Module Files d'attente et trafic

SPEIT

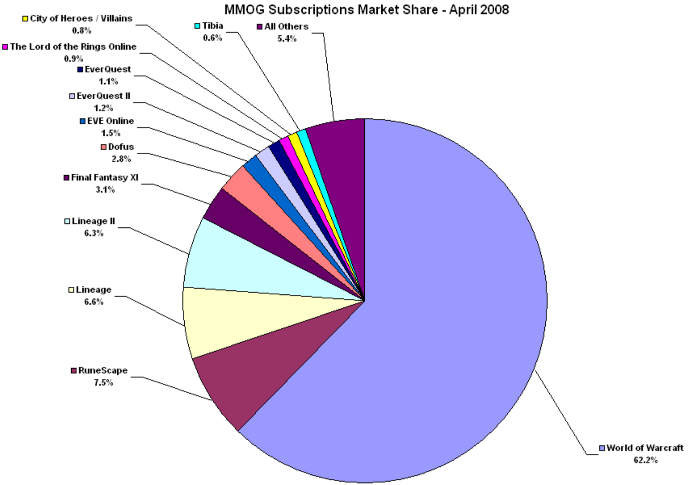
2017

Bibliographie

Au supermarché

Les téléphones mobiles

Les jeux temps-réel



Autres exemples

- Lignes de production

Autres exemples

- Lignes de production
- Réparations de machines

Autres exemples

- Lignes de production
- Réparations de machines
- Internet

Autres exemples

- Lignes de production
- Réparations de machines
- Internet
- etc.

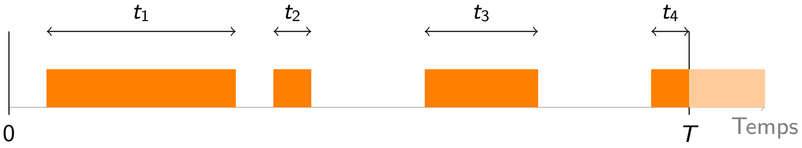
Processus de Markov

- Outil mathématique $=$ processus de Markov

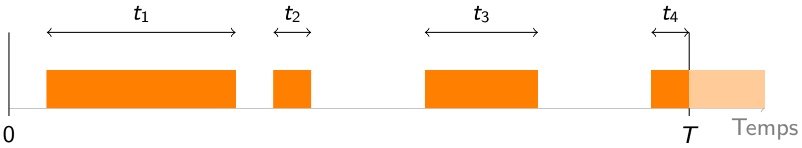
Processus de Markov

- Outil mathématique = processus de Markov
- processus de Markov= chaînes de Markov + processus de Poisson

Trafic d'une jonction



Trafic d'une jonction



$$\rho = \frac{\sum_i t_i}{T}.$$

Trafic d'un faisceau

- Un faisceau=plusieurs jonctions

$$\rho_{\text{faisceau}} = \sum_{\text{jonctions}} \rho_{\text{jonction}}.$$

Trafic d'un faisceau

- Un faisceau=plusieurs jonctions

$$\rho_{\text{faisceau}} = \sum_{\text{jonctions}} \rho_{\text{jonction}}.$$

- Ergodicité :

  moyennes spatiales = moyenne temporelles

Trafic d'un faisceau

- Un faisceau=plusieurs jonctions

$$\rho_{\text{faisceau}} = \sum_{\text{jonctions}} \rho_{\text{jonction}}.$$

- Ergodicité :

$$\text{moyennes spatiales} = \text{moyenne temporelles}$$

- Pour les jonctions

$$p = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_j t_j = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_n X_n(t), \qquad (10)$$

où $X_n = 1$ si la jonction n est occupée à l'instant t, $X_n = 0$ sinon.

Trafic d'un faisceau

- Un faisceau=plusieurs jonctions

$$\rho_{\text{faisceau}} = \sum_{\text{jonctions}} \rho_{\text{jonction}}.$$

- Ergodicité :

$$\text{moyennes spatiales} = \text{moyenne temporelles}$$

- Pour les jonctions

$$p = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_j t_j = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_n X_n(t), \qquad (10)$$

où $X_n = 1$ si la jonction n est occupée à l'instant t, $X_n = 0$ sinon.

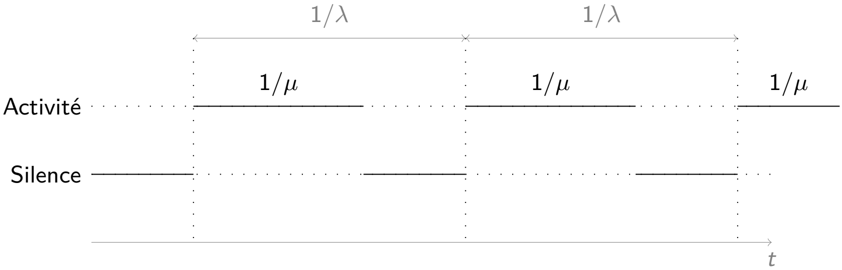
- Estimation de p ?

Appels déterministes

- appels se produisent toutes les $1/\lambda$

Appels déterministes

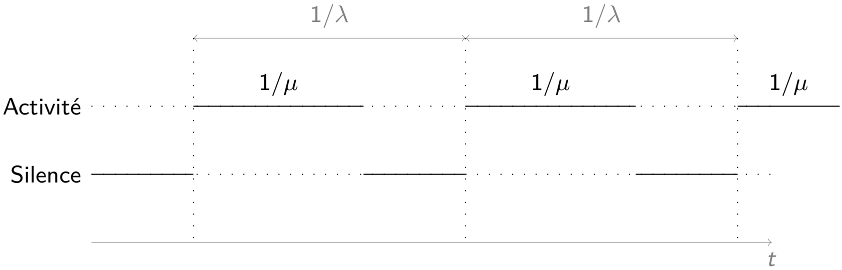
- appels se produisent toutes les $1/\lambda$
- durent exactement $1/\mu$ secondes avec $\mu > \lambda$



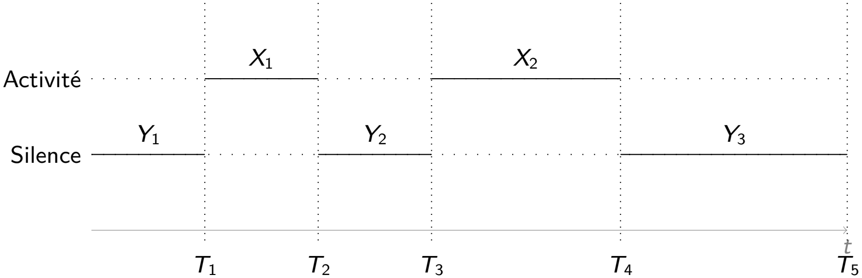
Appels déterministes

- appels se produisent toutes les $1/\lambda$
- durent exactement $1/\mu$ secondes avec $\mu > \lambda$
- le trafic est donné par

$$\frac{1}{T}(\lambda T \times 1/\mu) = \lambda/\mu.$$



Appels aléatoires



- (X_n, Y_n) indépendantes

- (X_n, Y_n) indépendantes
- X_n a pour loi $\mathbf{P}_X$ et Y_n pour loi $\mathbf{P}_Y$.

- (X_n, Y_n) indépendantes
- X_n a pour loi $\mathbf{P}_X$ et Y_n pour loi $\mathbf{P}_Y$.
- Moyennes :

$$1/\mu = \int y \, \mathrm{d}\, \mathbf{P}_Y(y),\ 1/\tau = \int x \, \mathrm{d}\, \mathbf{P}_X(x),\ \lambda = \frac{1}{1/\tau + 1/\mu} \cdot .$$

- (X_n, Y_n) indépendantes
- X_n a pour loi $\mathbf{P}_X$ et Y_n pour loi $\mathbf{P}_Y$.
- Moyennes :

$$1/\mu = \int y \, \mathrm{d}\,\mathbf{P}_Y(y),\ 1/\tau = \int x \, \mathrm{d}\,\mathbf{P}_X(x),\ \lambda = \frac{1}{1/\tau + 1/\mu} \cdot .$$

- On pose :

$$T_0 = 0,\ T_n = T_{n-1} + X_n + Y_n,\ T_n' = T_n + X_n,$$

et :

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } T_n' \leq t < T_{n+1} \\ 0 & \text{si } T_n \leq t < T_n'. \end{cases}$$

- (X_n, Y_n) indépendantes
- X_n a pour loi $\mathbf{P}_X$ et Y_n pour loi $\mathbf{P}_Y$.
- Moyennes :

$$1/\mu = \int y \, \mathrm{d}\, \mathbf{P}_Y(y),\ 1/\tau = \int x \, \mathrm{d}\, \mathbf{P}_X(x),\ \lambda = \frac{1}{1/\tau + 1/\mu} \cdot .$$

- On pose :

$$T_0 = 0,\ T_n = T_{n-1} + X_n + Y_n,\ T'_n = T_n + X_n,$$

et :

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } T'_n \le t < T_{n+1} \\ 0 & \text{si } T_n \le t < T'_n. \end{cases}$$

- La théorie du renouvellement montre

$$\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{1}_1(X(s)) \, \mathrm{d}\, s \xrightarrow{T\to\infty} \frac{1}{\mu} \frac{1}{1/\lambda} = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{11}$$

En résumé

Charge (trafic)

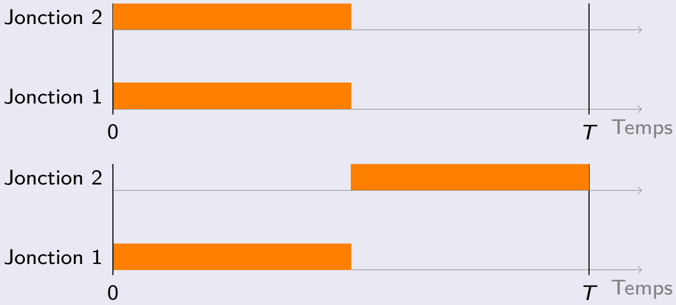
charge $=$ nombre moyen d'appels par unité de temps $\times$ durée moyenne d'un appel .

En résumé

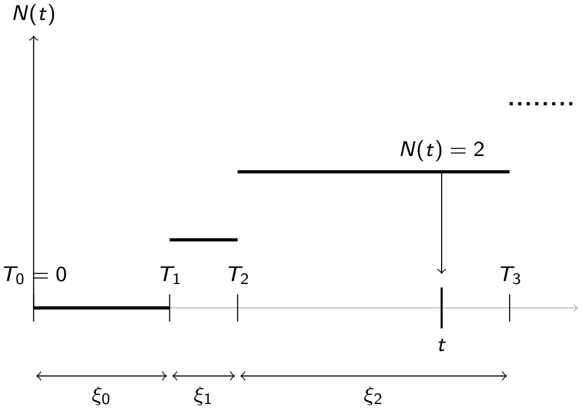
Charge (trafic)

charge = nombre moyen d'appels par unité de temps $\times$ durée moyenne d'un appel .

Il faut aussi un modèle pour les instants d'arrivées.



Processus ponctuels



Processus de Poisson

Définition

Le processus ponctuel N est un processus de Poisson d'intensité λ si et seulement si les variables aléatoires $(\xi_n,\ n \in \mathbf{N})$ sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ.

Propriétés

Le processus ponctuel N est un processus de Poisson d'intensité λ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

Propriétés

Le processus ponctuel N est un processus de Poisson d'intensité λ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- pour tout $t \geq 0$, la variable aléatoire $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt ;

Propriétés

Le processus ponctuel N est un processus de Poisson d'intensité λ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- pour tout $t \geq 0$, la variable aléatoire $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt ;
- conditionnellement à $\{N(t) = n\}$, la famille $(T_1, \cdots, T_n)$ est uniformément distribuée sur $[0, t]$.

Simulation (méthode I)

Algorithme 6 . Réalisation d'une trajectoire d'un processus de Poisson (méthode 1)

Données : λ T

Résultat : une trajectoire $(t_n,\ n \geq 1)$ sur $[0,\ T]$ d'un d'un processus de Poisson d'intensité λ

$t \leftarrow 0$;

$n \leftarrow 0$;

tant que $t \leq T$ **faire**

  $x \leftarrow$ réalisation d'une $\varepsilon(\lambda)$;

  $t \leftarrow t + x$;

  $t_n \leftarrow t$;

  $n \leftarrow n + 1$

fin

retourner $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n$

Simulation (méthode II)

Algorithme 7 . Réalisation d'une trajectoire d'un processus de Poisson (méthode 2)

Données : λ T

Résultat : une trajectoire $(t_n,\ n \geq 1)$ sur $[0,\ T]$ d'un processus de Poisson d'intensité λ

$n \leftarrow$ réalisation d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λT;

pour $i = 1, \cdots, n$ **faire**

$u_i \leftarrow$ réalisation d'une $U([0,\ 1])$;

fin

$(t_1, \cdots, t_n) \leftarrow$ tri en croissant de $(u_1, \cdots, u_n)$;

retourner $t_1,\ t_2, \cdots, t_n$

Concaténation de trajectoires

Le processus ponctuel N est un processus de Poisson d'intensité λ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

Concaténation de trajectoires

Le processus ponctuel N est un processus de Poisson d'intensité λ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- pour tout $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, les variables aléatoires $(N(t_i + 1) - N(t_i), 1 \leq i \leq n - 1)$ sont indépendantes ;

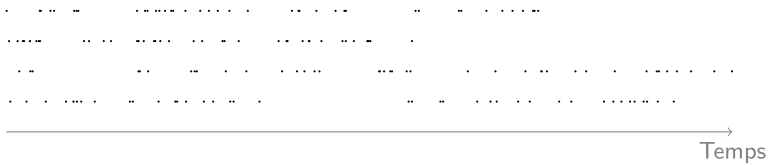
Concaténation de trajectoires

Le processus ponctuel N est un processus de Poisson d'intensité λ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- pour tout $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, les variables aléatoires $(N(t_i + 1) - N(t_i),\ 1 \leq i \leq n - 1)$ sont indépendantes ;
- pour tout t, s, la variable aléatoire $N(t + s) - N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λs :

$$\mathbf{P}(N(t + s) - N(t) = k) = \exp(-\lambda s) \frac{(\lambda s)^k}{k!}.$$

4 trajectoires



Amincissement

A chaque point de N, on décide qu'il appartient à N^1 avec probabilité p et à N^2 avec probabilité $1 - p$, ce tirage au sort étant indépendant de tout le reste et en particulier des précédents tirages au sort

Amincissement

Amincissement

A chaque point de N, on décide qu'il appartient à N^1 avec probabilité p et à N^2 avec probabilité $1-p$, ce tirage au sort étant indépendant de tout le reste et en particulier des précédents tirages au sort

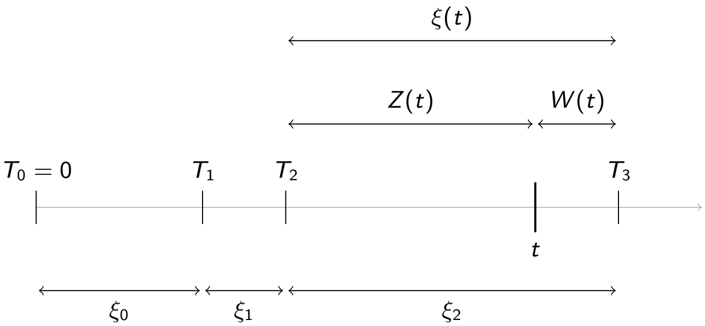
Les processus N^1 et N^2 résultants de l'amincissement de N, sont deux processus de Poisson indépendants d'intensités respectives λp et $\lambda(1-p)$.

Superposition

Superposition

La superposition de deux processus de Poisson indépendants est un processus de Poisson d'intensité somme.

Paradoxe de l'autobus



$$\begin{cases} W(t) & = T_{N(t)+1} - t, \text{ temps d'attente} \\ Z(t) & = t - T_{N(t)}, \text{ temps de « ratage »} \\ \xi(t) & = W(t) + Z(t) = T_{N(t)+1} - T_{N(t)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} W(t) & = T_{N(t)+1} - t, \text{ temps d'attente} \\ Z(t) & = t - T_{N(t)}, \text{ temps de « ratage »} \\ \xi(t) & = W(t) + Z(t) = T_{N(t)+1} - T_{N(t)}, \end{cases}$$

Théorème

$W(t)$ suit une loi exponentielle de paramètre λ et est indépendante de $Z(t)$, dont la loi est donnée par :

$$\mathbf{P}(Z(t) \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } 0 \leq x < t; \\ 1 & \text{si } x \geq t. \end{cases}$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z(t) \leq x,\ W(t) > y) &= \sum_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(Z(t) \leq x,\ W(t) > y,\ N(t) = n) \\
&= \sum_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(t - T_n \leq x,\ T_n + \xi_n - t > y,\ T_n \leq t < T_n + \xi_n) \\
&= \sum_{n>1} \iint \mathbf{1}_{\{t-u\leq x\}}\, \mathbf{1}_{\{u+v-t>y\}}\, \mathbf{1}_{\{u\leq t\}}\, \mathrm{d}\,\mathbf{P}_{T_n}(u)\, \mathrm{d}\,\mathbf{P}_{\xi_{n+1}}(v) \\
&= \sum_{n>1} \int_{t-x}^{t} \lambda^n e^{-\lambda u} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} \left(\int_{t+y-u}^{\infty} \lambda e^{\lambda v}\, dv \right) \mathrm{d}\,u \\
&= \sum_{n>1} \lambda^n e^{-\lambda(t+y)} \int_{t-x}^{t} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathrm{d}\,u \\
&= \sum_{n>1} \lambda^n e^{-\lambda(t+y)} \left[\frac{t^n}{n!} - \frac{(t-x)^n}{n!} \right] \\
&= e^{-\lambda(t+y)} \left(\sum_{n>1} \frac{(\lambda t)^n}{n!} - \sum_{n>1} \frac{(\lambda(t-x))^n}{n!} \right) \\
&= e^{-\lambda(t+y)} \left(e^{\lambda t} - 1 - \left(e^{\lambda(t-x)} - 1 \right) \right) = e^{-\lambda y}(1 - e^{-\lambda x}).
\end{aligned}
$$

Domaine de validité

- Le processus de Poisson peut modéliser fidèlement les activités humaines (arrivées dans un magasin, consultation d'une page Web, etc.)

Domaine de validité

- Le processus de Poisson peut modéliser fidèlement les activités humaines (arrivées dans un magasin, consultation d'une page Web, etc.)
- Il ne peut pas servir à modéliser les activités générées par une machine (paquets dans un réseau, robots, etc.) où les inter-arrivées sont plutôt de type déterministes.

Soit N un processus de Poisson d'intensité λ, on note T_n le n[e] instant de saut. Par convention, $T_0 = 0$. Soit $(Z_n, n \geq 1)$, une suite de variables aléatoires de même loi telles que pour tout n, T_n et Z_n sont indépendantes. Soit g la densité de la loi commune aux Z_n.

1. Montrer que pour toute fonction f :

$$E[f(T_n, Z_n)] = \int_0^{+\infty} \int f(t,z) g(z) \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \, \mathrm{d}\, z \, \mathrm{d}\, t.$$

Soit N un processus de Poisson d'intensité λ, on note T_n le n$^{\text{e}}$ instant de saut. Par convention, $T_0 = 0$. Soit $(Z_n, n \geq 1)$, une suite de variables aléatoires de même loi telles que pour tout n, T_n et Z_n sont indépendantes. Soit g la densité de la loi commune aux Z_n.

1. Montrer que pour toute fonction f :

$$E[f(T_n, Z_n)] = \int_0^{+\infty} \int f(t,z)g(z)\lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \, \mathrm{d}\, z \, \mathrm{d}\, t.$$

2. En déduire que :

$$E[\sum_{n\geq 1} f(T_n, Z_n)] = \lambda \int_0^{+\infty} \int f(t,z)g(z) \, \mathrm{d}\, z \, \mathrm{d}\, t.$$

Soit N un processus de Poisson d'intensité λ, on note T_n le n^{e} instant de saut. Par convention, $T_0 = 0$. Soit $(Z_n, n \geq 1)$, une suite de variables aléatoires de même loi telles que pour tout n, T_n et Z_n sont indépendantes. Soit g la densité de la loi commune aux Z_n.

1. Montrer que pour toute fonction f :

$$E[f(T_n, Z_n)] = \int_0^{+\infty} \int f(t,z) g(z) \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \, \mathrm{d}\, z \, \mathrm{d}\, t.$$

2. En déduire que :

$$E[\sum_{n \geq 1} f(T_n, Z_n)] = \lambda \int_0^{+\infty} \int f(t,z) g(z) \, \mathrm{d}\, z \, \mathrm{d}\, t.$$

3. On suppose que les communications téléphoniques d'un abonné durent un temps aléatoire de loi exponentielle de moyenne trois minutes. Ces durées sont indépendantes entre elles. Au siècle dernier, le coût d'une communication était fonction de sa durée t selon la formule suivante :

$$c(t) = \alpha \text{ si } t \leq t_0 \text{ et } c(t) = \alpha + \beta(t - t_0) \text{ si } t \geq t_0.$$

Application numérique

Déduire de ce qui précède que le coût moyen d'une heure totale de communication est donné par :

$$\lambda \int_0^1 c(t)\lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}\,t$$

avec $\lambda = 20$. (Indication : considérer $Z_n = T_{n+1} - T_n$ et expliquer pourquoi on peut appliquer le résultat précédent.)
Pour les communications locales, en 1999, on avait les paramètres suivants : $t_0 = 3$ minutes, $\alpha = 0{,}11$ euro et $\beta = 0{,}043$ euro par minute. Pour les communications nationales, $t_0 = 39$ secondes et $\beta = 0{,}17$ euro par minute. α était le même. En tarif réduit, diviser β par 2. En mettant $t_0 = 1$ minute et $\alpha = 0{,}15$ euro, à combien s'élevait le prix de la seconde supplémentaire en téléphonie mobile dans un forfait dont le montant pour 1 heure de communication était de 23,62 euros ?

Distributeur de billets

Un distributeur automatique de billets enregistre les instants de début et de fin de requêtes de ces clients mais évidemment par leur heure d'arrivée dans la file. Un nouveau cycle d'activité ayant commencé à 7h30, on a relevé les données du tableau **??**.

Client numéro	Début de service	Fin de service
0	7h30	7h34
1	7h34	7h40
2	7h40	7h42
3	7h45	7h50

Supposons que les arrivées aient lieu selon processus de Poisson, que peut-on dire de l'instant d'arrivée T_1 du client numéro 1? En particulier, calculer son espérance.