BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS – UNE MÉTHODE EFFICACE

CHRISTOPHE BAL

Document, avec son source LaTeX, disponible sur la page
`https://github.com/bc-writing/drafts`.

Mentions « légales »

Table des matières

Date : 25 Jan. 2024 – 10 Fév. 2024.

1. Ce qui nous intéresse

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers »[1], Paul Erdős démontre que pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit de $(k+1)$ entiers consécutifs $n(n+1) \cdots (n+k)$ n'est jamais le carré d'un entier. Plus précisément, l'argument général de Paul Erdős est valable pour $k + 1 \geq 100$, soit à partir de 100 facteurs.

Il est facile de trouver sur le web des preuves à la main de $n(n+1) \cdots (n+k) \notin {}^2_*\mathbb{N}$ pour $k \in [\![1\,;7]\!]$. Bien que certaines de ces preuves soient très sympathiques, leur lecture ne fait pas ressortir de schéma commun de raisonnement. Dans ce document, nous allons tenter de limiter au maximum l'emploi de fourberies déductives en présentant une méthode très élémentaire[2], efficace, et semi-automatisable, pour démontrer, avec peu d'efforts cognitifs, les premiers cas d'impossibilité.

2. Notations utilisées

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- $\forall (n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^{k-1} (n+i)$.
  Par exemple, $\pi_n^1 = n$, $\pi_n^2 = n(n+1)$ et $\pi_{n+2}^4 = (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$.
- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des carrés parfaits. On note aussi ${}^2_*\mathbb{N} = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
  $\mathbb{N}_{sf}$ est l'ensemble des naturels non nuls sans facteur carré[3].
- $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
  $\forall (p\,; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p-adique de n, c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n, contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.
- $\mathbb{N}_{sc}^r$ désigne l'ensemble des suites finies strictement croissantes de r entiers naturels.
  $\mathbb{P}_{sc}^r$ désigne l'ensemble des suites finies strictement croissantes de r nombres premiers.
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m.
- $2\,\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
  $2\,\mathbb{N} + 1$ est l'ensemble des nombres naturels impairs.

3. Les carrés parfaits

3.1. Structure.

Fait 3.1. *$\forall n \in {}^2_*\mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$.*

Démonstration. Immédiat à valider. □

Fait 3.2. *$\forall n \in {}^2_*\mathbb{N}$, s'il existe $m \in {}^2_*\mathbb{N}$ tel que $n = fm$ alors $f \in {}^2_*\mathbb{N}$.*

Démonstration. $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(fm) \in 2\mathbb{N}$, $v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(fm) = v_p(f) + v_p(m)$ donnent $v_p(f) \in 2\mathbb{N}$. □

3.2. Distance entre deux carrés parfaits.

Fait 3.3. *Soit $(N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $N > M$.*

(1) $N^2 - M^2 \geq 2N - 1$.

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).
2. Cette méthode s'appuie sur une représentation trouvée dans un message archivé : voir la section 8.
3. En anglais, on dit « square free ».

(2) Notons nb_{sol} le nombre de solutions $(N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de $N^2 - M^2 = \delta$.

Pour $\delta \in [\![1 ; 100]\!]$, nous avons :

(a) $nb_{sol} = 0$ *si* $\delta \in \{1, 2, 4, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, 54, 58, 62, 66, 70, 74, 78, 82, 86, 90, 94, 98\}$.

(b) $nb_{sol} = 1$ *si* $\delta \in \{3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 16, 17, 19, 20, 23, 25, 28, 29, 31, 36, 37, 41, 43, 44, 47, 49, 52, 53, 59, 61, 67, 68, 71, 73, 76, 79, 83, 89, 92, 97, 100\}$.

(c) $nb_{sol} = 2$ *si* $\delta \in \{15, 21, 24, 27, 32, 33, 35, 39, 40, 51, 55, 56, 57, 60, 64, 65, 69, 77, 81, 84, 85, 87, 88, 91, 93, 95\}$.

(d) $nb_{sol} = 3$ *si* $\delta \in \{45, 48, 63, 72, 75, 80, 99\}$.

(e) $nb_{sol} = 4$ *si* $\delta = 96$.

Démonstration.

(1) Comme $N - 1 \geq M$, nous obtenons : $N^2 - M^2 \geq N^2 - (N-1)^2 = 2N - 1$.

(2) Le point précédent permet d'utiliser le programme `Python` suivant afin d'obtenir rapidement les longues listes de nombres indiquées.

```python
from collections import defaultdict
from math import sqrt, floor

def sol(diff):
    solfound = []

    for i in range(1, (diff + 1) // 2 + 1):
        tested = i**2 - diff

        if tested < 0:
            continue

        tested = floor(sqrt(i**2 - diff))

        if tested == 0:
            continue

        if tested**2 == i**2 - diff:
            solfound.append((i, tested))

    return solfound

all_nbsol = defaultdict(list)

for d in range(1, 101):
    all_nbsol[len(sol(d))].append(d)

print(all_nbsol)
```

□

4. Prenons du recul

4.1. Les sf-tableaux.

L'idée de départ est simple : d'après le fait 3.2, il semble opportun de se concentrer sur les diviseurs sans facteur carré des k facteurs $(n+i)$ de $\pi_n^k = n(n+1)\cdots(n+k-1)$.

Définition 4.1. *Considérons* $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(a_i)_{0\leq i\leq k} \subset \mathbb{N}_{sf}$ *et* $(s_i)_{0\leq i\leq k} \subset {}^2_*\mathbb{N}$ *tels que* $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$, $n+i = a_i s_i$. *Cette situation est résumée par le tableau suivant que nous nommerons « sf-tableau »*[4].

$n+\bullet$	0	1	2	$\dots$	k
	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_k

Exemple 4.1. *Supposons avoir le sf-tableau suivant où* $n \in \mathbb{N}^*$.

$n+\bullet$	0	1	2	3
	2	5	6	1

Ceci résume la situation suivante.

- $\exists A \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n = 2A^2$.
- $\exists B \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n+1 = 5B^2$.
- $\exists C \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n+2 = 6C^2$.
- $\exists D \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n+3 = D^2$.

Définition 4.2. *Soient* $r \in \mathbb{N}^*$, $(n_i)_{1\leq i\leq r} \in \mathbb{N}_{sc}^r$, $(a_i)_{1\leq i\leq r} \subset \mathbb{N}_{sf}$ *et* $(s_i)_{1\leq i\leq r} \subset {}^2_*\mathbb{N}$ *tels que* $\forall i \in [\![1\,;r]\!]$, $n_i = a_i s_i$. *Cette situation est résumée par le tableau suivant que nous nommerons « sf-tableau généralisé »* .

$\bullet$	n_1	n_2	n_3	$\dots$	n_r
	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_r

4.2. Construire des sf-tableaux.

Pour fabriquer des sf-tableaux, nous allons « multiplier » des sf-tableaux dits partiels.

Définition 4.3. *Soient* $(n,k,r) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $(p_j)_{1\leq j\leq r} \in \mathbb{P}_{sc}^r$, $(\epsilon_{i,j})_{0\leq i\leq k\,,1\leq j\leq r} \subseteq \{0,1\}$ *et aussi* $(f_i)_{0\leq i\leq k} \subset \mathbb{N}^*$ *vérifiant les conditions suivantes.*

- $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$, $n+i = f_i \cdot \prod_{j=1}^{r} p_j^{v_{p_j}(n+i)}$. *Noter que* $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$, $\forall j \in [\![1\,;r]\!]$, $f_i \wedge p_j = 1$.
- $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$, $\forall j \in [\![1\,;r]\!]$, $v_{p_j}(n+i) \equiv \epsilon_{i,j}$ *modulo* 2 .

Cette situation est résumée par le tableau suivant qui sera nommé « sf-tableau partiel » , voire « sf-tableau partiel d'ordre $(p_j)_{1\leq j\leq r}$ *»*[5].

$n+\bullet$	0	1	2	$\dots$	k
$(p_j)_{1\leq j\leq r}$	$\prod_{j=1}^{r} p_j^{\epsilon_{0,j}}$	$\prod_{j=1}^{r} p_j^{\epsilon_{1,j}}$	$\prod_{j=1}^{r} p_j^{\epsilon_{2,j}}$	$\dots$	$\prod_{j=1}^{r} p_j^{\epsilon_{k,j}}$

Exemple 4.2. *Supposons avoir le sf-tableau partiel suivant où* $n \in \mathbb{N}^*$.

$n+\bullet$	0	1	2	3
$(2,3)$	2	6	1	3

4. « sf » est pour « square free » .
5. Noter que $\forall i \in [\![0\,;k]\!]$, $\forall j \in [\![1\,;r]\!]$, $p_j^{\epsilon_{i,j}} \in \{1, p_j\}$.

Ceci résume la situation suivante.

- $\exists(a,\alpha,A) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $A \wedge 6 = 1$ *et* $n = 2^{2a+1}3^{2\alpha}A$.
- $\exists(b,\beta,B) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $B \wedge 6 = 1$ *et* $n+1 = 2^{2b+1}3^{2\beta+1}B$.
- $\exists(c,\gamma,C) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $C \wedge 6 = 1$ *et* $n+2 = 2^{2c}3^{2\gamma}C$.
- $\exists(d,\delta,D) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $D \wedge 6 = 1$ *et* $n+3 = 2^{2d}3^{2\delta+1}D$.

Exemple 4.3. *La multiplication de deux* sf*-tableaux partiels est « naturelle » lorsqu'elle porte sur des suites* $(p_j)_{1\leq j\leq r} \in \mathbb{P}^r_{sc}$ *et* $(q_j)_{1\leq j\leq s} \in \mathbb{P}^s_{sc}$ *d'intersection vide, c'est-à-dire sans nombre premier commun.*

Considérons les deux sf*-tableaux partiels suivants où l'on note* 2 *et* 3 *au lieu de* (2) *et* (3) .

$n+\bullet$	0	1	2	3
2	1	2	1	2

$n+\bullet$	0	1	2	3
3	3	1	1	3

La multiplication de ces sf*-tableaux partiels est le* sf*-tableau suivant, partiel a priori, mais si l'on sait que* 2 *et* 3 *sont les seuls diviseurs premiers de* π_n^4 *, alors le* sf*-tableau est non partiel.*

$n+\bullet$	0	1	2	3
$(2,3)$	3	2	1	6

Ceci résume la situation suivante qui est équivalente à ce que donne la conjonction des deux premiers sf*-tableaux partiels (les abus de notations sont évidents).*

- $A \wedge 6 = 1$ *et* $n = 2^{2a}3^{2\alpha+1}A$.
- $B \wedge 6 = 1$ *et* $n+1 = 2^{2b+1}3^{2\beta}B$.
- $C \wedge 6 = 1$ *et* $n+2 = 2^{2c}3^{2\gamma}C$.
- $D \wedge 6 = 1$ *et* $n+3 = 2^{2d+1}3^{2\delta+1}D$.

5. Structure des sf-tableaux

5.1. A propos des sf-tableaux partiels.

Fait 5.1. *Dans la deuxième ligne d'un* sf*-tableau partiel d'ordre* p *, les positions des valeurs* p *sont congrues modulo* p *.*

Démonstration. Penser aux multiples de p . □

Fait 5.2. $\forall(n,k,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \times \mathbb{P}$ *, si* $\pi_n^k \in {}^2\mathbb{N}$ *, alors dans le* sf*-tableau partiel d'ordre* p *associé à* π_n^k *, le nombre de valeurs* p *est forcément pair.*

Démonstration. Évident, mais très pratique, comme nous le verrons dans la suite. □

5.2. A propos des sf-tableaux non partiels.

Fait 5.3. *Dans les tableaux ci-dessous, où* $k \geq 2$ *, les puces* $\bullet$ *indiquent des valeurs quelconques.*

(1) *Si nous avons un* sf*-tableau du type suivant, alors* $\pi_n^{k-1} \in {}^2_*\mathbb{N}$.

$n+\bullet$	0	1	...	$k-1$	k
	$\bullet$	$\bullet$	...	$\bullet$	1

(2) *Si nous avons un* sf*-tableau du type suivant, alors* $\pi_{n+1}^{k-1} \in {}^2_*\mathbb{N}$.

$n+\bullet$	0	1	...	$k-1$	k
	1	$\bullet$	...	$\bullet$	$\bullet$

Démonstration. Immédiat via le fait 3.2, car nous avons soit $n+k \in {}^2_*\mathbb{N}$, soit $n \in {}^2_*\mathbb{N}$. □

Fait 5.4. *Soit le* sf*-tableau généralisé ci-après où* $r \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $(n_i)_{1 \leq i \leq r} \in \mathbb{N}_{sc}^r$ *et* $d \in \mathbb{N}_{sf}$ *.*

$\bullet$	n_1	$\ldots$	n_r
	d	$\ldots$	d

Ce sf*-tableau est impossible si l'une des deux conditions suivantes est validée.*

(1) $\dfrac{n_r - n_1}{d} \notin \mathbb{N}$.

(2) $\dfrac{n_r - n_1}{d} \in \{1, 2, 4, 6, 10, 14, 18\}$.

Démonstration. $n_1 = dA^2$ et $n_r = dB^2$ nous donnent $d(B^2 - A^2) = n_r - n_1$. On conclut directement pour le premier cas, et via le fait 3.3 dans le second. ☐

6. Premières applications

6.1. **Le cas de 2 facteurs.**

Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1) \in {}^2_*\mathbb{N}$. Nous avons alors les sf-tableaux partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}$ divisant π_n^2 , car les valeurs p de la deuxième ligne doivent apparaître un nombre pair de fois tout en étant espacées par $(p-1)$ valeurs 1 (voir les faits 5.1 et 5.2).

$n + \bullet$	0	1
p	1	1

La multiplication de tous les sf-tableaux partiels précédents donne le sf-tableau, non partiel, ci-après, mais ceci contredit le fait 5.4.

$n + \bullet$	0	1
	1	1

6.2. **Le cas de 3 facteurs.**

Supposons que $\pi_n^3 = n(n+1)(n+2) \in {}^2_*\mathbb{N}$. Nous avons alors les sf-tableaux partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ divisant π_n^3 , d'après les faits 5.1 et 5.2.

$n + \bullet$	0	1	2
p	1	1	1

Pour $p = 2$, via les faits 5.1 et 5.2, seulement deux sf-tableaux partiels d'ordre 2 sont possibles. Nous utilisons un abus de notation évident pour indiquer ces deux possibilités.

$n + \bullet$	0	1	2
2	1	1	1
	2	1	2

La multiplication de tous les sf-tableaux partiels précédents donne juste les deux sf-tableaux, non partiels, suivants, mais ceci est impossible d'après le fait 5.4.

$n + \bullet$	0	1	2
	1	1	1
	2	1	2

6.3. **Le cas de 4 facteurs.**

Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3) \in {}^2_*\mathbb{N}$. Nous avons alors les sf-tableaux partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}_{\geq 4}$ divisant π_n^4 .

$n+\bullet$	0	1	2	3
p	1	1	1	1

Pour $p = 2$, nous avons les trois sf-tableaux partiels d'ordre 2 donnés ci-après.

$n+\bullet$	0	1	2	3
2	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2

Pour $p = 3$, nous obtenons les deux sf-tableaux partiels d'ordre 3 donnés ci-après.

$n+\bullet$	0	1	2	3
3	1	1	1	1
	3	1	1	3

La multiplication des sf-tableaux partiels précédents donne les sf-tableaux[6], suivants.

$n+\bullet$	0	1	2	3
	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2

$n+\bullet$	0	1	2	3
	3	1	1	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Le fait 5.4 rejette quatre sf-tableaux : voir les cellules surlignées ci-dessous.

$n+\bullet$	0	1	2	3
	1	1	1	1
	2	1	2	1
	1	2	1	2

$n+\bullet$	0	1	2	3
	3	1	1	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

Ceci nous amène à étudier les deux sf-tableaux généralisés suivants.

$\bullet$	n	$n+1$	$n+2$	$n+3$
	6	1	2	3
	3	2	1	6

En posant $x = n + \frac{3}{2} = \frac{n+(n+3)}{2}$, nous obtenons les sf-tableaux généralisés suivants.

$\bullet$	$x-\frac{3}{2}$	$x-\frac{1}{2}$	$x+\frac{1}{2}$	$x+\frac{3}{2}$
	6	1	2	3
	3	2	1	6

En multipliant les colonnes extrêmes ensemble, et celles centrales aussi, et en notant que $6 \times 3 = 2 \times 3^2$, nous arrivons, dans chaque cas, au même sf-tableau généralisé ci-dessous.

$\bullet$	$x^2-\frac{9}{4}$	$x^2-\frac{1}{4}$
	2	2

6. Tableaux non partiels forcément.

Comme $x^2 - \frac{1}{4} - \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) = 2$, le fait 5.4 nous montre que le sf-tableau généralisé précédent est impossible. Joli ! Non ?

Noter que la fin du raisonnement n'a fait appel à aucune hypothèse sur π_n^4 . Ceci nous donne donc le fait suivant.

Fait 6.1. *Aucun* sf*-tableau ne peut contenir l'un des deux* sf*-tableaux suivants.*

$m + \bullet$	0	1	2	3
	6	1	2	3
	3	2	1	6

6.4. **Le cas de 5 facteurs.**

Supposons que $\pi_n^5 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2_*\mathbb{N}$. Nous avons alors les sf-tableaux partiels suivants pour $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ divisant π_n^5 .

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
p	1	1	1	1	1

Pour $p = 2$, nous avons les sf-tableaux partiels d'ordre 2 donnés ci-après.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
2	1	1	1	1	1
	2	1	2	1	1
	2	1	1	1	2
	1	2	1	2	1
	1	1	2	1	2

Pour $p = 3$, nous obtenons les sf-tableaux partiels d'ordre 3 donnés ci-après.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
3	1	1	1	1	1
	3	1	1	3	1
	1	3	1	1	3

La multiplication de tous les sf-tableaux partiels précédents donne les 15 cas suivants.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
	1	1	1	1	1
	2	1	2	1	1
	2	1	1	1	2
	1	2	1	2	1
	1	1	2	1	2

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
	3	1	1	3	1
	6	1	2	3	1
	6	1	1	3	2
	3	2	1	6	1
	3	1	2	3	2

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
	1	3	1	1	3
	2	3	2	1	3
	2	3	1	1	6
	1	6	1	2	3
	1	3	2	1	6

Comme $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2_*\mathbb{N}$ et $\pi_{n+1}^4 = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2_*\mathbb{N}$ d'après la section 6.3, les tableaux commençant, ou finissant, par une valeur 1 sont à ignorer d'après le fait 5.3. Cela laisse les sf-tableaux ci-après, mais ces derniers sont rejetés par le fait 5.4.

$n + \bullet$	0	1	2	3	4
	2	1	1	1	2
	6	1	1	3	2
	3	1	2	3	2
	2	3	2	1	3
	2	3	1	1	6

7. Et après ?

7.1. **La méthode via le cas de 6 facteurs.**

La méthode présentée ci-dessus permet de faire appel à un programme pour limiter les traitements à la main, et à la sueur des neurones, de sf-tableaux problématiques comme nous avons dû le faire dans la section 6.3. Expliquons cette tactique semi-automatique en traitant le cas de 6 facteurs.

(1) On raisonne par l'absurde en supposant que $\pi_n^6 \in {}^2_*\mathbb{N}$.
(2) Comme $\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 6}$, p divise au maximum un seul des facteurs $(n+i)$ de π_n^6 , nous avons juste besoin de considérer l'ensemble $\mathcal{P} = \{2, 3, 5\}$ des diviseurs premiers stricts de 6 .
(3) Pour chaque élément p de $\mathcal{P}$, on construit la liste $\mathcal{V}_p$ des sf-tableaux partiels relatifs à p et $\pi_n^6 \in {}^2_*\mathbb{N}$ en s'appuyant sur la section 5.1.
(4) Via les listes $\mathcal{V}_p$, on calcule toutes les multiplications de tous les sf-tableaux partiels relatifs à des nombres p différents, et pour chacune d'elles, on ne la garde que si elle ne vérifie aucune des conditions suivantes, celles du dernier cas devant être indiquées à la main au programme qui va donc évoluer au gré des démonstrations faites par un humain (démonstrations que l'on espère le plus rare possible).
    (a) Le tableau commence, ou se termine, par la valeur 1 . Dans ce cas, on sait par récurrence que le tableau produit n'est pas possible (voir le fait 5.3).
    (b) Le tableau est rejeté par le fait 5.4.
    (c) Le tableau « produit » contient un sous-tableau que nous savons impossible suite à un raisonnement humain fait *localement* , c'est-à-dire que seul les facteurs indiqués dans le sous-tableau, et le sous-tableau lui-même sont utilisés pour raisonner. C'est le cas des sf-tableaux du fait 6.1.

YAPLUKA !

Dans le dépôt en ligne associé à ce document sont placés les fichiers `find-pb-sftab.py` et `common.py` qui nous fournissent les informations suivantes pour π_n^6 .

8. Sources utilisées

Ce document n'aurait pas vu le jour sans la source suivante.

(1) Une discussion archivée consultée le 28 janvier 2024 :
`https://web.archive.org/web/20171110144534/http://mathforum.org/library/drmath/view/65589.html` .

Cette discussion utilise ce que nous avons nommé les sf-tableaux, mais le côté semi-mécanisable de leur utilisation n'est pas souligné.

9. AFFAIRE À SUIVRE...