

# CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTRIERS CONSÉCUTIFS – DES SOLUTIONS À LA MAIN

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons « Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International ».



---

## TABLE DES MATIÈRES

1.	Ce qui nous intéresse	2
2.	Notations utilisées	2
3.	Les carrés parfaits	3
3.1.	Structure	3
3.2.	Distance entre deux carrés parfaits	3
4.	Avec 2 facteurs	5
5.	Avec 3 facteurs	6
6.	Avec 4 facteurs	7
7.	Avec 5 facteurs	9
8.	Avec 6 facteurs	13
9.	Avec 7 facteurs	16
10.	Avec 8 facteurs	18
11.	Avec 9 facteurs	20
12.	Avec 10 facteurs	21
13.	Avec 11 facteurs	23
14.	Avec 12 facteurs	24
15.	Avec 13 facteurs	25
16.	Sources utilisées	26

## 1. CE QUI NOUS INTÉRESSE

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers »<sup>1</sup>, Paul Erdős démontre que pour tout couple  $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , le produit de  $(k+1)$  entiers consécutifs  $n(n+1) \cdots (n+k)$  n'est jamais le carré d'un entier. Plus précisément, l'argument général de Paul Erdős est valable pour  $k+1 \geq 100$ , soit à partir de 100 facteurs.

Dans ce document, nous proposons quelques cas particuliers résolus de façon « adaptative » à la sueur des neurones, le but recherché étant de fournir différentes approches même si parfois cela peut prendre du temps.

**Remarque 1.1.** *Il arrivera parfois que certaine démonstration cite d'autres preuves données plus tard dans le texte. Ceci permet de respecter les sources qui ont été utilisées.*

## 2. NOTATIONS UTILISÉES

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- $\forall (n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k-1} (n+i)$ .

Par exemple,  $\pi_n^1 = n$ ,  $\pi_n^2 = n(n+1)$  et  $\pi_{n+2}^4 = (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$ .

- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$  est l'ensemble des carrés parfaits. On note aussi  ${}^2_*\mathbb{N} = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$ .

$\mathbb{N}_{sf}$  est l'ensemble des naturels non nuls sans facteur carré<sup>2</sup>.

- $\mathbb{P}$  désigne l'ensemble des nombres premiers.

$\forall (p; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$ ,  $v_p(n) \in \mathbb{N}$  est la valuation  $p$ -adique de  $n$ , c'est-à-dire  $p^{v_p(n)} \mid n$  et  $p^{v_p(n)+1} \nmid n$ , autrement dit  $p^{v_p(n)}$  divise  $n$ , contrairement à  $p^{v_p(n)+1}$ .

- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$ ,  $n \wedge m$  désigne le PGCD de  $n$  et  $m$ .
- $2\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.  
 $2\mathbb{N} + 1$  est l'ensemble des nombres naturels impairs.
- $(a \pm b)$  est un raccourci pour  $(a+b)(a-b)$ .

---

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).

2. En anglais, on dit « square free ».

## 3. LES CARRÉS PARFAITS

## 3.1. Structure.

**Fait 3.1.**  $n \in {}^2\mathbb{N}_*$  si, et seulement si,  $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ .

*Démonstration.* Immédiat à valider. □

**Fait 3.2.**  $\forall n \in {}^2\mathbb{N}_*$ , s'il existe  $m \in {}^2\mathbb{N}_*$  tel que  $n = fm$  alors  $f \in {}^2\mathbb{N}_*$ .

*Démonstration.*  $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(fm) \in 2\mathbb{N}, v_p(m) \in 2\mathbb{N}$  et  $v_p(fm) = v_p(f) + v_p(m)$  donnent  $v_p(f) \in 2\mathbb{N}$ . □

**Fait 3.3.**  $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , si  $a \wedge b = 1$  et  $ab \in {}^2\mathbb{N}_*$ , alors  $a \in {}^2\mathbb{N}_*$  et  $b \in {}^2\mathbb{N}_*$ .

*Démonstration.*  $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(ab) \in 2\mathbb{N}$ , et  $p$  ne peut diviser à la fois  $a$  et  $b$ , donc  $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(a) \in 2\mathbb{N}$  et  $v_p(b) \in 2\mathbb{N}$ , autrement dit  $(a, b) \in {}^2\mathbb{N}_* \times {}^2\mathbb{N}_*$ . □

**Fait 3.4.** Soit  $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  tel que  $ab \in {}^2\mathbb{N}_*$ , ainsi que  $(\alpha, \beta, A, B) \in (\mathbb{N}_{sf})^2 \times \mathbb{N}^2$  tel que  $a = \alpha A^2$  et  $b = \beta B^2$ . Nous avons alors forcément  $\alpha = \beta$ .

*Démonstration.* Le fait 3.2 donne  $\alpha\beta \in {}^2\mathbb{N}_*$ . De plus,  $\forall p \in \mathbb{P}$ , nous avons  $v_p(\alpha) \in \{0, 1\}$  et  $v_p(\beta) \in \{0, 1\}$ . Finalement,  $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(\alpha) = v_p(\beta)$ , autrement dit  $\alpha = \beta$ . □

## 3.2. Distance entre deux carrés parfaits.

**Fait 3.5.** Soit  $(N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  tel que  $N > M$ .

(1)  $N^2 - M^2 \geq 2N - 1$ , d'où l'impossibilité d'avoir  $N^2 - M^2 < 3$ .

(2) Notons  $nb_{sol}$  le nombre de solutions  $(N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  de  $N^2 - M^2 = \delta$ .

Pour  $\delta \in \llbracket 1; 20 \rrbracket$ , nous avons :

(a)  $nb_{sol} = 0$  si  $\delta \in \{1, 2, 4, 6, 10, 14, 18\}$ .

(b)  $nb_{sol} = 1$  si  $\delta \in \{3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 16\}$ . Par exemple,  $N^2 - M^2 = 3$  uniquement si  $(N, M) = (2, 1)$ .

(c)  $nb_{sol} = 2$  si  $\delta = 15$ .

*Démonstration.*

(1) Comme  $N - 1 \geq M$ , nous obtenons :  $N^2 - M^2 \geq N^2 - (N - 1)^2 = 2N - 1$ .

(2) Nous avons  $2N - 1 \leq \delta$ , soit  $N \leq \frac{\delta + 1}{2}$ . Ceci permet de comprendre le programme Python donné dans la page suivante qui sert à obtenir facilement les nombres de solutions indiqués. □

Finissons par une jolie formule même si elle ne nous sera pas d'une grande aide dans la suite.

**Fait 3.6.**  $\forall (N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , si  $N > M$ , alors  $N^2 - M^2 = \sum_{k=M+1}^N (2k - 1)$ .

*Démonstration.*  $N^2 = \sum_{k=1}^N (2k - 1)$  donne l'identité indiquée<sup>3</sup>. □

---

3. La formule utilisée est facile à démontrer algébriquement, et évidente à découvrir géométriquement.

```
from math import sqrt, floor

def sol(diff):
    solfound = []

    for i in range(1, (diff + 1) // 2 + 1):
        tested = i**2 - diff

        if tested < 0:
            continue

        tested = floor(sqrt(i**2 - diff))

        if tested == 0:
            continue

        if tested**2 == i**2 - diff:
            solfound.append((i, tested))

    return solfound
```

## 4. AVEC 2 FACTEURS

**Fait 4.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1) \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Preuve 1.* Il suffit de noter que  $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$ . □

*Preuve 2.* Supposons que  $\pi_n^2 = n(n+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$ .

Comme  $n \wedge (n+1) = 1$ , le fait 3.3 donne  $(n, n+1) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$ , d'où l'existence de deux carrés parfaits non nuls distants de 1. D'après le fait 3.5, ceci est impossible. □

*Preuve 3.* Supposons que  $\pi_n^2 = n(n+1) = N^2$  où  $N \in \mathbb{N}^*$ .

Nous obtenons une contradiction comme suit.

$$\begin{aligned}
 & n(n+1) = N^2 \\
 \iff & 2 \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^N (2k-1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} n(n+1) = 2 \sum_{k=1}^n k \text{ et } N^2 = \sum_{k=1}^N (2k-1). \\
 \iff & \sum_{k=1}^n 2k = \sum_{k=1}^N 2k - N \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} N > n \text{ car } N^2 - n^2 = n > 0. \\
 \iff & \sum_{k=n+1}^N 2k - N = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} N > 0 \text{ rend impossible la dernière égalité.} \\
 \iff & \sum_{k=n+1}^{N-1} 2k + N = 0
 \end{aligned}$$

□

## 5. AVEC 3 FACTEURS

**Fait 5.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2) \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Preuve 1.* Supposons que  $\pi_n^3 \in {}^2\mathbb{N}$ .

Posant  $m = n + 1$ , nous avons  $\pi_n^3 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$  où  $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Comme  $m \wedge (m^2-1) = 1$ , le fait 3.3 donne  $(m, m^2-1) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$ . Or,  $m^2-1 \in {}^2\mathbb{N}$  est impossible d'après le fait 3.5.  $\square$

*Preuve 2.* Supposons que  $\pi_n^3 \in {}^2\mathbb{N}$ .

Comme  $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$  ne peut diviser au maximum qu'un seul des trois facteurs  $n$ ,  $(n+1)$  et  $(n+2)$ , nous savons que  $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 3}, \forall i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ . Mais que se passe-t-il pour  $p = 2$ ?

Supposons d'abord  $n \in 2\mathbb{N}$ .

- Posant  $n = 2m$ , nous avons  $\pi_n^3 = 4m(2m+1)(m+1)$ , d'où  $m(2m+1)(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$ .
- Comme  $v_2(2m+1) = 0$ , nous savons que  $2m+1 \in {}^2\mathbb{N}$ .
- Donc  $\pi_m^2 = m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$  via le fait 3.2, mais le fait 4.1 interdit cela.

Supposons maintenant  $n \in 2\mathbb{N} + 1$ .

- Nous savons que  $n \in {}^2\mathbb{N}$  via  $v_2(n) = 0$ .
- On conclut comme dans le cas précédent mais en passant via  $\pi_{n+1}^2 = (n+1)(n+2)$ .  $\square$

Finissons avec une preuve dans l'esprit de la démonstration du cas 12.1.

*Preuve 3.* Supposons que  $\pi_n^3 \in {}^2\mathbb{N}$ .

Clairement,  $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 3}, \forall i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ , donc pour les facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^3$ , nous avons l'une des deux alternatives suivantes, chacune d'elles levant une contradiction.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  sont de valuations 2-adiques impairs.  
Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (2N^2, 2M^2)$  avec  $|2(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$ , c'est-à-dire  $|N^2 - M^2| = 1$ , mais c'est impossible d'après le fait 3.5.
- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  sont de valuations 2-adiques pairs.  
Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (N^2, M^2)$  avec  $|N^2 - M^2| \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$ , mais c'est impossible d'après le fait 3.5.  $\square$

## 6. AVEC 4 FACTEURS

**Fait 6.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Preuve 1.* Nous pouvons ici faire les manipulations algébriques naturelles suivantes qui cherchent à obtenir le même coefficient pour  $n$  dans chaque parenthèse.

$$\begin{aligned}\pi_n^4 &= n(n+3) \cdot (n+1)(n+2) \\ &= (n^2 + 3n) \cdot (n^2 + 3n + 2) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} m = n^2 + 3n \\ &= m(m+2) \\ &= m^2 + 2m \\ &= (m+1)^2 - 1\end{aligned}$$

Comme  $m > 0$ ,  $(m+1)^2 - 1 \notin {}^2\mathbb{N}$  d'après le fait 3.5, donc  $\pi_n^4 \notin {}^2\mathbb{N}$ .  $\square$

*Preuve 2.* En « symétrisant » certaines expressions, nous obtenons d'autres manipulations algébriques qui permettent de conclure comme ci-dessus.

$$\begin{aligned}\pi_n^4 &= n(n+1)(n+2)(n+3) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} x = n + \frac{3}{2} \\ &= \left(x \pm \frac{3}{2}\right) \left(x \pm \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} y = x^2 - \frac{5}{4} \text{ où } \frac{5}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ &= (y \pm 1) \\ &= y^2 - 1 \\ &= \left(\left(n + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right)^2 - 1 \\ &= (n^2 + 3n + 1)^2 - 1\end{aligned}$$

$\square$

Un échange sur <https://math.stackexchange.com> a inspiré la démonstration non algébrique suivante (voir la section 16).

*Preuve 3.* Supposons que  $\pi_n^4 \in {}^2_*\mathbb{N}$ .

Clairement, nous avons les faits suivants.

- $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 4}, \forall i \in \llbracket 0; 3 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ .
- $\exists u \in \{n, n+1\}$  tel que  $\{u, u+2\} \subset 2\mathbb{N} + 1$ .  
Nous avons alors  $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}, (v_p(u), v_p(u+2)) \in (2\mathbb{N})^2$ , donc, pour tout naturel  $m \in \{u, u+2\}$ , il existe  $M \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m = M^2$  ou  $m = 3M^2$ .
- Forcément, il existe  $(A, B) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que  $\{u, u+2\} = \{A^2, 3B^2\}$ . Voici pourquoi.
  - $\{u, u+2\} = \{A^2, B^2\}$  donne deux carrés distants de 2, ceci contredit le fait 3.5.
  - $\{u, u+2\} = \{3A^2, 3B^2\}$  donne  $3A^2 - 3B^2 = \pm 2$ , ce qui est impossible.

Nous savons donc que l'un des facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^4$  possède une valuation 3-adique impaire. Ceci n'est possible que si  $n$  et  $(n+3)$  ont une valuation 3-adique impaire. Dès lors, comme ci-dessus, nous avons  $(Q, R) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que  $\{n+1, n+2\} = \{Q^2, 2R^2\}$ . Ceci nous amène aux deux situations contradictoires suivantes où  $(A, B, C, D) \in (\mathbb{N}^*)^4$ .

- Cas 1 :  $(n, n+1, n+2, n+3) = (6A^2, B^2, 2C^2, 3D^2)$ .
  - Posons  $x = n + \frac{3}{2}$  de sorte que  $x - \frac{3}{2} = 6A^2$ ,  $x - \frac{1}{2} = B^2$ ,  $x + \frac{1}{2} = 2C^2$  et  $x + \frac{3}{2} = 3D^2$ .

- Nous avons alors  $(x - \frac{3}{2})(x + \frac{3}{2}) = 2E^2$ , c'est-à-dire  $x^2 - \frac{9}{4} = 2E^2$ , avec  $E \in \mathbb{N}^*$ .
- De même,  $x^2 - \frac{1}{4} = 2F^2$  avec  $F \in \mathbb{N}^*$ .
- Par simple soustraction, nous obtenons  $2F^2 - 2E^2 = 2$ , puis  $F^2 - E^2 = 1$ , mais ceci contredit le fait 3.5.
- Cas 2 :  $(n, n+1, n+2, n+3) = (3A^2, 2B^2, C^2, 6D^2)$ .

Un raisonnement similaire au précédent montre que ce cas aussi est impossible. □



## 7. AVEC 5 FACTEURS

**Fait 7.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2_*\mathbb{N}$ .

Commençons par une idée simple consistant à se concentrer sur les nombres premiers de valuation impaire dans  $\pi_n^5$  supposé être un carré parfait.

*Preuve 1.* Supposons que  $\pi_n^5 \in {}^2_*\mathbb{N}$ .

Clairement,  $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 5}, \forall i \in \llbracket 0; 4 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ . Pour  $p = 2$  et  $p = 3$ , nous avons les alternatives suivantes pour chaque facteur  $(n+i)$  de  $\pi_n^5$ .

- [A1]  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- [A2]  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times (2\mathbb{N} + 1)$
- [A3]  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times 2\mathbb{N}$
- [A4]  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times (2\mathbb{N} + 1)$

Comme nous avons cinq facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions très facilement.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient [A1].

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (N^2, M^2)$  avec  $(N, M) \in \mathbb{N}^*$ . On peut supposer  $N > M$ , de sorte que  $N^2 - M^2 \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Selon le fait 3.5, seul  $N^2 - M^2 = 3$  avec  $(N, M) = (2, 1)$  est possible, puis nécessairement  $n = 1$ , or  $\pi_1^5 = 5! \in {}^2_*\mathbb{N}$  est faux car  $v_5(5!) = 1$ .

*Autre méthode :* on note que  $n \notin {}^2_*\mathbb{N}$  car sinon  $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2_*\mathbb{N}$  donne  $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2_*\mathbb{N}$  via le fait 3.2, mais ceci contredit le fait 6.1. De même,  $n+4 \notin {}^2_*\mathbb{N}$ . Dès lors, nous avons  $\{n+i, n+i'\} \subseteq \{n+1, n+2, n+3\}$ , d'où l'existence de deux carrés parfaits non nuls éloignés de moins de 3, et ceci contredit le fait 3.5.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient [A2].

Dans ce cas, le couple de facteurs est  $(n, n+3)$ , ou  $(n+1, n+4)$ .

(1) Supposons d'abord que  $n$  et  $(n+3)$  vérifient [A2].

Comme  $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}, v_p(n) \in 2\mathbb{N}$  et  $v_p(n+3) \in 2\mathbb{N}$ , mais aussi  $v_3(n) \in 2\mathbb{N} + 1$  et  $v_3(n+3) \in 2\mathbb{N} + 1$ , nous avons  $n = 3N^2$  et  $n+3 = 3M^2$  où  $(N, M) \in (\mathbb{N}^*)^2$ .

Or, ceci donne  $3 = 3M^2 - 3N^2$ , puis  $M^2 - N^2 = 1$  qui contredit le fait 3.5.

(2) De façon analogue, on ne peut pas avoir  $(n+1)$  et  $(n+4)$  vérifiant [A2].

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient [A3].

Comme dans le point précédent, c'est impossible car on aurait  $2 = 2M^2 - 2N^2$ , ou  $4 = 2M^2 - 2N^2$  qui contredirait le fait 3.5.

En effet, ici les couples possibles sont  $(n, n+2)$ ,  $(n, n+4)$ ,  $(n+2, n+4)$  et  $(n+1, n+3)^4$ .

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient [A4].

Ceci donne deux facteurs différents divisibles par 6, mais c'est impossible.  $\square$

La preuve suivante s'inspire directement de la démonstration du cas 12.1 : on utilise plus efficacement le principe des tiroirs en commençant par un raisonnement plus grossier a priori. Comme quoi certains détails ne comptent pas, ou au contraire comptent trop !

4. A priori, rien n'empêche d'avoir  $n$ ,  $(n+2)$  et  $(n+4)$  vérifiant tous les trois [A3].

*Preuve 2.* Supposons que  $\pi_n^5 \in {}^2_*\mathbb{N}$ .

Clairement,  $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ ,  $\forall i \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$ ,  $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ . On doit donc s'intéresser à  $p \in \{2, 3\}$ , mais on peut observer très grossièrement qu'au maximum deux facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^5$  sont divisibles par 3, donc au moins 3 facteurs sont de valuation  $p$ -adique paire dès que  $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ . Ces facteurs vérifient alors l'une des deux alternatives suivantes, chacune d'elles levant une contradiction.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  sont de valuations 2-adiques impairs.

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (2N^2, 2M^2)$  avec  $|2(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$ , c'est-à-dire  $|N^2 - M^2| \in \{1, 2\}$ , mais c'est impossible d'après le fait 3.5.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  sont de valuations 2-adiques paires.

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (N^2, M^2)$  avec  $|N^2 - M^2| \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$ , mais ceci n'est possible que si  $|N^2 - M^2| = 3$  d'après le fait 3.5 qui donne aussi que soit  $(N, M) = (2, 1)$ , soit  $(N, M) = (1, 2)$ . Ceci impose d'avoir  $n = 1$ , mais  $\pi_1^5 = 5! \notin {}^2_*\mathbb{N}$  car  $v_5(5!) = 1$ .  $\square$

Voici une approche la plus simple possible ne faisant pas appel au principe des tiroirs.

*Preuve 3.* Supposons que  $\pi_n^5 \in {}^2_*\mathbb{N}$ .

En notant  $m = n + 2$ , nous avons  $\pi_n^5 = m(m \pm 2)(m \pm 1) = m(m^2 - 1)(m^2 - 4)$  où  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ .

Démontrons que  $m \in {}^2_*\mathbb{N}$ .

- Si  $m \in 2\mathbb{N} + 1$ , nous avons clairement  $m \wedge (m^2 - 1) = 1$  et  $m \wedge (m^2 - 4) = 1$  (ici, la parité de  $m$  doit être utilisée). Donc  $m \wedge ((m^2 - 1)(m^2 - 4)) = 1$ , puis  $m \in {}^2_*\mathbb{N}$  selon le fait 3.3.
- Si  $m \in 2\mathbb{N}$ , alors  $m \wedge (m^2 - 1) = 1$  et  $m \wedge (m^2 - 4) \in \{1, 2, 4\}$  (ici, la parité de  $m$  ne limite pas les possibilités). Soyons plus fin. Notant  $m - 2 = 2A$  et  $m + 2 = 2B$ , nous avons clairement  $m \wedge A = 1 = m \wedge B$  car  $m \wedge (m - 2) = 2 = m \wedge (m + 2)$ . Comme  $\pi_n^5 = 4m(m^2 - 1)AB$ , nous avons aussi  $m(m^2 - 1)AB \in {}^2_*\mathbb{N}$  via le fait 3.2, et finalement  $m \in {}^2_*\mathbb{N}$  selon le fait 3.3 et  $m \wedge ((m^2 - 1)AB) = 1$ .

Ce qui suit lève une contradiction.

- $m \in {}^2_*\mathbb{N}$  et  $\pi_n^5 \in {}^2_*\mathbb{N}$  donnent  $(m^2 - 1)(m^2 - 4) \in {}^2_*\mathbb{N}$  via le fait 3.2.
- En posant  $x = m^2 \in \mathbb{N}_{\geq 9}$ , nous arrivons à  $(x - 1)(x - 4) = x^2 - 5x + 4 \in {}^2_*\mathbb{N}$ , mais ceci est impossible d'après l'implication suivante.

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 4 &= (x - 2)^2 - x \quad \text{et} \quad x^2 - 5x + 4 = (x - 3)^2 + x - 5 \\ \implies (x - 3)^2 &< x^2 - 5x + 4 < (x - 2)^2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x^2 - 5x + 4 &= (x - 2)^2 - x \quad \text{et} \quad x^2 - 5x + 4 = (x - 3)^2 + x - 5 \\ \implies (x - 3)^2 &< x^2 - 5x + 4 < (x - 2)^2 \end{aligned}} \right\} x - 5 > 0 \text{ et } x > 0.$$

$\square$

Voici une approche similaire à la dernière preuve du cas 6.1.

*Preuve 4.* Supposons que  $\pi_n^5 \in {}^2_*\mathbb{N}$ .

Clairement,  $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ ,  $\forall i \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$ ,  $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ , ceci nous amène à considérer deux alternatives.

Supposons d'abord  $\{n, n+2, n+4\} \subset 2\mathbb{N} + 1$ .

- Nous avons alors  $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$ ,  $(v_p(n), v_p(n+2), v_p(n+4)) \in (2\mathbb{N})^3$ , donc, pour tout naturel  $m \in \{n, n+2, n+4\}$ , il existe  $M \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m = M^2$  ou  $m = 3M^2$ .

- En raisonnant modulo 3, on constate que 3 divise au maximum un seul des trois éléments de  $\{n, n+2, n+4\}$ , donc nous avons au moins deux carrés parfaits dans  $\{n, n+2, n+4\}$ , mais ceci contredit le fait 3.5 (deux carrés parfaits ne sont jamais distants de 2 ou 4).

Supposons maintenant  $\{n+1, n+3\} \subset 2\mathbb{N}+1$ .

- Comme ci-dessus, soit  $(n+1, n+3) = (A^2, 3B^2)$ , soit  $(n+1, n+3) = (3A^2, B^2)$ , avec  $(A, B) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , car  $(n+1, n+3) = (A^2, B^2)$  est impossible.
- Supposons  $(n+1, n+3) = (A^2, 3B^2)$ . Ce qui suit lève alors une contradiction.
  - Forcément,  $n = 3C^2$  ou  $n = 6C^2$  avec  $C \in \mathbb{N}^*$ . Le fait 3.5 impose d'avoir  $n = 6C^2$ .
  - Donc  $\{n+2, n+4\} \subset 2\mathbb{N} - 3\mathbb{N}$ , puis, via le fait 3.5,  $\{n+2, n+4\} = \{D^2, 2E^2\}$  avec  $(D, E) \in (\mathbb{N}^*)^2$  nécessairement.
  - $(n+1)$  et  $(n+2)$  étant trop proches pour être tous les deux des carrés parfaits, nous arrivons à  $(n+2, n+4) = (2D^2, E^2)$ .
  - Or  $n+4 \in {}^2\mathbb{N}$  et  $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}$  donnent  $\pi_n^4 \in {}^2\mathbb{N}$  d'après le fait 3.2, mais ceci contredit le fait 6.1.
- Forcément,  $(n+1, n+3) = (3A^2, B^2)$ , mais ce qui suit lève une nouvelle contradiction via une démarche similaire à la précédente.
  - Forcément,  $n+4 = 6C^2$  avec  $C \in \mathbb{N}^*$ .
  - Ensuite,  $(n, n+2) = (D^2, 2E^2)$  avec  $(D, E) \in (\mathbb{N}^*)^2$ .
  - $n \in {}^2\mathbb{N}$  et  $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}$  donnent  $\pi_{n+1}^4 \in {}^2\mathbb{N}$ , ce qui est faux. □

Bien que longue, la preuve suivante se comprend bien, car nous ne faisons qu'avancer à vue, mais avec rigueur.

*Preuve 5.* Supposons que  $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}$ .

Posant  $m = n+2$ , nous avons  $\pi_n^5 = m(m \pm 2)(m \pm 1) = m(m^2 - 1)(m^2 - 4)$  où  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ . Pour la suite, on pose  $u = m^2 - 1$  et  $q = m^2 - 4$ .

Notons que  $u \notin {}^2\mathbb{N}$  et  $q \notin {}^2\mathbb{N}$ .

- $u \in {}^2\mathbb{N}$  donne  $m^2 - 1 \in {}^2\mathbb{N}$  qui est impossible d'après le fait 3.5.
- $q \in {}^2\mathbb{N}$  donne  $m^2 - 4 \in {}^2\mathbb{N}$  qui est impossible d'après le fait 3.5.

Supposons d'abord que  $m \in {}^2\mathbb{N}$ .

- De  $muq \in {}^2\mathbb{N}$ , nous déduisons que  $uq \in {}^2\mathbb{N}$  via le fait 3.2.
- Comme  $u - q = 3$ , nous savons que  $u \wedge q \in \{1, 3\}$ .
- Si  $u \wedge q = 1$ , alors  $(u, q) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$  d'après le fait 3.3, mais ceci est impossible.
- Si  $u \wedge q = 3$ , alors  $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$ ,  $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$  et  $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$ , mais aussi  $v_3(u) \in 2\mathbb{N}+1$  et  $v_3(q) \in 2\mathbb{N}+1$ , car  $u \notin {}^2\mathbb{N}$  et  $q \notin {}^2\mathbb{N}$ . Donc  $u = 3U^2$  et  $q = 3Q^2$  avec  $(U, Q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . Or  $u - q = 3$  donne  $U^2 - Q^2 = 1$ , et le fait 3.5 nous indique une contradiction.

Supposons maintenant que  $m \notin {}^2\mathbb{N}$ .

- Ici,  $m = \alpha M^2$ ,  $u = \beta U^2$ ,  $q = \gamma Q^2$  avec  $(M, U, Q) \in (\mathbb{N}^*)^3$  et  $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathbb{N}_{sf} \cap \mathbb{N}_{>1}$ .
- Notons que  $\beta \neq \gamma$ , car, dans le cas contraire,  $3 = u - q = \beta(U^2 - Q^2)$  fournirait  $\beta = 3$  puis  $U^2 - Q^2 = 1$ , et ceci contredirait le fait 3.5.
- Nous avons  $m \wedge u = 1$ ,  $m \wedge q \in \{1, 2, 4\}$  et  $u \wedge q \in \{1, 3\}$  avec  $m \wedge u = m \wedge q = u \wedge q = 1$  impossible car sinon on aurait  $(m, u, q) \in ({}^2\mathbb{N})^3$  via  $muq \in {}^2\mathbb{N}$  et le fait 3.3.

- Clairement,  $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ ,  $(v_p(m), v_p(u), v_p(q)) \in (2\mathbb{N})^3$ .
- Les points précédents donnent  $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$  avec de plus  $\beta \neq \gamma$ , ainsi que  $\alpha \wedge \beta = 1$ ,  $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2\}$  et  $\beta \wedge \gamma \in \{1, 3\}$ . Notons au passage que  $\alpha \wedge \beta = 1$  implique  $(\alpha, \beta) = (2, 3)$ , ou  $(\alpha, \beta) = (3, 2)$ . Via le tableau « mécanique » ci-après, nous obtenons que forcément  $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$  ou  $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$ . Le plus dur est fait !

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	<i>Statut</i>
2	3	2	1	2	1	✓
2	3	6	1	2	3	✓
3	2	3	1	3	1	✗
3	2	6	1	3	2	✗

- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$  nous donne  $m = 2M^2$ ,  $u = 3U^2$  et  $q = 2Q^2$ , d'où la contradiction  $3 \cdot 4M^2U^2Q^2 \in {}^2_*\mathbb{N}$ .
- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$  nous donne  $m = 2M^2$ ,  $m^2 - 1 = 3U^2$  et  $m^2 - 4 = 6Q^2$ , mais ce qui suit lève une autre contradiction.
  - Travaillons modulo 3. Nous avons  $m \equiv 2M^2 \equiv 0$  ou  $-1$ . Or  $m^2 - 1 = 3U^2$  donne  $m^2 \equiv 1$ , d'où  $m \equiv -1$ , puis  $3 \mid m - 2$ , et enfin  $6 \mid m - 2$  puisque  $m$  est pair.
  - Posant  $m - 2 = 6r$  et notant  $s = m + 2$ , nous avons  $6rs = 6Q^2$ , puis  $rs = Q^2$ .
  - $s \notin {}^2_*\mathbb{N}$ . Sinon  $(m-2)(m-1)m(m+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$  via  $(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) \in {}^2_*\mathbb{N}$  et le fait 3.2, mais ceci ne se peut pas d'après le fait 6.1.
  - Les deux résultats précédents et le fait 3.4 donnent  $(\pi, R, S) \in \mathbb{N}_{sf} \times (\mathbb{N}^*)^2$  tel que  $r = \pi R^2$  et  $s = \pi S^2$  avec  $\pi \in \mathbb{N}_{>1}$ .
  - Dès lors,  $4 = s - 6r = \pi(S^2 - 6R^2)$  donne  $\pi = 2$ , d'où  $m + 2 = 2S^2$ .
  - Finalement,  $m = 2M^2$  et  $m + 2 = 2S^2$  donnent  $2 = 2(S^2 - M^2)$ , soit  $1 = S^2 - M^2$ , ce qui contredit le fait 3.5.  $\square$

## 8. AVEC 6 FACTEURS

**Fait 8.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^6 \notin {}^2\mathbb{N}$ .

La démonstration suivante se trouve dans l'article « Solution of a Problem »<sup>5</sup> de G. W. Hill et J. E. Oliver. Une petite simplification a été faite pour arriver à  $\pi_n^6 = (a-4)a(a+2)$ .

*Preuve 1.* Supposons que  $\pi_n^6 \in {}^2\mathbb{N}$ .

Commençons par de petites manipulations algébriques où la première modification fait apparaître le même coefficient pour  $n$  dans chaque parenthèse.

$$\begin{aligned} \pi_n^6 &= n(n+5) \cdot (n+1)(n+4) \cdot (n+2)(n+3) \\ &= (n^2+5n)(n^2+5n+4)(n^2+5n+6) \\ &= x(x+4)(x+6) \\ &= (a-4)a(a+2) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = n^2 + 5n \in \mathbb{N}_{\geq 6} \\ a = x + 4 \in \mathbb{N}_{\geq 10} \end{array}$$

Nous avons  $a \in \mathbb{N}_{\geq 10}$  vérifiant  $a(a+2)(a-4) \in {}^2\mathbb{N}$ . Posons  $a = \alpha A^2$  où  $(\alpha, A) \in \mathbb{N}_{sf} \times \mathbb{N}^*$ , de sorte que  $\alpha(\alpha A^2 + 2)(\alpha A^2 - 4) \in {}^2\mathbb{N}$  via le fait 3.2. Or  $\alpha \in \mathbb{N}_{sf}$  donne  $\alpha \mid (\alpha A^2 + 2)(\alpha A^2 - 4)$ , d'où  $\alpha \mid 8$ , et ainsi  $\alpha \in \{1, 2\}$ <sup>6</sup>. Nous allons voir que ceci est impossible.

Supposons que  $\alpha = 1$ .

- Notons les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} &(A^2+2)(A^2-4) \in {}^2\mathbb{N} \\ \iff (u+3)(u-3) \in {}^2\mathbb{N} &\quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} u = A^2 - 1 \text{ où } -1 = \frac{2-4}{2}. \\ \iff u^2 - 9 \in {}^2\mathbb{N} \end{aligned}$$

- Ensuite, prenant  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m^2 = u^2 - 9$ , le fait 3.5 donne  $(u, m) = (5, 4)$  d'où la contradiction suivante.

$$\begin{aligned} u = 5 &\iff A^2 - 1 = 5 \\ &\iff A^2 = 6 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 6 \notin {}^2\mathbb{N}.$$

Supposons que  $\alpha = 2$ .

- Notons l'équivalence suivante.

$$\begin{aligned} &2(2A^2+2)(2A^2-4) \in {}^2\mathbb{N} \\ \iff 2(A^2+1)(A^2-2) \in {}^2\mathbb{N} &\quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Via } 4 \cdot 2(A^2+1)(A^2-2). \end{aligned}$$

- Ensuite, en travaillant modulo 3, nous avons  $2(A^2+1)(A^2-2) \equiv -4 \equiv -1$  qui ne correspond pas à un carré modulo 3.  $\square$

*Preuve 2.* Se reporter à la preuve du cas 9.1 qui s'adapte mot pour mot au cas présent mais en considérant  $u \in \{n, n+1\}$  tel que  $\{u, u+2, u+4\} \subset 2\mathbb{N}+1$ .  $\square$

Bien que très longue<sup>7</sup>, la preuve suivante est simple à comprendre car elle ne fait que dérouler le fil des faits découverts.

*Preuve 3.* Supposons que  $\pi_n^6 \in {}^2\mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} \pi_n^6 &= n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \\ \iff \pi_n^6 &= \left(x \pm \frac{5}{2}\right)\left(x \pm \frac{3}{2}\right)\left(x \pm \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} x = n + 2 + \frac{1}{2} \text{ (on symétrise la formule).}$$

5. The Analyst (1874).

6. On comprend ici le choix d'avoir  $\pi_n^6 = (a-4)a(a+2)$ .

7. Ce sera notre dernière tentative de démonstration à faible empreinte cognitive.

$$\begin{aligned}
\pi_n^6 &= \left(x \pm \frac{5}{2}\right) \left(x \pm \frac{3}{2}\right) \left(x \pm \frac{1}{2}\right) \\
\iff 2^6 \pi_n^6 &= (y \pm 5)(y \pm 3)(y \pm 1) \\
2^6 \pi_n^6 &= (y \pm 5)(y \pm 3)(y \pm 1) \\
\iff 2^6 \pi_n^6 &= (z - 25)(z - 9)(z - 1) \\
\iff 2^6 \pi_n^6 &= (u - 8)(u + 8)(u + 16)
\end{aligned}
\quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 2x \text{ (on chasse les fractions).} \\ z = y^2 \\ u = z - 17 \text{ où } 17 = \frac{25 + 9}{2}. \end{array}$$

Notant  $a = u - 8$ ,  $b = u + 8$  et  $c = u + 16$ , où  $u = (2n + 5)^2 - 17 \in 2\mathbb{N}$ , nous avons les faits suivants.

- $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$  car  $(2 + 5)^2 - 17 = 32$ .
- $(a, b, c) \in (\mathbb{N}_{\geq 24})^3$  avec  $abc \in {}^2\mathbb{N}$  puisque  $2^6 \pi_n^6 \in {}^2\mathbb{N}$ .
- $a \wedge b \mid 16$  via  $b - a = 16$ .
- $a \wedge c \mid 24$  via  $c - a = 24$ .
- $b \wedge c \mid 8$  via  $c - b = 8$ .
- En particulier,  $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$ ,  $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) \in (2\mathbb{N})^3$ .

Démontrons qu'aucun des trois entiers  $a$ ,  $b$  et  $c$  ne peut être un carré parfait.

- Commençons par supposer que  $a \in {}^2\mathbb{N}$ .

Dans ce cas,  $bc \in {}^2\mathbb{N}$  via le fait 3.2, soit  $(u + 8)(u + 16) \in {}^2\mathbb{N}$ . En posant  $w = u + 12$ , on arrive à  $(w - 4)(w + 4) \in {}^2\mathbb{N}$ , soit  $w^2 - 16 \in {}^2\mathbb{N}$ , d'où  $(w, m) = (5, 3)$  grâce au fait 3.5. Or  $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$  donne  $w \in \mathbb{N}_{\geq 20}$ , d'où une contradiction.

- Supposons maintenant que  $b \in {}^2\mathbb{N}$ .

Dans ce cas,  $ac \in {}^2\mathbb{N}$ , soit  $(u - 8)(u + 16) \in {}^2\mathbb{N}$ . En posant  $w = u + 4$ , on arrive à  $(w - 12)(w + 12) \in {}^2\mathbb{N}$ , soit  $w^2 - 144 \in {}^2\mathbb{N}$ . Notant  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m^2 = w^2 - 144$ , nous arrivons à  $w^2 - m^2 = 144$ , d'où  $(w, m) \in \{(13, 5), (15, 9), (20, 16), (37, 35)\}$ <sup>8</sup>. Comme  $u \in 2\mathbb{N}$  donne  $w \in 2\mathbb{N}$ , nécessairement  $(w, m) = (20, 16)$ , mais les équivalences suivantes lèvent une contradiction.

$$\begin{aligned}
u + 4 = 20 &\iff u = 16 \\
&\iff (2n + 5)^2 - 17 = 16 \\
&\iff (2n + 5)^2 = 33
\end{aligned}
\quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 33 \notin {}^2\mathbb{N}$$

- Supposons enfin que  $c \in {}^2\mathbb{N}$ .

Dans ce cas,  $ab \in {}^2\mathbb{N}$ , soit  $(u - 8)(u + 8) \in {}^2\mathbb{N}$ , c'est-à-dire  $u^2 - 64 \in {}^2\mathbb{N}$ . Notant  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m^2 = u^2 - 64$ , nous arrivons à  $u^2 - m^2 = 64$ . Ceci n'est possible que si  $(u, m) \in \{(10, 6), (17, 15)\}$ . Or  $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$  donne une contradiction.

Donc  $a = \alpha A^2$ ,  $b = \beta B^2$  et  $c = \gamma C^2$  avec  $(A, B, C) \in (\mathbb{N}^*)^3$  et  $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathbb{N}_{sf} \cap \mathbb{N}_{>1}$ , ceci nous donnant les faits suivants.

- $\alpha \wedge \beta \in \{1, 2\}$  d'après  $a \wedge b \mid 16$ .
- $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2, 3\}$  d'après  $a \wedge c \mid 24$ .
- $\beta \wedge \gamma \in \{1, 2\}$  d'après  $b \wedge c \mid 8$ .
- $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$  car  $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$ ,  $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) \in (2\mathbb{N})^3$ .

8. Le programme reproduit après la preuve du fait 3.5 donne rapidement cet ensemble de couples.

En fait,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont différents deux à deux.

- Démontrons que  $\alpha \neq \beta$ .

Dans le cas contraire,  $16 = b - a = \alpha(B^2 - A^2)$  et  $\alpha > 1$  donnent  $B^2 - A^2 \in \{1, 2, 4, 8\}$ , puis forcément  $B^2 - A^2 = 8$  avec  $(B, A) = (3, 1)$  d'après le fait 3.5. Comme de plus,  $\alpha = 2$ , nous obtenons  $a = 2$  qui contredit  $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$ .

- Nous avons aussi  $\beta \neq \gamma$ .

Dans le cas contraire,  $8 = c - b = \beta(C^2 - B^2)$  et  $\beta > 1$  donnent  $C^2 - B^2 \in \{1, 2, 4\}$ , mais c'est impossible d'après le fait 3.5.

- Enfin,  $\alpha \neq \gamma$ .

Dans le cas contraire,  $C^2 - A^2 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$  car  $24 = c - a = \alpha(C^2 - A^2)$  et  $\alpha > 1$ . Le fait 3.5 ne laisse plus que les possibilités suivantes.

- (1)  $C^2 - A^2 = 3$  n'est possible que si  $(C, A) = (2, 1)$ . Comme de plus  $\alpha = 8$ , nous avons  $a = 8$  qui contredit  $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$ .
- (2)  $C^2 - A^2 = 8$  n'est possible que si  $(C, A) = (3, 1)$ . Comme de plus  $\alpha = 3$ , nous avons  $a = 3$  qui contredit  $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$ .
- (3)  $C^2 - A^2 = 12$  n'est possible que si  $(C, A) = (4, 2)$ . Comme de plus  $\alpha = 2$ , nous avons  $a = 8$  qui contredit  $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$ .

Comme  $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$ ,  $\alpha \wedge \beta \in \{1, 2\}$ ,  $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2, 3\}$  et  $\beta \wedge \gamma \in \{1, 2\}$ , et comme de plus  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont différents deux à deux, il ne nous reste plus qu'à analyser les cas suivants. La lumière est proche...

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	Statut
2	3	6	1	2	3	☒
2	6	3	2	1	3	☒
3	2	6	1	3	2	✓
3	6	2	3	1	2	☒
6	2	3	2	3	1	✓
6	3	2	3	2	1	☒

Traisons les deux cas restants en nous souvenant que  $a = u - 8$ ,  $b = u + 8$  et  $c = u + 16$ .

- Supposons  $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, 2, 6)$ , autrement dit  $a = 3A^2$ ,  $b = 2B^2$  et  $c = 6C^2$ .

Travaillons modulo 3 afin de lever une contradiction.

(1)  $a \equiv u - 2$  et  $a \equiv 3A^2 \equiv 0$  donnent  $u \equiv 2$ .

(2) D'autre part,  $b \equiv 2B^2 \equiv 0$  ou  $2$ . Or  $b \equiv u + 2 \equiv 1$  lève une contradiction.

- Supposons  $(\alpha, \beta, \gamma) = (6, 2, 3)$ , autrement dit  $a = 6A^2$ ,  $b = 2B^2$  et  $c = 3C^2$ .

La preuve précédente s'adapte directement car  $a \equiv 6A^2 \equiv 0$  et  $b \equiv 2B^2$  modulo 3.  $\square$

## 9. AVEC 7 FACTEURS

**Fait 9.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$ .

La jolie démonstration suivante vient d'un échange sur <https://math.stackexchange.com> (voir la section 16). Nous avons comblé les trous en apportant de petites simplifications.

*Preuve 1.* Supposons que  $\pi_n^7 \in {}^2\mathbb{N}$ .

Commençons par quelques observations immédiates.

- $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 7}, \forall i \in \llbracket 0; 6 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ .
- $\exists u \in \{n, n+1, n+2\}$  tel que  $\{u, u+2, u+4\} \subset 2\mathbb{N}+1$ .  
Nous avons alors  $\forall p \in \mathbb{P} - \{3, 5\}, (v_p(u), v_p(u+2), v_p(u+4)) \in (2\mathbb{N})^3$ . Cette astuce permet de passer de la gestion des trois nombres premiers 2, 3 et 5 à celle de 3 et 5. Donc, pour tout naturel  $m \in \{u, u+2, u+4\}$ , il existe  $M \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m = M^2$ ,  $m = 3M^2$ ,  $m = 5M^2$  ou  $m = 15M^2$ .
- Parmi les trois naturels  $u, u+2$  et  $u+4$ , ...
  - il en existe un, et un seul, divisible par 3, comme on le constate vite en raisonnant modulo 3,
  - au plus un est divisible par 5,
  - au plus un est un carré parfait d'après le fait 3.5.

Donc, il existe  $(M, P, Q) \in (\mathbb{N}^*)^3$  tel que  $\{u, u+2, u+4\} = \{M^2, 3P^2, 5Q^2\}$ . Ceci permet de considérer les trois cas suivants qui lèvent tous une contradiction.

- Supposons avoir  $u = M^2$ .
  - (1) Comme  $\{u+2, u+4\} = \{3P^2, 5Q^2\}$ , nous savons que  $3 \nmid (u+3)$  et  $5 \nmid (u+3)$ , d'où  $u+3 = 2^a A^2$  avec  $(a, A) \in \mathbb{N} \times (2\mathbb{N}+1)$ .
  - (2) Modulo 8,  $u \equiv M^2 \equiv 1$  car  $u \in 2\mathbb{N}+1$ , donc  $u+3 \equiv 4$ , d'où  $a = 2$ .
  - (3) Dès lors,  $u+3 \in {}^2\mathbb{N}$ , puis  $(u, u+3) = (1, 4)$  via le fait 3.5.
  - (4) Nous arrivons à  $n = u = 1$ , mais  $v_7(\pi_1^7) = 1$  contredit l'hypothèse  $\pi_n^7 \in {}^2\mathbb{N}$ .
- Supposons maintenant que  $u+2 = M^2$ .  
Ce qui suit démontre que  $\{u, u+4\} = \{3P^2, 5Q^2\}$  est impossible.
  - (1) Si  $(u, u+4) = (3P^2, 5Q^2)$ , alors, comme  $u \in 2\mathbb{N}+1$ , nous avons, modulo 4,  $u \equiv 3$  et  $u+4 \equiv 1$  qui se contredisent.
  - (2) Si  $(u, u+4) = (5Q^2, 3P^2)$ , on raisonne de même.
- Supposons enfin que  $u+4 = M^2$ .

Démontrons que  $\{u, u+2\} = \{3P^2, 5Q^2\}$  est impossible en raisonnant modulo 8.

- (1)  $u+4 \equiv M^2 \equiv 1$  via  $u \in 2\mathbb{N}+1$ , d'où  $u+3 \equiv 0$ .
- (2)  $u+2 \in \{3P^2, 5Q^2\}$  donne  $u+2 \equiv 3$  ou  $5$  via  $u \in 2\mathbb{N}+1$ .
- (3) Les deux points précédents se contredisent. □

Pour la preuve suivante, nous reprenons l'idée de la démonstration du cas 12.1 ; nous indiquons juste les adaptations à faire en reprenant les notations de la preuve citée.

*Preuve 2.* Ici nous avons au moins 5 facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^7$  de valuation  $p$ -adique paire dès que  $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ . Ceci nous amène aux cas suivants.



- Deux facteurs différents  $(n + i)$  et  $(n + i')$  vérifient **[A1]**.

Dans ce cas,  $(n + i, n + i') = (N^2, M^2)$  avec  $|N^2 - M^2| \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$ , mais ce qui suit lève des contradictions.

(1)  $N^2 - M^2 = 3$  donne  $n = 1$ , mais  $\pi_1^7 = 7! \notin {}^2\mathbb{N}$  via  $v_7(7!) = 1$ .

(2)  $N^2 - M^2 = 5$  donne  $n \in \llbracket 2; 4 \rrbracket$ , mais  $\forall n \in \llbracket 2; 4 \rrbracket$ ,  $v_7(\pi_n^7) = 1$  donne  $\pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$ .

- Deux facteurs différents  $(n + i)$  et  $(n + i')$  vérifient **[A2]**.

Dans ce cas,  $(n + i, n + i') = (3N^2, 3M^2)$  avec  $|3(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$ , mais c'est impossible d'après le fait 3.5.

- Deux facteurs différents  $(n + i)$  et  $(n + i')$  vérifient **[A3]**.

Dans ce cas,  $(n + i, n + i') = (2N^2, 2M^2)$  avec  $|2(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$ , puis nécessairement  $|N^2 - M^2| = 3$  qui implique  $n \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$ , mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents  $(n + i)$  et  $(n + i')$  vérifient **[A4]**.

Dans ce cas,  $(n + i, n + i') = (6N^2, 6M^2)$  avec  $|6(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$ , mais c'est impossible d'après le fait 3.5. □

## 10. AVEC 8 FACTEURS

**Fait 10.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$ .

La démonstration très astucieuse suivante est proposée dans un échange sur <https://math.stackexchange.com> (voir la section 16). Comme pour le cas de quatre facteurs, l'algèbre va nous permettre d'aller très vite.

*Preuve.*

- L'une des preuves du fait 6.1 nous donne  $n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1$ .  
En particulier,  $(n+4)(n+5)(n+6)(n+7) = (n^2 + 11n + 29)^2 - 1$ .
- L'idée astucieuse va être de considérer les deux expressions suivantes qui viennent de  $\pi_n^8 = (f(n)^2 - 1)(g(n)^2 - 1)$ .  
(1)  $f(n) = n^2 + 3n + 1$ .  
(2)  $g(n) = n^2 + 11n + 29$ .

- Nous avons les manipulations algébriques naturelles suivantes.

$$\begin{aligned}
 \pi_n^8 &= (f(n)^2 - 1)(g(n)^2 - 1) && \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} a = f(n) \text{ et } b = g(n). \\
 &= (a^2 - 1)(b^2 - 1) \\
 &= a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 \\
 &= a^2b^2 - (a - b)^2 - 2ab + 1 && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Choisir } (a - b)^2 \text{ au lieu de } (a + b)^2 \text{ va nous permettre,} \\
 &= (ab - 1)^2 - (a - b)^2 && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{un plus bas, de ne pas trop nous éloigner de } \pi_n^8. \\
 &< (ab - 1)^2 && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} b - a \neq 0.
 \end{aligned}$$

Donc  $\pi_n^8 < (f(n)g(n) - 1)^2$ .

- Le point précédent rend naturel de tenter de démontrer que  $(f(n)g(n) - 2)^2 < \pi_n^8$ , car, si tel est le cas,  $\pi_n^8$  sera encadré par les carrés de deux entiers consécutifs, et forcément nous aurons  $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$ . Ce qui suit montre que notre pari est gagnant dès que  $n \geq 4$ . Que c'est joli !

$$\begin{aligned}
 &(f(n)g(n) - 2)^2 < \pi_n^8 \\
 \iff &(ab - 2)^2 < (a^2 - 1)(b^2 - 1) && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} a = f(n) \text{ et } b = g(n). \\
 \iff &a^2b^2 - 4ab + 4 < a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 \\
 \iff &a^2 + b^2 - 4ab + 3 < 0
 \end{aligned}$$

Le site <https://www.wolframalpha.com> nous donne sans effort cognitif<sup>9</sup> ce qui suit (les « transhumanophobes » se reporteront à la remarque 10.1 qui suit).

$$\begin{aligned}
 &a^2 + b^2 - 4ab + 3 \\
 &= -2(n^2 + 7n)^2 + 36(n^2 + 7n) + 729 && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} m = n^2 + 7n \\
 &= -2m^2 + 36m + 729 \\
 &= -2(m - 9)^2 + 891
 \end{aligned}$$

Or,  $n^2 + 7n - 9 = 0$  admet pour unique racine positive  $n = \frac{-7+\sqrt{85}}{2} \approx 1,1$ , donc  $a^2 + b^2 - 4ab + 3$  décroît en fonction de  $n$  à partir de  $n = 2$ . Les calculs suivants donnent alors que  $a^2 + b^2 - 4ab + 3 < 0$  pour  $n \geq 4$ .

9. Il faut vivre avec son temps...

$n$	1	2	3	4
$-2(n^2 + 7n)^2 + 36(n^2 + 7n) + 729$	889	729	9	-1559

- Nous venons de voir que  $(ab - 2)^2 < \pi_n^8 < (ab - 1)^2$  sur  $\mathbb{N}_{\geq 4}$ , donc  $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$  dès que  $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ , mais pour  $n \in \{1, 2, 3\}$ ,  $v_7(\pi_n^8) = 1$  donne  $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

**Remarque 10.1.** *Voici comment obtenir une preuve 100% non siliconé. Pour cela, commençons par les manipulations algébriques naturelles suivantes qui cherchent à obtenir le même coefficient pour  $n$  dans chaque parenthèse, tout en passant d'un polynôme de degré 8 à un polynôme de degré 4.*

$$\begin{aligned}
\pi_n^8 &= n(n+7) \cdot (n+1)(n+6) \cdot (n+2)(n+5) \cdot (n+3)(n+4) \\
&= (n^2 + 7n) \cdot (n^2 + 7n + 6) \cdot (n^2 + 7n + 10) \cdot (n^2 + 7n + 12) \\
&= m(m+6)(m+10)(m+12) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} m = n^2 + 7n
\end{aligned}$$

Nous décidons d'offrir un 1<sup>er</sup> rôle à la variable  $m = n^2 + 7n$ . Voyons où cela nous mène...

$$\begin{aligned}
&a^2 + b^2 - 4ab + 3 \\
&= a(a - 4b) + b^2 + 3 \\
&= (m - 4n + 1)(-3m - 20n - 115) + (m + 4n + 29)^2 + 3 \quad \left. \begin{array}{l} a = n^2 + 3n + 1 = m - 4n + 1 \\ b = n^2 + 11n + 29 = m + 4n + 29 \end{array} \right\} \\
&= -3m^2 - (8n + 118)m + (4n - 1)(20n + 115) + m^2 + 2(4n + 29)m + (4n + 29)^2 + 3 \\
&= -2m^2 - 60m + 729 + 672n + 96n^2 \\
&= -2m^2 - 60m + 729 + 96(n^2 + 7n) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Là, cela devient magique!} \\
&= -2m^2 - 60m + 729 + 96m \\
&= -2m^2 + 36m + 729
\end{aligned}$$

## 11. AVEC 9 FACTEURS

**Fait 11.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$ .

L'idée suivie est celle de la démonstration du cas 12.1 ; nous indiquons juste les adaptations à faire en reprenant les notations de la preuve citée.

*Preuve.* Ici nous avons au moins 5 facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^9$  de valuation  $p$ -adique paire dès que  $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ . Ceci nous amène aux cas suivants.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A1]**.

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (N^2, M^2)$  avec  $|N^2 - M^2| \in \llbracket 1; 8 \rrbracket$ . Ce qui suit lève des contradictions.

- (1)  $N^2 - M^2 = 3$  donne  $n = 1$ , mais  $\pi_1^9 = 9! \notin {}^2\mathbb{N}$  via  $v_7(9!) = 1$ .
- (2)  $N^2 - M^2 = 5$  donne  $n \in \llbracket 2; 4 \rrbracket$ , mais  $\forall n \in \llbracket 2; 4 \rrbracket, v_7(\pi_n^9) = 1$  donne  $\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$ .
- (3)  $N^2 - M^2 = 7$  donne  $n \in \llbracket 5; 9 \rrbracket$ , mais  $\forall n \in \llbracket 5; 9 \rrbracket, v_{11}(\pi_n^9) = 1$  donne  $\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$ .
- (4)  $N^2 - M^2 = 8$  donne  $n = 1$ , mais ceci est impossible.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A2]**.

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (3N^2, 3M^2)$  avec  $|3(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 8 \rrbracket$ , mais c'est impossible d'après le fait 3.5.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A3]**.

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (2N^2, 2M^2)$  avec  $|2(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 8 \rrbracket$ , puis nécessairement  $|N^2 - M^2| = 3$  qui implique  $n \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$ , mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A4]**.

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (6N^2, 6M^2)$  avec  $|6(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 8 \rrbracket$ , mais c'est impossible d'après le fait 3.5.  $\square$

## 12. AVEC 10 FACTEURS

**Fait 12.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^{10} \notin {}^2\mathbb{N}$ .

La démonstration suivante, qui fait penser à la première preuve du fait 7.1, est citée via une source dans un échange sur <https://math.stackexchange.com> (voir la section 16).

*Preuve.* Supposons que  $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$ .

Clairement,  $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 10}, \forall i \in \llbracket 0; 9 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ . On doit donc s'intéresser à  $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ . Voici ce que l'on peut observer très grossièrement.

- Au maximum deux facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^{10}$  sont divisibles par 5.
- Au maximum deux facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^{10}$  sont divisibles par 7.
- Les points précédents donnent au moins 6 facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^{10}$  de valuation  $p$ -adique paire dès que  $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ .

Nous avons alors l'une des alternatives suivantes pour chacun des 6 facteurs  $(n+i)$  vérifiant  $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$  pour  $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ .

- **[A1]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A2]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times (2\mathbb{N} + 1)$
- **[A3]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times 2\mathbb{N}$
- **[A4]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times (2\mathbb{N} + 1)$

Comme nous avons six facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A1]**.

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (N^2, M^2)$  avec  $(N, M) \in \mathbb{N}^*$ . Par symétrie des rôles, on peut supposer  $N > M$ , de sorte que  $N^2 - M^2 \in \llbracket 1; 9 \rrbracket$ . Selon le fait 3.5, seuls les cas suivants sont possibles mais ils lèvent tous une contradiction.

- (1)  $N^2 - M^2 = 3$  avec  $(N, M) = (2, 1)$  est possible, mais ceci donne  $n = 1^2 = 1$ , puis  $\pi_1^{10} = 10! \in {}^2\mathbb{N}$ , or ceci est faux car  $v_7(10!) = 1$ .
- (2)  $N^2 - M^2 = 5$  avec  $(N, M) = (3, 2)$  est possible d'où  $n \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$ . Nous venons de voir que  $n = 1$  est impossible. De plus, pour  $n \in \llbracket 2; 4 \rrbracket$ ,  $v_7(\pi_n^{10}) = 1$  montre que  $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$  est faux.
- (3)  $N^2 - M^2 = 7$  avec  $(N, M) = (4, 3)$  est possible d'où  $n \in \llbracket 1; 9 \rrbracket$ , puis  $n \in \llbracket 5; 9 \rrbracket$  d'après ce qui précède. Mais ici,  $\forall n \in \llbracket 5; 9 \rrbracket, v_{11}(\pi_n^{10}) = 1$  montre que  $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$  est faux.
- (4)  $N^2 - M^2 = 8$  avec  $(N, M) = (3, 1)$  est possible d'où  $n = 1$ , mais ceci est impossible comme nous l'avons vu ci-dessus.
- (5)  $N^2 - M^2 = 9$  avec  $(N, M) = (5, 4)$  est possible d'où  $n \in \llbracket 10; 16 \rrbracket$  d'après ce qui précède. Or  $\forall n \in \llbracket 10; 16 \rrbracket, v_{17}(\pi_n^{10}) = 1$ , donc  $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$  est faux.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A2]**.

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (3N^2, 3M^2)$  avec  $(N, M) \in \mathbb{N}^*$ . Par symétrie des rôles, on peut supposer  $N > M$ , de sorte que  $3(N^2 - M^2) \in \llbracket 1; 9 \rrbracket$ , puis  $N^2 - M^2 \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ . Selon le fait 3.5, nécessairement  $N^2 - M^2 = 3$  avec  $(N, M) = (2, 1)$ , d'où  $n \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ , mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents  $(n + i)$  et  $(n + i')$  vérifient **[A3]**.

Dans ce cas,  $(n + i, n + i') = (2N^2, 2M^2)$  avec  $(N, M) \in \mathbb{N}^*$ . Par symétrie des rôles, on peut supposer  $N > M$ , de sorte que  $2(N^2 - M^2) \in \llbracket 1; 9 \rrbracket$ , puis  $N^2 - M^2 \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$ . Selon le fait 3.5, nécessairement  $N^2 - M^2 = 3$  avec  $(N, M) = (2, 1)$ , d'où  $n \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$ , mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents  $(n + i)$  et  $(n + i')$  vérifient **[A4]**.

Dans ce cas,  $(n + i, n + i') = (6N^2, 6M^2)$  avec  $(N, M) \in \mathbb{N}^*$ . Par symétrie des rôles, on peut supposer  $N > M$ , de sorte que  $6(N^2 - M^2) \in \llbracket 1; 9 \rrbracket$ , puis  $N^2 - M^2 = 1$ , mais c'est impossible d'après le fait 3.5.  $\square$

## 13. AVEC 11 FACTEURS

**Fait 13.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^{11} \notin {}^2\mathbb{N}$ .

L'idée suivie est celle de la démonstration du cas 12.1 ; nous indiquons juste les adaptations à faire en reprenant les notations de la preuve citée.

*Preuve.* Ici nous avons moins 6 facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^{11}$  de valuation  $p$ -adique paire dès que  $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ , en notant qu'ici il y a au maximum trois facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^{11}$  divisibles par 5. Ceci nous amène aux cas suivants.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient [A1].

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (N^2, M^2)$  avec  $|N^2 - M^2| \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$ . Ce qui suit lève des contradictions.

(1)  $N^2 - M^2 = 3$  donne  $n = 1$ , mais  $\pi_1^{11} = 11! \notin {}^2\mathbb{N}$  via  $v_{11}(11!) = 1$ .

(2)  $N^2 - M^2 = 5$  donne  $n \in \llbracket 2; 4 \rrbracket$ , mais  $\forall n \in \llbracket 2; 4 \rrbracket, v_{11}(\pi_n^{11}) = 1$  donne  $\pi_n^{11} \notin {}^2\mathbb{N}$ .

(3)  $N^2 - M^2 = 7$  donne  $n \in \llbracket 5; 9 \rrbracket$ , mais  $\forall n \in \llbracket 5; 9 \rrbracket, v_{11}(\pi_n^{11}) = 1$  donne  $\pi_n^{11} \notin {}^2\mathbb{N}$ .

(4)  $N^2 - M^2 = 8$  donne  $n = 1$ , mais ceci est impossible.

(5)  $N^2 - M^2 = 9$  donne  $n \in \llbracket 10; 16 \rrbracket$ , mais  $\forall n \in \llbracket 10; 16 \rrbracket, v_{17}(\pi_n^{11}) = 1$ , donc  $\pi_n^{11} \in {}^2\mathbb{N}$  est faux.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient [A2].

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (3N^2, 3M^2)$  avec  $|3(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$ , d'où  $n \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$  que nous savons impossible.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient [A3].

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (2N^2, 2M^2)$  avec  $|2(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$ , puis nécessairement  $|N^2 - M^2| \in \{3, 5\}$ , d'où  $n \in \llbracket 1; 8 \rrbracket$ , mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient [A4].

Dans ce cas,  $(n+i, n+i') = (6N^2, 6M^2)$  avec  $|6(N^2 - M^2)| \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$ , mais c'est impossible d'après le fait 3.5.  $\square$

## 14. AVEC 12 FACTEURS

**Fait 14.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^{12} \notin {}^2\mathbb{N}$ .

L'idée suivie est celle de la démonstration des cas 12.1 et 13.1 avec les changements suivants.

*Preuve.* Ici nous avons moins 5 facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^{12}$  de valuation  $p$ -adique paire dès que  $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$  avec ici 11 un nouveau compagnon premier à prendre en compte. Ceci nous amène juste à adapter le cas où deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A1]**. Dans ce cas, nous avons  $(n+i, n+i') = (N^2, M^2)$  avec  $|N^2 - M^2| \in \llbracket 1; 11 \rrbracket$ . Ce qui suit lève des contradictions.

- (1)  $N^2 - M^2 \in \{3, 5, 7, 8, 9\}$  se traite comme pour le cas 13.1. On sait alors que  $n > 9$ .
- (2) Un nouveau cas est à gérer car  $N^2 - M^2 = 11$  est possible. Ceci ne se peut que si  $(N, M) = (6, 5)$  ou  $(N, M) = (5, 6)$ , d'où  $n \in \llbracket 10; 25 \rrbracket$ , mais nous arrivons aux contradictions suivantes.
  - $\forall n \in \llbracket 10; 20 \rrbracket, v_{17}(\pi_n^{12}) = 1$ , donc  $\pi_n^{12} \in {}^2\mathbb{N}$  est faux.
  - $\forall n \in \llbracket 20; 25 \rrbracket, v_{29}(\pi_n^{12}) = 1$ , donc  $\pi_n^{12} \in {}^2\mathbb{N}$  est faux. □



## 15. AVEC 13 FACTEURS

**Fait 15.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^{13} \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Preuve.* Les arguments de la preuve du cas 14.1 s'adaptent immédiatement.  $\square$

**Remarque 15.1.** *Que donnerait l'analyse du cas suivant  $\pi_n^{14} \notin {}^2\mathbb{N}$  ? Nous avons ce qui suit.*

- $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 14}, \forall i \in \llbracket 0; 13 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ .
- *Au maximum trois facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^{14}$  sont divisibles par 5.*
- *Au maximum deux facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^{14}$  sont divisibles par 7.*
- *Au maximum deux facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^{14}$  sont divisibles par 11.*
- *Au maximum deux facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^{14}$  sont divisibles par 13. Un nouveau venu !*
- *Les points précédents nous donnent qu'au moins 5 facteurs  $(n+i)$  de  $\pi_n^{14}$  sont de valuation  $p$ -adique paire dès que  $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ .*

À ce stade, il serait opportun de tenter une analyse informatique pour traiter les cas jusqu'à 100 facteurs, c'est-à-dire ceux supposés connus dans la démonstration de Paul Erdős ; nous ne le ferons pas car ce document a préféré laisser la part belle aux humains.

## 16. SOURCES UTILISÉES

**Fait 6.1.**

*La démonstration non algébrique a été impulsée par la source du fait 9.1 donnée plus bas.*

**Fait 7.1.**

- Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré «  $n(n+1)\dots(n+k)$  est un carré ? » sur le site [lesmathematiques.net](https://lesmathematiques.net).

*La démonstration via le principe des tiroirs trouve sa source dans cet échange.*

- Un échange consulté le 12 février 2024, et titré « *Is there an easier way of proving the product of any 5 consecutive positive integers is never a perfect square ?* » sur le site [www.quora.com/](https://www.quora.com/).

*La démonstration « élémentaire » sans le principe des tiroirs vient de cet échange.*

- L'article « *Le produit de 5 entiers consécutifs n'est pas le carré d'un entier.* » de T. Hayashi, Nouvelles Annales de Mathématiques, est consultable via Numdam, la bibliothèque numérique française de mathématiques.

*Cet article a fortement inspiré la longue preuve.*

**Fait 8.1.**

Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré « *product of six consecutive integers being a perfect numbers* » sur le site <https://math.stackexchange.com>.

*La courte démonstration est donnée dans cet échange. Vous y trouverez aussi un très joli argument basé sur les courbes elliptiques rationnelles.*

**Fait 9.1.**

Un échange consulté le 3 février 2024, et titré « *Proof that the product of 7 successive positive integers is not a square* » sur le site <https://math.stackexchange.com>.

*La courte démonstration est donnée dans cet échange, mais certaines justifications manquent.*

**Fait 10.1.**

Un échange consulté le 4 février 2024, et titré « *How to prove that the product of eight consecutive numbers can't be a number raised to exponent 4 ?* » sur le site <https://math.stackexchange.com>.

*La démonstration astucieuse vient de l'une des réponses de cet échange, mais la justification des deux inégalités n'est pas donnée.*

**Fait 12.1.**

Un échange consulté le 13 février 2024, et titré « *Product of 10 consecutive integers can never be a perfect square* » sur le site <https://math.stackexchange.com>.

*La démonstration vient d'une source Wordpress donnée dans une réponse de cet échange, mais cette source est très expéditive...*