Un peu de mise en forme quadratique...

① $\mathcal{C}^0 := \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{C}^0 \times \mathcal{C}^0 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \int_0^1 f(x) g(x)\, dx \end{aligned}$$

$\forall f \in \mathcal{C}^0,\ p(f) := \varphi(f, f) = \int_0^1 f(x)^2\, dx.$

- φ bilinéaire et sym. (immédiat).
- $\forall f \in \mathcal{C}^0,\ p(f) \geq 0$ par positivité de l'intégrale.
- $p(f) = 0$

$\iff \int_0^1 f(x)^2\, dx = 0$

$\iff f^2(x) = 0$ sur $[0;1]$ $f^2 \geq 0$ sur $[0;1]$ et $f \in \mathcal{C}^0$.

$\iff f = 0$ sur $[0;1]$

ⓘ Soit $F \in \mathcal{C}^0$ tq $F \geq 0$ sur $[0;1]$ et $\int_0^1 F(x)\,dx = 0$.
Supposons $F \neq 0$ sur $[0;1]$. On a $x_0 \in [0;1]$ tq $F(x_0) > 0$, d'où $\varepsilon > 0$ tq $F(x) \geq F(x_0) - \frac{F(x_0)}{2}$ pour $x \in [-\varepsilon; \varepsilon] \cap [0;1]$ par continuité.
On a alors $\int_0^1 F(x)\,dx \geq \int_{\max(0;-\varepsilon)}^{\min(\varepsilon;1)} F(x)\,dx$, la 2^{nde} intégrale étant strict^t positive.

Donc p est déf. positive, d'où son cône isotrope se réduit à $\{\tilde{0}\}$ où $\tilde{0} : x \in [0;1] \mapsto 0 \in \mathbb{R}$.

- φ est-elle dégénérée, ie a-t-on $\{f \in \mathcal{C}^0 \text{ tq } \forall g \in \mathcal{C}^0, \varphi(f,g) = 0\} \neq \{\tilde{0}\}$?

Prenant $f = g$, on voit que φ n'est pas dégénérée.

⚠ φ dégénérée est plus "contraignant" que q déf.

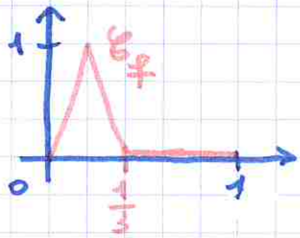
② $\varphi : (f,g) \in \mathscr{C}^0 \times \mathscr{C}^0 \longmapsto \int_0^1 f(x)\, g(1-x)\, dx \in \mathbb{R}$

$\forall f \in \mathscr{C}^0,\ q(f) = \varphi(f,f) = \int_0^1 f(x)\, f(1-x)\, dx.$

- φ clairement bilinéaire.
- φ sym. via le chgt de var. d'intégration $t = 1-x$:

$\int_0^1 f(x)\, g(1-x)\, dx = -\int_1^0 f(1-t)\, g(t)\, dt.$

ⓘ En interprétant x comme une var. de temps, $t = 1-x$ fait "remonter" le temps.

- 

$f(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/6 \\ -6(x - \frac{1}{3}) & \text{si } \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\varphi(f,f) = 0$ ie q est de cône non trivial car $f(x)f(1-x)$ est nulle sur $[0;1]$.

- $\{f \in \mathscr{C}^0 \text{ tq } \forall g \in \mathscr{C}^0,\ \varphi(f,g) = 0\} = \{\tilde{0}\}$ en considérant $g(x) = f(1-x)$.

③ $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$

Quelle est la forme bilinéaire sym. (ou polaire) $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ associée à q ?

$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, on a :

$$q(u+v) = \varphi(u+v, u+v)$$
$$= q(u) + q(v) + 2\varphi(u,v)$$

On a donc :

$$\varphi(u,v) = \frac{1}{2}\left(q(u+v) \underbrace{-q(u)} \underbrace{-q(v)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Big((u_1+v_1)^2 + 2(u_2+v_2)^2 + 5(u_3+v_3)^2$$
$$+ 2(u_1+v_1)(u_2+v_2) - 4(u_2+v_2)(u_3+v_3)$$
$$- u_1^2 - 2u_2^2 - 5u_3^2 - 2u_1u_2 + 4u_2u_3$$
$$- v_1^2 - 2v_2^2 - 5v_3^2 - 2v_1v_2 + 4v_2v_3\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(2u_1v_2 + 4u_2v_2 + 10u_3v_3$$
$$+ 2u_1v_2 + 2v_1u_2 - 4u_2v_3 - 4v_2u_3\Big)$$

Donc,

$$\varphi(u,v) = 2u_1v_2 + 2u_2v_2 + 5u_3v_3 + v_1u_2 - 2v_2u_3 - 2v_3u_2.$$

④ $q(A) = \mathrm{tr}(A^2)$ où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Forme polaire $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ de q ?

$$\varphi(A,B) = \frac{1}{2}\left(q(A+B) - q(A) - q(B)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left((A+B)^2 - A^2 - B^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(AB + BA)$$

De m̂, pour $q'(A) = \mathrm{tr}({}^tAA)$.

$$\varphi'(A,B) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left({}^t(A+B)(A+B) - {}^tAA - {}^tBB\right)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left({}^tAB + {}^tBA\right)$$

⑤ Condiᵒ sur $w \in \mathbb{R}^n$ pour que $(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i$ soit un prod. scalaire ?

La bilinéarité est évidente pour $\varphi(x, y) := \sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i$.

- $\forall x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\varphi(x, x) \geq 0$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2 \geq 0$$

Prenant $x = (1, 0, \dots, 0)$, puis $x = (0, 1, 0, \dots)$ ... etc, on obtient $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $w_i \geq 0$.

- De même, $[\varphi(x, x) = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^n}]$ n'est possible que si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $w_i > 0$ (supposer par l'absurde que $w_i = 0$ et considérer $(0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{ème}} \text{ coord.}}}{1}, 0, \dots 0)$).

⑥ $\mathbb{R}_{\leq n}[X] = \{ P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } \deg P \leq n \}$

Mq $\varphi : (P, Q) \in \mathbb{R}_{\leq n}[X]^2 \mapsto \sum_{i=1}^{n} P(x_i) Q(x_i) \in \mathbb{R}$ est un prod. scalaire dès que les x_i sont distincts deux à deux.

La bilinéarité et la positivité sont immédiates, et de plus, on a :

$\varphi(P, P) = 0$

$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \ P(x_i)^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ P admet n racines différentes

$\Leftrightarrow P = 0$

(i) "x_i distincts deux à deux" est une CNS !

⑦ $(x_i)_{1 \le i \le n} \subseteq \mathbb{R}_+^*$ tq $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$.

Mq $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \ge n^2$, et essayons de voir sous quelles condi^ons^ on a l'égalité.

• <u>Idée 1</u> : passer via le prod. scalaire canonique φ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

On pose $(y_k)_k := \left(\frac{1}{x_k}\right)_k$.

$$\left(\varphi(x,y)\right)^2 \le \varphi(x,x) \cdot \varphi(y,y)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k\right)^2}_{n^2} \le \left|\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right| \cdot \left|\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right|$$

Mauvaise idée MAIS ceci nous donne la voie à suivre.

• <u>Idée 2</u> (la bonne)

On considère $(\tilde{x}_k)_k := (\sqrt{x_k})_k$ et $(\tilde{y}_k)_k := \left(\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)_k$.

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{x}_k \cdot \tilde{y}_k\right)^2 \le \left|\sum_{k=1}^{n} \tilde{x}_k^2\right| \cdot \left|\sum_{k=1}^{n} \tilde{y}_k^2\right|$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$$

$$\Rightarrow n^2 \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$$

Enfin, l'égalité n'est possible que si $(\tilde{x}_k)_k$ et $(\tilde{y}_k)_k$ sont "positiv^t^" colinéaires, ie s'il existe $\alpha > 0$ ($\alpha = 0$ impossible) tel qu'on ait :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \sqrt{x_k} = \frac{\alpha}{\sqrt{x_k}}$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ x_k = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ x_k = \frac{1}{n} \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k = 1$$