BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writing/drafts.

Mentions « légales »

Table des matières

Date: 25 Jan. 2024 – 27 Jan. 2024.

1. Ce qui nous intéresse

Existe-t-il $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $\prod_{i=0}^{k}(n+i)$ soit le carré d'un entier ?

2. Notations utilisées

Dans la suite, nous utiliserons les notations suivantes.

- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ et ${}^2\mathbb{N}_* = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
- $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\pi_n^k \ = \prod_{i=0}^{k}(n+i)$. Par exemple, nous avons $\pi_n^0 = n$ et $\pi_n^1 = n(n+1)$.
- $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
- $\forall (p\,;n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p-adique de n , c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n , mais $p^{v_p(n)+1} \nmid n$.
- $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m.
- $2\,\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
- $2\,\mathbb{N}+1$ désigne l'ensemble des nombres naturels impairs.

3. Cas 0

Donnons juste un fait basique concernant l'ensemble ${}^2\mathbb{N}$, fait qui nous sera utile par la suite.

Fait 3.1. $\forall (n,m) \in {}^2\mathbb{N}_* \times {}^2\mathbb{N}_*$, *si* $n \neq m$, *alors nous avons :*

(1) $|n-m| = 3 \iff (n,m) \in \{(1,4)\,;(4,1)\}$

(2) $|n-m| \geq 5$ *dès que* $(n,m) \notin \{(1,4)\,;(4,1)\}$.

Démonstration. Quitte à échanger les rôles, on peut supposer $n > m$. Par hypothèse, nous avons $(N,M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $n = N^2$ et $m = M^2$. Comme $n > m$, nous avons aussi $N > M$. Pour conclure, il suffit de s'appuyer sur les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} N > M &\iff N \geq M+1 \\ &\iff N^2 \geq (M+1)^2 \\ &\iff n \geq m+2M+1 \\ &\iff n-m \geq 2M+1 \end{aligned}$$

□

4. Cas 1

Fait 4.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Clairement $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\pi_n^1) \in 2\mathbb{N}$. Or $p \in \mathbb{P}$ ne pent diviser à la fois n et $n+1$. Nous savons donc que $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+1) \in 2\mathbb{N}$, autrement dit $(n, n+1) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. D'après le fait 3.1, nous savons que ceci est impossible. □

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) = N^2$ où $N \in \mathbb{N}^*$. Rappelons les deux identités classiques suivantes.

- $n(n+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k$
- $N^2 = \sum_{k=1}^{N}(2k-1)$

Dès lors, après avoir noté que $N > n$, les équivalences suivantes donnent une contradiction.

$$\begin{aligned}
n(n+1) = N^2 &\iff 2\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{N} (2k-1) \\
&\iff \sum_{k=1}^{n} 2k = \sum_{k=1}^{N} 2k - N \\
&\iff \sum_{k=n}^{N} 2k = N \\
&\iff \sum_{k=n}^{N-1} 2k + N = 0
\end{aligned}
\qquad \textit{Se souvenir que } N > n > 0 \,.$$

$\square$

5. Cas 2

Fait 5.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Posant $m = n+1$, nous avons $\pi_n^2 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Comme $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\pi_n^2) \in 2\mathbb{N}$, et comme de plus $p \in \mathbb{P}$ ne peut diviser à la fois m et m^2-1 , nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(m^2-1) \in 2\mathbb{N}$, d'où $(m, m^2-1) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Or, d'après le fait 3.1, $m^2-1 \in {}^2\mathbb{N}$ est impossible. $\square$

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Comme $p \in \mathbb{P}_{>2}$ ne peut diviser au maximum qu'un seul des trois facteurs n , $(n+1)$ et $(n+2)$, nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}_{>2}$, $(v_p(n), v_p(n+1), v_p(n+2)) \in \left(2\mathbb{N}\right)^3$. Mais que se passe-t-il pour $p = 2$?

Supposons d'abord $n \in 2\mathbb{N}$.

- Posant $n = 2m$, nous avons $\pi_n^2 = 4m(2m+1)(m+1)$, d'où $m(2m+1)(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Ce qui précède nous donne aussi $2m+1 \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Si $m \in 2\mathbb{N}+1$, alors $m \in {}^2\mathbb{N}_*$. De $m(2m+1)(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$ nous déduisons que $m+1 \in {}^2\mathbb{N}_*$. Or $(m, m+1) \in {}^2\mathbb{N}_* \times {}^2\mathbb{N}_*$ est impossible d'après le fait 3.1.
- De même, $m \in 2\mathbb{N}$ est impossible via $m+1 \in 2\mathbb{N}+1$.

Supposons maintenant $n \in 2\mathbb{N}+1$.

- Nous savons que $n \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Dès lors, $(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$, mais le fait 4.1 interdit cela.

$\square$

6. Cas 3

Fait 6.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Nous pouvons ici faire les manipulations algébriques naturelles suivantes.

$$\begin{aligned}
\pi_n^3 &= n(n+3) \cdot (n+1)(n+2) \\
&= (n^2+3n) \cdot (n^2+3n+2) \\
&= (m-1)(m+1) \\
&= m^2 - 1
\end{aligned}
\qquad m = n^2 + 3n + 1$$

De nouveau, le fait 3.1 nous permet d'aboutir au fait suivant. $\square$

Une preuve alternative. XXX $\square$

7. Cas 4

Fait 7.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. XXX □

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Posant $m = n+2$, nous avons $\pi_n^4 = (m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) = m(m^2-1)(m^2-4)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. On notera dans la suite $u = m^2-1$ et $q = m^2-4$.

Supposons d'abord que $m \in {}^2\mathbb{N}_*$.

- De $muq \in {}^2\mathbb{N}_*$, nous déduisons $uq \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Comme $u - q = 3$, nous savons que $u \wedge q \in \{1, 3\}$.
- Si $u \wedge q = 1$, alors $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, d'où $(u,q) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Or ceci est impossible d'après le fait 3.1 [1].
- Si $u \wedge q = 3$, alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(u) \in 2\mathbb{N}+1$ et $v_3(q) \in 2\mathbb{N}+1$. Donc $u = 3U^2$ et $q = 3Q^2$ avec $(U,Q) \in \mathbb{N}^2$. Or $u - q = 3$ donne $U^2 - Q^2 = 1$, et le fait 3.1 nous indique une contradiction.

Supposons maintenant que $m \notin {}^2\mathbb{N}_*$.

- Nous avons vu ci-dessus que $u \notin {}^2\mathbb{N}$ et $q \notin {}^2\mathbb{N}$. On peut donc écrire $m = \alpha M^2$, $u = \beta U^2$, $q = \gamma Q^2$ où $(M,U,Q) \in \mathbb{N}^3$, et $(\alpha,\beta,\gamma) \in \left(\mathbb{N}_{>1}\right)^3$ forme un triplet de naturels sans facteur carré.
- Notons que $\beta \neq \gamma$ car, dans le cas contraire, nous aurions $3 = u - q = \beta\left(U^2 - Q^2\right)$ qui fournirait $0 < |U^2 - Q^2| < 3$, et ceci contredirait le fait 3.1.
- Nous avons $m \wedge u = 1$, $m \wedge q \in \{1,2,4\}$ et $u \wedge q \in \{1,3\}$ avec $m \wedge u = m \wedge q = u \wedge q = 1$ impossible car sinon on aurait $(m,u,q) \in \left({}^2\mathbb{N}\right)^3$ via $muq \in {}^2\mathbb{N}$. Dès lors, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $\left(v_p(m), v_p(u), v_p(q)\right) \in \left(2\mathbb{N}\right)^3$.
- Les points précédents donnent $\{\alpha,\beta,\gamma\} \subseteq \{2,3,6\}$, et aussi $\alpha \wedge \beta = 1$, $\alpha \wedge \gamma \in \{1,2\}$, $\beta \wedge \gamma \in \{1,3\}$ avec $\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge \gamma = \beta \wedge \gamma = 1$ impossible. Le tableau « mécanique » ci-après nous amène à considérer juste $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,3,2)$ et $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,3,6)$.

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	Statut
2	3	2	1	2	1	OK
2	3	6	1	2	3	OK
3	2	3	1	3	1	KO
3	2	6	1	3	2	KO

- $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,3,2)$ nous donne $m = 2M^2$, $m^2 - 1 = 3U^2$ et $m^2 - 4 = 2Q^2$.
- $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,3,6)$ nous donne $m = 2M^2$, $m^2 - 1 = 3U^2$ et $m^2 - 4 = 6Q^2$. Modulo 3, nous avons :
  - $m \equiv 0$ ou $m \equiv -1$ via $m = 2M^2$.
  - $m^2 \equiv 1$ via $m^2 - 1 = 3U^2$.
  - Nous en déduisons que $m \equiv -1$, puis $m - 2 \equiv 0$, soit $3 \mid m - 2$.

  Via $m = 2M^2$, nous obtenons $2 \mid m - 2$, et donc $6 \mid m - 2$.

---

1. On peut aussi noter que le fait ?? lève une contradiction car nous avons $m \in {}^2\mathbb{N}$ et $u \in {}^2\mathbb{N}$ qui donnent $(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$

□

Démonstration 2. XXX □

8. AFFAIRE À SUIVRE...