ARTICLE

# Changer d'aire !

Publié le 01.09.21 Par Karim Zayana



## Et maintenant, à nous la 3D !

Ce qui fonctionnait avec une variable [1] reste efficace pour deux, à une nuance près comme nous allons le constater. Soit donc à calculer l'intégrale double

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

où l'intégrande $f$ dépend du couple $(x, y)$ qui dépend à son tour d'un couple $(u, v)$. Ce dernier lien s'exprime théoriquement par la relation $(x, y) = \Phi(u, v)$ où la fonction $\Phi$ sera parée de toutes les qualités qui, au fil de l'eau, se révéleront utiles. En particulier, $\Phi$ applique un certain domaine $\Delta$ sur le domaine $D$ et s'y différentie à loisir. Par commodité, et malgré la confusion que cela créerait, on identifie volontiers $\Phi$ à ses valeurs. Ainsi trouvera-t-on usuellement

$$(x, y) = \Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))\,. \tag{2}$$

À mesure que $(u, v)$ balaye $\Delta$ au pas rectangulaire infinitésimal $\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, $(x, y)$ progresse en pavant $D$ de dalles élémentaires aux extrémités repérées par

$(x(u, v), y(u; v))$;

$$(x(u+\mathrm{d}u,v),y(u+\mathrm{d}u,v)) \simeq (x(u,v),y(u,v)) + \underbrace{(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u})}_{\frac{\partial \Phi}{\partial u}}\mathrm{d}u;$$

$$(x(u,v+\mathrm{d}v),y(u,v+\mathrm{d}v)) \simeq (x(u,v),y(u,v)) + \underbrace{(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v})}_{\frac{\partial \Phi}{\partial v}}\mathrm{d}v;$$

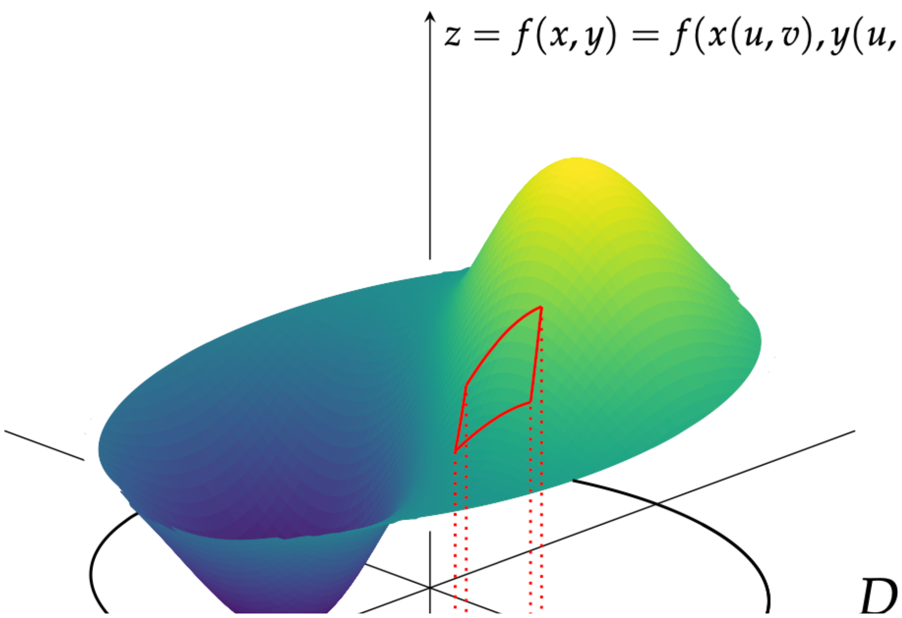
$$(x(u+\mathrm{d}u,v+\mathrm{d}v),y(u+\mathrm{d}u,v+\mathrm{d}v)) \simeq (x(u,v),y(u,v)) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

La Figure 1 illustre la scène toute entière tandis que la Figure 2 détaille une dalle élémentaire dont les arêtes $\frac{\partial \Phi}{\partial u}\mathrm{d}u$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial v}\mathrm{d}v$ ressortent. Celle-ci, de forme parallélogramme, supporte une pile de hauteur générique $f(x(u,v),y(u,v))$. La pile découpe donc une calotte quasi plane sur la surface associée à $f$ et repose sur sa base d'aire $\mathrm{d}\mathcal{A}$, *non pas* $\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, mais désormais

$$\mathrm{d}\mathcal{A} = \det(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\mathrm{d}u, \frac{\partial \Phi}{\partial v}\mathrm{d}v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u & \frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v \\ \frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u & \frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}_{\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Apparaît le déterminant de la (transposée de) la matrice jacobienne de $\Phi$, c'est-à-dire la jacobienne du changement de variables, souvent notée $\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)}$ ou $\det(J_\Phi)$ dans la littérature. Le volume algébrique de la pile est ainsi

$$f(x(u,v),y(u,v))\,\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$



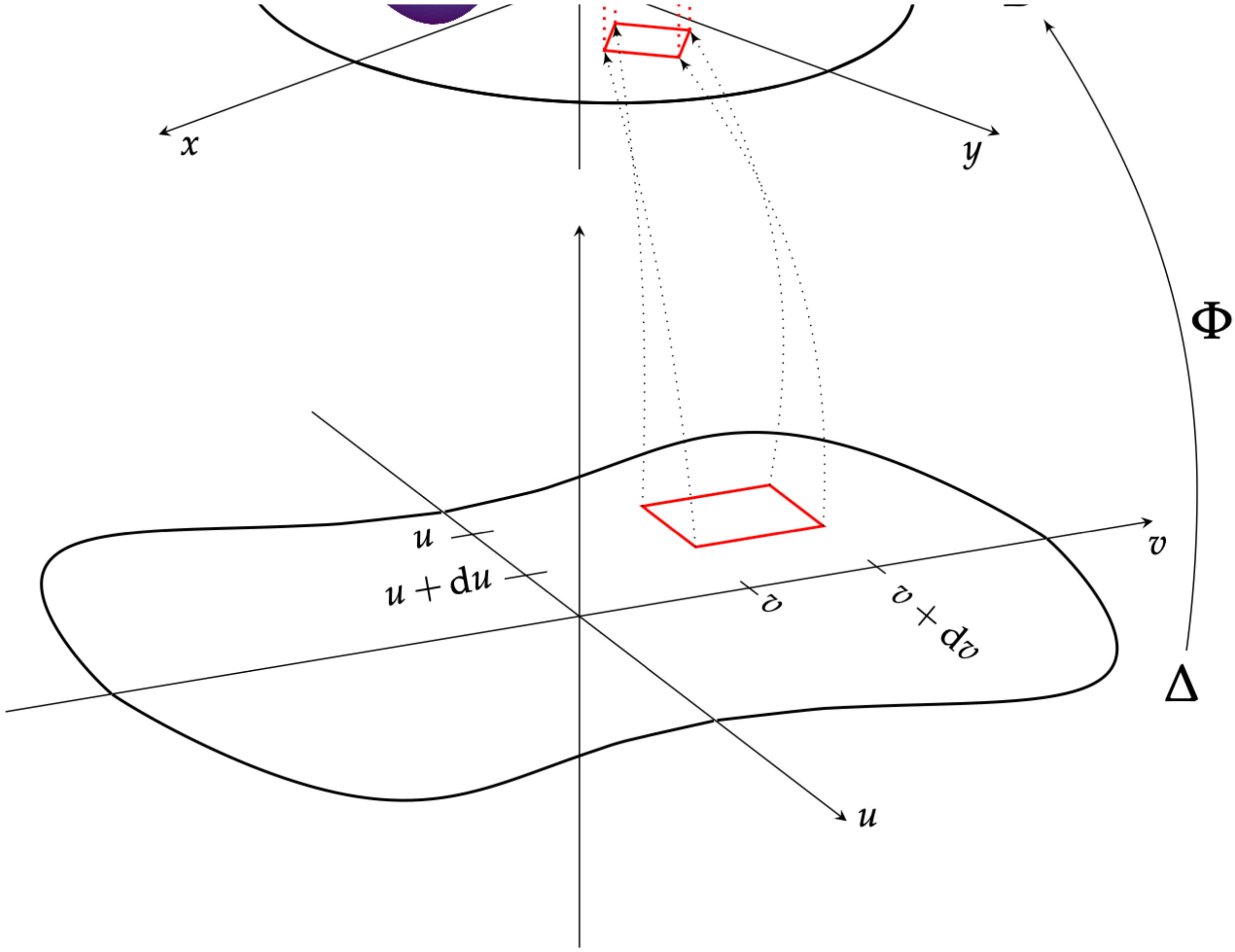
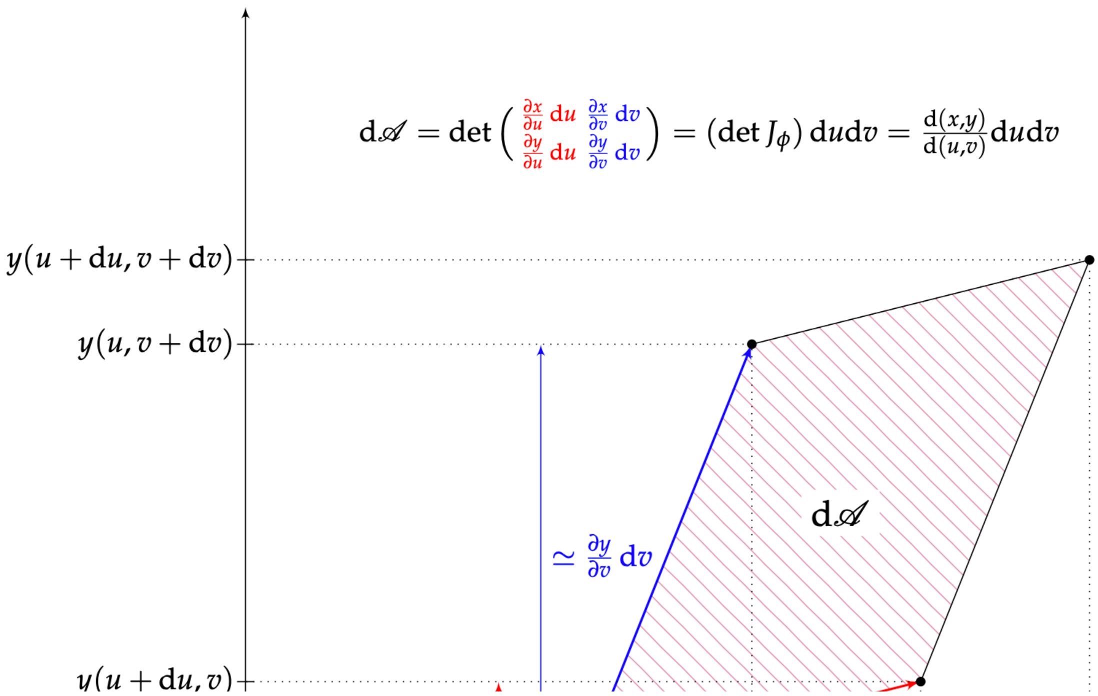



Figure 1 - Changement de variables et intégrales doubles

Les secrets du changement de variables avec des intégrales doubles : une nouvelle pile sous la surface $\left(z = f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v))\right)$.

Auteur : Ivan Boyer

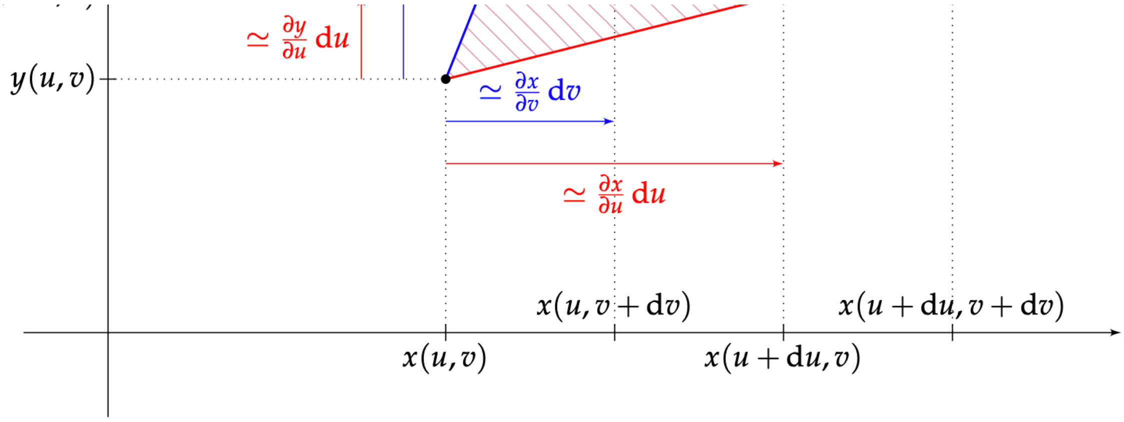



Figure 2 - Changement de variables et intégrales doubles : le plan $(Oxy)$.

Les secrets du changement de variables avec les intégrales doubles : une dalle sur le nouveau pavage du domaine $D$.

Auteur : Ivan Boyer


Contrairement aux intégrales simples, les intégrales multiples ne sont pas orientées : $D$ et $\Delta$ sont des domaines géométriques. Seule la cote $f$ est signée. Cela prête à deux conséquences :

Les aires élémentaires qui interviennent doivent être comptées positivement, et donc le jacobien évalué en valeur absolue ;

De ce fait, si le pavage revient sur ses pas, les volumes des piles s'accumulent au lieu de se compenser. On exige alors de $\Phi$ d'appliquer bijectivement $\Delta$ sur $D$, éventuellement à quelques détails de mesure nulle près.

Dans ces conditions,

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta f\left(x(u,v), y(u,v)\right) \left|\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \qquad (3)$$

C'est heureux, tout cela s'étend à trois, quatre, voire $n$ variables...

## CRÉDITS

Auteur(s)

**Karim Zayana**

Inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche, professeur invité à Télécom

Paris

PARTAGER CET ARTICLE

## BIBLIOGRAPHIE

[1] Zayana K, Boyer I, Rabiet V. L'aire du changement. CultureMath. 2021.