CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS – DES SOLUTIONS À LA MAIN

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LATEX, disponible sur la page ***https://github.com/bc-writing/drafts****.*

Mentions « légales »

Table des matières

Date : 25 Jan. 2024 – 22 Fév. 2024.

1. Ce qui nous intéresse

Dans l'article *« Note on Products of Consecutive Integers »* [1], Paul Erdős démontre que pour tout couple $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit de $(k+1)$ entiers consécutifs $n(n+1)\cdots(n+k)$ n'est jamais le carré d'un entier. Plus précisément, l'argument général de Paul Erdős est valable pour $k+1 \geq 100$, soit à partir de 100 facteurs.

Dans ce document, nous proposons quelques cas particuliers résolus de façon « adaptative » à la sueur des neurones, le but recherché étant de fournir différentes approches même si parfois cela peut prendre du temps.

Remarque 1.1. *Il arrivera parfois que certaine démonstration cite d'autres preuves données plus tard dans le texte. Ceci permet de respecter les sources qui ont été utilisées.*

Remarque 1.2. *La majorité des preuves évitent l'emploi de récurrence.*

2. Notations utilisées

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- $\forall (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\pi_n^k = \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} (n+i)$.
  Par exemple, $\pi_n^1 = n$, $\pi_n^2 = n(n+1)$ et $\pi_{n+2}^4 = (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$.
- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des carrés parfaits. On note aussi ${}^2_*\mathbb{N} = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
  $\mathbb{N}_{sf}$ est l'ensemble des naturels non nuls sans facteur carré [2].
- $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
  $\forall (p\,;n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p-adique de n, c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n, contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.
- $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m.
- $2\,\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
  $2\,\mathbb{N}+1$ est l'ensemble des nombres naturels impairs.
- $(a \pm b)$ est un raccourci pour $(a+b)(a-b)$.

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).
2. En anglais, on dit « square free ».

3. Les carrés parfaits

3.1. Structure.

Fait 3.1. *$n \in {}^2_*\mathbb{N}$ si, et seulement si, $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$.*

Démonstration. Immédiat à valider. □

Fait 3.2. *$\forall n \in {}^2_*\mathbb{N}$, s'il existe $m \in {}^2_*\mathbb{N}$ tel que $n = fm$ alors $f \in {}^2_*\mathbb{N}$.*

Démonstration. $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(fm) \in 2\mathbb{N}$, $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(fm) = v_p(f) + v_p(m)$ donnent $v_p(f) \in 2\mathbb{N}$. □

Fait 3.3. *$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $a \wedge b = 1$ et $ab \in {}^2_*\mathbb{N}$, alors $a \in {}^2_*\mathbb{N}$ et $b \in {}^2_*\mathbb{N}$.*

Démonstration. $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(ab) \in 2\mathbb{N}$, et p ne peut diviser à la fois a et b , donc $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(a) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(b) \in 2\mathbb{N}$, autrement dit $(a, b) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$. □

Fait 3.4. *Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $ab \in {}^2_*\mathbb{N}$, ainsi que $(\alpha, \beta, A, B) \in (\mathbb{N}_{sf})^2 \times \mathbb{N}^2$ tel que $a = \alpha A^2$ et $b = \beta B^2$. Nous avons alors forcément $\alpha = \beta$.*

Démonstration. Le fait 3.2 donne $\alpha\beta \in {}^2_*\mathbb{N}$. De plus, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(\alpha) \in \{0, 1\}$ et $v_p(\beta) \in \{0, 1\}$. Finalement, $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\alpha) = v_p(\beta)$, autrement dit $\alpha = \beta$. □

3.2. Distance entre deux carrés parfaits.

Fait 3.5. *Soit $(M, N) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $N > M$.*

(1) $N^2 - M^2 \geq 2N - 1$, d'où l'impossibilité d'avoir $N^2 - M^2 < 3$.

(2) Notons nb_{sol} le nombre de solutions $(M, N) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de $N^2 - M^2 = \delta$.

Pour $\delta \in [\![1\,;10]\!]$, nous avons :

(a) $nb_{sol} = 0$ si $\delta \in \{1, 2, 4, 6, 10\}$.

(b) $nb_{sol} = 1$ si $\delta \in \{3, 5, 7, 8, 9\}$. Ainsi, $N^2 - M^2 = 3$ uniquement si $(M, N) = (1, 2)$.

Démonstration.

(1) Comme $N - 1 \geq M$, nous obtenons : $N^2 - M^2 \geq N^2 - (N - 1)^2 = 2N - 1$.

(2) Nous avons $2N - 1 \leq \delta$, soit $N \leq \dfrac{\delta + 1}{2}$. Ceci permet de comprendre le programme `Python` suivant donnant facilement les nombres de solutions indiqués. □

```python
from math import sqrt, floor

# N**2 - M**2 = diff ?
def sol(diff):
    solfound = []

    for N in range(1, (diff + 1) // 2 + 1):
        M_square = N**2 - diff

        if M_square > 0:
            M = floor(sqrt(M_square))

            if M != 0 and M**2 == M_square:
                solfound.append((M, N))

    return solfound
```

4. Avec 6 facteurs

Fait 4.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^6 \notin {}^2\mathbb{N}$.

Preuve 1. Cette démonstration se trouve dans l'article « Solution of a Problem »[3] de G. W. Hill et J. E. Oliver. Une petite simplification a été faite pour arriver à $\pi_n^6 = (a-4)a(a+2)$. Commençons par supposer que $\pi_n^6 \in {}^2\mathbb{N}$.

Commençons par de petites manipulations algébriques où la première modification fait apparaître le même coefficient pour n dans chaque parenthèse.

$$\begin{aligned}
\pi_n^6 &= n(n+5)\cdot(n+1)(n+4)\cdot(n+2)(n+3) \\
&= (n^2+5n)(n^2+5n+4)(n^2+5n+6) && x = n^2+5n \in \mathbb{N}_{\geq 6} \\
&= x(x+4)(x+6) && a = x+4 \in \mathbb{N}_{\geq 10} \\
&= (a-4)a(a+2)
\end{aligned}$$

Nous avons $a \in \mathbb{N}_{\geq 10}$ vérifiant $a(a+2)(a-4) \in {}^2_*\mathbb{N}$. Posons $a = \alpha A^2$ où $(\alpha, A) \in \mathbb{N}_{sf} \times \mathbb{N}^*$, de sorte que $\alpha(\alpha A^2+2)(\alpha A^2-4) \in {}^2_*\mathbb{N}$ via le fait 3.2. Or $\alpha \in \mathbb{N}_{sf}$ donne $\alpha \mid (\alpha A^2+2)(\alpha A^2-4)$, d'où $\alpha \mid 8$, et ainsi $\alpha \in \{1, 2\}$[4]. Nous allons voir que ceci est impossible.

Supposons que $\alpha = 1$.

- Notons les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}
& (A^2+2)(A^2-4) \in {}^2_*\mathbb{N} && u = A^2-1 \textit{ où } -1 = \frac{2-4}{2}\,. \\
\iff\ & (u+3)(u-3) \in {}^2_*\mathbb{N} \\
\iff\ & u^2 - 9 \in {}^2_*\mathbb{N}
\end{aligned}$$

- Ensuite, prenant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = u^2 - 9$, le fait 3.5 donne $(m, u) = (4, 5)$ d'où la contradiction suivante.

$$\begin{aligned}
u = 5 \iff\ & A^2 - 1 = 5 && 6 \notin {}^2\mathbb{N}\,. \\
\iff\ & A^2 = 6
\end{aligned}$$

Supposons que $\alpha = 2$.

- Notons l'équivalence suivante.

$$\begin{aligned}
& 2(2A^2+2)(2A^2-4) \in {}^2_*\mathbb{N} && \textit{Via } 4\cdot 2(A^2+1)(A^2-2)\,. \\
\iff\ & 2(A^2+1)(A^2-2) \in {}^2_*\mathbb{N}
\end{aligned}$$

- Ensuite, en travaillant modulo 3 , nous avons $2(A^2+1)(A^2-2) \equiv -4 \equiv 2$ qui ne correspond à aucun carré modulo 3 . □

Preuve 2. Se reporter à la preuve du cas **??** qui s'adapte mot pour mot au cas présent mais en considérant $u \in \{n, n+1\}$ tel que $\{u, u+2, u+4\} \subset 2\mathbb{N}+1$. □

Preuve 3. Dans une discussion archivée consultée le 28 janvier 2024, voir la section 5, sont présentés les tableaux au coeur de cette preuve[5]. Nous commençons par supposer que $\pi_n^6 \in {}^2\mathbb{N}$.

- Comme clairement $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 6}$, $\forall i \in [\![0\,;5]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$, nous nous intéressons aux nombres premiers $p \in \mathbb{P}_{<6}$.
- Nous allons tenter d'envisager toutes les alternatives possibles pour les parités des valuations p-adiques des facteurs $(n+i)$ de π_n^6 lorsque $p \in \mathbb{P}_{<6}$.

---

3. The Analyst (1874).
4. On comprend ici le choix d'avoir $\pi_n^6 = (a-4)a(a+2)$.
5. Comme ces tableaux sont suffisamment intéressants pour leur dédier un écrit : voir mon document « *Carrés parfaits et produits d'entiers consécutifs – Une méthode efficace* ».

Les tableaux suivants donnent toutes les alternatives possibles. Par exemple, la 3e ligne du tableau de 2 donne $v_2(n+i) \in 2\mathbb{N}$ pour $i \in \{0, 4\}$, et $v_2(n+i) \in 2\mathbb{N}+1$ sinon.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4	5	No. de ligne
2	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	2	1	1	1	2
	2	1	1	1	2	1	3
	1	2	1	2	1	1	4
	1	2	1	1	1	2	5
	1	1	2	1	2	1	6
	1	1	1	2	1	2	7

$n + \bullet$	0	1	2	3	4	5	No. de ligne
3	1	1	1	1	1	1	1
	3	1	1	3	1	1	2
	1	3	1	1	3	1	3
	1	1	3	1	1	3	4

$n + \bullet$	0	1	2	3	4	5	No. de ligne
5	1	1	1	1	1	1	1
	5	1	1	1	1	5	2

Si nous supposons avoir les trois alternatives surlignées en vert, nous pouvons affirmer avoir les informations suivantes en notant au passage que les coefficients sans facteur carré s'obtiennent en multipliant les lignes cellule par cellule.

- $\exists A \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 10A^2$.
- $\exists B \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 1 = 3B^2$.
- $\exists C \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 2 = C^2$.
- $\exists D \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 3 = D^2$.
- $\exists E \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 4 = 6E^2$.
- $\exists F \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 5 = 5F^2$.

Ce qui précède est impossible, car $D^2 - C^2 = 1$ contredit le fait 3.5. Intéressant mais a priori nous devrions analyser $7 \times 4 \times 2 = 56$ possibilités ! Nous allons être plus efficace en éliminant certaines situations rapidement, et aussi en notant que l'élimination des cas problématiques restants se fait via des raisonnements « symétriques » qui permettent de traiter simultanément deux cas à chaque fois. C'est parti !

(1) Notons $\boxed{d.t.c}$ le produit cellule par cellule des lignes numérotées d, t et c des tableaux de 2, 3 et 5 respectivement. Nous venons de voir que $\boxed{3.3.2}$ lève une contradiction.

(2) Une ligne produit $\boxed{d.t.c}$ commençant par 1 donne $\pi_{n+1}^{5} \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$ via le fait 3.2, or c'est impossible d'après le fait **??**. De même, une ligne produit se finissant par 1 lève une contradiction.

(3) Une ligne produit $\boxed{d.t.c}$ contenant deux 1 consécutifs lève une contradiction (voir l'exemple ci-dessus).

(4) Une ligne produit $\boxed{d.t.c}$ contenant deux 2 séparés par une seule cellule lève une contradiction, car ceci donne $2N^2 - 2M^2 = 2$, puis $N^2 - M^2 = 1$.

Nous voilà armé pour lever des contractions à la chaîne.

- D'après le point 2, tous les produits du type $\boxed{1.t.1}$ lèvent une contradiction.

  Il reste 52 *cas à traiter.*

- D'après le point 3, tous les produits du type $\boxed{1.t.2}$ lèvent une contradiction.

  Il reste 48 *cas à traiter.*

- Les points 2, 3 et 4 lèvent une contradiction relativement aux produits du type $\boxed{d.1.c}$ où $d \neq 1$.

  Il reste 36 *cas à traiter.*

- JJJ

  Il reste 666 *cas à traiter.*

- JJJ

Il reste 666 *cas à traiter.*

- JJJ

Il reste 666 *cas à traiter.*

$\square$

Preuve 4. Bien que très longue[6], cette preuve est simple à comprendre car elle ne fait que dérouler le fil des faits découverts. Commençons par supposer que $\pi_n^6 \in {}^2\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
& \pi_n^6 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) && x = n+2+\frac{1}{2} \ \textit{(on symétrise la formule).} \\
\iff & \pi_n^6 = \left(x \pm \frac{5}{2}\right)\left(x \pm \frac{3}{2}\right)\left(x \pm \frac{1}{2}\right) \\
& \pi_n^6 = \left(x \pm \frac{5}{2}\right)\left(x \pm \frac{3}{2}\right)\left(x \pm \frac{1}{2}\right) && y = 2x \ \textit{(on chasse les fractions).} \\
\iff & 2^6\pi_n^6 = (y \pm 5)(y \pm 3)(y \pm 1) && z = y^2 \\
\iff & 2^6\pi_n^6 = (z-25)(z-9)(z-1) && u = z - 17 \text{ où } 17 = \frac{25+9}{2} \,. \\
\iff & 2^6\pi_n^6 = (u-8)(u+8)(u+16)
\end{aligned}$$

Notant $a = u - 8$, $b = u + 8$ et $c = u + 16$, où $u = (2n+5)^2 - 17 \in 2\mathbb{N}$, nous avons les faits suivants.

- $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$ car $(2+5)^2 - 17 = 32$.
- $(a, b, c) \in \left(\mathbb{N}_{\geq 24}\right)^3$ avec $abc \in {}^2_*\mathbb{N}$ puisque $2^6\pi_n^6 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
- $a \wedge b \mid 16$ via $b - a = 16$.
- $a \wedge c \mid 24$ via $c - a = 24$.
- $b \wedge c \mid 8$ via $c - b = 8$.
- En particulier, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) \in (2\mathbb{N})^3$.

Démontrons qu'aucun des trois entiers a , b et c ne peut être un carré parfait.

- Commençons par supposer que $a \in {}^2_*\mathbb{N}$.

  Dans ce cas, $bc \in {}^2_*\mathbb{N}$ via le fait 3.2, soit $(u+8)(u+16) \in {}^2_*\mathbb{N}$. En posant $w = u + 12$, on arrive à $(w-4)(w+4) \in {}^2_*\mathbb{N}$, soit $w^2 - 16 \in {}^2_*\mathbb{N}$, d'où $(m, w) = (3, 5)$ grâce au fait 3.5. Or $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$ donne $w \in \mathbb{N}_{\geq 20}$, d'où une contradiction.

- Supposons maintenant que $b \in {}^2_*\mathbb{N}$.

  Dans ce cas, $ac \in {}^2_*\mathbb{N}$, soit $(u-8)(u+16) \in {}^2_*\mathbb{N}$. En posant $w = u + 4$, on arrive à $(w-12)(w+12) \in {}^2_*\mathbb{N}$, soit $w^2 - 144 \in {}^2_*\mathbb{N}$. Notant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = w^2 - 144$, nous arrivons à $w^2 - m^2 = 144$, d'où $(m, w) \in \{(5, 13), (9, 15), (16, 20), (35, 37)\}$[7]. Comme $u \in 2\mathbb{N}$ donne $w \in 2\mathbb{N}$, nécessairement $(m, w) = (16, 20)$, mais les équivalences suivantes lèvent une contradiction.

  $$\begin{aligned}
  u + 4 = 20 \iff & u = 16 \\
  \iff & (2n+5)^2 - 17 = 16 && 33 \notin {}^2\mathbb{N} \\
  \iff & (2n+5)^2 = 33
  \end{aligned}$$

6. Ce sera notre dernière tentative de démonstration à faible empreinte cognitive.
7. Le programme reproduit après la preuve du fait 3.5 donne rapidement cet ensemble de couples.

- Supposons enfin que $c \in {}^2_*\mathbb{N}$.

  Dans ce cas, $ab \in {}^2_*\mathbb{N}$, soit $(u-8)(u+8) \in {}^2_*\mathbb{N}$, c'est-à-dire $u^2 - 64 \in {}^2_*\mathbb{N}$. Notant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = u^2 - 64$, nous arrivons à $u^2 - m^2 = 64$. Ceci n'est possible que si $(m, u) \in \{(6, 10), (15, 17)\}$. Or $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$ donne une contradiction.

Donc $a = \alpha A^2$, $b = \beta B^2$ et $c = \gamma C^2$ avec $(A, B, C) \in (\mathbb{N}^*)^3$ et $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathbb{N}_{sf} \cap \mathbb{N}_{>1}$, ceci nous donnant les faits suivants.

- $\alpha \wedge \beta \in \{1, 2\}$ d'après $a \wedge b \mid 16$.
- $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2, 3\}$ d'après $a \wedge c \mid 24$.
- $\beta \wedge \gamma \in \{1, 2\}$ d'après $b \wedge c \mid 8$.
- $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$ car $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) \in (2\mathbb{N})^3$.

En fait, α , β et γ sont différents deux à deux.

- Démontrons que $\alpha \neq \beta$.
  Dans le cas contraire, $16 = b - a = \alpha(B^2 - A^2)$ et $\alpha > 1$ donnent $B^2 - A^2 \in \{1, 2, 4, 8\}$, puis forcément $B^2 - A^2 = 8$ avec $(B, A) = (3, 1)$ d'après le fait 3.5. Comme de plus, $\alpha = 2$, nous obtenons $a = 2$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.
- Nous avons aussi $\beta \neq \gamma$.
  Dans le cas contraire, $8 = c - b = \beta(C^2 - B^2)$ et $\beta > 1$ donnent $C^2 - B^2 \in \{1, 2, 4\}$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5.
- Enfin, $\alpha \neq \gamma$.
  Dans le cas contraire, $C^2 - A^2 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ car $24 = c - a = \alpha(C^2 - A^2)$ et $\alpha > 1$. Le fait 3.5 ne laisse plus que les possibilités suivantes.
  (1) $C^2 - A^2 = 3$ n'est possible que si $(C, A) = (2, 1)$. Comme de plus $\alpha = 8$, nous avons $a = 8$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.
  (2) $C^2 - A^2 = 8$ n'est possible que si $(C, A) = (3, 1)$. Comme de plus $\alpha = 3$, nous avons $a = 3$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.
  (3) $C^2 - A^2 = 12$ n'est possible que si $(C, A) = (4, 2)$. Comme de plus $\alpha = 2$, nous avons $a = 8$ qui contredit $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$.

Comme $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$, $\alpha \wedge \beta \in \{1, 2\}$, $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2, 3\}$ et $\beta \wedge \gamma \in \{1, 2\}$, et comme de plus α , β et γ sont différents deux à deux, il ne nous reste plus qu'à analyser les cas suivants. La lumière est proche...

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	*Statut*
2	3	6	1	2	3	☒
2	6	3	2	1	3	☒
3	2	6	1	3	2	✓
3	6	2	3	1	2	☒
6	2	3	2	3	1	✓
6	3	2	3	2	1	☒

Traitons les deux cas restants en nous souvenant que $a = u - 8$, $b = u + 8$ et $c = u + 16$.

- Supposons $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, 2, 6)$, autrement dit $a = 3A^2$, $b = 2B^2$ et $c = 6C^2$.

  Travaillons modulo 3 afin de lever une contradiction.

(1) $a \equiv u - 2$ et $a \equiv 3A^2 \equiv 0$ donnent $u \equiv 2$.
(2) D'autre part, $b \equiv 2B^2 \equiv 0$ ou 2 . Or $b \equiv u + 2 \equiv 1$ lève une contradiction.

- Supposons $(\alpha, \beta, \gamma) = (6, 2, 3)$, autrement dit $a = 6A^2$, $b = 2B^2$ et $c = 3C^2$.
  La preuve précédente s'adapte directement car $a \equiv 6A^2 \equiv 0$ et $b \equiv 2B^2$ modulo 3 . $\square$

5. Sources utilisées

Fait ??.
La démonstration non algébrique a été impulsée par la source du fait **??** *donnée plus bas.*

Fait ??.

- Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré *« n(n+1)…(n+k) est un carré ? »* sur le site `lesmathematiques.net`.

  La démonstration via le principe des tiroirs trouve sa source dans cet échange.

- Un échange consulté le 12 février 2024, et titré *« Is there an easier way of proving the product of any 5 consecutive positive integers is never a perfect square ? »* sur le site `www.quora.com/`.

  La démonstration « élémentaire » sans le principe des tiroirs vient de cet échange.

- L'article *« Le produit de 5 entiers consécutifs n'est pas le carré d'un entier. »* de T. Hayashi, Nouvelles Annales de Mathématiques, est consultable via Numdam, la bibliothèque numérique française de mathématiques.

  Cet article a fortement inspiré la longue preuve.

Fait 4.1.

- Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré *« product of six consecutive integers being a perfect numbers »* sur le site `https://math.stackexchange.com`.

  La courte démonstration est donnée dans cet échange. Vous y trouverez aussi un très joli argument basé sur les courbes elliptiques rationnelles.

- Une discussion archivée consultée le 28 janvier 2024 :
  `https://web.archive.org/web/20171110144534/http://mathforum.org/library/drmath/view/65589.html`.

  Cette discussion a impulsé la preuve fastidieuse, mais facile d'accès, via des tableaux.

Fait ??.
Un échange consulté le 3 février 2024, et titré *« Proof that the product of 7 successive positive integers is not a square »* sur le site `https://math.stackexchange.com`.
La courte démonstration est donnée dans cet échange, mais certaines justifications manquent.

Fait ??.
Un échange consulté le 4 février 2024, et titré *« How to prove that the product of eight consecutive numbers can't be a number raised to exponent 4 ? »* sur le site `https://math.stackexchange.com`.
La démonstration astucieuse vient de l'une des réponses de cet échange, mais la justification des deux inégalités n'est pas donnée.

Fait ??.
Un échange consulté le 13 février 2024, et titré *« Product of 10 consecutive integers can never be a perfect square »* sur le site `https://math.stackexchange.com`.
La démonstration vient d'une source Wordpress donnée dans une réponse de cet échange, mais cette source est très expéditive…