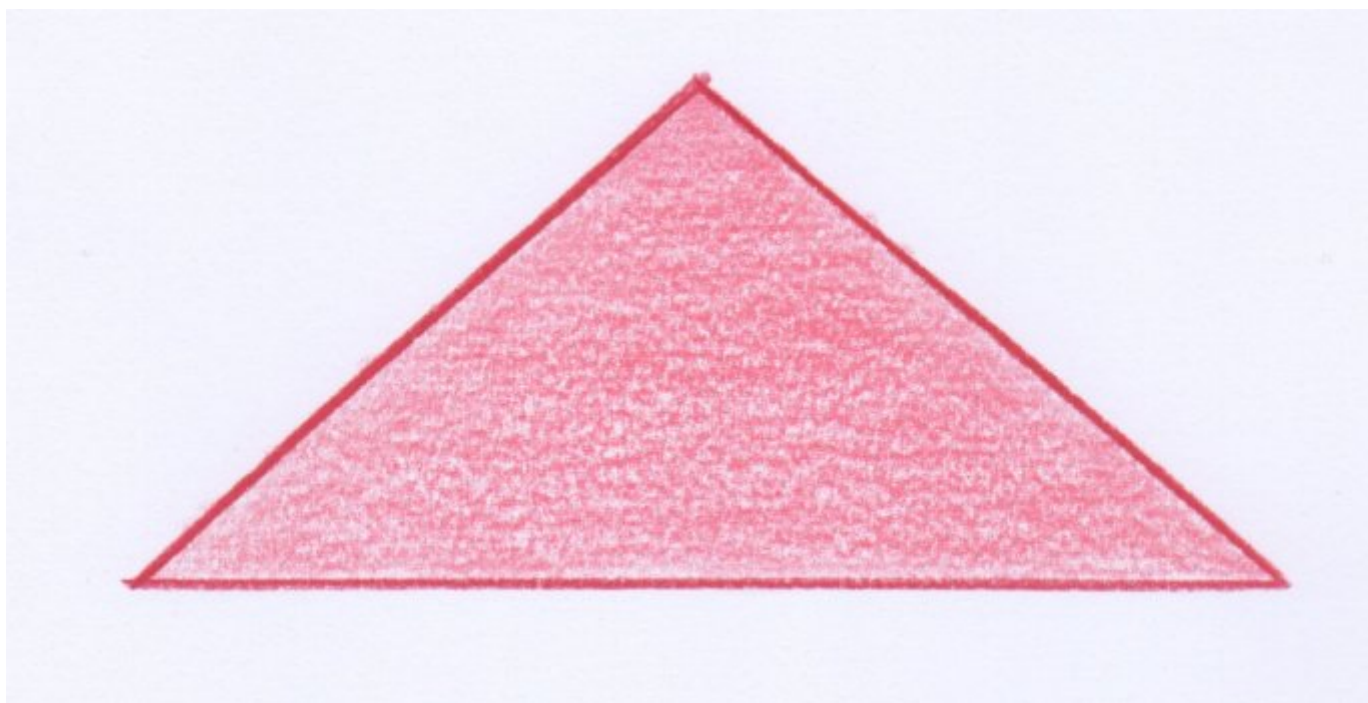


Notre site utilise des cookies. Certains cookies sont nécessaires au fonctionnement du site, tandis que d'autres nous aident à améliorer l'expérience utilisateur. En utilisant le site, vous acceptez l'utilisation des cookies. Pour en apprendre plus au sujet des cookies et pour savoir comment les désactiver, [consultez notre déclaration de confidentialité](#). [Fermer](#)

Tribune (-Tribune-.html)

SUBTILITÉ DE L'IDENTITÉ

Le 23 mars 2016 - Ecrit par Popescu-Pampu, Patrick (_Popescu-Pampu-Patrick_.html)



A-t-on vraiment banni des manuels une preuve de géométrie élémentaire des triangles à cause de la subtilité du concept d'identité ?

Faut-il ou non présenter tôt aux enfants des raisonnements subtils, obligeant à un effort d'abstraction ou allant à l'encontre des habitudes de pensée ? Il s'agit probablement là d'une question au sujet de laquelle on se disputera aussi longtemps que l'humanité existera. Mais il est bon de pouvoir se disputer autour d'exemples concrets. En voici un que j'ai trouvé surprenant, raconté par [Mark Kac](https://en.wikipedia.org/wiki/Mark_Kac) (https://en.wikipedia.org/wiki/Mark_Kac) [1] (#nb1) :

Il pourrait sembler que l'ordinateur est entièrement dépendant de l'homme qui lui donne des instructions. « Âneries en entrée, âneries en sortie » est la

Notre site utilise des cookies. Certains cookies sont nécessaires au fonctionnement du site, tandis que d'autres nous aident à améliorer l'expérience utilisateur. En utilisant le site, vous acceptez l'utilisation des cookies. Pour en apprendre plus au sujet des cookies et pour savoir comment les désactiver, [consultez notre déclaration de confidentialité](#). Fermer

Il y a quelque temps, des tentatives furent faites pour apprendre à l'ordinateur à prouver des théorèmes de géométrie plane. Pour cela, en plus de lui donner des axiomes et des règles de déduction logique, il a fallu clairement lui fournir une « stratégie ». Celle-ci était simple et consistait en l'unique commandement : « Cherche des triangles congruents. » [2 (#nb2)]

Étant donné un théorème à prouver, l'ordinateur considèrerait toutes les paires de triangles et, en retournant aux hypothèses, il chercherait à décider lesquels sont congruents. Si une paire de triangles congruents a été trouvée, alors toutes les conséquences de cette découverte seraient tirées et comparées avec ce qui doit être démontré. [...] Si aucune conclusion obtenue de la sorte ne s'adapte à celle désirée, ou s'il n'y a pas de paire de triangles congruents, alors on instruisait l'ordinateur à tracer toutes les perpendiculaires possibles, toutes les bissectrices et les médianes, et à reprendre ensuite la recherche des triangles congruents.

Eh bien, voici ce qui arriva lorsque l'on demanda à l'ordinateur de prouver que, étant donné un triangle isocèle avec $AC = BC$, les angles A et B sont alors eux aussi égaux [$\angle A = \angle B$].

Les auteurs du programme s'attendaient à ce que l'ordinateur, après une brève contemplation du triangle solitaire ABC , décide de mener la hauteur CD et, de la congruence des triangles rectangles ADC et BDC , conclue que $\angle A = \angle B$.

<fig15544|width=60%>

Mais l'ordinateur les a bernés ! Il a donné une preuve beaucoup plus jolie et plus sophistiquée. Il a simplement « remarqué » que les triangles ABC et BAC (!) sont congruents et déduisit la conclusion désirée de cette manière.

Avant que quiconque bondisse, je me hâte de préciser que cette preuve n'est pas nouvelle. En fait, elle est très ancienne et a été donnée pour la première fois par Pappus au cinquième siècle après Jésus-Christ. Elle a été reproduite dans la plupart des textes de géométrie jusque vers la fin du XIX-ème siècle, lorsque l'on décida qu'elle était trop difficile à comprendre pour les jeunes humains.

La raison pour laquelle la preuve est difficile est que cela est contre nature de considérer ABC et BAC comme étant des triangles *différents*, même s'ils sont représentés par le même dessin [3 (#nb3)].

Notre site utilise des cookies. Certains cookies sont nécessaires au fonctionnement du site, tandis que d'autres nous aident à améliorer l'expérience utilisateur. En utilisant le site, vous acceptez l'utilisation des cookies. Pour en apprendre plus au sujet des cookies et pour savoir comment les désactiver, [consultez notre déclaration de confidentialité](#). Fermer

sciences en général. Un vaste domaine des mathématiques, la *théorie des groupes* [4 (#nb4)], traite des symétries des objets de la pensée de toutes les espèces imaginables. Afin d'être préparé psychologiquement à cette théorie, il peut être bon de se confronter de temps en temps à des phénomènes ou à des raisonnements faisant jouer un rôle aux symétries.

La preuve racontée par Mark Kac, passant par la constatation directe que le triangle ABC est congruent au triangle BAC , constitue un tel raisonnement. Ce raisonnement est-il encore jugé « trop difficile pour les jeunes humains » ? Ou bien pourrait-il désormais refaire son apparition dans les manuels, à côté de la preuve plus conventionnelle passant par la construction du segment supplémentaire CD [5 (#nb5)] ?

Quelqu'un saurait-il retrouver des comptes-rendus de discussions pédagogiques des alentours de l'année 1900, expliquant les arguments utilisés pour éliminer cette preuve des manuels ? En tout cas, on a loupé ainsi une magnifique occasion de permettre aux enfants de réfléchir aux subtilités du concept d'identité.

Plus généralement, pourquoi les manuels ne contiendraient-ils pas des choses pour tous les goûts, un tronc commun ainsi que des échappées plus subtiles et passionnantes pour ceux qui se découvrent une curiosité spéciale pour la matière concernée ? Curiosité qu'il est bon non seulement d'éveiller, mais aussi d'entretenir, afin de permettre à chacun de découvrir les subtilités de son identité.

NOTES

[1 (#nh1)] Il s'agit de ma traduction d'un extrait de l'article « *Will computers replace humans ?* » de Kac, paru initialement dans le livre « *The greatest adventure* », édité par Eugene H. Kone et Helen J. Jordan, Rockefeller Univ. Press, New York, 1974. Cet article a été repris dans le livre d'essais sur les maths, les sciences et la philosophie « *Discrete thoughts* » de Mark Kac, Gian-Carlo Rota et Jacob T. Schwartz, seconde édition, Birkhäuser, Basel, 1992.

[2 (#nh2)] NDT : Rappelons que deux figures du plan sont dites *congruentes* si elles ont même forme et même taille. Pourquoi ne pas dire simplement qu'elles sont *égales* ? Afin de réserver ce terme à l'*identité* des deux figures, c'est-à-dire à la forme la plus forte possible de congruence. Mais on verra ici que l'identité est une notion subtile ...

[3 (#nh3)] NDT : Ici la manière d'associer les sommets est essentielle. Pour cette raison, lorsque l'on a choisi un ordre d'écriture pour les sommets du premier triangle, il est indispensable d'écrire correctement l'ordre des sommets du deuxième triangle. Dans notre cas, les triangles ABC et BAC sont congruents parce que les paires de côtés qui se correspondent dans ces deux écritures, c'est-à-dire (AB, BA) , (BC, AC) , (AC, BC) ont à

Notre site utilise des cookies. Certains cookies sont nécessaires au fonctionnement du site, tandis que d'autres nous aident à améliorer l'expérience utilisateur. En utilisant le site, vous acceptez l'utilisation des cookies. Pour en apprendre plus au sujet des cookies et pour savoir comment les désactiver, [consultez notre déclaration de confidentialité](#). Fermer

$PSL_2(\mathbb{Z})$ ([Mon-groupe-prefere-PSL2-Z.html](#)) de Marie Lhuissier, *De l'ambiguïté des puzzles aux idées de Galois* ([De-l-ambiguite-des-puzzles-aux-idees-de-Galois.html](#)) de Xavier Caruso et Bruno Teheux, *Ornements et cristaux, pavages et groupes* ([Ornements-et-cristaux-pavages-et-groupes-I.html](#)) de Pierre de la Harpe, *Les ensembles limites de groupes kleinéens en 3D* ([Les-ensembles-limites-de-groupes-kleineens-en-3D.html](#)) de Jos Leys ou bien *Un peu de géométrie des groupes* ([Un-peu-de-geometrie-des-groupes.html](#)) de Gilbert Levitt.

[5 (#nh5)] Celui-ci n'a pas à être une hauteur. On peut tout aussi bien considérer la médiane ou la bissectrice. À chaque fois, on déduit que les triangles ADC et BDC sont congruents à partir d'un critère différent : soit par les égalités des trois paires de côtés correspondants, soit par celle de deux de ces paires, et de la paire d'angles formés par ces côtés.