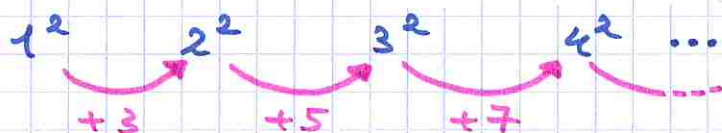


$$\prod_{k=0}^n (n+k) \notin \mathbb{N}^2 \text{ où } n \in \mathbb{N}^*$$

Source: "Le prod. de 5 entiers consécutifs n'est pas le carré d'un nombre entier" de T. Nagasaka / Nombres, Annales, 1986.

Soit  $P_n = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$  où  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ , d'où  
 $P_n = n(n^2-1)(n^2-4)$ .



Donc  $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ ,  $n^2-1 \notin \mathbb{N}^2$  et  $n^2-4 \notin \mathbb{N}^2$ .

Cas 1:  $n = m^2 \in \mathbb{N}^2$

$$\text{Dans ce cas, } \underbrace{(n^2-1)}_{a \geq 1} \underbrace{(n^2-4)}_{b \geq 1} = k^2 \in \mathbb{N}^2$$

$a = A^2 \cdot d$  où  $d$  est sans facteur carré.

$$b = B^2 \cdot \beta \text{ où } \beta \text{ —————}$$

Comme  $A^2 \cdot B^2 \cdot d\beta = k^2$ , on a forcément  $d = \beta$ , et ensuite  $3 = a - b = (A^2 - B^2)d$ .

Soit  $A^2 - B^2 = 3$ , ie  $A = 2$  et  $B = 1$ , et  $d = 1$ . On a ensuite  $a = 4$ , ie  $n^2 = 5$ . Impossible!

Soit  $A^2 - B^2 = 1$ , ie  $A^2 = B^2 + 1$ . Impossible!

Cas 2:  $n = N^2 \cdot y$  où  $y$  est sans facteur carré,  $y > 1$ .

On a comme avant  $a = A^2 \cdot d$  et  $b = B^2 \cdot \beta$ . Ce qui pré-

cède unq forcément  $d \neq \beta$ .

En fait,  
 $d > 1$  et  $\beta > 1$ .  
 Voir avant!

$$n \wedge (n^2 - 1) = 1$$

$$n \wedge (n^2 - 4) \in \{1, 2, 4\}$$

$$(n^2 - 1) \wedge (n^2 - 4) \in \{1, 3\}$$

Soit  $p \in \mathbb{P}$   
divisant  $n$ ,  
 $a$ , ou  $b$  via  
 $\text{les}(n \pm 2)$ .

(On sait que  $y \in \{2, 3, 6\}$  et  $\{\alpha, \beta\} \subseteq \{1, 2, 3, 6\}$ ,  
puis ce qui précède donne  $y \wedge \alpha = 1$ ,  $y \wedge \beta = 2$  ou  $1$ ,  
 $\alpha \wedge \beta = 3$  ou  $1$ . Ceci donne les cas suivants.

Généraliser en  
avant!

$y$	$\alpha$	$\beta$
2	1	2
2	3	6

→ impossible pour  $\beta$  car  
on veut un carré.

Soit  $n = 2N^2$ ,  $n^2 - 1 = A^2$ ,  $n^2 - 4 = 2B^2$ . On sait que  
 $n^2 - 1 = A^2$  n'est pas possible!

$$\text{Soit } n = 2N^2, \quad n^2 - 1 = 3A^2 \text{ et } n^2 - 4 = 6B^2.$$

$$\bullet 3 \mid (n^2 - 1)$$

$$\Rightarrow n^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow n \equiv \pm 1 \pmod{3}$$

$$\bullet \text{ Modulo } 3, \text{ on a aussi: } n \equiv 2N^2 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow n \equiv 2 \times \left(\frac{0}{1}\right) \pmod{3}$$

$$\Rightarrow n \equiv 0 \text{ ou } -1 \pmod{3}$$

$$\text{Donc } n = -1 + 3k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

• On a donc  $n - 2 = -3 + 3k = 3(k - 1)$  d'où  $3 \mid n - 2$ ,  
puis  $6 \mid (n - 2)$  via  $n = 2N^2$ .

$$\bullet (n - 2)(n + 2) = 6B^2$$

$$6p \times q = 6B^2$$

Notons que  $n + 2 \notin \mathbb{N}^2$  car un prod. de 4 entiers

$n$  n'est jamais le carré d'un entier. On arrive à  
 $p = P^2 \cdot \pi$  et  $q = Q^2 \cdot \pi$  avec  $\pi$  sans fact. carré.  
Via  $4 = n + 2 - (n - 2) = \pi(6P^2 - Q^2)$ ,  
on doit avoir  $\pi = 2$ .

$$n + 2 = 2 \cdot Q^2 \text{ et } n = 2N^2 \\ \Rightarrow N^2 + 1 = Q^2 \quad \text{Impossible!}$$

①

La preuve de la source utilisée ne note  
pas la nécessité d'avoir  $3 \mid (n - 2)$  : une  
disjonction de cas est requise.