Nombres Impairs, Cubes & Carrés

$1^3 = 1$

$2^3 = 3 + 5$

$3^3 = 7 + 9 + 11$

$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$

$5^3 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29$

...

Pourquoi ?

$$5^3 = \overbrace{5^2}^{-4} + \underbrace{5^2}_{-2} + \underbrace{5^2}_{\text{Impair, on garde.}} + \underbrace{5^2}_{+2} + \overbrace{5^2}^{+4}$$

$$4^3 = \underbrace{4^2}_{-3} + \overbrace{4^2}^{-1} + \overbrace{4^2}^{+1} + \underbrace{4^2}_{+3}$$

Démo.

- $n = 2p \in 2\mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} n^3 &= n \times n^2 \\ &= 2p \times n^2 \\ &= \sum_{k=1}^{p} 2n^2 \\ &= \sum_{k=1}^{p} \left(n^2 - (2k-1) + n^2 + (2k-1) \right) \end{aligned}$$

Dans ce cas, le plus petit impair sera : $n^2 - (2p-1)$

$$\begin{aligned} &= 4p^2 - 2p + 1 \\ &= 2p(2p-1) + 1 \\ &= n(n-1) + 1 \end{aligned}$$

Le dernier sera $4p^2 + 2p - 1 = n(n+1) - 1$

Imp, 2
2, 3, ...

- $n = 2p+1 \in 2\mathbb{N}+1$

$$n^3 = n^2 + \sum_{k=1}^{p} (n^2 - 2k + n^2 + 2k)$$

Plus petit impair utilisé : $n^2 - 2p$
$= n^2 - (n-1)$
$= n(n-1)+1$

le dernier : $n^2 + 2p = n(n+1) - 1$

- Passage de $2p$ à $2p+1$.
  - Son 1er impair : $(2p+1)2p + 1$
  - Son dernier : $2p(2p+1) - 1$

  $+2$

- Passage de $2p+1$ à $2p+2$
  - Son 1er : $(2p+2)(2p+1)+1$
  - Son dernier : $(2p+1)(2p+2) - 1$

  $+2$

$1^2 = 1$

$2^2 = 1 + 3$

$3^2 = 1 + 3 + 5$

$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$

$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

...

Pourquoi ?

$$4^2 = \underset{-3}{4} + \overset{-1}{4} + \overset{+1}{4} + \underset{+3}{4}$$

$$5^2 = \overset{-4}{5} + \overset{-2}{5} + 5 + \overset{+2}{5} + \overset{+4}{5}$$

↳ Impair : on le garde.

DÉMO.

- $n = 2p \in 2\mathbb{N}^*$

$$n^2 = \sum_{k=1}^{p} \left(n - (2k-1) + n + (2k-1)\right)$$

1^{er} impair : $n - 2p + 1 = 1$

Dernier impair : $n + 2p - 1 = 2n - 1$

- $n = 2p + 1 \in 2\mathbb{N} + 1$

$$n^2 = n + \sum_{k=1}^{p} (n - 2k + n + 2k)$$

1^{er} impair : $n - 2p = 1$

Dernier impair : $n + 2p = 2n - 1$

Imp, 4
2, 3, ...

$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$

$= 1+3+\dots+29$

$= 15^2$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{j=0}^{n(n+1)-1} (2j+1)$$

$$2N-1 = n(n+1)-1 \Rightarrow N = \frac{n(n+1)}{2}$$

D'où,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = N^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Joli !

À mettre en lien avec somme géo. des cubes via la géo. 2D.

$\Downarrow$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(de façon très capillotractée !)

Et n^k pour $k \in [\![4 ; +\infty [\![$?

On a des trucs mais tjrs une somme d'impairs qui se suivent.

Par ex., pour $k = 4$, on a :

- $1^4 = 1$
- $2^4 = 8 + 8 = 7 + 9$
- $3^4 = 27 + 27 + 27 = 25 + 27 + 29$
- $5^4 = 125 + 125 + 125 + 125 + 125$
  $= 121 + 123 + 125 + 127 + 129$
- $4^4 = 64 + 64 + 64 + 64$
  $= 61 + 63 + 65 + 67$
- Premier impair : $n\ (n^2 - 1) + 1$
- Dernier impair : $n\ (n^2 + 1) - 1$

$$n^k = \sum_{n(n^{k-2} - 1) + 1}^{n(n^{k-2} + 1) - 1} (2j + 1)$$

Imp. , 6
2, 3, …

n^k, une preuve simple ! Ici $k \geq 3$

$$n^k = n^{k-2} \times n^2$$
$$= \underbrace{(n^{k-2} - 1)\, n^2}_{} + n^2$$
$$= N + (1 + 3 + \dots + (2n-1))$$

n pair $\Rightarrow$ N pair

n impair $\Rightarrow$ $n^{k-2} - 1$ pair $\Rightarrow$ N pair

$$n^k = (N+1) + (N+3) + \dots + (N + 2n - 1)$$

Reste le pb d'une Σ mini. en nbre de termes pour n^k si $n \in 2\mathbb{N}$