# BROUILLON - COURBES POLYNOMIALES SIMILAIRES
# MANQUE DES DESSINS !

CHRISTOPHE BAL

## Mentions « légales »



Table des matières



*Date*: 2 Octobre 2020 – 5 Novembre 2020.

## 1. Où allons-nous ?

Il est connu ques les courbes des fonctions affines sont toutes des droites, et celles représentant des trinômes du 2[e] degré sont toutes des paraboles. Quand on présente ce résultat au lycée, on n'a pas défini exactement ce qu'est une parabole [1]. On explique que l 'on peut passer de la représentation de la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$ à celle du trinôme $g : x \mapsto a\,x^2 + b\,x + c$ via une translation, une dilatation verticales et/ou une dilatation horizontale. Ceci nous amènes aux deux questions suivantes.

(1) Peut-on passer de la courbe de $f : x \mapsto x^3$ à celle du polynôme $g : x \mapsto a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d$ où $a \neq 0$ via une translation, une dilation verticales et/ou une dilatation horizontale.
(2) Que se passe-t-il plus généralement pour les courbes des fonctions $f : x \mapsto x^k$ lorsque $k \geq 4$ ?

## 2. Cas des polynômes de degré 3

2.1. **Une preuve visuelle ou presque.** Soit $\mathscr{C}_g$ la courbe de la fonction $g : x \mapsto a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ où $a \neq 0$. Nous allons démontrer que $\mathscr{C}_g$ s'obtient à partir de l'une des courbes suivantes en utilisant une translation horizontale, une translation verticale, une dilatation verticale et/ou une dilatation horizontale.

(1) $\Gamma_1$ représente $f_1 : x \mapsto x^3$.
(2) $\Gamma_2$ représente $f_2 : x \mapsto x^3 - x$ de sorte que $f_2(x) = x(x-1)(x+1)$.
(3) $\Gamma_3$ représente $f_3 : x \mapsto x^3 + x$ de sorte que $f_3(x) = x(x-\mathbf{i})(x+\mathbf{i})$ où $\mathbf{i} \in \mathbb{C}$.

*Démonstration.*

(1) **On peut supposer que** $(a\,;b\,;d) = (1\,;0\,;0)$**.**
   (a) Il est immédiat que l'on peut supposer que $a = 1$. Dans la suite, on supposera donc $g(x) = x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$.
   (b) En considérant $\mathscr{C}_g$, on observe un centre de symétrie qui a pour abscisse $m$ celle de l'unique point d'inflexion de $\mathscr{C}_g$.

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\iff 6x + 2b = 0 \\ &\iff x = -\frac{b}{3} \end{aligned}$$

   Il devient naturel de poser $x = m + t$ avec $m = -\dfrac{b}{3}$.

$$\begin{aligned} g(x) &= g(m+t) \\ &= (m+t)^3 + b\,(m+t)^2 + c\,(m+t) + d \\ &= m^3 + 3m^2\,t + 3m\,t^2 + t^3 + b\,m^2 + 2b\,m\,t + b\,t^2 + c\,m + c\,t + d \end{aligned}$$

   Le coefficient de $t^3$ reste égal à 1 et celui de $t^2$ est $3m + b = 0$. Ceci montre que l'on peut supposer $(a\,;b) = (1\,;0)$. Dans la suite, on supposera donc $g(x) = x^3 + c\,x + d$.
   (c) Il est immédiat que l'on peut supposer dans la suite que $g(x) = x^3 + c\,x$.

(2) **Cas 1 :** $c = 0$

   Nous n'avons rien à faire de plus car ici $\mathscr{C}_g = \Gamma_1$.

1. La définition géométrique des grecques anciens restent la meilleure.

(3) **Cas 2 : $c = -k^2$ avec $k > 0$**

Ici $g(x) = x^3 - k^2\,x$ soit $g(x) = x(x-k)(x+k)$.

Nous avons donc $g(k\,x) = k^3\,x(x-1)(x+1) = k^3\,f_2(x)$ puis $f_2(x) = \dfrac{1}{k^3}g(k\,x)$.

On peut ainsi passer de $\mathscr{C}_g$ à $\Gamma_2$, et donc aussi de $\Gamma_2$ à $\mathscr{C}_g$, à l'aide des transformations autorisées.

(4) **Cas 3 : $c = k^2$ avec $k > 0$**

Ici $g(x) = x^3 - (k\,\mathbf{i})^2\,x$ soit $g(x) = x(x - k\,\mathbf{i})(x + k\,\mathbf{i})$.

Nous avons donc $g(k\,x) = k^3\,x(x-\mathbf{i})(x+\mathbf{i}) = k^3\,f_3(x)$ puis comme dans le cas précédent on peut passer de $\Gamma_3$ à $\mathscr{C}_g$ à l'aide des transformations autorisées.

□

On notera que la preuve précédente est constructive, autrement dit on peut donner les applications à appliquer en fonction des coefficients $a$, $b$, $c$, et $d$ de $g(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$.

Il est évident qu'il n'est pas possible de passer de $\Gamma_i$ à $\Gamma_j$ à l'aide des transformations autorisées *(penser à la conservation géométrique du nombre de tangentes horizontales)*. On peut donc parler de trois types de courbe pour les polynômes de degré 3 contre un seul pour les fonctions affines, et aussi un seul pour les trinômes du 2e degré. Alors que se passe-t-il pour les polynômes de degré 4 et plus généralement pour ceux de degré $n \geq 5$ ?

2.2. **Une preuve via les calculs différentiel et intégral.** Soit $\mathscr{C}_g$ la courbe de la fonction $g : x \mapsto a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ où $a \neq 0$. Nous allons démontrer que $\mathscr{C}_g$ s'obtient à partir de l'une des courbes suivantes en utilisant une translation horizontale, une translation verticale, une dilatation verticale et/ou une dilatation horizontale.

(1) $\Gamma_1$ représente $f_1 : x \mapsto x^3$.

(2) $\Gamma_2$ représente $f_2 : x \mapsto x^3 - 3x$.

(3) $\Gamma_3$ représente $f_3 : x \mapsto x^3 + 3x$.

*Démonstration.* Distinguons trois cas en notant que l'on peut supposer que $a = 1$.

(1) **$g'(x)$ a une unique racine réelle.**

Nous avons ici $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g'(x) = 3(x-\alpha)^2$ et donc $g(x) = (x-\alpha)^3 + k$. Il est immédiat que l'on peut passer de $\Gamma_1$ à $\mathscr{C}_g$ à l'aide des transformations autorisées.

(2) **$g'(x)$ a deux racines réelles.**

Nous avons ici $\alpha \neq \beta$ deux réels tels que $g'(x) = 3(x-\alpha)(x-\beta)$. Les faits suivants montrent que l'on peut passer de $\mathscr{C}_g$ à $\Gamma_2$, et donc aussi de $\Gamma_2$ à $\mathscr{C}_g$, à l'aide des transformations autorisées.

(a) En posant $\delta = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $g'(x+\delta) = 3\left(x + \dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)\left(x + \dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$. Ceci nous fournit $g'(x+\delta) = 3(x-\lambda)(x+\lambda)$ avec $\lambda \neq 0$ puis ensuite $g'(\lambda\,x+\delta) = \lambda^2 f_2'(x)$.

(b) En résumé, $f_2'(x) = \dfrac{1}{\lambda^2}g'(\lambda\,x+\delta)$ puis par intégration $f_2(x) = \dfrac{1}{\lambda^3}g(\lambda\,x+\delta) + k$.

(3) **$g'(x)$ n'a pas de racine réelle.**

La forme canonique de $g'(x)$ est ici $g'(x) = 3(x-p)^2 + m$ où les réels $p$ et $m$ sont tels que $m > 0$. Les faits suivants montrent que l'on peut passer de $\mathscr{C}_g$ à $\Gamma_3$, et donc aussi de $\Gamma_3$ à $\mathscr{C}_g$, à l'aide des transformations autorisées.

(a) $g'(x+p) = 3x^2 + m$.
(b) Notant $\mu = \sqrt{\frac{m}{3}}$, on a ensuite $g'(\mu x + p) = mx^2 + m$ soit $g'(\mu x + p) = \frac{m}{3} f_3'(x)$.
(c) En résumé, $f_3'(x) = \frac{3}{m} g'(\mu x + p)$ puis par intégration $f_3(x) = \frac{3}{\mu m} g(\mu x + p) + k$.

$\square$

Il est évident qu'il n'est pas possible de passer de $\Gamma_i$ à $\Gamma_j$ à l'aide des transformations autorisées. On peut donc parler de trois types de courbe pour les polynômes de degré 3 contre un seul pour les fonctions affines et un seul pour les trinômes du 2e degré.

## 3. Cas des polynômes de degré au moins 4

wNous allons voir que le passage au degré 4 va faire exploser une vaine conjecture qui supposerait que pour un degré donné il n'y a qu'un nombre fini de types de courbe. L'argument est simple car les polynômes $f_r(x) = x(x^2-4)(x-r)$ où $r \in \mathbb{R} - \{-1\,;0\,;1\}$ ont des courbes $\mathscr{C}_r$ non similaires deux à deux via les transformations autorisées. Voici pourquoi où $r \neq 2$ par hypothèse.

(1) Supposons que $f_r$ et $f_2$ ont des courbes $\mathscr{C}_r$ et $\mathscr{C}_2$ similaires i.e. $f_r(x) = \lambda f_2(ax+b) + k$ avec nécessairement $\lambda \neq 0$ et $a \neq 0$.
(2) $f_r(x) = x^4 - rx^3 - 4x^2 + 4rx$
(3) $f_2(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x$
(4) valeurs sur $[-1\,;1]$ et valeur en 2 évolue tro p différemment !

---

## 4. AFFAIRE À SUIVRE...

---