

INF216

2023/2



Projeto e Implementação de Jogos Digitais

A3: Álgebra Linear

Logística

Avisos

- ▶ Não teremos laboratório nessa sexta-feira (Semana de Infomática)!

Última aula

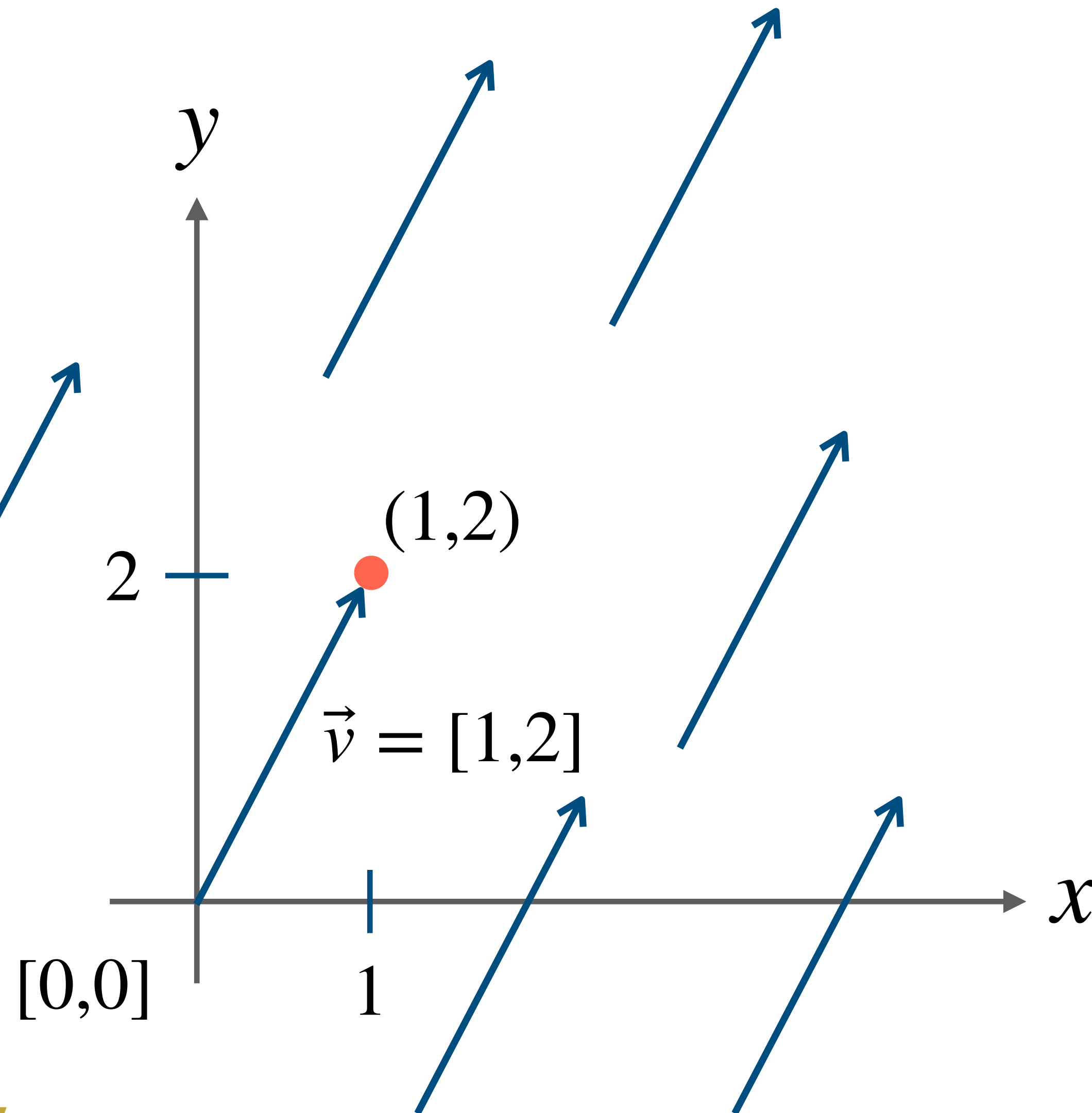
- ▶ Game loop
- ▶ Modelagem de objetos

Plano de Aula

- ▶ Vetores
 - ▶ Definição
 - ▶ Operações
 - ▶ Aplicações
- ▶ Matrizes de transformação
 - ▶ Translação
 - ▶ Rotação
 - ▶ Escala

Vetores

Vetores



Em Álgebra Linear, um **vetor** \vec{v} representa uma direção e um comprimento em um espaço n-dimensional.

Por exemplo, um vetor 2D pode ser apresentado da seguinte forma:

$$\vec{v} = [v_x, v_y] \in R^2$$

- ▶ Vetores não têm posição, ou seja, dois vetores de mesma direção e comprimento são iguais!
- ▶ No entanto, é conveniente desenhar vetores com a **cauda** (ponto de partida) na origem $(0,0)$ de tal forma que a **cabeça** (ponto de destino) aponte para uma posição específica no espaço.

Vetores

```
class Vector2 {  
    float x,  
    float y  
}
```

```
class Vector3 {  
    float x,  
    float y,  
    float z  
}
```

Em jogos digitais, geralmente usamos vetores 2D e 3D, dependendo dos gráficos de jogo.

Além disso, vetores 4D também são usados em jogos 3D para combinar transformações (e.g., rotação e translação)

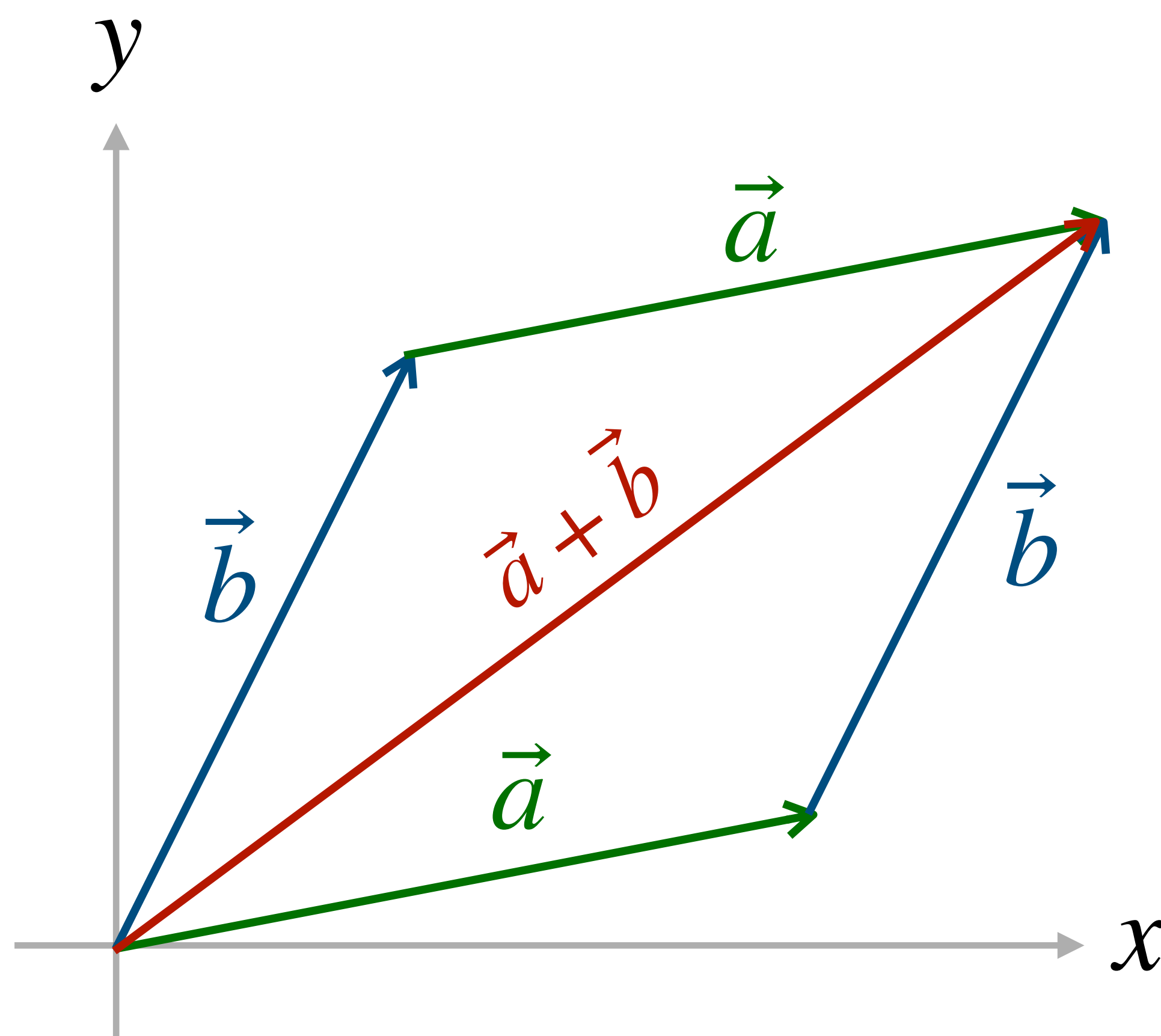
Em código, vetores geralmente são representados por uma classe com um atributo float por dimensão.

Operações

Diversas operações podem ser realizadas com vetores:

- ▶ Adição
- ▶ Subtração
- ▶ Comprimento
- ▶ Normalização
- ▶ Multiplicação por Escalar
- ▶ Produto Escalar
- ▶ Produto Vetorial

Adição



Algebricamente

A adição de dois vetores \vec{a} e \vec{b} é definida pela soma dos componentes de \vec{a} com seus componentes correspondentes em \vec{b} :

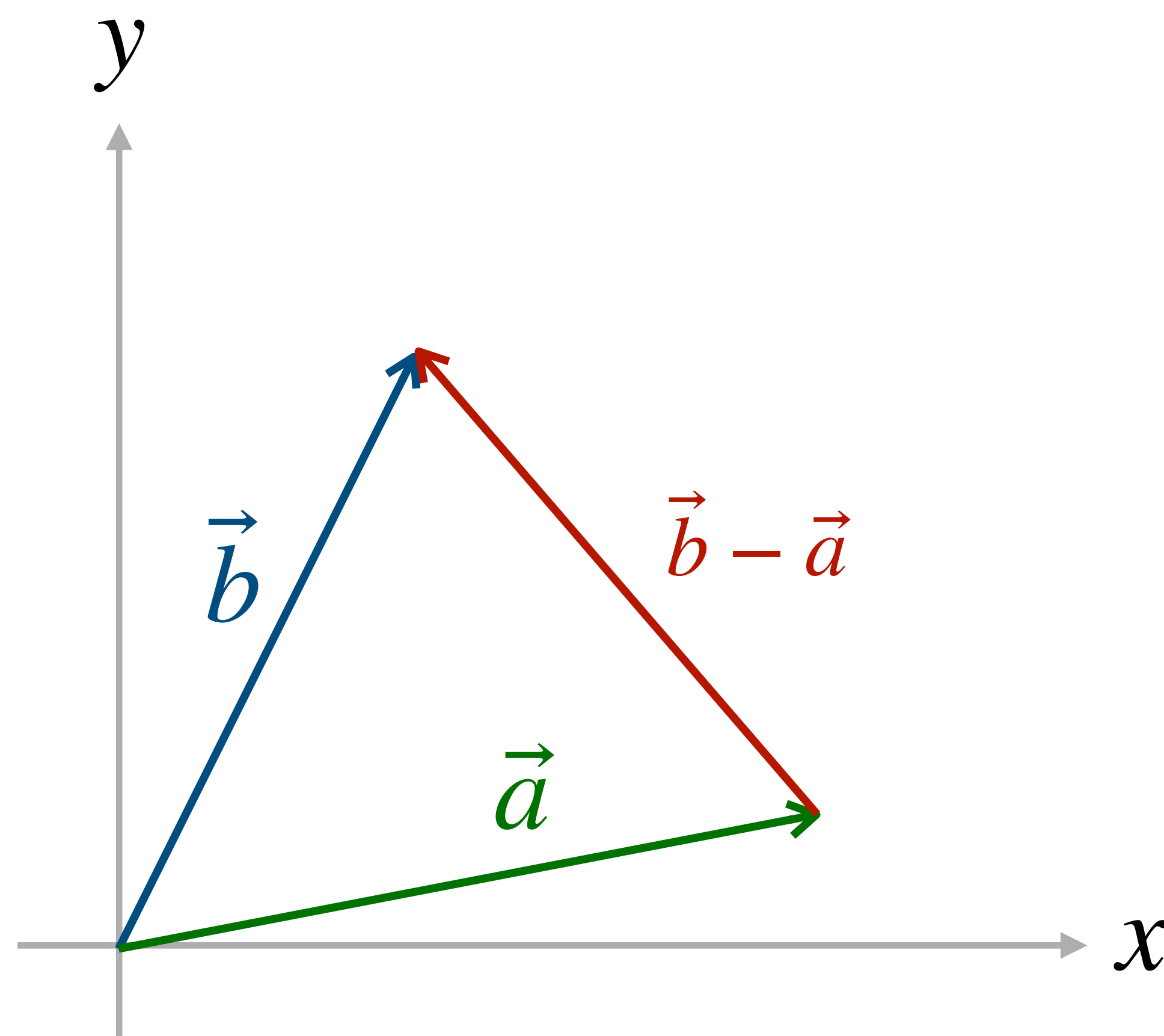
$$\vec{a} + \vec{b} = [a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z]$$

Geometricamente

A adição pode ser realizada posicionando a cauda de \vec{b} na cabeça de \vec{a} , e desenhando um vetor da cauda de \vec{a} até a cabeça de \vec{b} .

Note que se fizermos a soma na ordem inversa $\vec{b} + \vec{a}$, o vetor resultante é o mesmo. Regra do paralelogramo: $\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$

Subtração



Algébricamente

A subtração de dois vetores \vec{b} e \vec{a} é definida pela subtração dos componentes de \vec{b} pelo seus componentes correspondentes em \vec{a} :

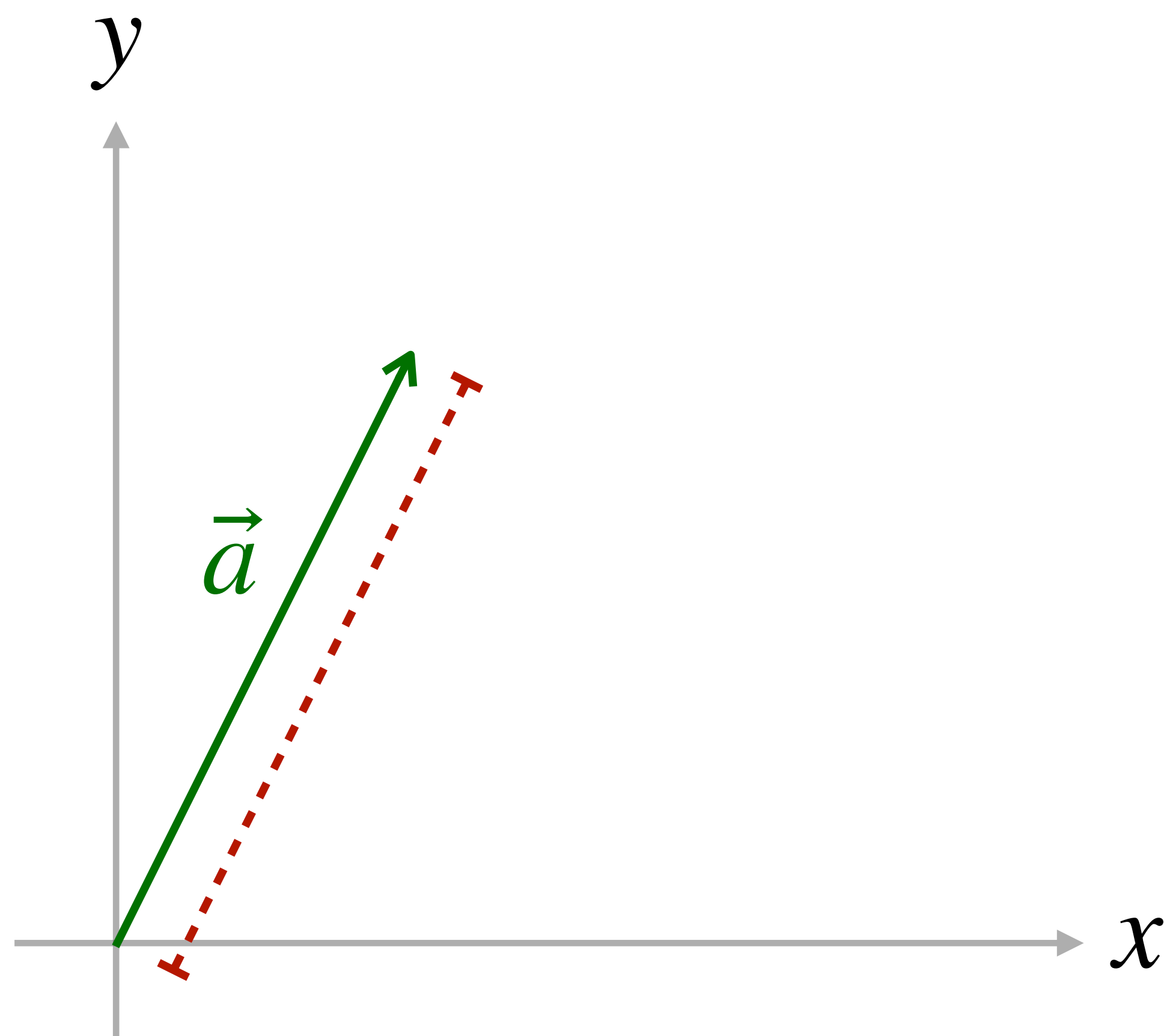
$$\vec{b} - \vec{a} = [b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z]$$

Geometricamente

A subtração pode ser realizada posicionando as caudas de \vec{a} e \vec{b} na mesma posição, e desenhando um vetor da cabeça de \vec{a} até a cabeça de \vec{b} .

Note que se fizermos a subtração na ordem inversa $\vec{a} - \vec{b}$, o vetor resultante será diferente. Por isso, a subtração não é comutativa.

Comprimento

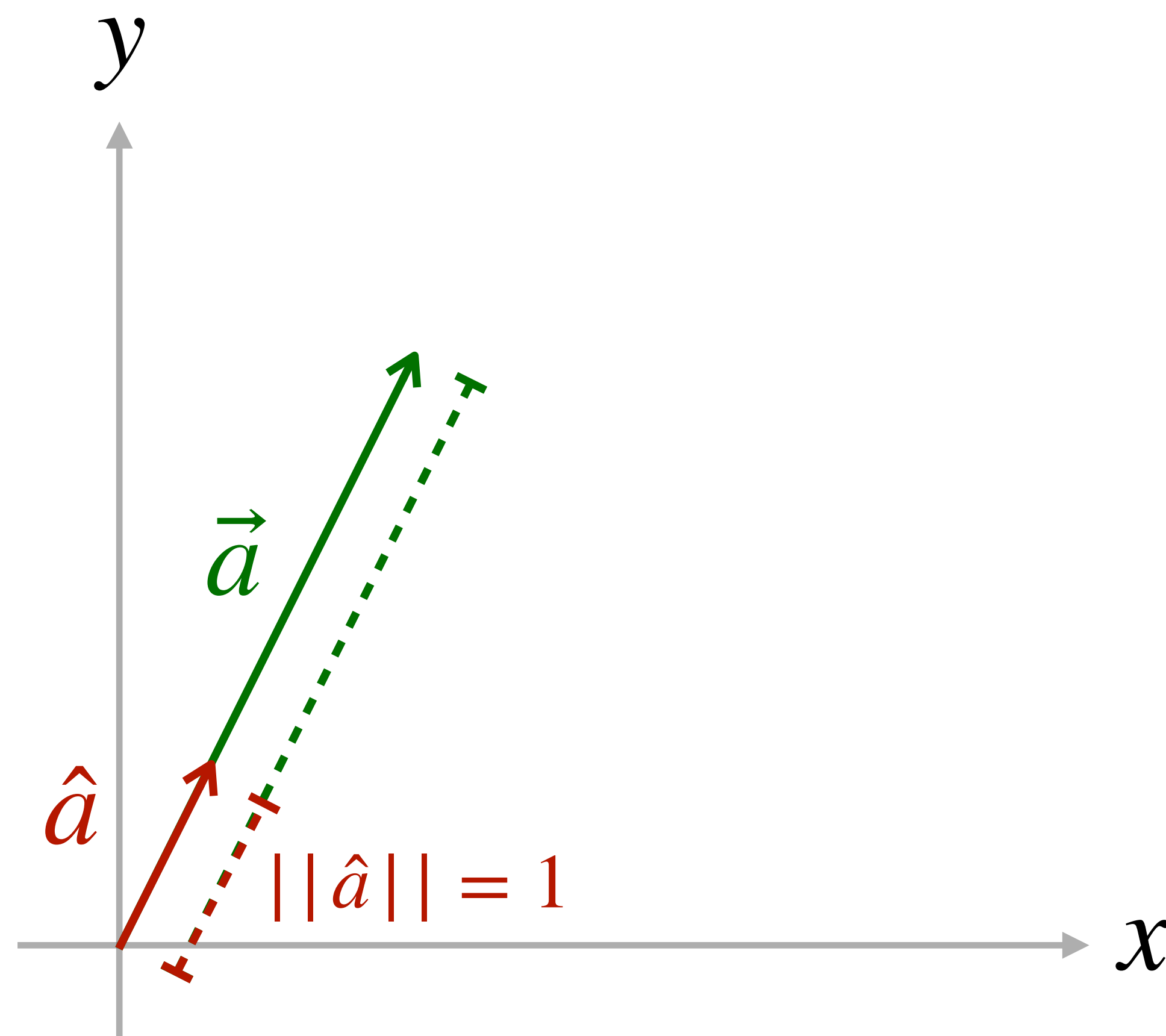


Para calcular o comprimento $||\vec{a}||$ de um vetor vetores \vec{a} , calculamos a distância euclidiana entre a origem e o ponto ao qual \vec{a} aponta:

$$||\vec{a}|| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Em jogos, quando vamos comparar o comprimento de dois vetores (e.g., qual inimigo está mais próximo do jogador), utilizamos o quadrado do comprimento, para evitar o cálculo das raízes quadradas.

Normalização



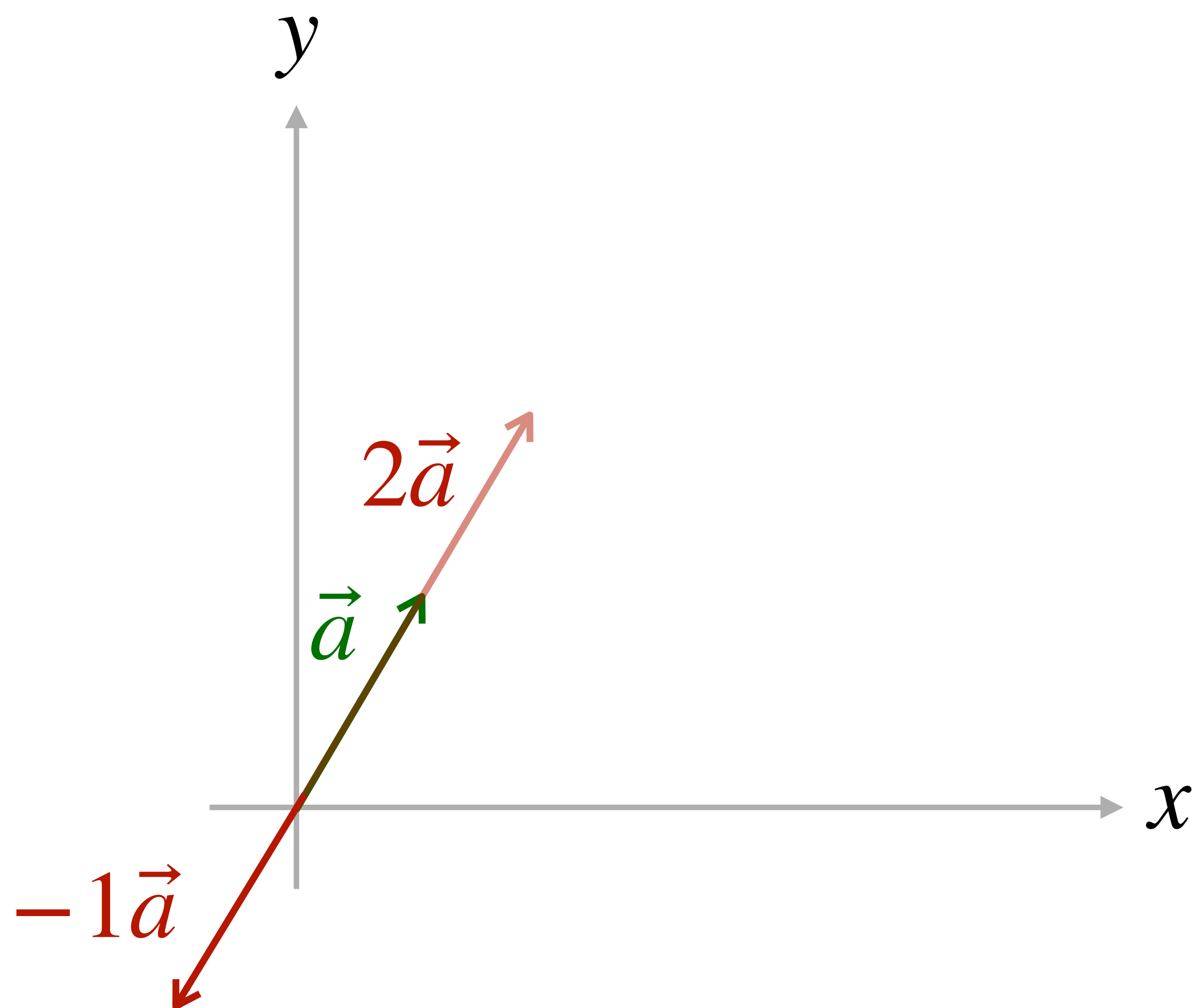
Um vetor \hat{a} unitário é um vetor de comprimento $||\hat{a}|| = 1$.

A operação que converte um vetor não-unitário \vec{a} em um vetor unitário \hat{a} é chamada de **normalização**.

Para normalizar um vetor não-unitário \vec{a} , dividimos todas os seus componentes pelo seu comprimento $||\vec{a}||$:

$$\hat{a} = \left[\frac{a_x}{||\vec{a}||}, \frac{a_y}{||\vec{a}||}, \frac{a_z}{||\vec{a}||} \right]$$

Multiplicação (Escalar)



Algebricamente

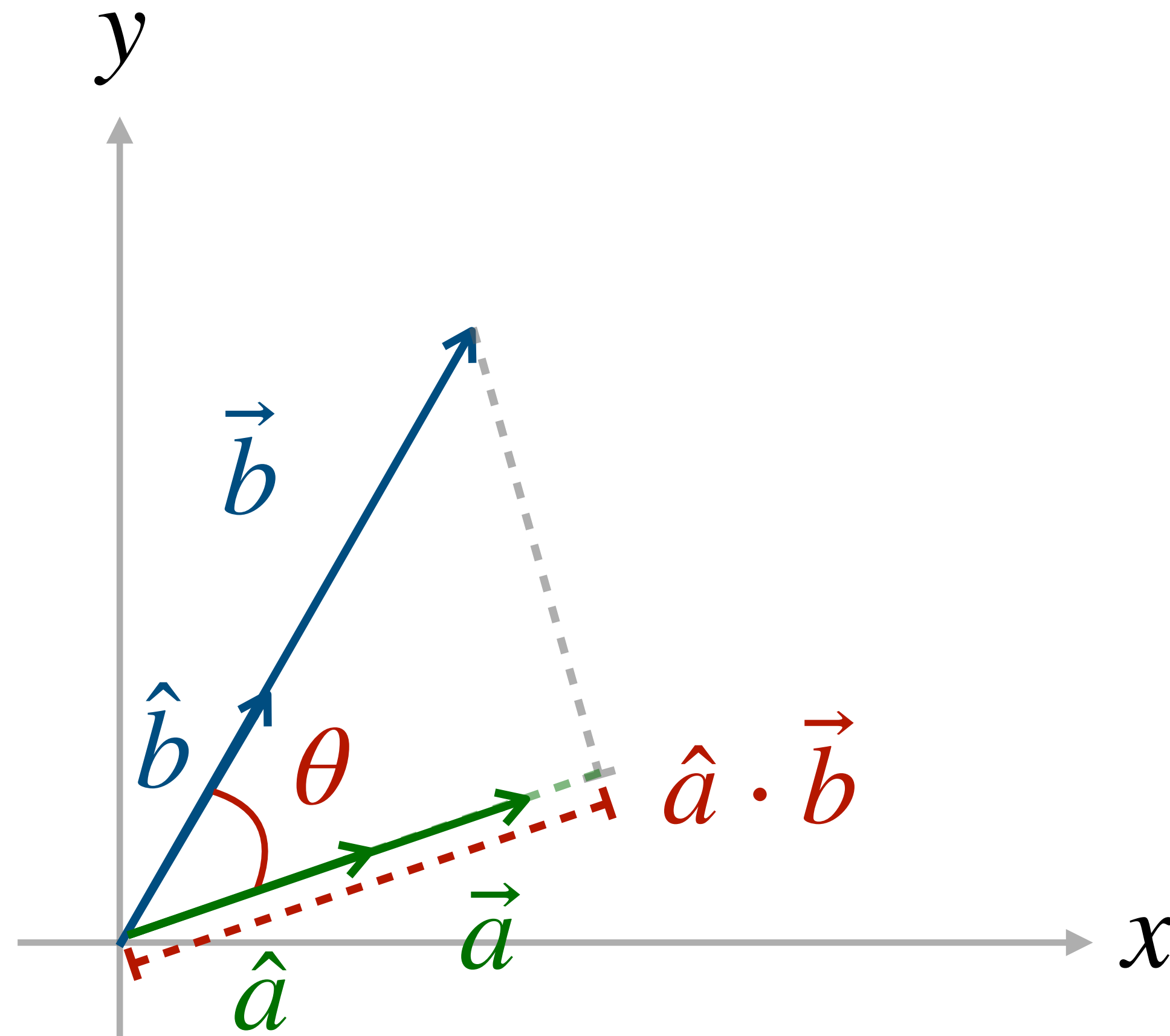
A multiplicação de um vetor \vec{a} por um escalar s é definida pela multiplicação de todos os compoenetes de \vec{a} por s :

$$s \cdot \vec{a} = [s \cdot a_x, s \cdot a_y, s \cdot a_z]$$

Geometricamente

A multiplicação por escalar altera apenas o comprimento de \vec{a} . Se s for negativo, a multiplicação irá inverter a direção de \vec{a} .

Produto Escalar



Algebricamente

O produto escalar entre dois vetores \vec{a} e \vec{b} é definido pela soma das multiplicações dos componentes de \vec{a} com seus componentes correspondentes em \vec{b} :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

Geometricamente

O produto escalar pode ser utilizado para calcular o ângulo θ entre dois vetores \vec{a} e \vec{b} :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| ||\vec{b}|| \cos \theta$$

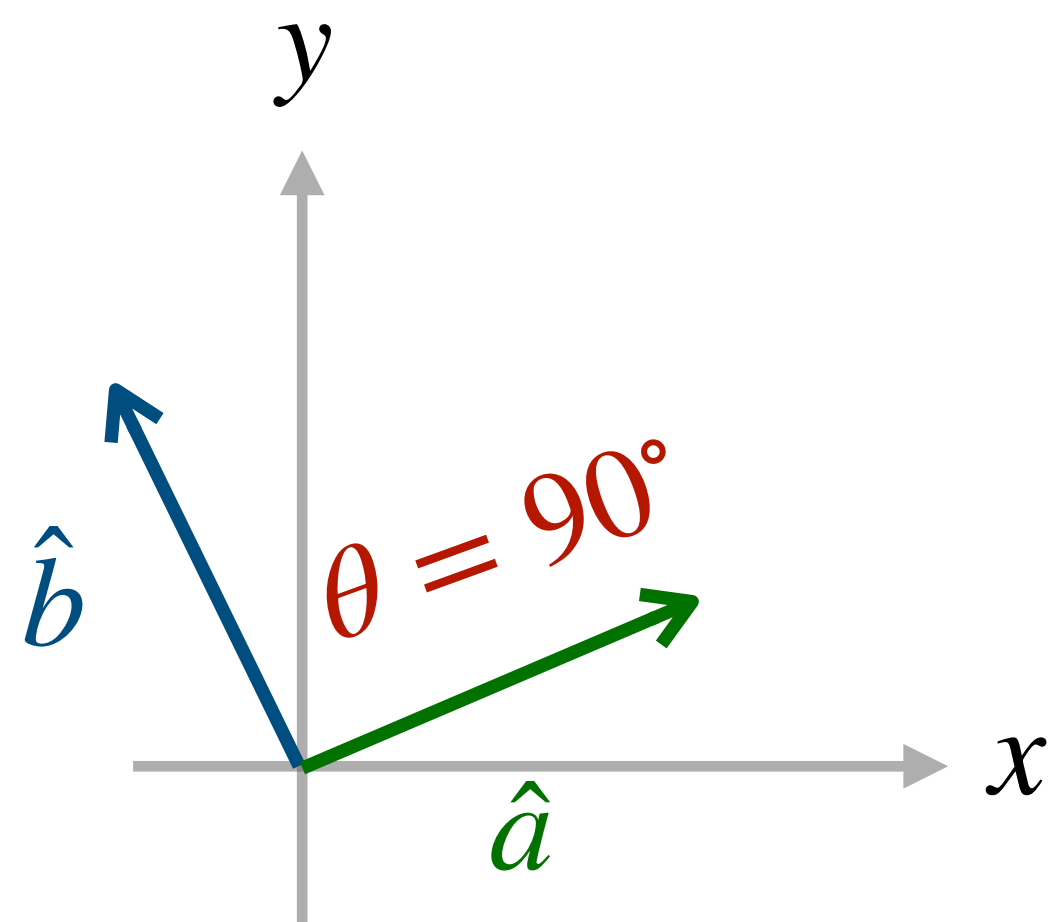
$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}|| ||\vec{b}||}\right)$$

Além disso, se \hat{a} for um vetor unitário, $\hat{a} \cdot \vec{b}$ é o comprimento da projeção de \vec{b} em \hat{a} .

Produto Escalar

\hat{a} e \hat{b}

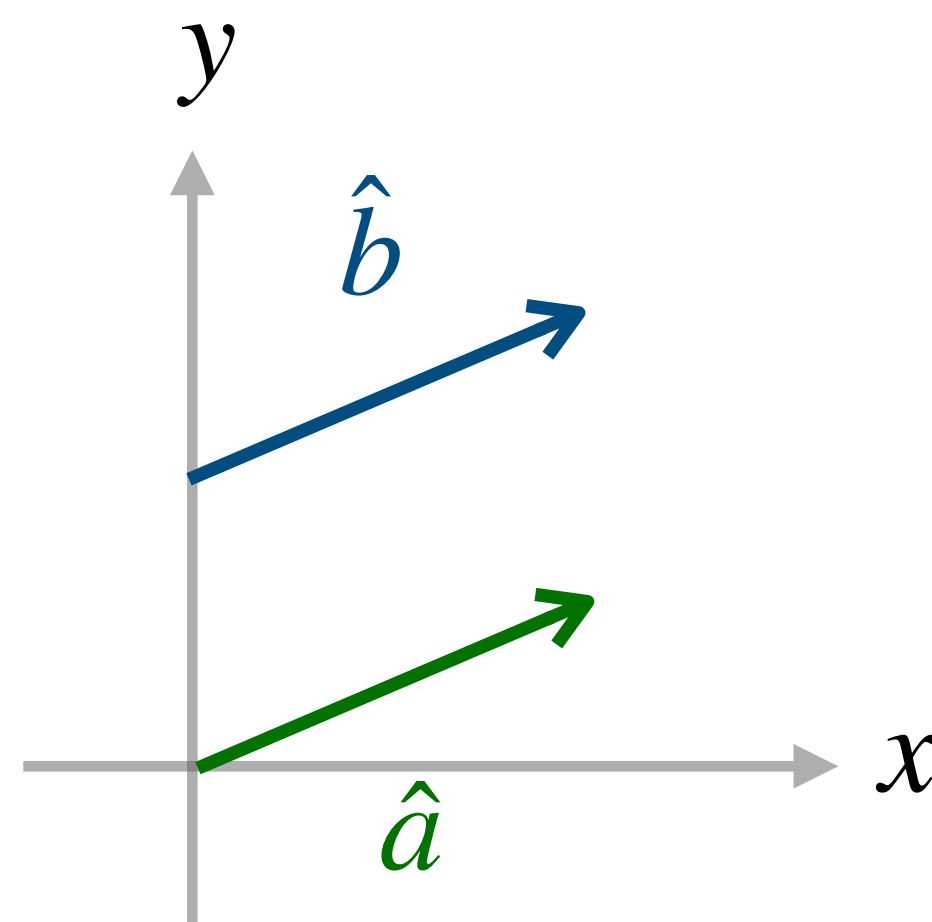
Perpendiculares



$$\hat{a} \cdot \hat{b} = \cos(90) = 0$$

\hat{a} e \hat{b}

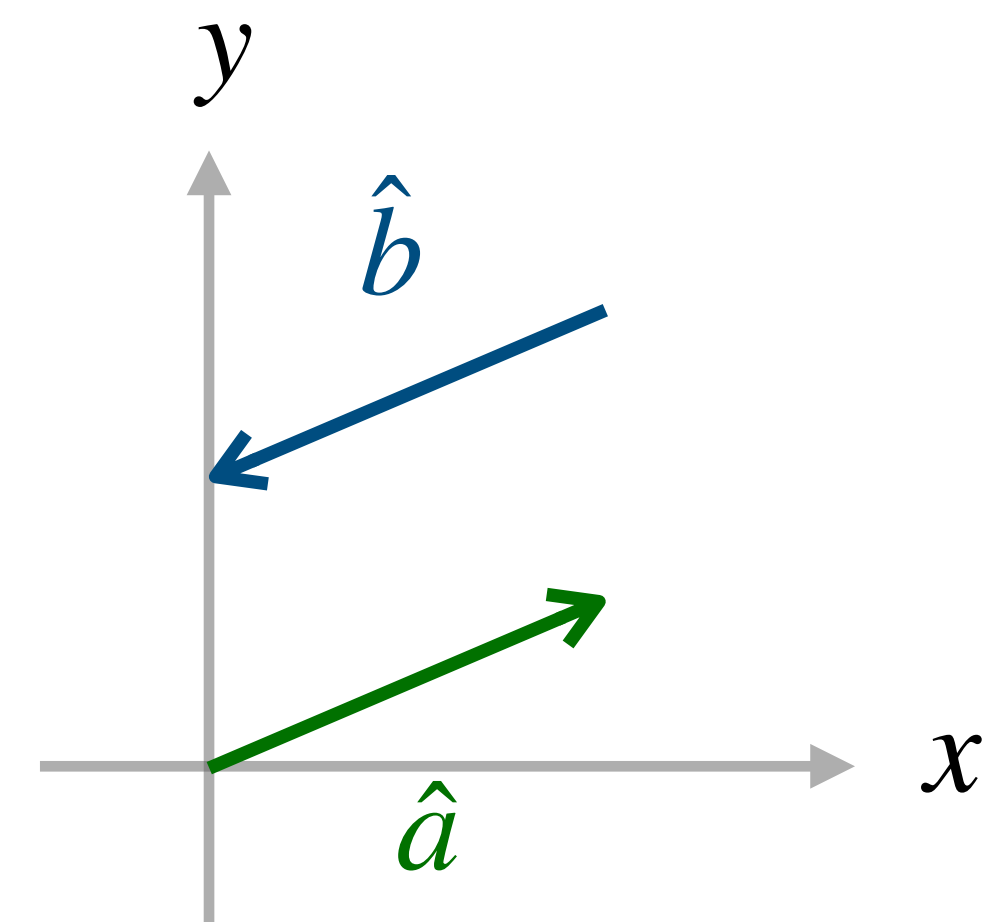
Paralelos
Mesma direção



$$\hat{a} \cdot \hat{b} = \cos(0) = 1$$

\hat{a} e \hat{b}

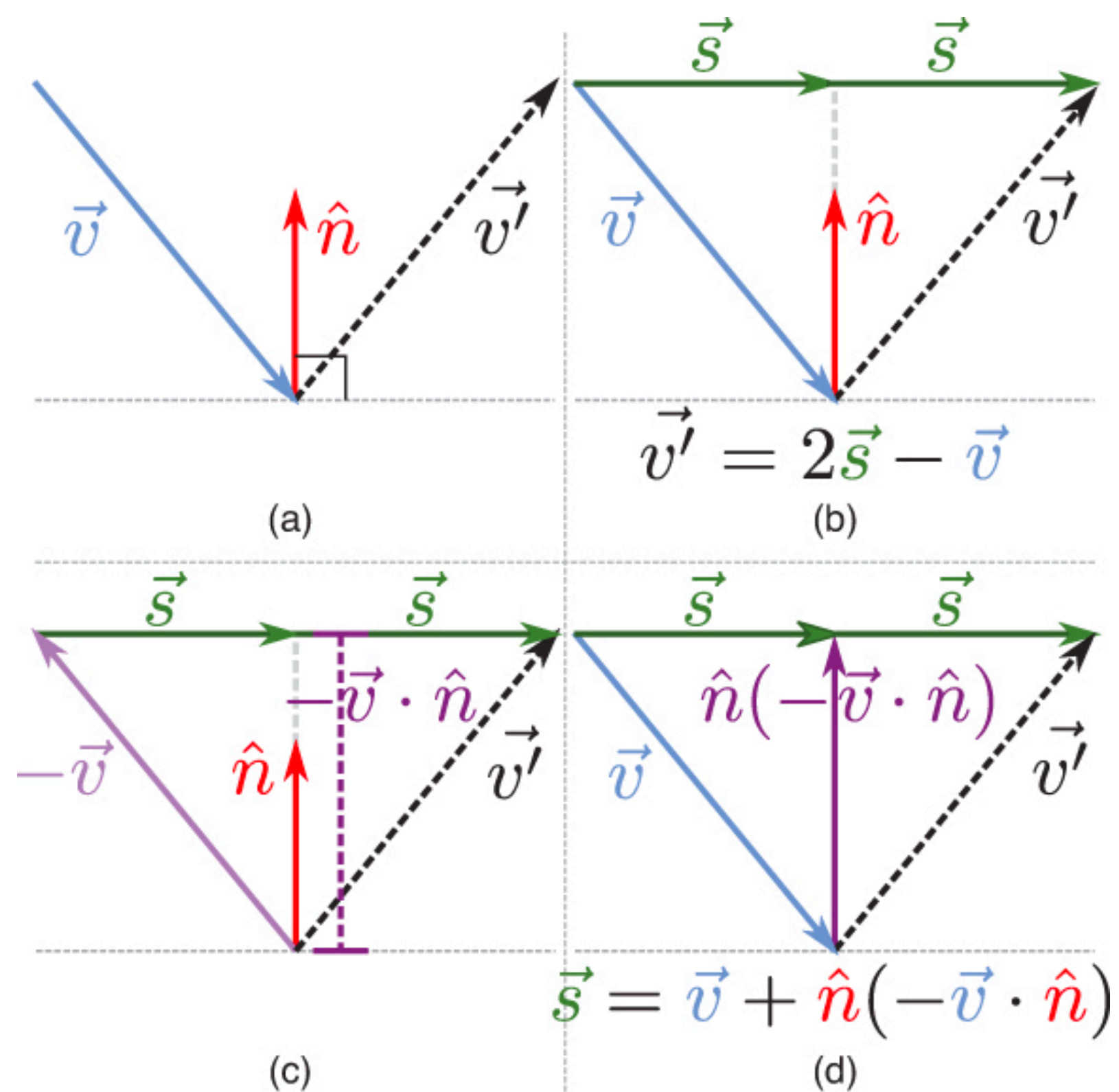
Paralelos
Direções opostas



$$\hat{a} \cdot \hat{b} = \cos(180) = -1$$

Exercício

Calcular a reflexão \vec{v}' de um vetor \vec{v} que incide sobre uma superfície de normal \hat{n} :



$$(b) \vec{v}' = 2\vec{s} - \vec{v}$$

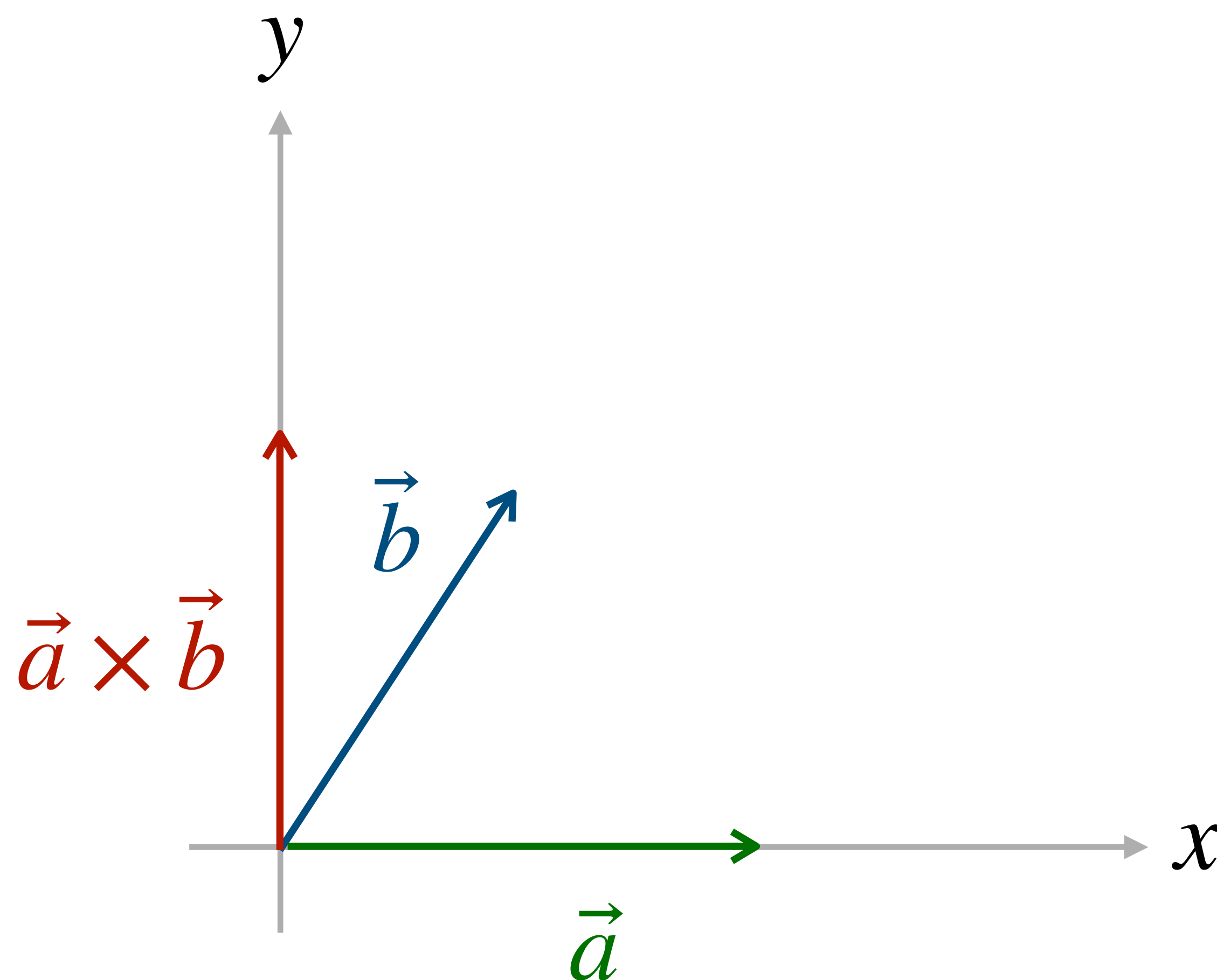
$$(c) \vec{s} = \vec{v} + \hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n})$$

$$(d) \vec{v}' = 2(\vec{v} + \hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n})) - \vec{v}$$

$$\vec{v}' = 2\vec{v} + 2\hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n}) - \vec{v}$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - 2\hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n})$$

Produto Vetorial



Algebricamente

O produto vetorial entre dois vetores 3D \vec{a} e \vec{b} é definido pelo determinante da matriz:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = [a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x]$$

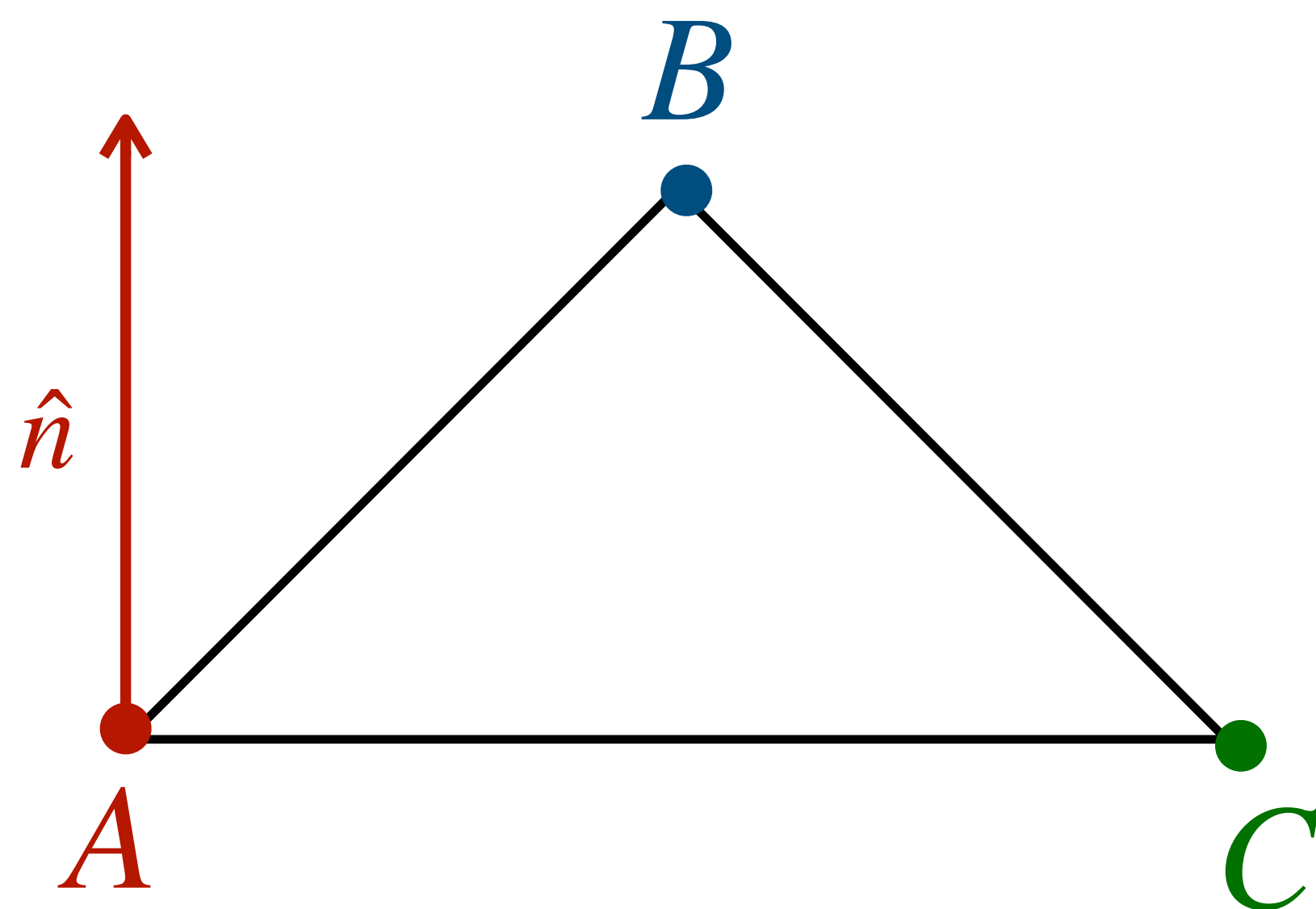
Geometricamente

$\vec{a} \times \vec{b}$ é o vetor normal ao plano desses dois vetores.

Obs: produto vetorial não é definido em 2D!

Exercício

Calcular o vetor normal \hat{n} ao triângulo ABC:



$$\vec{u} = B - A$$

$$\vec{v} = C - A$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

$$\hat{n} = \text{norm}(n)$$

Próximas aulas

A4: Física - Objetos Rígidos

Mecânica linear para movimentação de objetos rígidos.

L4: Asteroids - Parte 1

Implementar um componente Rigidbody para a movimentação de objetos rígidos.