

Practical Work on Non-Negative Matrix Factorization

Roland Badeau
from the subject written by U. Simsekli



The files related to this practical work are available on the TSIA 206 Moodle.

Non-Negative Matrix Factorization with β -divergence

In this practical work, we will deal with non-negative matrix factorization (NMF) with the β -divergence. The problem that we aim to solve is given as follows:

$$(W^*, H^*) = \arg \min_{W \geq 0, H \geq 0} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J d_{\beta}(x_{ij} || \hat{x}_{ij}), \quad (1)$$

where x_{ij} is an element of $X \in \mathbb{R}_+^{I \times J}$, that is the *non-negative* data matrix, and $W \in \mathbb{R}_+^{I \times K}$ and $H \in \mathbb{R}_+^{K \times J}$ are the unknown *non-negative* factor matrices. We also define $\hat{x}_{ij} = \sum_k w_{ik} h_{kj}$. The cost function that we are minimizing is called the β -divergence, which is defined as follows:

$$d_{\beta}(x || \hat{x}) = \frac{x^{\beta}}{\beta(\beta-1)} - \frac{x \hat{x}^{\beta-1}}{\beta-1} + \frac{\hat{x}^{\beta}}{\beta}. \quad (2)$$

When $\beta = 1$, we obtain the Kullback-Leibler (KL) divergence, when $\beta = 0$ we obtain the Itakura-Saito (IS) divergence.

One of the most popular algorithms for NMF is called the multiplicative update rules (MUR). The MUR algorithm has the following update rules:

$$W \leftarrow W \circ \frac{(X \circ \hat{X}^{\beta-2}) H^{\top}}{\hat{X}^{\beta-1} H^{\top}} \quad (3)$$

$$H \leftarrow H \circ \frac{W^{\top} (X \circ \hat{X}^{\beta-2})}{W^{\top} \hat{X}^{\beta-1}}, \quad (4)$$

where \circ denotes element-wise multiplication and $/$ and \div denote element-wise division.

Questions:

1. By following the technique that we used in the lecture, derive the MUR algorithm by yourselves.
2. Fill in the template provided in the notebook which will require you to implement the MUR update rules.
3. Experiment with the algorithm parameters, such as β , number of columns in W , STFT window size, STFT hop size etc. What do you observe?





Contexte académique } **sans modifications**

Par le téléchargement ou la consultation de ce document, l'utilisateur accepte la licence d'utilisation qui y est attachée, telle que détaillée dans les dispositions suivantes, et s'engage à la respecter intégralement.

La licence confère à l'utilisateur un droit d'usage sur le document consulté ou téléchargé, totalement ou en partie, dans les conditions définies ci-après, et à l'exclusion de toute utilisation commerciale.

Le droit d'usage défini par la licence autorise un usage dans un cadre académique, par un utilisateur donnant des cours dans un établissement d'enseignement secondaire ou supérieur et à l'exclusion expresse des formations commerciales et notamment de formation continue. Ce droit comprend :

- le droit de reproduire tout ou partie du document sur support informatique ou papier,
- le droit de diffuser tout ou partie du document à destination des élèves ou étudiants.

Aucune modification du document dans son contenu, sa forme ou sa présentation n'est autorisée.

Les mentions relatives à la source du document et/ou à son auteur doivent être conservées dans leur intégralité.

Le droit d'usage défini par la licence est personnel et non exclusif. Tout autre usage que ceux prévus par la licence est soumis à autorisation préalable et expresse de l'auteur : sitepedago@telecom-paristech.fr