

BROUILLON - CARRÉS PARFAITS ET PRODUITS D'ENTRIERS CONSÉCUTIFS – RÉOLUTIONS À LA MAIN

CHRISTOPHE BAL

*Document, avec son source L^AT_EX, disponible sur la page
<https://github.com/bc-writing/drafts>.*

Mentions « légales »

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons « Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International ».



TABLE DES MATIÈRES

1.	Ce qui nous intéresse	2
2.	Notations utilisées	2
3.	Avec 1 seul facteur	2
4.	Avec 2 facteurs	2
5.	Avec 3 facteurs	3
6.	Avec 4 facteurs	3
7.	Avec 5 facteurs	4
8.	Avec 6 facteurs	6
9.	Sources utilisées	9
10.	AFFAIRE À SUIVRE...	10

1. CE QUI NOUS INTÉRESSE

Dans l'article « Note on Products of Consecutive Integers »¹, Paul Erdos démontre que pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le produit de $(k + 1)$ entiers consécutifs $\prod_{i=0}^k (n + i)$ n'est jamais le carré d'un entier.

Dans ce document, nous proposons quelques cas particuliers résolus de façon « adaptative » à la sueur des neurones.

2. NOTATIONS UTILISÉES

Dans la suite, nous emploierons les notations suivantes.

- ${}^2\mathbb{N} = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ et ${}^2\mathbb{N}_* = {}^2\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^*$.
- $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\pi_n^k = \prod_{i=0}^k (n + i)$. Par exemple, nous avons $\pi_n^0 = n$ et $\pi_n^1 = n(n + 1)$.
- \mathbb{P} désigne l'ensemble des nombres premiers.
- $\forall (p; n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$, $v_p(n) \in \mathbb{N}$ est la valuation p -adique de n , c'est-à-dire $p^{v_p(n)} \mid n$ et $p^{v_p(n)+1} \nmid n$, autrement dit $p^{v_p(n)}$ divise n , contrairement à $p^{v_p(n)+1}$.
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n \wedge m$ désigne le PGCD de n et m .
- $2\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels pairs.
- $2\mathbb{N} + 1$ désigne l'ensemble des nombres naturels impairs.

3. AVEC 1 SEUL FACTEUR

Via $N^2 - M^2 = (N - M)(N + M)$, il est immédiat de noter que $\forall (N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $N > M$, alors $N^2 - M^2 \geq 3$. Le fait suivant précise ceci.

Fait 3.1. $\forall (N, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, si $N > M$, alors $N^2 - M^2 = \sum_{k=M+1}^N (2k - 1)$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser $N^2 = \sum_{k=1}^N (2k - 1)$. □

4. AVEC 2 FACTEURS

Fait 4.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(n + 1) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Il suffit de noter que $n^2 < n(n + 1) < (n + 1)^2$. □

Preuve alternative no.1. Supposons que $\pi_n^1 = n(n + 1) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Clairement $\forall p \in \mathbb{P}$, nous avons : $v_p(\pi_n^1) \in 2\mathbb{N}$. Or $p \in \mathbb{P}$ ne peut diviser à la fois n et $n + 1$. Nous savons donc que $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n + 1) \in 2\mathbb{N}$, autrement dit $(n, n + 1) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. D'après le fait 3.1, nous savons que ceci est impossible. □

Preuve alternative no.2. Supposons que $\pi_n^1 = n(n + 1) = N^2$ où $N \in \mathbb{N}^*$. Les équivalences suivantes donnent alors une contradiction.

1. J. London Math. Soc. 14 (1939).

$$\begin{aligned}
 & n(n+1) = N^2 \\
 \iff & 2 \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^N (2k-1) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} n(n+1) = 2 \sum_{k=1}^n k \text{ et } N^2 = \sum_{k=1}^N (2k-1). \\
 \iff & \sum_{k=1}^n 2k = \sum_{k=1}^N 2k - N \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} N > n \\
 \iff & \sum_{k=n+1}^N 2k - N = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} N > 0 \text{ rend impossible la dernière égalité.} \\
 \iff & \sum_{k=n+1}^{N-1} 2k + N = 0
 \end{aligned}$$

□

5. AVEC 3 FACTEURS

Fait 5.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Posant $m = n+1$, nous avons $\pi_n^2 = (m-1)m(m+1) = m(m^2-1)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Comme $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(\pi_n^2) \in 2\mathbb{N}$, et comme de plus $p \in \mathbb{P}$ ne peut diviser à la fois m et m^2-1 , nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}, v_p(m) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(m^2-1) \in 2\mathbb{N}$, d'où $(m, m^2-1) \in {}^2\mathbb{N}_* \times {}^2\mathbb{N}_*$. Or, d'après le fait 3.1, $m^2-1 \in {}^2\mathbb{N}$ est impossible. □

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^2 = n(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Comme $p \in \mathbb{P}_{>2}$ ne peut diviser au maximum qu'un seul des trois facteurs n , $(n+1)$ et $(n+2)$, nous savons que $\forall p \in \mathbb{P}_{>2}, (v_p(n), v_p(n+1), v_p(n+2)) \in (2\mathbb{N})^3$. Mais que se passe-t-il pour $p=2$?

Supposons d'abord $n \in 2\mathbb{N}$.

- Posant $n = 2m$, nous avons $\pi_n^2 = 4m(2m+1)(m+1)$, d'où $m(2m+1)(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Comme $v_2(2m+1) = 0$, nous savons que $2m+1 \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Donc $m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}_*$, mais le fait 4.1 interdit cela.

Supposons maintenant $n \in 2\mathbb{N}+1$.

- Nous savons que $n \in {}^2\mathbb{N}_*$ via $v_2(n) = 0$.
- Dès lors, on obtient $(n+1)(n+2) \in {}^2\mathbb{N}_*$, mais de nouveau ceci contredit le fait 4.1. □

6. AVEC 4 FACTEURS

Fait 6.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)(n+3) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Nous pouvons ici faire les manipulations algébriques naturelles suivantes.

$$\begin{aligned}
 \pi_n^3 &= n(n+3) \cdot (n+1)(n+2) \\
 &= (n^2+3n) \cdot (n^2+3n+2) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} m = n^2+3n \\
 &= m(m+2) \\
 &= m^2+2m \\
 &= (m+1)^2-1
 \end{aligned}$$

Comme $m > 0$, d'après le fait 3.1, $(m+1)^2-1 \notin {}^2\mathbb{N}$, c'est-à-dire $\pi_n^3 \notin {}^2\mathbb{N}$. □

Une preuve alternative. En « symétrisant » certaines expressions, nous obtenons les manipulations algébriques « moins magiques » suivantes.

$$\begin{aligned}
\pi_n^3 &= n(n+1)(n+2)(n+3) \\
&= \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} x = n + \frac{3}{2} \\
&= \left(x^2 - \frac{9}{4}\right)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} y = x^2 - \frac{5}{4} \\
&= (y-1)(y+1) \\
&= y^2 - 1 \\
&= \left(\left(n + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right)^2 - 1 \\
&= (n^2 + 3n + 1)^2 - 1
\end{aligned}$$

□

7. AVEC 5 FACTEURS

Fait 7.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \notin {}^2\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $(v_p(n), v_p(n+1), v_p(n+2), v_p(n+3), v_p(n+4)) \in (2\mathbb{N})^5$. Pour $p = 2$ et $p = 3$, nous avons les alternatives suivantes pour chaque facteur $(n+i)$ de π_n^3 .

- **[A1]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$
- **[A2]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in 2\mathbb{N} \times (2\mathbb{N} + 1)$
- **[A3]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times 2\mathbb{N}$
- **[A4]** $(v_2(n+i), v_3(n+i)) \in (2\mathbb{N} + 1) \times (2\mathbb{N} + 1)$

Comme nous avons cinq facteurs pour quatre alternatives, ce bon vieux principe des tiroirs va nous permettre de lever des contradictions très facilement.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A1]**.

Dans ce cas, on sait juste que $(n+i, n+i') \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Or $n \notin {}^2\mathbb{N}$ puisque sinon nous aurions $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$ via $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}$, mais ceci ne se peut pas d'après le fait 6.1. De même, $n+4 \notin {}^2\mathbb{N}$. Dès lors, nous avons $\{n+i, n+i'\} \subseteq \{n+1, n+2, n+3\}$ qui donne deux carrés parfaits non nuls éloignés de moins de 3, et ceci contredit le fait 3.1.

- Deux facteurs différents $(n+i)$ et $(n+i')$ vérifient **[A2]**.

Dans ce cas, le couple de facteurs est $(n, n+3)$, ou $(n+1, n+4)$.

- (1) Supposons d'abord que n et $(n+3)$ vérifient **[A2]**.

Comme $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(n) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(n+3) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(n) \in 2\mathbb{N} + 1$ et $v_3(n+3) \in 2\mathbb{N} + 1$, nous avons $n = 3N^2$ et $n+3 = 3M^2$ où $(N, M) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Or, ceci donne $3 = 3M^2 - 3N^2$, puis $M^2 - N^2 = 1$ qui contredit le fait 3.1.

- (2) De façon analogue, on ne peut pas avoir $(n+1)$ et $(n+4)$ vérifiant **[A2]**.

- Deux facteurs différents $(n + i)$ et $(n + i')$ vérifient **[A3]**.

Comme dans le point précédent, c'est impossible car on aurait $2 = 2M^2 - 2N^2$, ou $4 = 2M^2 - 2N^2$. En effet, ici les couples possibles sont $(n, n+2)$, $(n, n+4)$, $(n+2, n+4)$ et $(n+1, n+3)^2$.

- Deux facteurs différents $(n + i)$ et $(n + i')$ vérifient **[A4]**.

Ceci donne deux facteurs différents divisibles par 6, mais c'est impossible. \square

Bien que longue, la preuve suivante est simple à comprendre car elle ne fait que dérouler le fil des faits découverts.

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Posant $m = n+2$, nous avons $\pi_n^4 = (m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) = m(m^2-1)(m^2-4)$ où $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. On notera dans la suite $u = m^2 - 1$ et $q = m^2 - 4$.

Supposons d'abord que $m \in {}^2\mathbb{N}_*$.

- De $muq \in {}^2\mathbb{N}_*$, nous déduisons $uq \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- Comme $u - q = 3$, nous savons que $u \wedge q \in \{1, 3\}$.
- Si $u \wedge q = 1$, alors $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, d'où $(u, q) \in {}^2\mathbb{N} \times {}^2\mathbb{N}$. Le fait 3.1 impose d'avoir $(u, q) = (4, 1)$, d'où $m^2 - 1 = 4$, mais ceci est impossible³.
- Si $u \wedge q = 3$, alors $\forall p \in \mathbb{P} - \{3\}$, $v_p(u) \in 2\mathbb{N}$ et $v_p(q) \in 2\mathbb{N}$, mais aussi $v_3(u) \in 2\mathbb{N} + 1$ et $v_3(q) \in 2\mathbb{N} + 1$. Donc $u = 3U^2$ et $q = 3Q^2$ avec $(U, Q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Or $u - q = 3$ donne $U^2 - Q^2 = 1$, et le fait 3.1 nous indique une contradiction.

Supposons maintenant que $m \notin {}^2\mathbb{N}_*$.

- Nous avons vu ci-dessus que $u \notin {}^2\mathbb{N}$ et $q \notin {}^2\mathbb{N}$. On peut donc écrire $m = \alpha M^2$, $u = \beta U^2$, $q = \gamma Q^2$ où $(M, U, Q) \in (\mathbb{N}^*)^3$, et $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{N}_{>1})^3$, le dernier triplet étant formé d'entiers sans facteur carré.
- Notons que $\beta \neq \gamma$ car, dans le cas contraire, $3 = u - q = \beta(U^2 - Q^2)$ fournirait $\beta = 3$ puis $U^2 - Q^2 = 1$, et ceci contredirait le fait 3.1.
- Nous avons $m \wedge u = 1$, $m \wedge q \in \{1, 2, 4\}$ et $u \wedge q \in \{1, 3\}$ avec $m \wedge u = m \wedge q = u \wedge q = 1$ impossible car sinon on aurait $(m, u, q) \in ({}^2\mathbb{N})^3$ via $muq \in {}^2\mathbb{N}$.
- Clairement, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $(v_p(m), v_p(u), v_p(q)) \in (2\mathbb{N})^3$.
- Les points précédents donnent $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$ avec de plus $\beta \neq \gamma$, ainsi que $\alpha \wedge \beta = 1$, $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2\}$ et $\beta \wedge \gamma \in \{1, 3\}$. Notons au passage que $\alpha \wedge \beta = 1$ implique $(\alpha, \beta) = (2, 3)$, ou $(\alpha, \beta) = (3, 2)$. Via le tableau « mécanique » ci-après, nous obtenons que forcément $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$ ou $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$. Le plus dur est fait !

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	Statut
2	3	2	1	2	1	✓
2	3	6	1	2	3	✓
3	2	3	1	3	1	✗
3	2	6	1	3	2	✗

2. Rien n'empêche d'avoir n , $(n+2)$ et $(n+4)$ vérifiant tous les trois **[A3]**.

3. On peut aussi noter que le fait 5.1 lève une contradiction car nous avons $m \in {}^2\mathbb{N}$ et $u \in {}^2\mathbb{N}$ qui donnent $(m-1)m(m+1) \in {}^2\mathbb{N}$

- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 2)$ nous donne $m = 2M^2$, $u = 3U^2$ et $q = 2Q^2$, d'où la contradiction $3 \cdot 4M^2U^2Q^2 \in {}^2\mathbb{N}_*$.
- $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$ nous donne $m = 2M^2$, $m^2 - 1 = 3U^2$ et $m^2 - 4 = 6Q^2$, mais ce qui suit lève une autre contradiction.
 - Travaillons modulo 3. Comme $m = 2M^2$, nous avons $m \equiv 0$ ou $m \equiv -1$. Or $m^2 - 1 = 3U^2$ donne $m^2 \equiv 1$, d'où $m \equiv -1$, puis $3 \mid m - 2$, et enfin $6 \mid m - 2$ puisque m est pair.
 - Posant $m - 2 = 6r$ et notant $s = m + 2$, nous avons $6rs = 6Q^2$, puis $rs = Q^2$.
 - $s \notin {}^2\mathbb{N}$, car dans le cas contraire, nous aurions $(m - 2)(m - 1)m(m + 1) \in {}^2\mathbb{N}$ via $(m - 2)(m - 1)m(m + 1)(m + 2) \in {}^2\mathbb{N}$, mais ceci ne se peut pas d'après le fait 6.1.
 - Les deux résultats précédents donnent $(\pi, R, S) \in \mathbb{N}_{>1} \times (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $r = \pi R^2$ et $s = \pi S^2$ avec π sans facteur carré.
 - $4 = s - 6r = \pi(S^2 - 6R^2)$ donne $\pi = 2$, d'où $m + 2 = 2S^2$.
 - Finalement, $m = 2M^2$ et $m + 2 = 2S^2$ donnent $2 = 2(S^2 - M^2)$, soit $1 = S^2 - M^2$, ce qui contredit le fait 3.1. \square

8. AVEC 6 FACTEURS

Fait 8.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n^5 \notin {}^2\mathbb{N}$.

La démonstration suivante se trouve dans l'article « Solution of a Problem »⁴ de G. W. Hill et J. E. Oliver.

Démonstration. Supposons que $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}$. Dans ce qui suit, nous utilisons $(a \pm b)$ comme raccourci de $(a + b)(a - b)$.

$$\begin{aligned}
 & \pi_n^5 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \\
 \iff & \pi_n^5 = \left(x \pm \frac{5}{2}\right)\left(x \pm \frac{3}{2}\right)\left(x \pm \frac{1}{2}\right) & \left. \begin{array}{l} \downarrow x = n + 2 + \frac{1}{2} \\ \downarrow z = x^2 \\ \downarrow a = z - \frac{9}{4} \end{array} \right\} \\
 \iff & \pi_n^5 = \left(z - \frac{25}{4}\right)\left(z - \frac{9}{4}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right) \\
 \iff & \pi_n^5 = (a - 4)a(a + 2)
 \end{aligned}$$

Nous avons donc $a = \left(n + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $a(a+2)(a-4) \in {}^2\mathbb{N}_*$. Posons alors $a = \alpha A^2$ où $(\alpha, A) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec α sans facteur carré. Nous avons alors $\alpha(\alpha A^2 + 2)(\alpha A^2 - 4) \in {}^2\mathbb{N}_*$, d'où $\alpha \mid 8$, puis $\alpha \in \{1, 2\}$. Nous allons voir que ceci est impossible.

Supposons avoir $\alpha = 1$.

- Notons les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}
 & (A^2 + 2)(A^2 - 4) \in {}^2\mathbb{N}_* \\
 \iff & (u + 3)(u - 3) \in {}^2\mathbb{N}_* & \left. \begin{array}{l} \downarrow u = A^2 - 1 \text{ où } -1 = \frac{2-4}{2} \end{array} \right\} \\
 \iff & u^2 - 9 \in {}^2\mathbb{N}_*
 \end{aligned}$$

- Ensuite, prenant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = u^2 - 9$, comme $u^2 - m^2 = \sum_{k=m+1}^w (2k - 1)$, on a $(u, m) = (5, 4)^5$. On aboutit alors la contradiction suivante.

4. The Analyst (1874).

5. Noter que $2u - 1 \leq 9$ implique $u \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$. Ceci permet d'analyser tous les cas mentalement.

$$\begin{aligned}
 u &= 5 \\
 \iff A^2 - 1 &= 5 \\
 \iff A^2 &= 6
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} u &= 5 \\ \iff A^2 - 1 &= 5 \\ \iff A^2 &= 6 \end{aligned}} \right\} 6 \notin {}^2\mathbb{N}.$$

Supposons avoir $\alpha = 2$.

- Notons l'équivalence suivante.

$$\begin{aligned}
 &2(2A^2 + 2)(2A^2 - 4) \in {}^2\mathbb{N}_* \\
 \iff &2(A^2 + 1)(A^2 - 2) \in {}^2\mathbb{N}_*
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} &2(2A^2 + 2)(2A^2 - 4) \in {}^2\mathbb{N}_* \\ \iff &2(A^2 + 1)(A^2 - 2) \in {}^2\mathbb{N}_* \end{aligned}} \right\} \text{Via } 4 \cdot 2(A^2 + 1)(A^2 - 2).$$

- Ensuite, en travaillant modulo 3, nous avons $2(A^2 + 1)(A^2 - 2) \equiv -4 \equiv -1$ qui ne correspond pas à un carré modulo 3. \square

Bien que très longue, la preuve suivante est simple à comprendre car elle ne fait que dérouler le fil des faits découverts.

Une preuve alternative. Supposons que $\pi_n^5 \in {}^2\mathbb{N}$. Dans ce qui suit, nous utilisons de nouveau $(a \pm b)$ comme raccourci de $(a + b)(a - b)$.

$$\begin{aligned}
 \pi_n^5 &= n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \\
 \iff \pi_n^5 &= \left(x \pm \frac{5}{2}\right) \left(x \pm \frac{3}{2}\right) \left(x \pm \frac{1}{2}\right) \\
 \iff 2^6 \pi_n^5 &= (y \pm 5)(y \pm 3)(y \pm 1) \\
 \iff 2^6 \pi_n^5 &= (z - 25)(z - 9)(z - 1) \\
 \iff 2^6 \pi_n^5 &= (u - 8)(u + 8)(u + 16)
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \pi_n^5 &= n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \\ \iff \pi_n^5 &= \left(x \pm \frac{5}{2}\right) \left(x \pm \frac{3}{2}\right) \left(x \pm \frac{1}{2}\right) \\ \iff 2^6 \pi_n^5 &= (y \pm 5)(y \pm 3)(y \pm 1) \\ \iff 2^6 \pi_n^5 &= (z - 25)(z - 9)(z - 1) \\ \iff 2^6 \pi_n^5 &= (u - 8)(u + 8)(u + 16) \end{aligned}} \right\}
 \begin{aligned}
 &x = n + 2 + \frac{1}{2} \\
 &y = 2x \\
 &z = y^2 \\
 &u = z - 17 \text{ où } 17 = \frac{25 + 9}{2}.
 \end{aligned}$$

Notant $a = u - 8$, $b = u + 8$ et $c = u + 16$, où $u = (2n + 5)^2 - 17 \in 2\mathbb{N}$, nous avons les faits suivants.

- $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ et $abc \in {}^2\mathbb{N}_*$ car $(2^6, \pi_n^5) \in ({}^2\mathbb{N}_*)^2$.
- $a \wedge b \mid 16$ via $b - a = 16$.
- $a \wedge c \mid 24$ via $c - a = 24$.
- $b \wedge c \mid 8$ via $c - b = 8$.
- En particulier, $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) \in (2\mathbb{N})^3$.

Démontrons qu'aucun des trois entiers a , b et c ne peut être un carré parfait.

- Commençons par supposer que $(a, b, c) \in {}^2\mathbb{N}_* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Dans ce cas, $bc \in {}^2\mathbb{N}_*$, soit $(u + 8)(u + 16) \in {}^2\mathbb{N}_*$. En posant $w = u + 12$, on arrive à $(w - 4)(w + 4) \in {}^2\mathbb{N}_*$, soit $w^2 - 16 \in {}^2\mathbb{N}_*$. Notant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = w^2 - 16$, nous arrivons à $w^2 - m^2 = 16$. D'après le fait 3.1, $w^2 - m^2 = \sum_{k=m+1}^w (2k - 1)$. Ceci n'est possible que si $(w, m) = (5, 3)$ ⁶. Or $u \in 2\mathbb{N}$ donne $w \in 2\mathbb{N}$, d'où une contradiction.

- Supposons maintenant que $(a, b, c) \in \mathbb{N}^* \times {}^2\mathbb{N}_* \times \mathbb{N}^*$.

Dans ce cas, $ac \in {}^2\mathbb{N}_*$, soit $(u - 8)(u + 16) \in {}^2\mathbb{N}_*$. En posant $w = u + 4$, on arrive à $(w - 12)(w + 12) \in {}^2\mathbb{N}_*$, soit $w^2 - 144 \in {}^2\mathbb{N}_*$. Notant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = w^2 - 144$, nous arrivons à $w^2 - m^2 = 144$, d'où $w^2 - m^2 = \sum_{k=m+1}^w (2k - 1)$. Ceci n'est possible que

6. Noter que l'on doit avoir $2w - 1 \leq 16$, d'où $w \in \llbracket 0; 8 \rrbracket$.

si $(w, m) \in \{(13, 5), (15, 9), (20, 16), (37, 35)\}^7$. Ici aussi, $u \in 2\mathbb{N}$ donne $w \in 2\mathbb{N}$, donc $(w, m) = (20, 16)$, mais les équivalences suivantes lèvent une contradiction.

$$\begin{aligned} u + 4 = 20 &\iff (2n + 5)^2 - 17 = 24 \\ &\iff (2n + 5)^2 = 41 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} u + 4 = 20 \\ &\iff (2n + 5)^2 = 41 \end{aligned}} \right\} 41 \notin {}^2\mathbb{N}$$

- Supposons enfin que $(a, b, c) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times {}^2\mathbb{N}_*$.

Dans ce cas, $ab \in {}^2\mathbb{N}_*$, soit $(u - 8)(u + 8) \in {}^2\mathbb{N}_*$, c'est-à-dire $u^2 - 64 \in {}^2\mathbb{N}_*$. Notant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m^2 = u^2 - 64$, nous arrivons à $u^2 - m^2 = 64$. Ceci n'est possible que si $(u, m) \in \{(10, 6), (17, 15)\}$. Comme $u \in 2\mathbb{N}$, forcément $(u, m) = (10, 6)$, mais les équivalences suivantes lèvent une contradiction.

$$\begin{aligned} u = 10 &\iff (2n + 5)^2 - 17 = 10 \\ &\iff (2n + 5)^2 = 27 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} u = 10 \\ &\iff (2n + 5)^2 = 27 \end{aligned}} \right\} 27 \notin {}^2\mathbb{N}$$

Nous avons donc $a = \alpha A^2$, $b = \beta B^2$ et $c = \gamma C^2$ avec $(A, B, C) \in (\mathbb{N}^*)^3$, et $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{N}_{>1})^3$ un triplet d'entiers sans facteurs carrés. Nous avons les faits suivants.

- $\alpha \wedge \beta \in \{1, 2\}$ d'après $a \wedge b \mid 16$.
- $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2, 3\}$ d'après $a \wedge c \mid 24$.
- $\beta \wedge \gamma \in \{1, 2\}$ d'après $b \wedge c \mid 8$.
- $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$ car $\forall p \in \mathbb{P}_{>3}$, $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) \in (2\mathbb{N})^3$.

En fait, α , β et γ sont différents deux à deux.

- Démontrons que $\alpha \neq \beta$.

Dans le cas contraire, $16 = b - a = \alpha(B^2 - A^2)$ et $\alpha > 1$ donnent $B^2 - A^2 \in \{1, 2, 4, 8\}$. Or nous avons les impossibilités suivantes.

(1) $B^2 - A^2 = 1$ et $B^2 - A^2 = 2$ contredisent le fait 3.1.

(2) $B^2 - A^2 = 4$ n'est possible que si $(B, A) = (2, 0)$.

(3) $B^2 - A^2 = 8$ n'est possible que si $(B, A) = (3, 1)$ et $\alpha = 2$. Ceci donne $a = 2$, puis $u = 10$, mais nous avons vu que ceci était impossible.

- Nous avons aussi $\beta \neq \gamma$.

Dans le cas contraire, $8 = c - b = \beta(C^2 - B^2)$ et $\beta > 1$ donnent $C^2 - B^2 \in \{1, 2, 4\}$, mais ce qui précède ne laisse aucun choix possible.

- Enfin, $\alpha \neq \gamma$.

Dans le cas contraire, $C^2 - A^2 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ car $24 = c - a = \alpha(C^2 - A^2)$ et $\alpha > 1$. Nous obtenons alors les impossibilités suivantes.

(1) $C^2 - A^2 \in \{1, 2, 4\}$ est à rejeter comme précédemment.

(2) $C^2 - A^2 = 3$ n'est possible que si $(C, A) = (2, 1)$ et $\alpha = 8$, mais les équivalences suivantes lèvent une contradiction.

$$\begin{aligned} a = 8 &\iff u = 16 \\ &\iff (2n + 5)^2 - 17 = 16 \\ &\iff (2n + 5)^2 = 33 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} a = 8 \\ &\iff (2n + 5)^2 = 33 \end{aligned}} \right\} 33 \notin {}^2\mathbb{N}$$

(3) $C^2 - A^2 = 6$ est impossible.

7. Comme $2w - 1 \leq 144$ donne $w \in \llbracket 0; 72 \rrbracket$, il suffit de faire appel à un petit programme pour obtenir brutalement toutes les valeurs possibles.

- (4) $C^2 - A^2 = 8$ n'est possible que si $(C, A) = (3, 1)$ et $\alpha = 3$, mais les équivalences suivantes lèvent une contradiction.

$$\begin{aligned} a = 3 &\iff u = 11 \\ &\iff (2n + 5)^2 - 17 = 11 \\ &\iff (2n + 5)^2 = 28 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 28 \notin {}^2\mathbb{N}$$

- (5) $C^2 - A^2 = 12$ n'est possible que si $(C, A) = (4, 2)$ et $\alpha = 2$, mais ceci donnerait $a = 8$, or nous savons que cela est impossible.

Comme $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{2, 3, 6\}$, $\alpha \wedge \beta \in \{1, 2\}$, $\alpha \wedge \gamma \in \{1, 2, 3\}$ et $\beta \wedge \gamma \in \{1, 2\}$, et comme de plus α , β et γ sont différents deux à deux, il ne nous reste plus qu'à analyser les cas suivants.

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \wedge \gamma$	Statut
2	3	6	1	2	3	☒
2	6	3	2	1	3	☒
3	2	6	1	3	2	✓
3	6	2	3	1	2	☒
6	2	3	2	3	1	✓
6	3	2	3	2	1	☒

Traitons les deux cas restants en nous souvenant que $a = u - 8$, $b = u + 8$ et $c = u + 16$, où $u = (2n + 5)^2 - 17 \in 2\mathbb{N}$.

- Supposons $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, 2, 6)$, autrement dit $a = 3A^2$, $b = 2B^2$ et $c = 6C^2$.

Travaillons modulo 3 afin de lever une contradiction.

- (1) $a \equiv u - 2$ et $a \equiv 3A^2 \equiv 0$ donnent $u \equiv 2$.

- (2) D'autre part, $b \equiv 2B^2 \equiv 0$ ou 2 via les carrés modulo 3. Or $b \equiv u + 2 \equiv 1$ lève une contradiction.

- Supposons $(\alpha, \beta, \gamma) = (6, 2, 3)$, autrement dit $a = 6A^2$, $b = 2B^2$ et $c = 3C^2$.

La preuve précédente s'adapte sans difficulté puisque que $a \equiv 6A^2 \equiv 0$ et $b \equiv 2B^2$ modulo 3.

□

9. SOURCES UTILISÉES

- (1) Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré « $n(n+1)\dots(n+k)$ est un carré ? » sur le site lesmathematiques.net.

La démonstration du fait 7.1 via le principe des tiroirs trouve sa source dans cet échange.

- (2) L'article « *Le produit de 5 entiers consécutifs n'est pas le carré d'un entier.* » de T. Hayashi, Nouvelles Annales de Mathématiques, est consultable via Numdam, la bibliothèque numérique française de mathématiques.

Cet article a inspiré la preuve alternative du fait 7.1.

- (3) Un échange consulté le 28 janvier 2024, et titré « *product of six consecutive integers being a perfect numbers* » sur le site <https://math.stackexchange.com>.

La démonstration courte du fait 8.1 est donné dans cet échange. Vous y trouverez aussi un très joli argument basé sur les courbes elliptiques rationnelles.

10. AFFAIRE À SUIVRE...
