Th. de D'Alembert-Gauss ~ Preuves

⚠ On confond abusivement $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $\tilde{P} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonc$^{\underline{c}}$ poly. correspondante.

Démo. 1

1) Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k \in \mathbb{C}_{\geq 1}[X]$ $(\deg P = n \geq 1)$.

Mq $\inf_{\mathbb{C}} |P(z)| = \min_{\mathbb{C}} |P(z)|$.

- $|P(z)| \geq \underbrace{|p_n z|^n}_{\text{Terme dominant!}} - \sum_{k=0}^{n-1} |p_k z^k|$ clair$^{\underline{t}}$, donc sur $\mathbb{C}^*$, on a :

$$|P(z)| \geq |z|^n \Big(\underbrace{|p_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |p_k| \cdot |z|^{\overbrace{k-n}^{<0}}}_{\xrightarrow[|z| \to +\infty]{} |p_n| \neq 0} \Big)$$

on sait donc que $\underline{\lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty}$.

À mettre en regard avec la preuve via le th. de Liouville holomorphe.

- Soit alors $R > 0$ tq $|z| > R$ implique $|P(z)| \geq |P(0)|$ clair$^{\underline{t}}$, $\inf_{\mathbb{C}} |P(z)| = \inf_{|z| \leq R} |P(z)|$.

Or $D_{\mathbb{C}}(0; R]$ est compact (fermé borné), et $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est continue, donc on arrive à

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbb{C}} |P(z)| &= \inf_{|z| \leq R} |P(z)| \\ &= \min_{|z| \leq R} |P(z)| \\ &= \min_{\mathbb{C}} |P(z)| \end{aligned}$$

$|P(z)| \geq |P(0)|$ si $|z| \geq R$.

2) Le point précédent donne $z_0 \in \mathbb{C}$ tq $|P(z_0)| = \inf_{\mathbb{C}} |P(z)|$ dès que $P(X) \in \mathbb{C}_{\geq 1}[X]$.

Posant $Q(X) = P(X + z_0)$, on voit que l'on se ramène au cas où $z_0 = 0$.

3) Soit donc $P(X) = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k \in \mathbb{C}_{\geq 1}[X]$ tel que $|p_0| = |P(0)| = \inf_{\mathbb{C}} |P(z)|$.

Montrons par l'absurde que $P(0) = 0$.

- $P(X) = p_0 + p_k X^k + \sum_{j=k+1}^{n} p_j X^j$

$= p_0 + p_k X^k + X^{k+1} P_1(X)$

On isole p_0. On considère la valuation de $P(X) - p_0$.

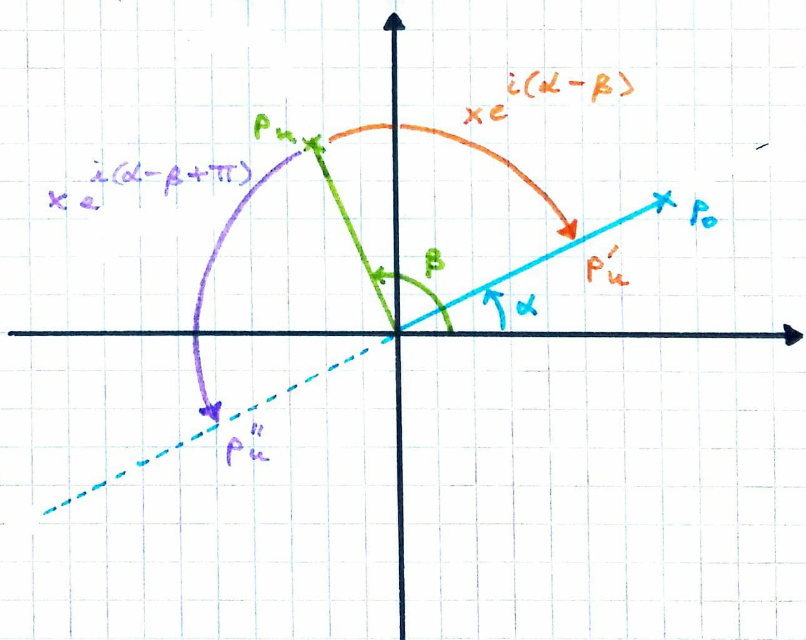
Ici $k = n$, ie $P_1 = 0$, est possible.

- <u>Cas 1</u> : $P_1 = 0$, ie $P(X) = p_0 + p_n X^n$, où $p_0 \neq 0$ (on raisonne par l'absurde).

↳ $P(re^{i\theta}) = p_0 + p_n r^n e^{in\theta}$ où $(r;\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

↳ $p_0 = |p_0| e^{i\alpha}$ et $p_n = |p_n| e^{i\beta}$

↳ Prenons de la hauteur de vue.



Aller en p_n' : mauvais choix car $P(re^{i\theta})$ va "s'éloigner" de p_0, mais on a quand même un module facile à calculer.

Aller en p_n'' : on se "rapproche" de p_0 avec un module facilet calculable.

↳ On choisit $n\theta = \alpha - \beta + \pi$, c'est-à-dire $\theta = \dfrac{\alpha - \beta + \pi}{n}$, ainsi que r assez petit pour avoir $|p_n''| \times r^n < |p_0|$. On a alors (cf. dessin) :

$$|P(re^{i\theta})| = |p_0| - |p_n r^n e^{in\theta}|$$
$$< |p_0|$$

On a une contradiction !

• <u>Cas 2</u> : $P_1 \neq 0$

Le cas 1 donne $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tq $0 \leq r \leq r_0$ implique

$$|P(re^{i\theta})| \leq |p_0| - |p_k| \cdot r^k + r^{k+1} |P_1(re^{i\theta})|$$

(via la classique inégalité triangulaire).

Ceci se réécrit :

$$|P(re^{i\theta})| \leq \underbrace{|p_0| - r^k \big(\underbrace{|p_k| - r\,|P_1(re^{i\theta})|}_{\xrightarrow[r \to 0]{} |p_k|} \big)}_{\xrightarrow[r \to 0]{} |p_0|^-}$$

On peut donc trouver $r \in]0; r_0[$ tq $|P(re^{i\theta})| < |p_0|$, d'où une contradiction finale !

Démo. 2

1) On commence comme dans la preuve 1 pour arriver au cas où

$P(X) = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k \in \mathbb{C}_{\geq 1}[X]$ tq $|P(0)| = \inf_{\mathbb{C}} |P(z)|$.

2) Mq par l'absurde que $P(0) = 0$.

- $P(X) = p_0 \left(1 + \frac{p_k}{p_0} X^k + X^{k+1} P_1(X) \right)$ où $p_k \neq 0$ avec éventuellement $P_1 = 0$.

- Soit w une racine k-ième de $-\frac{p_0}{p_k} \neq 0$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$P(wt) = p_0 (1 - t^k + t^k . t Q(t))$ où $Q(X) \in \mathbb{C}[X]$

On choisit $t > 0$ tq $|t Q(t)| < 1$ et $t < 1$, on a :

$$\begin{aligned} |P(wt)| &\leq |p_0| \left(|1 - t^k| + |t Q(t) . t^k| \right) \\ &< |p_0| (1 - t^k + t^k) \\ &= |p_0| \end{aligned}$$

on a une contradiction !