BROUILLON - COURBES POLYNOMIALES SIMILAIRES

CHRISTOPHE BAL

Table des matières

Date: 2 Oct. 2020 – 27 Fév. 2024.

1. Où allons-nous ?

1.1. Une preuve visuelle ou presque.

Il est connu que les courbes des fonctions affines sont toutes des droites non verticales, et celles représentant des trinômes du 2e degré sont toutes des paraboles [1]. Laissant de côté le cas des fonctions constantes, nous constatons plus précisément les propriétés suivantes.

(1) Au lycée, on explique que l'on peut passer de la représentation de la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$ à celle du trinôme du 2e degré $g : x \mapsto a\,x^2 + b\,x + c$ via une translation, une dilatation verticale et/ou une dilatation horizontale.

(2) De même, on peut passer de la représentation de la fonction idendité $f : x \mapsto x$ à celle d'une fonction affine non constante $g : x \mapsto a\,x + b$ via une translation, une dilatation verticale et/ou une dilatation horizontale.

Une fois ceci noté, il devient naturel de se poser les questions suivantes.

(1) Peut-on passer de la courbe de la fonction cube $f : x \mapsto x^3$ à celle du polynôme du 3e degré $g : x \mapsto a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ via une translation, une dilation verticale et/ou une dilatation horizontale ?

(2) Que se passe-t-il plus généralement pour les polynômes de degré $k \geq 4$?

2. Cas des polynômes de degré 3

2.1. Une approche visuelle, ou presque.

Soit $\mathscr{C}_g$ la courbe de la fonction $g : x \mapsto a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ où $a \neq 0$. Nous allons démontrer que $\mathscr{C}_g$ s'obtient à partir de l'une des courbes suivantes en utilisant une translation, une dilatation verticale et/ou une dilatation horizontale.

(1) Γ_1 représente $f_1 : x \mapsto x^3$.

(2) Γ_2 représente $f_2 : x \mapsto x^3 - x$ de sorte que $f_2(x) = x(x-1)(x+1)$.

(3) Γ_3 représente $f_3 : x \mapsto x^3 + x$ de sorte que $f_3(x) = x(x-\mathbf{i})(x+\mathbf{i})$ où $\mathbf{i} \in \mathbb{C}$.

Démonstration.

(1) **On peut supposer que** $(a\,;b\,;d) = (1\,;0\,;0)$ **.**

- Il est immédiat que l'on peut supposer que $a = 1$.
  Dans la suite, on supposera donc que $g(x) = x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$.
- En considérant $\mathscr{C}_g$, on observe un centre de symétrie qui semble être l'unique point d'inflexion de $\mathscr{C}_g$ dont l'abscisse m se calcule comme suit.

  $$\begin{aligned} g''(m) = 0 &\iff 6m + 2b = 0 \\ &\iff m = -\tfrac{b}{3} \end{aligned}$$

  Il devient naturel de faire le changement de variable $x = m + t$. [2]

  $$\begin{aligned} g(x) &= g(m+t) \\ &= (m+t)^3 + b\,(m+t)^2 + c\,(m+t) + d \\ &= t^3 + 3m\,t^2 + 3m^2\,t + m^3 + b\,t^2 + 2b\,m\,t + b\,m^2 + c\,t + c\,m + d \\ &= t^3 + (3m+b)t^2 + (3m^2 + 2b\,m + c)t + m^3 + b\,m^2 + c\,m + d \end{aligned}$$

---

1. La définition géométrique des grecques anciens restent la meilleure.

2. Il est plus élégant de passer via la formule de Taylor en 0 du polynôme $h(t) = g(m+t)$: le coefficient de t^2 est $\frac{h''(0)}{2} = \frac{g''(m)}{2} = 0$. Le choix de passer via des développements calculatoires permet de rendre ce document le plus accessible possible à un élève ayant obtenu son BAC français avec un cursus mathématique.

Le coefficient de t^3 reste égal à 1 et celui de t^2 est $3m+b=0$. Ceci montre que l'on peut supposer $(a\,;b)=(1\,;0)$.

Dans la suite, on supposera donc $g(x)=x^3+c\,x+d$.

(2) On peut clairement supposer que $g(x)=x^3+c\,x$, puis on conclut comme suit.

- **Cas 1 :** $c=0$

  Nous n'avons rien à faire de plus, car ici $\mathscr{C}_g=\Gamma_1$.
- **Cas 2 :** $c=-k^2$ **avec** $k>0$

  Ici $g(x)=x^3-k^2\,x$, soit $g(x)=x(x-k)(x+k)$.

  Nous avons donc $g(k\,x)=k^3\,x(x-1)(x+1)=k^3\,f_2(x)$, puis $f_2(x)=\frac{1}{k^3}g(k\,x)$.

  On peut passer de $\mathscr{C}_g$ à Γ_2, *i.e.* de Γ_2 à $\mathscr{C}_g$, à l'aide des transformations autorisées.
- **Cas 3 :** $c=k^2$ **avec** $k>0$

  Ici $g(x)=x^3-(k\,\mathbf{i})^2\,x$, soit $g(x)=x(x-k\,\mathbf{i})(x+k\,\mathbf{i})$.

  Nous avons donc $g(k\,x)=k^3\,x(x-\mathbf{i})(x+\mathbf{i})=k^3\,f_3(x)$, puis comme dans le cas précédent on peut passer de Γ_3 à $\mathscr{C}_g$ à l'aide des transformations autorisées.

□

Pour $i\neq j$, il est évident qu'il n'est pas possible de passer de Γ_i à Γ_j à l'aide des transformations autorisées *(penser à la conservation géométrique du nombre de tangentes horizontales)*. Ceci permet de parler de trois types de courbe pour les polynômes de degré 3, contre un seul pour les fonctions affines, et de même pour les trinômes du 2$^{\text{e}}$ degré. Joli !

Remarque 2.1. *On notera que la preuve précédente est constructive : on peut donner les applications à appliquer en fonction des coefficients a, b, c, et d de* $g(x)=a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d$.

Remarque 2.2. *On notera aussi que la translation verticale n'est pas nécessaire dès que* $d\neq 0$.

2.2. **Une approche via les calculs différentiel et intégral.**

Soit $\mathscr{C}_g$ la courbe de la fonction $g:x\mapsto a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d$ où $a\neq 0$. Nous allons démontrer que $\mathscr{C}_g$ s'obtient à partir de l'une des courbes suivantes en utilisant une translation, une dilatation verticale et/ou une dilatation horizontale.

(1) Λ_1 représente $f_1:x\mapsto x^3$.

(2) Λ_2 représente $f_2:x\mapsto x^3-3x$ de sorte que $f_2'(x)=3(x^2-1)$.

(3) Λ_3 représente $f_3:x\mapsto x^3+3x$ de sorte que $f_3'(x)=3(x^2+1)$.

Démonstration. Distinguons trois cas en notant que l'on peut supposer que $a=1$.

(1) $g'(x)$ **a une unique racine réelle.**

Nous avons $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $g'(x)=3(x-\alpha)^2$, et donc $g(x)=(x-\alpha)^3+k$. Il est immédiat que l'on peut passer de Λ_1 à $\mathscr{C}_g$ à l'aide des transformations autorisées.

(2) $g'(x)$ **a deux racines réelles.**

Nous avons $\alpha\neq\beta$ deux réels tels que $g'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$. Les faits suivants montrent que l'on peut passer de $\mathscr{C}_g$ à Λ_2, *i.e.* de Λ_2 à $\mathscr{C}_g$, à l'aide des transformations autorisées.

- En posant $\delta=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $g'(x+\delta)=3\left(x+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\left(x+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$. Ceci nous fournit alors $g'(x+\delta)=3(x-\lambda)(x+\lambda)$ avec $\lambda=\frac{\alpha-\beta}{2}\neq 0$, puis $g'(\lambda\,x+\delta)=\lambda^2 f_2'(x)$.
- En résumé, $f_2'(x)=\frac{1}{\lambda^2}g'(\lambda\,x+\delta)$, puis $f_2(x)=\frac{1}{\lambda^3}g(\lambda\,x+\delta)+k$.

(3) $g'(x)$ **n'a pas de racine réelle.**

Notons $g'(x) = 3(x-p)^2 + m$ la forme canonique semi-développée de $g'(x)$ où $m > 0$. Les faits suivants montrent que l'on peut passer de $\mathscr{C}_g$ à Λ_3, *i.e.* de Λ_3 à $\mathscr{C}_g$, à l'aide des transformations autorisées.

- $g'(x+p) = 3x^2 + m$.
- Notant $\alpha = \sqrt{\frac{m}{3}} \neq 0$, on a $g'(\alpha x + p) = mx^2 + m$, soit $g'(\alpha x + p) = \frac{m}{3} f_3'(x)$.
- En résumé, $f_3'(x) = \frac{3}{m} g'(\alpha x + p)$, puis $f_3(x) = \frac{3}{\alpha m} g(\alpha x + p) + k$.

□

Comme pour les courbes Γ_k de la section 2.1, il n'est pas possible de passer de Λ_i à Λ_j à l'aide des transformations autorisées dès que $i \neq j$.

Remarque 2.3. *Dans la preuve précédente, les transformations appliquées à $g'(x)$ n'utilisent pas de translation verticale, ceci permettant d'en faire apparaître une par intégration. Sans cela, nous aurions quelque chose du type $f_i(x) = \lambda g(\alpha x + \beta) + \gamma x + \delta$ qui mènerait à une impasse.*

Remarque 2.4. *La preuve précédente reste constructive, mais obtenir les bons coefficients est plus complexe qu'avec la première preuve : nous devons passer via les théorèmes classiques des polynômes du 2^e^ degré, et aussi calculer une constante d'intégration.*

3. AFFAIRE À SUIVRE...