Université Claude Bernard–Lyon I
CAPES de Mathématiques : Oral
Année 2006–2007

Angles et rotations

Point de vue *On va tout traiter de façon géométrique, c'est-à-dire sans faire appel à la mesure des angles, ni aux fonctions transcendantes (non polynômiales) sinus et cosinus.*
L'idée, c'est, dans le plan, d'identifier les angles et les rotations. On déduit cela d'une propriété structurelle du groupe des rotations, le fait d'être abélien. Comme ce fait est faux en dimension supérieure, cela explique la spécificité de la dimension 2.
Dans un deuxième temps, on montre que le choix d'un point du cercle permet d'identifier angles, rotations et points du cercle. Ceci permet de définir les fonctions trigonométrique d'un angle sans parler de sa mesure.
Enfin, on discute la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs.
NB : le pigiste a eu la flemme de faire les dessins, mais cette leçon en réclame un bon peu !

0° Prérequis

On fixe un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ dirigé par un plan vectoriel P. Pour l'instant, il est inutile d'orienter le plan. On note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire, $||.||$ la norme associée et $\mathbf{U}$ le cercle-unité, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $w \in P$ de norme 1.
On appelle isométrie une application linéaire qui préserve les distances, isométrie directe une isométrie de déterminant 1. On note $\mathrm{SO}(P)$ le groupe des isométries directes de P. Ceci ne dépend pas d'une orientation de P.

Définition *Etant donné deux couples de vecteurs non nuls (u, v) et (u', v'), on dit que $(u, v) \sim (u', v')$ s'il existe une isométrie directe $\varphi : P \to P$ et deux réels strictement positifs λ, μ tels que $u' = \lambda\, \varphi(u)$ et $v' = \mu\, \varphi(v)$. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.*
On appelle angle orienté des vecteurs (u, v), et on note $(\widehat{u, v})$, la classe d'équivalence du couple (u, v) pour la relation $\sim$.

Attention ! *On ne prend pas pour acquise la somme des angles, car sa définition nécessite un lemme "non trivial".*

Remarques : • On a : $(u, v) \sim (-u, -v)$ (prendre $\varphi = -\mathrm{Id}$).
• On a : $(u, v) \sim (u', v') \iff \varphi \in \mathrm{SO}(P)$ telle que $\varphi\left(\frac{u}{||u||}\right) = \frac{u'}{||u'||}$ et $\varphi\left(\frac{v}{||v||}\right) = \frac{v'}{||v'||}$. De plus, on voit que $(u, v) \sim \left(\frac{u}{||u||}, \frac{v}{||v||}\right)$, donc tout angle est la classe d'un couple de vecteurs de $\mathbf{U}$.

1° Matrice des isométries directes du plan

Lemme *Fixons une base orthonormée (i, j) du plan vectoriel P. Soit $\varphi \in \mathrm{SO}(P)$. Il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que la matrice de φ dans la base (i, j) soit*

$$\mathrm{Mat}_{(i,j)}(\varphi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad \text{et on a : } a^2 + b^2 = 1.$$

Inversement, toute matrice de cette forme, avec $a^2 + b^2 = 1$, est la matrice d'une isométrie directe.

Remarque. En fait, la matrice de φ est la même dans *toutes* les bases orthonormées ayant une orientation fixée, comme on le verra plus tard.

Démonstration : Soit $\varphi \in \mathrm{SO}(P)$, notons (a, b) les coordonnées de $\varphi(i)$ dans cette base, i.e. $a = \langle \varphi(i), i \rangle$ et $b = \langle \varphi(i), j \rangle$. Bien sûr, ${}^t(a, b)$ est la première colonne de la matrice de φ. Puisque φ est une isométrie, on a :

$$a^2 + b^2 = \langle \varphi(i), \varphi(i) \rangle = \langle i, i \rangle = 1.$$

De plus, si on note (c,d) les coordonnées de $\varphi(j)$, on a aussi :

$$ac + bd = \langle \varphi(i), \varphi(j) \rangle = \langle i, j \rangle = 0.$$

Enfin, comme le déterminant de φ est 1, on a :

$$ad - bc = 1.$$

L'ensemble des couples $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tels que $ac+bd = 0$ est une droite affine dirigée par $(-b,a)$. De même, l'ensemble des (c,d) tels que $-bc+ad = 1$ est une droite affine dirigée par (a,b). Les deux vecteurs directeurs sont orthogonaux (pour le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^2$), donc ces deux droites se coupent en un point. Or, le point $(-b,a)$ appartient aux deux droites ! D'où : $c = -b$ et $d = a$, ce qui donne la description annoncée de la matrice de φ.
La réciproque est facile.$\square$

Proposition *Le groupe* $\mathrm{SO}(P)$ *des isométries directes d'un plan vectoriel* P *est abélien.*

Démonstration : On fixe une base orthonormée (i,j) comme ci-dessus. Soit $\varphi, \varphi' \in \mathrm{SO}(P)$ et (a,b), (a',b') les couples de réels donnés par le lemme. On note M et M' les matrices correspondantes. Un calcul immédiat donne :

$$MM' = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -(ab' + ba') \\ ab' + ba' & aa' - bb' \end{pmatrix}.$$

Cette expression est symétrique en (a,b) et (a',b'), donc $MM' = M'M$, puis $\varphi\varphi' = \varphi'\varphi$.$\square$

Remarque. Il serait dommage de ne pas remarquer l'analogie avec la multiplication dans $\mathbb{C}$...

2° Isométries directes du plan et cercle-unité

Avec la commutativité de $\mathrm{SO}(P)$, le lemme suivant est la clé de voûte de la leçon : il permet

- d'identifier les isométries directes et le cercle (modulo le choix d'un point-base sur le cercle) ;
- d'identifier les angles et les rotations ;
- de définir l'addition des angles.

Lemme-clé *Soit* $i \in P$ *un vecteur de norme* 1*. Pour tout vecteur* $u \in P$ *de norme* 1*, il existe une unique isométrie directe* $\varphi \in \mathrm{SO}(P)$ *telle que* $\varphi(i) = u$*.*

Démonstration : Soit j un vecteur tel que (i,j) soit une base orthonormée. Soit $a = \langle i, u \rangle$ et $b = \langle j, u \rangle$. Une application linéaire φ est déterminée par sa matrice M dans la base (i,j).
Unicité : La condition $\varphi(i) = u$ signifie que la première colonne de M est nécessairement ${}^t(a \;\; b)$. Or, le lemme du 1° montre que la première colonne de la matrice d'une isométrie directe du plan détermine complètement cette matrice. D'où l'unicité de M, donc de φ.
Existence : Inversement, l'application linéaire qui a pour matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est une isométrie directe qui envoie i sur u.$\square$

Corollaire *Soit* $i \in P$ *un vecteur de norme* 1*. Pour tout couple de vecteurs non nuls* (u,v)*, il existe un unique vecteur de norme* 1 w *tel que les angles* $(\widehat{u,v})$ *et* $(\widehat{i,w})$ *soient égaux.*

Démonstration : On peut supposer u et v de norme 1. Soit φ l'isométrie directe qui envoie i sur u, posons $w = \varphi^{-1}(v)$. Alors on a : $(\widehat{u,v}) = (\widehat{i,w})$.
Inversement, si $(\widehat{u,v}) = (\widehat{i,w})$, il existe $\varphi \in \mathrm{SO}(P)$ telle que $\varphi(i) = u$ et $\varphi(w) = v$ (on a pris u et v de norme 1). Le lemme-clé donne l'unicité de φ, d'où l'unicité de w.$\square$

3° Angles et rotations

Proposition *Il existe deux bijections naturelles, réciproques l'une de l'autre, notées* ang *et* rot*, entre les isométries directes d'un plan vectoriel et les angles orientés de vecteurs :*
(i) *étant donné $\varphi \in \mathrm{SO}(P)$, l'angle $(\widehat{u, \varphi(u)})$ ne dépend pas du choix du vecteur $u \neq 0$; on pose* $\mathrm{ang}(\varphi) = (\widehat{u, \varphi(u)})$ *;*
(ii) *étant donné un angle α et (u, v) un représentant de α formé de vecteurs de norme 1, l'unique isométrie φ telle que $\varphi(u) = v$ ne dépend que de α, et pas du choix du représentant (u, v) ; on pose* $\mathrm{rot}(\alpha) = \varphi$.

Cette identification des angles et des isométries directes est "naturelle" au sens qu'elle ne dépend d'aucun choix (si ce n'est le choix du produit scalaire, bien sûr). En particulier, elle ne dépend pas du choix d'une orientation.

Définition *Etant donné une isométrie directe φ, on appelle angle de φ l'angle* $\mathrm{ang}(\varphi)$. *Etant donné un angle α, on appelle rotation d'angle α l'isométrie directe* $\mathrm{rot}(\alpha)$.

Démonstration : (i) Soit $\varphi \in \mathrm{SO}(P)$. On doit montrer que pour u et u', deux vecteurs non nuls, on a : $(\widehat{u, \varphi(u)}) = (\widehat{u', \varphi(u')})$. Pour cela, soit ψ l'unique isométrie directe telle que $u' = \psi(u)$. On a, par commutativité de $\mathrm{SO}(P)$:

$$\varphi(u') = \varphi\psi(u) = \psi\varphi(u),$$

ce qui prouve que $(u, \varphi(u)) \sim (u', \varphi(u'))$.
(ii) Maintenant, soit α un angle, (u, v) et $(\tilde{u}, \tilde{v})$ deux représentants de α formés de vecteurs de norme 1. Soit $\varphi, \tilde{\varphi} \in \mathrm{SO}(P)$ tels que $\varphi(u) = v$ et $\tilde{\varphi}(\tilde{u}) = \tilde{v}$. On doit montrer que $\tilde{\varphi} = \varphi$. Notons ψ l'isométrie directe telle que $\psi(u) = \tilde{u}$. Alors, on a, toujours par commutativité de $\mathrm{SO}(P)$:

$$\psi(v) = \psi\varphi(u) = \varphi\psi(u) = \varphi(\tilde{u}), \quad \text{d'où} \quad (\widehat{u, v}) = (\widehat{\psi(u), \psi(v)}) = (\widehat{\tilde{u}, \varphi(\tilde{u})}).$$

On en déduit que $(\widehat{\tilde{u}, \tilde{v}}) = (\widehat{\tilde{u}, \varphi(\tilde{u})})$, si bien que $\tilde{\varphi}(\tilde{u}) = \tilde{v} = \varphi(\tilde{u})$ par le corollaire de 2°. Enfin, il vient $\tilde{\varphi} = \varphi$ parce qu'une isométrie directe est déterminée par l'image d'un vecteur.□

4° Addition des angles

Voici une définition un peu trop abstraite, mais efficace, de la somme des angles. On parle de transport de structure. On retrouve la construction géométrique habituelle ("relation de Chasles", si on veut) un peu plus loin.

Définition *Etant donné deux angles α et α', on définit leur somme par :*

$$\alpha + \alpha' = \mathrm{ang}(\mathrm{rot}(\alpha) \circ \mathrm{rot}(\alpha')).$$

Lemme *La somme munit l'ensemble des angles d'une structure de groupe abélien, isomorphe au groupe* $\mathrm{SO}(P)$. *Le neutre est l'angle nul $(\widehat{u, u})$, l'opposé de l'angle $(\widehat{u, v})$ est $(\widehat{v, u})$.*

Démonstration : Trivial.□
On peut donner une description géométrique de la somme :

Lemme ("Relation de Chasles") *Soit α et α' deux angles. On fixe $u \in \mathbf{U}$. Soit v le vecteur de norme 1 tel que $(\widehat{u, v}) = \alpha'$ et w le vecteur de norme 1 tel que $(\widehat{v, w}) = \alpha$. Alors $\alpha + \alpha' = (\widehat{u, w})$. En particulier, l'angle $(\widehat{u, w})$ ne dépend pas du choix de u.*

Démonstration : Puisque $(\widehat{u, v}) = \alpha'$, on a : $\mathrm{rot}(\alpha')(u) = v$. De même, $\mathrm{rot}(\alpha)(v) = w$. D'où $\mathrm{rot}(\alpha)\mathrm{rot}(\alpha')(u) = w$, puis $\mathrm{ang}(\mathrm{rot}(\alpha)\mathrm{rot}(\alpha')) = (\widehat{u, w})$ et enfin : $\alpha + \alpha' = (\widehat{u, w})$.□

5° Résumé des épisodes précédents

Pour P un plan vectoriel euclidien, on a mis en évidence des bijections entre les trois objets suivants :

- le groupe des isométries directes de P ;
- le groupe des angles orientés de vecteurs de P ;
- le cercle-unité $\mathbf{U}$.

Les deux groupes sont naturellement isomorphes (i.e. on dispose d'un isomorphisme qui ne dépend d'aucun choix, pas même d'une orientation de P). Pour établir une bijection avec le cercle-unité, il faut choisir un point du cercle. Noter l'analogie :

espace vectoriel E	groupe des isométries directes $\mathrm{SO}(P)$
espace affine $\mathcal{E}$	cercle-unité $\mathbf{U}$
origine O	point-base i
translation t de vecteur v	rotation φ d'angle α
$M = t(O) \iff \overrightarrow{OM} = v$	$u = \varphi(i) \iff (\widehat{i, u}) = \alpha$

La structure commune est celle d'un groupe (E ou $\mathrm{SO}(P)$) agissant simplement transitivement sur un ensemble ($\mathcal{E}$ ou $\mathbf{U}$) : deux points quelconques de l'ensemble s'obtiennent l'un à partir de l'autre par l'action d'un unique élément du groupe. En termes snobs, on parle de torseur.

6° Trigonométrie sans mesure d'angle

(a) Lignes trigonométriques

Dorénavant, on fixe une orientation de P.

Lemme *Les matrices d'une rotation dans deux bases de même orientation sont égales.*

Démonstration : Soit $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées ayant la même orientation. La matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale et de déterminant positif, donc elle est de la forme donnée au lemme 1°. Si A et A' sont les matrices d'une rotation dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on a : $A' = Q^{-1}AQ = AQ^{-1}Q = A$, parce que $\mathrm{SO}(P)$ est commutatif.

Définition *Le lemme précédent permet de définir le cosinus et le sinus d'un angle α comme certains coefficients de la matrice de la rotation d'angle α dans une base orthonormée directe (quelconque) $\mathcal{B}$:*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{rot}(\alpha)) = \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}\,\alpha & -\mathrm{Sin}\,\alpha \\ \mathrm{Sin}\,\alpha & \mathrm{Cos}\,\alpha \end{pmatrix}.$$

(b) Formules d'addition

Lemme (Formules d'addition) *Etant donnés deux angles α et α', on a :*

$$\mathrm{Cos}(\alpha+\alpha') = \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha' - \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\alpha', \quad \mathrm{Sin}(\alpha+\alpha') = \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\alpha'.$$

De plus, on a : $\mathrm{Cos}\,0 = 1$, $\mathrm{Sin}\,0 = 0$.

Démonstration : La rotation d'angle $\alpha + \alpha'$ est, d'après la définition de 4°, la composée des rotations φ d'angle α et φ' d'angle α'. D'après le corollaire ci-dessus, sa matrice dans une (toute) base orthonormée (i, j) est :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cos}(\alpha+\alpha') & -\mathrm{Sin}(\alpha+\alpha') \\ \mathrm{Sin}(\alpha+\alpha') & \mathrm{Cos}(\alpha+\alpha') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}\,\alpha & -\mathrm{Sin}\,\alpha \\ \mathrm{Sin}\,\alpha & \mathrm{Cos}\,\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}\,\alpha' & -\mathrm{Sin}\,\alpha' \\ \mathrm{Sin}\,\alpha' & \mathrm{Cos}\,\alpha' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha' - \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\alpha' & -\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha' - \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\alpha' \\ \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\alpha' & \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha' - \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\alpha' \end{pmatrix}.$$

(c) Angles particuliers : éléments d'ordre 2 et 4 de $\mathrm{SO}(P)$

Cherchons les angles dont le double est l'angle nul $(\widehat{u,u})$. Au niveau matriciel, il s'agit de résoudre

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^2 = \mathrm{Id}, \qquad \text{c'est-à-dire :} \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = 0. \end{cases}$$

On en déduit que : $a = \pm 1$, $b = 0$, si bien que le seul élément d'ordre de $\mathrm{SO}(P)$ est $-\mathrm{Id}$. Notons Π l'angle correspondant, c'est-à-dire $(u, -u)$ pour $u \in \mathbf{U}$ quelconque : on l'appelle angle plat.

A présent, on cherche les éléments d'ordre 4 : leur puissance 4ème est Id, mais leur carré n'est pas Id, aussi ce sont exactement les rotations dont les matrices dans une base orthonormée (i, j) directe satisfont

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^2 = -\mathrm{Id}, \qquad \text{c'est-à-dire :} \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ 2ab = 0. \end{cases}$$

On en déduit que : $a = 0$, $b = \pm 1$, ce qui met en évidence deux rotations d'ordre 4, ayant pour matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les angles correspondants sont $\frac{\Pi}{2} = (\widehat{i,j})$ et $-\frac{\Pi}{2} = (\widehat{j,i})$: on les appelle angles droits, bien sûr. Si on change d'orientation, ces angles sont échangés. Inversement, on remarque que si deux vecteurs u et v sont orthogonaux, l'angle $(\widehat{u,v})$ est un angle droit. (Pourquoi ?)

7° Mesure d'un angle

Pour cela, on suppose connues les deux fonctions cos et sin, que l'on définit par exemple par leur série entière. On suppose également connaître leurs propriétés usuelles (dérivabilité, dérivées, parité, périodicité, formules d'addition, etc.) ainsi que leur tableau de variation.

Proposition *Etant donné un angle α, il existe un unique réel $\theta \in [-\pi, \pi[$ tel que*

$$\mathrm{Cos}\,\alpha = \cos\theta \quad \textit{et} \quad \mathrm{Sin}\,\alpha = \sin\theta.$$

Définition *Le réel θ de la proposition est appelé mesure principale de l'angle α. La classe de θ dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est la mesure de l'angle α.*

Démonstration : L'égalité $\mathrm{Cos}^2\,\alpha + \mathrm{Sin}^2\,\alpha = 1$ donne $|\,\mathrm{Cos}\,\alpha| \leq 1$. D'après le tableau de variation de cos, il existe exactement un réel $\theta_0 \in [0, \pi[$ tel que $\mathrm{Cos}\,\alpha = \cos\theta_0$. De plus, l'équation $\cos\theta = \cos\theta_0$ a au plus deux solutions dans $[0, 2\pi[$, à savoir θ_0 et $2\pi - \theta_0$. Notons enfin que $\sin\theta_0 = -\sin(2\pi - \theta_0)$.
Les égalités $\mathrm{Cos}^2\,\alpha + \mathrm{Sin}^2\,\alpha = 1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$ donnent $\mathrm{Sin}\,\alpha = \pm\sin\theta_0$. Si $\mathrm{Sin}\,\alpha = \sin\theta_0$ (resp. $\mathrm{Sin}\,\alpha = -\sin\theta_0$), alors $\theta = \theta_0$ (resp. $\theta = 2\pi - \theta_0$) est l'unique élément de $[0, 2\pi[$ qui convient.□

Proposition *L'application qui à l'angle α associe l'élément $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que* $\mathrm{Cos}\,\alpha = \cos\theta$ *et* $\mathrm{Sin}\,\alpha = \sin\theta$ *est un isomorphisme de groupe.*

Démonstration : On sait déjà que c'est une bijection. Les formules d'addition de Cos et Sin d'une part, qu'on a démontrées ci-dessus, et celles de cos et sin d'autre part, permettent de prouver que c'est un morphisme de groupes.□

Remarque. En changeant l'orientation de P, on change la mesure des angles en son opposée.

8° Extensions

(a) Argument d'un nombre complexe

On caractérise (à isomorphisme non unique près) le corps des complexes comme "le plus petit" corps contenant $\mathbb{R}$ et une solution i de l'équation $x^2+1=0$. On peut le construire simplement comme le quotient de $\mathbb{R}[X]$ par l'idéal maximal engendré par X^2+1, ce qui fait apparaître instantanément que c'est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, et qu'il contient un élément $\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$ (la classe de X dans le quotient) (distinguer i des vecteurs i dans ce qui précède...).
Ainsi, il y a sur $\mathbb{C}$ un produit scalaire privilégié, qui fait de la base $(1, \mathrm{i})$ une base orthonormée. L'orientation de cette base n'est pas canonique (qui peut faire la différence entre i et $-\mathrm{i}$?).
Ainsi, $\mathbb{C}$ "est" un plan euclidien orienté. On retrouve la correspondance {nombres complexes de module 1} $\longleftrightarrow$ cercle-unité, et on considère le point d'affixe 1 du cercle comme point-base. On identifie donc un nombre complexe z de module 1 à la rotation qui envoie le point d'affixe 1 sur le point d'affixe z, ce qui permet de définir l'argument de z comme l'angle de cette rotation. L'argument d'un complexe z non nul quelconque est l'argument de $z/|z|$.
Alors, l'identité classique $e^{i\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ permet d'interpréter $e^{i\theta}$ comme la rotation d'angle de mesure θ, etc.

(b) Angles de droites

On définit les angles orientés de droites comme classes d'équivalence de couples de vecteurs non nuls pour la relation :

$$(u,v) \sim_{\mathrm{OD}} (u',v') \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}^*,\ \exists \varphi \in \mathrm{SO}(P),\ u' = \lambda\, \varphi(u) \text{ et } v' = \varphi(v).$$

Quelle mesure peut-on définir pour cela ? Notons $\mathrm{mes}_{2\pi}$ la mesure d'un angle orienté de vecteurs (à valeurs dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$). Dans la situation ci-dessus, on a (pourquoi ?) :

$$\mathrm{mes}_{2\pi}(\widehat{u',v'}) = \begin{cases} \mathrm{mes}_{2\pi}(\widehat{u,v}) & \text{si } \lambda\mu > 0, \\ \mathrm{mes}_{2\pi}(\widehat{u,v}) + \pi & \text{si } \lambda\mu < 0. \end{cases}$$

Ainsi, seule la classe modulo π de la mesure de l'angle de droites associé à (u,v) est bien définie. Inversement, on se convainc que (la classe de) la mesure modulo π établit une bijection entre angles de droites et $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, qui dépend de l'orientation du plan.
Quant à la dénomination, elle s'explique par le fait évident suivant : l'ensemble des angles de droites (couples de vecteurs modulo $\sim_{OD}$) s'identifie naturellement aux couples de droites à isométrie directe près, i.e. au quotient de l'ensemble des couples de droites (vectorielles) par la relation d'équivalence "il existe une isométrie directe qui envoie un couple sur l'autre".

(c) Angles non orientés

On peut définir les angles non orientés de vecteurs comme classes d'équivalence de couples de vecteurs non nuls pour la relation :

$$(u,v) \sim_{\mathrm{NV}} (u',v') \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \varphi \in \mathrm{O}(P),\ u' = \lambda\, \varphi(u) \text{ et } v' = \varphi(v),$$

où $\mathrm{O}(P)$ est le groupe de toutes les isométries de P.

Exercice. Montrer que (u,v) et (v,u) définissent le même angle non orienté de vecteurs (normer u et v et utiliser la réflexion d'axe la médiatrice de u et v).
En déduire que (u,v) et (u',v') définissent le même angle non orienté de vecteurs si et seulement si $(\widehat{u,v}) = (\widehat{u',v'})$ ou $(\widehat{u,v}) = (\widehat{v',u'})$.

Exercice. Montrer que l'ensemble des angles orientés de vecteurs s'identifie naturellement à l'ensemble des paires (non ordonnées) de demi-droites à isométrie près.

On peut aussi définir les angles non orientés de droites comme classes d'équivalence de couples de vecteurs non nuls pour la relation :

$$(u,v) \sim_{\mathrm{ND}} (u',v') \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}^*,\ \exists \varphi \in \mathrm{O}(P),\ u' = \lambda\, \varphi(u) \text{ et } v' = \varphi(v).$$

Exercice. Dans chaque cas, définir la ou les lignes trigonométriques idoines et la mesure.

(d) Dimension 3

Si on remplace P par un espace euclidien E de dimension 3, les définitions d'isométrie directe et d'angles orientés de vecteurs ont toujours un sens ; on remplace le cercle unité par la sphère unité S^2 formée des vecteurs de norme 1.
Cependant, l'essentiel des résultats précédents s'effondre. Le groupe $\mathrm{SO}(E)$ n'est pas abélien, et l'identification entre isométries directes, angles et rotations devient fausse. En effet,

- une isométrie directe est déterminée par un point de la sphère et un élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (c'est-à-dire l'axe orienté de la rotation et son angle, sachant que $-\omega$ et $-\theta$ définissent la même rotation que ω et θ) ;
- un angle orienté de vecteurs, c'est caractérisé par son cosinus, ou, ce qui revient au même, par sa "mesure principale", qu'on doit choisir dans $[0, \pi]$;
- un point de la sphère, c'est un point de la sphère...

Il est amusant de se convaincre que dans l'espace, un angle orienté de vecteurs et un angle non orienté de vecteurs, c'est la même chose. En d'autres termes, $(u, v) \sim (u', v')$ si et seulement si $(u, v) \sim_{\mathrm{NV}} (u', v')$. Encore autrement dit, $(u, v) \sim (v, u)$: il existe une isométrie directe qui transforme le couple (u, v) en (v, u) (pour peu que les vecteurs soient de même norme) (faire un demi-tour autour de la droite engendrée par $u + v$).

Exercice. Pourquoi n'est-il pas possible de définir la somme de deux angles dans l'espace avec la relation de Chasles ?

9° Rotations affines

(a) Rotations affines, points fixes

On s'intéresse (enfin !) au plan affine euclidien $\mathcal{P}$ que dirige P.

Définition *On appelle rotation (affine) de $\mathcal{P}$ toute application affine possédant un point fixe, dont l'application linéaire associée est une rotation. L'angle d'une rotation affine est l'angle de la rotation linéaire associée.*

Notation : Si $\Omega \in \mathcal{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, on appelle rotation de centre Ω et d'angle θ l'application affine $r_{\Omega,\theta}$ définie par (on note $\mathrm{rot}(\theta)$ la rotation ayant pour angle, l'angle de mesure θ) :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \mathrm{rot}(\theta)(\overrightarrow{\Omega M}) \qquad \text{où} \quad M' = r_{\Omega,\theta}(M).$$

Il est évident que c'est une rotation, au sens de la définition précédente, et que toute rotation est de cette forme. Plus précisément, θ est déterminé comme l'angle de la rotation vectorielle, et Ω est déterminé par le lemme suivant :

Lemme *Si l'angle d'une rotation affine n'est pas nul, elle possède un unique point fixe ; s'il est nul, tous les points sont fixes.*

Démonstration : Les valeurs propres d'une rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sont $\exp(\pm 2i\pi\theta)$: si $\theta \neq 0 \mod [2\pi]$, le rappel du paragraphe 10° permet de conclure.□

(b) Groupe engendré par les rotations

Proposition *(Notations ci-dessus.) La composée de deux rotations d'angles θ et θ' est une rotation d'angle $\theta + \theta'$ si $\theta + \theta' \neq 0$, et c'est une translation si $\theta + \theta' = 0$.*

Problème : Trouver le centre de la rotation (pas facile) ou le vecteur de la translation (facile).

(c) Version complexe

On fixe un repère orthonormé. Si ω, z, et z' sont les affixes de Ω, M et $r_{\Omega,\theta}(M)$), on a (ah ?) :

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega.$$

On en déduit facilement tout ce qui a été énoncé dans ce paragraphe.

10° Appendice : points fixes d'une application affine

Soit $\mathcal{P}$ un espace affine dirigé par un espace vectoriel P. Soit $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ une application affine, dont l'application linéaire est notée $\varphi : P \to P$. On choisit un point arbitraire $O \in \mathcal{P}$ et on note $O' = f(O)$.
Cherchons une condition pour que $M \in \mathcal{P}$ soit fixe par f. On a :

$$(*) \qquad f(M) = M \iff \overrightarrow{O'M} = \varphi(\overrightarrow{OM}) \iff \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{O'O} = \varphi(\overrightarrow{OM}) \iff (\varphi - \mathrm{Id})(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'O}\ .$$

Lemme *(Notations ci-dessus.)*

(i) *Si* 1 *n'est pas valeur propre de* φ*, alors* f *a un unique point fixe :* $O - (\varphi - \mathrm{Id})^{-1}(\overrightarrow{Of(O)})$.
(ii) *Si* 1 *est valeur propre de* φ*, alors l'ensemble des points fixes de* f *est vide, ou bien c'est un sous-espace affine dirigé par* $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$.

Démonstration : Dire que 1 n'est pas valeur propre, c'est dire que $\varphi - \mathrm{Id}$ est inversible. Le vecteur $\overrightarrow{O'O}$ a donc un unique antécédent par $\varphi - \mathrm{Id}$, donc f a un unique point fixe M, qui est caractérisé par l'égalité : $(\varphi - \mathrm{Id})(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'O}$. Noter que l'unicité prouve que son expression est indépendante de O.
Si 1 est une valeur propre, il peut arriver que f n'ait pas de point fixe : par exemple, si f est une translation de vecteur non nul. Si f contient un point fixe Ω, le calcul $(*)$ (avec Ω à la place de O) montre que les points fixes sont les points M tels que : $(\varphi - \mathrm{Id})(\overrightarrow{\Omega M}) = 0 \in P$, i.e. les éléments du sous-espace affine contenant Ω et dirigé par $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$.□