Intervalles de confiance

La méthode Monte-Carlo permet de calculer des quantités de la forme $\theta = E[X]$ où X est une variable aléatoire réelle ou vectorielle. Elle repose sur la génération de nombreux tirages de copies indépendantes de X et la loi forte des grands nombres :

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n) := \lim_{n\to\infty} \hat{\theta}_n. \tag{1}$$

La précision du résultat se mesure par la probabilité de se tromper. On appelle « intervalle de confiance à $\alpha\%$ », l'intervalle de la forme $[\hat{\theta}_n - \varepsilon, \hat{\theta}_n + \varepsilon]$, dans lequel on est sûr à $\alpha\%$ que se trouve le bon résultat, c'est-à-dire que l'on veut garantir

$$P(|\theta - \hat{\theta}_n| > \varepsilon) < 1 - \alpha.$$

Le théorème limite centrale indique que

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta - \hat{\theta}_n) \text{ converge en loi vers une v.a. gaussienne centrée réduite },$$

avec $\sigma^2 = var(X)$. On en déduit (abusivement) que

$$P(|\theta - \hat{\theta}_n| > \varepsilon) \simeq 2(2\pi)^{-1/2} \int_{\varepsilon\sqrt{n}/\sigma}^{\infty} e^{-u^2/2} du.$$

Soit β tel que

$$2(2\pi)^{-1/2} \int_{\beta}^{\infty} e^{-u^2/2} du = 1 - \alpha.$$

On en déduit que l'intervalle de confiance à $\alpha\%$ est donné par

$$[\hat{\theta}_n - \frac{\beta\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\theta}_n + \frac{\beta\sigma}{\sqrt{n}}].$$

Lorsque l'on ne connaît pas σ, on le remplace par la variance empirique des observations, notée σ_n et donnée par :

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \hat{\theta}_n)^2.$$

Pour $\alpha = 0,95$, on a $\beta = 1,96$.