

# BROUILLON - SUITES HOMOGRAPHIQUES SANS MYSTICISME

CHRISTOPHE BAL

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



## TABLE DES MATIÈRES

### 1. FRACTIONS HOMOGRAPHIQUES ET MATRICES

Soit  $F(X) = \frac{aX + b}{cX + d}$  et  $G(X) = \frac{pX + q}{rX + s}$  non constantes c’est à dire telles que  $ad - bc \neq 0$  et  $ps - rq \neq 0$ .

Il est immédiat qu’il existe des paramètres  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  tels que  $F \circ G(X) = \frac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta}$ . Existe-t-il un moyen simple de calculer les paramètres de  $F \circ G$  en fonction de ceux de  $F$  et  $G$ ?

$$F \circ G(X) = \frac{a(pX + q) + b(rX + s)}{c(pX + q) + d(rX + s)} = \frac{(ap + br)X + aq + bD}{(cp + dr)X + cq + ds}$$

En associant  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  à  $F(X)$ ,  $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$  à  $G(X)$  et  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  à  $F \circ G(X)$ , nous venons de démontrer que  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ .

Comme  $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$ ,  $\frac{aX + b}{cX + d} = \frac{\lambda aX + \lambda b}{\lambda cX + \lambda d}$ , on va considérer l’écriture de  $F$  telle que  $ad - bc = 1$  et lui associer la matrice  $M_F \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Par choix  $\det M_F = 1$ , de sorte que l’on a un isomorphisme de groupes entre les fonctions homographiques  $F(X) = \frac{aX + b}{cX + d}$  avec  $ad - bc = 1$  et le groupe  $SL(2, \mathbb{C})$  des matrices  $2 \times 2$  de déterminant 1.

### 2. AFFAIRE À SUIVRE...

**Temporary page!**

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X now knows how many pages to expect for this document.