

BROUILLON - A PROPOS DE LA RÉCURRENCE

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



Fait 0.1. *La preuve par récurrence s’exprime comme suit où $\mathcal{P}(k)$ désignera n’importe quelle proposition dépendant d’un paramètre naturel $k \in \mathbb{N}$.*

On suppose avoir démontré les deux faits suivants.

- **Initialisation** : $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : $\forall k \in \mathbb{N}, [\mathcal{P}(k) \implies \mathcal{P}(k+1)]$.

Sous ces hypothèses, nous pouvons affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Démonstration. Par l’absurde, en considérant le plus petit naturel n_0 tel que $\mathcal{P}(n_0)$ soit fausse, et en notant que $n_0 > 0$. □

Dès lors, le schéma de preuve suivant ne reprend pas le schéma précédent.

- **Initialisation** : $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité bis** : supposons qu’il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, puis déduisons-en que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

L’hérédité bis est de la forme : $[\exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \mathcal{P}(k) \text{ vraie}] \implies [\mathcal{P}(k+1) \text{ vraie}]$.

Ceci peut se réécrire : $\exists k \in \mathbb{N}, [\mathcal{P}(k) \text{ vraie}] \implies [\mathcal{P}(k+1) \text{ vraie}]$.

De façon équivalente, on a : $\exists k \in \mathbb{N}, [\mathcal{P}(k) \implies \mathcal{P}(k+1)]$.

La deuxième proposition est clairement fausse contrairement à la suivante utilisable au lycée.

- **Initialisation** : $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité bis OK** : supposons avoir $\mathcal{P}(k)$ vraie pour $k \in \mathbb{N}$ quelconque, montrons alors que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.