

# BROUILLON - ELLIPSES, PARABOLES, HYPERBOLES ET CONSTRUCTIONS CYCLIQUES

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



---

## TABLE DES MATIÈRES

1. Une construction naturelle sur un cercle	1
1.1. Conjecture	1
1.2. Une 1 <sup>re</sup> preuve géométrique	2
1.3. Une preuve évidente modulo une belle propriété du cercle	4
2. La construction reste valable sur la parabole d’équation $y = x^2$	5
3. Encore mieux, cela marche aussi avec l’hyperbole d’équation $y = \frac{1}{x}$	6
4. Tout ceci est facile si l’on prend un peu de recul	7

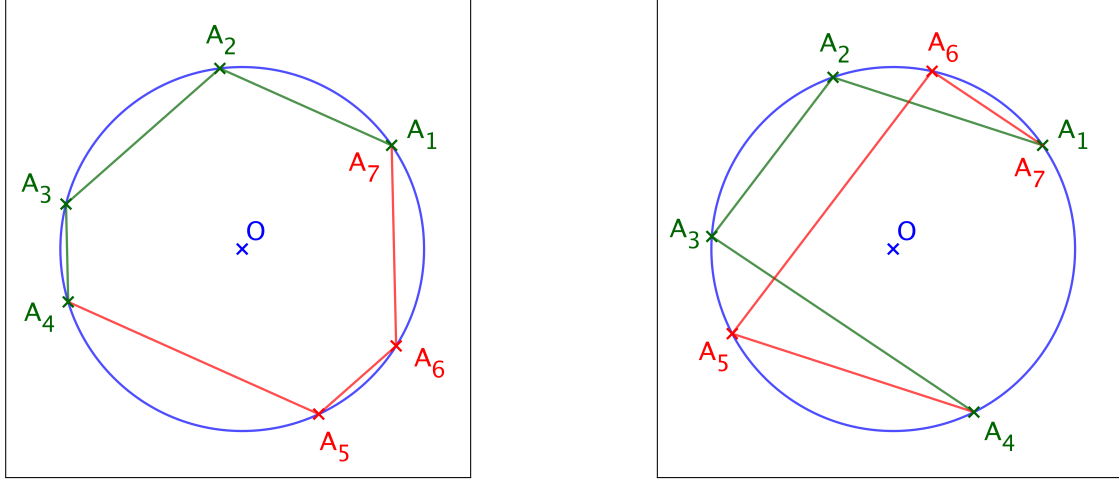
Nous allons présenter une construction récursive très simple de points qui produit une suite périodique lorsque l’on est sur le cercle trigonométrique, la parabole  $\mathcal{P} : y = x^2$  ou l’hyperbole  $\mathcal{H} : y = \frac{1}{x}$ . Même si ces courbes font partie de la belle famille des coniques du plan réel, lesquelles partagent des propriétés géométriques communes, la construction reste magique quand on la découvre. Nous finirons ce document en utilisant un point de vue plus technique qui expliquera pourquoi la construction fonctionne plus généralement avec n’importe quelle ellipse, parabole ou hyperbole.

### 1. UNE CONSTRUCTION NATURELLE SUR UN CERCLE

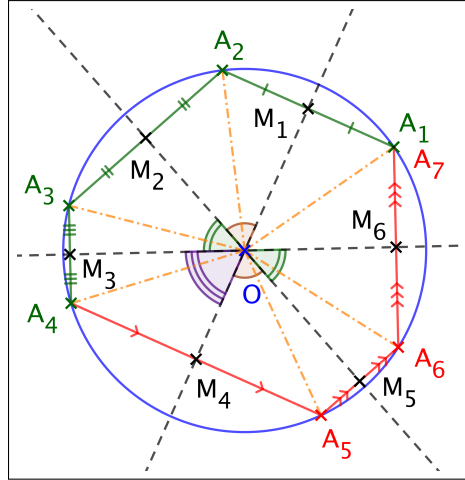
**1.1. Conjecture.** Donnons-nous quatre points  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  sur un cercle, pas forcément distincts, puis pour  $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$  définissons le point  $A_n$  comme suit (*d’une certaine façon on essaye de construire un polygone « presque régulier »*).

- (1) Si  $A_{n-3} \neq A_{n-4}$  alors  $\mathcal{D} = (A_{n-3}A_{n-4})^{\text{def}}$ , sinon  $\mathcal{D}$  est la tangente en  $A_{n-3}$  au cercle.
- (2) Soit ensuite  $\mathcal{D}'$  la parallèle à  $\mathcal{D}$  passant par  $A_{n-1}$ . Si  $\mathcal{D}'$  est tangente au cercle alors  $A_n = A_{n-1}^{\text{def}}$ , sinon  $A_n$  est le second point d’intersection de  $\mathcal{D}'$  avec le cercle.

Voici deux exemples de tracé où il semblerait que  $A_7 = A_1$ . En testant d'autres situations<sup>1</sup>, cette conjecture se consolide vite.



**1.2. Une 1<sup>re</sup> preuve géométrique.** Commençons par raisonner géométriquement dans le cas où les six premiers points sont distincts, et le polygone  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  convexe. Nous avons alors une figure codée du type suivant où  $M_i$  désigne le milieu du segment  $[A_iA_{i+1}]$  (*on prendra garde que l'on ne sait pas encore que  $A_7 = A_1$  contrairement à ce que nous constatons sur le dessin*). Nous verrons ensuite comment passer au cas général car on peut avoir un polygone  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  non convexe, ainsi que certains des points  $A_i$  et  $A_{i+1}$  égaux, voir tous,



Pour  $i \in \mathbb{N}^*$ , nous avons les faits suivants.

- (1)  $(OM_i)$  est une bissectrice du triangle  $OA_iA_{i+1}$ .
- (2)  $(M_iM_{i+3}) = (OM_i) = (OM_{i+3})$  est la médiatrice commune aux segments parallèles  $[A_iA_{i+1}]$  et  $[A_{i+3}A_{i+4}]$ .
- (3)  $(\overrightarrow{OM_i}; \overrightarrow{OM_{i+1}}) = (\overrightarrow{OM_{i+3}}; \overrightarrow{OM_{i+4}})$  car ce sont des angles opposés par le sommet grâce au fait précédent. Ceci justifie au passage les codages de la figure ci-dessus.

1. Le lieu de téléchargement de ce document contient un fichier GeoGebra `base-tool-cicrcle.ggb` manipulable dynamiquement pour tester la conjecture.

Notant  $\alpha_i = \left( \overrightarrow{OA_i}; \overrightarrow{OM_i} \right)$ , nous avons alors les nouveaux faits suivants.

- (4)  $\alpha_i = \left( \overrightarrow{OM_i}; \overrightarrow{OA_{i+1}} \right)$  d'après le fait 1.
- (5)  $\alpha_i + \alpha_{i+1} = \left( \overrightarrow{OM_i}; \overrightarrow{OM_{i+1}} \right)$  d'après le fait précédent.
- (6)  $\alpha_i + \alpha_{i+1} = \alpha_{i+3} + \alpha_{i+4}$  d'après les faits 3 et 5.

La dernière identité nous donne en particulier les égalités suivantes.

- **[L1]** :  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_4 + \alpha_5$
- **[L2]** :  $\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_5 + \alpha_6$
- **[L3]** :  $\alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_6 + \alpha_7$

**[L3]** – **[L2]** + **[L1]** aboutit à  $\alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_7 + \alpha_4$  d'où  $\alpha_1 = \alpha_7$ . On y est presque même si cette égalité seule ne suffit pas à conclure.

Notons ensuite  $\Pi$  l'angle plat<sup>2</sup>, de sorte que  $2\Pi \stackrel{\text{def}}{=} \Pi + \Pi$  est l'angle nul qui sera noté  $\Sigma_0$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
 \Sigma_0 &= \left( \overrightarrow{OM_1}; \overrightarrow{OM_1} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^6 \left( \overrightarrow{OM_i}; \overrightarrow{OM_{i+1}} \right) + \left( \overrightarrow{OM_7}; \overrightarrow{OM_1} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^3 \left( \overrightarrow{OM_i}; \overrightarrow{OM_{i+1}} \right) + \sum_{i=1}^3 \left( \overrightarrow{OM_{i+3}}; \overrightarrow{OM_{i+4}} \right) + \left( \overrightarrow{OM_7}; \overrightarrow{OM_1} \right) \\
 &= 2 \sum_{i=1}^3 \left( \overrightarrow{OM_i}; \overrightarrow{OM_{i+1}} \right) + \left( \overrightarrow{OM_7}; \overrightarrow{OM_1} \right) && \text{Voir le fait 3.} \\
 &= 2 \left( \overrightarrow{OM_1}; \overrightarrow{OM_4} \right) + \left( \overrightarrow{OM_7}; \overrightarrow{OM_1} \right) \\
 &= 2\Pi + \left( \overrightarrow{OM_7}; \overrightarrow{OM_1} \right) && \text{Voir le fait 2.} \\
 &= \left( \overrightarrow{OM_7}; \overrightarrow{OM_1} \right) && \text{Car } 2\Pi = \Sigma_0.
 \end{aligned}$$

Ceci nous fournit ensuite :

$$\begin{aligned}
 \left( \overrightarrow{OA_1}; \overrightarrow{OA_7} \right) &= \left( \overrightarrow{OA_1}; \overrightarrow{OM_1} \right) + \left( \overrightarrow{OM_1}; \overrightarrow{OM_7} \right) + \left( \overrightarrow{OM_7}; \overrightarrow{OA_7} \right) \\
 &= \alpha_1 - \Sigma_0 - \alpha_7 \\
 &= \Sigma_0 && \text{Car } \alpha_1 = \alpha_7.
 \end{aligned}$$

Finalement  $\overrightarrow{OA_1}$  et  $\overrightarrow{OA_7}$  sont colinéaires et de même sens ce qui implique que  $A_7 = A_1$  (*pourquoi ?*). Ouf ! Il nous reste à passer de notre cas très particulier au cas général avec sa myriade d'exceptions. Ce passage se fait via les constatations suivantes.

- (1) La propriété de convexité n'est à aucun moment utilisé dans les calculs d'angles orientés. Elle a juste permis de construire un dessin sur lequel poser sa réflexion.

---

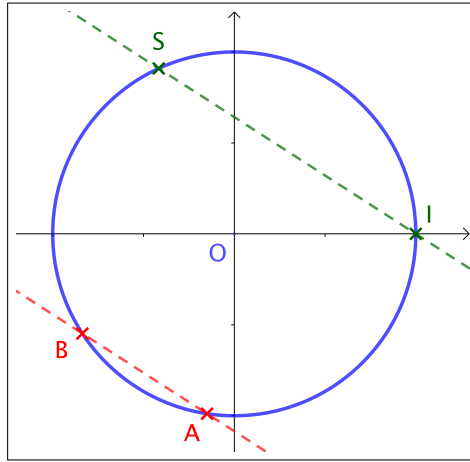
2. Ne pas confondre  $\Pi$  qui est un objet géométrique avec  $\pi$  l'une de ses mesures en radian.

- (2) Plus gênante a priori est la possibilité d'avoir  $A_{i+1} = A_i$ . Le lecteur vérifiera sans peine qu'il suffit dans ce cas de poser  $M_i \stackrel{\text{def}}{=} A_i$  pour que les calculs restent valables.

**1.3. Une preuve évidente modulo une belle propriété du cercle.** Dans cette section, on définit un repère orthonormé  $(O; I, J)$  tel que le cercle devienne trigonométrique. Pour tous points  $M$  et  $N$  sur ce cercle, on pose  $\mathcal{C}_{MN} \stackrel{\text{def}}{=} (MN)$  si  $M \neq N$ , sinon  $\mathcal{C}_{MN}$  désigne la tangente en  $M = N$  au cercle (*on généralise la notion de corde au cas de deux points égaux*).

L'auteur de ce document a rédigé « *Faire des additions modulaires sur une ellipse* »<sup>3</sup>. Il y est démontré que si  $A$ ,  $B$  et  $S$  sont des points du cercle trigonométrique alors le point  $S$  tel que  $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OS}) = (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB})$  se construit comme suit<sup>4</sup>,  $\mathcal{D}'$  désignant la parallèle à  $\mathcal{C}_{AB}$  passant par  $I$ .

- (1) Si  $\mathcal{D}'$  est tangente au cercle alors  $S = I$ .
- (2) Sinon le point  $S$  est le second point d'intersection de  $\mathcal{D}'$  avec le cercle.



Nous avons alors que pour quatre points non nécessairement distincts  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  du cercle trigonométrique, si  $\mathcal{C}_{AB} \parallel \mathcal{C}_{CD}$  alors  $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OD})$  puisque les parallèles à  $\mathcal{C}_{AB}$  et  $\mathcal{C}_{CD}$  passant par  $I$  sont confondues. Avec ceci en tête, on peut alors analyser facilement la construction présentée au début du document. Nous la redonnons ci-dessous pour le confort du lecteur où par hypothèse  $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ .

- (1)  $\mathcal{D}'$  désigne la parallèle à  $\mathcal{C}_{A_{n-3}A_{n-4}}$  passant par  $A_{n-1}$ .
- (2) Si  $\mathcal{D}'$  est tangente au cercle alors  $A_n \stackrel{\text{def}}{=} A_{n-1}$ , sinon  $A_n$  est le second point d'intersection de  $\mathcal{D}'$  avec le cercle.

La construction est donc telle que  $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ ,  $\mathcal{C}_{A_n A_{n-1}} \parallel \mathcal{C}_{A_{n-3} A_{n-4}}$ <sup>5</sup>. Notant  $\theta_i = (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA_i})$  pour  $i \in \mathbb{N}^*$ , nous avons alors  $\theta_i + \theta_{i+1} = \theta_{i+3} + \theta_{i+4}$ . Ceci nous donne les égalités suivantes :

- **[L1']** :  $\theta_1 + \theta_2 = \theta_4 + \theta_5$

3. Voir [addition-on-ellipsis.pdf](https://github.com/bc-writing/drafts) à l'adresse <https://github.com/bc-writing/drafts>. Un peu d'auto-promotion ne fait pas de mal. :-)

4. Dans le document cité, trois preuves élémentaires et très différentes sont proposées.

5. On peut définir  $A_n$  comme étant l'unique point du cercle tel que  $\mathcal{C}_{A_n A_{n-1}} \parallel \mathcal{C}_{A_{n-3} A_{n-4}}$ .

- [L2'] :  $\theta_2 + \theta_3 = \theta_5 + \theta_6$
- [L3'] :  $\theta_3 + \theta_4 = \theta_6 + \theta_7$

Comme dans la première preuve, le système nous donne  $\theta_1 = \theta_7$ . Sans plus d'effort, nous en déduisons que  $A_7 = A_1$ . La beauté de cette preuve repose dans son côté presque automatique. La section 4 révélera toute la profondeur du raisonnement qui vient d'être fait, ce qui sera vraiment grandiose<sup>6</sup>!

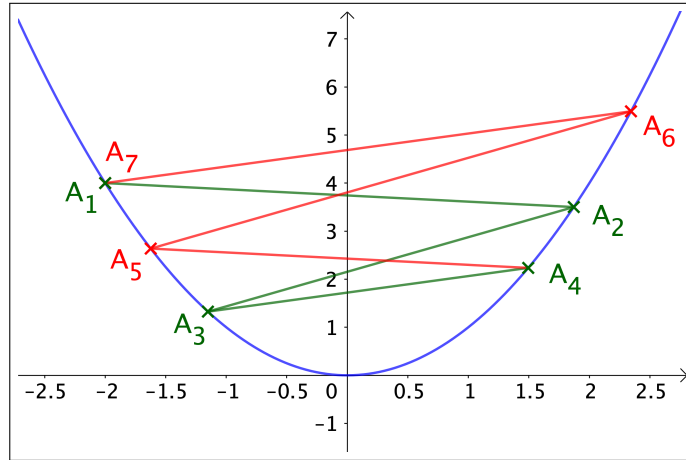
## 2. LA CONSTRUCTION RESTE VALABLE SUR LA PARABOLE D'ÉQUATION $y = x^2$

Commençons par un type de droites que nous avons rencontré lors de la construction vue dans la section précédente.

**Définition 2.1.** Pour tous points  $M$  et  $N$  sur la parabole  $\mathcal{P} : y = x^2$ , la corde généralisée passant par  $M$  et  $N$  est la droite  $\mathcal{C}_{MN}$  définie comme suit.

- (1)  $\mathcal{C}_{MN} \stackrel{\text{def}}{=} (MN)$  si  $M \neq N$ .
- (2) Sinon  $\mathcal{C}_{MN}$  est la tangente en  $M = N$  à la parabole  $\mathcal{P}$ .

Comme pour le cercle, donnons-nous quatre points  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  sur la parabole  $\mathcal{P}$  puis pour  $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$  définissons le point  $A_n$  comme étant le point d'intersection, éventuellement double<sup>7</sup>, de la parabole  $\mathcal{P}$  avec la parallèle à  $\mathcal{C}_{A_{n-3}A_{n-4}}$  passant par  $A_{n-1}$ . Voici un exemple de tracé où il semblerait de nouveau que  $A_7 = A_1$ . En testant d'autres situations<sup>8</sup>, cette conjecture se solidifie rapidement. Frappant ! Non ?



La preuve va être ici des plus faciles grâce à quelques résultats simples d'analyse<sup>9</sup>. En effet, la pente d'une corde généralisée  $\mathcal{C}_{MN}$  est  $x_M + y_N$  pour les raisons suivantes.

- (1) Si  $M \neq N$ ,  $\mathcal{C}_{MN} \stackrel{\text{def}}{=} (MN)$  a pour pente  $\frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{x_M^2 - x_N^2}{x_M - x_N} = x_M + x_N$ .
- (2) Si  $M = N$ ,  $\mathcal{C}_{MN}$  est la tangente en  $M$  à la parabole  $\mathcal{P}$ . Cette tangente a pour pente  $2x_M = x_M + x_N$ .

6. Ne jamais croire quelqu'un qui emploie trop de superlatifs.

7. Une tangente à la parabole admet un point d'intersection double.

8. Le lieu de téléchargement de ce document contient un fichier GeoGebra `base-tool-parabola.ggb` manipulable dynamiquement pour tester la conjecture.

9. Le lecteur habitué notera que les raisonnements faits utilisent juste du calcul différentiel sur des polynômes à une variable. Nous avons donc une démonstration plus algébrique qu'analytique.

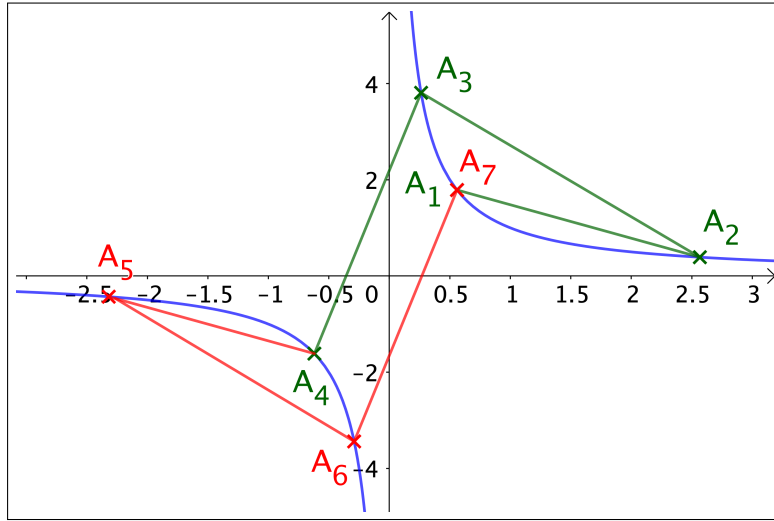
Comme avec le cercle,  $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ ,  $\mathcal{C}_{A_n A_{n-1}} // \mathcal{C}_{A_{n-3} A_{n-4}}$ , et l'on en déduit ici les égalités suivantes où  $x_i = x_{(A_i)}$  <sup>def</sup>.

- **[L1]** :  $x_1 + x_2 = x_4 + x_5$
- **[L2]** :  $x_2 + x_3 = x_5 + x_6$
- **[L3]** :  $x_3 + x_4 = x_6 + x_7$

Comme dans la section 1.2, ceci implique  $x_1 = x_7$ , soit de façon équivalente  $A_7 = A_1$ . Retomber sur le même système n'est pas que pur hasard. Rendez-vous à la section 4 qui va lever le voile de cette mystérieuse coïncidence.

### 3. ENCORE MIEUX, CELA MARCHE AUSSI AVEC L'HYPERBOLE D'ÉQUATION $y = \frac{1}{x}$

D'une façon analogue à ce qui a été fait pour la parabole, nous définissons la notion de corde généralisée pour l'hyperbole  $\mathcal{H} : y = \frac{1}{x}$ , une notion applicable à toute courbe d'équation  $y = f(x)$  avec  $f$  dérivable. On procède au même type de construction que précédemment à partir de quatre points  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  sur l'hyperbole  $\mathcal{H}$ . Voici un exemple de tracé où il semblerait encore que  $A_7 = A_1$ . En testant d'autres situations<sup>10</sup>, cette conjecture ne faiblit pas. N'est-ce pas un peu fou ?



La preuve est similaire à celle faite pour la parabole<sup>11</sup>. Ici la pente d'une corde généralisée  $\mathcal{C}_{MN}$  est  $\left(-\frac{1}{x_M y_N}\right)$  comme nous allons le vérifier.

- (1) Si  $M \neq N$ ,  $\mathcal{C}_{MN} = (MN)$  a pour pente  $\frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{1}{x_M - x_N} \left( \frac{1}{x_M} - \frac{1}{x_N} \right) = -\frac{1}{x_M y_N}$ .
- (2) Si  $M = N$ ,  $\mathcal{C}_{MN}$  est la tangente en  $M$  à la parabole  $\mathcal{P}$ . Cette tangente admet pour pente  $-\frac{1}{x_M^2} = -\frac{1}{x_M y_N}$ .

Nous avons alors les égalités suivantes où de nouveau  $x_i = x_{(A_i)}$  <sup>def</sup>, les équivalences venant du fait qu'aucun des  $x_i$  n'est nul :

10. Le lieu de téléchargement de ce document contient un fichier GeoGebra `base-tool-hyperbola.ggb` manipulable dynamiquement pour tester la conjecture.

11. Le lecteur habitué notera qu'ici la preuve est de nouveau algébrique car on utilise juste du calcul différentiel sur des fractions polynomiales à une variable.

- **[L1]** :  $-\frac{1}{x_1y_2} = -\frac{1}{x_4y_5} \iff$  **[M1]** :  $x_1x_2 = x_4x_5$
- **[L2]** :  $-\frac{1}{x_2y_3} = -\frac{1}{x_5y_6} \iff$  **[M2]** :  $x_2x_3 = x_5x_6$
- **[L3]** :  $-\frac{1}{x_3y_4} = -\frac{1}{x_6y_7} \iff$  **[M3]** :  $x_3x_4 = x_6x_7$

**[M3]**  $\div$  **[M2]**  $\times$  **[M1]**<sup>12</sup> nous donne  $x_1x_4 = x_7x_4$  d'où  $x_1 = x_7$  puis  $A_7 = A_1$ . La section qui suit va permettre, via la notion de groupe, de comprendre pourquoi la construction magique fonctionne sur un cercle, la parabole  $\mathcal{P} : y = x^2$  et l'hyperbole  $\mathcal{H} : y = \frac{1}{x}$ .

#### 4. TOUT CECI EST FACILE SI L'ON PREND UN PEU DE REcul

Dans les preuves des sections précédentes, on constate que la construction géométrique se traduit par une identité basique qui est la clé de la périodicité de la suite de points  $(A_i)$ .

- (1) Pour le cercle, c'était  $\theta_i + \theta_{i+1} = \theta_{i+3} + \theta_{i+4}$  avec  $\theta_i = (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA_i})$ . Nous nous intéressons ici juste à la 2<sup>e</sup> preuve donnée dans la section 1.3.
- (2) Pour la parabole, c'était  $x_i + x_{i+1} = x_{i+3} + x_{i+4}$  avec  $x_k \in \mathbb{R}$  des abscisses.
- (3) Pour l'hyperbole, c'était  $x_i x_{i+1} = x_{i+3} x_{i+4}$  avec  $x_k \in \mathbb{R}^*$  des abscisses.

En fait, si  $\Gamma$  désigne une ellipse, une parabole quelconque, ou une hyperbole quelconque, on peut démontrer l'existence d'un point  $E \in \Gamma$  tel que la construction qui à  $A \in \Gamma$  et  $B \in \Gamma$  associe le point  $S$  tel que  $\mathcal{C}_{AB} \parallel \mathcal{C}_{ES}$  définisse une loi de groupe  $\star$  sur  $\Gamma$  avec  $E$  pour élément neutre. Les cas étudiés dans ce document n'en sont que des cas particuliers. Le lecteur intéressé peut se reporter à « *Faire des additions modulaires sur une ellipse* », « *Faire des additions sur une parabole* » et « *Faire des produits sur une hyperbole* » qui ont été rédigés par l'auteur de ce document<sup>13</sup>.

Tout comme dans la preuve dans la section 1.3, on constate alors que la construction « magique » est telle que  $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ ,  $A_n$  est l'unique point de  $\Gamma$  tel que  $\mathcal{C}_{A_n A_{n-1}} \parallel \mathcal{C}_{A_{n-3} A_{n-4}}$ . On en déduit alors que  $A_n \star A_{n-1} = A_{n-3} \star A_{n-4}$ . On retombe alors sur une identité similaire à celles redonnées ci-dessus mais avec la loi  $\star$  au lieu des lois  $+$  avec des angles orientés,  $+$  avec des réels et  $\times$  avec des réels non nuls. On conclut alors de la même façon. Que les mathématiques sont belles quand on prend le temps de les écouter !

12. Le lecteur connaissant la théorie des groupes voit tout de suite que nous avons là une version multiplicative dans  $(\mathbb{R}^*, \times)$  du système additif dans  $(\mathbb{R}, +)$  vu pour la parabole. Dès lors nul besoin d'expliquer de nouveau comment déduire  $x_1 = x_7$  du système.

13. Voir [addition-on-ellipses.pdf](#), [addition-on-parabolas.pdf](#) et [product-on-hyperbolas.pdf](#) à l'adresse <https://github.com/bc-writing/drafts>.