

# INF216

2023/2



# Projeto e Implementação de Jogos Digitais

## A3: Álgebra Linear

# Logística

## Avisos

- ▶ Não teremos laboratório nessa sexta-feira (Semana de Infomática)!

## Última aula

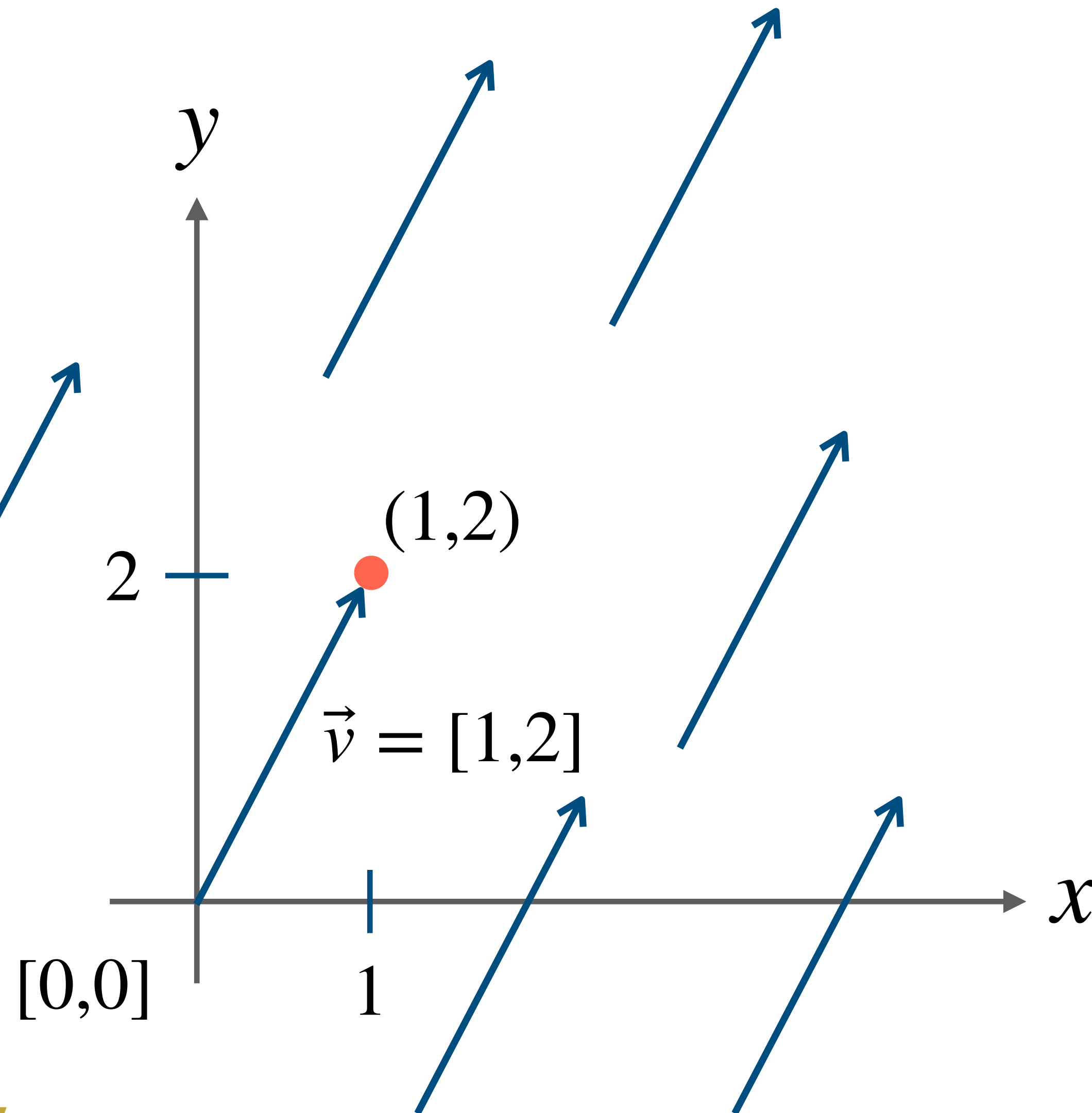
- ▶ Game loop
- ▶ Modelagem de objetos

# Plano de Aula

- ▶ Vetores
  - ▶ Definição
  - ▶ Operações
  - ▶ Aplicações
- ▶ Matrizes de transformação
  - ▶ Translação
  - ▶ Rotação
  - ▶ Escala

# Vetores

# Vetores



Em Álgebra Linear, um **vetor**  $\vec{v}$  representa uma direção e um comprimento em um espaço n-dimensional.

Por exemplo, um vetor 2D pode ser apresentado da seguinte forma:

$$\vec{v} = [v_x, v_y] \in R^2$$

- ▶ Vetores não têm posição, ou seja, dois vetores de mesma direção e comprimento são iguais!
- ▶ No entanto, é conveniente desenhar vetores com a **cauda** (ponto de partida) na origem  $(0,0)$  de tal forma que a **cabeça** (ponto de destino) aponte para uma posição específica no espaço.

# Vetores

```
class Vector2 {  
    float x,  
    float y  
}
```

```
class Vector3 {  
    float x,  
    float y,  
    float z  
}
```

Em jogos digitais, geralmente usamos vetores 2D e 3D, dependendo dos gráficos de jogo.

Além disso, vetores 4D também são usados em jogos 3D para combinar transformações (e.g., rotação e translação)

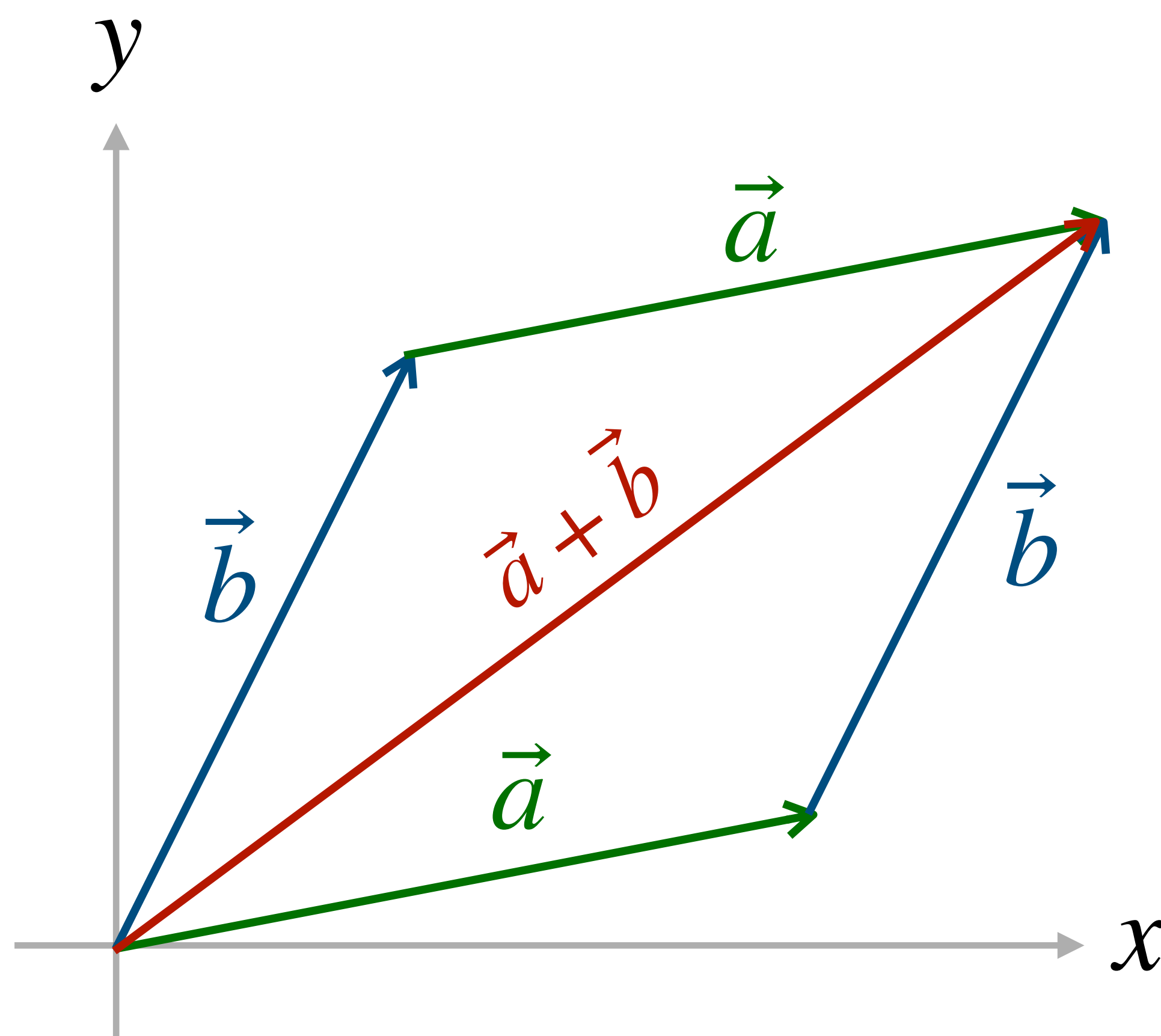
Em código, vetores geralmente são representados por uma classe com um atributo float por dimensão.

# Operações

Diversas operações podem ser realizadas com vetores:

- ▶ Adição
- ▶ Subtração
- ▶ Comprimento
- ▶ Normalização
- ▶ Multiplicação por Escalar
- ▶ Produto Escalar
- ▶ Produto Vetorial

# Adição



## Algebricamente

A adição de dois vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  é definida pela soma dos componentes de  $\vec{a}$  com seus componentes correspondentes em  $\vec{b}$ :

$$\vec{a} + \vec{b} = [a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z]$$

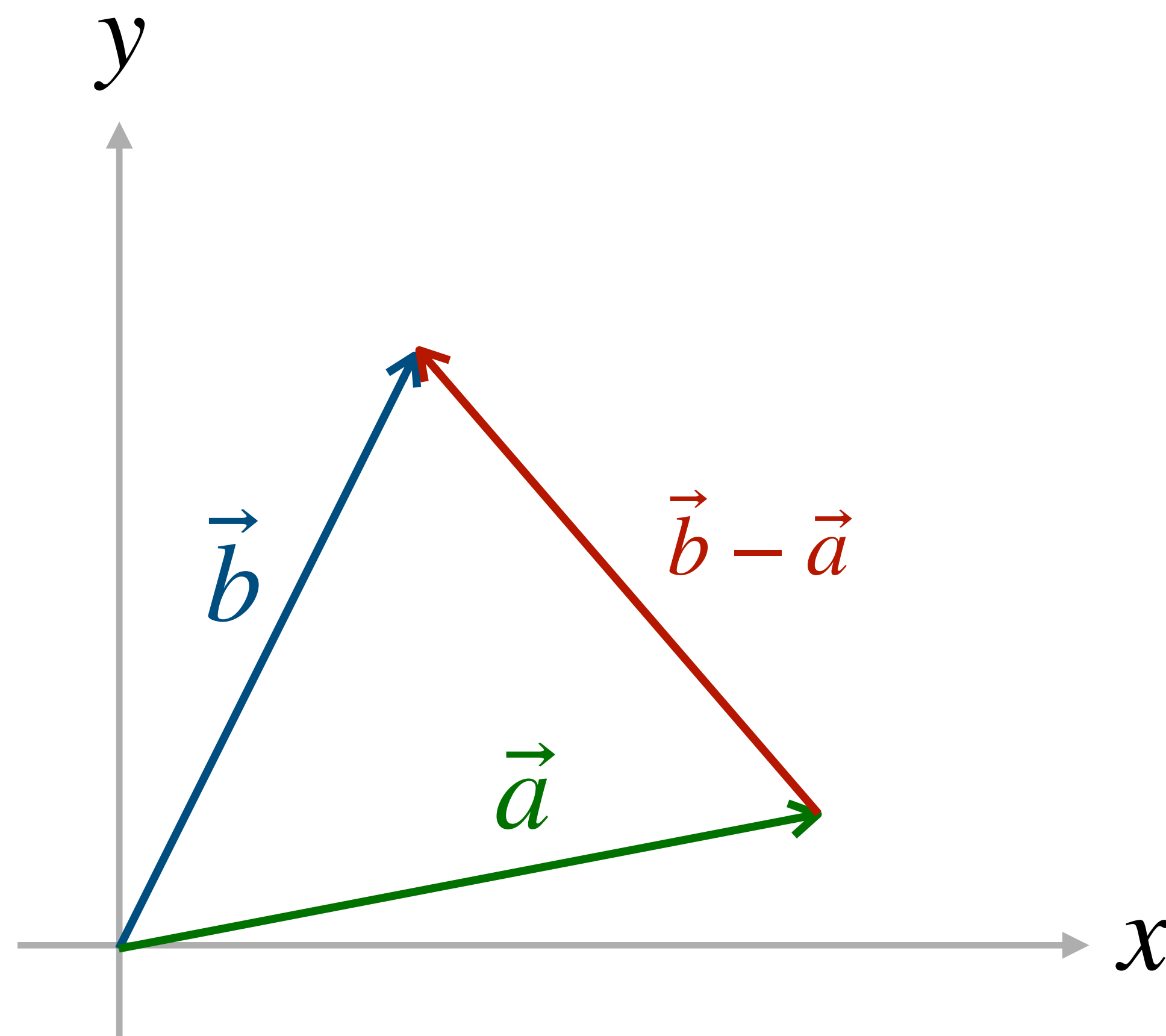
## Geometricamente

A adição pode ser realizada posicionando a cauda de  $\vec{b}$  na cabeça de  $\vec{a}$ , e desenhando um vetor da cauda de  $\vec{a}$  até a cabeça de  $\vec{b}$ .

Note que se fizermos a soma na ordem inversa  $\vec{b} + \vec{a}$ , o vetor resultante é o mesmo. Regra do paralelogramo:  $\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$



# Subtração



## Algebricamente

A subtração de dois vetores  $\vec{b}$  e  $\vec{a}$  é definida pela subtração dos componentes de  $\vec{b}$  pelo seus componentes correspondentes em  $\vec{a}$ :

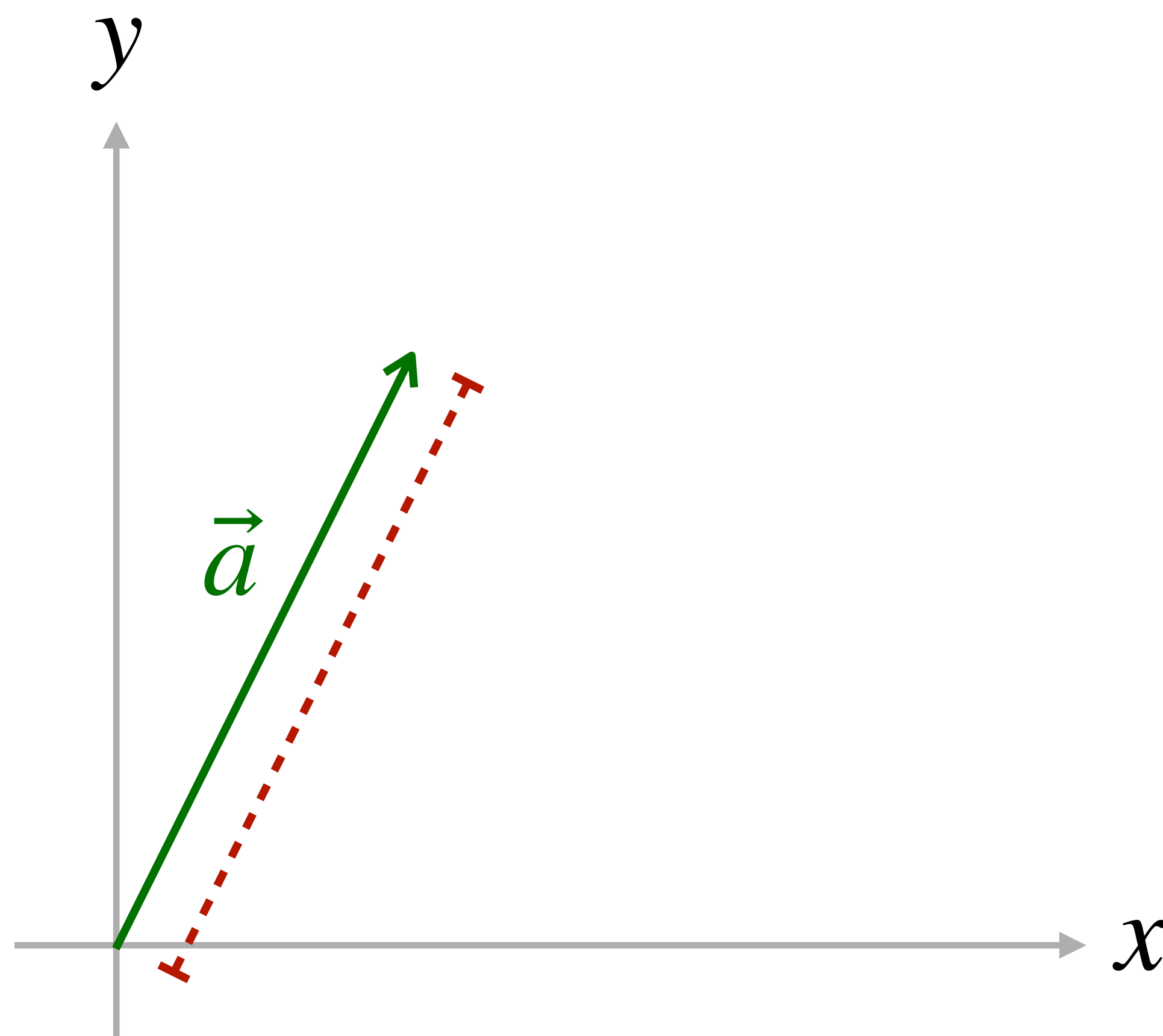
$$\vec{b} - \vec{a} = [b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z]$$

## Geometricamente

A subtração pode ser realizada posicionando as caudas de  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  na mesma posição, e desenhando um vetor da cabeça de  $\vec{a}$  até a cabeça de  $\vec{b}$ .

Note que se fizermos a subtração na ordem inversa  $\vec{a} - \vec{b}$ , o vetor resultante será diferente. Por isso, a subtração não é comutativa.

# Comprimento

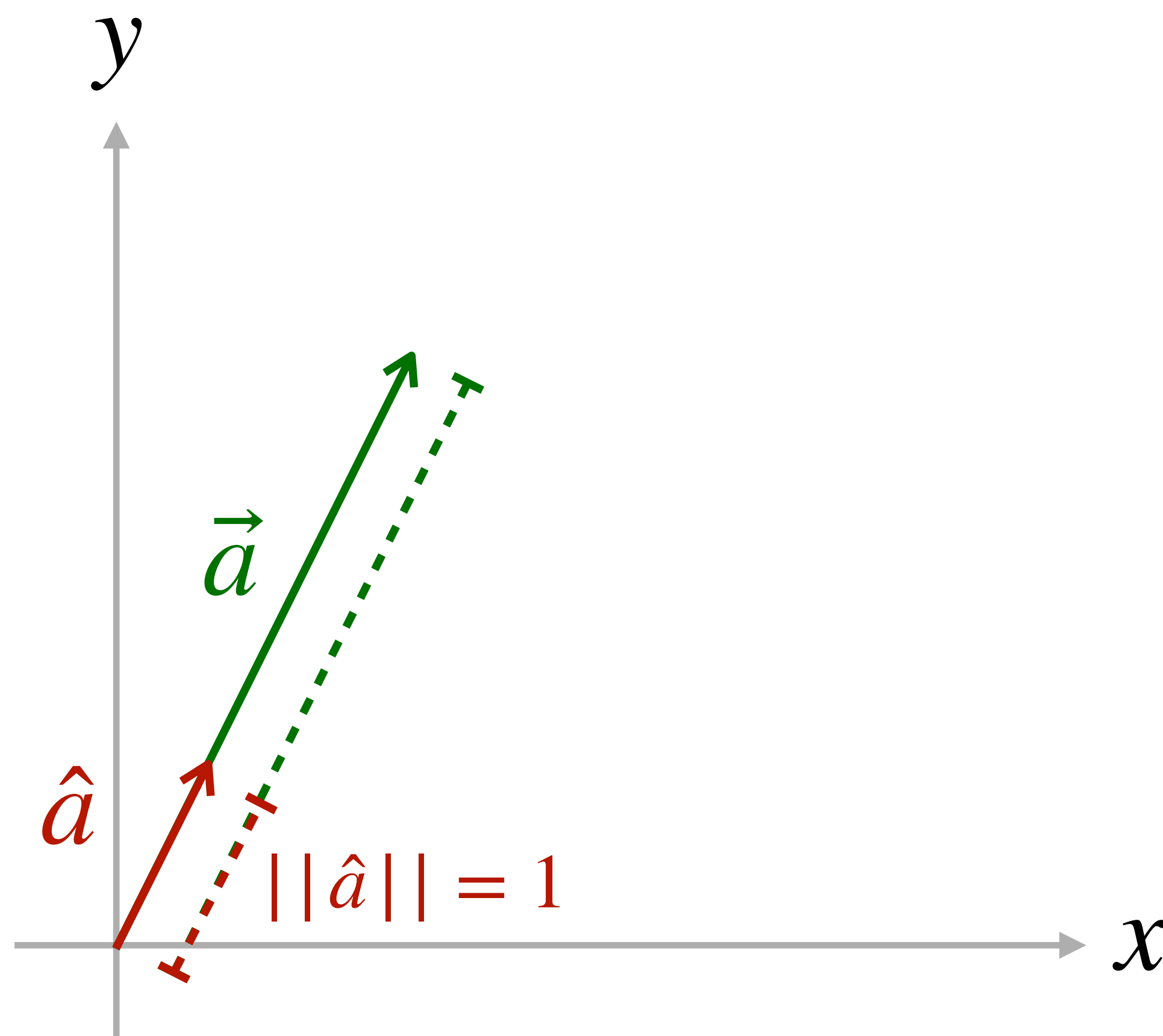


Para calcular o comprimento  $||\vec{a}||$  de um vetor  $\vec{a}$ , calculamos a distância euclidiana entre a origem e o ponto ao qual  $\vec{a}$  aponta:

$$||\vec{a}|| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Em jogos, quando vamos comparar o comprimento de dois vetores (e.g., qual inimigo está mais próximo do jogador), utilizamos o quadrado do comprimento, para evitar o cálculo das raízes quadradas.

# Normalização



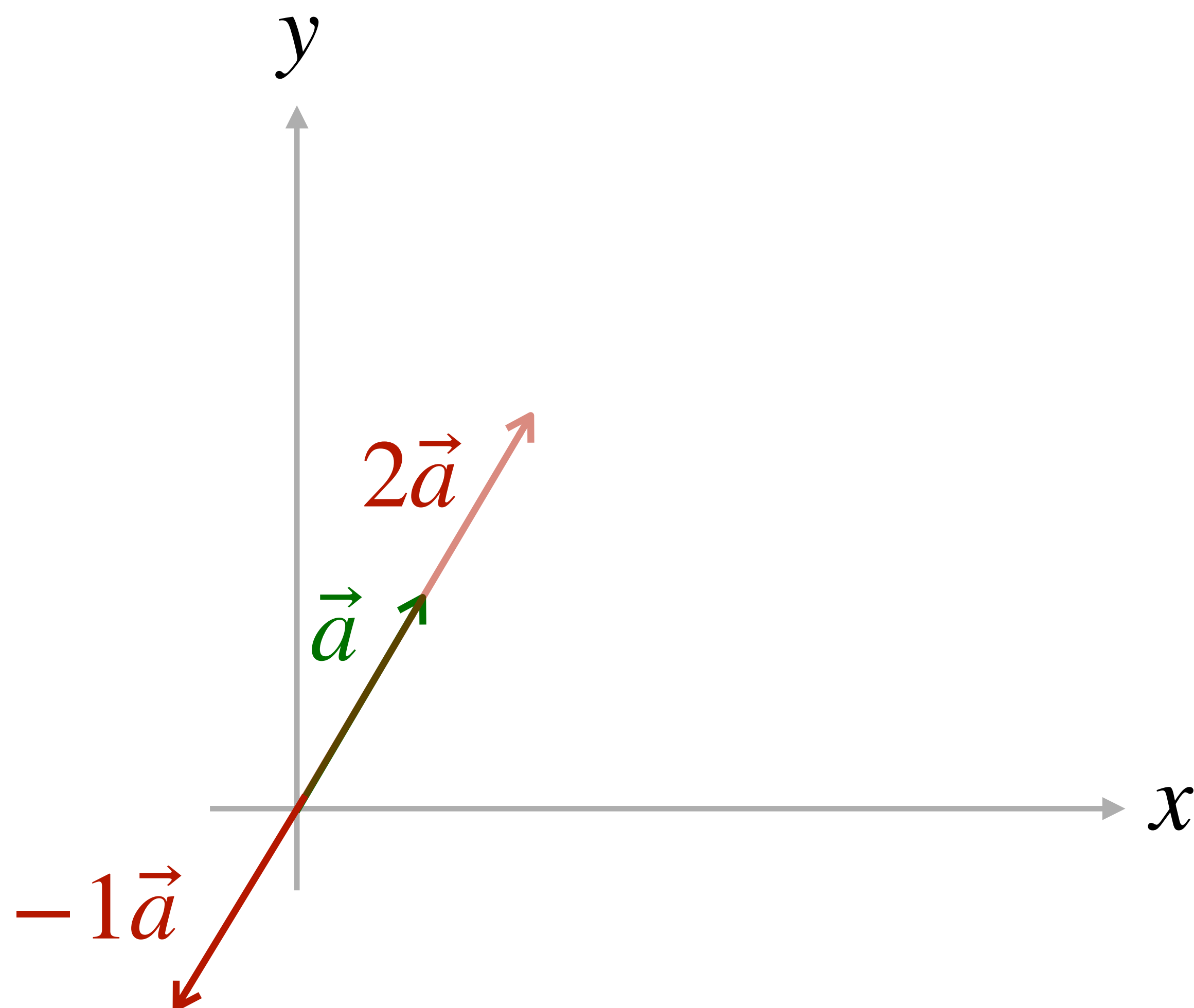
Um vetor  $\hat{a}$  unitário é um vetor de comprimento  $||\hat{a}|| = 1$ .

A operação que converte um vetor não-unitário  $\vec{a}$  em um vetor unitário  $\hat{a}$  é chamada de **normalização**.

Para normalizar um vetor não-unitário  $\vec{a}$ , dividimos todas os seus componentes pelo seu comprimento  $||\vec{a}||$  :

$$\hat{a} = \left[ \frac{a_x}{||\vec{a}||}, \frac{a_y}{||\vec{a}||}, \frac{a_z}{||\vec{a}||} \right]$$

# Multiplicação (Escalar)



## Algebricamente

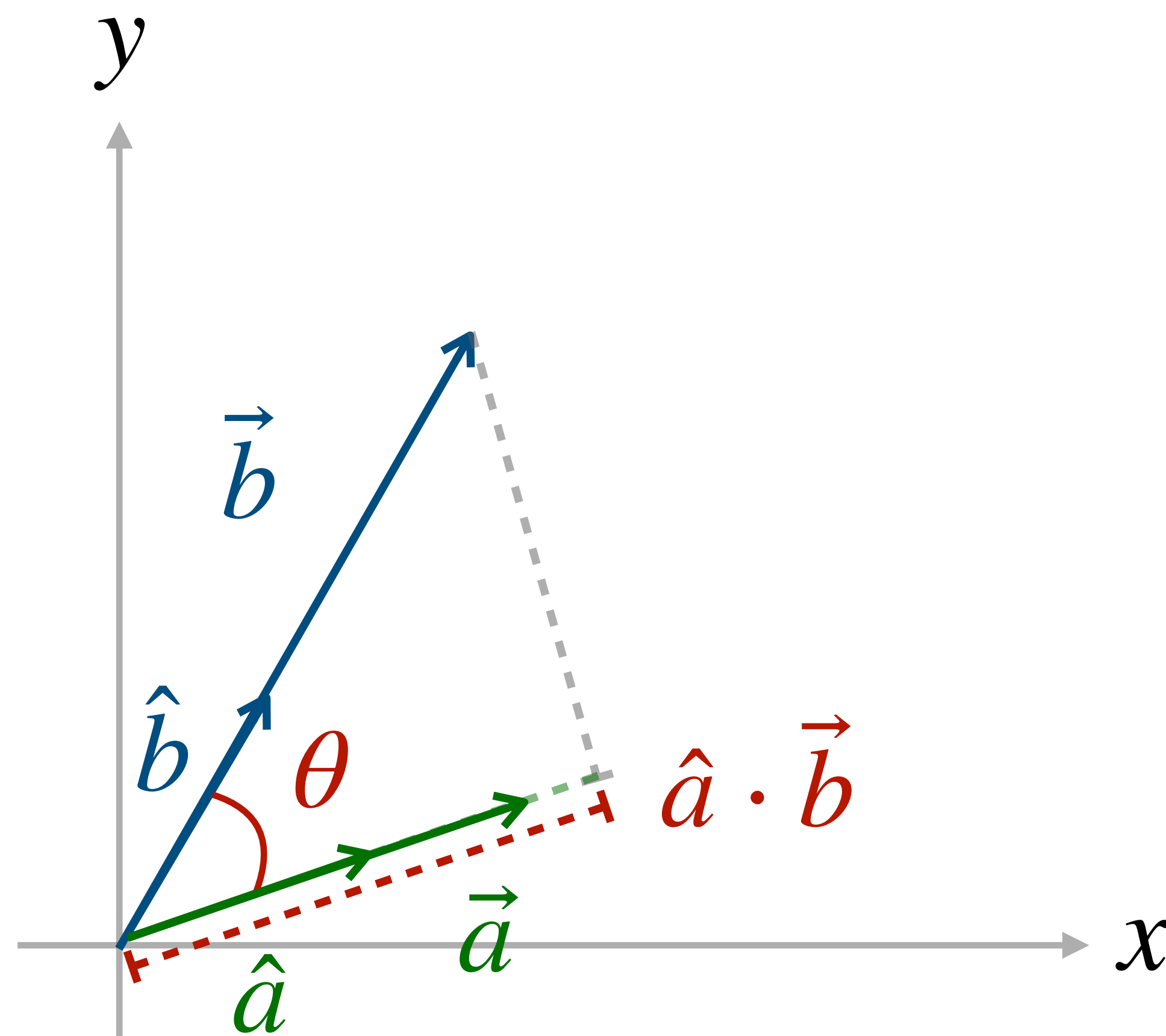
A multiplicação de um vetor  $\vec{a}$  por um escalar  $s$  é definida pela multiplicação de todos os compoenetes de  $\vec{a}$  por  $s$ :

$$s \cdot \vec{a} = [s \cdot a_x, s \cdot a_y, s \cdot a_z]$$

## Geometricamente

A multiplicação por escalar altera apenas o comprimento de  $\vec{a}$ . Se  $s$  for negativo, a multiplicação irá inverter a direção de  $\vec{a}$ .

# Produto Escalar



## Algebricamente

O produto escalar entre dois vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  é definido pela soma das multiplicações dos componentes de  $\vec{a}$  com seus componentes correspondentes em  $\vec{b}$ :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

## Geometricamente

O produto escalar pode ser utilizado para calcular o ângulo  $\theta$  entre dois vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| ||\vec{b}|| \cos \theta$$

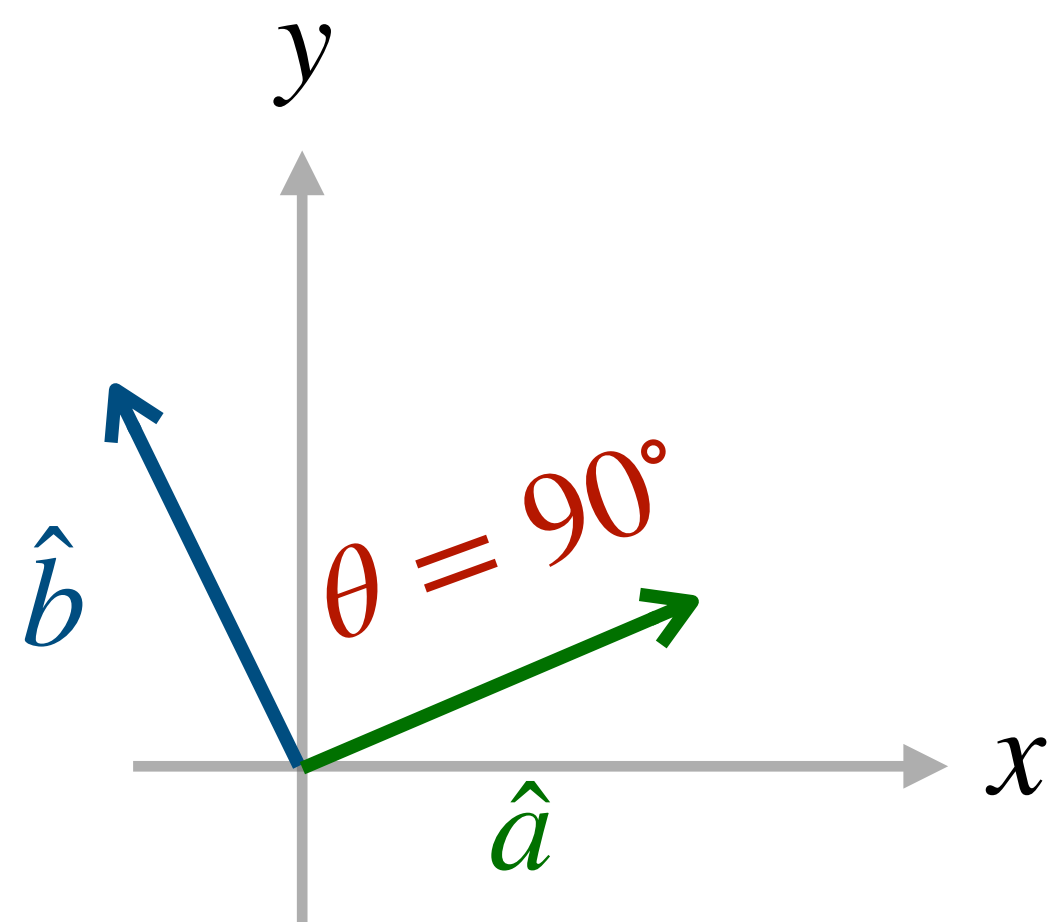
$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}|| ||\vec{b}||}\right)$$

Além disso, se  $\hat{a}$  for um vetor unitário,  $\hat{a} \cdot \vec{b}$  é o comprimento da projeção de  $\vec{b}$  em  $\hat{a}$ .

# Produto Escalar

$\hat{a}$  e  $\hat{b}$

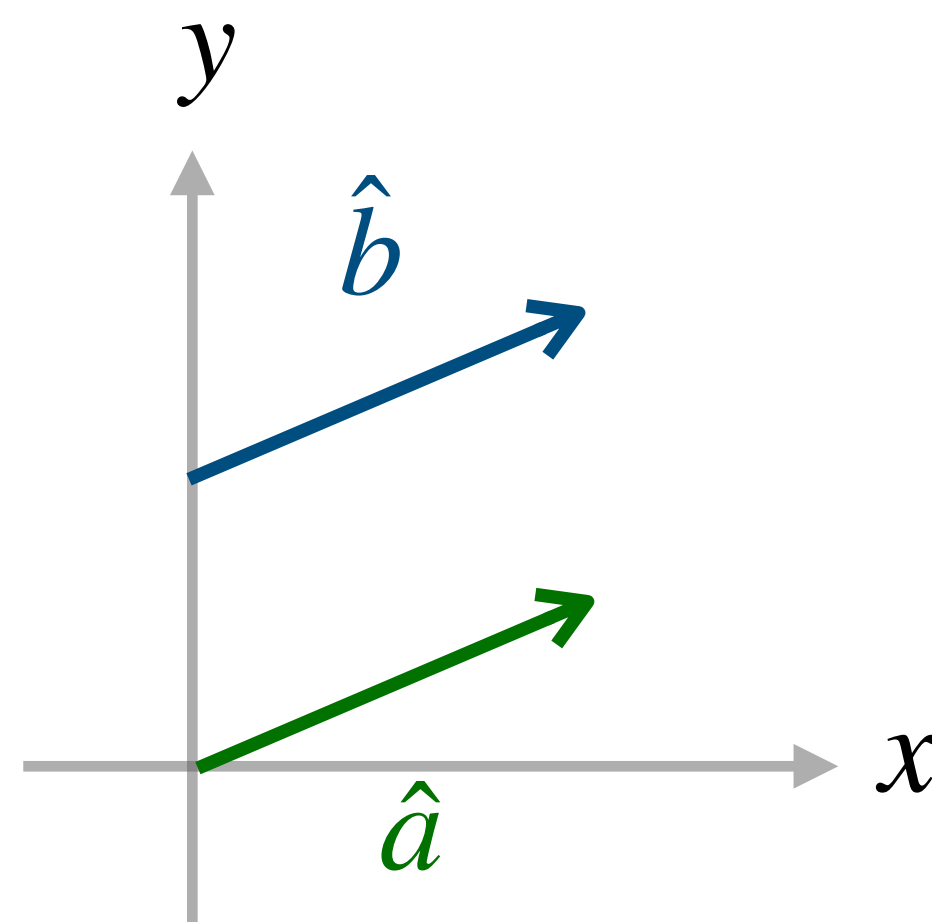
Perpendiculares



$$\hat{a} \cdot \hat{b} = \cos(90) = 0$$

$\hat{a}$  e  $\hat{b}$

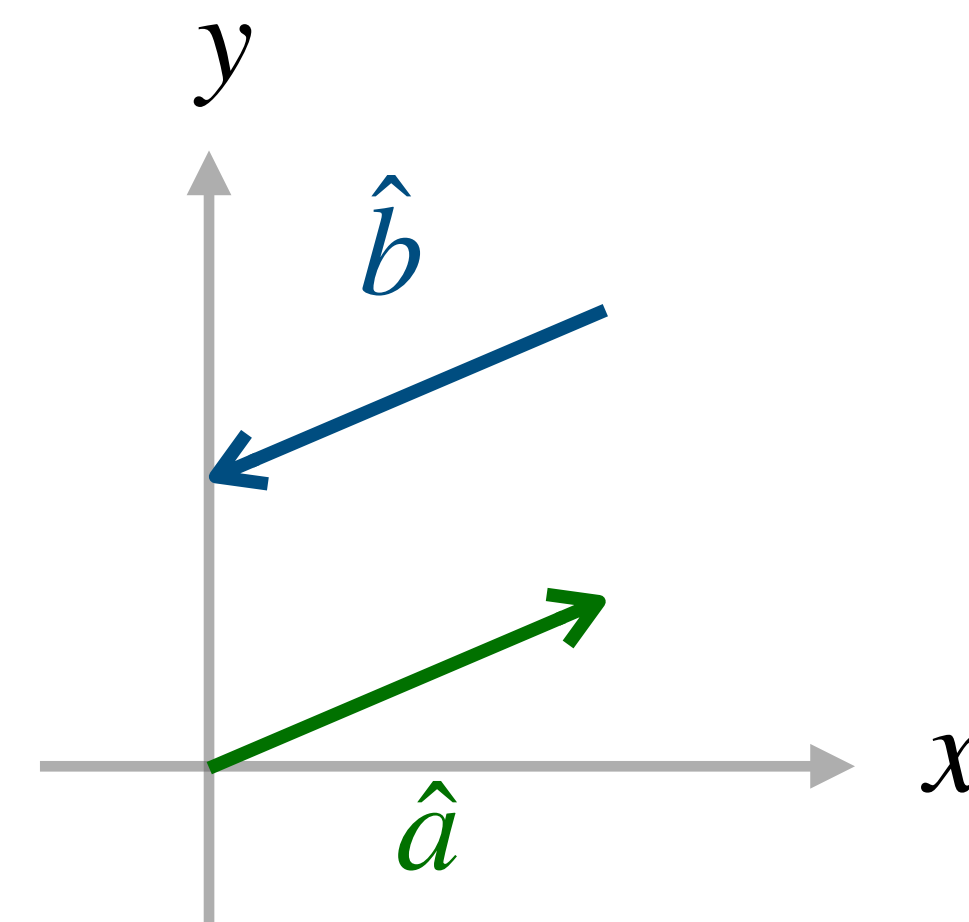
Paralelos  
Mesma direção



$$\hat{a} \cdot \hat{b} = \cos(0) = 1$$

$\hat{a}$  e  $\hat{b}$

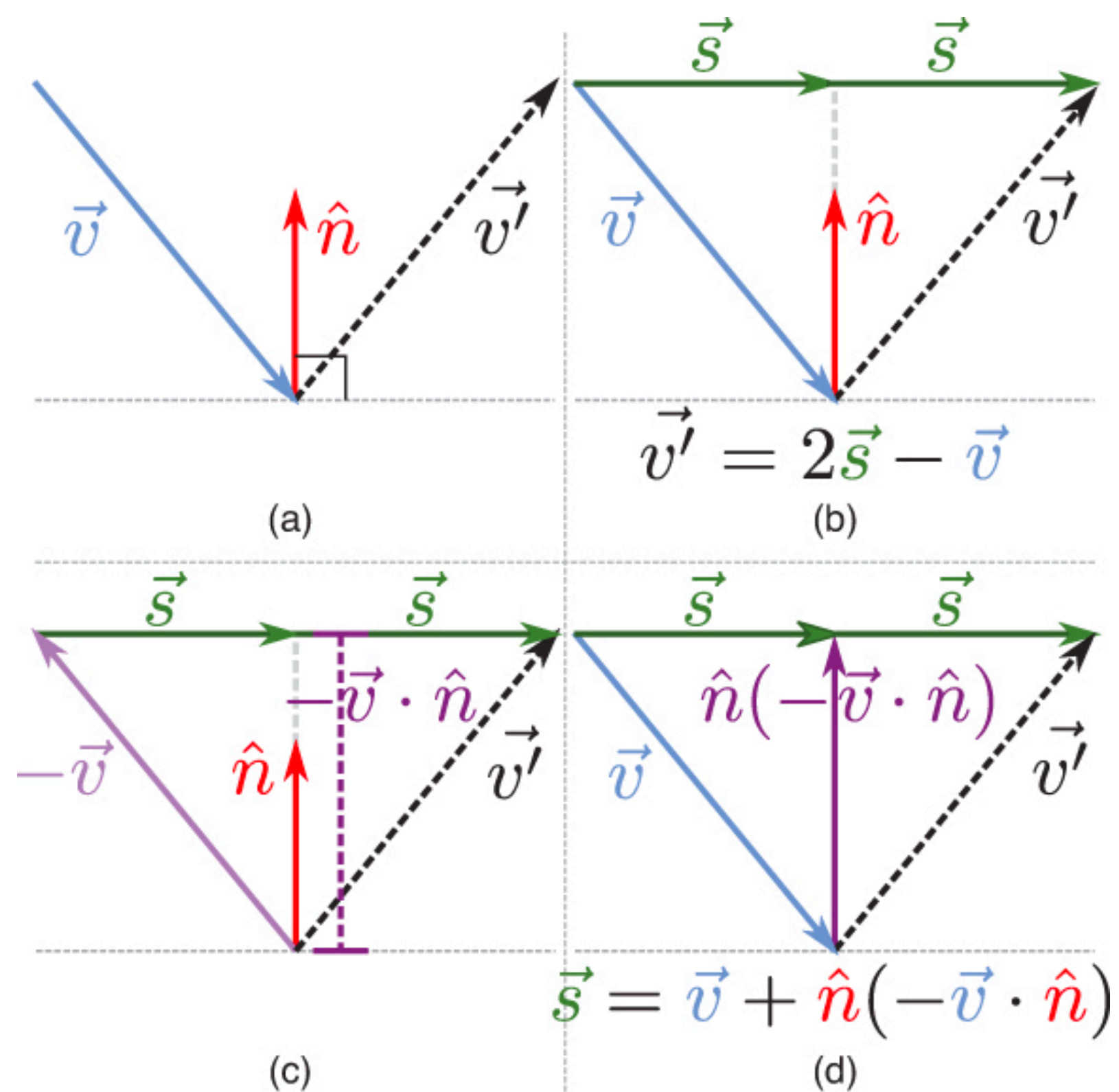
Paralelos  
Direções opostas



$$\hat{a} \cdot \hat{b} = \cos(180) = -1$$

# Exercício

Calcular a reflexão  $\vec{v}'$  de um vetor  $\vec{v}$  que incide sobre uma superfície de normal  $\hat{n}$ :



$$(b) \vec{v}' = 2\vec{s} - \vec{v}$$

$$(c) \vec{s} = \vec{v} + \hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n})$$

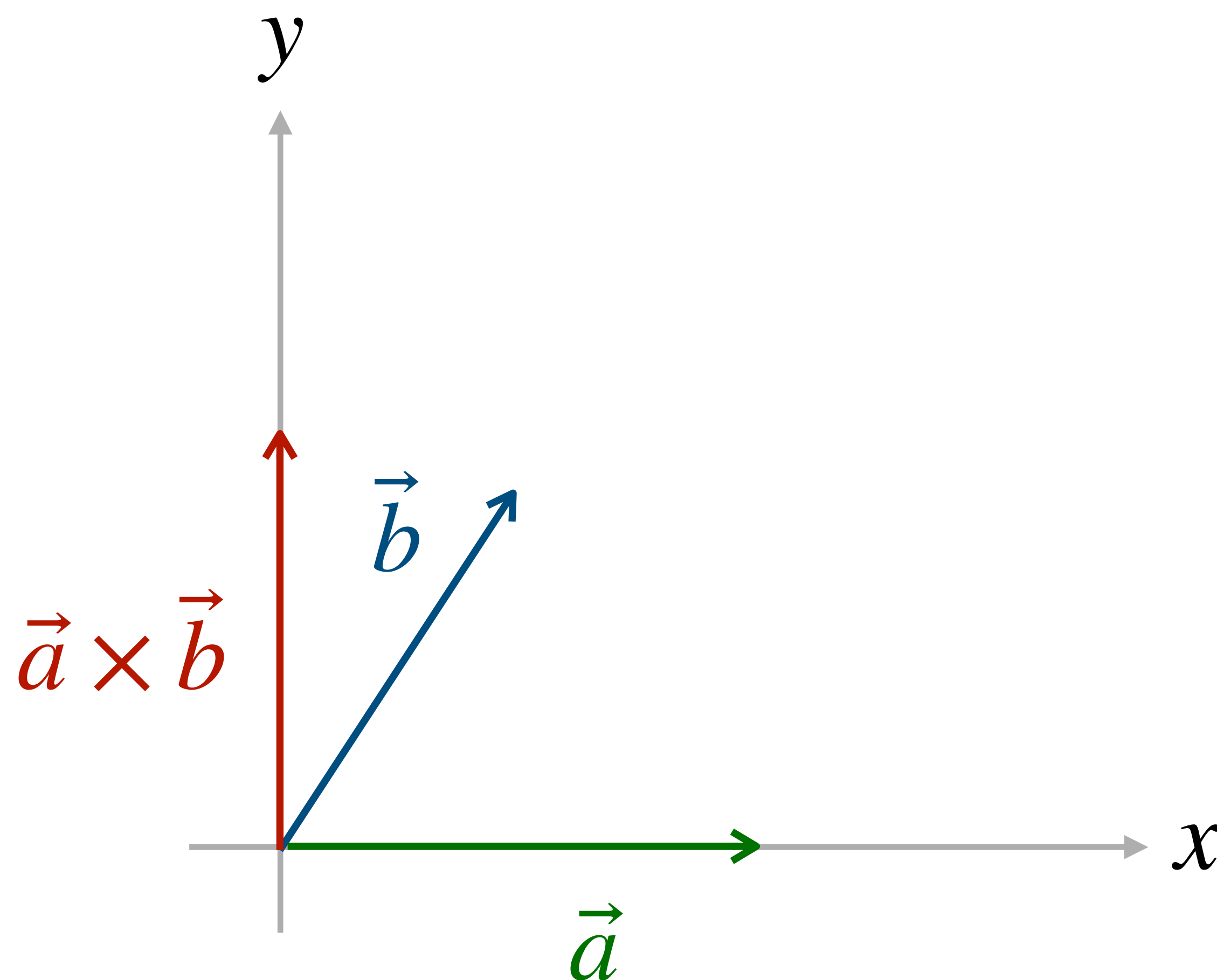
$$(d) \vec{v}' = 2(\vec{v} + \hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n})) - \vec{v}$$

$$\vec{v}' = 2\vec{v} + 2\hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n}) - \vec{v}$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - 2\hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n})$$



# Produto Vetorial



## Algebricamente

O produto vetorial entre dois vetores 3D  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  é definido pelo determinante da matriz:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = [a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x]$$

## Geometricamente

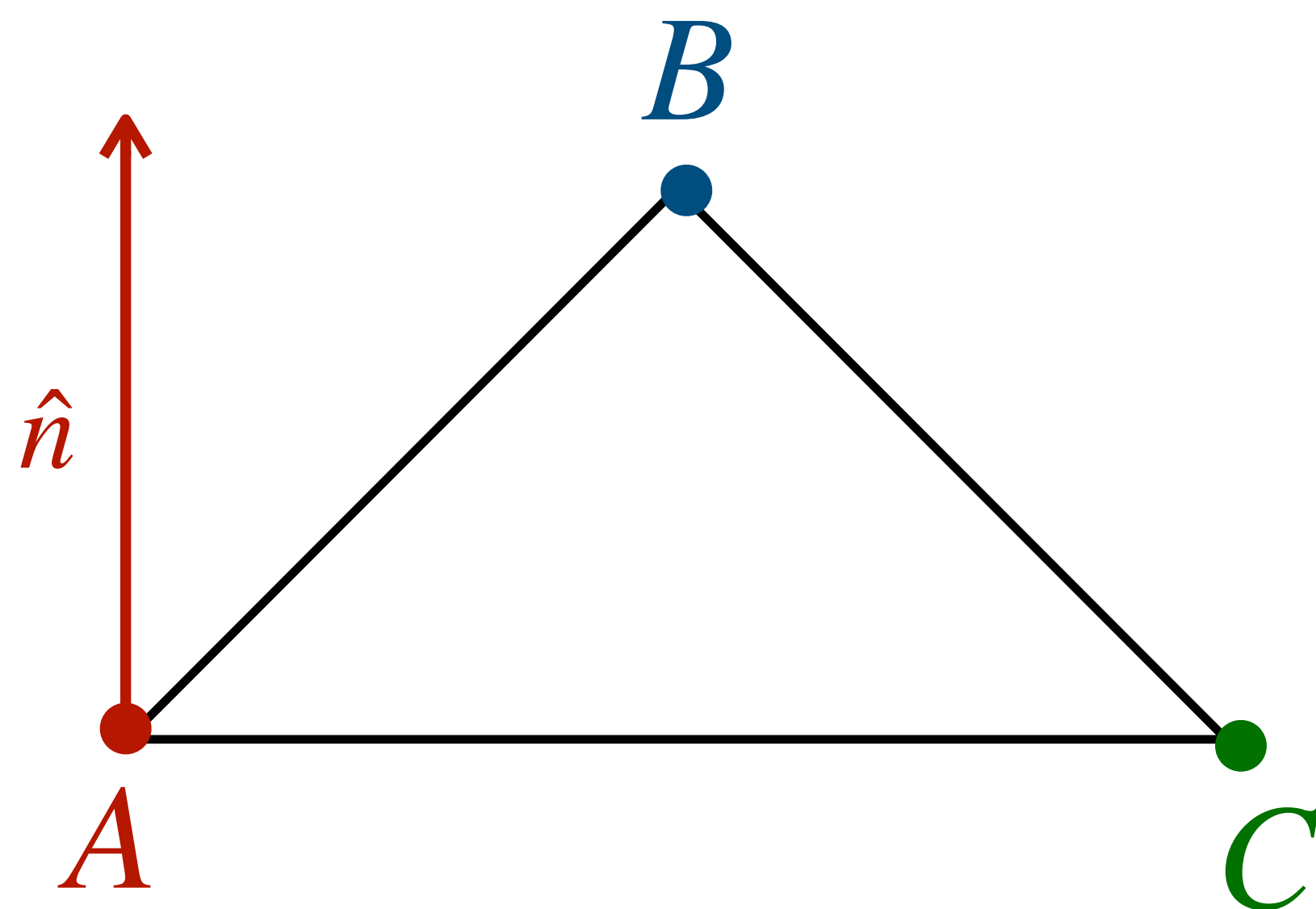
$\vec{a} \times \vec{b}$  é o vetor normal ao plano desses dois vetores.

**Obs:** produto vetorial não é definido em 2D!



# Exercício

Calcular o vetor normal  $\hat{n}$  ao triângulo ABC:



$$\vec{u} = B - A$$

$$\vec{v} = C - A$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

$$\hat{n} = \text{norm}(\vec{n})$$

# Próximas aulas

## **A4:** Física - Objetos Rígidos

Mecânica linear para movimentação de objetos rígidos.

## **L4:** Asteroids - Parte 1

Implementar um componente Rigidbody para a movimentação de objetos rígidos.