INF216

2023/2

UFV

Projeto e Implementação de Jogos Digitais

A3: Álgebra Linear

Logística

Avisos

- Não teremos laboratório nessa sexta-feira (Semana de Infomática)!

Última aula

- Game loop
- Modelagem de objetos

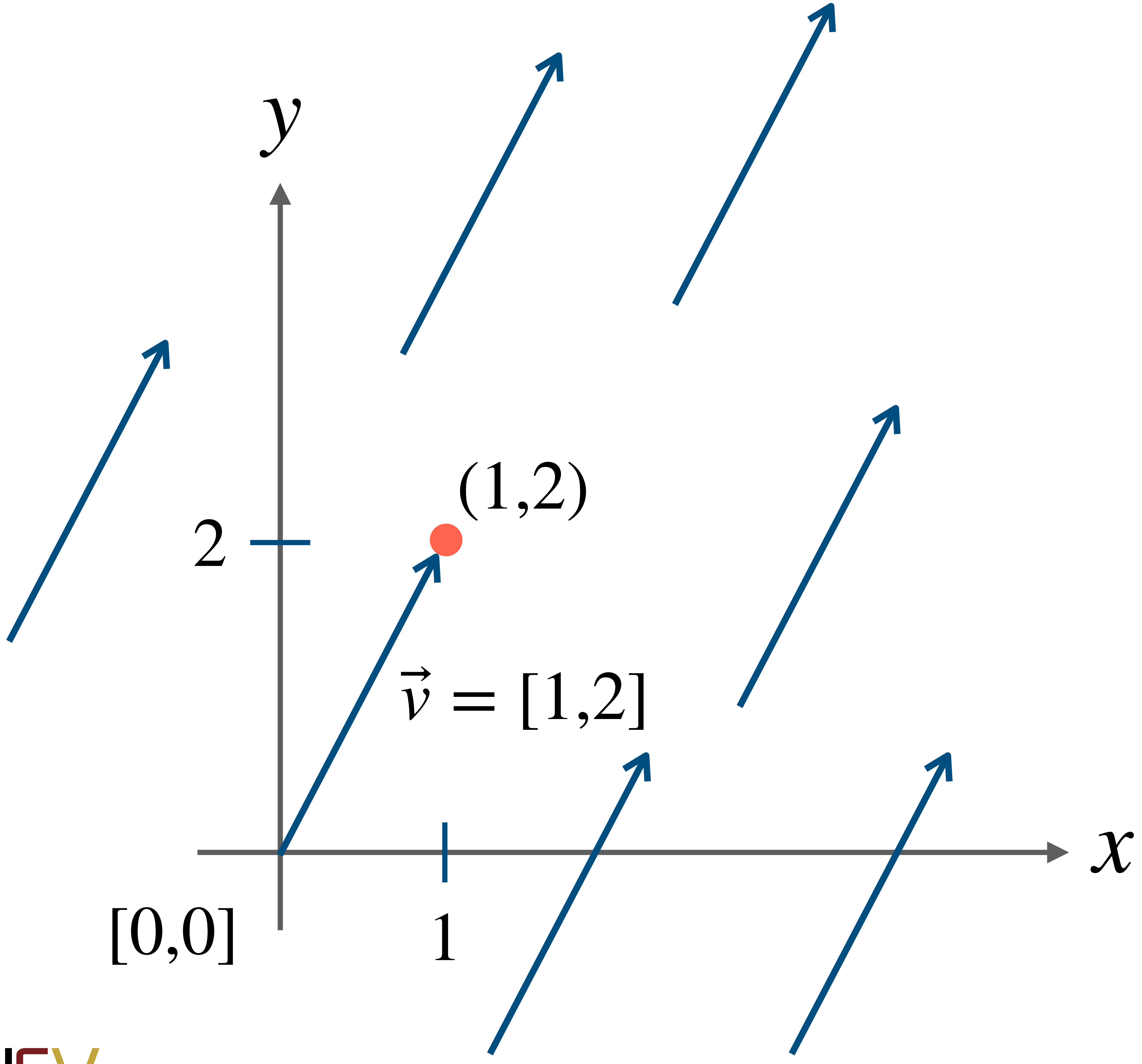
Plano de Aula

- Vetores
  - Definição
  - Operações
  - Aplicações
- Matrízes de transformação
  - Translação, Rotação e Escala
  - Coordenadas Homogêneas
  - Composição de Transformações

Vetores

UFV

Vetores



Em Álgera Linear, um **vetor** $\vec{v}$ representa uma direção, um sentido e um comprimento em um espaço n-dimensional.

Por exemplo, um vetor $2D$ é definido como:

$$\vec{v} = [v_x, v_y] \in R^2$$

- Vetores são independentes de posição, ou seja, dois vetores de mesma direção, sentido e comprimento são iguais!
- No entanto, é conveniente desenhar vetores com a **cauda** (ponto de partida) na origem $(0,0)$ de tal forma que a **cabeça** (ponto de destino) aponte para uma posição específica no espaço.

UFV

Vetores

```
class Vector2 {
  float x,
  float y
}

class Vector3 {
  float x,
  float y,
  float z
}
```

Em jogos digitais, geralmente usamos vetores 2D e 3D, dependento dos gráficos de jogo.

Além disso, vetores 4D também são usados em jogos 3D para combinar transformações (e.g., rotação e translação)

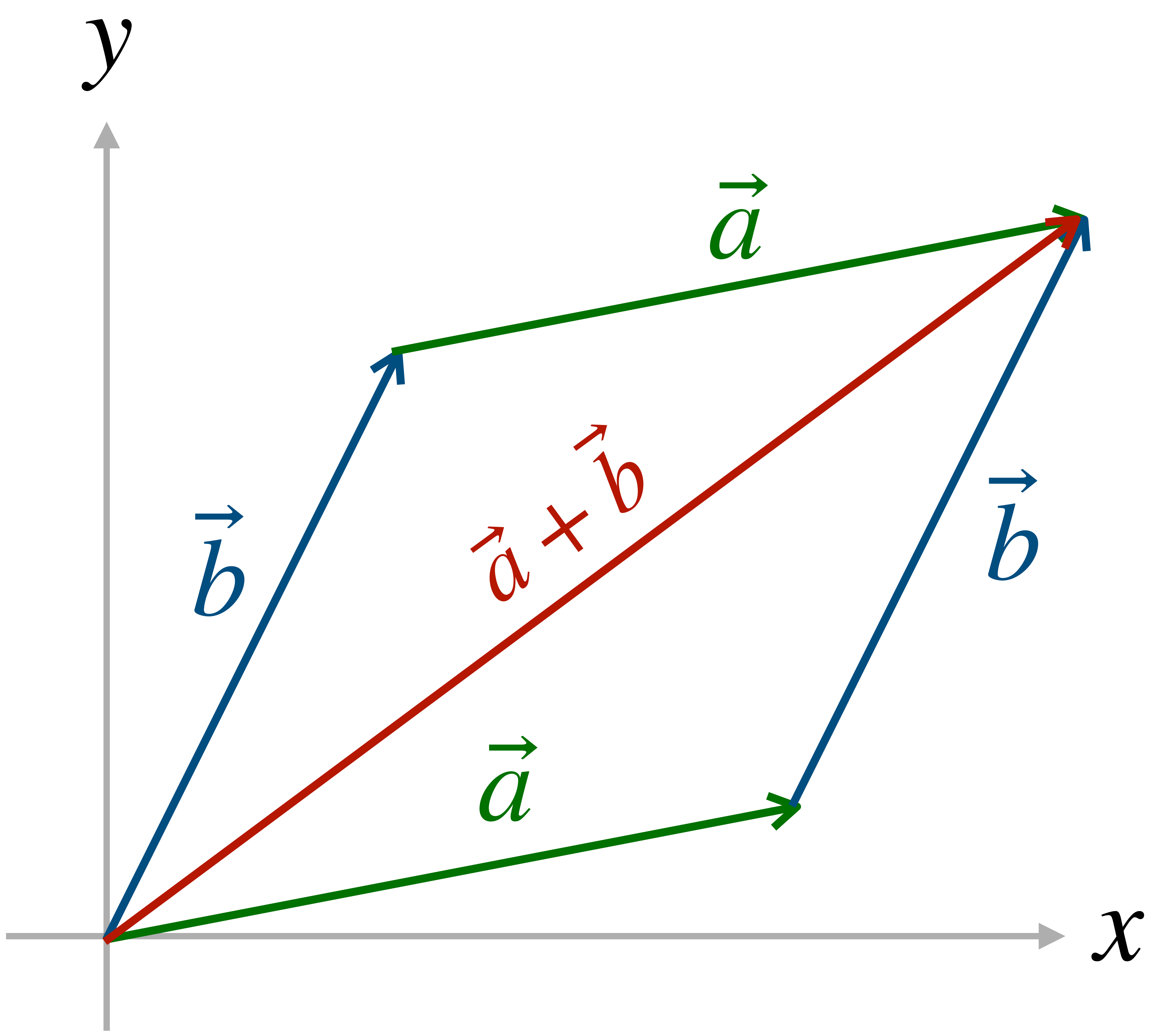
Em código, vetores geralmente são representados por uma classe com um atributo float por dimensão.

Operações

Diversas operações podem ser realizadas com vetores:

- Adição
- Subtração
- Comprimento
- Normalização
- Multiplicação por Escalar
- Produto Escalar
- Produto Vetorial

Adição



Algebricamente

A adição de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é definida pela soma dos componentes de $\vec{a}$ com seus componentes correspondentes em $\vec{b}$:

$$\vec{a} + \vec{b} = [a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z]$$

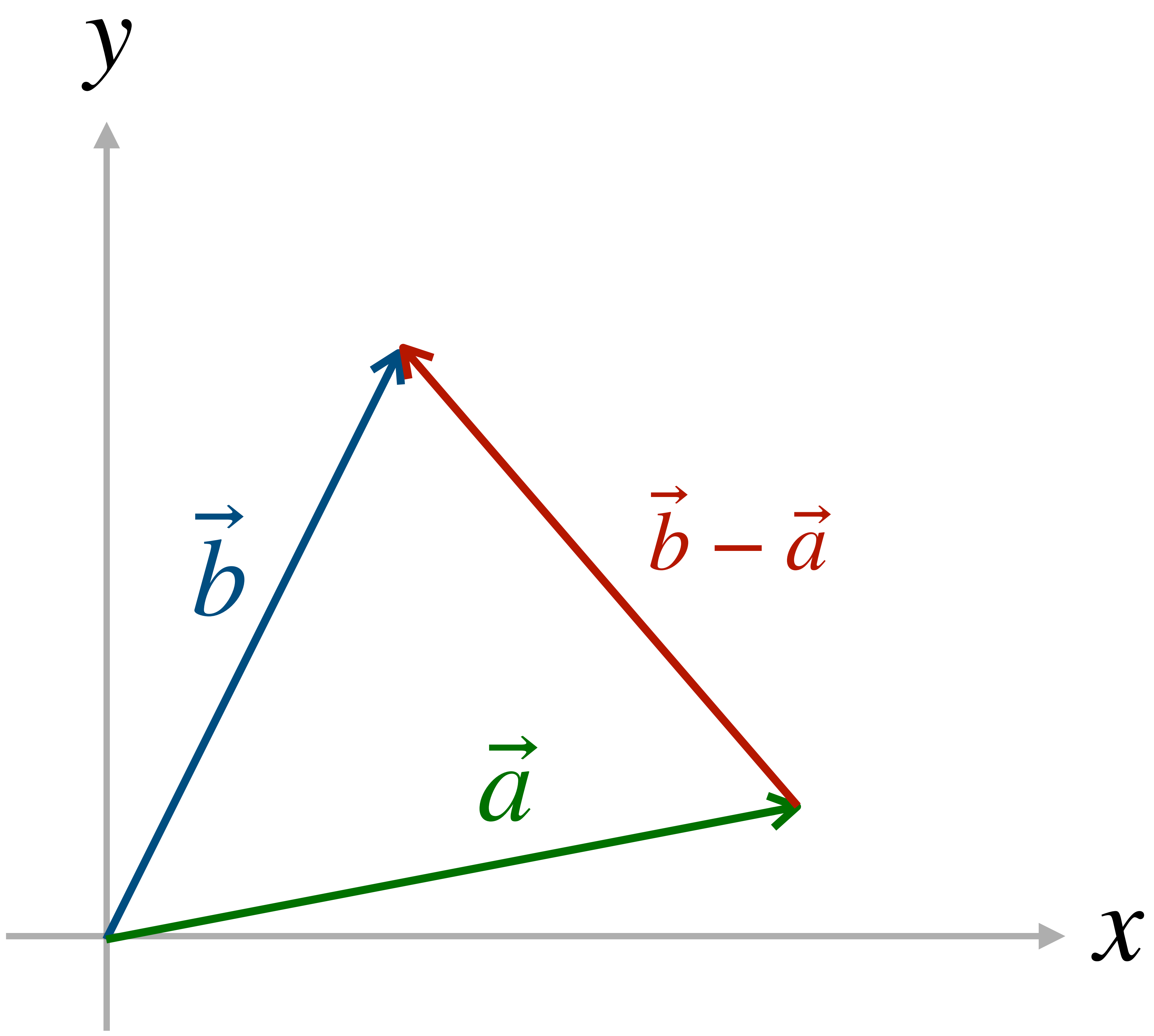
Geometricamente

A adição pode ser realizada posicionando a cauda de $\vec{b}$ na cabeça de $\vec{a}$, e desenhando um vetor da cauda de $\vec{a}$ até a cabeça de $\vec{b}$.

Note que se fizermos a soma na ordem inversa $\vec{b} + \vec{a}$, o vetor resultante é o mesmo. Regra do paralelogramo: $\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$

UFV

Subtração



Algebricamente

A subtração de dois vetores $\vec{b}$ e $\vec{a}$ é definida pela subtração dos componente de $\vec{b}$ pelo seus componentes correspondentes em $\vec{a}$:

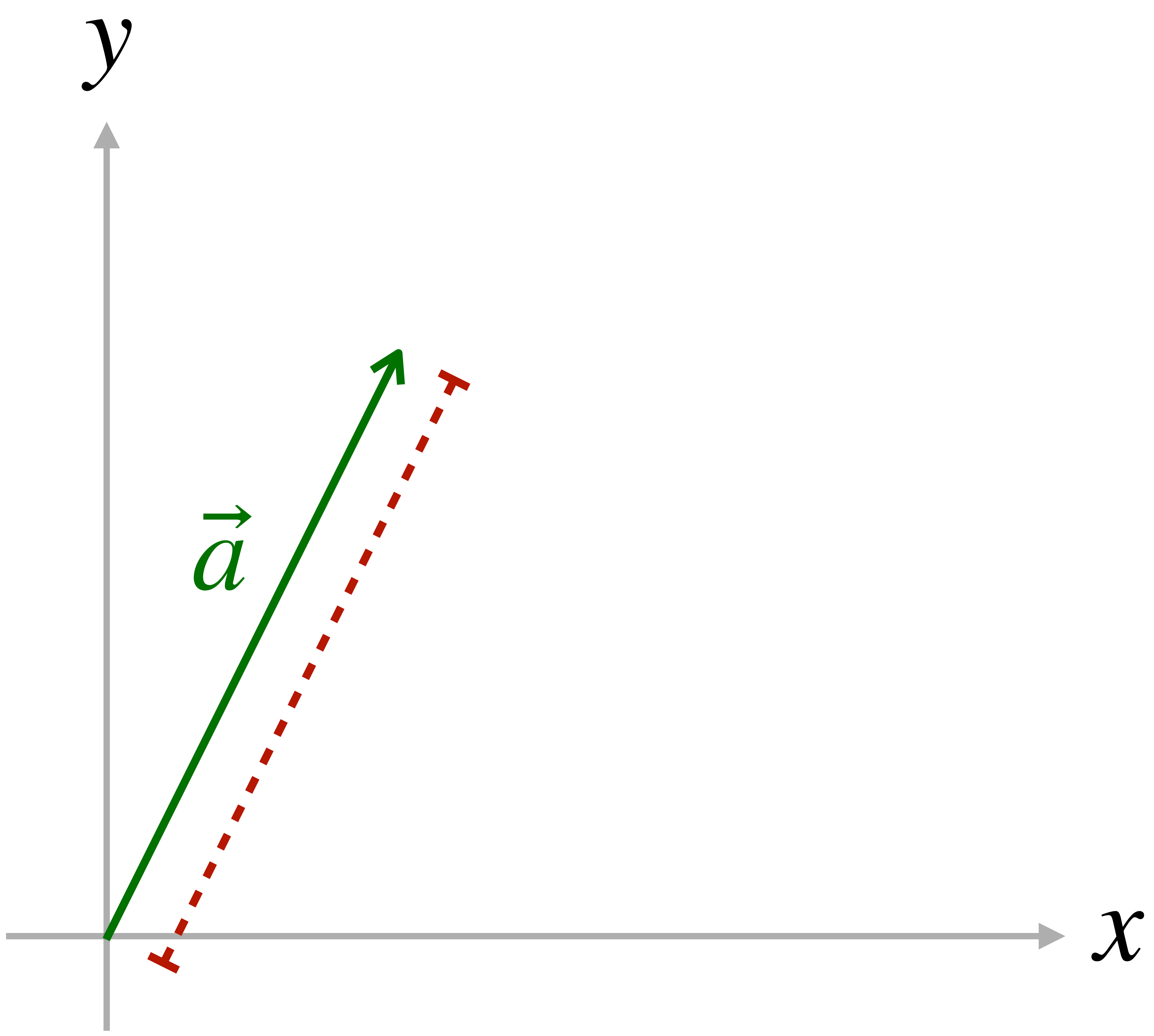
$$\vec{b} - \vec{a} = [b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z]$$

Geometricamente

A subtração pode ser realizada posicionando as caudas de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ na mesma posição, e desenhando um vetor da cabeça de $\vec{a}$ até a cabeça de $\vec{b}$.

Note que se fizermos a subtração na ordem inversa $\vec{a} - \vec{b}$, o vetor resultante será diferente. Por isso, a subtração não é comuntativa.

Comprimento

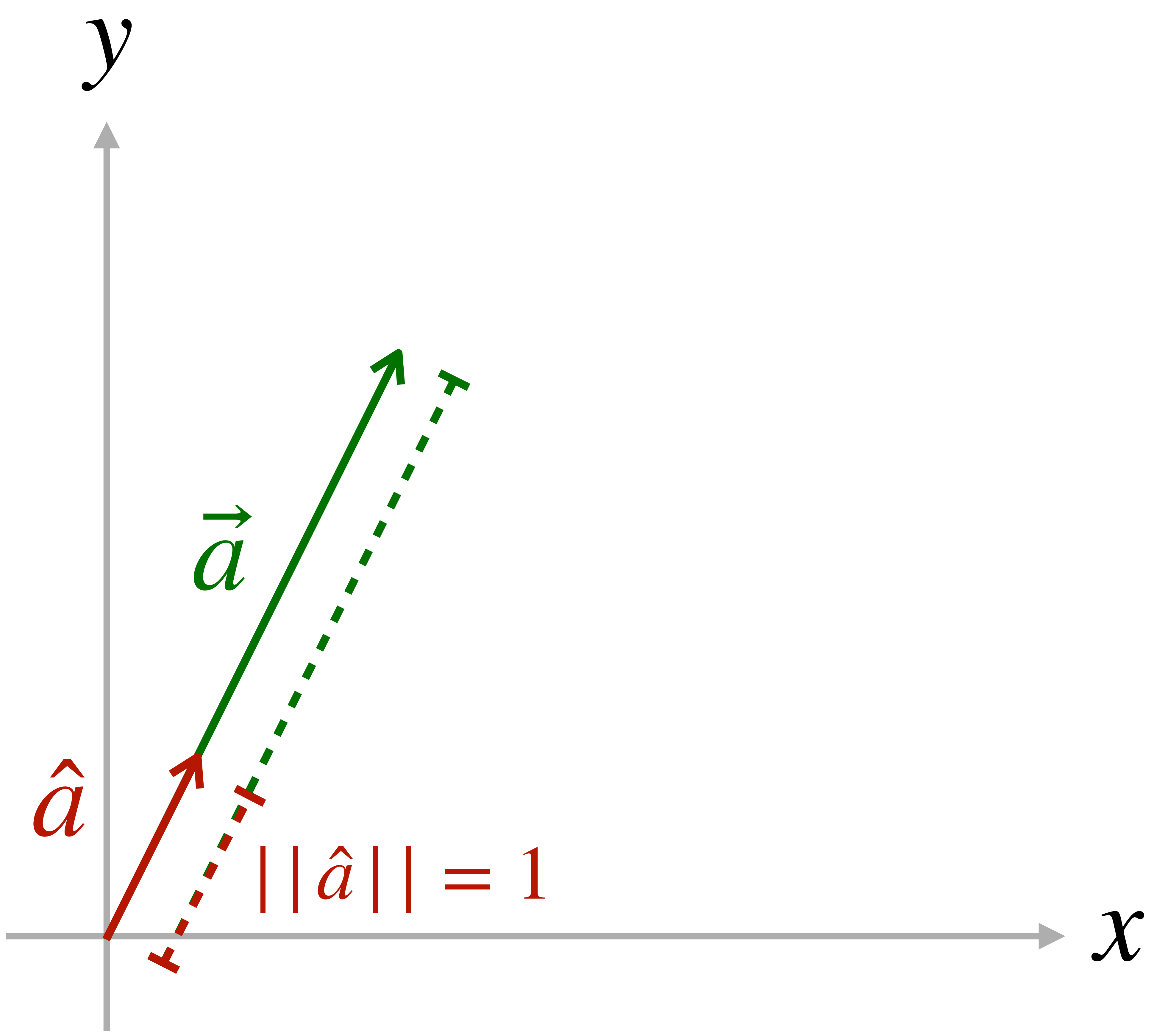


Para calcular o comprimento $||\vec{a}||$ de um vetor vetores $\vec{a}$, calculamos a distância euclidiana entre a origem e o ponto ao qual $\vec{a}$ aponta:

$$||\vec{a}|| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Em jogos, quando vamos comparar o comprimento de dois vetores (e.g., qual inimigo está mais próximo do jogador), utilizamos o quadrado do comprimento, para evitar o cálculo das raízes quadradas.

Normalização



Um vetor $\hat{a}$ unitário é um vetor de comprimento $||\hat{a}|| = 1$.

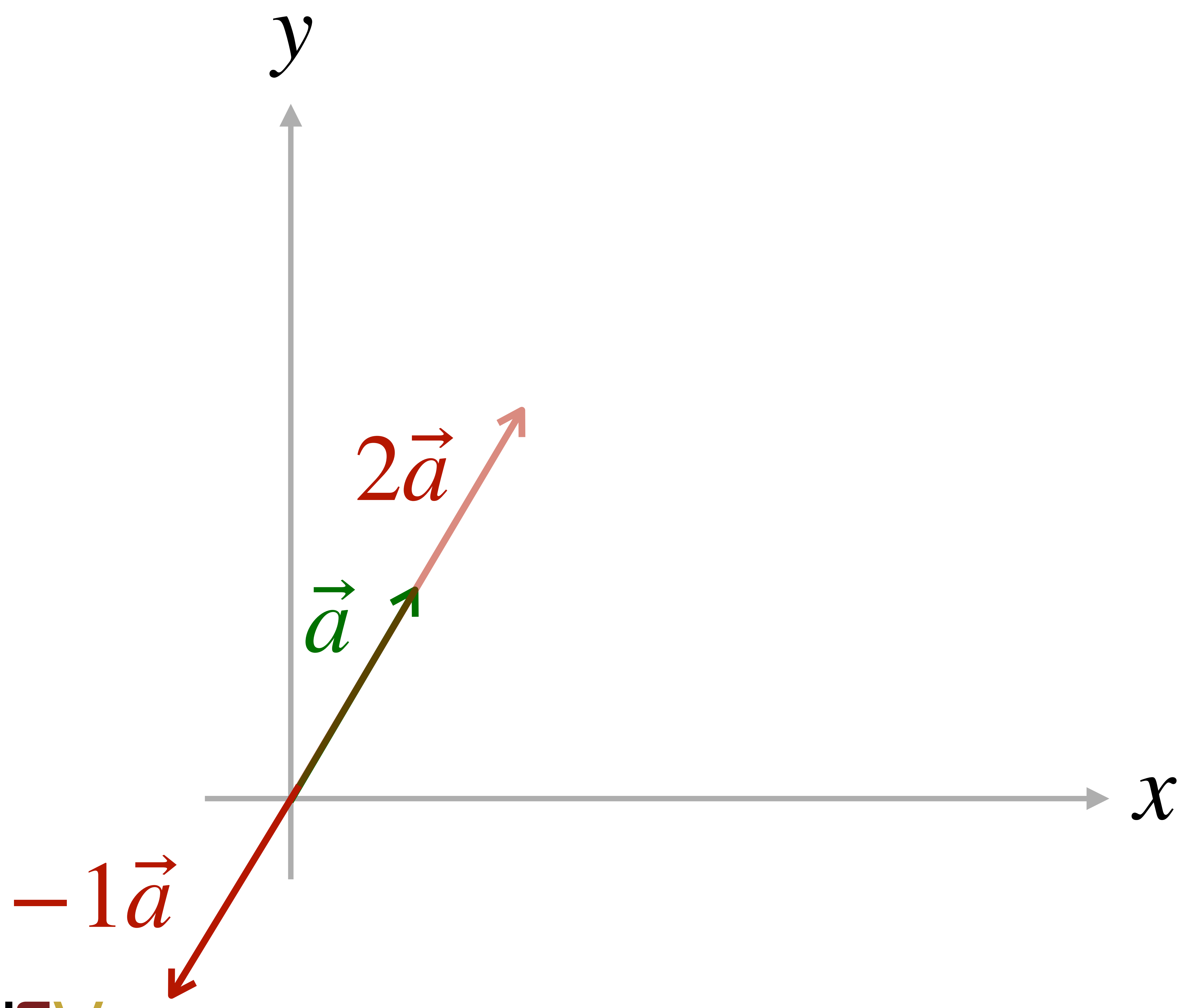
A operação que converte um vetor não-unitário $\vec{a}$ em um vetor unitário $\hat{a}$ é chamada de **normalização**.

Para normalizar um vetor não-unitário $\vec{a}$, dividimos todas os seus componentes pelo seu comprimento $||\vec{a}||$:

$$\hat{a} = [\frac{a_x}{||\vec{a}||}, \frac{a_y}{||\vec{a}||}, \frac{a_z}{||\vec{a}||}]$$

UFV

Multiplicação (Escalar)



Algebricamente

A multiplicação de um vetor $\vec{a}$ por um escalar s é definida pela multiplicação de todos os compoenetes de $\vec{a}$ por s:

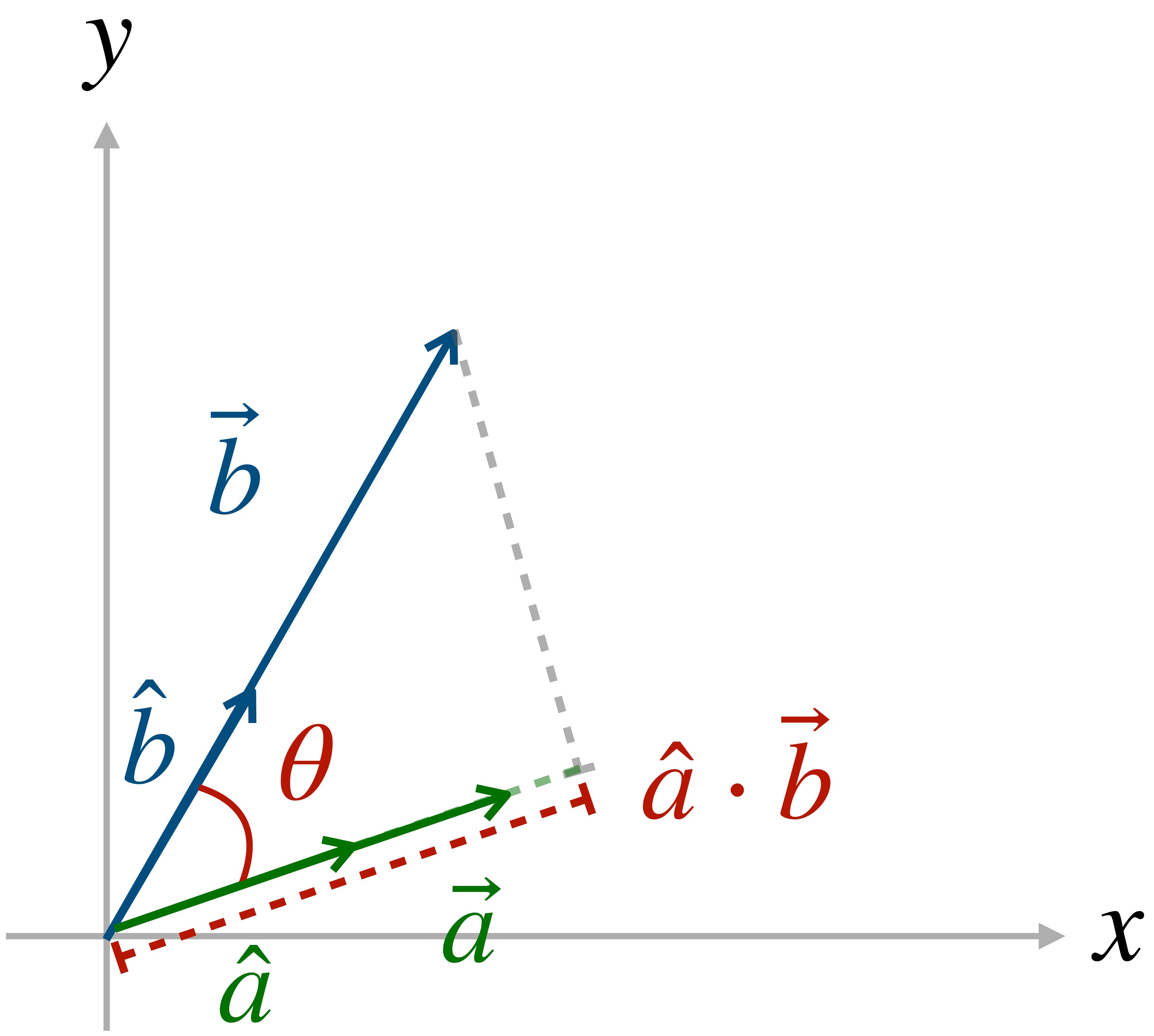
$$s \cdot \vec{a} = [s \cdot a_x, s \cdot a_y, s \cdot a_z]$$

Geometricamente

A multiplicação por escalar altera apenas o comprimento de $\vec{a}$. Se s for negativo, a multiplicação irá inverter a direção de $\vec{a}$.

UFV

Produto Escalar



Algebricamente

O produto escalar entre dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é definido pela soma das multiplicações dos componentes de $\vec{a}$ com seus componentes correspondentes em $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

Geometricamente

O produto escalar pode ser utilizado para calcular o ângulo θ entre dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||cos\theta$$

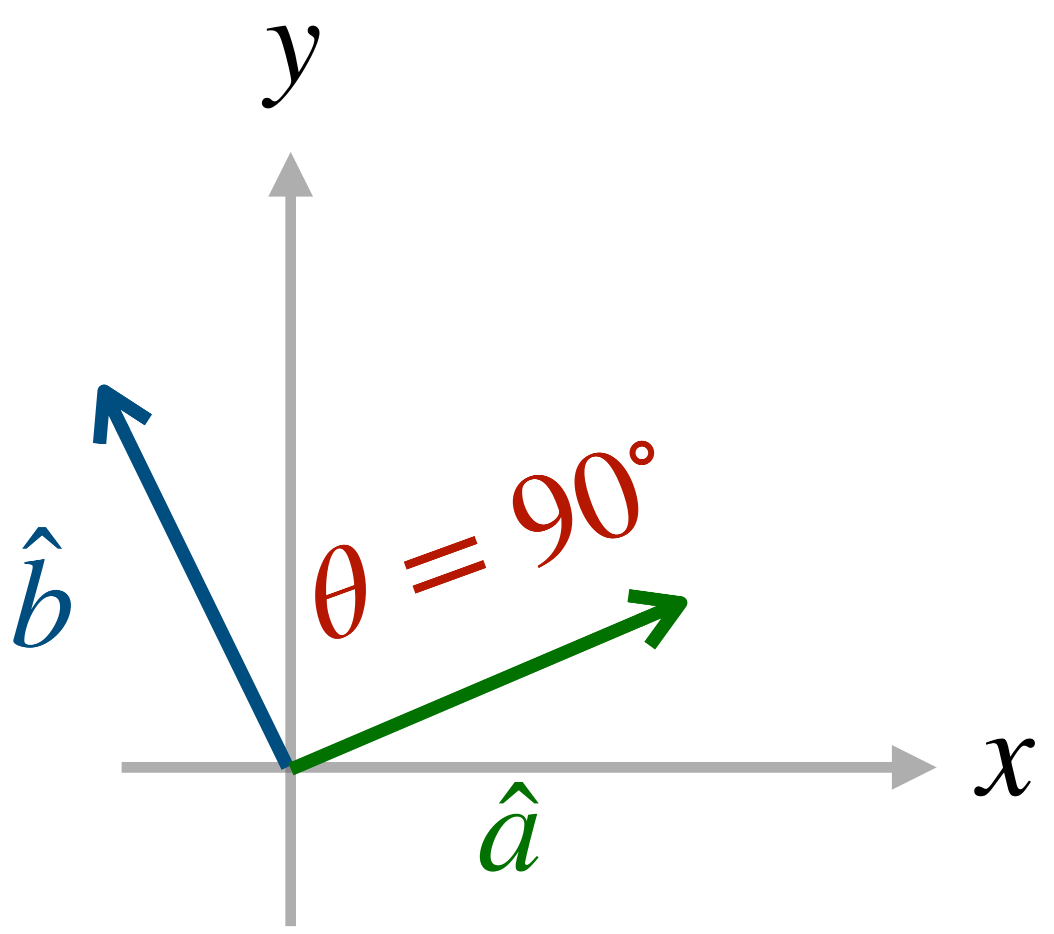
$$\theta = arccos(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}||\,||\vec{b}||})$$

Além disso, se $\hat{a}$ for um vetor unitário, $\hat{a} \cdot \vec{b}$ é o comprimento da projeção de $\hat{b}$ em $\hat{a}$.

UFV

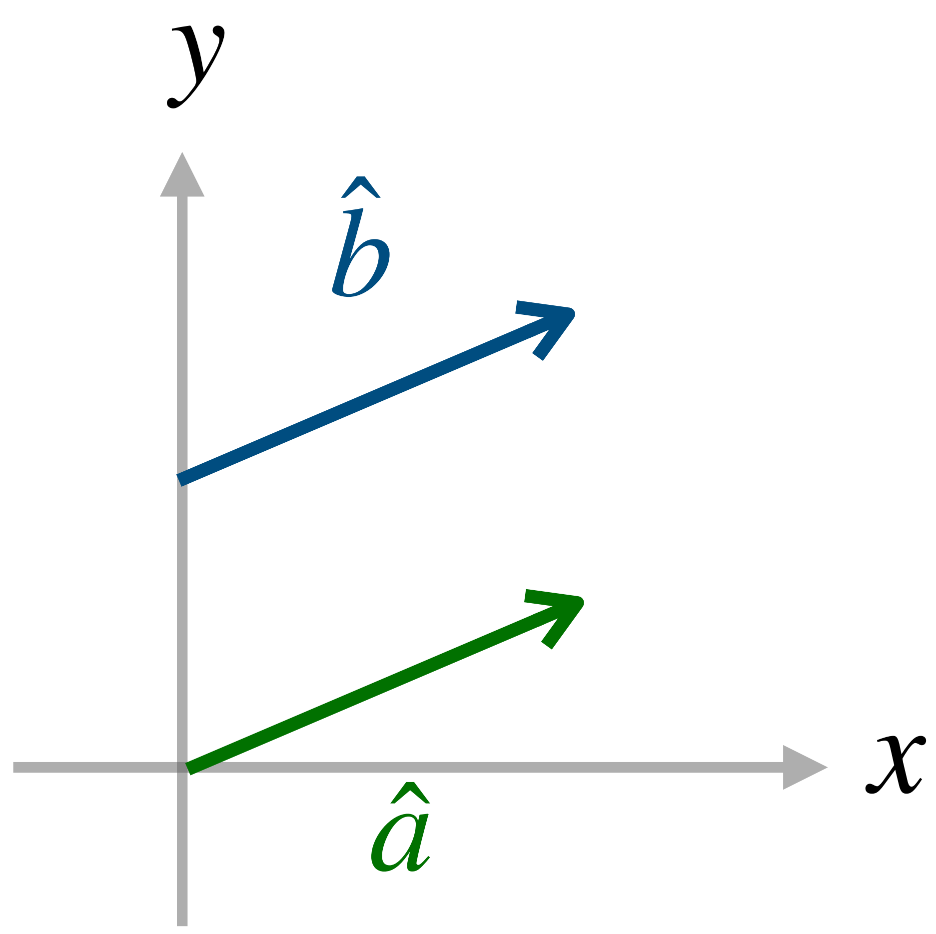
Produto Escalar

$\hat{a}$ e $\hat{b}$
Perpendiculares



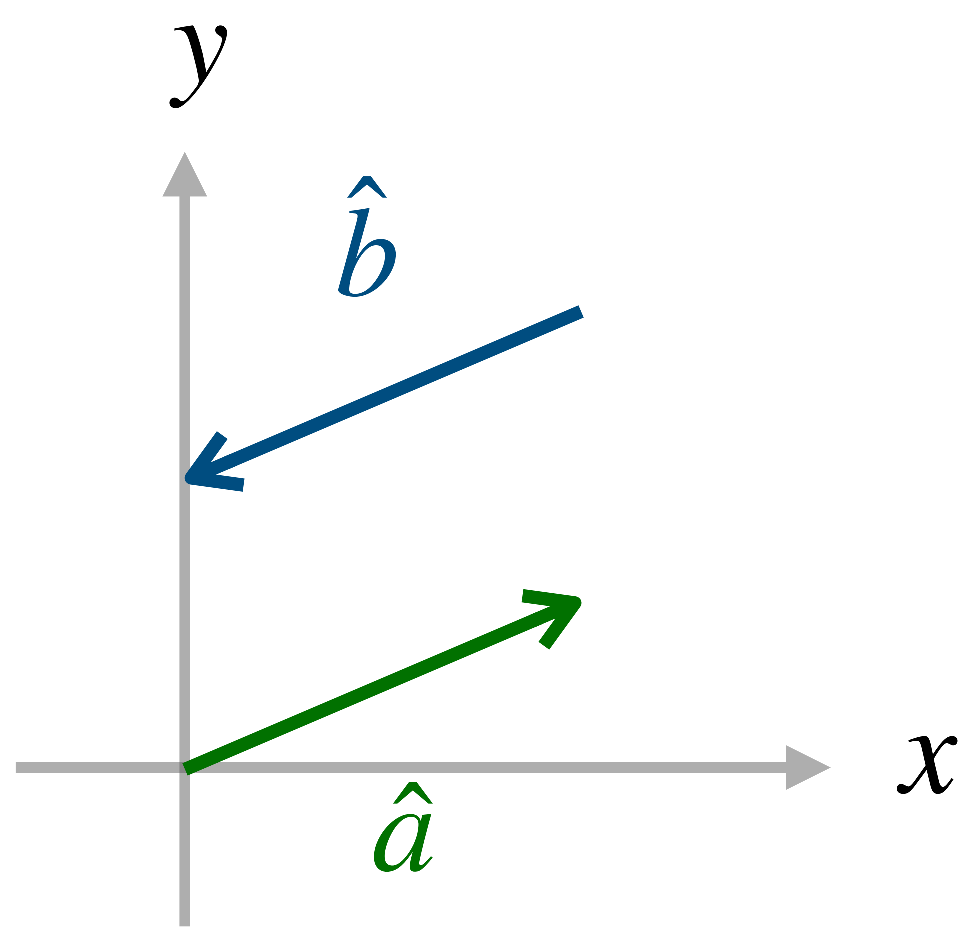
$$\hat{a} \cdot \vec{b} = cos(90) = 0$$

$\hat{a}$ e $\hat{b}$
Paralelos
Mesma direção



$$\hat{a} \cdot \vec{b} = cos(0) = 1$$

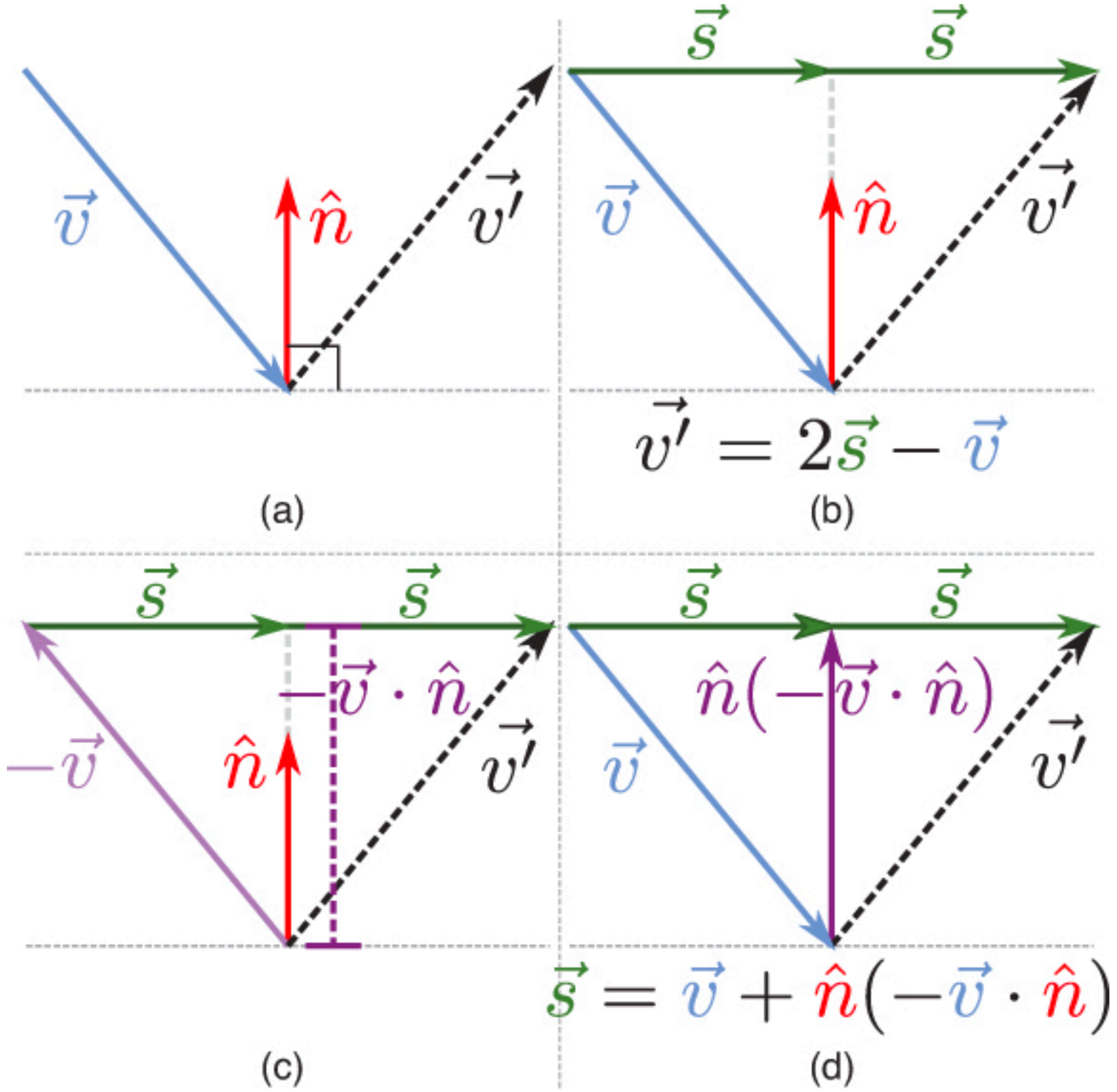
$\hat{a}$ e $\hat{b}$
Paralelos
Direções opostas



$$\hat{a} \cdot \vec{b} = cos(180) = -1$$

Exercício

Calcular a reflexão $\vec{v}'$ de um vetor $\vec{v}$ que incide sobre uma superfície de normal $\hat{n}$:



$$(b)\ \vec{v}' = 2\vec{s} - \vec{v}$$

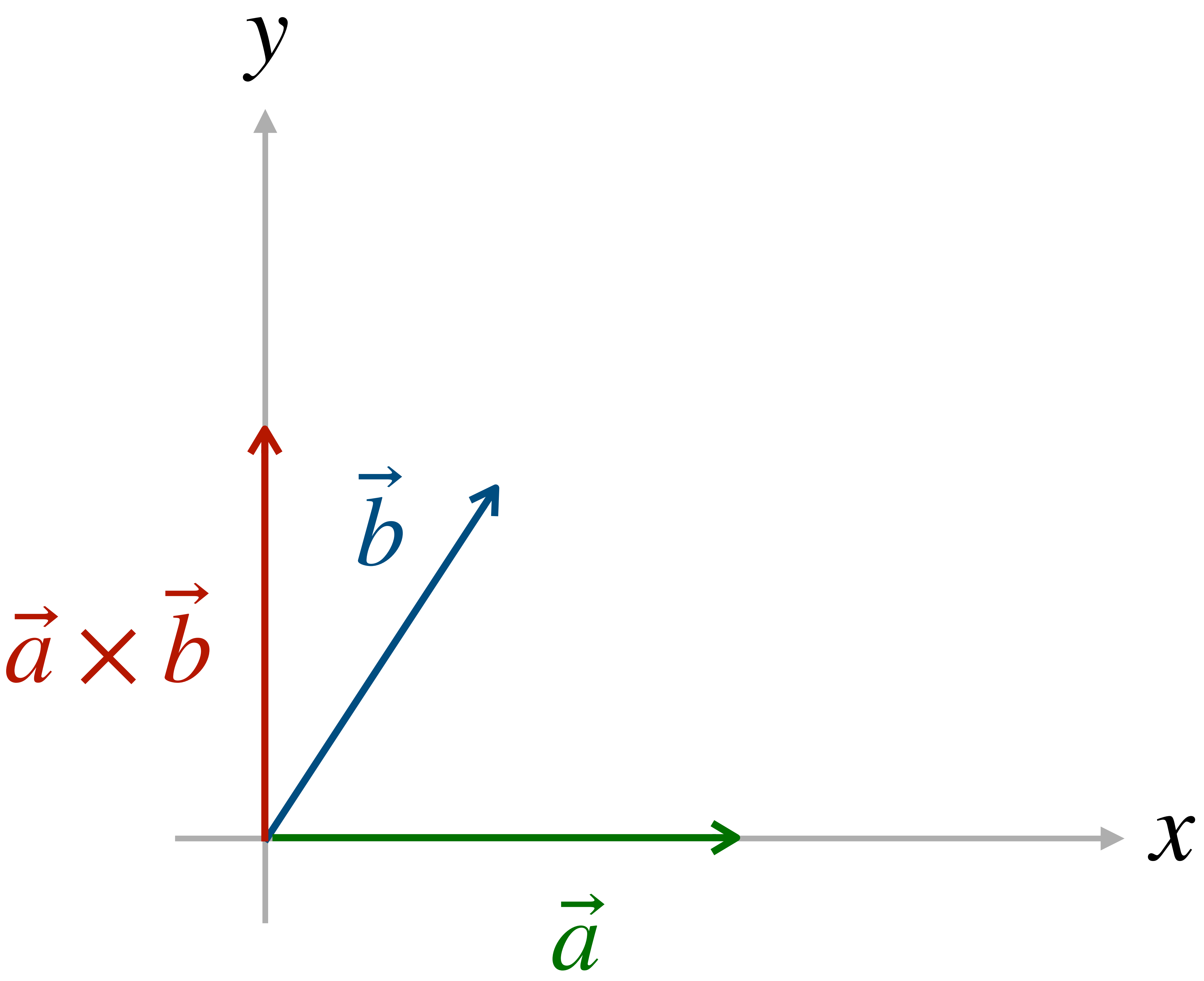
$$(c)\ \vec{s} = \vec{v} + \hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n})$$

$$(d)\ \vec{v}' = 2(\vec{v} + \hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n})) - \vec{v}$$

$$\vec{v}' = 2\vec{v} + 2\hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n}) - \vec{v}$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - 2\hat{n}(-\vec{v} \cdot \hat{n})$$

Produto Vetorial



Algebricamente

O produto vetorial entre dois vetores 3D $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é definido pelo determinante da matríz:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = [a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x]$$

Geometricamente

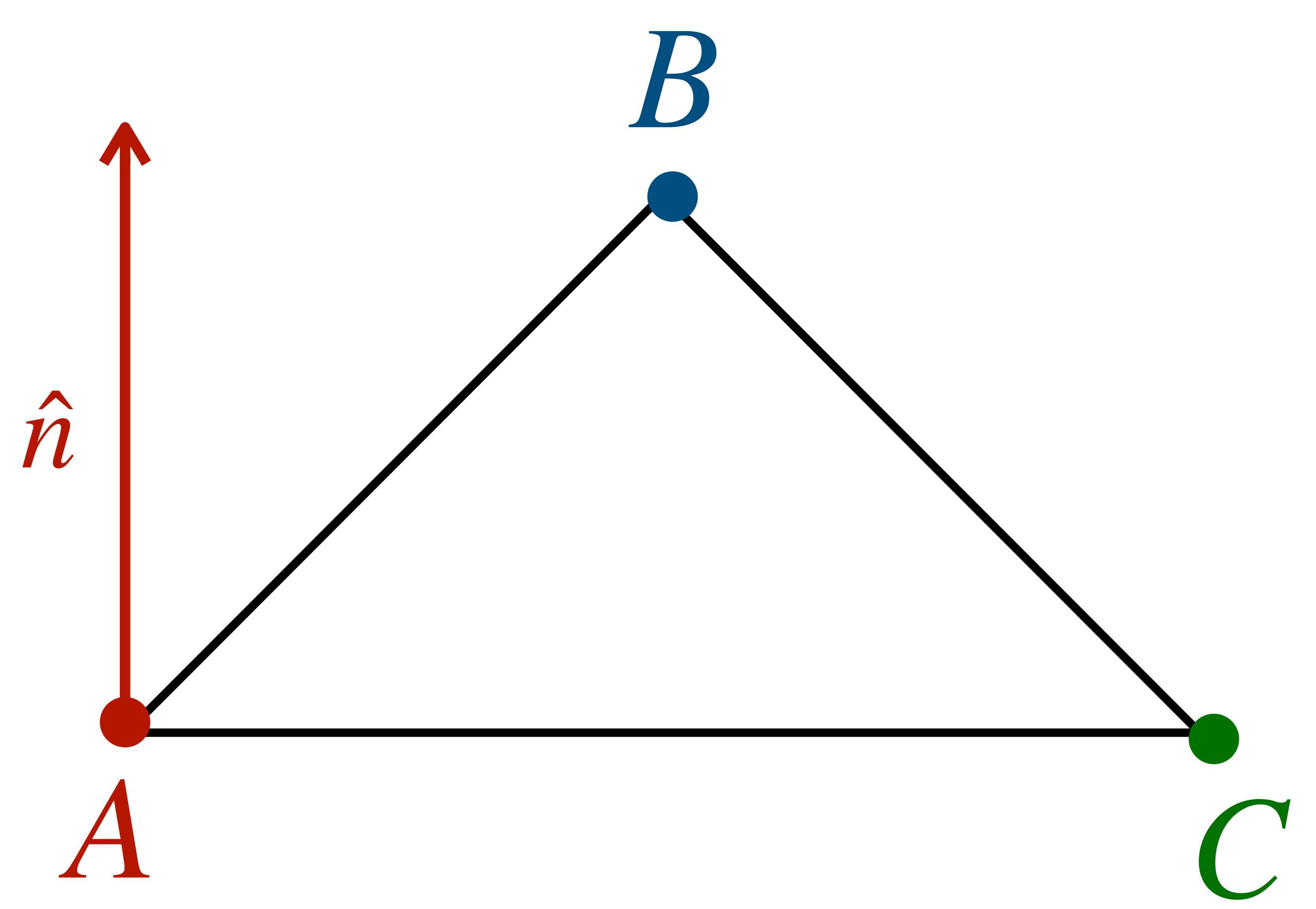
$\vec{a} \times \vec{b}$ é o vetor normal ao plano desses dois vetores.

Obs: *produto vetorial não é definido em 2D!*

UFV

Exercício

Calcular o vetor normal $\hat{n}$ ao triângulo ABC:



$$\vec{u} = B - A$$
$$\vec{v} = C - A$$
$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$
$$\hat{n} = norm(n)$$

UFV

Matrizes de Transformação

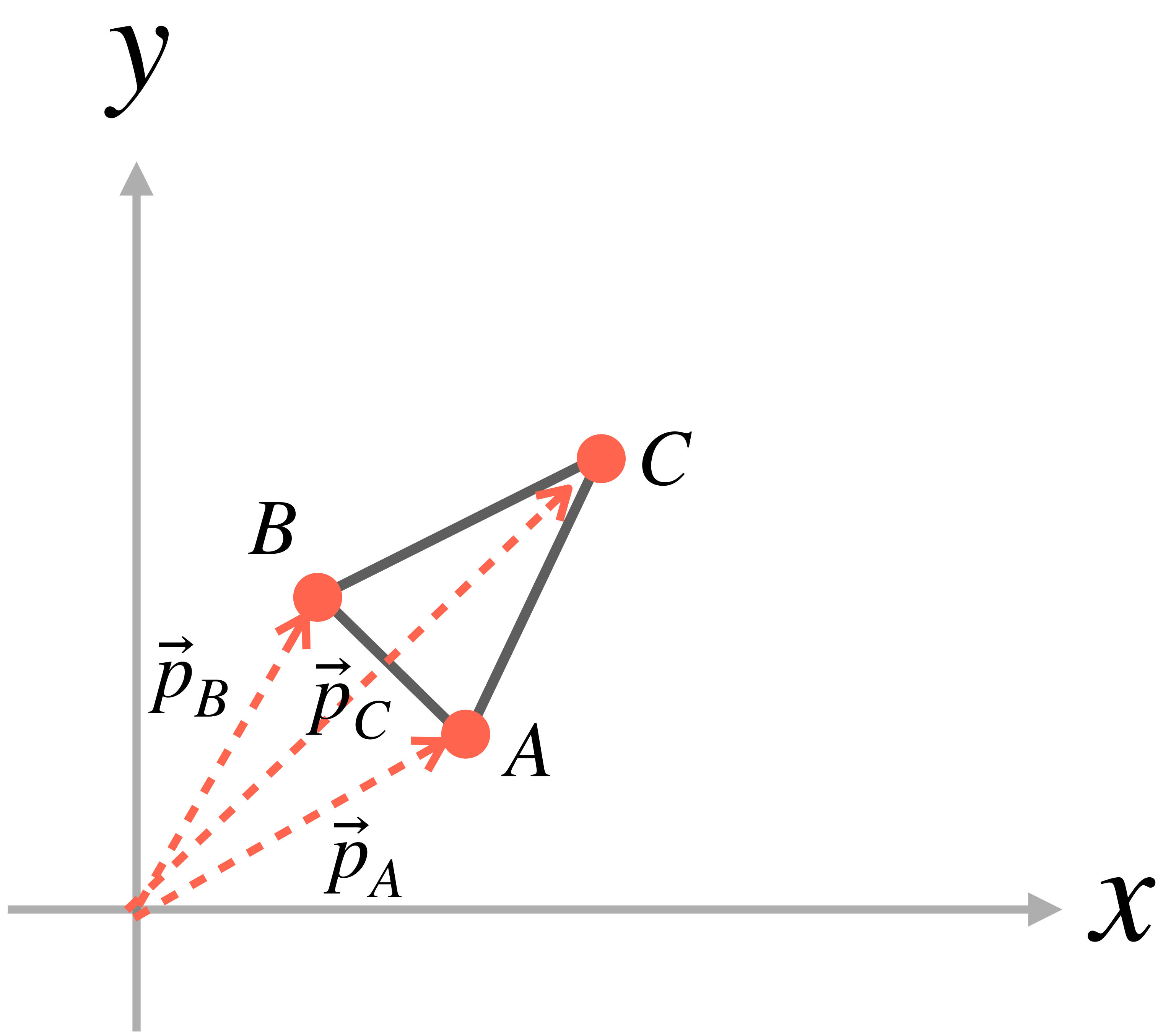
Transformações Geométricas

Transformações Geométricas são operações aplicadas aos vértices de um objeto para mudar sua:

- Posição (Translação)
- Orientação (Rotação)
- Tamanho (Escala)

Os vértices são representados como vetores

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

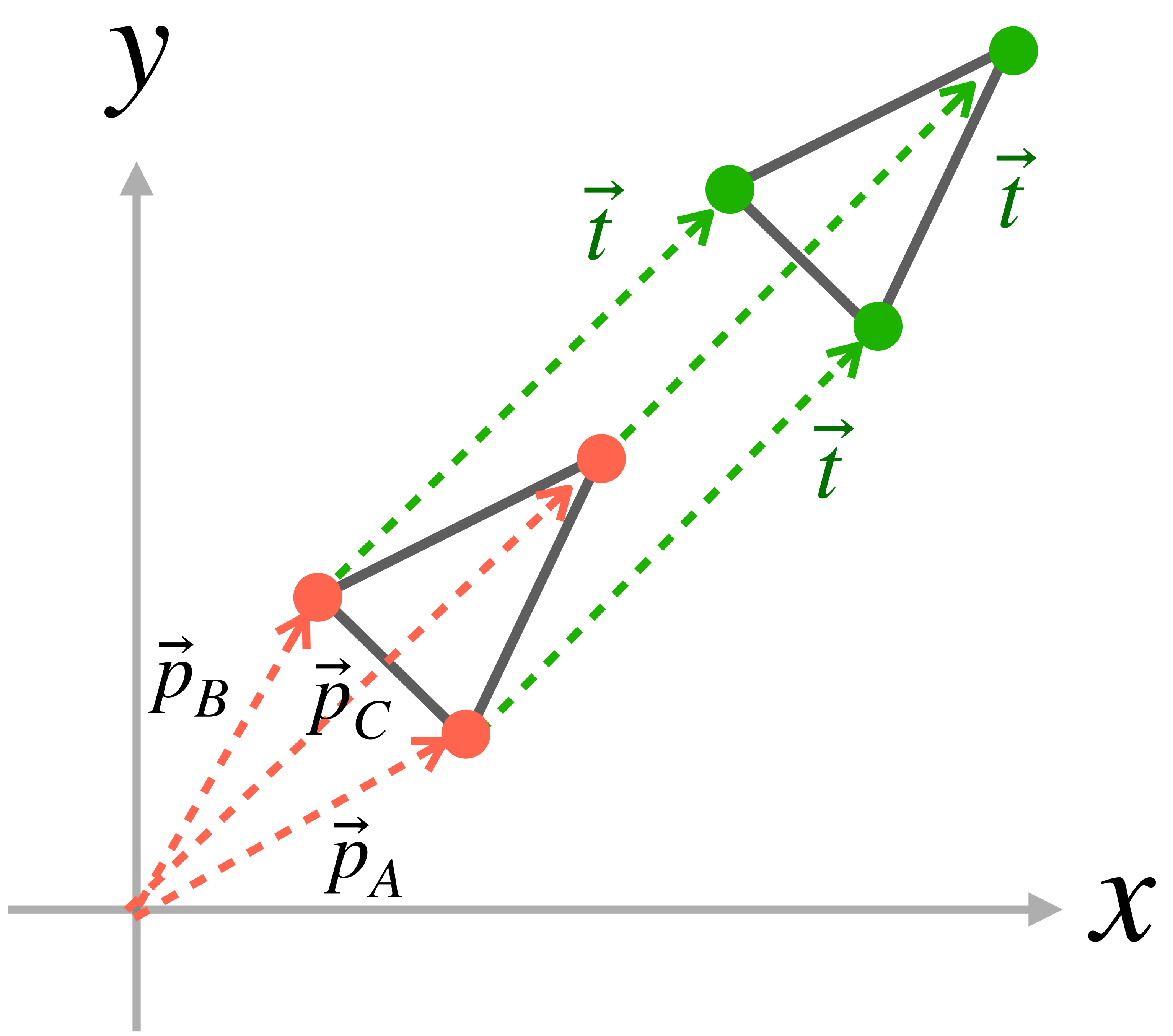


Translação

A translação representada pelo vetor $\vec{t}$ altera a posição do objeto no espaço:

$$\overrightarrow{p'} = \vec{p} + \vec{t}$$

$$\overrightarrow{p'} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$



UFV

Rotação

A rotação representada pela matriz R altera a orientação do objeto no espaço:

$$\overrightarrow{p'} = R\,\vec{p} = \begin{bmatrix} cos\ \beta & -sin\ \beta \\ sin\ \beta & cos\ \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$x = r \cdot cos\ \alpha \qquad y = r \cdot sin\ \alpha$$

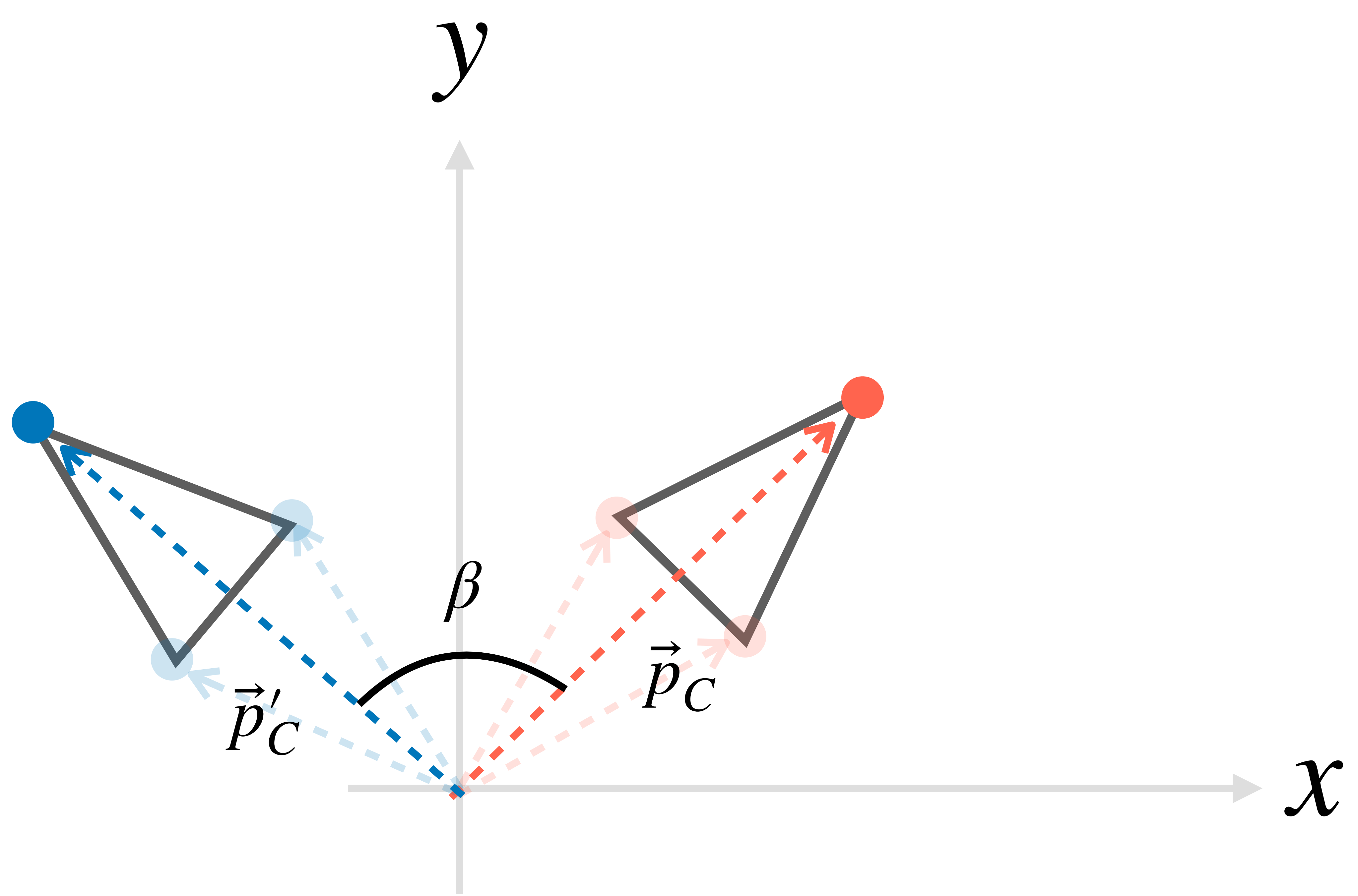
$$x = r \cdot cos(\alpha + \beta) \qquad y' = r \cdot sin(\alpha + \beta)$$

$$x' = r \cdot cos\ \alpha \cdot cos\ \beta - r \cdot sin\ \alpha \cdot sin\ \beta$$

$$y' = r \cdot cos\ \alpha \cdot sin\ \beta + r \cdot sin\ \alpha \cdot cos\ \beta$$

$$x' = x \cdot cos\ \beta - y \cdot sin\beta$$

$$y' = x \cdot sin\ \beta + y \cdot cos\beta$$

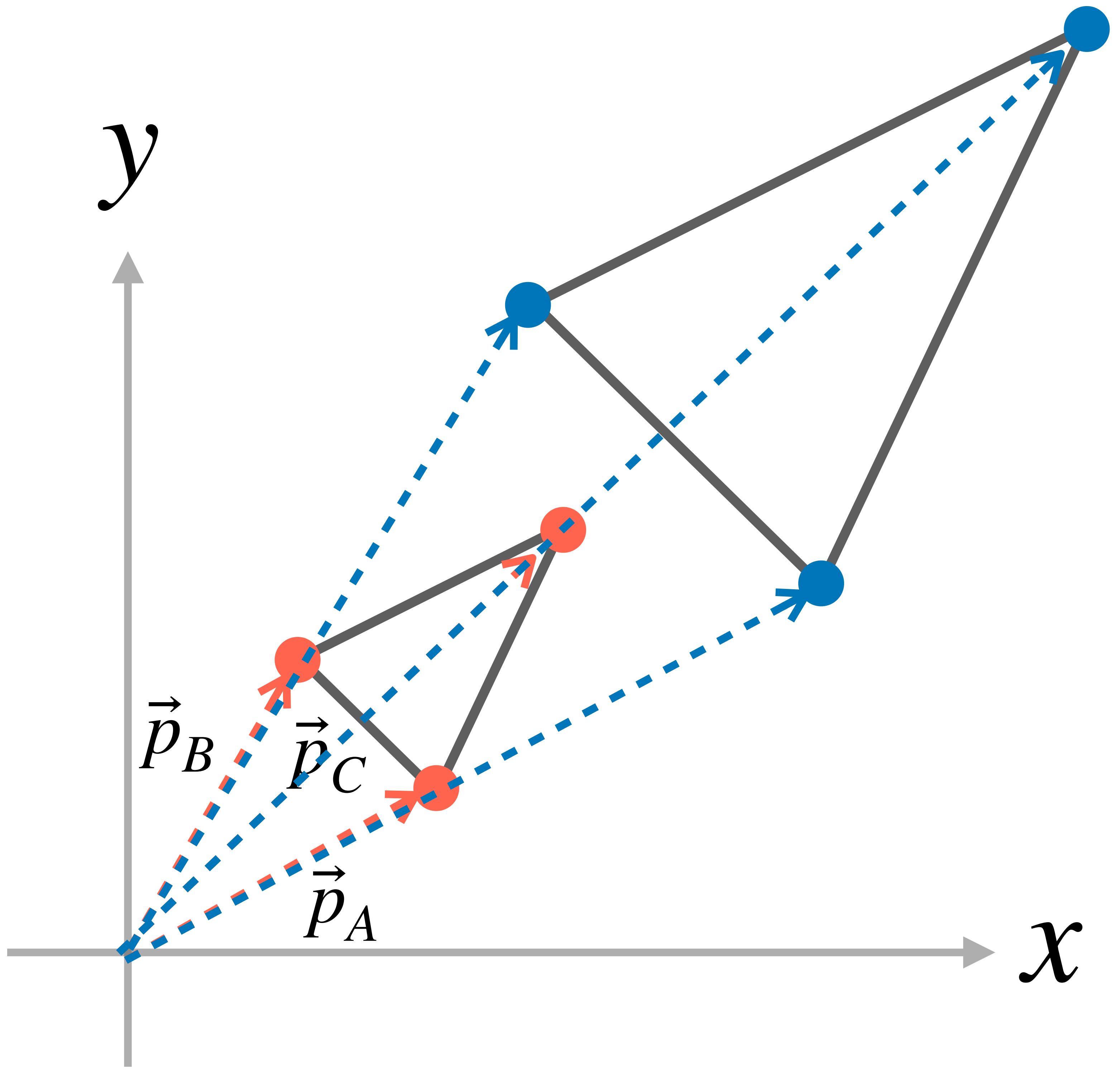


Escala

A escala representada pela matriz S altera o tamanho do objeto no espaço:

$$\overrightarrow{p'} = S \cdot \vec{p}$$

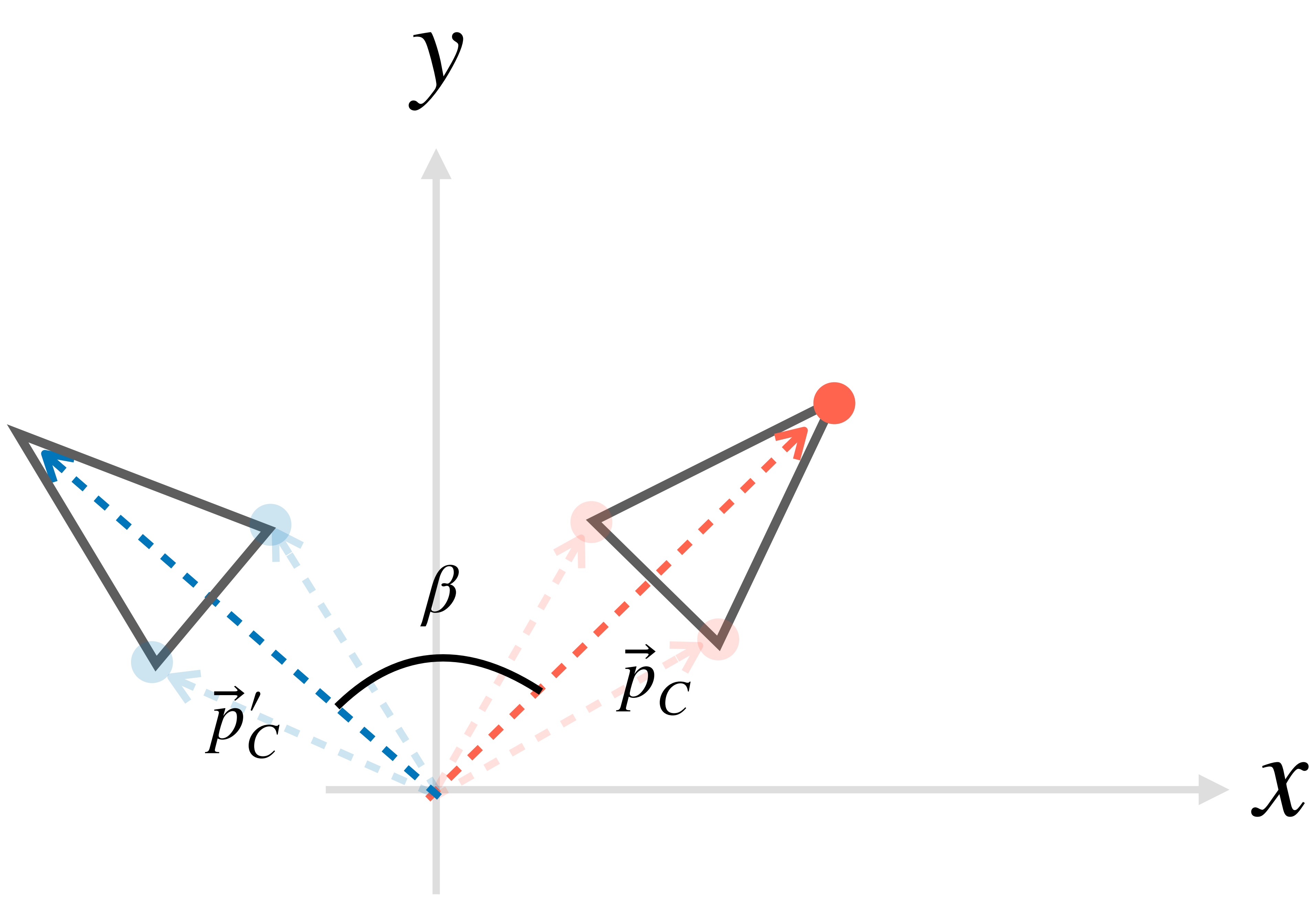
$$\overrightarrow{p'} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

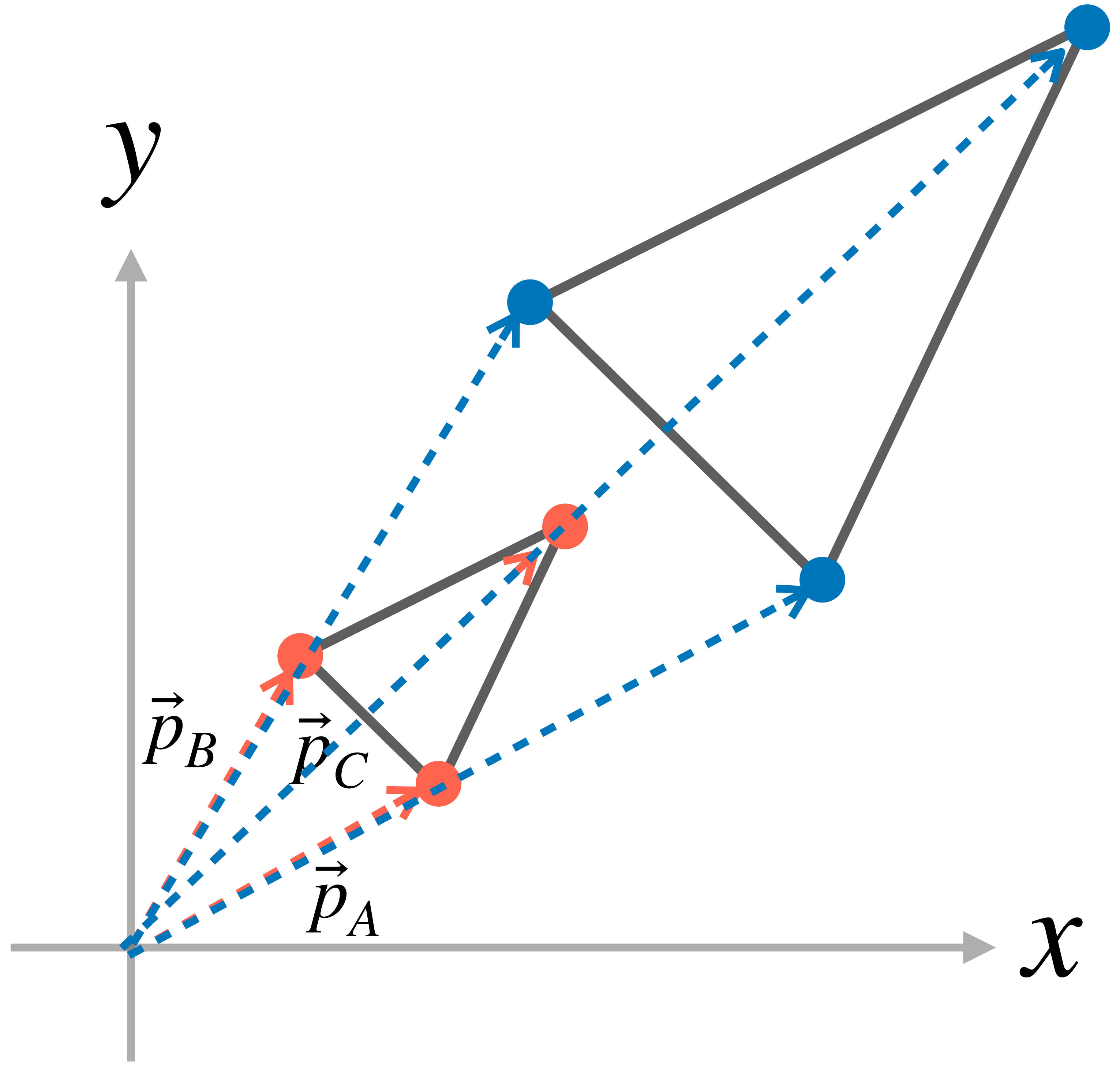


UFV

Rotação e escala alteram posição

Se os vértices não estiverem definidos no sistema de coordenadas do objeto (origem no centro do objeto), a rotação e a escala também alteram a posição.





Coordenadas Homogêneas

- Em computação gráfica, é mais eficiente (evita tráfego de dados CPU x GPU) combinar as transformações geométricas em uma única matriz de transformações.

- Para isso, adicionamos uma coordenada $w = 1$ aos vértices do objeto:

(2D) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ Matrizes de transformação 3x3

(3D) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$ Matrizes de transformação 4x4

Matrizes de Transformação 2D

(Translação) $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Rotação) $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\ \theta & -sin\ \theta & 0 \\ sin\ \theta & cos\ \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Escala) $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para relizar composições de transformações, basta multiplicar as matrizes de transformação.

Rotação ao redor de um ponto Q:

1. Translação de Q para a origem (T_Q)
2. Rotação ao redor da origem (R_θ)
3. Translação de volta para $Q(-T)$

$$P' = (-T_Q)R_\theta T_Q P$$

Note que multiplicação de matrízes não é comutativa!

UFV

Próximas aulas

A4: Física - Objetos Rígidos

Mecânica linear para movimentação de objetos rígidos.

L4: Asteroids - Parte 1

Implementar um componente RigidBody para a movimentação de objetos rígidos.