CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS – RÉSOLUTIONS À LA MAIN

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LaTeX, disponible sur la page ***https://github.com/bc-writing/drafts****.*

Table des matières

Date : 25 Jan. 2024 – 4 Fév. 2024.

1. Ce qui nous intéresse

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers » [1], Paul Erdos démontre que pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit de $(k+1)$ entiers consécutifs $n(n+1)\cdots(n+k)$ n'est jamais le carré d'un entier.

Dans ce document, nous proposons quelques cas particuliers résolus de façon « adaptative » à la sueur des neurones ; le but recherché est de fournir différentes approches même si parfois cela peut prendre plus de temps.

2. Notations utilisées

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}\,,\ \pi_n^k = \prod_{i=0}^{k} (n+i)\,.$
  Par exemple, $\pi_n^0 = n\,,\ \pi_n^1 = n(n+1)$ et $\pi_{n+2}^3 = (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)\,.$
- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des carrés parfaits. On note aussi ${}^2_*\mathbb{N} = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*\,.$
  $\mathbb{N}_{sf}$ est l'ensemble des naturels non nuls sans facteur carré [2].
- $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
  $\forall (p\,; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*\,,\ v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p-adique de n, c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n, contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m.
- $2\,\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
  $2\,\mathbb{N} + 1$ est l'ensemble des nombres naturels impairs.
- $(a \pm b)$ est un raccourci pour $(a+b)(a-b)\,.$

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).
2. En anglais, on dit « square free ».

3. Avec 8 facteurs

Fait 3.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$.

La démonstration très astucieuse suivante est proposée dans un échange sur `https://math.stackexchange.com` (voir la section 4). Comme pour le cas de quatre facteurs, l'algèbre va nous permettre d'aller très vite.

Preuve.

- L'une des preuves du fait **??** nous donne $n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n+1)^2 - 1$. En particulier, $(n+4)(n+5)(n+6)(n+7) = (n^2+11n+29)^2 - 1$.
- L'idée astucieuse va être de considérer les deux expressions suivantes qui viennent de $\pi_n^7 = \big(f(n)^2 - 1\big)\big(g(n)^2 - 1\big)$.
  (1) $f(n) = n^2 + 3n + 1$.
  (2) $g(n) = n^2 + 11n + 29$.
- Nous avons les manipulations algébriques naturelles suivantes.

$$\begin{aligned}
\pi_n^7 &= \big(f(n)^2 - 1\big)\big(g(n)^2 - 1\big) && \textit{a = f(n) et b = g(n) .}\\
&= (a^2-1)(b^2-1) \\
&= a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 && \textit{Choisir } (a-b)^2 \textit{ au lieu de } (a+b)^2 \textit{ va nous permettre}\\
&= a^2b^2 - (a-b)^2 - 2ab + 1 && \textit{plus bas de ne pas trop nous éloigner de } \pi_n^7 .\\
&= a^2b^2 - 2ab + 1 - (a-b)^2 \\
&= (ab-1)^2 - (a-b)^2 && b - a = 8n + 28 > 0 .\\
&< (ab-1)^2
\end{aligned}$$

  Donc $\pi_n^7 < \big(f(n)g(n) - 1\big)^2$.
- Le point précédent rend naturel de tenter de démontrer que $\big(f(n)g(n) - 2\big)^2 < \pi_n^7$, car, si tel est le cas, π_n^7 sera encadré par les carrés de deux entiers consécutifs, et forcément nous aurons $\pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$. Ce qui suit montre que notre pari est gagnant. Que c'est joli !

$$\begin{aligned}
& \big(f(n)g(n) - 2\big)^2 < \pi_n^7 && \textit{a = f(n) et b = g(n) .}\\
\iff\ & (ab-2)^2 < (a^2-1)(b^2-1) \\
\iff\ & a^2b^2 - 4ab + 4 < a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 \\
\iff\ & a^2 + b^2 - 4ab + 3 < 0 && \textit{Le choix fait donne une majoration « pas trop grande »}\\
\iff\ & (2a-b)^2 - 3a^2 + 3 < 0 && \textit{comme nous le verrons dans la suite.}\\
\iff\ & (2a-b)^2 < 3(a^2-1)
\end{aligned}$$

  Comme $(2a-b)^2 = n^4 + \cdots$ et $3(a^2-1) = 3n^4 + \cdots$, nous savons que $3(a^2-1)$ prédomine $(2a-b)^2$ en $+\infty$, donc l'inégalité précédente sera validée à partir d'un certain n_0 . Nous devons malheureusement être plus précis afin de rejeter aussi les cas restants $n < n_0$. Commençons donc par obtenir une valeur petite de n_0 .
  (1) XXXX
  (2) XXXX

□

4. Sources utilisées

Fait ??.

- Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré *« n(n+1)...(n+k) est un carré ? »* sur le site `lesmathematiques.net` .

  La démonstration via le principe des tiroirs trouve sa source dans cet échange.

- L'article *« Le produit de 5 entiers consécutifs n'est pas le carré d'un entier. »* de T. Hayashi, Nouvelles Annales de Mathématiques, est consultable via Numdam , la bibliothèque numérique française de mathématiques.

  Cet article a fortement inspiré la longue preuve.

Fait ??.

Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré *« product of six consecutive integers being a perfect numbers »* sur le site `https://math.stackexchange.com` .

La courte démonstration est donnée dans cet échange. Vous y trouverez aussi un très joli argument basé sur les courbes elliptiques rationnelles.

Fait ??.

Un échange consulté le 3 février 2024, et titré *« Proof that the product of 7 successive positive integers is not a square »* sur le site `https://math.stackexchange.com` .

La courte démonstration est donnée dans cet échange, mais certaines justifications manquent.

Fait 3.1.

Un échange consulté le 4 février 2024, et titré *« How to prove that the product of eight consecutive numbers can't be a number raised to exponent 4 ? »* sur le site `https://math.stackexchange.com` .

La démonstration astucieuse vient de l'une des réponses de cet échange, mais la justification des deux inégalités n'est pas donnée.

5. AFFAIRE À SUIVRE...