# CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS – DES PREUVES HUMAINES FACILES

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source LATEX, disponible sur la page*
***https://github.com/bc-writing/drafts**.*

## Mentions « légales »



Table des matières



*Date* : 21 Fév. 2024.

## 1. Ce qui nous intéresse

Dans l'article *« Note on Products of Consecutive Integers »*[1], Paul Erdős démontre que pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit de $(k+1)$ entiers consécutifs $n(n+1)\cdots(n+k)$ n'est jamais le carré d'un entier. Plus précisément, l'argument général de Paul Erdős est valable pour $k+1 \geq 100$, soit à partir de 100 facteurs.

Dans ce document, nous donnons les preuves les plus simples possibles de quelques cas particuliers. Quitte à nous répéter, nous avons rédigé au complet chaque preuve jusqu'au cas de 10 facteurs, ceci permettant au lecteur de piocher des preuves au gré de ses envies.

**Remarque 1.1.** *Vous trouverez dans mon document* « Carrés parfaits et produits d'entiers consécutifs – Des solutions à la main » *d'autres preuves, plus ou moins efficaces, mais toutes intéressantes dans leur approche.*

## 2. Notations utilisées

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- $\forall (n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k-1} (n+i)$.
  Par exemple, $\pi_n^1 = n$, $\pi_n^2 = n(n+1)$ et $\pi_{n+2}^4 = (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$.
- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des carrés parfaits. On note aussi ${}^2_*\mathbb{N} = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
  $\mathbb{N}_{sf}$ est l'ensemble des naturels non nuls sans facteur carré[2].
- $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
  $\forall (p\,; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation $p$-adique de $n$, c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise $n$, contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de $n$ et $m$.
- $2\,\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
  $2\,\mathbb{N} + 1$ est l'ensemble des nombres naturels impairs.
- $(a \pm b)$ est un raccourci pour $(a+b)(a-b)$.

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).
2. En anglais, on dit « square free ».

## 3. Les carrés parfaits

### 3.1. Structure.

**Fait 3.1.** *$n \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$ si, et seulement si, $\forall p \in \mathbb{P}$ , $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ .*

*Démonstration.* Immédiat à valider. □

**Fait 3.2.** *$\forall n \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$ , s'il existe $m \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$ tel que $n = fm$ alors $f \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$ .*

*Démonstration.* $\forall p \in \mathbb{P}$ , $v_p(fm) \in 2\mathbb{N}$ , $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(fm) = v_p(f) + v_p(m)$ donnent $v_p(f) \in 2\mathbb{N}$ . □

**Fait 3.3.** *$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $a \wedge b = 1$ et $ab \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$ , alors $a \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$ et $b \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$ .*

*Démonstration.* $\forall p \in \mathbb{P}$ , $v_p(ab) \in 2\mathbb{N}$ , et $p$ ne peut diviser à la fois $a$ et $b$ , donc $\forall p \in \mathbb{P}$ , $v_p(a) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(b) \in 2\mathbb{N}$ , autrement dit $(a, b) \in {}^{2}_{*}\mathbb{N} \times {}^{2}_{*}\mathbb{N}$ . □

**Fait 3.4.** *Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $ab \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$ , ainsi que $(\alpha, \beta, A, B) \in (\mathbb{N}_{sf})^2 \times \mathbb{N}^2$ tel que $a = \alpha A^2$ et $b = \beta B^2$. Nous avons alors forcément $\alpha = \beta$ .*

*Démonstration.* Le fait 3.2 donne $\alpha\beta \in {}^{2}_{*}\mathbb{N}$ . De plus, $\forall p \in \mathbb{P}$ , nous avons $v_p(\alpha) \in \{0, 1\}$ et $v_p(\beta) \in \{0, 1\}$ . Finalement, $\forall p \in \mathbb{P}$ , $v_p(\alpha) = v_p(\beta)$ , autrement dit $\alpha = \beta$ . □

### 3.2. Distance entre deux carrés parfaits.

**Fait 3.5.** *Soit $(M, N) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $N > M$ .*

*(1) $N^2 - M^2 \geq 2N - 1$ , d'où l'impossibilité d'avoir $N^2 - M^2 < 3$ .*

*(2) Notons $nb_{sol}$ le nombre de solutions $(M, N) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de $N^2 - M^2 = \delta$ .*

*Pour $\delta \in [\![1\,; 10]\!]$, nous avons :*

- *(a) $nb_{sol} = 0$ si $\delta \in \{1, 2, 4, 6, 10\}$ .*
- *(b) $nb_{sol} = 1$ si $\delta \in \{3, 5, 7, 8, 9\}$ . Ainsi, $N^2 - M^2 = 3$ uniquement si $(M, N) = (1, 2)$ .*

*Démonstration.*

(1) Comme $N - 1 \geq M$ , nous obtenons : $N^2 - M^2 \geq N^2 - (N - 1)^2 = 2N - 1$ .

(2) Nous avons $2N - 1 \leq \delta$ , soit $N \leq \dfrac{\delta + 1}{2}$ . Ceci permet de comprendre le programme `Python` donné dans la page suivante qui sert à obtenir facilement les nombres de solutions indiqués. □

```python
from math import sqrt, floor

# N**2 - M**2 = diff ?
def sol(diff):
    solfound = []

    for N in range(1, (diff + 1) // 2 + 1):
        M_square = N**2 - diff

        if M_square > 0:
            M = floor(sqrt(M_square))

            if M != 0 and M**2 == M_square:
                solfound.append((M, N))

    return solfound
```

## 4. Avec 2 facteurs

**Fait 4.1.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1) \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Preuve.* Il suffit de noter que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$. $\square$

## 5. Avec 3 facteurs

**Fait 5.1.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $n(n+1)(n+2) \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Preuve.* Supposons que $\pi_n^3 \in {}^2_*\mathbb{N}$ .
Posons $m = n+1$ pour « symétriser » la formule. Ceci donne $\pi_n^3 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Comme $m \wedge (m^2-1) = 1$ , le fait 3.3 donne $(m, m^2-1) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$ . Or, $m^2-1 \in {}^2_*\mathbb{N}$ est impossible d'après le fait 3.5. $\square$

## 6. Avec 4 facteurs

**Fait 6.1.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Preuve.* En « symétrisant » la formule, nous obtenons les manipulations algébriques naturelles suivantes qui vont nous permettre de conclure

$$\begin{aligned}
\pi_n^4 &= n(n+1)(n+2)(n+3) && \\
&= \left(x \pm \frac{3}{2}\right)\left(x \pm \frac{1}{2}\right) && x = n + \frac{3}{2} \\
&= \left(x^2 - \frac{9}{4}\right)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) && \\
&= (y \pm 1) && y = x^2 - \frac{5}{4} \text{ où } \frac{5}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} + \frac{1}{4}\right) . \\
&= y^2 - 1 && \\
&= \left(n^2 + 3n + 1\right)^2 - 1 && y = \left(n + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = n^2 + 3n + 1 \\
&= m^2 - 1 && m = n^2 + 3n + 1
\end{aligned}$$

Comme $m > 0$ , $m^2 - 1 \notin {}^2\mathbb{N}$ d'après le fait 3.5, donc $\pi_n^4 \notin {}^2\mathbb{N}$ . $\square$

## 7. Avec 5 facteurs

**Fait 7.1.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2_*\mathbb{N}$ .

La preuve suivante s'inspire directement d'une démonstration citée via une source dans un échange sur `https://math.stackexchange.com` (voir la section 16).

*Preuve.* Supposons que $\pi_n^5 \in {}^2_*\mathbb{N}$ .
Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ , $\forall i \in [\![0\,;4]\!]$ , $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ . D'après le fait 3.2, on doit s'intéresser à $p \in \{2, 3\}$ , mais on peut observer très grossièrement qu'au maximum deux facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^5$ sont divisibles par $3$ , donc au moins $3$ facteurs sont de valuation $p$-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ . Ces facteurs vérifient alors l'une des deux alternatives suivantes, chacune d'elles levant une contradiction.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ sont de valuations 2-adiques impairs.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (2M^2, 2N^2)$ avec $|2(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;4]\!]$ , c'est-à-dire $|N^2 - M^2| \in \{1, 2\}$ , mais c'est impossible d'après le fait 3.5.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ sont de valuations 2-adiques pairs.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $|N^2 - M^2| \in [\![1\,;4]\!]$ , mais ceci n'est possible que si $|N^2 - M^2| = 3$ d'après le fait 3.5 qui donne aussi que soit $(M, N) = (1, 2)$ , soit $(M, N) = (2, 1)$ . Ceci impose d'avoir $n = 1$ , mais $\pi_1^5 = 5! \notin {}^2\mathbb{N}$ car $v_5(5!) = 1$ . □

## 8. Avec 6 facteurs

**Fait 8.1.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $\pi_n^6 \notin {}^2\mathbb{N}$ .

La démonstration suivante se trouve dans l'article « Solution of a Problem »[3] de G. W. Hill et J. E. Oliver. Une petite simplification a été faite pour arriver à $\pi_n^6 = (a-4)a(a+2)$ .

*Preuve.* Supposons que $\pi_n^6 \in {}^2\mathbb{N}$ .

Commençons par de petites manipulations algébriques où la première modification fait apparaître le même coefficient pour $n$ dans chaque parenthèse.

$$\begin{aligned}
\pi_n^6 &= n(n+5)\cdot(n+1)(n+4)\cdot(n+2)(n+3) \\
&= (n^2+5n)(n^2+5n+4)(n^2+5n+6) && \big) \; x = n^2+5n \in \mathbb{N}_{\geq 6} \\
&= x(x+4)(x+6) && \big) \; a = x+4 \in \mathbb{N}_{\geq 10} \\
&= (a-4)a(a+2)
\end{aligned}$$

Nous avons $a \in \mathbb{N}_{\geq 10}$ vérifiant $a(a+2)(a-4) \in {}^2_*\mathbb{N}$ . Posons $a = \alpha A^2$ où $(\alpha, A) \in \mathbb{N}_{sf} \times \mathbb{N}^*$ , de sorte que $\alpha(\alpha A^2+2)(\alpha A^2-4) \in {}^2_*\mathbb{N}$ via le fait 3.2. Or $\alpha \in \mathbb{N}_{sf}$ donne $\alpha \mid (\alpha A^2+2)(\alpha A^2-4)$ , d'où $\alpha \mid 8$ , et ainsi $\alpha \in \{1, 2\}$[4]. Nous allons voir que ceci est impossible.

Supposons que $\alpha = 1$ .

- Notons les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}
& (A^2+2)(A^2-4) \in {}^2_*\mathbb{N} && \big) \; u = A^2 - 1 \text{ où } -1 = \frac{2-4}{2} . \\
\iff\; & (u+3)(u-3) \in {}^2_*\mathbb{N} \\
\iff\; & u^2 - 9 \in {}^2_*\mathbb{N}
\end{aligned}$$

- Ensuite, prenant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = u^2 - 9$ , le fait 3.5 donne $(m, u) = (4, 5)$ d'où la contradiction suivante.

$$\begin{aligned}
u = 5 \iff\; & A^2 - 1 = 5 && \big) \; 6 \notin {}^2\mathbb{N} . \\
\iff\; & A^2 = 6
\end{aligned}$$

Supposons que $\alpha = 2$ .

- Notons l'équivalence suivante.

$$\begin{aligned}
& 2(2A^2+2)(2A^2-4) \in {}^2_*\mathbb{N} && \big) \; \textit{Via } 4\cdot 2(A^2+1)(A^2-2) . \\
\iff\; & 2(A^2+1)(A^2-2) \in {}^2_*\mathbb{N}
\end{aligned}$$

- Ensuite, en travaillant modulo $3$ , nous avons $2(A^2+1)(A^2-2) \equiv -4 \equiv -1$ qui ne correspond pas à un carré modulo $3$ . □

---

3. The Analyst (1874).
4. On comprend ici le choix d'avoir $\pi_n^6 = (a-4)a(a+2)$ .

## 9. Avec 7 facteurs

**Fait 9.1.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $\pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$ .

La preuve suivante s'inspire directement d'une démonstration citée via une source dans un échange sur `https://math.stackexchange.com` (voir la section 16).

*Preuve.* Supposons que $\pi_n^7 \in {}^2_*\mathbb{N}$ .

Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 7}$ , $\forall i \in [\![0\,;6]\!]$ , $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ . D'après le fait 3.2, on doit s'intéresser à $p \in \{2,3,5\}$ . Mais on note très grossièrement qu'au maximum deux facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^7$ sont divisibles par $5$ . Autrement dit, nous avons au moins 5 facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^7$ de valuation $p$-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ , ceux-ci vérifiant l'une des alternatives suivantes.

- **[A 1]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A 2]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$
- **[A 3]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times 2\mathbb{N}$
- **[A 4]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$

Comme nous avons cinq facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions [5].

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 1]** .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $(M,N) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$ , de sorte que $N^2 - M^2 \in [\![1\,;6]\!]$ . Selon le fait 3.5, seuls les cas suivants sont possibles mais ils lèvent tous une contradiction.

  (1) $N^2 - M^2 = 3$ donne $(M,N) = (1,3)$ , puis nécessairement $n = 1$ , mais $\pi_1^7 = 7! \notin {}^2\mathbb{N}$ via $v_7(7!) = 1$ .
  (2) $N^2 - M^2 = 5$ donne $(M,N) = (2,3)$ , puis nécessairement $n \in [\![1\,;4]\!]$ , et $n \in [\![2\,;4]\!]$ d'après le cas précédent. Mais $\forall n \in [\![2\,;4]\!]$ , $v_7(\pi_n^7) = 1$ donne $\pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$ si $n \in [\![2\,;4]\!]$ .

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 2]** .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (3M^2, 3N^2)$ avec $|3(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;6]\!]$ , mais c'est impossible d'après le fait 3.5.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 3]** .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (2M^2, 2N^2)$ avec $|2(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;6]\!]$ , puis nécessairement $|N^2 - M^2| = 3$ qui implique $n \in [\![1\,;2]\!]$ , mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 4]** .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (6M^2, 6N^2)$ avec $|6(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;6]\!]$ , mais c'est impossible d'après le fait 3.5. □

5. Notons qu'en considérant $3$ , il resterait au minimum 2 facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^7$ de valuation $p$-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ . Or, en considérant la parité de $v_2(n+i)$ , nous aurions deux alternatives, ceci rendant impossible l'usage du principe des tiroirs.

## 10. Avec 8 facteurs

**Fait 10.1.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$ .

La démonstration très astucieuse suivante est proposée dans un échange sur `https://math.stackexchange.com` (voir la section 16). Comme pour le cas de quatre facteurs, l'algèbre va nous permettre d'aller très vite.

*Preuve.*

- L'une des preuves du fait 6.1 nous donne $n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n+1)^2 - 1$ .

  En particulier, $(n+4)(n+5)(n+6)(n+7) = (n^2+11n+29)^2 - 1$ .
- L'idée astucieuse va être de considérer les deux expressions suivantes qui viennent de $\pi_n^8 = \big(f(n)^2-1\big)\big(g(n)^2-1\big)$ .
  (1) $f(n) = n^2+3n+1$ .
  (2) $g(n) = n^2+11n+29$ .
- Nous avons les manipulations algébriques naturelles suivantes.

$$\begin{aligned}
\pi_n^8 &= \big(f(n)^2-1\big)\big(g(n)^2-1\big) && \textit{$a = f(n)$ et $b = g(n)$ .}\\
&= (a^2-1)(b^2-1)\\
&= a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 && \textit{Choisir $(a-b)^2$ au lieu de $(a+b)^2$ va nous permettre,}\\
&= a^2b^2 - (a-b)^2 - 2ab + 1 && \textit{un plus bas, de ne pas trop nous éloigner de $\pi_n^8$ .}\\
&= (ab-1)^2 - (a-b)^2 && b - a \neq 0 \,.\\
&< (ab-1)^2
\end{aligned}$$

  Donc $\pi_n^8 < \big(f(n)g(n)-1\big)^2$ .
- Le point précédent rend naturel de tenter de démontrer que $\big(f(n)g(n)-2\big)^2 < \pi_n^8$ , car, si tel est le cas, $\pi_n^8$ sera encadré par les carrés de deux entiers consécutifs, et forcément nous aurons $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$ . Ce qui suit montre que notre pari est gagnant dès que $n \geq 4$ . Que c'est joli !

$$\begin{aligned}
&\big(f(n)g(n)-2\big)^2 < \pi_n^8 && \textit{$a = f(n)$ et $b = g(n)$ .}\\
\iff\ &(ab-2)^2 < (a^2-1)(b^2-1)\\
\iff\ &a^2b^2 - 4ab + 4 < a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1\\
\iff\ &a^2 + b^2 - 4ab + 3 < 0
\end{aligned}$$

  Le site `https://www.wolframalpha.com` nous donne sans effort cognitif[6] ce qui suit (les « transhumanophobes » se reporteront à la remarque 10.1 qui suit).

$$\begin{aligned}
&a^2+b^2-4ab+3\\
=\ &-2(n^2+7n)^2 + 36(n^2+7n) + 729 && m = n^2+7n\\
=\ &-2m^2 + 36m + 729\\
=\ &-2(m-9)^2 + 891
\end{aligned}$$

  Or, $n^2+7n-9 = 0$ admet pour unique racine positive $n = \frac{-7+\sqrt{85}}{2} \approx 1{,}1$ , donc $a^2+b^2-4ab+3$ décroît en fonction de $n$ à partir de $n = 2$ . Les calculs suivants donnent alors que $a^2+b^2-4ab+3 < 0$ pour $n \geq 4$ .

6. Il faut vivre avec son temps...

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $-2(n^2+7n)^2+36(n^2+7n)+729$ | 889 | 729 | 9 | $-1559$ |

- Nous venons de voir que $(ab-2)^2 < \pi_n^8 < (ab-1)^2$ sur $\mathbb{N}_{\geq 4}$, donc $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$ dès que $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$, mais pour $n \in \{1,2,3\}$, $v_7(\pi_n^8) = 1$ donne $\pi_n^8 \notin {}^2\mathbb{N}$, ce qui permet de conclure. □

**Remarque 10.1.** *Voici comment obtenir une preuve* 100 % *non silliconé. Pour cela, commençons par les manipulations algébriques naturelles suivantes qui cherchent à obtenir le même coefficient pour* $n$ *dans chaque parenthèse, tout en passant d'un polynôme de degré* 8 *à un polynôme de degré* 4 *.*

$$\begin{aligned}\pi_n^8 &= n(n+7)\cdot(n+1)(n+6)\cdot(n+2)(n+5)\cdot(n+3)(n+4)\\ &= (n^2+7n)\cdot(n^2+7n+6)\cdot(n^2+7n+10)\cdot(n^2+7n+12) \qquad m = n^2+7n\\ &= m(m+6)(m+10)(m+12)\end{aligned}$$

*Nous décidons d'offrir un 1*^er^ *rôle à la variable* $m = n^2+7n$ *. Voyons où cela nous mène...*

$$\begin{aligned}&\ a^2+b^2-4ab+3\\ =&\ a(a-4b)+b^2+3 \qquad a = n^2+3n+1 = m-4n+1\\ =&\ (m-4n+1)(-3m-20n-115)+(m+4n+29)^2+3 \qquad b = n^2+11n+29 = m+4n+29\\ =&\ -3m^2-(8n+118)m+(4n-1)(20n+115)+m^2+2(4n+29)m+(4n+29)^2+3\\ =&\ -2m^2-60m+729+672n+96n^2 \qquad \textit{Ici, la magie opère...}\\ =&\ -2m^2-60m+729+96(n^2+7n)\\ =&\ -2m^2-60m+729+96m\\ =&\ -2m^2+36m+729\end{aligned}$$

## 11. Avec 9 facteurs

**Fait 11.1.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$ .

La preuve suivante s'inspire directement d'une démonstration citée via une source dans un échange sur `https://math.stackexchange.com` (voir la section 16).

*Preuve.* Supposons que $\pi_n^9 \in {}^2_*\mathbb{N}$ .
Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 9}$, $\forall i \in [\![0\,;8]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ . D'après le fait 3.2, on doit s'intéresser à $p \in \{2,3,5,7\}$ . Voici ce que l'on peut observer très grossièrement.

- Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^9$ sont divisibles par 5 .
- Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^9$ sont divisibles par 7 .
- Les points précédents donnent au moins 5 facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^9$ de valuation $p$-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ .

Nous avons alors l'une des alternatives suivantes pour chacun des 5 facteurs $(n+i)$ vérifiant $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ pour $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ .

- **[A 1]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A 2]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$
- **[A 3]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times 2\mathbb{N}$
- **[A 4]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$

Comme nous avons cinq facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions [7].

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 1]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $(M, N) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $N^2 - M^2 \in [\![1\,;8]\!]$. Selon le fait 3.5, seuls les cas suivants sont possibles mais ils lèvent tous une contradiction.

  (1) $N^2 - M^2 = 3$ donne $(M, N) = (1, 3)$, puis nécessairement $n = 1$, mais $\pi_1^9 = 9! \notin {}^2\mathbb{N}$ via $v_7(9!) = 1$.
  (2) $N^2 - M^2 = 5$ donne $(M, N) = (2, 3)$, puis nécessairement $n \in [\![1\,;4]\!]$, et $n \in [\![2\,;4]\!]$ d'après le cas précédent. Mais $\forall n \in [\![2\,;4]\!]$, $v_7(\pi_n^9) = 1$ donne $\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$ si $n \in [\![2\,;4]\!]$.
  (3) $N^2 - M^2 = 7$ donne $(M, N) = (3, 4)$, puis nécessairement $n \in [\![1\,;9]\!]$, et $n \in [\![5\,;9]\!]$ d'après les cas précédents. Mais $\forall n \in [\![5\,;9]\!]$, $v_{11}(\pi_n^9) = 1$ donne $\pi_n^9 \notin {}^2\mathbb{N}$ si $n \in [\![5\,;9]\!]$.
  (4) $N^2 - M^2 = 8$ donne $(M, N) = (1, 3)$, puis nécessairement $n = 1$, mais ceci est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 2]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (3M^2, 3N^2)$ avec $|3(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;8]\!]$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 3]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (2M^2, 2N^2)$ avec $|2(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;8]\!]$, puis nécessairement $|N^2 - M^2| = 3$ qui implique $n \in [\![1\,;2]\!]$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 4]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (6M^2, 6N^2)$ avec $|6(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;8]\!]$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5. □

## 12. Avec 10 facteurs

**Fait 12.1.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^{10} \notin {}^2\mathbb{N}$.

La démonstration suivante est citée via une source dans un échange sur `https://math.stackexchange.com` (voir la section 16).

*Preuve.* Supposons que $\pi_n^{10} \in {}^2_*\mathbb{N}$.
Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 10}$, $\forall i \in [\![0\,;9]\!]$, $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$. D'après le fait 3.2, on doit s'intéresser à $p \in \{2, 3, 5, 7\}$. Voici ce que l'on peut observer très grossièrement.

- Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^{10}$ sont divisibles par $5$.
- Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^{10}$ sont divisibles par $7$.
- Les points précédents donnent au moins 6 facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^{10}$ de valuation $p$-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$.

Nous avons alors l'une des alternatives suivantes pour chacun des 6 facteurs $(n+i)$ vérifiant $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ pour $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$.

7. Notons qu'en considérant $3$, il resterait au minimum 2 facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^9$ de valuation $p$-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$. Or, en considérant la parité de $v_2(n+i)$, nous aurions deux alternatives, ceci rendant impossible l'usage du principe des tiroirs.

- **[A 1]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A 2]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in 2\mathbb{N} \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$
- **[A 3]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times 2\mathbb{N}$
- **[A 4]** $\big(v_2(n+i), v_3(n+i)\big) \in \big(2\mathbb{N}+1\big) \times \big(2\mathbb{N}+1\big)$

Comme nous avons six facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions [8].

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 1]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $(M,N) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $N^2 - M^2 \in [\![1\,;9]\!]$. Selon le fait 3.5, seuls les cas suivants sont possibles mais ils lèvent tous une contradiction.

  (1) $N^2 - M^2 = 3$ avec $(M,N) = (1,2)$ est possible, mais ceci donne $n = 1^2 = 1$, puis $\pi_1^{10} = 10! \in {}^2\mathbb{N}$, or ceci est faux car $v_7(10!) = 1$.
  (2) $N^2 - M^2 = 5$ avec $(M,N) = (2,3)$ est possible d'où $n \in [\![1\,;4]\!]$. Nous venons de voir que $n = 1$ est impossible. De plus, pour $n \in [\![2\,;4]\!]$, $v_7(\pi_n^{10}) = 1$ montre que $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.
  (3) $N^2 - M^2 = 7$ avec $(M,N) = (3,4)$ est possible d'où $n \in [\![1\,;9]\!]$, puis $n \in [\![5\,;9]\!]$ d'après ce qui précède. Mais ici, $\forall n \in [\![5\,;9]\!]$, $v_{11}(\pi_n^{10}) = 1$ montre que $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.
  (4) $N^2 - M^2 = 8$ avec $(M,N) = (1,3)$ est possible d'où $n = 1$, mais ceci est impossible comme nous l'avons vu ci-dessus.
  (5) $N^2 - M^2 = 9$ avec $(M,N) = (4,5)$ est possible d'où $n \in [\![10\,;16]\!]$ d'après ce qui précède. Or $\forall n \in [\![10\,;16]\!]$, $v_{17}(\pi_n^{10}) = 1$, donc $\pi_n^{10} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 2]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (3M^2, 3N^2)$ avec $(M,N) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $3(N^2 - M^2) \in [\![1\,;9]\!]$, puis $N^2 - M^2 \in [\![1\,;3]\!]$. Selon le fait 3.5, nécessairement $N^2 - M^2 = 3$ avec $(M,N) = (1,2)$, d'où $n \in [\![1\,;3]\!]$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 3]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (2M^2, 2N^2)$ avec $(M,N) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $2(N^2 - M^2) \in [\![1\,;9]\!]$, puis $N^2 - M^2 \in [\![1\,;4]\!]$. Selon le fait 3.5, nécessairement $N^2 - M^2 = 3$ avec $(M,N) = (1,2)$, d'où $n \in [\![1\,;2]\!]$, mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A 4]**.

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (6M^2, 6N^2)$ avec $(M,N) \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie des rôles, on peut supposer $N > M$, de sorte que $6(N^2 - M^2) \in [\![1\,;9]\!]$, puis $N^2 - M^2 = 1$, mais c'est impossible d'après le fait 3.5. □

8. Notons qu'en considérant 3, il resterait au minimum 2 facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^7$ de valuation $p$-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$. Or, en considérant la parité de $v_2(n+i)$, nous aurions deux alternatives, ceci rendant impossible l'usage du principe des tiroirs.

## 13. Avec 11 facteurs

**Fait 13.1.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^{11} \notin {}^2\mathbb{N}$ .

La démonstration suivante est très similaire à celle du cas 12.1, donc nous indiquons juste les adaptations à apporter.

*Preuve.* Ici nous avons moins 6 facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^{11}$ de valuation $p$-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ , en notant qu'ici il y a au maximum trois facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^{11}$ divisibles par $5$ . Ceci nous amène aux cas suivants.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient $[\mathbf{A\,1}]$ .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $|N^2 - M^2| \in [\![1\,;10]\!]$ . Ce qui suit lève des contradictions.
  (1) $|N^2 - M^2| = 3$ donne $n = 1$ , mais $\pi_1^{11} = 11! \notin {}^2\mathbb{N}$ via $v_{11}(11!) = 1$ .
  (2) $|N^2 - M^2| = 5$ donne $n \in [\![2\,;4]\!]$ , mais $\forall n \in [\![2\,;4]\!]$ , $v_{11}(\pi_n^{11}) = 1$ donne $\pi_n^{11} \notin {}^2\mathbb{N}$ .
  (3) $|N^2 - M^2| = 7$ donne $n \in [\![5\,;9]\!]$ , mais $\forall n \in [\![5\,;9]\!]$ , $v_{11}(\pi_n^{11}) = 1$ donne $\pi_n^{11} \notin {}^2\mathbb{N}$ .
  (4) $|N^2 - M^2| = 8$ donne $n = 1$ , mais ceci est impossible.
  (5) $|N^2 - M^2| = 9$ donne $n \in [\![10\,;16]\!]$ , mais $\forall n \in [\![10\,;16]\!]$ , $v_{17}(\pi_n^{11}) = 1$ implique que $\pi_n^{11} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient $[\mathbf{A\,2}]$ .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (3M^2, 3N^2)$ avec $|3(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;10]\!]$ , d'où $n \in [\![1\,;3]\!]$ que nous savons impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient $[\mathbf{A\,3}]$ .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (2M^2, 2N^2)$ avec $|2(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;10]\!]$ , puis nécessairement $|N^2 - M^2| \in \{3, 5\}$ , d'où $n \in [\![1\,;8]\!]$ , mais on sait que cela est impossible.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient $[\mathbf{A\,4}]$ .

  Dans ce cas, $(n+i, n+i') = (6M^2, 6N^2)$ avec $|6(N^2 - M^2)| \in [\![1\,;10]\!]$ , mais c'est impossible d'après le fait 3.5. □

## 14. Avec 12 facteurs

**Fait 14.1.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^{12} \notin {}^2\mathbb{N}$ .

La démonstration suivante est très similaire à celle du cas 12.1, donc nous indiquons juste les adaptations à apporter.

*Preuve.* Ici nous avons moins 5 facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^{12}$ de valuation $p$-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ avec ici 11 un nouveau compagnon premier à prendre en compte. Ceci nous amène juste à adapter le cas où deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient $[\mathbf{A\,1}]$ . Dans ce cas, nous avons $(n+i, n+i') = (M^2, N^2)$ avec $|N^2 - M^2| \in [\![1\,;11]\!]$ . Ce qui suit lève des contradictions.

(1) $|N^2 - M^2| \in \{3, 5, 7, 8, 9\}$ se traite comme pour le cas 13.1. On sait alors que $n > 9$ .

(2) Un nouveau cas est à gérer car $|N^2 - M^2| = 11$ est possible. Ceci ne se peut que si $(M, N) = (5, 6)$ ou $(M, N) = (6, 5)$ , d'où $n \in [\![10\,;25]\!]$ , mais nous arrivons aux contradictions suivantes.
  - $\forall n \in [\![10\,;20]\!]$ , $v_{17}(\pi_n^{12}) = 1$ , donc $\pi_n^{12} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux.
  - $\forall n \in [\![20\,;25]\!]$ , $v_{29}(\pi_n^{12}) = 1$ , donc $\pi_n^{12} \in {}^2\mathbb{N}$ est faux. □

## 15. Avec 13 facteurs

**Fait 15.1.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n^{13} \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Preuve.* Les arguments de la preuve du cas 14.1 s'adaptent immédiatement. □

**Remarque 15.1.** *Que donnerait l'analyse du cas suivant $\pi_n^{14} \notin {}^2\mathbb{N}$ ? Nous avons ce qui suit.*

- $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 14}$ , $\forall i \in [\![0 ; 13]\!]$ , $v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ .
- *Au maximum trois facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^{14}$ sont divisibles par* $5$ *.*
- *Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^{14}$ sont divisibles par* $7$ *.*
- *Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^{14}$ sont divisibles par* $11$ *.*
- *Au maximum deux facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^{14}$ sont divisibles par* $13$ *. Un nouveau venu !*
- *Les points précédents nous donnent qu'au moins* 5 *facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^{14}$ sont de valuation p-adique paire dès que $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ . On peut donc tenter de mettre en route la même machinerie que pour le cas 14.1.*

*Nous sentons donc ici la possibilité d'automatiser l'analyse de certaines situations. Ceci a été fait dans mon document* « Carrés parfaits et produits d'entiers consécutifs – Jusqu'à 100 facteurs ? » *qui propose une approche informatique se basant principalement sur l'idée précédente afin de traiter les cas jusqu'à* 100 *facteurs, c'est-à-dire ceux supposés connus dans la démonstration de Paul Erdős.*

## 16. Sources utilisées

### Faits 7.1, 9.1, 11.1, 12.1, 13.1, 14.1 et 15.1.

Un échange consulté le 13 février 2024, et titré *« Product of 10 consecutive integers can never be a perfect square »* sur le site `https://math.stackexchange.com` .

*La démonstration indiquée est celle du fait 12.1, une preuve venant d'une source Wordpress donnée dans une réponse de cet échange, mais cette source est très expéditive...*

### Fait 8.1.

Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré *« product of six consecutive integers being a perfect numbers »* sur le site `https://math.stackexchange.com` .

### Fait 9.1.

Un échange consulté le 3 février 2024, et titré *« Proof that the product of 7 successive positive integers is not a square »* sur le site `https://math.stackexchange.com` .

*Il manque certaines justifications dans la démonstration donnée dans cet échange.*

### Fait 10.1.

Un échange consulté le 4 février 2024, et titré *« How to prove that the product of eight consecutive numbers can't be a number raised to exponent 4 ? »* sur le site `https://math.stackexchange.com` .

*La démonstration vient de l'une des réponses de cet échange, mais la justification des deux inégalités n'est pas donnée.*