1. a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, como $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é uma série harmônica divergente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ será divergente pelo critério da comparação. No entanto, sendo $\frac{1}{\sqrt{n}}$ uma sequência decrescente com $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, pelo critério de Leibniz, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge. Logo, a série irá convergir condicionalmente.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}$. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}} \right|$ uma série harmônica de ordem maior que 1, então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge e, pelo teorema de convergência, como $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}} \right|$ converge, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}$ também irá convergir e, portanto, a série converge absolutamente.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+1}{n^3+3}$. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{2n^2+1}{n^3+3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{(2 + 1/n^2)}{(1 + 3/n^3)}$, pelo critério do limite, utilizando a série harmônica divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ como comparação, temos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{(2+1/n^2)}{(1+3/n^3)}}{1/n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2+1/n^2}{1+3/n^3} = 2$$

Logo, como $2 > 0$ e $\sum 1/n$ é divergente, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{2n^2+1}{n^3+3} \right|$ será divergente.

Verificando a convergência da série alternada, como $\lim_{n \to \infty} \frac{2n^2+1}{n^3+3} = 0$ e a sequência é decrescente, pelo critério de Leibniz, a série alternada irá convergir e, portanto, a série converge condicionalmente.

d) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\ln n} \right|$ é uma série divergente (critério do limite, com $1/n$), mas a série alternada é convergente pelo critério de Leibniz.

Portanto, a série converge condicionalmente.

pg2

e) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ Seja $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ uma série que diverge (critério do limite com $1/n$). Verificando a convergência da série alternada, temos que, $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ e a sequência $\frac{\ln n}{n}$ é decrescente p/ $n \geq 3$, então, pelo critério de Leibniz, a série alternada converge.

Portanto, a série converge condicionalmente.

f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$ Seja $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ com $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$, contínua, decrescente e positiva, pelo critério da integral, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx \underset{du = 1/x\,dx}{\overset{u=\ln x}{=}} \lim_{n\to\infty} \int_2^n \frac{1}{u^2}\,du = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln n} + \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}$$

Sendo assim, $\sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}\right|$ é convergente e, pelo teorema da convergência, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$ é convergente, logo a série converge absolutamente.

g) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$ Temos que $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n} \overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2\sqrt{n}} \overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$

Logo, a série irá divergir pelo critério do termo geral.

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{\text{sempre ímpar}} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{\sqrt{n}}$ A série não é alternada e $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge pois é uma série harmônica de ordem $1/2 < 1$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$ Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n^p}$, como $0 < 1/n^p < 1 \Rightarrow \operatorname{sen} 1/n^p < 1/n^p$. Logo, pelo critério da comparação e, sendo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ uma série harmônica de ordem p,

- caso $p > 1$: a série converge e, portanto, pelo teorema de convergência $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen} \frac{1}{n^p}$ também irá convergir e, logo, a série converge absolutamente p/ $p > 1$

i) • caso $p \leq 1$: $\sum_{n=1} \frac{1}{n^p}$ diverge e, portanto, não conseguimos

concluir nada com o critério de comparação pois

$\sum \text{sen}\, 1/n^p < \sum 1/n^p$. Logo, pelo critério do limite,

escolhendo $\sum 1/n^p$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}\, 1/n^p}{1/n^p} = 1 \quad \text{(limite fundamental)}$$

Como $1 > 0$ e $1/n^p$ é divergente, a série irá divergir.

Analisando a convergência de $\sum (-1)^n \cdot \text{sen}\, 1/n^p$, temos que

$\lim_{n\to\infty} \text{sen}\, \frac{1}{n^p} = 0$ e como $\text{sen}\, 1/n^p < 1/n^p$, temos que:

$\text{sen}\, 1/n^p$ é decrescente. Logo, pelo critério de Leibniz a série

alternada irá convergir e, portanto, a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \text{sen}\, \frac{1}{n^p}$

converge condicionalmente para $p \leq 1$.

j) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ uma função contínua, decrescente e positiva,

pelo critério do limite, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^n \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \lim_{n\to\infty} \left(- \frac{(\ln x + 1)}{x} \Big|_2^n \right) = 0$$

Então, a série irá convergir absolutamente

k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ uma série divergente (critério do

limite com a série harmônica divergente $1/\sqrt{n}$). Então, analisando a série

alternada temos que, $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot 2\sqrt{n} \overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

e como a sequência $\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ é decrescente, pelo critério de Leibniz a série

converge e, portanto, ela irá convergir condicionalmente. (verificar derivadas p/ ver que $\ln x < \sqrt{x}$)

l) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+5}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+5} = 1 \neq 0$, logo pelo critério do termo

geral a série diverge

7. a) $\sum_{n=1} x^n(1+x^n) = \sum_{n=1} x^n + \sum_{n=1} x^{2n}$

Seja x^n e x^{2n} séries geométricas, temos que elas convergem se e, somente se, $|x| < 1$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$

Série geométrica, converge quando $|x| < 1$.

c) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\ln x}}$ Como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\ln x}} = 0$ e $\frac{1}{n^{\ln x}}$ será decrescente

$\Leftrightarrow \ln x > 0 \Rightarrow x > 1$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$ Pelo teste da razão, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n} = \lim_{n\to\infty} (n+1) x = x \cdot \lim_{n\to\infty} (n+1)$$

Logo a série só será convergente p/ $x=0$

e) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n + \frac{1}{2^n x^n}\right) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} x^n}_{(I)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n x^n}}_{(II)}$$

I) converge quando $|x| < 1$

II) converge quando $|2^n \cdot x^n| > 1 \Rightarrow |x^n| > \frac{1}{2^n} \Rightarrow |x| > \frac{1}{2}$

Portanto, a série converge em I $\cap$ II $\Rightarrow \{x \in \mathbb{R} : 1/2 < |x| < 1\}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot e^{-n \operatorname{sen} x}$ Pelo critério de Leibniz, para a série ser convergente

deve-se ter $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{n \operatorname{sen} x}}$ e, para isto, $\operatorname{sen} x > 0 \Rightarrow x \in \left]2k\pi, (2k+1)\pi\right[$

$k = 0, 1, 2, \dots$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5} x^{2n}$ Pelo critério da raiz,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n+1}{(n+1)^5} \cdot x^{2n}} = x^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{4/n}} \sqrt[n]{\frac{(2+1/n)}{(1+5/n+10/n^2+10/n^3+5/n^4+1/n^5)}} = x^2$$

A série irá convergir quando $x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1$.

Nos extremos do intervalo $x=1$ e $x=-1$ a série também convergirá (verificar)

8- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} \cdot x^n$ Pelo critério da razão p/ termos quaisquer, temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)\, x^{n+1}/4^{n+1}}{n \cdot x^n/4^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(1+1/n) \cdot x}{4} \right| = \frac{|x|}{4}$$

A série irá convergir absolutamente quando $|x| < 4$, testando as extremidades do intervalo, temos:

- caso $x = 4$: $\sum_{n=1}^{\infty} n$ diverge pois $\lim_{n\to\infty} n \neq 0$
- caso $x = -4$: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n$ diverge pois $\lim_{n\to\infty} n \neq 0$

Portanto, o intervalo de convergência para a série é $]-4, 4[$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \, x^n$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)! \, x^{n+1}}{n! \, x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} |(n+1) \cdot x| = |x| \lim_{n\to\infty} (n+1) = |x| \cdot \infty$$

A série só irá convergir quando $x = 0$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)^3+1} \cdot \frac{n^3+1}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1+1/n^3}{1+3/n+3/n^2+1/n^3} \cdot x \right| = |x|$$

A série irá convergir absolutamente p/ $|x| < 1$, testando as extremidades, temos

- $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$ converge pelo critério da comparação
- $x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$ converge pelo critério de Leibniz

Portanto, o intervalo de convergência é dado por $[-1, 1]$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)!} x^n$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(3n+3)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} \cdot \frac{(2n)!}{(3n)!} \right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)(2n+1)} \right| = |x| \cdot \infty$$

A série irá convergir apenas quando $x = 0$.

e) $\sum_{n=1} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-5)^n}{n3^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} \cdot \frac{n.3^n}{(x-5)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-5)}{3} \cdot \frac{1}{(1+1/n)} \right| = \frac{|x-5|}{3}$$

A série irá convergir absolutamente quando $\frac{|x-5|}{3} < 1 \Rightarrow |x-5| < 3$

$\Rightarrow -3 < x-5 < 3 \Rightarrow 2 < x < 8$. Testando os extremos, temos:

- $x = 2$: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(-1)^n 3^n}{n.3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{n\cancel{3^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$

Série harmônica divergente.

- $x = 8$: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{n.\cancel{3^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$

Pelo critério de Leibniz a série converge.

Portanto, temos o seguinte intervalo de convergência $]2,8]$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+2)\cdot \ln^2(n+2)} \cdot \frac{(n+1)\cdot \ln^2(n+1)}{(x+1)^n} \right| = |x+1| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \underbrace{\frac{(n+1)}{(n+2)} \cdot \frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n+2)}}_{\approx 1} \right| = |x+1|$$

A série irá convergir quando $|x+1| < 1 \Rightarrow -1 < x+1 < 1 \Rightarrow -2 < x < 0$.

Testando os extremos, temos:

- $x = -2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(\ln^2(n+1))}$ converge pelo critério de Leibniz.

- $x = 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\ln^2(n+1))}$ converge pelo critério da integral

Portanto, temos o seguinte intervalo de convergência $[-2,0]$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(2n)!}(x-7)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{10^{n+1}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(x-7)^{n+1}}{(x-7)^n}\cdot\frac{(2n)!}{10^n}\right| = 10\cdot|x-7|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0$$

Portanto, o intervalo de convergência é $]-\infty, +\infty[$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n}(x-e)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln(n+1)}{e^{n+1}}\cdot\frac{(x-e)^{n+1}}{(x-e)^n}\cdot\frac{e^n}{\ln n}\right| = \frac{|x-e|}{e}\cdot\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left|\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right|}_{L'H \to \frac{n}{n+1}\to\frac{1}{1+1/n}\to 1} \overset{L'H}{=} \frac{|x-e|}{e}$$

Portanto, a série irá convergir quando

$$\frac{|x-e|}{e} < 1 \Rightarrow |x-e| < e \Rightarrow -e < x-e < e \Rightarrow 0 < x < 2e$$

Testando as extremidades, temos:

- $x=0$: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln n$ diverge pelo critério do termo geral
- $x=2e$ $\sum_{n=1}^{\infty}\ln n$ diverge pelo critério do termo geral

Logo, o intervalo de convergência é dado por $]0, 2e[$

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x+3)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{(x+3)^{n+1}}{(x+3)^n}\cdot\frac{n^n}{n!}\right| = |x+3|\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = |x+3|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)^n}$$

$= |x+3|\cdot\frac{1}{e}$ Logo, a série converge p/ $|x+3| < e \Rightarrow -e-3 < x < e-3$

Testando os extremos

- $x=-e-3$: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n}e^n$ diverge pelo critério do termo geral
- $x=e-3$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\cdot e^n$ diverge

Logo, o intervalo de convergência é dado por $]-e-3, e-3[$.

j) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{(2n+2)\sqrt{n+2}} \cdot \frac{(2n+1)\cdot\sqrt{n+1}}{(x-3)^n} \right| = |x-3| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+1)}{(2n+2)} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \right|$$

$$= |x-3| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2+1/n)}{(2+2/n} \cdot \frac{\sqrt{1+1/n}}{\sqrt{1+2/n}} \right| = |x-3|$$

$|x-3| < 1 \Rightarrow 2 < x < 4$

- $x=2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}\cdot(2+1/n)\sqrt{1+1/n}}$ converge pelo critério do limite com a série convergente $\dfrac{1}{n^{3/2}}$
- $x=4$: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$ converge pelo critério de Leibniz

Intervalo: $[2,4]$

k) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2}{4^n} \cdot (x-4)^{2n}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{4^{n+1}} \cdot \frac{(x-4)^{2n+2}}{(x-4)^{2n}} \cdot \frac{4^n}{n^2} \right| = \frac{(x-4)^2}{4}$$

$\dfrac{(x-4)^2}{4} < 1 \Rightarrow (x-4)^2 < 4 \Rightarrow |x-4| < 2 \Rightarrow 2 < x < 6$

- $x=2$: $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2}{4^n} (-2)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2}{\cancel{4^n}} \cdot \cancel{2^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2$ diverge (termo geral)
- $x=6$: $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2}{4^n} \cdot 2^{2n}$ diverge (termo geral)

Intervalo: $]2,6[$

l) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(\ln n)^2} \cdot x^n$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)(\ln(n+1))^2} \cdot \frac{n(\ln n)^2}{x^n} \right| = |x|$$

$|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$

- $x=-1$: $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ converge (integral)
- $x=1$: $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$ converge (Leibniz)

Intervalo: $[-1,1]$

m) $\sum_{n=1} 2^n x^{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1} x^{(n+1)^2}}{2^n \cdot x^{n^2}} \right| = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left| x^{2n+1} \right| = 2 \cdot |x| \cdot \lim_{n\to\infty} x^{2n}$$

- caso $|x| < 1$: o limite acima converge p/ $2|x| \cdot 0 = 0$, portanto, série irá convergir p/ qualquer $|x| < 1$
- caso $|x| > 1$: o limite acima diverge e a série irá convergir apenas se $x = 0$, mas $|x| > 1$, logo neste caso não irá convergir.

A série convergirá p/ $|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$

- $x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot (-1)^{n^2}$ diverge (termo geral). Intervalo: $]-1, 1[$
- $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ diverge (termo geral)

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 4^n} \cdot x^n$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+1}}{(n+1) \cdot 4^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} \cdot \frac{n \cdot 4^n}{3^n} \right| = \frac{3}{4} |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{3}{4} |x|$$

$$\frac{3}{4} |x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{4}{3} \Rightarrow -\frac{4}{3} < x < \frac{4}{3}$$

- $x = -4/3$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 4^n} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ converge (Leibniz)
- $x = 4/3$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

Intervalo : $[-4/3, 4/3[$

9. a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. Pelo critério da razão p/ termos quaisquer, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \cdot \frac{(2n+2)!}{2n!} \cdot \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} \right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2) \cdot (2n+1)}{(n+1)^2} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 (2 + 2/n)(2 + 1/n)}{n^2 (1 + 1/n)^2}$$

$$= 4|x|$$

Portanto, a série irá convergir quando $4|x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{4}$, logo, o raio de convergência da série é dado por $R = \frac{1}{4}$.

b) $\sum_{n=1} x^{2n}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ De forma análoga ao item anterior temos, pg10

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}}{x^{2n}}\cdot\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right| = 4x^2$$

Então, a série converge quando $4x^2<1 \Rightarrow x^2<\frac{1}{4} \Rightarrow |x|<\frac{1}{2}$, logo o raio de convergência é $R=\frac{1}{2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{(n+1)^2}}{x^{n^2}}\cdot\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|x^{2n+1}\cdot\frac{(2+2/n)(2+1/n)}{(1+1/n)^2}\right|$$

Neste caso a série só converge se $|x|<1$, pois, caso contrário, $\lim_{n\to\infty}|x^{2n+1}| = +\infty$. Desta forma, $R=1$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n\dfrac{n!}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\cdot\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = |x|\cdot\frac{1}{e}$$

A série convergirá quando $\frac{|x|}{e}<1 \Rightarrow |x|<e$, logo, o raio de convergência é $R=e$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{3n}\cdot\dfrac{n!}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{3n+3}}{x^{3n}}\cdot\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}\right| = |x^3|\cdot\frac{1}{e}$$

Logo, a série converge p/ $\frac{|x^3|}{e}<1 \Rightarrow |x|^3<e \Rightarrow |x|<\sqrt[3]{e}$, então o raio de convergência é $R=\sqrt[3]{e}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}\cdot\dfrac{n!}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{(n+1)!}}{x^{n!}}\cdot\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|x^{n.n!}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right|$$

A série só irá convergir se $\lim_{n\to\infty}|x^{n.n!}|$ convergir, então $|x|<1$ e, portanto, o raio é $R=1$

10. a) $\sum_{n=1} \frac{x^n}{(2+(-1)^n)^n}$ - Reordenando a série em termos pares e ímpares, temos:

$$\underbrace{\sum_{K=1}^{\infty} x^{2K-1}}_{(I)} + \underbrace{\sum_{K=1}^{\infty} \frac{x^{2K}}{3^{2K}}}_{(II)}$$

(I) : A série converge quando $|x| < 1$ (critério da razão)

(II) : A série converge quando $|x| < 3$ (critério da razão)

Portanto, o intervalo de convergência está contido em $(I) \cap (II) \Rightarrow$

$|x| < 1 \cap |x| < 3 \Rightarrow |x| \leq 1$

Testando as extremidades, é necessário verificar apenas em (I) pois já estão contidas em (II), logo:

- $x = -1$: $\sum_{K=1}^{\infty} (-1)^{2K-1} = \sum_{K=1}^{\infty} -1$ (diverge)
- $x = 1$: $\sum_{K=1}^{\infty} 1$ (diverge)

Então, o intervalo de convergência é dado por $]-1, 1[$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{5n+7}\right)^n x^n$ Pelo critério da raiz p/ termos quaisquer, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{3n+2}{5n+7}\right)^n \cdot x^n\right|} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{5n+7} = \frac{3}{5}|x|$$

Logo, a série irá convergir p/ $\frac{3}{5}|x| < 1 \Rightarrow -\frac{5}{3} < x < \frac{5}{3}$,

verificando os extremos, temos:

- $x = -5/3$: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{5n+7}\right)^n \left(\frac{5}{3}\right)^n \cdot (-1)^n$ diverge ($\lim a_n \neq 0$)
- $x = 5/3$: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{5n+7}\right)^n \left(\frac{5}{3}\right)^n$ diverge ($\lim a_n \neq 0$)

Portanto, o intervalo de convergência é $]-5/3, 5/3[$

c) $\sum_{n=1}\left(\frac{2^n+3}{3^n+2}\right)\cdot x^n$ Pelo critério da raiz p/ termos quaisquer, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{2^n+3}{3^n+2}\right)\cdot x^n\right|} = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n(1+3/2^n)}{3^n(1+2/3^n}} = \frac{2}{3}|x|.$$

Portanto, a série irá convergir p/ $\frac{2}{3}|x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{3}{2}$, testando as extremidades:

- $x = -\frac{3}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{2^n+3}{3^n+2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n$ diverge ($\lim a_n \neq 0$)

- $x = \frac{3}{2}$ análogo a $x = -\frac{3}{2}$, diverge.

Logo, o intervalo de convergência é $]-3/2, 3/2[$

d) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln n}$ Pelo critério da razão p/ quaisquer termos:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{\ln(n+1)}\cdot\frac{\ln(n)}{x^n}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)} \overset{L'H}{=} |x|.$$

Então, a série converge p/ $|x| < 1$, testando extremidades.

- $x = -1$: $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\ln n}$ converge (Leibniz)

- $x = 1$: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ diverge (comparação

Logo, o intervalo é $[-1, 1[$

$b > a \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right) > 0$ e $\left(\frac{a}{b}\right) < 0$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{a^n+b^n}$, com $b > a > 0$. Pelo critério da razão:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{a^{n+1}+b^{n+1}}\cdot\frac{a^n+b^n}{(x+1)^n}\right| = |x+1|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}} = |x+1|\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}+\frac{b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}\right)$$

$$= |x+1|\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{a+b\cdot\cancel{\left(\frac{b}{a}\right)^{n\to\infty}}}}_{\to 1/\infty = 0}+\underbrace{\frac{1}{a\cancel{\left(\frac{a}{b}\right)^{n\to\infty}}+b}}_{\to 1/b}\right) = \frac{|x+1|}{b}$$

Converge em $\frac{|x+1|}{b} < 1 \Rightarrow |x+1| < b \Rightarrow -b-1 < x < b-1$

Testar extremidades, diverge ambas, logo intervalo $=]-b-1, b-1[$