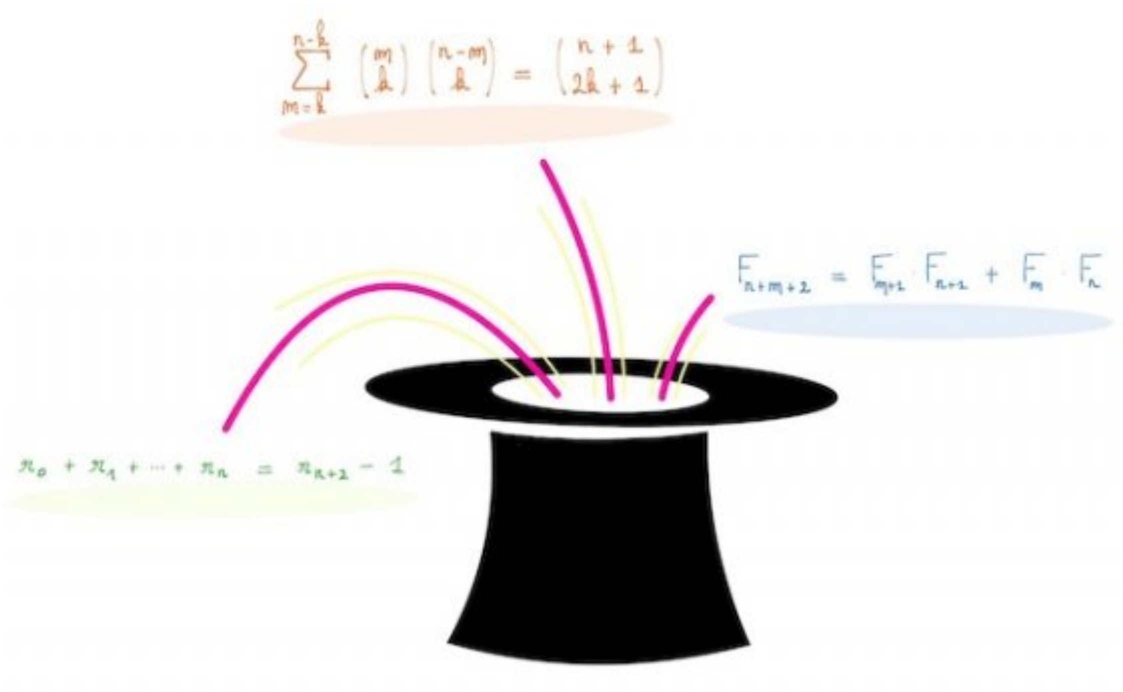
Tribune *(-18-Tribune-.html)*

Carnet de Route du Séminaire de la Détente Mathématique

LES FORMULES MAGIQUES

Le *3 mars 2021* - Ecrit par Léo Dort *(_Dort-Leo_.html)*



Nous allons voir qu'il n'est pas nécessaire de faire des calculs longs et fastidieux pour démontrer des formules. Parfois il suffit de raconter des histoires et de faire des dessins !

C'est ce type de formules que nous allons appeler Formules Magiques.

Des Histoires ...

On note $\binom{n}{k}$, et on dit « k parmi n », le nombre de parties à k éléments dans un

Formule Magique 1 :

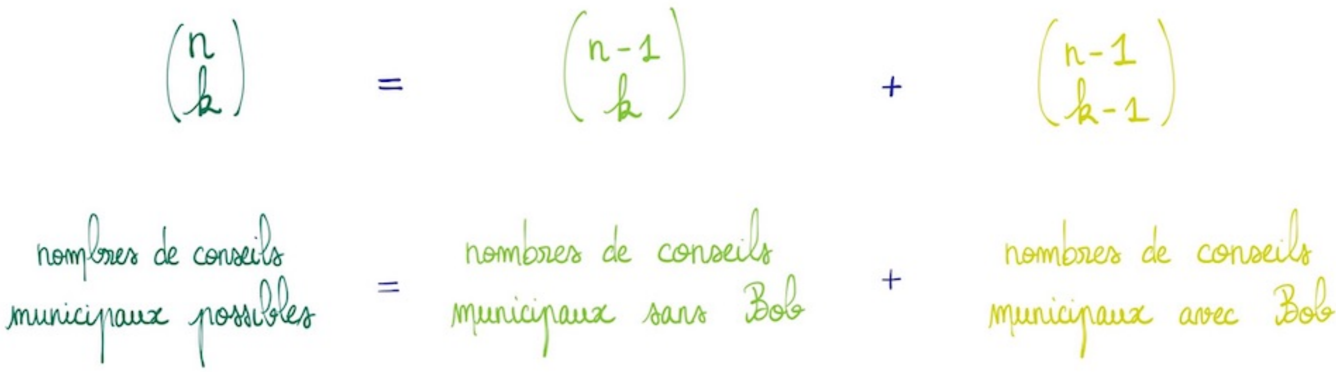
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Un village de n habitants souhaite élire k personnes au conseil municipal. Bob, un citoyen du village se demande combien de conseils municipaux il est possible de constituer. Bien sûr, au vu de la définition donnée ci-dessus, il y en $\binom{n}{k}$.

Mais dans chacun de ces conseils municipaux :

- soit Bob fait partie du conseil, et dans ce cas-là, il reste à élire $k-1$ personnes parmi les $n-1$ habitants restants. Ce qui fait $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités ;
- soit Bob ne fait pas partie du conseil, et dans ce cas-ci, il faut élire les k conseillers municipaux parmi les $n-1$ villageois restants. Ce qui fait $\binom{n-1}{k}$ possibilités.

On retrouve donc bien la formule du triangle de Pascal :



Une formule un peu plus compliquée

Comme avant, nous allons nous intéresser au nombre de conseils municipaux, mais cette fois-ci avec un maire à sa tête. On peut constituer un tel conseil de deux manières différentes :

- on constitue le conseil, puis on choisit le maire parmi les k membres du conseil. Ce qui nous donne

$$\underbrace{k}_{\text{nombre de maires possibles parmi les } k \text{ membres du conseil}} \cdot \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{nombres de conseils municipaux possibles}} \text{ possibilités}$$

- ou bien on élit d'abord le maire (qui fait parti du conseil municipal), puis on élit le reste du conseil parmi les villageois restants. Ce qui nous donne

$$\underbrace{n}_{\text{nombres de maires possibles avant élection du conseil}} \cdot \underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{\text{nombres de conseils municipaux avec le maire déjà élu}} \text{ possibilités.}$$

En résumé, on retrouve bien notre formule magique

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Une formule difficile

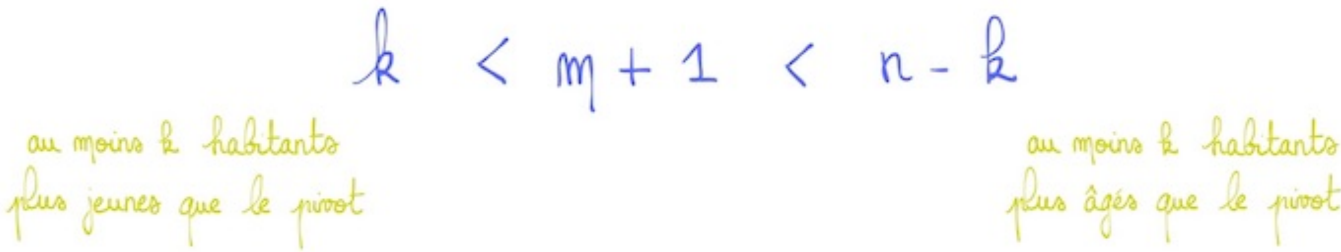
Terminons par une formule beaucoup moins intuitive.

Supposons qu'un nouvel habitant, disons Michel, s'installe au village. Il y a donc à présent $n+1$ villageois. Très persuasif, Michel convainc le village d'élire un nouveau conseil municipal de $2k+1$ habitants. Il y a donc $\binom{n+1}{2k+1}$ conseils municipaux possibles.

Mais Michel propose une toute nouvelle méthode d'élection.

- **Étape 1 :** on classe les habitants par âge croissant.

- **Étape 2 :** on tire une personne au sort qui fera partie automatiquement du conseil. On appelle cette personne pivot.
Mais attention, cet habitant pivot ne doit être ni trop jeune, ni trop âgé ! Il doit y avoir au moins k personnes plus jeunes, et au moins k personnes plus âgées parmi le reste des habitants.
Dans le classement des âges, le pivot à la place $m+1$, où $m+1$ doit donc satisfaire :

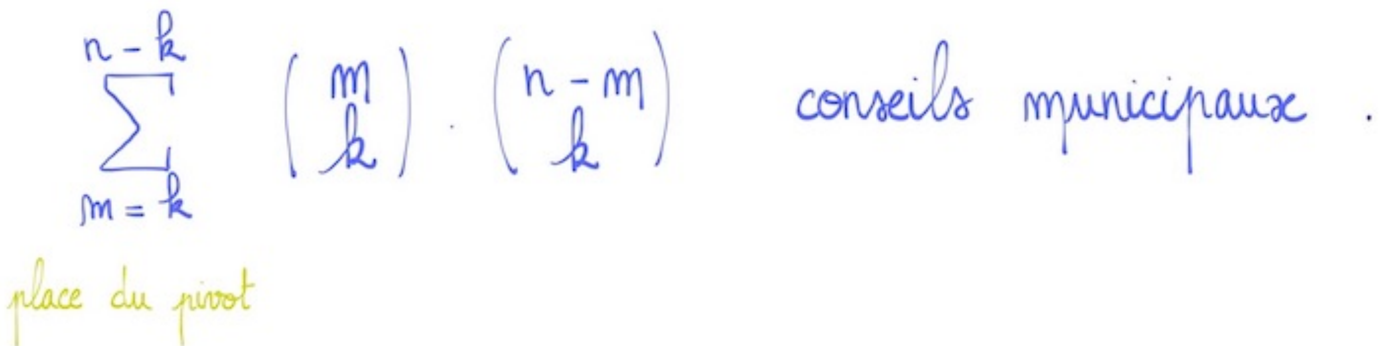


- **Étape 3 :** les m personnes plus jeunes que le pivot élisent entre elles une assemblée de k habitants qui siègeront au conseil, et les $n-m$ habitants plus âgées que le pivot font de même.

- **Étape 4 :** le conseil municipal est alors formé par le pivot, et des deux assemblées précédentes.

Donc si le pivot est à la pace $m+1$ dans le classement des âges, alors on peut constituer selon cette méthode d'élection.

Puis, comme on l'a remarqué plus haut, le pivot doit être entre les places k et $n-k$. Par conséquent, on peut constituer



D'où la formule magique

$$\sum_{m=k}^{n-k} \binom{m}{k} \binom{n-m}{k} = \binom{n+1}{2k+1}.$$

Exercice (javascript:;)

> *Retrouvez les formules magiques précédentes par le calcul.*

... et des Dessins

Paver des rectangles

Reconnaissez-vous cette suite de nombres ?

$$0, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad \ldots$$

Il s'agit de la célèbre **suite de Fibonacci**, et on la définit comme suit :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad \text{et} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{si } n \geq 0.$$

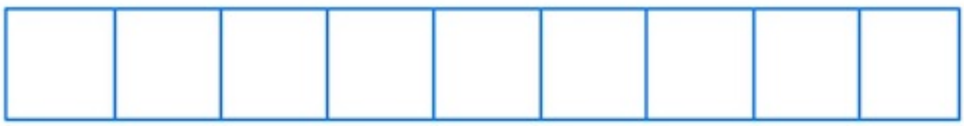
C'est une belle formule, mais elle n'est pas magique.. Intéressons-nous alors à la formule suivante qui est cette-fois magique.

Formule Magique 4 :

$$F_{n+m+2} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n.$$

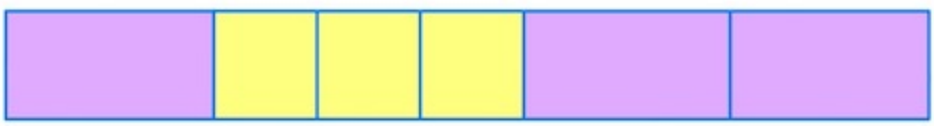
A priori, rien d'évident. Mais nous allons voir que la suite de Fibonacci possède un lien avec les **pavages** !

On souhaite paver un rectangle de taille n, c'est-à-dire un rectangle de n cases (ou n cellules) disposés sur 1 ligne

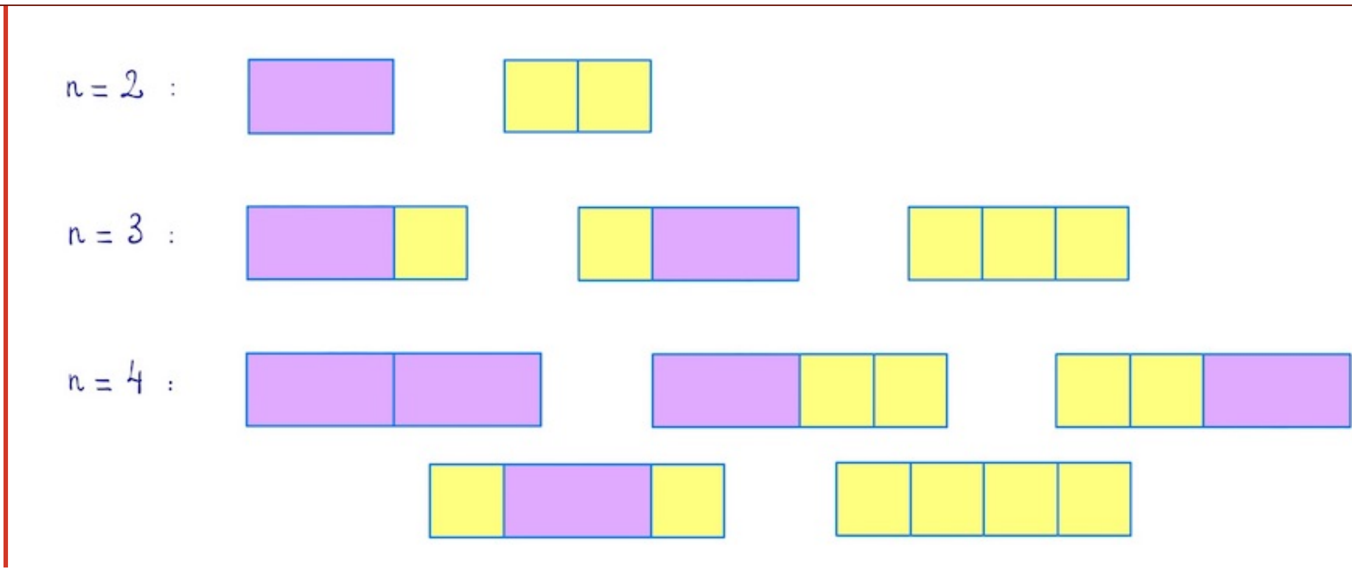


avec les deux briques élémentaires suivantes :

Exemple de pavage du rectangle de taille 9 *:*



Pour la suite, on pose $r_0 = 0$, et si $n \geq 1$, alors on note r_n le nombre de pavages du rectangle de taille n.



Ainsi par l'exercice précédent, on a

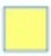
$$r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 3, \quad r_4 = 5 \quad \dots$$

Ça ne vous rappelle rien ?

Il semblerait que pour tout entier $n \geq 1$

$$r_n = F_{n+1}.$$

En effet, un pavage d'un rectangle de taille $n+2$ peut être décrit en fonction de la dernière brique élémentaire qui la compose.

- Soit cette dernière brique est . Dans ce cas, il reste à paver un rectangle de taille $n+1$. Il y a r_{n+1} pavages possibles pour ce rectangle.

- Soit cette dernière brique  est en avant dernière position, et dans ce cas, il

En résumé, on a

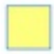
$$r_{n+2} = r_{n+1} + r_n.$$

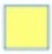
Et puisque $r_0 = F_1$, $r_1 = F_2$ et que la suite $(r_n)_{n\geq 0}$ satisfait la même réaction de récurrence que la suite de Fibonacci, on en déduit que $r_n = F_{n+1}$.

Il en découle que pour déduire des propriétés sur la suite de Fibonacci, on peut étudier le nombre de pavages des rectangles !

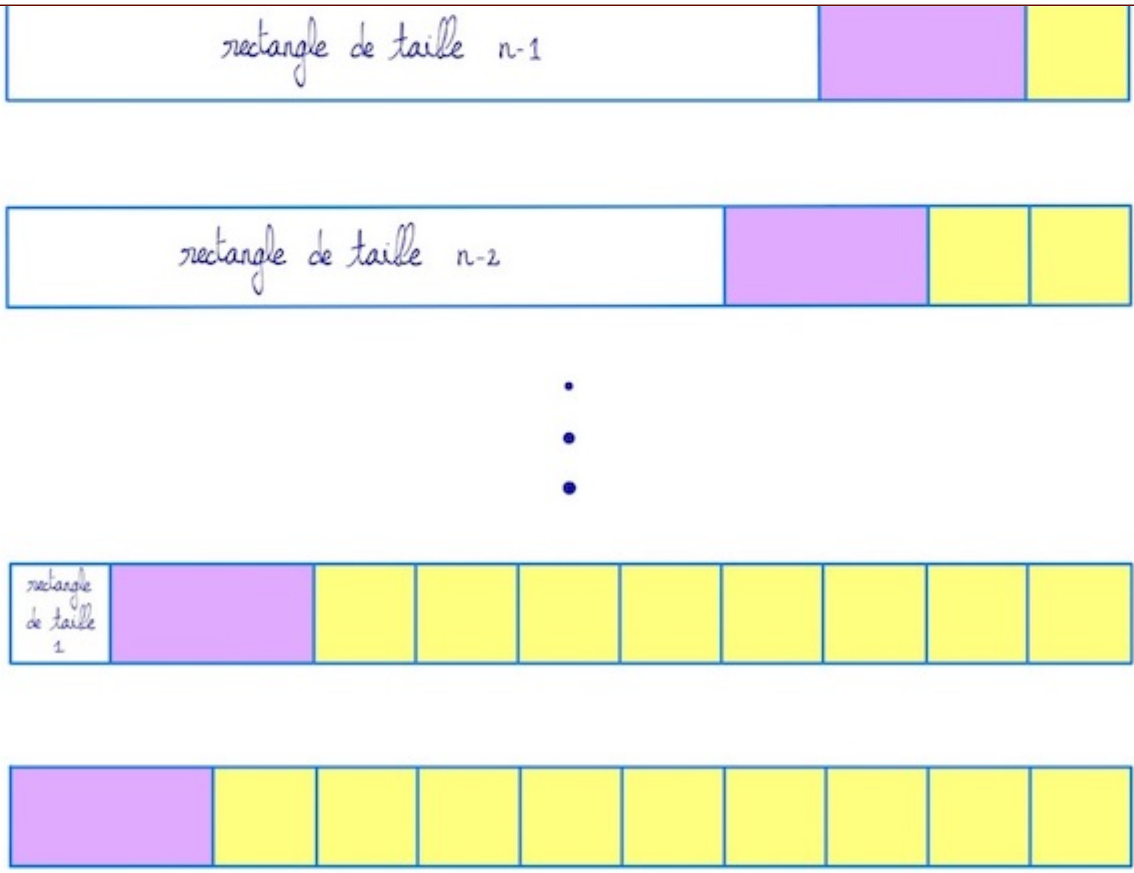
Formule Magique 5 :

$$r_0 + r_1 + \cdots + r_n = r_{n+2} - 1.$$

Considérons un rectangle de taille $n + 2$. Alors $r_{n+2} - 1$ correspond au nombre total de pavages de ce rectangle, sans compter celui où il n'y a que des briques .

Par ailleurs s'il n'y pas QUE des briques , alors il y a au moins une brique  dans le pavage. Intéressons-nous à l'emplacement de la dernière de ces briques .

- Si elle est en dernière position, alors il existe un rectangle de taille n à paver, ce qui fait r_n possibilités.
- Si elle est avant-dernière position, alors il reste un rectangle de taille $n - 1$ à paver, ce qui représente r_{n-1} possibilités.
- Et ainsi de suite jusqu'à ce que la dernière brique  soit en première position.



Ainsi en distinguant les différents cas possibles, on obtient bien :

$$r_{n+2} - 1 = r_0 + r_1 + \cdots + r_n.$$

Revenons à la formule $F_{n+m+2} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n$. D'après ce qu'on a vu, il est équivalent de montrer que

$$r_{n+m} = r_mr_n + r_{n-1}r_{m-1}.$$

Pour démontrer cette formule, introduisons une nouvelle notion.

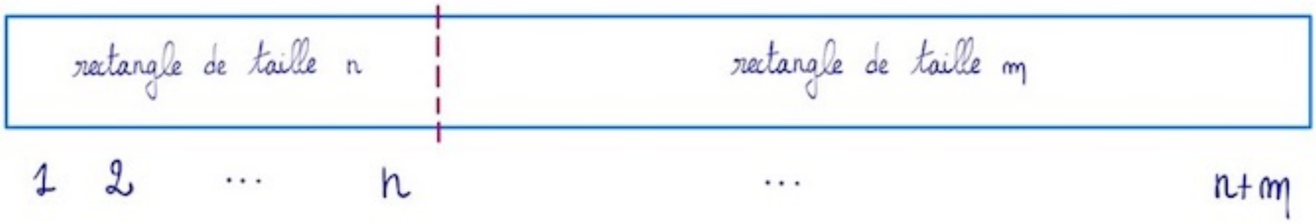
Définition : *On dit qu'un pavage est **cassable au niveau** k, si on peut le séparer en deux pavages, le premier portant sur les k premières cellules et le second sur les cellules restantes.*

Exemple : Le pavage ci-dessous est cassable en 3, mais pas en 4.

Nous pouvons à présent démontrer notre formule.

r_{n+m} est le nombre de pavages d'un rectangle de taille $n+m$. On réalise alors une disjonction des cas selon que le pavage est cassable en n ou non !

- Si le pavage est cassable en n, alors par définition il est la concaténation d'un pavage de taille n, et d'un pavage de taille m.



Il y a donc $r_n r_m$ possibilités.

Puis remarquons que :

Propriété : *Un pavage n'est pas cassable en k si, et seulement si, la k-ième cellule du rectangle est la 1ère cellule d'une brique* .

- Par conséquent, si un pavage n'est pas cassable en n, alors en retirant cette brique problématique, on remarque que ce pavage est la concaténation d'un pavage de taille $n-1$, de la brique problématique , puis d'un pavage de taille $m-1$. Il y a donc $r_{n-1}r_{m-1}$ possibilités.

Ainsi on en conclut que

$$r_{n+m} = r_n r_m + r_{n-1} r_{m-1}.$$

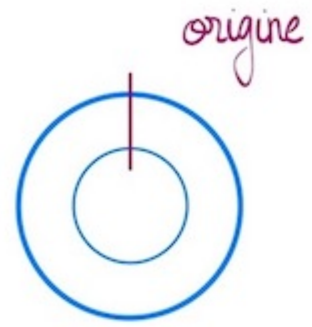
Pour terminer, connaissez-vous cette nouvelle suite de nombre ?

$$2, \quad 1, \quad 3, \quad 4, \quad 7, \quad 11, \quad 18, \quad \ldots$$

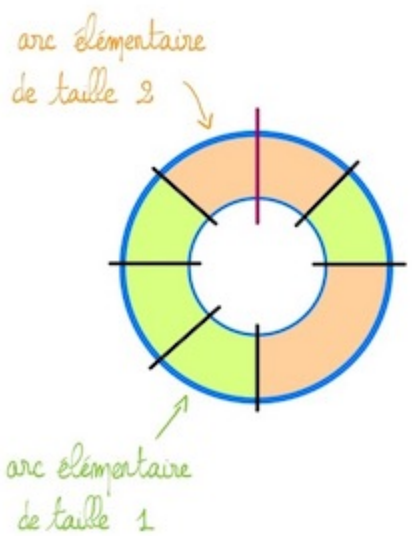
Les termes suivants sont $29, 46,$ etc... Il s'agit de la célèbre **suite de Lucas** ! Elle est définie par la même relation de récurrence que la suite de Fibonacci, et seules les conditions initiales sont différentes :

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1, \quad \text{et} \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \ \text{si } n \geq 0.$$

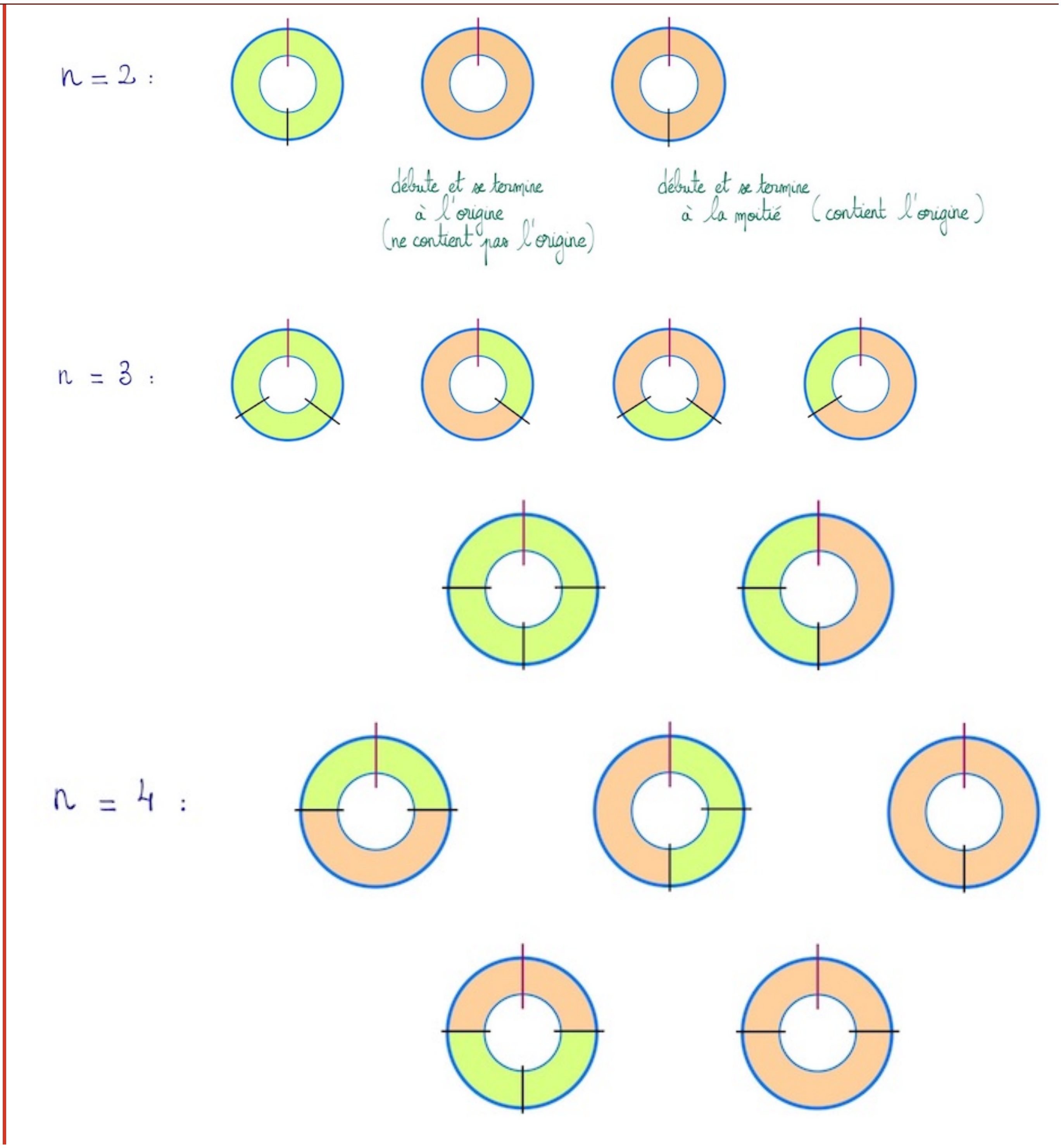
Si nous avons décrit un lien entre la suite de Fibonacci et les pavages de rectangles, nous allons maintenant voir que la suite de Lucas a un lien avec les pavages de cercles. Pour paver un cercle, on commence par le munir d'une origine.



Puis, si on coupe le cercle en n parties égales (en partant de l'origine et en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre par exemple), alors on pave les cercle avec des arcs élémentaires de 1 ou 2 morceaux.



Tous les pavages possibles pour les petites valeurs de n. (javascript:;)



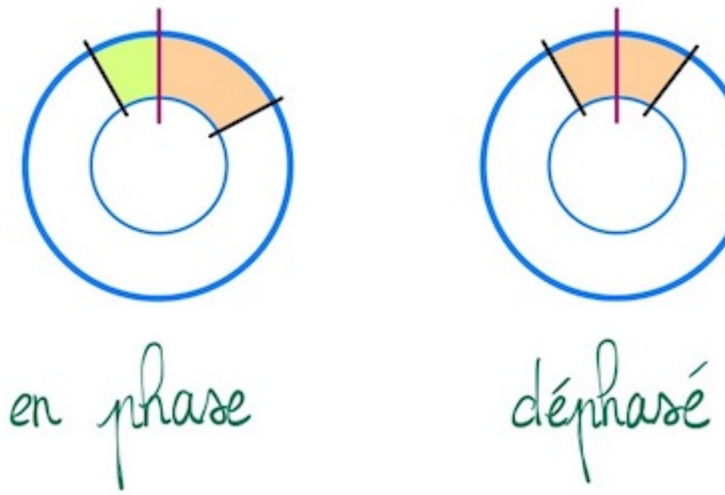
Notons c_n le nombre de pavages du cercles à n cellules. Alors on peut montrer, de la même manière que précédemment, que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$c_n = L_n.$$

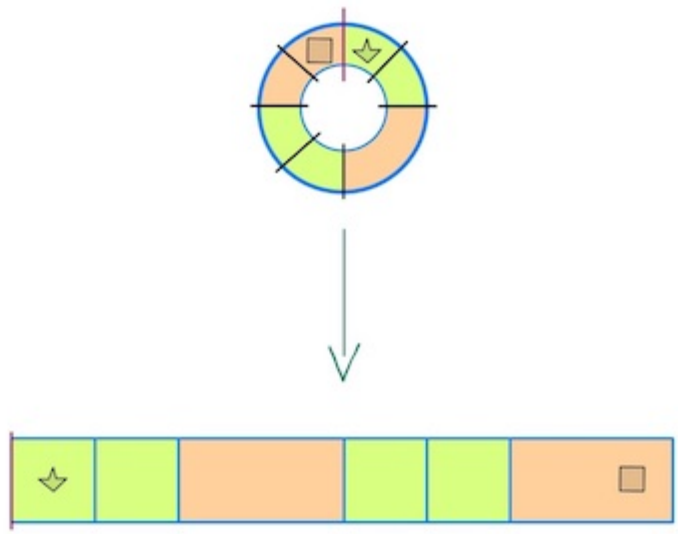
Exercice (javascript:;)

Remarquons que le pavage d'un cercle peut être de deux manières différentes.

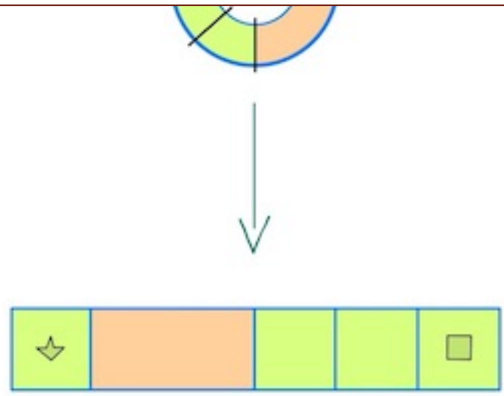
- Soit l'origine n'est pas contenue dans un arc élémentaire de taille 2. On dit que le pavage est **en phase** ;
- Soit l'origine est contenue dans un arc élémentaire de taille 2. On dit alors que le pavage est **déphasé**.



Dans le premier cas, on déroule le cercle pour obtenir un rectangle de taille n pavé.



Dans le second cas, on ne peut dérouler le cercle à partir de l'origine puisqu'il faudrait alors casser l'arc élémentaire de taille 2 qui la contient. On retire donc cet arc problématique, et on déroule le pavage restant pour obtenir un rectangle de



On en déduit ainsi notre dernière formule magique.

Formule magique 6 : *Pour tout entier* $n \geq 2$*, on a*

$$c_n = r_n + r_{n-2}.$$

Vous pouvez trouver ici *(http://idm-dev.univ-littoral.fr/IMG/pdf/sdm_-_27-01-2021_-_les_formules_magiques.pdf)* les notes manuscrites de cet exposé au format pdf, et cliquez là *(https://mmi-lyon.fr/?site_conference=detente-mathematique#:~:text=Séminaire%20Détente%20mathématique%20Organisé%20p* pour en savoir plus sur le séminaire et la MMI.

Article édité par Laurent Bartholdi *(_Laurent_.html)*