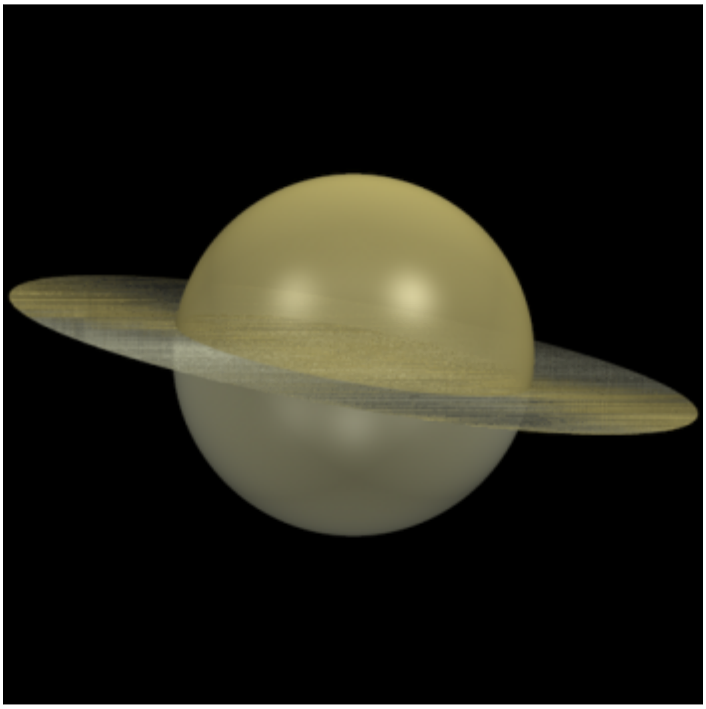
IMAGES DES MATHÉMATIQUES

Ressources pédagogiques : « pour aller moins loin » *(-Ressources-pedagogiques-pour-aller-moins-loin-.html)*

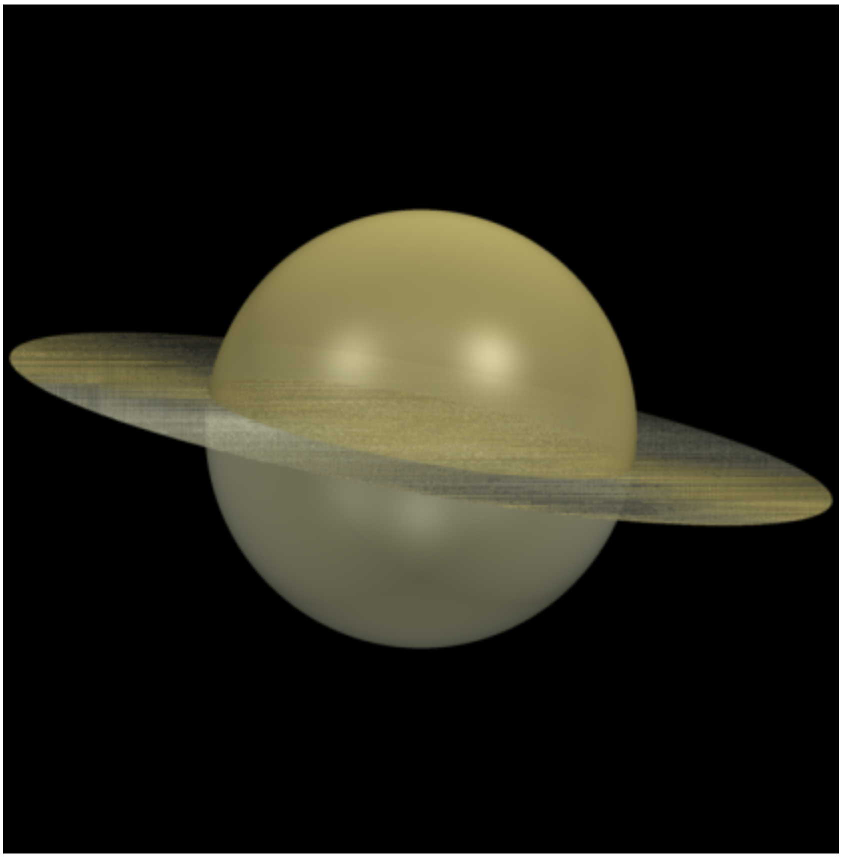
# S'IL VOUS PLAÎT... DESSINE-MOI UNE PLANÈTE !

Piste bleue *(spip.php?page=mot&id_mot=21)* Le *9 août 2021* - Ecrit par Julie Levrault *(_Julie-Levrault_.html)*



**Comment un·e mathématicien·ne fait-il (ou fait-elle) pour dessiner Saturne ?**

Sait-on jamais. Si l'on tombait en panne dans le désert et que l'on était réveillés par un petit bonhomme tout à fait extraordinaire qui voudrait que nous lui dessinions une planète, il faudrait que nous soyons prêts ! Disons que ce petit bonhomme nous demande de lui dessiner Saturne. D'un point de vue mathématique, Saturne n'est guère plus qu'une sphère avec un plan qui la traverse en son milieu, comme cela :



Mais alors comment fait-on pour dessiner cela par ordinateur ? Nous allons ici utiliser le logiciel Surfer *(https://imaginary.org/program/surfer)*, qui est téléchargeable gratuitement sur le site imaginary *(https://imaginary.org/)*. Comme expliqué sur ce même site, « avec SURFER, vous pouvez appréhender de manière interactive le lien entre les formules et les formes, autrement dit entre l'art et les mathématiques. Vous pouvez écrire des équations simples qui produisent de belles images représentant des surfaces dans l'espace. » Avec Surfer, il suffit d'écrire une équation polynomiale en trois variables, par exemple

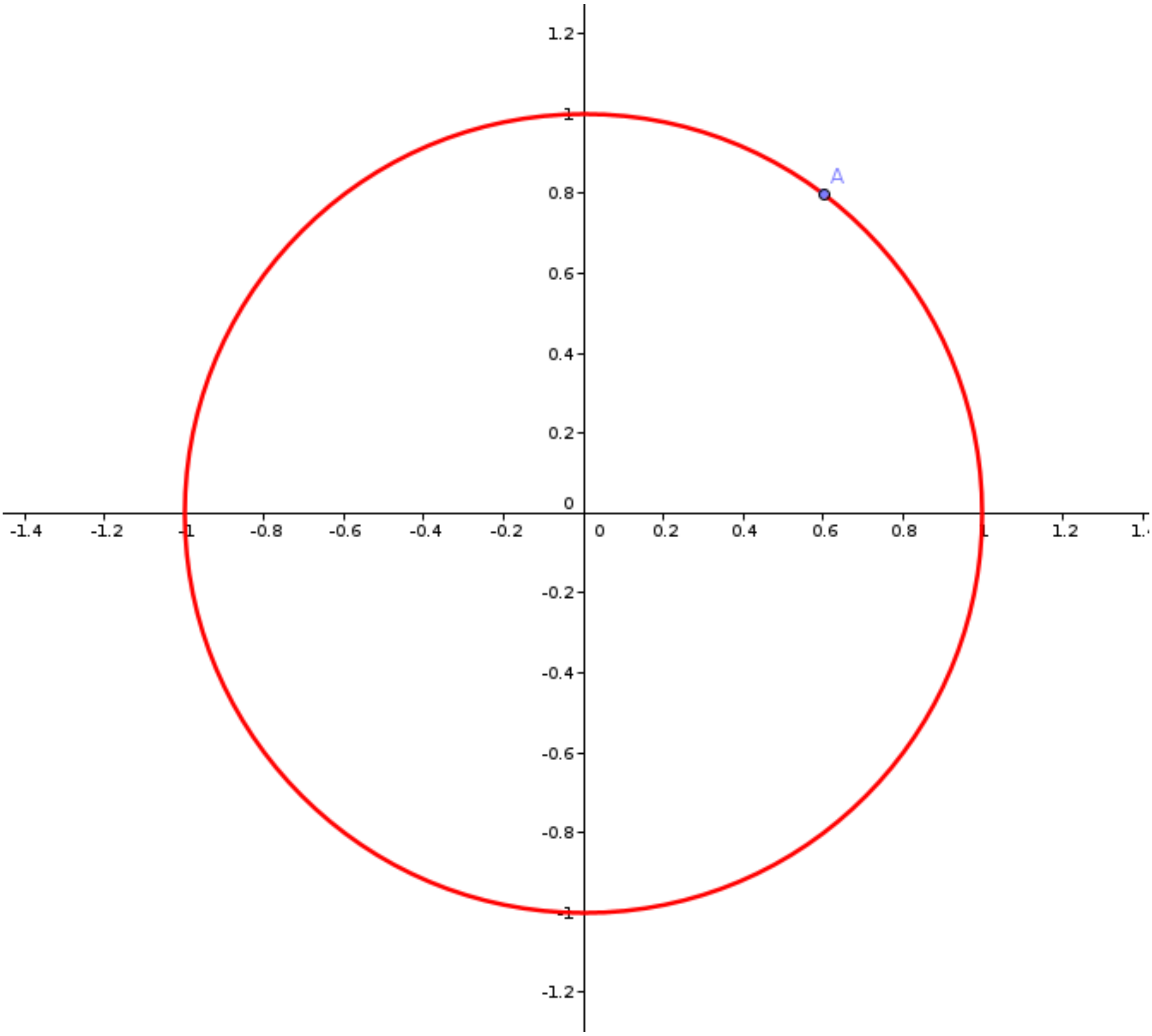
$$(x^2 + y^3 + z^3) * (y + z) = 0$$

et Surfer nous dessine les points de l'espace qui vérifient cette équation, c'est-à-dire Surfer dessine la surface d'équation $(x^2 + y^3 + z^3) * (y + z) = 0$. Vous avez une idée de ce à quoi cela ressemble ? Non ? Alors regardez :

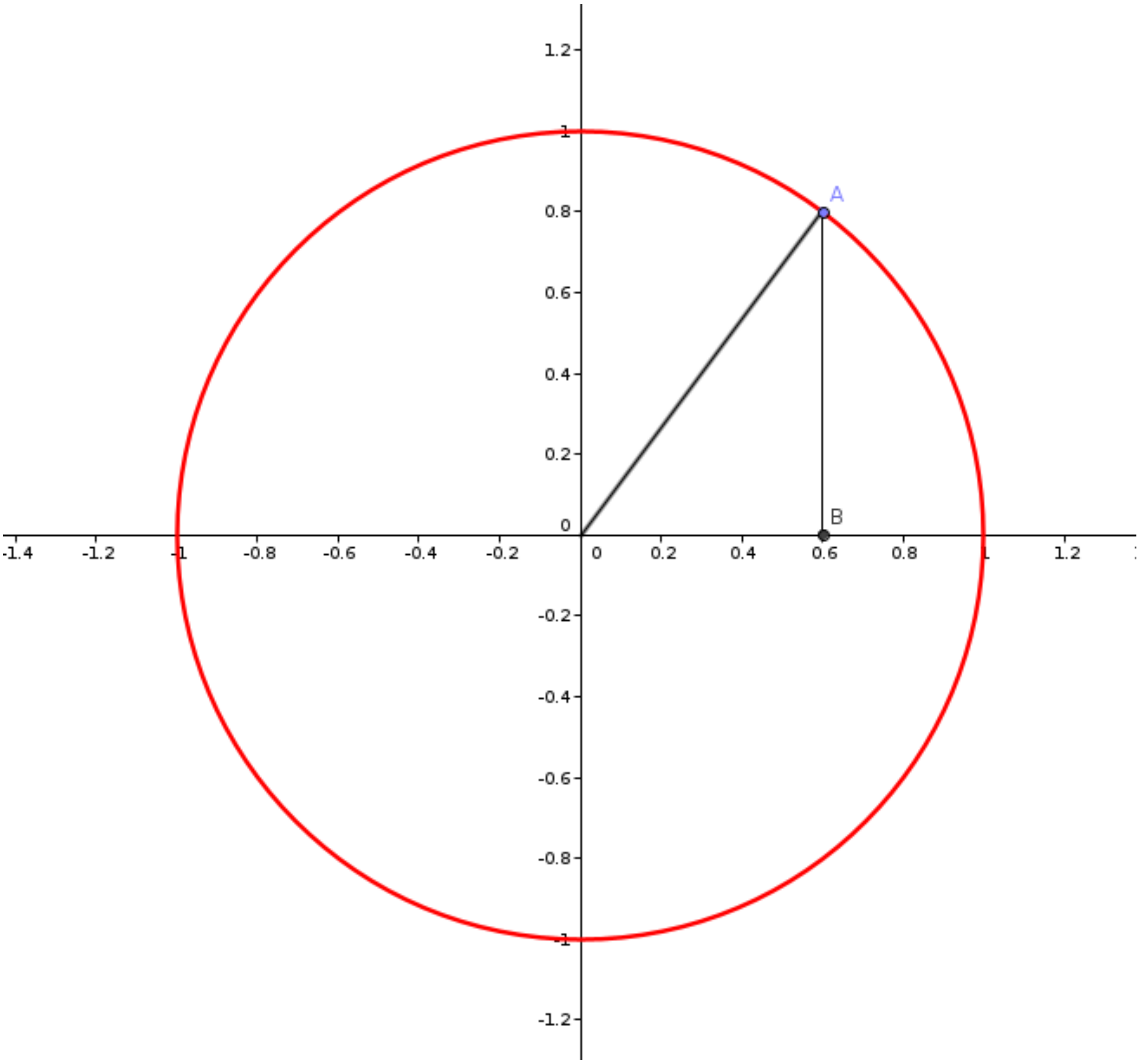
Ce n'est bien sûr pas un chapeau ! C'est un serpent boa qui digère un éléphant. Du coup, pour notre petit bonhomme, il nous faut trouver l'équation de Saturne ! Pour commencer, nous allons avoir besoin de l'équation de la sphère. Généralement, au lycée on nous la fait apprendre par cœur, en nous disant « C'est comme le cercle mais avec une variable en plus ! ». Et généralement, les lycéens ne se demandent pas pourquoi l'équation que l'on nous donne est réellement l'équation d'une sphère. Ici nous allons démontrer quelle est cette équation. Tout d'abord, pour ceux qui ne se rappellent plus, voici ici l'explication de l'équation du cercle :

Équation du cercle. *(javascript:;)*

> *Cherchons l'équation du cercle unité, c'est-à-dire du cercle centré en l'origine et de rayon 1. Une fois que l'on comprend comment trouver cette équation, il n'est pas difficile de la généraliser aux cercles centrés en un point quelconque et de rayon quelconque. Nous avons donc le cercle unité, et disons un point sur ce cercle :*

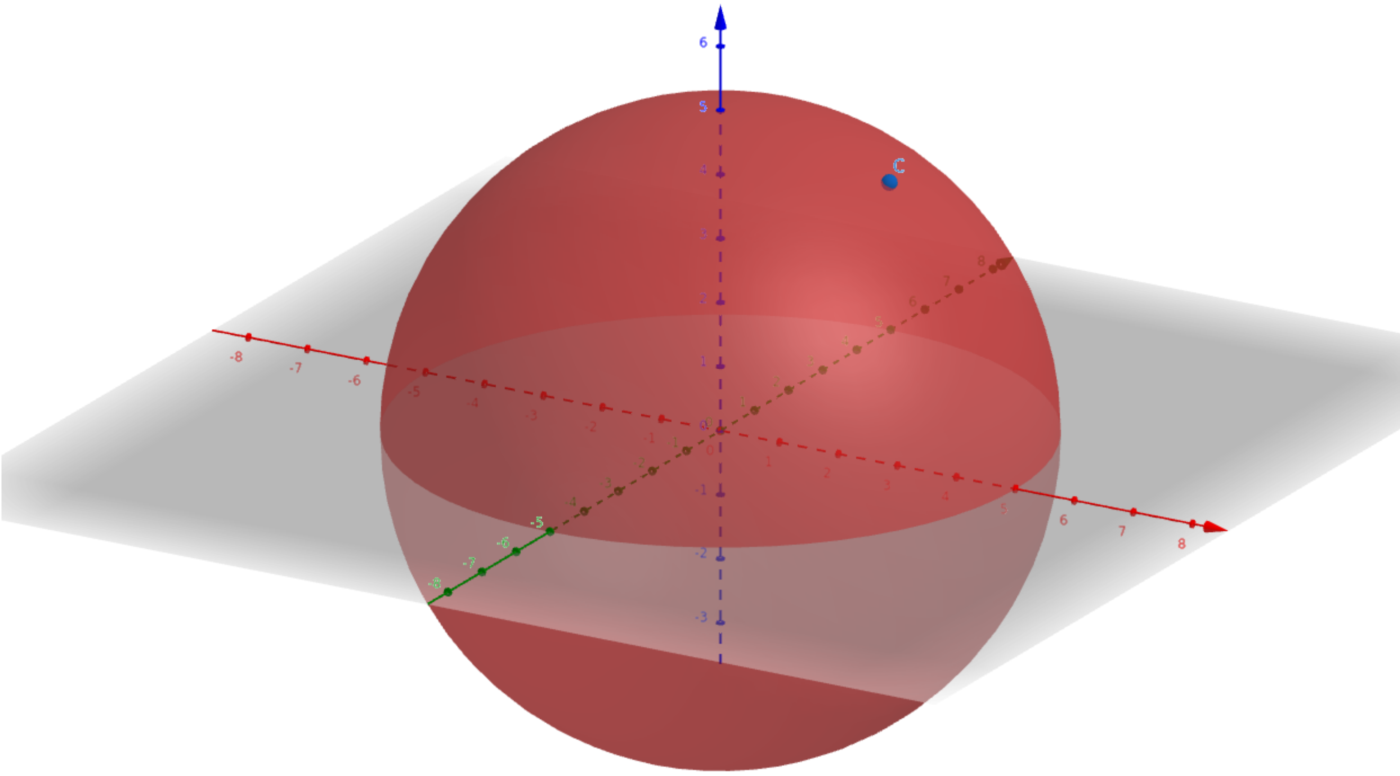



*Un point de coordonnées $(x, y)$ est sur ce cercle si et seulement si il est à une distance 1 du centre, c'est-à-dire de l'origine. Donc un point A est sur ce cercle si est seulement si OA=1. Maintenant si l'on projette A sur l'axe des abscisses, comme sur le dessin :*



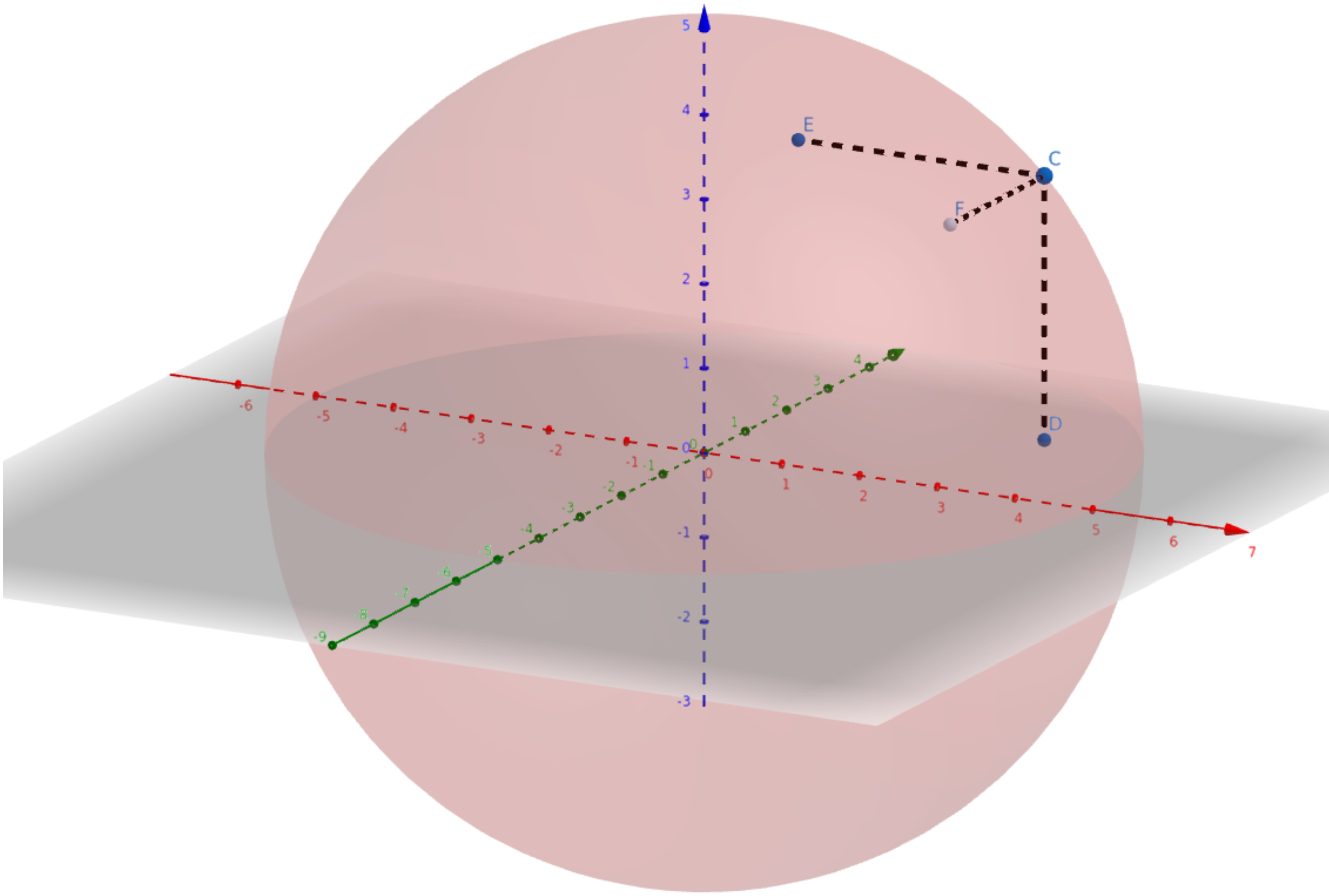

*Nous avons que AB=y et OB=x. Par le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OBA, nous avons qu'un point est sur le cercle si et seulement si* $x^2 + y^2 = 1$*, c'est l'équation du cercle.*

Prenons donc une sphère, disons centrée en l'origine, et de rayon 5. Si l'on comprend comment trouver cette équation, il n'est ensuite pas difficile de généraliser aux centres et rayons quelconques. Prenons un point C de coordonnées $(x, y, z)$ sur cette sphère.



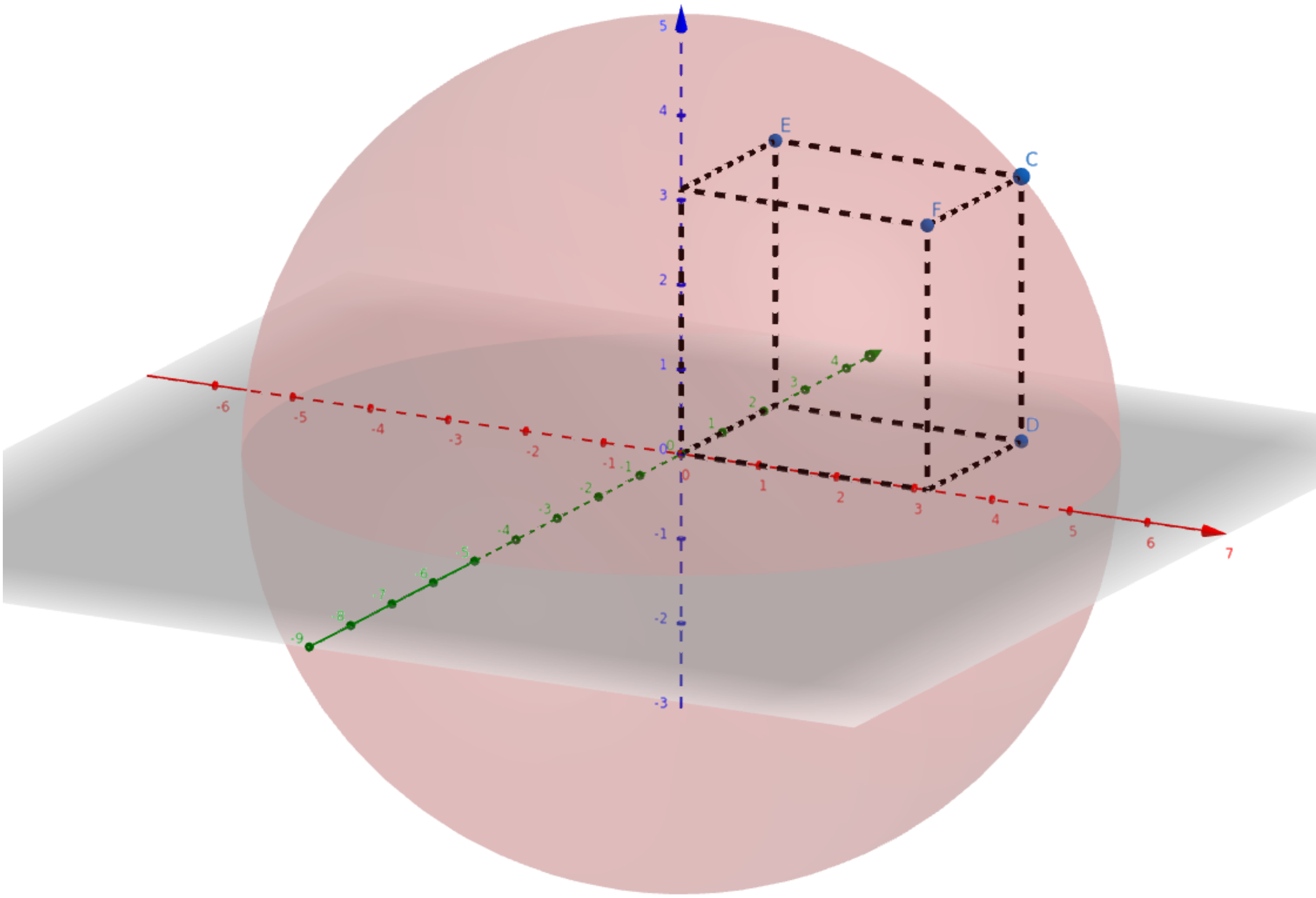

Un point est sur la sphère si et seulement si la distance entre l'origine et ce point est égale au rayon, soit 5, autrement dit ici si et seulement si OC=5.

Projetons le point C sur les trois plans définis par les axes de coordonnées. Nous avons donc le projeté D de C sur le plan défini par les axes (Ox) et (Oy) (les axes rouge et vert), le projeté E de C sur le plan défini par les axes (Oy) et (Oz) (les axes vert et bleu) et le projeté F de C sur le plan défini par les axes (Ox) et (Oz) (les axes rouge et bleu). Donc les coordonnées de D sont (x,y,0), celles de E sont (0,y,z) et celles de F sont (x,0,z).

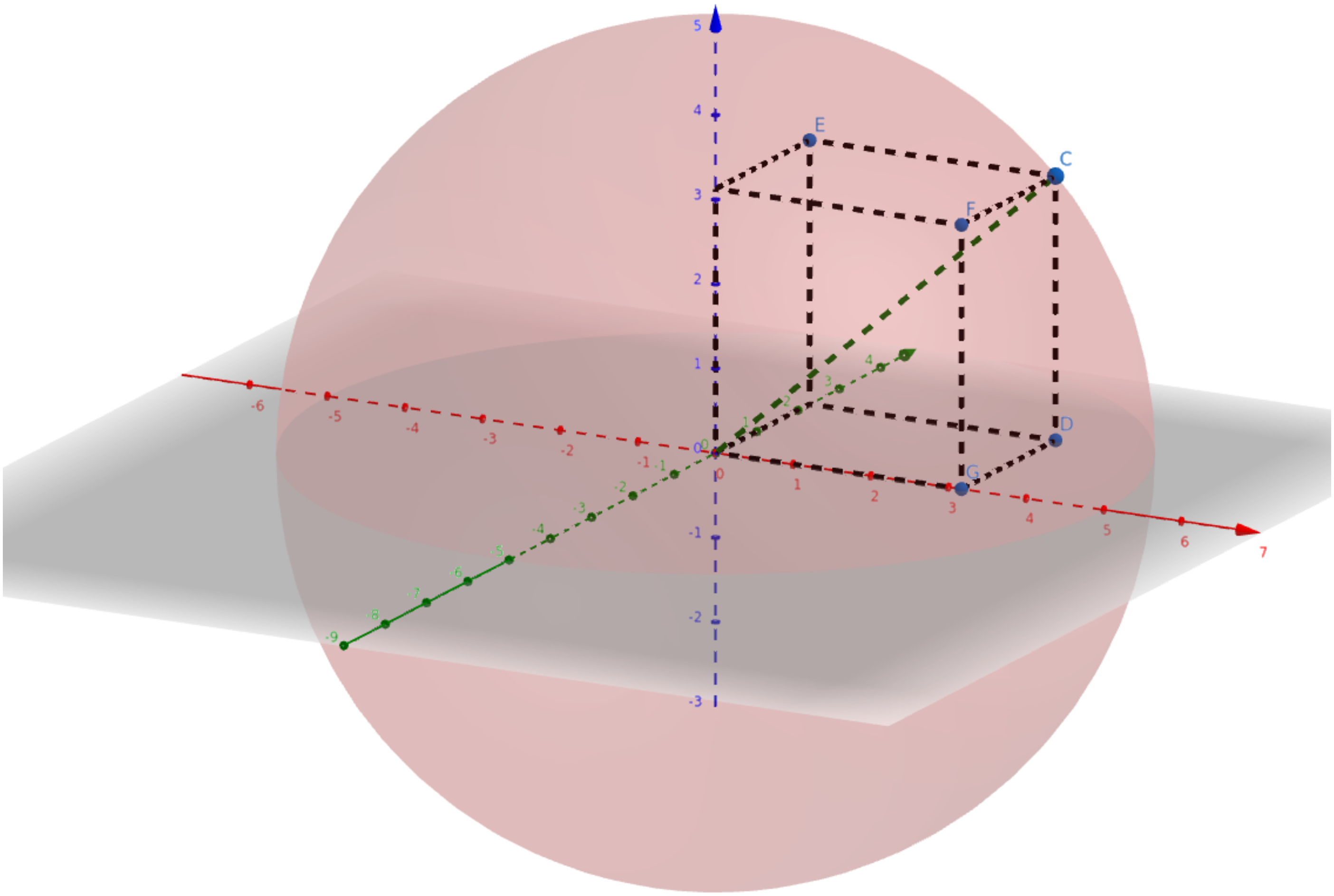



De plus, le segment [DC] est de longueur z, le segment [EC] de longueur x et [FC] est de longueur y.

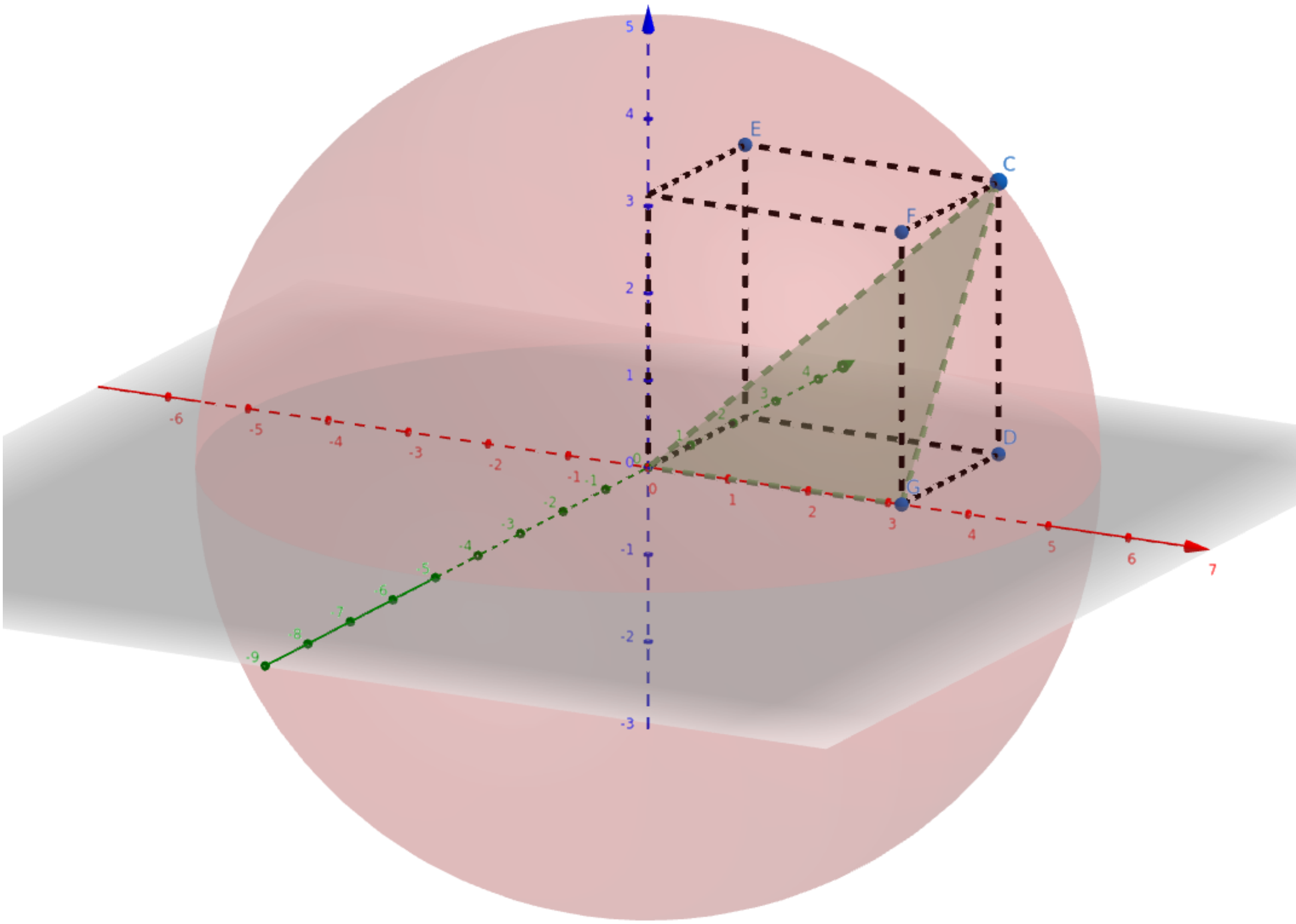
La beauté de la démonstration est que les points O, C, D, E et F nous définissent un pavé droit ! Comme vous pouvez le voir sur le dessin :




Maintenant puisque le point C est sur la sphère si et seulement si OC=5, traçons le segment [OC] et appelons également G le quatrième point de la face du pavé formée par C, F et D.



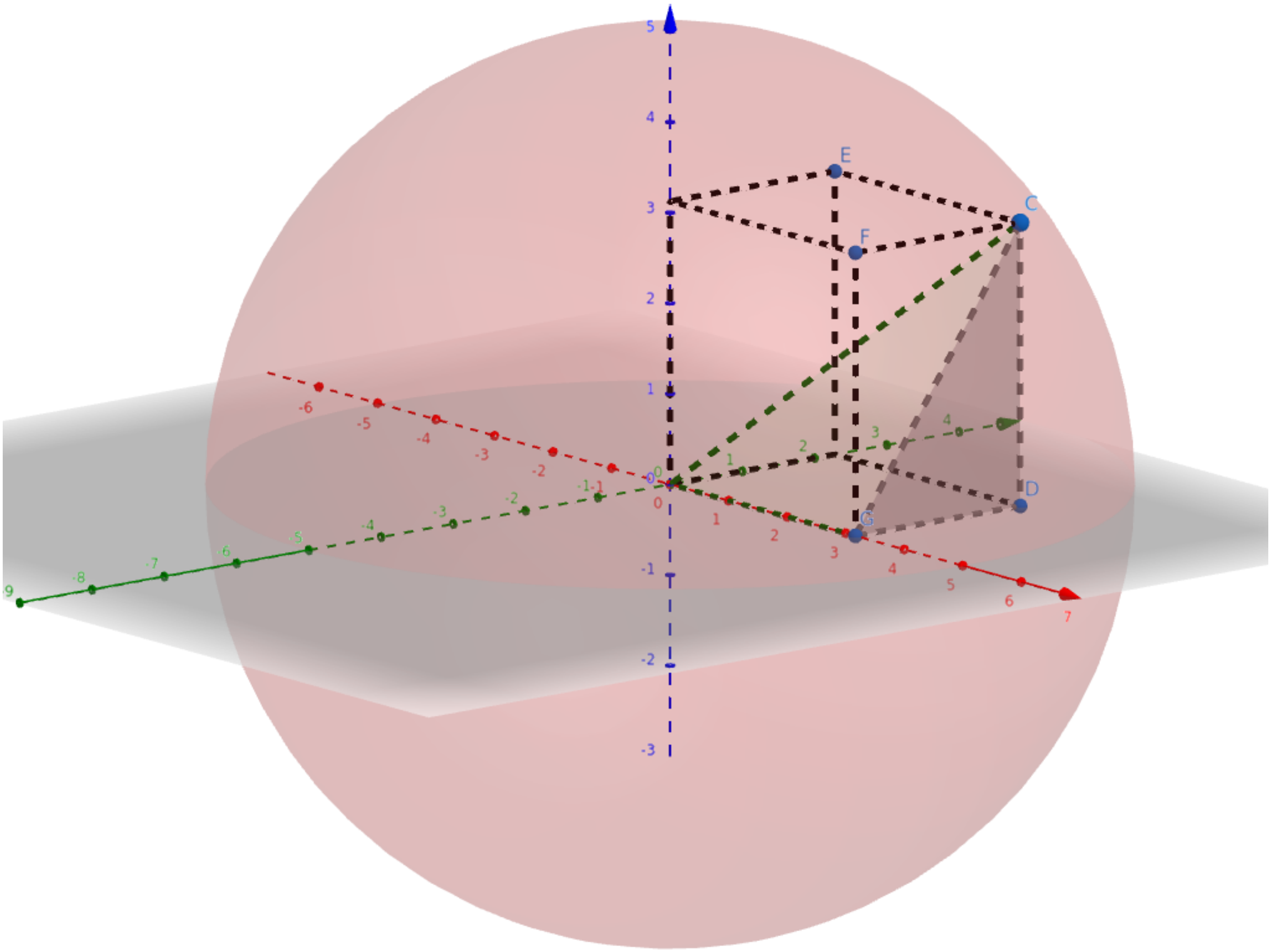

Maintenant concentrons nous sur le triangle OCG. C'est un triangle rectangle en G (la face formée par CDGF est orthogonale au segment [OG]).




Nous savons que l’hypoténuse de ce triangle est le segment [OC] qui mesure 5. Le segment [OG] est de même longueur que le segment [EC], donc il mesure x.

En appliquant le théorème de Pythagore, nous avons que $x^2 + CG^2 = 5^2$.

Mais que vaut $CG^2$ ? Bien, pour cela nous nous concentrons sur la face CFGD de notre pavé droit, CG est la diagonale, donc CDG est un triangle rectangle en D !




Le segment [DG] est de même longueur que [FC], donc il mesure y. Le segment [DC] quant à lui mesure z.

On applique donc le théorème de Pythagore dans le triangle CDG et nous obtenons que $CG^2 = y^2 + z^2$.

Nous avons donc les deux équations :

$$x^2 + CG^2 = 5^2$$

$$CG^2 = y^2 + z^2$$

On remplace donc $CG^2$ dans la première équation par sa valeur dans la deuxième et nous obtenons :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$$

.

C'est une condition nécessaire et suffisante ! Un point C de coordonnées $(x, y, z)$ est sur la sphère centrée à l'origine de rayon 5 si et seulement si $x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$.

C'est l'équation de la sphère !

Notons que nous venons de redémontrer une généralisation du théorème de Pythagore : « Dans un pavé droit, le carré de la grande diagonale est égal à la somme des carrés des dimensions du pavé ».

Bien, maintenant nous avons notre équation de la sphère, nous avons donc une planète « quelconque » de notre système solaire, mais notre petit bonhomme extraordinaire voulait lui que nous lui dessinions Saturne ! Saturne a une particularité, ses anneaux ! Donc nous ne voulons pas dessiner une sphère, nous voulons dessiner une sphère avec un plan qui la coupe en son milieu. L'équation d'un plan qui traverse notre sphère (qui est centrée en l'origine) en son milieu est, par exemple, $y = 0$.

Bien, un point est sur Saturne s'il est soit sur la sphère, soit sur le plan. Donc soit ses coordonnées vérifient l'équation de la sphère, soit elles vérifient celle du plan. Ainsi un point $(x, y, z)$ est sur Saturne si et seulement si $x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$ ou $y = 0$.

Autrement dit, un point $(x, y, z)$ est sur Saturne si et seulement si $x^2 + y^2 + z^2 - 5^2 = 0$ ou $y = 0$. Mais pour dessiner Saturne avec Surfer, nous avons dit qu'il nous fallait UNE équation, et nous en avons deux !

Mais un produit $A \times B = 0$ si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$, donc nos deux équations n'en feront qu'une si nous les multiplions !

Donc si nous dessinons les points de l'espace qui vérifient l'équation :

$$y(x^2 + y^2 + z^2 - 5^2) = 0$$

nous aurons exactement les points qui vérifient $y = 0$ (c'est-à-dire le plan) et ceux qui vérifient $x^2 + y^2 + z^2 - 5^2 = 0$ (c'est-à-dire la sphère).

Pour rendre donc heureux notre petit bonhomme, il suffit de lui écrire l'équation $y(x^2 + y^2 + z^2 - 5^2) = 0$, et il verra alors Saturne apparaître sous ses yeux !

Nota Bene : un plan est comme un « rectangle infini », ce n'est pas du tout comme le disque (un disque est un cercle plein) qui représente ici les anneaux de Saturne. En fait, puisque Surfer ne peut pas nous montrer l'infini, et qu'il a besoin de nous montrer les choses « dans une boîte », il ne nous montre qu'une partie du dessin, et en fait Surfer nous montre le dessin qui est compris dans une certaine boule (une boule est une sphère pleine), c'est pourquoi nous voyons ici le plan comme un disque, et que de fait cela représente bien Saturne.

**Post-scriptum :**

La rédaction d'Images des maths et l'auteure remercient les relecteurs Frédéric et Mario pour leurs commentaires et remarques qui ont permis d'améliorer l'article.

Article édité par Andrés Navas *(_Navas-Andres_.html)*