Lifting the Exponent

Source : site " Complex Projective 4-Space " (01/2024)

$\forall p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$, $\forall (a;b) \in \mathbb{N}^2$, si $v_p(a) = v_p(b) = 0$ et $v_p(a-b) > 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_p(a^n - b^n) = v_p(a-b) + v_p(n)$.

Démo.

Soit $i = v_p(n)$ de sorte que $n = p^i m$ où $p \wedge m = 1$.

On raisonne par récu. sur i.

↪ $i = 0$, ie $n \wedge p = 1$

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_0^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Or $a \equiv b \, [p]$, d'où $\sum_0^{n-1} a^k b^{n-1-k} \equiv n \cdot a^{n-1} \not\equiv 0 \, [p]$ car $v_p(a) = 0$ et $v_p(n) = 0$.

Donc $v_p(a^n - b^n) = v_p(a-b) + 0$ ← $v_p(n)$

↪ $i \rightsquigarrow i+1$

$$a^{p^{i+1}k} - b^{p^{i+1}k}$$

$A = a^{p^i k}$ et $B = b^{p^i k}$

$$= A^p - B^p$$

$$= (A-B) \sum_0^{p-1} A^k B^{p-1-k}$$

Par H.R., $v_p(A-B) = v_p(a-b) + i$

Modulo p, on a : $A^k B^{p-1-k} \equiv a^{(p-1)p^i k} \equiv 1$

$$\Rightarrow \sum_0^{p-1} A^k B^{p-1-k} \equiv 0$$

$$\Rightarrow p \mid \sum_0^{p-1} A^k B^{p-1-k}$$

A-t-on $p^2 \mid \sum_0^{p-1} A^k B^{p-1-k}$? Si la rép. est non, on a gagné.

INUTILE !

* Si $a \equiv b\ [p^2]$, alors $\sum_0^{p-1} A^k B^{p-1-k} \equiv p\cdot a^{(p-1)p^i \ell}$ modulo p^2. Comme $p \nmid a$, $p\cdot a^{(p-1)p^i\ell} \not\equiv 0\ [p^2]$ d'où "OK" dans ce cas.

Tout de même intéressant car facile à voir !

* Si $a \not\equiv b\ [p^2]$, comme $A \equiv B\ [p]$, on a : $B = A + \ell p$ où $p \in \mathbb{N}$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $B^k = A^k + k\cdot A \ell p + \alpha_k \cdot p^2$, donc on obtient :

$$\sum_0^{p-1} A^k B^{p-1-k} = \sum_0^{p-1} A^{p-1-k} B^k$$

$$= p\cdot A^{p-1} + \left(\sum_0^{p-1} k\right)\cdot A^{p-1}\cdot \ell p + \beta_k p^2$$

Pas besoin de $a \not\equiv b\ [p^2]$

$$= p\cdot A^{p-1} + p^2 \ell A^{p-1} \frac{p-1}{2} + \beta_k p^2$$

$$= p\cdot A^{p-1} + p^2 \gamma_k$$

$p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$

Or $p\cdot A^{p-1} \not\equiv 0\ [p^2]$ car $p \nmid A$.

<u>Une applica°</u>

Soit $N = 3\cdots3$ avec $3^{(3^3)}$ chiffres 3 uniquement.
Trouver k tq $3^k \| N$, ie $3^k \mid N$ mais $3^{k+1} \nmid N$.

<u>Rép.</u>

$3N = 10^{\tilde{k}} - 1$ où $\tilde{k} = 3^{(3^3)}$.

$$v_3(N) = v_3(10^{\tilde{k}} - 1^{\tilde{k}}) - 1$$
$$= v_3(10-1) + v_3(\tilde{k}) - 1$$
$$= 2 + 3^3 - 1$$
$$= 28$$