beta \neq \gamma$, ainsi que $\alpha \wedge \beta = 1$, $\alpha \wedge \gamma \in \{1,2\}$ et $\beta \wedge \gamma \in \{1,3\}$. Notons au passage que $\alpha \wedge \beta = 1$ implique $(\alpha,\beta) = (2,3)$, ou $(\alpha,\beta) = (3,2)$. Via le tableau « mécanique » ci-après, nous obtenons que forcément $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,3,2)$ ou $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,3,6)$. Le plus dur est fait !

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	*Statut*
2	3	2	1	2	1	✓
2	3	6	1	2	3	✓
3	2	3	1	3	1	☒
3	2	6	1	3	2	☒

- $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,3,2)$ nous donne $m = 2M^2$, $u = 3U^2$ et $q = 2Q^2$, d'où la contradiction $3 \cdot 4M^2U^2Q^2 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
- $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,3,6)$ nous donne $m = 2M^2$, $m^2-1 = 3U^2$ et $m^2-4 = 6Q^2$, mais ce qui suit lève une autre contradiction.
  - Travaillons modulo 3 . Nous avons $m \equiv 2M^2 \equiv 0$ ou -1 . Or $m^2-1 = 3U^2$ donne $m^2 \equiv 1$, d'où $m \equiv -1$, puis $3 \mid m-2$, et enfin $6 \mid m-2$ puisque m est pair.
  - Posant $m-2 = 6r$ et notant $s = m+2$, nous avons $6rs = 6Q^2$, puis $rs = Q^2$.
  - $s \notin {}^2\mathbb{N}$. Sinon $(m-2)(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$ via $(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) \in {}^2\mathbb{N}$ et le fait 3.1, mais ceci ne se peut pas d'après le fait 6.1.
  - Les deux résultats précédents et le fait 3.3 donnent $(\pi,R,S) \in \mathbb{N}_{sf} \times (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $r = \pi R^2$ et $s = \pi S^2$ avec $\pi \in \mathbb{N}_{>1}$.
  - Dès lors, $4 = s - 6r = \pi(S^2-6R^2)$ donne $\pi = 2$, d'où $m+2 = 2S^2$.
  - Finalement, $m = 2M^2$ et $m+2 = 2S^2$ donnent $2 = 2(S^2-M^2)$, soit $1 = S^2-M^2$, ce qui contredit le fait 3.5. □

5. On peut aussi noter que le fait 5.1 lève une contradiction car nous avons $m \in {}^2\mathbb{N}$ et $u \in {}^2\mathbb{N}$ qui donnent $(m-1)m(m+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$.

8. Avec 6 facteurs

Fait 8.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^5 \notin {}^2\mathbb{N}$.

La démonstration suivante se trouve dans l'article « Solution of a Problem »[6] de G. W. Hill et J. E. Oliver. Une petite simplification a été faite pour arriver à $\pi_n^5 = (a-4)a(a+2)$.

Preuve 1. Supposons que $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}$.
Commençons par de petites manipulations algébriques où la première modification fait apparaître le même coefficient pour n dans chaque parenthèse.

$$\begin{aligned} \pi_n^5 &= n(n+5)\cdot(n+1)(n+4)\cdot(n+2)(n+3) \\ &= (n^2+5n)(n^2+5n+4)(n^2+5n+6) & & x = n^2+5n \in \mathbb{N}_{\geq 6} \\ &= x(x+4)(x+6) & & a = x+4 \in \mathbb{N}_{\geq 10} \\ &= (a-4)a(a+2) \end{aligned}$$

Nous avons $a \in \mathbb{N}_{\geq 10}$ vérifiant $a(a+2)(a-4) \in {}^2_*\mathbb{N}$. Posons $a = \alpha A^2$ où $(\alpha, A) \in \mathbb{N}_{sf} \times \mathbb{N}^*$, de sorte que $\alpha(\alpha A^2+2)(\alpha A^2-4) \in {}^2_*\mathbb{N}$ via le fait 3.1. De plus, $\alpha \in \mathbb{N}_{sf}$, donc $\alpha \mid (\alpha A^2+2)(\alpha A^2-4)$, d'où $\alpha \mid 8$, et ainsi $\alpha \in \{1, 2\}$[7]. Nous allons voir que ceci est impossible.

Supposons que $\alpha = 1$.

- Notons les équivalences suivantes.
$$\begin{aligned} & (A^2+2)(A^2-4) \in {}^2_*\mathbb{N} & & u = A^2-1 \textit{ où } -1 = \frac{2-4}{2} \,. \\ \iff\ & (u+3)(u-3) \in {}^2_*\mathbb{N} \\ \iff\ & u^2 - 9 \in {}^2_*\mathbb{N} \end{aligned}$$
- Ensuite, prenant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = u^2 - 9$, le fait 3.5 donne $(u, m) = (5, 4)$ d'où la contradiction suivante.
$$\begin{aligned} u = 5 \iff\ & A^2 - 1 = 5 & & 6 \notin {}^2\mathbb{N} \,. \\ \iff\ & A^2 = 6 \end{aligned}$$

Supposons que $\alpha = 2$.

- Notons l'équivalence suivante.
$$\begin{aligned} & 2(2A^2+2)(2A^2-4) \in {}^2_*\mathbb{N} & & \textit{Via } 4\cdot 2(A^2+1)(A^2-2) \,. \\ \iff\ & 2(A^2+1)(A^2-2) \in {}^2_*\mathbb{N} \end{aligned}$$
- Ensuite, en travaillant modulo 3 , nous avons $2(A^2+1)(A^2-2) \equiv -4 \equiv -1$ qui ne correspond pas à un carré modulo 3 . □

Bien que très longue[8], la preuve suivante est simple à comprendre car elle ne fait que dérouler le fil des faits découverts.

Preuve 2. Supposons que $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} & \pi_n^5 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) & & x = n+2+\frac{1}{2} \textit{ (on symétrise la formule).} \\ \iff\ & \pi_n^5 = \left(x \pm \frac{5}{2}\right)\left(x \pm \frac{3}{2}\right)\left(x \pm \frac{1}{2}\right) & & y = 2x \textit{ (on chasse les fractions).} \\ \iff\ & 2^6\pi_n^5 = (y\pm 5)(y \pm 3)(y \pm 1) \end{aligned}$$

6. The Analyst (1874).
7. On comprend ici le choix d'avoir $\pi_n^5 = (a-4)a(a+2)$.
8. Ce sera notre dernière tentative de démonstration à faible empreinte cognitive.

$$
\begin{aligned}
& 2^6\pi_n^5 = (y\pm 5)(y\pm 3)(y\pm 1) & & \\
\iff\ & 2^6\pi_n^5 = (z-25)(z-9)(z-1) & & z = y^2 \\
\iff\ & 2^6\pi_n^5 = (u-8)(u+8)(u+16) & & u = z-17 \text{ où } 17 = \frac{25+9}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Notant $a = u-8$, $b = u+8$ et $c = u+16$, où $u = (2n+5)^2 - 17 \in 2\mathbb{N}$, nous avons les faits suivants.

- $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$ car $(2+5)^2 - 17 = 32$.
- $(a,b,c) \in \left(\mathbb{N}_{\geq 24}\right)^3$ avec $abc \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$ puisque $2^6\pi_n^5 \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$.
- $a \wedge b \mid 16$ via $b - a = 16$.
- $a \wedge c \mid 24$ via $c - a = 24$.
- $b \wedge c \mid 8$ via $c - b = 8$.
- En particulier, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) \in (2\mathbb{N})^3$.

Démontrons qu'aucun des trois entiers a , b et c ne peut être un carré parfait.

- Commençons par supposer que $(a,b,c) \in {}^{2}_{*}\mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

  Dans ce cas, $bc \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$ via le fait 3.1, soit $(u+8)(u+16) \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$. En posant $w = u+12$, on arrive à $(w-4)(w+4) \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$, soit $w^2 - 16 \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$, d'où $(w,m) = (5,3)$ grâce au fait 3.5. Or $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$ donne $w \in \mathbb{N}_{\geq 20}$, d'où une contradiction.

- Supposons maintenant que $(a,b,c) \in \mathbb{N}^* \times {}^{2}_{*}\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

  Dans ce cas, $ac \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$, soit $(u-8)(u+16) \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$. En posant $w = u+4$, on arrive à $(w-12)(w+12) \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$, soit $w^2 - 144 \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$. Notant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = w^2 - 144$, nous arrivons à $w^2 - m^2 = 144$, d'où $(w,m) \in \{(13,5),(15,9),(20,16),(37,35)\}$ [9]. Comme $u \in 2\mathbb{N}$ donne $w \in 2\mathbb{N}$, nécessairement $(w,m) = (20,16)$, mais les équivalences suivantes lèvent une contradiction.

  $$
  \begin{aligned}
  u + 4 = 20 \iff\ & u = 16 & & \\
  \iff\ & (2n+5)^2 - 17 = 16 & & \\
  \iff\ & (2n+5)^2 = 33 & & 33 \notin {}^{2}\mathbb{N}
  \end{aligned}
  $$

- Supposons enfin que $(a,b,c) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times {}^{2}_{*}\mathbb{N}$.

  Dans ce cas, $ab \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$, soit $(u-8)(u+8) \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$, c'est-à-dire $u^2 - 64 \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$. Notant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = u^2 - 64$, nous arrivons à $u^2 - m^2 = 64$. Ceci n'est possible que si $(u,m) \in \{(10,6),(17,15)\}$. Or $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$ donne une contradiction.

Donc $a = \alpha A^2$, $b = \beta B^2$ et $c = \gamma C^2$ avec $(A,B,C) \in (\mathbb{N}^*)^3$ et $\{\alpha,\beta,\gamma\} \subset \mathbb{N}_{sf} \cap \mathbb{N}_{>1}$, ceci nous donnant les faits suivants.

- $\alpha \wedge \beta \in \{1,2\}$ d'après $a \wedge b \mid 16$.
- $\alpha \wedge \gamma \in \{1,2,3\}$ d'après $a \wedge c \mid 24$.
- $\beta \wedge \gamma \in \{1,2\}$ d'après $b \wedge c \mid 8$.
- $\{\alpha,\beta,\gamma\} \subseteq \{2,3,6\}$ car $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) \in (2\mathbb{N})^3$.

9. Le programme reproduit après la preuve du fait 3.5 donne rapidement cet ensemble de couples.

En fait, α , β et γ sont différents deux à deux.

- Démontrons que $\alpha \neq \beta$.
  Dans le cas contraire, $16 = b - a = \alpha(B^2 - A^2)$ et $\alpha > 1$ donnent $B^2 - A^2 \in \{1, 2, 4, 8\}$, puis forcément $B^2 - A^2 = 8$ avec $(B, A) = (3, 1)$ d'après le fait 3.5. Comme de plus, $\alpha = 2$, nous obtenons $a = 2$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.
- Nous avons aussi $\beta \neq \gamma$.
  Dans le cas contraire, $8 = c - b = \beta(C^2 - B^2)$ et $\beta > 1$ donnent $C^2 - B^2 \in \{1, 2, 4\}$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5.
- Enfin, $\alpha \neq \gamma$.
  Dans le cas contraire, $C^2 - A^2 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ car $24 = c - a = \alpha(C^2 - A^2)$ et $\alpha > 1$. Le fait 3.5 ne laisse plus que les possibilités suivantes.
  (1) $C^2 - A^2 = 3$ n'est possible que si $(C, A) = (2, 1)$. Comme de plus $\alpha = 8$, nous avons $a = 8$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.
  (2) $C^2 - A^2 = 8$ n'est possible que si $(C, A) = (3, 1)$. Comme de plus $\alpha = 3$, nous avons $a = 3$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.
  (3) $C^2 - A^2 = 12$ n'est possible que si $(C, A) = (4, 2)$. Comme de plus $\alpha = 2$, nous avons $a = 8$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.

Comme $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$, $\alpha \wedge \beta \in \{1, 2\}$, $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2, 3\}$ et $\beta \wedge \gamma \in \{1, 2\}$, et comme de plus α , β et γ sont différents deux à deux, il ne nous reste plus qu'à analyser les cas suivants. La lumière est proche...

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	*Statut*
2	3	6	1	2	3	☒
2	6	3	2	1	3	☒
3	2	6	1	3	2	✓
3	6	2	3	1	2	☒
6	2	3	2	3	1	✓
6	3	2	3	2	1	☒

Traitons les deux cas restants en nous souvenant que $a = u - 8$, $b = u + 8$ et $c = u + 16$.

- Supposons $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, 2, 6)$, autrement dit $a = 3A^2$, $b = 2B^2$ et $c = 6C^2$.
  Travaillons modulo 3 afin de lever une contradiction.
  (1) $a \equiv u - 2$ et $a \equiv 3A^2 \equiv 0$ donnent $u \equiv 2$.
  (2) D'autre part, $b \equiv 2B^2 \equiv 0$ ou 2 . Or $b \equiv u + 2 \equiv 1$ lève une contradiction.
- Supposons $(\alpha, \beta, \gamma) = (6, 2, 3)$, autrement dit $a = 6A^2$, $b = 2B^2$ et $c = 3C^2$.
  La preuve précédente s'adapte directement car $a \equiv 6A^2 \equiv 0$ et $b \equiv 2B^2$ modulo 3 .

$\square$

9. Avec 7 facteurs

Fait 9.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^6 \notin {}^2\mathbb{N}$.

La très jolie démonstration suivante vient d'un échange sur `https://math.stackexchange.com` (voir la section 10). Nous avons juste comblé quelques rares oublis, et apporté de petites simplifications.

Preuve. Supposons que $\pi_n^6 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Commençons par quelques observations immédiates.

- $\forall p \in \mathbb{P}_{>5}$, $\forall i \in [\![0\,;6]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$.
- $\exists u \in \{0, 1, 2\}$ tel que $\{u, u+2, u+4\} \subset 2\mathbb{N}+1$.
  Nous avons alors $\forall p \in \mathbb{P}_{>5} - \{2\}$, $(v_p(u), v_p(u+2), v_p(u+4)) \in (2\mathbb{N})^3$. Donc, pour tout naturel $m \in \{u, u+2, u+4\}$, il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = M^2$, $m = 3M^2$, $m = 5M^2$ ou $m = 15M^2$.
- Parmi les trois naturels u , $u+2$ et $u+4$, ...
  - il en existe un, et un seul, divisible par 3 , comme on le constate vite en raisonnant modulo 3 ,
  - au plus un est divisible par 5 ,
  - au plus un est un carrée parfait d'après le fait 3.5.

Donc, il existe $(M, P, Q) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $\{u, u+2, u+4\} = \{M^2, 3P^2, 5Q^2\}$. Ceci permet de considérer les trois cas suivants qui lèvent tous une contradiction.

- Supposons avoir $u = M^2$.
  (1) Comme $\{u+2, u+4\} = \{3P^2, 5Q^2\}$, nous savons que $3 \nmid (u+3)$ et $5 \nmid (u+3)$, d'où $u+3 = 2^a T^2$ avec $(a, T) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.
  (2) Modulo 4 , $u \equiv M^2 \equiv 1$ car $u \in 2\mathbb{N}+1$, donc $u+3 \equiv 0$, d'où $a \geq 2$.
  (3) Modulo 8 , $u \equiv M^2 \equiv 1$ car $u \in 2\mathbb{N}+1$, donc $u+3 \equiv 4$, d'où $a = 2$.
  (4) Dès lors, $u+3 \in {}^2\mathbb{N}$, puis $(u+3, u) = (4, 1)$ via le fait 3.5.
  (5) Forcément $n = u = 1$, mais $v_7(\pi_1^6) = 1$ contredit $\pi_n^6 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
- Supposons maintenant que $u+4 = M^2$.
  Comme $\{u, u+2\} = \{3P^2, 5Q^2\}$, la preuve précédente s'adapte à $(u+1, u+4)$.
- Supposons enfin que $u+2 = M^2$.
  $\{u, u+4\} = \{3P^2, 5Q^2\}$ est impossible d'après ce qui suit en travaillant modulo 4 .
  (1) Si $(u, u+4) = (3P^2, 5Q^2)$, alors $u \equiv 0$ ou 3 , $u+4 \equiv 0$ ou 1 , et $u \equiv \pm 1$ se contredisent.
  (2) Si $(u, u+4) = (5Q^2, 3P^2)$, on obtient une contradiction comme ci-dessus.

□

10. Sources utilisées

(1) Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré *« n(n+1)...(n+k) est un carré ? »* sur le site `lesmathematiques.net` .

La démonstration du fait 7.1 via le principe des tiroirs trouve sa source dans cet échange.

(2) L'article *« Le produit de 5 entiers consécutifs n'est pas le carré d'un entier. »* de T. Hayashi, Nouvelles Annales de Mathématiques, est consultable via Numdam , la bibliothèque numérique française de mathématiques.

Cet article a inspiré la preuve alternative du fait 7.1.

(3) Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré *« product of six consecutive integers being a perfect numbers »* sur le site `https://math.stackexchange.com` .

La démonstration courte du fait 8.1 est donné dans cet échange. Vous y trouverez aussi un très joli argument basé sur les courbes elliptiques rationnelles.

(4) Un échange consulté le 3 février 2024, et titré *« Proof that the product of 7 successive positive integers is not a square »* sur le site `https://math.stackexchange.com` .

La démonstration courte du fait 9.1 est donné dans cet échange, mais certaines justifications manquent.

11. AFFAIRE À SUIVRE...