

# CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTRIERS CONSÉCUTIFS – DES SOLUTIONS À LA MAIN

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, disponible sur la page  
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

---

## Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons « Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International ».



---

## TABLE DES MATIÈRES

1.	Ce qui nous intéresse	2
2.	Notations utilisées	2
3.	Les carrés parfaits	3
3.1.	Structure	3
3.2.	Distance entre deux carrés parfaits	3
4.	Avec 2 facteurs	5
5.	Avec 3 facteurs	6
6.	Avec 4 facteurs	7
7.	Avec 5 facteurs	8
8.	Avec 6 facteurs	10
9.	Avec 7 facteurs	13
10.	Avec 8 facteurs	14
11.	Sources utilisées	16

## 1. CE QUI NOUS INTÉRESSE

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers »<sup>1</sup>, Paul Erdos démontre que pour tout couple  $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , le produit de  $(k+1)$  entiers consécutifs  $n(n+1) \cdots (n+k)$  n'est jamais le carré d'un entier.

Dans ce document, nous proposons quelques cas particuliers résolus de façon « adaptative » à la sueur des neurones ; le but recherché est de fournir différentes approches même si parfois cela peut prendre plus de temps.

## 2. NOTATIONS UTILISÉES

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \pi_n^k = \prod_{i=0}^k (n+i)$ .  
Par exemple,  $\pi_n^0 = n$ ,  $\pi_n^1 = n(n+1)$  et  $\pi_{n+2}^3 = (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$ .
- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$  est l'ensemble des carrés parfaits. On note aussi  ${}^2_*\mathbb{N} = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$ .  
 $\mathbb{N}_{sf}$  est l'ensemble des naturels non nuls sans facteur carré<sup>2</sup>.
- $\mathbb{P}$  désigne l'ensemble des nombres premiers.  
 $\forall (p; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*, v_p(n) \in \mathbb{N}$  est la valuation  $p$ -adique de  $n$ , c'est-à-dire  $p^{v_p(n)} \mid n$  et  $p^{v_p(n)+1} \nmid n$ , autrement dit  $p^{v_p(n)}$  divise  $n$ , contrairement à  $p^{v_p(n)+1}$ .
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, n \wedge m$  désigne le PGCD de  $n$  et  $m$ .
- $2\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.  
 $2\mathbb{N} + 1$  est l'ensemble des nombres naturels impairs.
- $(a \pm b)$  est un raccourci pour  $(a+b)(a-b)$ .

---

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).

2. En anglais, on dit « square free ».

## 3. LES CARRÉS PARFAITS

## 3.1. Structure.

**Fait 3.1.**  $\forall n \in {}^2\mathbb{N}_*$ , s'il existe  $m \in {}^2\mathbb{N}$  tel que  $n = fm$  alors  $f \in {}^2\mathbb{N}_*$ .

*Démonstration.* Clairement,  $\forall p \in \mathbb{P}$ , nous avons  $v_p(fm) \in 2\mathbb{N}$  et  $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$  qui donnent  $v_p(f) \in 2\mathbb{N}$  car  $v_p(fm) = v_p(f) + v_p(m)$ .  $\square$

**Fait 3.2.**  $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , si  $a \wedge b = 1$  et  $ab \in {}^2\mathbb{N}_*$ , alors  $a \in {}^2\mathbb{N}_*$  et  $b \in {}^2\mathbb{N}_*$ .

*Démonstration.* Clairement,  $\forall p \in \mathbb{P}$ , nous avons  $v_p(ab) \in 2\mathbb{N}$ . Or  $p \in \mathbb{P}$  ne peut diviser à la fois  $a$  et  $b$ , donc  $\forall p \in \mathbb{P}$ ,  $v_p(a) \in 2\mathbb{N}$  et  $v_p(b) \in 2\mathbb{N}$ , autrement dit  $(a, b) \in {}^2\mathbb{N}_* \times {}^2\mathbb{N}_*$ .  $\square$

**Fait 3.3.** Soit  $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  tel que  $ab \in {}^2\mathbb{N}_*$ , ainsi que  $(\alpha, \beta, A, B) \in (\mathbb{N}_{sf})^2 \times \mathbb{N}^2$  tel que  $a = \alpha A^2$  et  $b = \beta B^2$ . Nous avons alors forcément  $\alpha = \beta$ .

*Démonstration.* Le fait 3.1 donne  $\alpha\beta \in {}^2\mathbb{N}_*$ . De plus,  $\forall p \in \mathbb{P}$ , nous avons  $v_p(\alpha) \in \{0, 1\}$  et  $v_p(\beta) \in \{0, 1\}$ . Finalement,  $\forall p \in \mathbb{P}$ ,  $v_p(\alpha) = v_p(\beta)$ , autrement dit  $\alpha = \beta$ .  $\square$

## 3.2. Distance entre deux carrés parfaits.

**Fait 3.4.**  $\forall (N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , si  $N > M$ , alors  $N^2 - M^2 = \sum_{k=M+1}^N (2k - 1)$ .

*Démonstration.*  $N^2 = \sum_{k=1}^N (2k - 1)$  donne l'identité indiquée<sup>3</sup>.  $\square$

L'identité précédente permet d'éliminer beaucoup de situations en s'aidant, si besoin, d'un petit programme informatique (voir un peu plus bas).

**Fait 3.5.** Soit  $(N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  tel que  $N > M$ .

(1)  $N^2 - M^2 \geq 2M + 1$ .

(2)  $N^2 - M^2 < 3$  est impossible.

(3)  $N^2 - M^2 = 3$  uniquement si  $(N, M) = (2, 1)$ .

(4) Notons  $nb_{sol}$  le nombre de solutions  $(N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  de  $N^2 - M^2 = \delta$ . Pour  $\delta \in \llbracket 1; 20 \rrbracket$ , nous avons :

(a)  $nb_{sol} = 0$  si  $\delta \in \{1, 2, 4, 6, 10, 14, 18\}$ .

(b)  $nb_{sol} = 1$  si  $\delta \in \{3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 16\}$ .

(c)  $nb_{sol} = 2$  si  $\delta = 15$ .

*Démonstration.*

(1)  $N^2 - M^2 = \sum_{k=M+1}^N (2k - 1) \geq 2(M + 1) - 1 = 2M + 1$

On peut aussi juste procéder comme suit.

$$N^2 - M^2 = (N - M)(N + M) \geq 1 \cdot (M + 1 + M) = 2M + 1$$

(2) Immédiat puisque  $2M + 1 \geq 3$ .

(3) Notant  $\delta = N^2 - M^2$ , nous avons  $2N - 1 \leq \sum_{k=M+1}^N (2k - 1) = \delta$ , soit  $N \leq \frac{\delta + 1}{2}$ . Ceci permet de limiter notre zone de recherche à  $N \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$ , ce qui permet de conclure.

---

3. La formule utilisée est facile à démontrer algébriquement, et évidente à découvrir géométriquement.

(4) Il suffit de s'appuyer sur le programme Python donné ci-dessous.



```
from math import sqrt, floor

def sol(diff):
    solfound = []

    for i in range(1, (diff + 1) // 2 + 1):
        tested = i**2 - diff

        if tested < 0:
            continue

        tested = floor(sqrt(i**2 - diff))

        if tested == 0:
            continue

        if tested**2 == i**2 - diff:
            solfound.append((i, tested))

    return solfound
```

## 4. AVEC 2 FACTEURS

**Fait 4.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1) \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Preuve 1.* Il suffit de noter que  $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$ . □

*Preuve 2.* Supposons que  $\pi_n^1 = n(n+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$ .

Comme  $n \wedge (n+1) = 1$ , le fait 3.2 donne  $(n, n+1) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$ , d'où l'existence de deux carrés parfaits non nuls distants de 1. D'après le fait 3.5, ceci est impossible. □

*Preuve 3.* Supposons que  $\pi_n^1 = n(n+1) = N^2$  où  $N \in \mathbb{N}^*$ .

Les équivalences suivantes donnent une contradiction.

$$\begin{aligned}
 & n(n+1) = N^2 \\
 \iff & 2 \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^N (2k-1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} n(n+1) = 2 \sum_{k=1}^n k \text{ et } N^2 = \sum_{k=1}^N (2k-1). \\
 \iff & \sum_{k=1}^n 2k = \sum_{k=1}^N 2k - N \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} N > n \\
 \iff & \sum_{k=n+1}^N 2k - N = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} N > 0 \text{ rend impossible la dernière égalité.} \\
 \iff & \sum_{k=n+1}^{N-1} 2k + N = 0
 \end{aligned}$$

□

## 5. AVEC 3 FACTEURS

**Fait 5.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2) \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Preuve 1.* Supposons que  $\pi_n^2 \in {}^2_*\mathbb{N}$ .

Posant  $m = n + 1$ , nous avons  $\pi_n^2 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$  où  $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Comme  $m \wedge (m^2-1) = 1$ , le fait 3.2 donne  $(m, m^2-1) \in {}^2_*\mathbb{N} \times {}^2_*\mathbb{N}$ . Or,  $m^2-1 \in {}^2_*\mathbb{N}$  est impossible d'après le fait 3.5.  $\square$

*Preuve 2.* Supposons que  $\pi_n^2 \in {}^2_*\mathbb{N}$ .

Comme  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  ne peut diviser au maximum qu'un seul des trois facteurs  $n$ ,  $(n+1)$  et  $(n+2)$ , nous savons que  $\forall p \in \mathbb{P}_{>2}, \forall i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ . Mais que se passe-t-il pour  $p = 2$ ?

Supposons d'abord  $n \in 2\mathbb{N}$ .

- Posant  $n = 2m$ , nous avons  $\pi_n^2 = 4m(2m+1)(m+1)$ , d'où  $m(2m+1)(m+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$ .
- Comme  $v_2(2m+1) = 0$ , nous savons que  $2m+1 \in {}^2_*\mathbb{N}$ .
- Donc  $m(m+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$  via le fait 3.1, mais le fait 4.1 interdit cela.

Supposons maintenant  $n \in 2\mathbb{N} + 1$ .

- Nous savons que  $n \in {}^2_*\mathbb{N}$  via  $v_2(n) = 0$ .
- On conclut comme dans le cas précédent mais en passant via  $(n+1)(n+2)$ .  $\square$

## 6. AVEC 4 FACTEURS

**Fait 6.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Preuve 1.* Nous pouvons ici faire les manipulations algébriques naturelles suivantes qui cherchent à obtenir le même coefficient pour  $n$  dans chaque parenthèse.

$$\begin{aligned}
 \pi_n^3 &= n(n+3) \cdot (n+1)(n+2) \\
 &= (n^2 + 3n) \cdot (n^2 + 3n + 2) \quad \left. \vphantom{(n^2 + 3n) \cdot (n^2 + 3n + 2)} \right\} m = n^2 + 3n \\
 &= m(m+2) \\
 &= m^2 + 2m \\
 &= (m+1)^2 - 1
 \end{aligned}$$

Comme  $m > 0$ ,  $(m+1)^2 - 1 \notin {}^2\mathbb{N}$  d'après le fait 3.5, c'est-à-dire  $\pi_n^3 \notin {}^2\mathbb{N}$ . □

*Preuve 2.* En « symétrisant » certaines expressions, nous obtenons les manipulations algébriques suivantes.

$$\begin{aligned}
 \pi_n^3 &= n(n+1)(n+2)(n+3) \quad \left. \vphantom{n(n+1)(n+2)(n+3)} \right\} x = n + \frac{3}{2} \\
 &= \left(x \pm \frac{3}{2}\right) \left(x \pm \frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \quad \left. \vphantom{\left(x^2 - \frac{9}{4}\right) \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)} \right\} y = x^2 - \frac{5}{4} \text{ où } \frac{5}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{4}\right) \\
 &= (y \pm 1) \\
 &= y^2 - 1 \\
 &= \left(\left(n + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right)^2 - 1 \\
 &= (n^2 + 3n + 1)^2 - 1
 \end{aligned}$$

On conclut comme dans la première preuve. □

## 7. AVEC 5 FACTEURS

**Fait 7.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2\mathbb{N}$ .

*Preuve 1.* Supposons que  $\pi_n^4 \in {}^2\mathbb{N}$ .

Clairement,  $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}, \forall i \in \llbracket 0; 4 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ . Pour  $p = 2$  et  $p = 3$ , nous avons les alternatives suivantes pour chaque facteur  $(n+i)$  de  $\pi_n^4$ .

- **[A1]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A2]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times (2\mathbb{N} + 1)$
- **[A3]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times 2\mathbb{N}$
- **[A4]**  $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times (2\mathbb{N} + 1)$

Comme nous avons cinq facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions très facilement.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A1]**.

Dans ce cas, on sait juste que  $(n+i, n+i') \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$ . Or  $n \notin {}^2\mathbb{N}$  puisque sinon  $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$  donne  $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$  via le fait 3.1, mais ceci contredit le fait 6.1. De même,  $n+4 \notin {}^2\mathbb{N}$ . Dès lors, nous avons  $\{n+i, n+i'\} \subseteq \{n+1, n+2, n+3\}$ , d'où l'existence de deux carrés parfaits non nuls éloignés de moins de 3, et ceci contredit le fait 3.5.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A2]**.

Dans ce cas, le couple de facteurs est  $(n, n+3)$ , ou  $(n+1, n+4)$ .

(1) Supposons d'abord que  $n$  et  $(n+3)$  vérifient **[A2]**.

Comme  $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}, v_p(n) \in 2\mathbb{N}$  et  $v_p(n+3) \in 2\mathbb{N}$ , mais aussi  $v_3(n) \in 2\mathbb{N} + 1$  et  $v_3(n+3) \in 2\mathbb{N} + 1$ , nous avons  $n = 3N^2$  et  $n+3 = 3M^2$  où  $(N, M) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . Or, ceci donne  $3 = 3M^2 - 3N^2$ , puis  $M^2 - N^2 = 1$  qui contredit le fait 3.5.

(2) De façon analogue, on ne peut pas avoir  $(n+1)$  et  $(n+4)$  vérifiant **[A2]**.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A3]**.

Comme dans le point précédent, c'est impossible car on aurait  $2 = 2M^2 - 2N^2$ , ou  $4 = 2M^2 - 2N^2$  qui contredirait le fait 3.5.

En effet, ici les couples possibles sont  $(n, n+2)$ ,  $(n, n+4)$ ,  $(n+2, n+4)$  et  $(n+1, n+3)$ <sup>4</sup>.

- Deux facteurs différents  $(n+i)$  et  $(n+i')$  vérifient **[A4]**.

Ceci donne deux facteurs différents divisibles par 6, mais c'est impossible.  $\square$

Bien que longue, la preuve suivante se comprend bien, car nous ne faisons qu'avancer à vue, mais avec rigueur.

*Preuve 2.* Supposons que  $\pi_n^4 \in {}^2\mathbb{N}$ .

Posant  $m = n+2$ , nous avons  $\pi_n^4 = m(m \pm 2)(m \pm 1) = m(m^2 - 1)(m^2 - 4)$  où  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ . Pour la suite, on pose  $u = m^2 - 1$  et  $q = m^2 - 4$ .

Supposons d'abord que  $m \in {}^2\mathbb{N}$ .

- De  $muq \in {}^2\mathbb{N}$ , nous déduisons que  $uq \in {}^2\mathbb{N}$  via le fait 3.1.

---

4. A priori, rien n'empêche d'avoir  $n$ ,  $(n+2)$  et  $(n+4)$  vérifiant tous les trois **[A3]**.



- Comme  $u - q = 3$ , nous savons que  $u \wedge q \in \{1, 3\}$ .
- Si  $u \wedge q = 1$ , alors  $(u, q) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$  d'après le fait 3.2. Ensuite, le fait 3.5 impose d'avoir  $(u, q) = (4, 1)$ , d'où  $m^2 - 1 = 4$ , mais ceci est impossible<sup>5</sup>.
- Si  $u \wedge q = 3$ , alors  $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$ ,  $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$  et  $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$ , mais aussi  $v_3(u) \in 2\mathbb{N} + 1$  et  $v_3(q) \in 2\mathbb{N} + 1$ . Donc  $u = 3U^2$  et  $q = 3Q^2$  avec  $(U, Q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . Or  $u - q = 3$  donne  $U^2 - Q^2 = 1$ , et le fait 3.5 nous indique une contradiction.

Supposons maintenant que  $m \notin {}^2\mathbb{N}$ .

- Montrons que  $u \notin {}^2\mathbb{N}$  et  $q \notin {}^2\mathbb{N}$ .
  - (1)  $u \in {}^2\mathbb{N}$  donne  $m^2 - 1 \in {}^2\mathbb{N}$ , puis  $m = 1$  via le fait 3.5, mais ceci est impossible puisque  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ .
  - (2)  $q \in {}^2\mathbb{N}$  donne  $m^2 - 4 \in {}^2\mathbb{N}$ , puis la contradiction  $m = 2$  via le fait 3.5.
- Donc  $m = \alpha M^2$ ,  $u = \beta U^2$ ,  $q = \gamma Q^2$  où  $(M, U, Q) \in (\mathbb{N}^*)^3$  et  $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathbb{N}_{sf} \cap \mathbb{N}_{>1}$ .
- Notons que  $\beta \neq \gamma$ , car, dans le cas contraire,  $3 = u - q = \beta(U^2 - Q^2)$  fournirait  $\beta = 3$  puis  $U^2 - Q^2 = 1$ , et ceci contredirait le fait 3.5.
- Nous avons  $m \wedge u = 1$ ,  $m \wedge q \in \{1, 2, 4\}$  et  $u \wedge q \in \{1, 3\}$  avec  $m \wedge u = m \wedge q = u \wedge q = 1$  impossible car sinon on aurait  $(m, u, q) \in ({}^2\mathbb{N})^3$  via  $muq \in {}^2\mathbb{N}$  et le fait 3.2.
- Clairement,  $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$ ,  $(v_p(m), v_p(u), v_p(q)) \in (2\mathbb{N})^3$ .
- Les points précédents donnent  $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$  avec de plus  $\beta \neq \gamma$ , ainsi que  $\alpha \wedge \beta = 1$ ,  $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2\}$  et  $\beta \wedge \gamma \in \{1, 3\}$ . Notons au passage que  $\alpha \wedge \beta = 1$  implique  $(\alpha, \beta) = (2, 3)$ , ou  $(\alpha, \beta) = (3, 2)$ . Via le tableau « mécanique » ci-après, nous obtenons que forcément  $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$  ou  $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$ . Le plus dur est fait !

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	Statut
2	3	2	1	2	1	✓
2	3	6	1	2	3	✓
3	2	3	1	3	1	✗
3	2	6	1	3	2	✗

- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$  nous donne  $m = 2M^2$ ,  $u = 3U^2$  et  $q = 2Q^2$ , d'où la contradiction  $3 \cdot 4M^2U^2Q^2 \in {}^2\mathbb{N}$ .
- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$  nous donne  $m = 2M^2$ ,  $m^2 - 1 = 3U^2$  et  $m^2 - 4 = 6Q^2$ , mais ce qui suit lève une autre contradiction.
  - Travaillons modulo 3. Nous avons  $m \equiv 2M^2 \equiv 0$  ou  $-1$ . Or  $m^2 - 1 = 3U^2$  donne  $m^2 \equiv 1$ , d'où  $m \equiv -1$ , puis  $3 \mid m - 2$ , et enfin  $6 \mid m - 2$  puisque  $m$  est pair.
  - Posant  $m - 2 = 6r$  et notant  $s = m + 2$ , nous avons  $6rs = 6Q^2$ , puis  $rs = Q^2$ .
  - $s \notin {}^2\mathbb{N}$ . Sinon  $(m-2)(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$  via  $(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) \in {}^2\mathbb{N}$  et le fait 3.1, mais ceci ne se peut pas d'après le fait 6.1.
  - Les deux résultats précédents et le fait 3.3 donnent  $(\pi, R, S) \in \mathbb{N}_{sf} \times (\mathbb{N}^*)^2$  tel que  $r = \pi R^2$  et  $s = \pi S^2$  avec  $\pi \in \mathbb{N}_{>1}$ .
  - Dès lors,  $4 = s - 6r = \pi(S^2 - 6R^2)$  donne  $\pi = 2$ , d'où  $m + 2 = 2S^2$ .
  - Finalement,  $m = 2M^2$  et  $m + 2 = 2S^2$  donnent  $2 = 2(S^2 - M^2)$ , soit  $1 = S^2 - M^2$ , ce qui contredit le fait 3.5.  $\square$

5. On peut aussi noter que le fait 5.1 lève une contradiction car nous avons  $m \in {}^2\mathbb{N}$  et  $u \in {}^2\mathbb{N}$  qui donnent  $(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$ .

## 8. AVEC 6 FACTEURS

**Fait 8.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^5 \notin {}^2\mathbb{N}$ .

La démonstration suivante se trouve dans l'article « Solution of a Problem »<sup>6</sup> de G. W. Hill et J. E. Oliver. Une petite simplification a été faite pour arriver à  $\pi_n^5 = (a-4)a(a+2)$ .

*Preuve 1.* Supposons que  $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}$ .

Commençons par de petites manipulations algébriques où la première modification fait apparaître le même coefficient pour  $n$  dans chaque parenthèse.

$$\begin{aligned} \pi_n^5 &= n(n+5) \cdot (n+1)(n+4) \cdot (n+2)(n+3) \\ &= (n^2+5n)(n^2+5n+4)(n^2+5n+6) \\ &= x(x+4)(x+6) \\ &= (a-4)a(a+2) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = n^2 + 5n \in \mathbb{N}_{\geq 6} \\ a = x + 4 \in \mathbb{N}_{\geq 10} \end{array} \end{array}$$

Nous avons  $a \in \mathbb{N}_{\geq 10}$  vérifiant  $a(a+2)(a-4) \in {}^2\mathbb{N}$ . Posons  $a = \alpha A^2$  où  $(\alpha, A) \in \mathbb{N}_{sf} \times \mathbb{N}^*$ , de sorte que  $\alpha(\alpha A^2+2)(\alpha A^2-4) \in {}^2\mathbb{N}$  via le fait 3.1. De plus,  $\alpha \in \mathbb{N}_{sf}$ , donc  $\alpha \mid (\alpha A^2+2)(\alpha A^2-4)$ , d'où  $\alpha \mid 8$ , et ainsi  $\alpha \in \{1, 2\}$ <sup>7</sup>. Nous allons voir que ceci est impossible.

Supposons que  $\alpha = 1$ .

- Notons les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} &(A^2+2)(A^2-4) \in {}^2\mathbb{N} \\ \iff (u+3)(u-3) \in {}^2\mathbb{N} &\quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} u = A^2 - 1 \text{ où } -1 = \frac{2-4}{2}. \\ \iff u^2 - 9 \in {}^2\mathbb{N} \end{aligned}$$

- Ensuite, prenant  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m^2 = u^2 - 9$ , le fait 3.5 donne  $(u, m) = (5, 4)$  d'où la contradiction suivante.

$$\begin{aligned} u = 5 &\iff A^2 - 1 = 5 \\ &\iff A^2 = 6 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 6 \notin {}^2\mathbb{N}.$$

Supposons que  $\alpha = 2$ .

- Notons l'équivalence suivante.

$$\begin{aligned} &2(2A^2+2)(2A^2-4) \in {}^2\mathbb{N} \\ \iff 2(A^2+1)(A^2-2) \in {}^2\mathbb{N} &\quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Via } 4 \cdot 2(A^2+1)(A^2-2). \end{aligned}$$

- Ensuite, en travaillant modulo 3, nous avons  $2(A^2+1)(A^2-2) \equiv -4 \equiv -1$  qui ne correspond pas à un carré modulo 3.  $\square$

Bien que très longue<sup>8</sup>, la preuve suivante est simple à comprendre car elle ne fait que dérouler le fil des faits découverts.

*Preuve 2.* Supposons que  $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} \pi_n^5 &= n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \\ \iff \pi_n^5 &= \left(x \pm \frac{5}{2}\right)\left(x \pm \frac{3}{2}\right)\left(x \pm \frac{1}{2}\right) \\ \iff 2^6 \pi_n^5 &= (y \pm 5)(y \pm 3)(y \pm 1) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = n + 2 + \frac{1}{2} \text{ (on symétrise la formule).} \\ y = 2x \text{ (on chasse les fractions).} \end{array} \end{array}$$

6. The Analyst (1874).

7. On comprend ici le choix d'avoir  $\pi_n^5 = (a-4)a(a+2)$ .

8. Ce sera notre dernière tentative de démonstration à faible empreinte cognitive.

$$\begin{aligned}
2^6 \pi_n^5 &= (y \pm 5)(y \pm 3)(y \pm 1) \\
\iff 2^6 \pi_n^5 &= (z - 25)(z - 9)(z - 1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} z = y^2 \\
\iff 2^6 \pi_n^5 &= (u - 8)(u + 8)(u + 16) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} u = z - 17 \text{ où } 17 = \frac{25 + 9}{2}.
\end{aligned}$$

Notant  $a = u - 8$ ,  $b = u + 8$  et  $c = u + 16$ , où  $u = (2n + 5)^2 - 17 \in 2\mathbb{N}$ , nous avons les faits suivants.

- $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$  car  $(2 + 5)^2 - 17 = 32$ .
- $(a, b, c) \in (\mathbb{N}_{\geq 24})^3$  avec  $abc \in {}^2\mathbb{N}$  puisque  $2^6 \pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}$ .
- $a \wedge b \mid 16$  via  $b - a = 16$ .
- $a \wedge c \mid 24$  via  $c - a = 24$ .
- $b \wedge c \mid 8$  via  $c - b = 8$ .
- En particulier,  $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$ ,  $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) \in (2\mathbb{N})^3$ .

Démontrons qu'aucun des trois entiers  $a$ ,  $b$  et  $c$  ne peut être un carré parfait.

- Commençons par supposer que  $(a, b, c) \in {}^2\mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ .

Dans ce cas,  $bc \in {}^2\mathbb{N}$  via le fait 3.1, soit  $(u + 8)(u + 16) \in {}^2\mathbb{N}$ . En posant  $w = u + 12$ , on arrive à  $(w - 4)(w + 4) \in {}^2\mathbb{N}$ , soit  $w^2 - 16 \in {}^2\mathbb{N}$ , d'où  $(w, m) = (5, 3)$  grâce au fait 3.5. Or  $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$  donne  $w \in \mathbb{N}_{\geq 20}$ , d'où une contradiction.

- Supposons maintenant que  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^* \times {}^2\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ .

Dans ce cas,  $ac \in {}^2\mathbb{N}$ , soit  $(u - 8)(u + 16) \in {}^2\mathbb{N}$ . En posant  $w = u + 4$ , on arrive à  $(w - 12)(w + 12) \in {}^2\mathbb{N}$ , soit  $w^2 - 144 \in {}^2\mathbb{N}$ . Notant  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m^2 = w^2 - 144$ , nous arrivons à  $w^2 - m^2 = 144$ , d'où  $(w, m) \in \{(13, 5), (15, 9), (20, 16), (37, 35)\}^9$ . Comme  $u \in 2\mathbb{N}$  donne  $w \in 2\mathbb{N}$ , nécessairement  $(w, m) = (20, 16)$ , mais les équivalences suivantes lèvent une contradiction.

$$\begin{aligned}
u + 4 = 20 &\iff u = 16 \\
&\iff (2n + 5)^2 - 17 = 16 \\
&\iff (2n + 5)^2 = 33 \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} 33 \notin {}^2\mathbb{N}
\end{aligned}$$

- Supposons enfin que  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times {}^2\mathbb{N}$ .

Dans ce cas,  $ab \in {}^2\mathbb{N}$ , soit  $(u - 8)(u + 8) \in {}^2\mathbb{N}$ , c'est-à-dire  $u^2 - 64 \in {}^2\mathbb{N}$ . Notant  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m^2 = u^2 - 64$ , nous arrivons à  $u^2 - m^2 = 64$ . Ceci n'est possible que si  $(u, m) \in \{(10, 6), (17, 15)\}$ . Or  $u \in \mathbb{N}_{\geq 32}$  donne une contradiction.

Donc  $a = \alpha A^2$ ,  $b = \beta B^2$  et  $c = \gamma C^2$  avec  $(A, B, C) \in (\mathbb{N}^*)^3$  et  $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathbb{N}_{sf} \cap \mathbb{N}_{>1}$ , ceci nous donnant les faits suivants.

- $\alpha \wedge \beta \in \{1, 2\}$  d'après  $a \wedge b \mid 16$ .
- $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2, 3\}$  d'après  $a \wedge c \mid 24$ .
- $\beta \wedge \gamma \in \{1, 2\}$  d'après  $b \wedge c \mid 8$ .
- $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$  car  $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$ ,  $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) \in (2\mathbb{N})^3$ .

9. Le programme reproduit après la preuve du fait 3.5 donne rapidement cet ensemble de couples.

En fait,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont différents deux à deux.

- Démontrons que  $\alpha \neq \beta$ .

Dans le cas contraire,  $16 = b - a = \alpha(B^2 - A^2)$  et  $\alpha > 1$  donnent  $B^2 - A^2 \in \{1, 2, 4, 8\}$ , puis forcément  $B^2 - A^2 = 8$  avec  $(B, A) = (3, 1)$  d'après le fait 3.5. Comme de plus,  $\alpha = 2$ , nous obtenons  $a = 2$  qui contredit  $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$ .

- Nous avons aussi  $\beta \neq \gamma$ .

Dans le cas contraire,  $8 = c - b = \beta(C^2 - B^2)$  et  $\beta > 1$  donnent  $C^2 - B^2 \in \{1, 2, 4\}$ , mais c'est impossible d'après le fait 3.5.

- Enfin,  $\alpha \neq \gamma$ .

Dans le cas contraire,  $C^2 - A^2 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$  car  $24 = c - a = \alpha(C^2 - A^2)$  et  $\alpha > 1$ . Le fait 3.5 ne laisse plus que les possibilités suivantes.

- (1)  $C^2 - A^2 = 3$  n'est possible que si  $(C, A) = (2, 1)$ . Comme de plus  $\alpha = 8$ , nous avons  $a = 8$  qui contredit  $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$ .
- (2)  $C^2 - A^2 = 8$  n'est possible que si  $(C, A) = (3, 1)$ . Comme de plus  $\alpha = 3$ , nous avons  $a = 3$  qui contredit  $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$ .
- (3)  $C^2 - A^2 = 12$  n'est possible que si  $(C, A) = (4, 2)$ . Comme de plus  $\alpha = 2$ , nous avons  $a = 8$  qui contredit  $a \in \mathbb{N}_{\geq 24}$ .

Comme  $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$ ,  $\alpha \wedge \beta \in \{1, 2\}$ ,  $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2, 3\}$  et  $\beta \wedge \gamma \in \{1, 2\}$ , et comme de plus  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont différents deux à deux, il ne nous reste plus qu'à analyser les cas suivants. La lumière est proche...

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	Statut
2	3	6	1	2	3	☒
2	6	3	2	1	3	☒
3	2	6	1	3	2	✓
3	6	2	3	1	2	☒
6	2	3	2	3	1	✓
6	3	2	3	2	1	☒

Traitions les deux cas restants en nous souvenant que  $a = u - 8$ ,  $b = u + 8$  et  $c = u + 16$ .

- Supposons  $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, 2, 6)$ , autrement dit  $a = 3A^2$ ,  $b = 2B^2$  et  $c = 6C^2$ .

Travaillons modulo 3 afin de lever une contradiction.

- (1)  $a \equiv u - 2$  et  $a \equiv 3A^2 \equiv 0$  donnent  $u \equiv 2$ .

- (2) D'autre part,  $b \equiv 2B^2 \equiv 0$  ou  $2$ . Or  $b \equiv u + 2 \equiv 1$  lève une contradiction.

- Supposons  $(\alpha, \beta, \gamma) = (6, 2, 3)$ , autrement dit  $a = 6A^2$ ,  $b = 2B^2$  et  $c = 3C^2$ .

La preuve précédente s'adapte directement car  $a \equiv 6A^2 \equiv 0$  et  $b \equiv 2B^2$  modulo 3.

□

## 9. AVEC 7 FACTEURS

**Fait 9.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^6 \notin {}^2\mathbb{N}$ .

La très jolie démonstration suivante vient d'un échange sur <https://math.stackexchange.com> (voir la section 11). Nous avons juste comblé quelques rares oublis, et apporté de petites simplifications.

*Preuve.* Supposons que  $\pi_n^6 \in {}^2\mathbb{N}$ .

Commençons par quelques observations immédiates.

- $\forall p \in \mathbb{P}_{>5}, \forall i \in \llbracket 0; 6 \rrbracket, v_p(n+i) \in 2\mathbb{N}$ .
- $\exists u \in \{0, 1, 2\}$  tel que  $\{u, u+2, u+4\} \subset 2\mathbb{N}+1$ .  
Nous avons alors  $\forall p \in \mathbb{P}_{>5} - \{2\}, (v_p(u), v_p(u+2), v_p(u+4)) \in (2\mathbb{N})^3$ . Donc, pour tout naturel  $m \in \{u, u+2, u+4\}$ , il existe  $M \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m = M^2, m = 3M^2, m = 5M^2$  ou  $m = 15M^2$ .
- Parmi les trois naturels  $u, u+2$  et  $u+4$ , ...
  - il en existe un, et un seul, divisible par 3, comme on le constate vite en raisonnant modulo 3,
  - au plus un est divisible par 5,
  - au plus un est un carré parfait d'après le fait 3.5.

Donc, il existe  $(M, P, Q) \in (\mathbb{N}^*)^3$  tel que  $\{u, u+2, u+4\} = \{M^2, 3P^2, 5Q^2\}$ . Ceci permet de considérer les trois cas suivants qui lèvent tous une contradiction.

- Supposons avoir  $u = M^2$ .
  - (1) Comme  $\{u+2, u+4\} = \{3P^2, 5Q^2\}$ , nous savons que  $3 \nmid (u+3)$  et  $5 \nmid (u+3)$ , d'où  $u+3 = 2^a T^2$  avec  $(a, T) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ .
  - (2) Modulo 4,  $u \equiv M^2 \equiv 1$  car  $u \in 2\mathbb{N}+1$ , donc  $u+3 \equiv 0$ , d'où  $a \geq 2$ .
  - (3) Modulo 8,  $u \equiv M^2 \equiv 1$  car  $u \in 2\mathbb{N}+1$ , donc  $u+3 \equiv 4$ , d'où  $a = 2$ .
  - (4) Dès lors,  $u+3 \in {}^2\mathbb{N}$ , puis  $(u+3, u) = (4, 1)$  via le fait 3.5.
  - (5) Forcément  $n = u = 1$ , mais  $v_7(\pi_1^6) = 1$  contredit  $\pi_n^6 \in {}^2\mathbb{N}$ .
- Supposons maintenant que  $u+4 = M^2$ .  
Comme  $\{u, u+2\} = \{3P^2, 5Q^2\}$ , la preuve précédente s'adapte à  $(u+1, u+4)$ .
- Supposons enfin que  $u+2 = M^2$ .  
 $\{u, u+4\} = \{3P^2, 5Q^2\}$  est impossible d'après ce qui suit en travaillant modulo 4.
  - (1) Si  $(u, u+4) = (3P^2, 5Q^2)$ , alors  $u \equiv 0$  ou  $3$ ,  $u+4 \equiv 0$  ou  $1$ , et  $u \equiv \pm 1$  se contredisent.
  - (2) Si  $(u, u+4) = (5Q^2, 3P^2)$ , on obtient une contradiction comme ci-dessus.

□

## 10. AVEC 8 FACTEURS

**Fait 10.1.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$ .

La démonstration très astucieuse suivante est proposée dans un échange sur <https://math.stackexchange.com> (voir la section 11). Comme pour le cas de quatre facteurs, l'algèbre va nous permettre d'aller très vite.

*Preuve.*

- L'une des preuves du fait 6.1 nous donne  $n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1$ . En particulier,  $(n+4)(n+5)(n+6)(n+7) = (n^2 + 11n + 29)^2 - 1$ .
- L'idée astucieuse va être de considérer les deux expressions suivantes qui viennent de  $\pi_n^7 = (f(n)^2 - 1)(g(n)^2 - 1)$ .
  - (1)  $f(n) = n^2 + 3n + 1$ .
  - (2)  $g(n) = n^2 + 11n + 29$ .

- Nous avons les manipulations algébriques naturelles suivantes.

$$\begin{aligned}
 \pi_n^7 &= (f(n)^2 - 1)(g(n)^2 - 1) \\
 &= (a^2 - 1)(b^2 - 1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} a = f(n) \text{ et } b = g(n). \\
 &= a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 \\
 &= a^2b^2 - (a - b)^2 - 2ab + 1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} \text{ Choisir } (a - b)^2 \text{ au lieu de } (a + b)^2 \text{ va nous permettre,} \\
 &= a^2b^2 - 2ab + 1 - (a - b)^2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} \text{ un plus bas, de ne pas trop nous éloigner de } \pi_n^7. \\
 &= (ab - 1)^2 - (a - b)^2 \\
 &< (ab - 1)^2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} b - a = 8n + 28 > 0.
 \end{aligned}$$

Donc  $\pi_n^7 < (f(n)g(n) - 1)^2$ .

- Le point précédent rend naturel de tenter de démontrer que  $(f(n)g(n) - 2)^2 < \pi_n^7$ , car, si tel est le cas,  $\pi_n^7$  sera encadré par les carrés de deux entiers consécutifs, et forcément nous aurons  $\pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$ . Ce qui suit montre que notre pari est gagnant dès que  $n \geq 4$ . Que c'est joli !

$$\begin{aligned}
 &(f(n)g(n) - 2)^2 < \pi_n^7 \\
 \iff &(ab - 2)^2 < (a^2 - 1)(b^2 - 1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} a = f(n) \text{ et } b = g(n). \\
 \iff &a^2b^2 - 4ab + 4 < a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 \\
 \iff &a^2 + b^2 - 4ab + 3 < 0
 \end{aligned}$$

Le site <https://www.wolframalpha.com> nous donne sans effort cognitif<sup>10</sup> ce qui suit (les « transhumanophobes » se reporteront à la remarque qui suit).

$$\begin{aligned}
 &a^2 + b^2 - 4ab + 3 \\
 &= -2(n^2 + 7n)^2 + 36(n^2 + 7n) + 729 \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} m = n^2 + 7n \\
 &= -2m^2 + 36m + 729 \\
 &= 2(m - 9)^2 + 891
 \end{aligned}$$

Or,  $n^2 + 7n - 9 = 0$  admet pour unique racine positive  $n = \frac{-7 + \sqrt{85}}{2} \approx 1,1$ , donc  $a^2 + b^2 - 4ab + 3$  décroît en fonction de  $n$  à partir de  $n = 2$ . Les calculs suivants donnent alors que  $a^2 + b^2 - 4ab + 3 < 0$  pour  $n \geq 4$ .

10. Il faut vivre avec son temps...

$n$	1	2	3	4
$-2(n^2 + 7n)^2 + 36(n^2 + 7n) + 729$	889	729	9	-1559

- Nous venons de voir que  $(ab - 2)^2 < \pi_n^7 < (ab - 1)^2$  sur  $\mathbb{N}_{\geq 4}$ , donc  $\pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$  dès que  $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ , mais pour  $n \in \{1, 2, 3\}$ ,  $v_7(\pi_n^7) = 1$  donne  $\pi_n^7 \notin {}^2\mathbb{N}$ , ce qui permet de conclure.

□

**Remarque 10.1.** *Voici comment obtenir une preuve 100 % non silliconé. Pour cela, commençons par les manipulations algébriques naturelles suivantes qui cherchent à obtenir le même coefficient pour  $n$  dans chaque parenthèse, tout en passant d'un polynôme de degré 8 à un polynôme de degré 4.*

$$\begin{aligned}
\pi_n^7 &= n(n+7) \cdot (n+1)(n+6) \cdot (n+2)(n+5) \cdot (n+3)(n+4) \\
&= (n^2 + 7n) \cdot (n^2 + 7n + 6) \cdot (n^2 + 7n + 10) \cdot (n^2 + 7n + 12) \\
&= m(m+6)(m+10)(m+12) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} m = n^2 + 7n
\end{aligned}$$

Nous décidons d'offrir un 1<sup>er</sup> rôle à la variable  $m = n^2 + 7n$ . Voyons où cela nous mène...

$$\begin{aligned}
&a^2 + b^2 - 4ab + 3 \\
&= a(a - 4b) + b^2 + 3 \\
&= (m - 4n + 1)(-3m - 20n - 115) + (m + 4n + 29)^2 + 3 \quad \left. \begin{array}{l} a = n^2 + 3n + 1 = m - 4n + 1 \\ b = n^2 + 11n + 29 = m + 4n + 29 \end{array} \right\} \\
&= -3m^2 - (8n + 118)m + (4n - 1)(20n + 115) + m^2 + 2(4n + 29)m + (4n + 29)^2 + 3 \\
&= -2m^2 - 60m + 729 + 672n + 96n^2 \\
&= -2m^2 - 60m + 729 + 96(n^2 + 7n) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Là, cela devient magique !} \\
&= -2m^2 - 60m + 729 + 96m \\
&= -2m^2 + 36m + 729
\end{aligned}$$

## 11. SOURCES UTILISÉES

**Fait 7.1.**

- Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré «  $n(n+1)\dots(n+k)$  est un carré ? » sur le site [lesmathematiques.net](https://lesmathematiques.net).

*La démonstration via le principe des tiroirs trouve sa source dans cet échange.*

- L'article « *Le produit de 5 entiers consécutifs n'est pas le carré d'un entier.* » de T. Hayashi, Nouvelles Annales de Mathématiques, est consultable via Numdam, la bibliothèque numérique française de mathématiques.

*Cet article a fortement inspiré la longue preuve.*

**Fait 8.1.**

Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré « *product of six consecutive integers being a perfect numbers* » sur le site <https://math.stackexchange.com>.

*La courte démonstration est donnée dans cet échange. Vous y trouverez aussi un très joli argument basé sur les courbes elliptiques rationnelles.*

**Fait 9.1.**

Un échange consulté le 3 février 2024, et titré « *Proof that the product of 7 successive positive integers is not a square* » sur le site <https://math.stackexchange.com>.

*La courte démonstration est donnée dans cet échange, mais certaines justifications manquent.*

**Fait 10.1.**

Un échange consulté le 4 février 2024, et titré « *How to prove that the product of eight consecutive numbers can't be a number raised to exponent 4 ?* » sur le site <https://math.stackexchange.com>.

*La démonstration astucieuse vient de l'une des réponses de cet échange, mais la justification des deux inégalités n'est pas donnée.*