BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page
https://github.com/bc-writing/drafts.

Mentions « légales »

Table des matières

Date: 25 Jan. 2024 – 31 Jan. 2024.

1. Ce qui nous intéresse

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers » [1], Paul Erdos démontre que pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit d'entiers consécutifs $\prod_{i=0}^{k} (n+i)$ n'est jamais le carré d'un entier. Dans ce court document, nous commençons par étudier quelques cas particuliers de façon « adaptative » , puis nous proposons ensuite une méthode efficace [2], et semi-automatisable, pour gérer tous ces premiers cas, ainsi que d'autres.

2. Notations utilisées

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ et ${}^2\mathbb{N}_* = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
- $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k} (n+i)$. Par exemple, nous avons $\pi_n^0 = n$ et $\pi_n^1 = n(n+1)$.
- $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
- $\forall (p\,; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p-adique de n , c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n , contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m.
- $2\,\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
- $2\,\mathbb{N} + 1$ désigne l'ensemble des nombres naturels impairs.

3. Résolution au cas par cas

3.1. Avec 1 seul facteur.

Via $N^2 - M^2 = (N - M)(N + M)$, il est immédiat de noter que $\forall (N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $N > M$, alors $N^2 - M^2 \geq 3$. Le fait suivant précise ceci.

Fait 3.1. *$\forall (N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $N > M$, alors $N^2 - M^2 = \sum_{k=M+1}^{N} (2k - 1)$.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser $N^2 = \sum_{k=1}^{N} (2k - 1)$. □

3.2. Avec 2 facteurs.

Fait 3.2. *$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n + 1) \notin {}^2\mathbb{N}$.*

Démonstration. Il suffit de noter que $n^2 < n(n + 1) < (n + 1)^2$. □

Preuve alternative no.1. Supposons que $\pi_n^1 = n(n + 1) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Clairement $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\pi_n^1) \in 2\mathbb{N}$. Or $p \in \mathbb{P}$ ne peut diviser à la fois n et $n + 1$. Nous savons donc que $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n + 1) \in 2\mathbb{N}$, autrement dit $(n, n + 1) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. D'après le fait 3.1, nous savons que ceci est impossible. □

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).
2. Cette méthode s'appuie sur une représentation trouvée dans un message archivé que l'auteur a consulté le 28 janvier 2024. Voir `https://web.archive.org/web/20171110144534/http://mathforum.org/library/drmath/view/65589.html` .

Preuve alternative no.2. Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) = N^2$ où $N \in \mathbb{N}^*$. Les équivalences suivantes donnent alors une contradiction.

$$n(n+1) = N^2$$

$n(n+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k$ et $N^2 = \sum_{k=1}^{N} (2k-1)$.

$$\iff 2\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{N}(2k-1)$$

$$\iff \sum_{k=1}^{n} 2k = \sum_{k=1}^{N} 2k - N$$

$N > n$

$$\iff \sum_{k=n+1}^{N} 2k = N$$

$N > 0$ rend impossible la dernière égalité.

$$\iff \sum_{k=n+1}^{N-1} 2k + N = 0$$

□

3.3. **Avec 3 facteurs.**

Fait 3.3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Posant $m = n+1$, nous avons $\pi_n^2 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Comme $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\pi_n^2) \in 2\mathbb{N}$, et comme de plus $p \in \mathbb{P}$ ne peut diviser à la fois m et m^2-1 , nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(m^2-1) \in 2\mathbb{N}$, d'où $(m, m^2-1) \in {}^2\mathbb{N}_* \times {}^2\mathbb{N}_*$. Or, d'après le fait 3.1, $m^2-1 \in {}^2\mathbb{N}$ est impossible. □

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Comme $p \in \mathbb{P}_{>2}$ ne peut diviser au maximum qu'un seul des trois facteurs n , $(n+1)$ et $(n+2)$, nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}_{>2}$, $\big(v_p(n), v_p(n+1), v_p(n+2)\big) \in \big(2\mathbb{N}\big)^3$. Mais que se passe-t-il pour $p = 2$?

Supposons d'abord $n \in 2\mathbb{N}$.

- Posant $n = 2m$, nous avons $\pi_n^2 = 4m(2m+1)(m+1)$, d'où $m(2m+1)(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Comme $v_2(2m+1) = 0$, nous savons que $2m+1 \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Donc $m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$, mais le fait 3.2 interdit cela.

Supposons maintenant $n \in 2\mathbb{N}+1$.

- Nous savons que $n \in {}^2\mathbb{N}_*$ via $v_2(n) = 0$.
- Dès lors, on obtient $(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$, mais de nouveau ceci contredit le fait 3.2. □

3.4. **Avec 4 facteurs.**

Fait 3.4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Nous pouvons ici faire les manipulations algébriques naturelles suivantes.

$$
\begin{aligned}
\pi_n^3 &= n(n+3) \cdot (n+1)(n+2) \\
&= (n^2+3n) \cdot (n^2+3n+2) \\
&= m(m+2) \\
&= m^2 + 2m \\
&= (m+1)^2 - 1
\end{aligned}
$$

$m = n^2 + 3n$

Comme $m > 0$, d'après le fait 3.1, $(m+1)^2 - 1 \notin {}^2\mathbb{N}$, c'est-à-dire $\pi_n^3 \notin {}^2\mathbb{N}$. □

Une preuve alternative. En « symétrisant » certaines expressions, nous obtenons les manipulations algébriques « moins magiques » suivantes.

$$
\begin{aligned}
\pi_n^3 &= n(n+1)(n+2)(n+3) & \\
&= \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) & \quad x = n + \frac{3}{2} \\
&= \left(x^2 - \frac{9}{4}\right)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) & \\
&= (y-1)(y+1) & \quad y = x^2 - \frac{5}{4} \\
&= y^2 - 1 & \\
&= \left(\left(n + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right)^2 - 1 & \\
&= \left(n^2 + 3n + 1\right)^2 - 1 &
\end{aligned}
$$

□

3.5. **Avec 5 facteurs.**

Fait 3.5. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $\big(v_p(n), v_p(n+1), v_p(n+2), v_p(n+3), v_p(n+4)\big) \in \big(2\mathbb{N}\big)^5$. Pour $p = 2$ et $p = 3$, nous avons les alternatives suivantes pour chaque facteur $(n+i)$ de π_n^3 .

- **[A 1]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A 2]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$
- **[A 3]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times 2\mathbb{N}$
- **[A 4]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$

Comme nous avons cinq facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions très facilement.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 1]** .

  Dans ce cas, on sait juste que $(n+i, n+i') \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Or $n \notin {}^2\mathbb{N}$ puisque sinon nous aurions $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$ via $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$, mais ceci ne se peut pas d'après le fait 3.4. De même, $n+4 \notin {}^2\mathbb{N}$. Dès lors, nous avons $\{n+i, n+i'\} \subseteq \{n+1, n+2, n+3\}$ qui donne deux carrés parfaits non nuls éloignés de moins de 3 , et ceci contredit le fait 3.1.
- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 2]** .

  Dans ce cas, le couple de facteurs est $(n, n+3)$, ou $(n+1, n+4)$.
  1. Supposons d'abord que n et $(n+3)$ vérifient **[A 2]** .
     Comme $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+3) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(n) \in 2\mathbb{N}+1$ et $v_3(n+3) \in 2\mathbb{N}+1$, nous avons $n = 3N^2$ et $n+3 = 3M^2$ où $(N, M) \in \big(\mathbb{N}^*\big)^2$. Or, ceci donne $3 = 3M^2 - 3N^2$, puis $M^2 - N^2 = 1$ qui contredit le fait 3.1.
  2. De façon analogue, on ne peut pas avoir $(n+1)$ et $(n+4)$ vérifiant **[A 2]** .
- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 3]** .

  Comme dans le point précédent, c'est impossible car on aurait $2 = 2M^2 - 2N^2$, ou $4 = 2M^2 - 2N^2$. En effet, ici les couples possibles sont $(n, n+2)$, $(n, n+4)$, $(n+2, n+4)$ et $(n+1, n+3)$ [3].

---

3. Rien n'empêche d'avoir n , $(n+2)$ et $(n+4)$ vérifiant tous les trois **[A 3]** .

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 4]**.

  Ceci donne deux facteurs différents divisibles par 6, mais c'est impossible. $\square$

Bien que longue, la preuve suivante est simple à suivre car elle ne fait que dérouler le fil des faits découverts. De plus, cette preuve utilise une technique dont nous reparlerons plus tard lors de l'exposé de la méthode efficace et généraliste.

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Posant $m = n+2$, nous avons $\pi_n^4 = (m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) = m(m^2-1)(m^2-4)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. On notera dans la suite $u = m^2-1$ et $q = m^2-4$.

Supposons d'abord que $m \in {}^2\mathbb{N}_*$.

- De $muq \in {}^2\mathbb{N}_*$, nous déduisons $uq \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Comme $u - q = 3$, nous savons que $u \wedge q \in \{1, 3\}$.
- Si $u \wedge q = 1$, alors $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, d'où $(u,q) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Le fait 3.1 impose d'avoir $(u,q) = (4,1)$, d'où $m^2 - 1 = 4$, mais ceci est impossible[4].
- Si $u \wedge q = 3$, alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(u) \in 2\mathbb{N}+1$ et $v_3(q) \in 2\mathbb{N}+1$. Donc $u = 3U^2$ et $q = 3Q^2$ avec $(U,Q) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$. Or $u - q = 3$ donne $U^2 - Q^2 = 1$, et le fait 3.1 nous indique une contradiction.

Supposons maintenant que $m \notin {}^2\mathbb{N}_*$.

- Nous avons vu ci-dessus que $u \notin {}^2\mathbb{N}$ et $q \notin {}^2\mathbb{N}$. On peut donc écrire $m = \alpha M^2$, $u = \beta U^2$, $q = \gamma Q^2$ où $(M,U,Q) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^3$, et $(\alpha,\beta,\gamma) \in \left(\mathbb{N}_{>1}\right)^3$, le dernier triplet étant formé d'entiers sans facteur carré.
- Notons que $\beta \neq \gamma$ car, dans le cas contraire, $3 = u - q = \beta\left(U^2 - Q^2\right)$ fournirait $\beta = 3$ puis $U^2 - Q^2 = 1$, et ceci contredirait le fait 3.1.
- Nous avons $m \wedge u = 1$, $m \wedge q \in \{1,2,4\}$ et $u \wedge q \in \{1,3\}$ avec $m \wedge u = m \wedge q = u \wedge q = 1$ impossible car sinon on aurait $(m,u,q) \in \left({}^2\mathbb{N}\right)^3$ via $muq \in {}^2\mathbb{N}$.
- Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $\left(v_p(m), v_p(u), v_p(q)\right) \in \left(2\mathbb{N}\right)^3$.
- Les points précédents donnent $\{\alpha,\beta,\gamma\} \subseteq \{2,3,6\}$ avec de plus $\beta \neq \gamma$, ainsi que $\alpha \wedge \beta = 1$, $\alpha \wedge \gamma \in \{1,2\}$ et $\beta \wedge \gamma \in \{1,3\}$. Notons au passage que $\alpha \wedge \beta = 1$ implique $(\alpha,\beta) = (2,3)$, ou $(\alpha,\beta) = (3,2)$. Via le tableau « mécanique » ci-après, nous obtenons que forcément $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,3,2)$ ou $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,3,6)$. Le plus dur est fait !

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	*Statut*
2	3	2	1	2	1	✓
2	3	6	1	2	3	✓
3	2	3	1	3	1	☒
3	2	6	1	3	2	☒

- $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,3,2)$ nous donne $m = 2M^2$, $m^2 - 1 = 3U^2$ et $m^2 - 4 = 2Q^2$.

  Comme m est pair, posant $m - 2 = 2r$ et notant $s = m + 2$, les faits suivants lèvent une contradiction.

4. On peut aussi noter que le fait 3.3 lève une contradiction car nous avons $m \in {}^2\mathbb{N}$ et $u \in {}^2\mathbb{N}$ qui donnent $(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$

- $2rs = 2Q^2$ donne $rs = Q^2$.
- $s \notin {}^2\mathbb{N}$, car dans le cas contraire, nous aurions $(m-2)(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$ via $(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) \in {}^2\mathbb{N}$, mais ceci ne se peut pas d'après le fait 3.4.
- Les deux résultats précédents donnent $(\pi, R, S) \in \mathbb{N}_{>1} \times \left(\mathbb{N}^*\right)^2$ tel que $r = \pi R^2$ et $s = \pi S^2$ avec π sans facteur carré.
- $4 = s - 2r = \pi(S^2 - 2R^2)$ donne alors $\pi = 2$, d'où $m + 2 = 2S^2$.
- Finalement, $m = 2M^2$ et $m+2 = 2S^2$ contredisent le fait 3.1 via $2 = 2(S^2 - M^2)$.

- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$ nous donne $m = 2M^2$, $m^2 - 1 = 3U^2$ et $m^2 - 4 = 6Q^2$.
  Les faits suivants lèvent une autre contradiction via une technique similaire à celle employée ci-dessus.
  - Travaillons modulo 3. Comme $m = 2M^2$, nous avons $m \equiv 0$ ou $m \equiv -1$. Or $m^2 - 1 = 3U^2$ donne $m^2 \equiv 1$, d'où $m \equiv -1$, puis $3 \mid m-2$, et enfin $6 \mid m - 2$ puisque m est pair.
  - Posant $m - 2 = 6r$ et notant $s = m + 2$, nous avons $6rs = 6Q^2$, puis $rs = Q^2$.
  - $s \notin {}^2\mathbb{N}$ reste valable ici.
  - Les deux résultats précédents donnent $(\pi, R, S) \in \mathbb{N}_{>1} \times \left(\mathbb{N}^*\right)^2$ tel que $r = \pi R^2$ et $s = \pi S^2$ avec π sans facteur carré.
  - $4 = s - 6r = \pi(S^2 - 6R^2)$ donne $\pi = 2$, et on conclut comme avant. □

4. Une méthode efficace

4.1. **Prenons du recul.**

Les exemples proposés précédemment sont tous sympathiques, mais, malheureusement, ils ne nous ont pas permis de noter un schéma général de raisonnement autre que de découvrir des carrés mal espacés : par exemple, tomber sur $N^2 - M^2 = 4$ lève une contradiction du fait 3.1. Tentons donc de limiter au maximum l'emploi de fourberies déductives ; pour cela, commençons par noter le fait suivant.

Fait 4.1. *$\forall n \in {}^2\mathbb{N}_*$, s'il existe $m \in {}^2\mathbb{N}_*$ tel que $n = fm$ alors $f \in {}^2\mathbb{N}_*$.*

Démonstration. Il suffit de passer via les décompositions en facteurs premiers de n , m et f . □

Concentrons-nous sur les diviseurs sans facteur carré des facteurs $(n + i)$ de $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k}(n + i)$.

Définition 4.1. *Soient $(n, k) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$, $(a_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq \mathbb{N}^*$ et $(s_i)_{0 \leq i \leq k} \subseteq {}^2\mathbb{N}_*$ tels que $\forall i \in [\![0 ; k]\!]$, $n + i = a_i s_i$. Ce type de situation sera résumé par le tableau suivant que nous nommerons tableau de Vogler en référence à la discussion où l'auteur a découvert ce concept.*

$n + \bullet$	0	1	2	$\ldots$	k
	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_k

Exemple 4.1. *Supposons avoir le tableau de Vogler suivant où $n \in \mathbb{N}^*$.*

$n + \bullet$	0	1	2	3
	2	5	6	1

Ceci résume la situation suivante.

- *$\exists A \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2A^2$.*
- *$\exists B \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 1 = 5B^2$.*

- $\exists C \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n+2 = 6C^2$.
- $\exists D \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n+3 = D^2$.

Fait 4.2. *Soit* $(n,d,i,a) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^4$*. Les tableaux de Vogler ci-après sont impossibles.*

(1) Pas de facteurs carrés consécutifs.

$n+\bullet$	i	$i+1$
	a	a

(2) Pas de facteurs carrés trop près (les puces $\bullet$ *indiquent des valeurs inconnues).*

$n+\bullet$	i	$i+1$	$\dots$	$i+d-1$	$i+d$
	ad	$\bullet$	$\dots$	$\bullet$	ad

(3) Pas de facteurs carrés pas trop loin.

$n+\bullet$	i	$i+1$	$\dots$	$i+2d-1$	$i+2d$
	ad	$\bullet$	$\dots$	$\bullet$	ad

Démonstration. Tout est contenu dans le fait 3.1.

(1) Ici, $n+i = aA^2$ et $n+i+1 = aB^2$ donnent $a(B^2 - A^2) = 1$, d'où $B^2 - A^2 = 1$ qui ne se peut pas car nous sommes dans $\mathbb{N}^*$.

(2) Ici, $n+i = adA^2$ et $n+i+d = adB^2$ donnent $ad(B^2 - A^2) = d$, *i.e.* $a(B^2 - A^2) = 1$ qui a été rejeté dans l'explication précédente.

(3) Ici, $n+i = adA^2$ et $n+i+2d = adB^2$ donnent $ad(B^2 - A^2) = 2d$, *i.e.* $a(B^2 - A^2) = 2$, d'où $B^2 - A^2 \in \{1, 2\}$ qui est impossible.

□

Pour fabriquer des tableaux de Vogler, nous allons « multiplier » des d-tableaux de Vogler qui sont moins précis et définis comme suit.

Définition 4.2. *Soient* $(n,k,d) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^3$, $(q_i)_{0 \le i \le k} \subseteq \mathbb{N}$, $(\epsilon_i)_{0 \le i \le k} \subseteq \{0,1\}$ *et* $(f_i)_{0 \le i \le k} \subseteq \mathbb{N}^*$ *tels que* $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$, $n+i = d^{\,2q_i+\epsilon_i} f_i$ *avec* $f_i \wedge d = 1$ *. Ce type de situation sera résumé par le tableau suivant que nous nommerons d-tableau de Vogler (noter que* $d^{\epsilon_i} \in \{1, d\}$*).*

$n+\bullet$	0	1	2	$\dots$	k
d	d^{ϵ_0}	d^{ϵ_1}	d^{ϵ_2}	$\dots$	d^{ϵ_k}

Exemple 4.2. *Supposons avoir le* 5*-tableau de Vogler suivant où* $n \in \mathbb{N}^*$*.*

$n+\bullet$	0	1	2	3
5	1	5	1	1

Ceci résume la situation suivante.

- $\exists (a, A) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $A \wedge 5 = 1$ *et* $n = 5^{\,2a} A$.
- $\exists (b, B) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $B \wedge 5 = 1$ *et* $n+1 = 5^{\,2b+1} B$.
- $\exists (c, C) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $C \wedge 5 = 1$ *et* $n+2 = 5^{\,2c} C$.
- $\exists (d, D) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $D \wedge 5 = 1$ *et* $n+3 = 5^{\,2d} D$.

Exemple 4.3. *La multiplication de deux d-tableaux de Vogler est « naturelle » . Considérons le* 2*-tableau de Vogler et le* 3*-tableau de Vogler suivants.*

$n+\bullet$	0	1	2	3
2	1	2	1	2

$n+\bullet$	0	1	2	3
3	3	1	1	3

La multiplication de ces d-tableaux de Vogler est le 6*-tableau de Vogler suivant.*

$n+\bullet$	0	1	2	3
6	3	2	1	6

Ceci résume la situation suivante avec des notations « évidentes ».

- $A \wedge 6 = 1$ *et* $n = 2^{2a}3^{2\alpha+1}A$.
- $B \wedge 6 = 1$ *et* $n+1 = 2^{2b+1}3^{2\beta}B$.
- $C \wedge 6 = 1$ *et* $n+2 = 2^{2c}3^{2\gamma}C$.
- $D \wedge 6 = 1$ *et* $n+3 = 2^{2d+1}3^{2\delta+1}D$.

Fait 4.3. *Dans la deuxième ligne d'un d-tableau de Vogler, les valeurs* d *sont séparées par exactement* $(d-1)$ *valeurs* 1.

Démonstration. Penser aux multiples de d. □

Fait 4.4. $\forall p \in \mathbb{P}$, *si* $\pi_n^k \in {}^2\mathbb{N}$, *alors dans un p-tableau de Vogler, le nombre de valeurs p est forcément pair.*

Démonstration. Évident, mais très pratique, comme nous le verrons dans la suite. □

4.2. Application au cas de 2 facteurs.

Supposons que $\pi_n^1 = n(n+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Nous avons alors les p-tableaux de Vogler suivants pour $p \in \mathbb{P}$ divisant π_n^1, car les valeurs p de la deuxième ligne doivent apparaître un nombre pair de fois tout en étant espacés par $(p-1)$ valeurs 1.

$n+\bullet$	0	1
p	1	1

La multiplication de tous les p-tableaux de Vogler précédents donne le tableau de Vogler ci-après qui contredit le fait 4.2.

$n+\bullet$	0	1
	1	1

4.3. Application au cas de 3 facteurs.

Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Nous avons alors les p-tableaux de Vogler suivants pour $p \in \mathbb{P}_{>2}$ divisant π_n^2.

$n+\bullet$	0	1	2
p	1	1	1

Pour $p = 2$, en se souvenant du fait 4.4, seulement deux 2-tableaux de Vogler sont possibles. Nous utilisons un abus de notation évident pour indiquer ces deux possibilités.

$n+\bullet$	0	1	2
2	1	1	1
	2	1	2

La multiplication de tous les d-tableaux de Vogler précédents donne juste les deux tableaux de Vogler suivants, mais ceci est impossible d'après le fait 4.2.

$n+\bullet$	0	1	2
	1	1	1
	2	1	2

4.4. **Application au cas de 4 facteurs.**

Supposons que $\pi_n^3 = n(n+1)(n+2)(n+3) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Nous avons alors les p-tableaux de Vogler suivants pour $p \in \mathbb{P}_{>3}$ divisant π_n^3.

$n+\bullet$	0	1	2	3
p	1	1	1	1

Pour $p = 2$, nous avons les trois 2-tableaux de Vogler suivants.

$n+\bullet$	0	1	2	3
2	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2

Pour $p = 3$, nous obtenons les deux 3-tableaux de Vogler suivants.

$n+\bullet$	0	1	2	3
3	1	1	1	1
	3	1	1	3

La multiplication de tous les d-tableaux de Vogler précédents donne juste les six tableaux de Vogler suivants.

$n+\bullet$	0	1	2	3
	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2
	3	1	1	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Le fait 4.2 rejette tous les tableaux de Vogler ci-dessus sauf les deux derniers que nous reproduisons ci-après.

$n+\bullet$	0	1	2	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

TODO

4.5. **Application au cas de 5 facteurs.**

Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Nous avons alors les p-tableaux de Vogler suivants pour $p \in \mathbb{P}_{>5}$ divisant π_n^4.

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
p	1	1	1	1	1

Pour $p = 2$, nous avons les 2-tableaux de Vogler suivants.

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
2	1	1	1	1	1
	2	1	2	1	1
	2	1	1	1	2
	1	2	1	2	1
	1	1	2	1	2

Pour $p = 3$, nous obtenons les 3-tableaux de Vogler suivants.

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
3	1	1	1	1	1
	3	1	1	3	1
	1	3	1	1	3

Pour $p = 5$, nous obtenons les 5-tableaux de Vogler suivants.

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
5	1	1	1	1	1
	5	1	1	1	5

La multiplication de tous les d-tableaux de Vogler précédents donnerait 30 cas, mais comme nous savons que $\pi_n^3 = n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}_*$, nous pouvons ignorer tous les tableaux commençant, ou finissant, par une valeur 1 en plus de ceux rejetés par le le fait 4.2. Ceci nous amène à ne considérer que les six tableaux de Vogler suivants.

$n+\bullet$	0	1	2	3	4
	30	1	2	3	5
	15	2	1	6	5
	15	1	2	3	10
	10	3	2	1	15
	5	6	1	2	15
	5	3	2	1	30

TODO

5. AFFAIRE À SUIVRE...