BROUILLON - IDENTITÉS REMARQUABLES FACILEMENT GRÂCE À PASCAL ET NEWTON

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writing/drafts.

Mentions « légales »

Table des matières

1. Le triangle de Pascal, c’est naturel

1.1. **Expérimenter.** Commençons par nous intéresser aux développements des expressions $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ et $(a+b)^4$.

1.1.1. *Développement de* $(a+b)^2$. Rappelons que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Ceci se démontre facilement comme suit.

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= ({\color{red}a} + {\color{green}b})(a+b) \\
&= {\color{red}a^2 + ab} + {\color{green}ba + b^2} \\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}$$

1.1.2. *Développement de* $(a+b)^3$. Pour développer $(a+b)^3$, nous allons bien entendu nous appuyer sur celui de $(a+b)^2$. Allons-y.

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= ({\color{red}a} + {\color{green}b})(a+b)^2 \\
&= ({\color{red}a} + {\color{green}b})(a^2 + 2ab + b^2) \\
&= {\color{red}a^3 + a \cdot 2ab + a \cdot b^2} + {\color{green}b \cdot a^2 + b \cdot 2ab + b^3} \\
&= {\color{red}a^3 + 2a^2b + ab^2} + {\color{green}ba^2 + 2ab^2 + b^3} \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{aligned}$$

Sans trop de peine, nous avons obtenu : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Date: 5 Octobre 2021.

1.1.3. *Développement de* $(a+b)^4$. Pour développer $(a+b)^4$, passons via celui de $(a+b)^3$. Une routine s'installe...

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3 \\ &= (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) \\ &= a^4+a\cdot 3a^2b+a\cdot 3ab^2+a\cdot b^3+b\cdot a^3+b\cdot 3a^2b+b\cdot 3ab^2+b^4 \\ &= a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+ba^3+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\ &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{aligned}$$

Sans trop de peine, nous avons obtenu : $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

1.1.4. *Aller plus loin.* Au moins en théorie, pour $n \in \mathbb{N}^*$ nous avons exhibé un procédé de développement de $(a+b)^n$ via celui de $(a+b)^{n-1}$ en utilisant $(a+b)^n = (a+b)(a+b)^{n-1}$. Ceci étant indiqué, même pour $n = 5$, nous devinons qu'il va vite être pénible de rédiger à chaque fois les développements. Il devient alors naturel de se demander si par hasard il n'y aurait pas un moyen efficace de développer par exemple $(a+b)^7$. Nous allons voir que c'est bien le cas.

1.1.5. *Une notation efficace.* Retenir les trois identités remarquables suivantes n'est a priori pas simple.

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

Un moyen efficace de le faire est de noter que les écritures standardisées utilisées sont toutes avec des puissances décroissantes de a et croissantes de b . Ainsi dans $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ où l'exposant maximal est 4 nous avons en se souvenant que $x^0 \overset{\text{conv}}{=} 1$ par convention :

a^r	a^4	a^3	a^2	$a^1 = a$	$a^0 = 1$
b^s	$b^0 = 1$	$b^1 = b$	b^2	b^3	b^4
Produit	a^4	a^3b	a^2b^2	ab^3	b^4

Avec cette écriture en tête, nous pouvons retenir plus simplement les développement de $(a+b)^n$ pour $n \in [\![2\,;5]\!]$ comme suit où le cas admis pour $n = 5$ va nous permettre de vérifier la bonne compréhension de la convention utilisée.

n						
$2 \rightarrow$	1	2	1			
$3 \rightarrow$	1	3	3	1		
$4 \rightarrow$	1	4	6	4	1	
$5 \rightarrow$	1	5	10	10	5	1

Pour $(a+b)^5$, l'exposant maximal sera 5 et donc nous devons penser à ce qui suit.

a^r	a^5	a^4	a^3	a^2	a^1	a^0
b^s	b^0	b^1	b^2	b^3	b^4	b^5
Produit	a^5	a^4b	a^3b^2	a^2b^3	ab^4	b^5

Nous avons donc :

$5 \rightarrow$	1	5	10	10	5	1
	a^5	a^4b	a^3b^2	a^2b^3	ab^4	b^5

Finalement $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. Le lecteur motivé pourra le vérifier via $(a+b)^5 = (a+b)(a+b)^4$ et le développement de $(a+b)^4$ démontré plus haut.

1.2. **Généraliser (si possible).** Rien ne nous assure a priori de découvrir un moyen simple de développer $(a+b)^n$ mais soyons confiant et tentons l'aventure en nous appuyant sur notre notation simplifiée. Nous verrons alors si de nouveau les mathématiques nous révèleront une belle structure cachée.

Considérons le cas de $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a(a+b)^2 + b(a+b)^2$. Avec notre notation, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ s'écrit :

$2 \rightarrow$	1	2	1
	a^2	ab	b^2

Tableau pour $n = 2$

Nous voulons en déduire :

$3 \rightarrow$	?	?	?	?
	a^3	a^2b	ab^2	b^3

Tableau pour $n = 3$

Le tableau pour $n = 2$ donne par multiplication de chaque terme par a :

1	2	1
a^3	a^2b	ab^2

Distribution de a sur $(a+b)^2$

La multiplication de chaque terme par b donne de façon analogue :

1	2	1
a^2b	ab^2	b^3

Distribution de b sur $(a+b)^2$

Mis dans le tableau pour $n = 3$, nous avons ce qui suit où les deux dernières lignes redonnent $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

1	2	1	
a^3	a^2b	ab^2	
	1	2	1
	a^2b	ab^2	b^3
1	3	3	1
a^3	a^2b	ab^2	b^3

Tableau pour $n = 3$

Faisons un autre pas vers une belle abstraction en notant trois choses.

(1) La multiplication par a revient à garder la ligne résumé du développement de $(a+b)^2$.
(2) La multiplication par b revient à décaler d'une case vers la droite la ligne résumé du développement de $(a+b)^2$.
(3) La ligne résumé du développement de $(a+b)^3$ est la somme des deux lignes précédentes, une case vide valant zéro.

En appliquant les règles précédentes, dont il est clair qu'elles sont générales, nous retrouvons le développement $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ à partir du tableau précédent.

$\times a \rightarrow$	1	3	3	1	
$\times b \rightarrow$		1	3	3	1
	1	4	6	4	1
	a^4	a^3b	a^2b^2	ab^2	b^4

Développement de $(a+b)^4$

Poursuivons avec $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ que nous avons admis précédemment.

$\times a \rightarrow$	1	4	6	4	1	
$\times b \rightarrow$		1	4	6	4	1
	1	5	10	10	5	1
	a^5	a^4b	a^3b^2	a^2b^3	ab^4	b^5

Développement de $(a+b)^5$

Nous voilà prêts à découvrir les développements de $(a+b)^6$ et $(a+b)^7$ sans trop nous fatiguer.

$\times a \rightarrow$	1	5	10	10	5	1	
$\times b \rightarrow$		1	5	10	10	5	1
	1	6	15	20	15	6	1
	a^6	a^5b	a^4b^2	a^3b^3	a^2b^4	ab^5	b^6

Développement de $(a+b)^6$

$\times a \rightarrow$	1	6	15	20	15	6	1	
$\times b \rightarrow$		1	6	15	20	15	6	1
	1	7	21	35	35	21	7	1
	a^7	a^6b	a^5b^2	a^4b^3	a^3b^4	a^2b^5	ab^6	b^7

Développement de $(a+b)^7$

Nous avons démontré les deux nouvelles identités remarquables suivantes.

- $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$
- $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

Auriez-vous eu le courage de trouver le dernier développement directement en calculant avec des a et des b ? L'auteur de ces lignes ne l'aura jamais !

1.3. **Une belle simplification.** On peut en fait simplifier la méthode précédente en utilisant un unique tableau comme ci-dessous avec la règle de calcul à droite pour les cases non vides de valeurs différentes de 1 (à vous de voir pourquoi). Notons que l'on a ajouté les coefficients pour les développements de $(a+b)^0 \overset{\text{conv}}{=} 1$ et $(a+b)^1 = a + b$.

n									
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Coefficients pour le développement de $(a+b)^n$

p	q
	$p+q$

Règle de calcul pour les cases non vides de valeurs différentes de 1 *en fonction de la ligne précédente*

Ce tableau, avec sa règle de calcul, est appelé « triangle de Pascal » .

2. Le point de vue de Newton

TODO