

Informatique classique

Vidéo ■ partie 5.1. Bits classiques

Vidéo ■ partie 5.2. Portes logiques

Vidéo ■ partie 5.3. Algorithme et complexité

Nous rappelons quelques principes de base du fonctionnement d'un ordinateur classique avec les notions de bits, de portes logiques et de complexité d'un algorithme.

1. Bits classiques

1.1. 0 ou 1

Un *bit* est une valeur 0 ou 1 et correspond à l'information minimale pour l'informatique classique. Cette valeur peut être codée par une information physique (allumé/éteint, 0 volts/5 volts, l'orientation magnétique d'un élément...).

1.2. Écriture binaire

Avec plusieurs bits on peut transmettre plus d'information. Voyons le cas d'un entier qui peut être représenté en écriture binaire.

Par exemple, 1.0.1.1.0.0.1 (prononcer les chiffres un par un) est l'écriture binaire de l'entier 89. Comment faire ce calcul ? C'est comme pour la base 10, mais en utilisant les puissances de 2.

1	0	1	1	0	0	1
64	32	16	8	4	2	1
2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Donc l'écriture 1.0.1.1.0.0.1 représente l'entier :

$$\begin{aligned} & 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 1 \times 64 + 0 \times 32 + 1 \times 16 + 1 \times 8 + 0 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 \\ &= 64 + 16 + 8 + 1 \\ &= 89 \end{aligned}$$

Plus généralement un *n-bit*, $b_{n-1} \dots b_2.b_1.b_0$, est l'écriture en base 2 de l'entier :

$$N = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i = b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + b_2 \cdot 2^2 + b_1 \cdot 2 + b_0$$

avec $b_i = 0$ ou $b_i = 1$.

1.3. Codage

Il n'y a pas que les entiers qui peuvent être représentés par une succession de bits.

Une succession de bits peut aussi représenter :

- un caractère, par exemple le code ASCII de « A » est l'entier 65 et se code sur 8 bits par 0.1.0.0.0.0.1,
- une instruction, par exemple « Ajouter 1 », « Copier cette variable »,...

Plus généralement, on formalise un ordinateur par une *machine de Turing* qui est un modèle abstrait d'ordinateur qui lit et écrit des 0 et des 1 sur un ruban.

1.4. Logarithme

Avec n bits, il y a 2^n combinaisons possibles. Si on a N objets à énumérer, alors combien de bits faut-il pour les énumérer ?

On va utiliser le *logarithme en base 2* qui est défini par la relation :

$$N = 2^n \iff n = \log_2(N).$$

On peut également le définir à l'aide du logarithme népérien $\ln(x)$:

$$\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}.$$

Ainsi pour énumérer N objets, il faut au moins $n = \log_2(N)$ bits d'information. Dans la pratique on arrondit à l'entier supérieur : $n = \lceil \log_2(N) \rceil$ où $\lceil x \rceil$ correspond à l'arrondi supérieur, comme le ferait `ceil(x)` avec *Python*.

2. Portes logiques

2.1. Quelques portes

Une *porte logique* est une fonction qui prend en entrée des bits et renvoie un bit en sortie. D'un point de vue mathématique, c'est donc une fonction $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, où $n \geq 1$. D'un point de vue électronique, cette porte peut être réalisée par des composants élémentaires (diode, transistor,...).

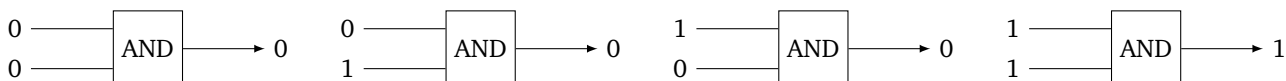
On présente ici quelques portes classiques. Il faut penser à la valeur 0 comme « Faux » et à la valeur 1 comme « Vrai ».

Porte NOT. Elle a une seule entrée et change 0 en 1, et 1 en 0.



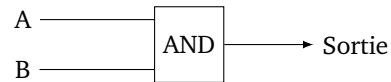
Entrée	Sortie
0	1
1	0

Porte AND.

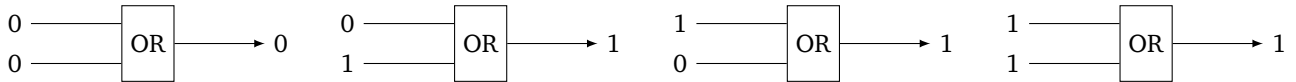


On résume l'action de la porte AND par le tableau suivant :

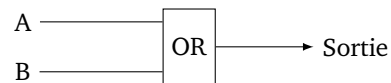
A	B	Sortie
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Porte OR.

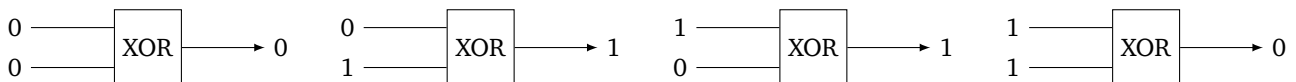


A	B	Sortie
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Porte XOR.

Le « OU exclusif » c'est le « ou » dans « fromage ou dessert », c'est l'un ou l'autre mais pas les deux.



On résume l'action de la porte XOR par le tableau suivant :

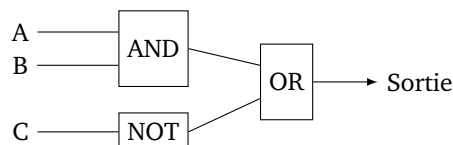
A	B	Sortie
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



2.2. Circuit

Un **circuit** est construit à partir de plusieurs portes logiques et définit une **fonction logique** : $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$, où $n \geq 1$.

Exemple. Voici un exemple de circuit :



À vous de compléter le tableau donnant la valeur de sortie en fonction de celles de départ !

A	B	C	Sortie
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

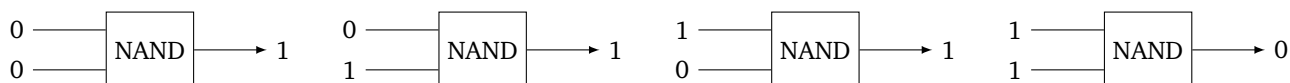
Combinatoire. Soit $n \geq 1$ le nombre d'entrées d'un circuit. Une entrée est du type $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \{0, 1\}^n$. Il y a donc 2^n entrées différentes possibles.

On rappelle que pour E de cardinal m et F de cardinal p , le nombre de fonctions $f : E \rightarrow F$ possibles est p^m . Dans notre cas, on considère toutes les fonctions $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, donc $m = 2^n$ et $p = 2$, il y donc a $2^{(2^n)}$ fonctions logiques possibles.

Ce nombre $N = 2^{(2^n)}$ de fonctions possibles est énorme. Par exemple, pour $n = 5$ entrées il y a $N = 2^{(2^5)} = 2^{32} = 4\,294\,967\,296$ fonctions logiques possibles. Faut-il autant de portes logiques différentes pour réaliser ces fonctions? Ce serait dramatique pour nos ordinateurs qui devraient être gigantesques. On va voir qu'un miracle se produit : une seule porte logique suffit à réaliser toutes les fonctions logiques possibles.

2.3. La porte NAND est universelle

Porte NAND. La porte NAND est définie par les quatre états suivants.



A	B	Sortie
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Elle peut se réaliser comme la porte NOT(AND), c'est-à-dire la porte AND suivie de la porte NOT.



Mais nous préférons la voir comme une porte à part entière.

Elle a la propriété fondamentale suivante :

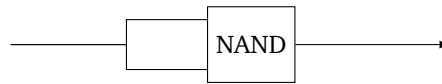
Théorème 1.

La porte NAND est universelle : n'importe quelle fonction logique $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ peut-être réalisée par un circuit ne comportant que des portes NAND.

Nous n'allons pas prouver ce théorème, mais nous allons voir comment retrouver les portes de base que nous connaissons à partir de portes NAND.

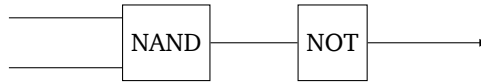
Réalisation des portes élémentaires.

On commence par réaliser une porte NOT en dupliquant l'unique entrée aux deux bornes de la borne NAND.



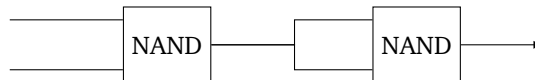
Équivalent porte NOT

Maintenant que l'on est capable de construire une porte NOT, on peut réaliser et retrouver la porte AND.



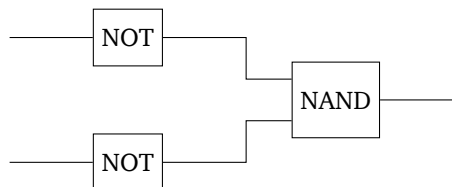
Équivalent porte AND

Si vous ne voulez vraiment que des portes NAND, il faut remplacer la porte NOT par une seconde porte NAND.



Équivalent porte AND

On peut aussi faire un circuit qui correspond à la porte OR.

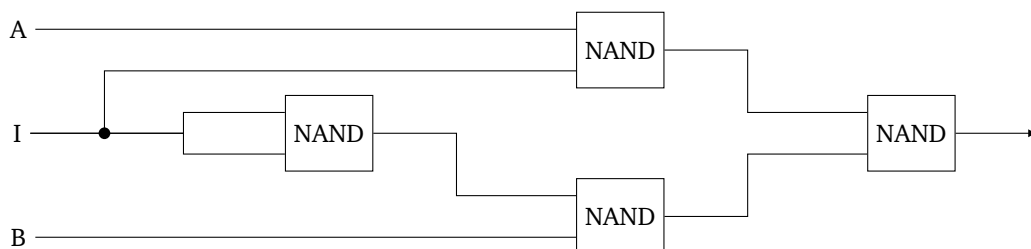


Équivalent porte OR

À vous de trouver comment réaliser une porte XOR.

Exercice.

Un circuit multiplexeur, noté MUX, est une sorte d'aiguillage entre deux choix A et B avec un interrupteur I qui permet la sélection. Si I vaut 1 alors la sortie du circuit est la valeur de A . Si I vaut 0 alors la sortie est la valeur de B . Cela peut aussi être vu comme un test rudimentaire : « Si $I = 1$ faire ceci, sinon faire cela. » Prouver que le circuit suivant est bien un circuit multiplexeur.



Circuit MUX

3. Algorithme et complexité

3.1. Vitesse d'un algorithme

Un algorithme c'est un peu comme une recette de cuisine : c'est une suite d'instructions qui permettent de résoudre un problème. Mais pour un même problème il peut exister plusieurs solutions. Il peut y avoir des algorithmes rapides, d'autres qui utilisent peu de mémoire, d'autres qui sont efficaces mais qui ne donnent la bonne réponse qu'avec 90% de certitude.

Voici un exemple de problème : décider si un entier n donné est un nombre premier.

- Une première méthode consiste à tester s'il admet un diviseur k , pour k variant de 2 jusqu'à $n - 1$. Si c'est le cas n n'est pas un nombre premier, sinon c'est bien un nombre premier.
- On peut aller beaucoup plus vite en testant seulement les diviseurs k compris entre 2 et \sqrt{n} .
- On pourrait d'abord établir le début de la liste de tous les nombres premiers par le crible d'Ératosthène, puis tester si n est dedans.
- Il existe aussi des algorithmes probabilistes très efficaces, qui donnent une réponse du genre « oui n est probablement un nombre premier à 90% » ou « non je suis sûr que n n'est pas un nombre premier ». En répétant l'algorithme on peut obtenir une quasi-certitude.

Nous comparerons les algorithmes en nous limitant ici à la « vitesse » des algorithmes. La vitesse que l'on chronométrerait en secondes n'est pas une mesure objective car elle dépend trop du matériel et de l'implémentation. Nous allons étudier la vitesse théorique qui s'appelle la « complexité ». Cela demande d'introduire des notions mathématiques.

3.2. Notation « grand O »

On souhaite comparer deux suites, ou plus exactement leur ordre de grandeur. Par exemple les suites $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(3n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ ont le même ordre de grandeur, mais sont beaucoup plus petites que la suite $(\frac{1}{2}e^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Notation « grand O ».

- On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de termes strictement positifs.
- On dit que (u_n) est un **grand O** de (v_n) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.
- Autrement dit il existe une constante réelle $k > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leq kv_n.$$

- *Notation.* On note alors $u_n = O(v_n)$. Il s'agit de la lettre « O » (pour Ordre de grandeur) et pas du chiffre zéro.

Exemples

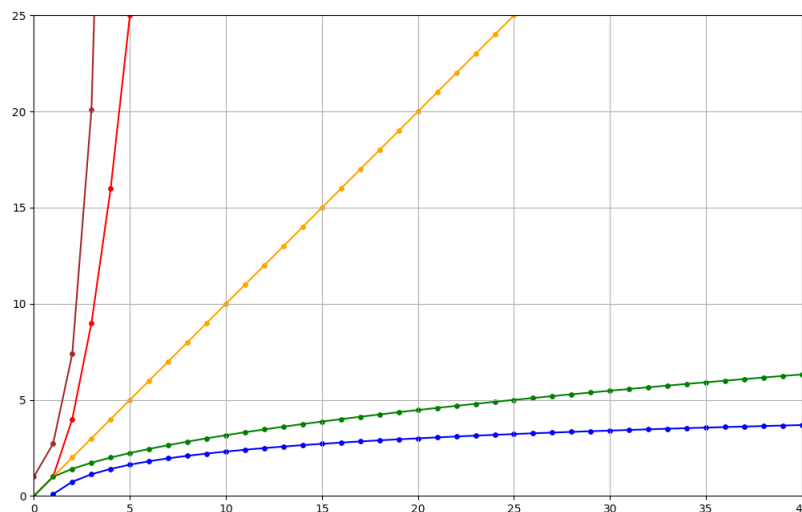
- Soient $u_n = 3n + 1$ et $v_n = 2n - 1$. Comme $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow \frac{3}{2}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée donc $u_n = O(v_n)$.
- $u_n = 2n^2$ et $v_n = e^n$. Comme $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$ alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée donc $u_n = O(v_n)$.
- $u_n = \sqrt{n}$ et $v_n = \ln(n)$. Comme $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ n'est pas bornée. (u_n) n'est pas un grand O de (v_n) . Par contre dans l'autre sens, on a bien $v_n = O(u_n)$.
- $u_n = O(n)$ signifie qu'il existe $k > 0$ tel que $u_n \leq kn$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).
- $u_n = O(1)$ signifie que la suite (u_n) est bornée.

3.3. Suites de référence

On souhaite comparer une suite (u_n) avec des suites de référence. Voici les suites de référence choisies :

$$\underbrace{\ln(n)}_{\text{croissance logarithmique}} \quad \underbrace{n \quad n^2 \quad n^3 \quad \dots}_{\text{croissance polynomiale}} \quad \underbrace{e^n}_{\text{croissance exponentielle}}$$

- Les suites sont écrites en respectant l'ordre des O : on a $\ln(n) = O(n)$, $n = O(n^2)$, $n^2 = O(n^3)$, $n^3 = O(e^n)$.
- On pourrait intercaler d'autres suites, par exemple $\ln(n) = O(\sqrt{n})$ et $\sqrt{n} = O(n)$. Ou encore $n \ln(n) = O(n^2)$.



Les suites $\ln(n)$, \sqrt{n} , n , n^2 , e^n .

3.4. Complexité d'un algorithme

On mesure l'efficacité d'un algorithme à l'aide de la complexité.

Nous définissons de manière informelle la complexité : la **complexité** d'un algorithme est le nombre d'opérations élémentaires exécutées.

- Ce que l'on appelle « opération élémentaire » peut varier selon le contexte : pour un calcul cela peut être le nombre de multiplications, pour un tri le nombre de comparaisons...
- La complexité C_n dépend de la taille n des données en entrée (par exemple le nombre de chiffres d'un entier ou bien la longueur de la liste). On obtient ainsi une suite (C_n) .
- Les bons algorithmes ont des complexités polynomiales qui sont en $O(n)$ (linéaire), en $O(n^2)$ (quadratique) ou bien en $O(n^k)$, $k \in \mathbb{N}^*$ (polynomiale). Les mauvais algorithmes ont des complexités exponentielles, en $O(e^n)$ par exemple.

3.5. Exemples de complexité

Multiplication de deux entiers.

On souhaite multiplier deux entiers a et b de n chiffres. Il y a plusieurs méthodes, on les compare en comptant le nombre d'opérations élémentaires : ici les multiplications de petits nombres (entiers à 1 ou 2 chiffres).

Algorithme	Ordre de la complexité
Multiplication d'école	$O(n^2)$
Multiplication de Karatsuba	$O(n^{\log_2(3)}) \simeq O(n^{1.58})$
Transformée de Fourier rapide	$O(n \cdot \ln(n) \cdot \ln(\ln(n)))$

Voici des exemples d'ordre de grandeur de la complexité pour différentes valeurs de n .

Algorithme	$n = 10$	$n = 100$	$n = 1000$
Multiplication d'école	100	10 000	1 000 000
Multiplication de Karatsuba	38	1478	56 870
Transformée de Fourier rapide	19	703	13 350

Plus l'entier n est grand, plus un bon algorithme prend l'avantage.

On termine par des exemples de problèmes et d'algorithmes correspondant à différentes classes de complexité.

Complexité	Problème et algorithme
$O(1)$	accès à un élément d'une liste de taille n test si un nombre est pair ou impair
$O(\log_2(n))$	recherche par dichotomie dans une liste ordonnée de taille n
$O(n)$	recherche d'un maximum dans une liste non ordonnée de taille n recherche si un élément est présent dans une liste de taille n
$O(n \log_2(n))$	tri d'une liste de taille n par <i>mergesort</i>
$O(n^2)$	tri d'une liste de taille n par <i>bubble sort</i> , <i>selection sort</i> , <i>insertion sort</i> recherche si un élément est présent en double dans une liste de taille n
$O(2^n)$	problème du voyageur de commerce avec n villes trouver tous les sous-ensembles de $\{1, 2, \dots, n\}$

La dernière catégorie d'algorithmes dont la complexité est en $O(2^n)$ est de complexité exponentielle (car $2^n = e^{n \ln 2}$). Ce qui signifie que pour des valeurs de n moyennes ou grandes, ces algorithmes sont inutilisables car ils n'aboutiront pas dans un temps raisonnable.

Note. Certains passages de cette section sont extraits du chapitre « Tri – Complexité » du livre « Python au lycée (tome 2) ».