

# Module Files d'attente et trafic

SPEIT

2017

# Bibliographie

collection méthodes stochastiques appliquées dirigée par Nikolaos Limnios et Jacques Janssen

D'Internet aux smartphones, des réseaux sociaux à la vidéo à la demande, les mathématiques sont présentes dans toutes les étapes de la conception et du déploiement des réseaux modernes de télécommunications.

Dans un environnement éminemment aléatoire, les protocoles doivent toujours être plus performants et adaptés aux contextes et services, les ressources doivent être allouées en nombre suffisant mais non disproportionné. *Modélisation et analyse stochastiques des réseaux de télécommunications* étudie comment la théorie des files d'attente, la géométrie et l'analyse stochastique peuvent résoudre ces contraintes.

Dans un souci de rigueur mathématique et de clarté pédagogique, les outils probabilistes de bases (chaines et processus de Markov, suites récurrentes aléatoires, processus ponctuels réels et spatiaux) sont exposés de façon pertinente grâce à la théorie des martingales. Ils sont ensuite mis en œuvre pour obtenir un large éventail de résultats concrets applicables aux systèmes de communications.

## Les auteurs

Laurent Decreusefond est professeur de mathématiques (probabilités et stochastique) à Telecom ParisTech. Ses recherches portent sur les processus fractionnaires et ponctuels, le calcul de Malliavin et leurs applications à l'évaluation de performance des réseaux.

Pascal Moyal est maître de conférences en mathématiques appliquées à l'université de Technologie de Compiègne. Ses recherches portent sur les processus stochastiques, la théorie ergodique, les files d'attente et les graphes aléatoires.

hermes  
Science

www.hermes-science.com

978-2-7462-2495-7



Modélisation et analyse stochastiques des réseaux  
de télécommunications

Laurent Decreusefond  
Pascal Moyal

collection méthodes stochastiques appliquées dirigée par Nikolaos Limnios et Jacques Janssen

## Modélisation et analyse stochastiques des réseaux de télécommunications

Laurent Decreusefond  
Pascal Moyal



hermes

Lavoisier

## Au supermarché

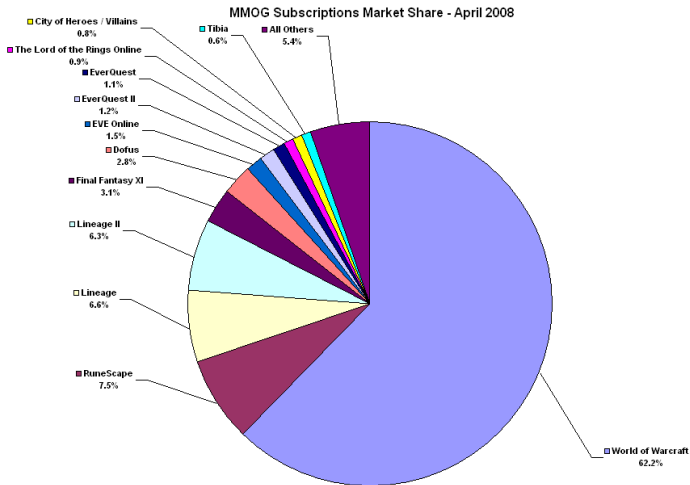


## Les téléphones mobiles

has the  
fewest  
dropped  
calls  
of any network\*



# Les jeux temps-réel



## Autres exemples

- Lignes de production

## Autres exemples

- Lignes de production
- Réparations de machines

## Autres exemples

- Lignes de production
- Réparations de machines
- Internet



## Autres exemples

- Lignes de production
- Réparations de machines
- Internet
- etc.

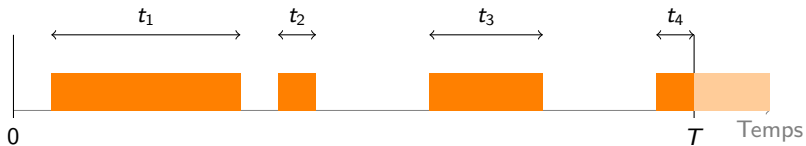
# Processus de Markov

- Outil mathématique = processus de Markov

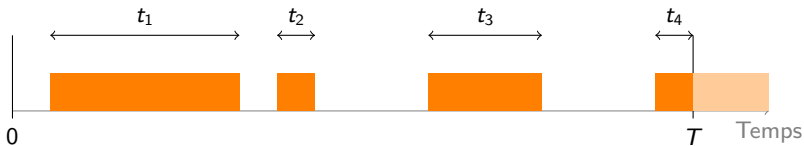
# Processus de Markov

- Outil mathématique = processus de Markov
- processus de Markov = chaînes de Markov + processus de Poisson

# Trafic d'une jonction



## Trafic d'une jonction



$$\rho = \frac{\sum_i t_i}{T}.$$

# Trafic d'un faisceau

- Un faisceau=plusieurs jonctions

$$\rho_{\text{faisceau}} = \sum_{\text{jonctions}} \rho_{\text{jonction}}.$$

## Trafic d'un faisceau

- Un faisceau=plusieurs jonctions

$$\rho_{\text{faisceau}} = \sum_{\text{jonctions}} \rho_{\text{jonction}}.$$

- Ergodicité :

moyennes spatiales = moyenne temporelles

## Trafic d'un faisceau

- Un faisceau=plusieurs jonctions

$$\rho_{\text{faisceau}} = \sum_{\text{jonctions}} \rho_{\text{jonction}}.$$

- Ergodicité :

moyennes spatiales = moyenne temporelles

- Pour les jonctions

$$p = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_j t_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_n X_n(t), \quad (10)$$

où  $X_n = 1$  si la jonction  $n$  est occupée à l'instant  $t$ ,  $X_n = 0$  sinon.



## Trafic d'un faisceau

- Un faisceau=plusieurs jonctions

$$\rho_{\text{faisceau}} = \sum_{\text{jonctions}} \rho_{\text{jonction}}.$$

- Ergodicité :

moyennes spatiales = moyenne temporelles

- Pour les jonctions

$$p = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_j t_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_n X_n(t), \quad (10)$$

où  $X_n = 1$  si la jonction  $n$  est occupée à l'instant  $t$ ,  $X_n = 0$  sinon.

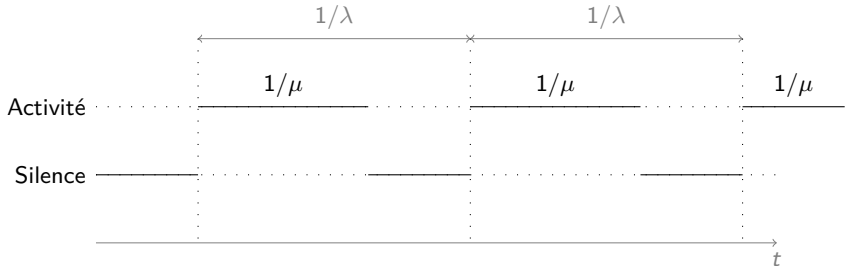
- Estimation de  $p$  ?

# Appels déterministes

- appels se produisent toutes les  $1/\lambda$

# Appels déterministes

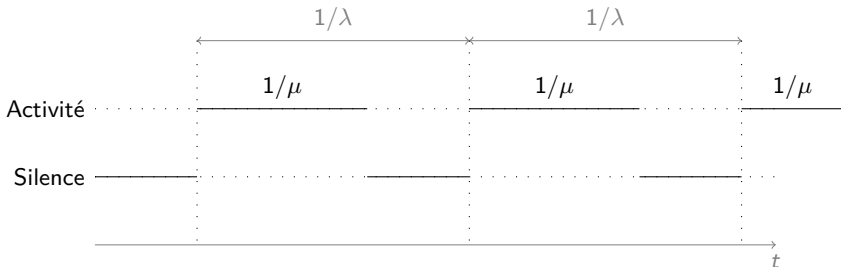
- appels se produisent toutes les  $1/\lambda$
- durent exactement  $1/\mu$  secondes avec  $\mu > \lambda$



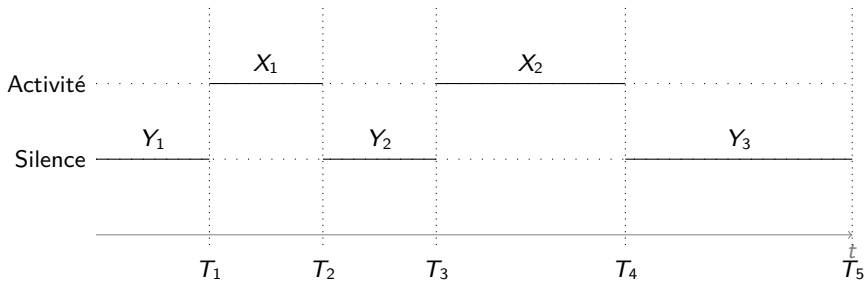
## Appels déterministes

- appels se produisent toutes les  $1/\lambda$
- durent exactement  $1/\mu$  secondes avec  $\mu > \lambda$
- le trafic est donné par

$$\frac{1}{T}(\lambda T \times 1/\mu) = \lambda/\mu.$$



# Appels aléatoires



- $(X_n, Y_n)$  indépendantes

- $(X_n, Y_n)$  indépendantes
- $X_n$  a pour loi  $\mathbf{P}_X$  et  $Y_n$  pour loi  $\mathbf{P}_Y$ .

- $(X_n, Y_n)$  indépendantes
- $X_n$  a pour loi  $\mathbf{P}_X$  et  $Y_n$  pour loi  $\mathbf{P}_Y$ .
- Moyennes :

$$1/\mu = \int y \, d\mathbf{P}_Y(y), \quad 1/\tau = \int x \, d\mathbf{P}_X(x), \quad \lambda = \frac{1}{1/\tau + 1/\mu}.$$



- $(X_n, Y_n)$  indépendantes
- $X_n$  a pour loi  $\mathbf{P}_X$  et  $Y_n$  pour loi  $\mathbf{P}_Y$ .
- Moyennes :

$$1/\mu = \int y \, d\mathbf{P}_Y(y), \quad 1/\tau = \int x \, d\mathbf{P}_X(x), \quad \lambda = \frac{1}{1/\tau + 1/\mu}.$$

- On pose :

$$T_0 = 0, \quad T_n = T_{n-1} + X_n + Y_n, \quad T'_n = T_n + X_n,$$

et :

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } T'_n \leq t < T_{n+1} \\ 0 & \text{si } T_n \leq t < T'_n. \end{cases}$$

- $(X_n, Y_n)$  indépendantes
- $X_n$  a pour loi  $\mathbf{P}_X$  et  $Y_n$  pour loi  $\mathbf{P}_Y$ .
- Moyennes :

$$1/\mu = \int y \, d\mathbf{P}_Y(y), \quad 1/\tau = \int x \, d\mathbf{P}_X(x), \quad \lambda = \frac{1}{1/\tau + 1/\mu}.$$

- On pose :

$$T_0 = 0, \quad T_n = T_{n-1} + X_n + Y_n, \quad T'_n = T_n + X_n,$$

et :

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } T'_n \leq t < T_{n+1} \\ 0 & \text{si } T_n \leq t < T'_n. \end{cases}$$

- La théorie du renouvellement montre

$$\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{1}_1(X(s)) \, ds \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu} \frac{1}{1/\lambda} = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (11)$$

## En résumé

### Charge (trafic)

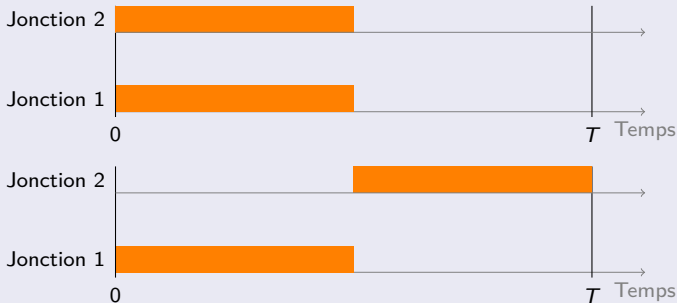
charge = nombre moyen d'appels par unité de temps  $\times$  durée moyenne d'un appel .

## En résumé

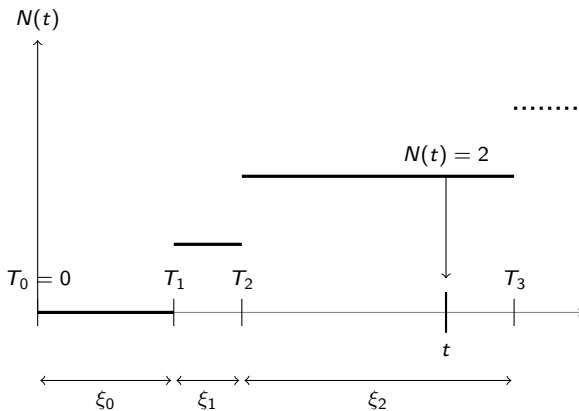
### Charge (trafic)

charge = nombre moyen d'appels par unité de temps  $\times$  durée moyenne d'un appel .

Il faut aussi un modèle pour les instants d'arrivées.



# Processus ponctuels



# Processus de Poisson

## Définition

Le processus ponctuel  $N$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  si et seulement si les variables aléatoires  $(\xi_n, n \in \mathbf{N})$  sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

## Propriétés

Le processus ponctuel  $N$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

## Propriétés

Le processus ponctuel  $N$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- pour tout  $t \geq 0$ , la variable aléatoire  $N(t)$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$  ;



## Propriétés

Le processus ponctuel  $N$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- pour tout  $t \geq 0$ , la variable aléatoire  $N(t)$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$  ;
- conditionnellement à  $\{N(t) = n\}$ , la famille  $(T_1, \dots, T_n)$  est uniformément distribuée sur  $[0, t]$ .

## Simulation (méthode 1)

---

**Algorithme 6** . Réalisation d'une trajectoire d'un processus de Poisson (méthode 1)

---

**Données** :  $\lambda$   $T$

**Résultat** : une trajectoire  $(t_n, n \geq 1)$  sur  $[0, T]$  d'un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$

$t \leftarrow 0;$

$n \leftarrow 0;$

**tant que**  $t \leq T$  **faire**

$x \leftarrow$  réalisation d'une  $\varepsilon(\lambda);$

$t \leftarrow t + x;$

$t_n \leftarrow t;$

$n \leftarrow n + 1$

**fin**

**retourner**  $t_1, t_2, \dots, t_n$

---

## Simulation (méthode II)

---

**Algorithme 7** . Réalisation d'une trajectoire d'un processus de Poisson (méthode 2)

---

**Données** :  $\lambda$   $T$

**Résultat** : une trajectoire  $(t_n, n \geq 1)$  sur  $[0, T]$  d'un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$

$n \leftarrow$  réalisation d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre  $\lambda T$ ;

**pour**  $i = 1, \dots, n$  **faire**

$u_i \leftarrow$  réalisation d'une  $U([0, 1])$ ;

**fin**

$(t_1, \dots, t_n) \leftarrow$  tri en croissant de  $(u_1, \dots, u_n)$ ;

**retourner**  $t_1, t_2, \dots, t_n$

---

## Concaténation de trajectoires

Le processus ponctuel  $N$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

## Concaténation de trajectoires

Le processus ponctuel  $N$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- pour tout  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , les variables aléatoires  $(N(t_i + 1) - N(t_i), 1 \leq i \leq n - 1)$  sont indépendantes ;

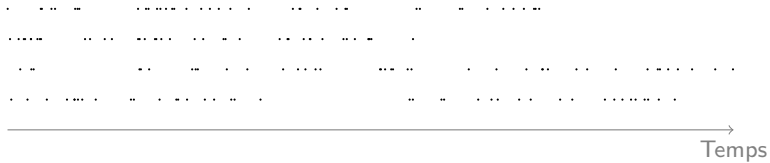
## Concaténation de trajectoires

Le processus ponctuel  $N$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- pour tout  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , les variables aléatoires  $(N(t_i + 1) - N(t_i), 1 \leq i \leq n - 1)$  sont indépendantes ;
- pour tout  $t, s$ , la variable aléatoire  $N(t + s) - N(t)$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda s$  :

$$\mathbf{P}(N(t + s) - N(t) = k) = \exp(-\lambda s) \frac{(\lambda s)^k}{k!}.$$

## 4 trajectoires



# Amincissement

## Amincissement



A chaque point de  $N$ , on décide qu'il appartient à  $N^1$  avec probabilité  $p$  et à  $N^2$  avec probabilité  $1 - p$ , ce tirage au sort étant indépendant de tout le reste et en particulier des précédents tirages au sort



# Amincissement

## Amincissement



A chaque point de  $N$ , on décide qu'il appartient à  $N^1$  avec probabilité  $p$  et à  $N^2$  avec probabilité  $1 - p$ , ce tirage au sort étant indépendant de tout le reste et en particulier des précédents tirages au sort

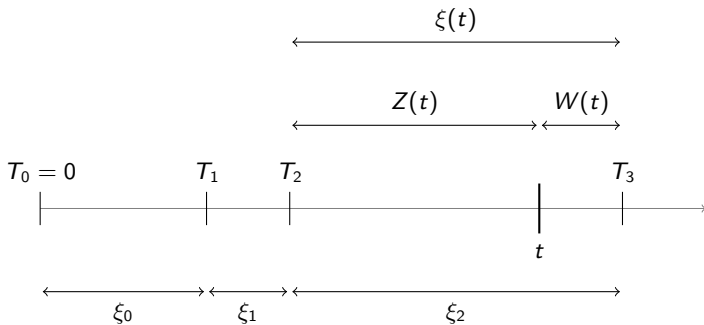
Les processus  $N^1$  et  $N^2$  résultants de l'amincissement de  $N$ , sont deux processus de Poisson indépendants d'intensités respectives  $\lambda p$  et  $\lambda(1 - p)$ .

# Superposition

## Superposition

La superposition de deux processus de Poisson indépendants est un processus de Poisson d'intensité somme.

# Paradoxe de l'autobus



$$\begin{cases} W(t) &= T_{N(t)+1} - t, \text{ temps d'attente} \\ Z(t) &= t - T_{N(t)}, \text{ temps de « ratage »} \\ \xi(t) &= W(t) + Z(t) = T_{N(t)+1} - T_{N(t)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} W(t) &= T_{N(t)+1} - t, \text{ temps d'attente} \\ Z(t) &= t - T_{N(t)}, \text{ temps de « ratage »} \\ \xi(t) &= W(t) + Z(t) = T_{N(t)+1} - T_{N(t)}, \end{cases}$$

## Théorème

$W(t)$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  et est indépendante de  $Z(t)$ , dont la loi est donnée par :

$$\mathbf{P}(Z(t) \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } 0 \leq x < t; \\ 1 & \text{si } x \geq t. \end{cases}$$

# Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(Z(t) \leq x, W(t) > y) &= \sum_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{P}(Z(t) \leq x, W(t) > y, N(t) = n) \\
 &= \sum_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{P}(t - T_n \leq x, T_n + \xi_n - t > y, T_n \leq t < T_n + \xi_n) \\
 &= \sum_{n > 1} \iint \mathbf{1}_{\{t-u \leq x\}} \mathbf{1}_{\{u+v-t > y\}} \mathbf{1}_{\{u \leq t\}} d\mathbf{P}_{T_n}(u) d\mathbf{P}_{\xi_{n+1}}(v) \\
 &= \sum_{n > 1} \int_{t-x}^t \lambda^n e^{-\lambda u} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} \left( \int_{t+y-u}^{\infty} \lambda e^{\lambda v} dv \right) du \\
 &= \sum_{n > 1} \lambda^n e^{-\lambda(t+y)} \int_{t-x}^t \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} du \\
 &= \sum_{n > 1} \lambda^n e^{-\lambda(t+y)} \left[ \frac{t^n}{n!} - \frac{(t-x)^n}{n!} \right] \\
 &= e^{-\lambda(t+y)} \left( \sum_{n > 1} \frac{(\lambda t)^n}{n!} - \sum_{n > 1} \frac{(\lambda(t-x))^n}{n!} \right) \\
 &= e^{-\lambda(t+y)} \left( e^{\lambda t} - 1 - \left( e^{\lambda(t-x)} - 1 \right) \right) = e^{-\lambda y} (1 - e^{-\lambda x}).
 \end{aligned}$$

## Domaine de validité

- Le processus de Poisson peut modéliser fidèlement les activités humaines (arrivées dans un magasin, consultation d'une page Web, etc.)

## Domaine de validité

- Le processus de Poisson peut modéliser fidèlement les activités humaines (arrivées dans un magasin, consultation d'une page Web, etc.)
- Il ne peut pas servir à modéliser les activités générées par une machine (paquets dans un réseau, robots, etc.) où les inter-arrivées sont plutôt de type déterministes.



Soit  $N$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ , on note  $T_n$  le  $n^{\text{e}}$  instant de saut. Par convention,  $T_0 = 0$ . Soit  $(Z_n, n \geq 1)$ , une suite de variables aléatoires de même loi telles que pour tout  $n$ ,  $T_n$  et  $Z_n$  sont indépendantes. Soit  $g$  la densité de la loi commune aux  $Z_n$ .

① Montrer que pour toute fonction  $f$  :

$$E[f(T_n, Z_n)] = \int_0^{+\infty} \int f(t, z) g(z) \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} dz dt.$$

Soit  $N$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ , on note  $T_n$  le  $n^{\text{e}}$  instant de saut. Par convention,  $T_0 = 0$ . Soit  $(Z_n, n \geq 1)$ , une suite de variables aléatoires de même loi telles que pour tout  $n$ ,  $T_n$  et  $Z_n$  sont indépendantes. Soit  $g$  la densité de la loi commune aux  $Z_n$ .

① Montrer que pour toute fonction  $f$  :

$$E[f(T_n, Z_n)] = \int_0^{+\infty} \int f(t, z) g(z) \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} dz dt.$$

② En déduire que :

$$E\left[\sum_{n \geq 1} f(T_n, Z_n)\right] = \lambda \int_0^{+\infty} \int f(t, z) g(z) dz dt.$$

Soit  $N$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ , on note  $T_n$  le  $n^{\text{e}}$  instant de saut. Par convention,  $T_0 = 0$ . Soit  $(Z_n, n \geq 1)$ , une suite de variables aléatoires de même loi telles que pour tout  $n$ ,  $T_n$  et  $Z_n$  sont indépendantes. Soit  $g$  la densité de la loi commune aux  $Z_n$ .

- ① Montrer que pour toute fonction  $f$  :

$$E[f(T_n, Z_n)] = \int_0^{+\infty} \int f(t, z) g(z) \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} dz dt.$$

- ② En déduire que :

$$E\left[\sum_{n \geq 1} f(T_n, Z_n)\right] = \lambda \int_0^{+\infty} \int f(t, z) g(z) dz dt.$$

- ③ On suppose que les communications téléphoniques d'un abonné durent un temps aléatoire de loi exponentielle de moyenne trois minutes. Ces durées sont indépendantes entre elles. Au siècle dernier, le coût d'une communication était fonction de sa durée  $t$  selon la formule suivante :

$$c(t) = \alpha \text{ si } t \leq t_0 \text{ et } c(t) = \alpha + \beta(t - t_0) \text{ si } t \geq t_0.$$

## Application numérique

Déduire de ce qui précède que le coût moyen d'une heure totale de communication est donné par :

$$\lambda \int_0^1 c(t) \lambda e^{-\lambda t} dt$$

avec  $\lambda = 20$ . (Indication : considérer  $Z_n = T_{n+1} - T_n$  et expliquer pourquoi on peut appliquer le résultat précédent.)

Pour les communications locales, en 1999, on avait les paramètres suivants :  $t_0 = 3$  minutes,  $\alpha = 0,11$  euro et  $\beta = 0,043$  euro par minute. Pour les communications nationales,  $t_0 = 39$  secondes et  $\beta = 0,17$  euro par minute.  $\alpha$  était le même. En tarif réduit, diviser  $\beta$  par 2. En mettant  $t_0 = 1$  minute et  $\alpha = 0,15$  euro, à combien s'élevait le prix de la seconde supplémentaire en téléphonie mobile dans un forfait dont le montant pour 1 heure de communication était de 23,62 euros ?

## Distributeur de billets

Un distributeur automatique de billets enregistre les instants de début et de fin de requêtes de ces clients mais évidemment par leur heure d'arrivée dans la file. Un nouveau cycle d'activité ayant commencé à 7h30, on a relevé les données du tableau ??.

Client numéro	Début de service	Fin de service
0	7h30	7h34
1	7h34	7h40
2	7h40	7h42
3	7h45	7h50

Supposons que les arrivées aient lieu selon processus de Poisson, que peut-on dire de l'instant d'arrivée  $T_1$  du client numéro 1? En particulier, calculer son espérance.