Lista 2 - MAT0236 16/04/19 pg 1

1\. 1) $S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^3}\,dx$.

$\leq 1 + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$ $\therefore$ como S_n é limitado superiormente por $3/2$, a sequência é convergente (série harmônica com $\alpha = 3$)

2) $S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{e^r} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \dots + \frac{1}{e^n}$ (série geométrica com $r = 1/e$)

$S_n = \frac{1}{e} \cdot \frac{(1/e^{n+1} - 1)}{1/e - 1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1/e}{1 - 1/e} = \frac{1}{e-1}$.

Logo, a sequência é convergente.

3) $S_n = \sum_{r=3}^{n} \frac{1}{\ln r}$

Seja $a_n = \frac{1}{\ln n}$ e $c_n = \frac{1}{n}$, então $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} = +\infty$

Logo, pelo critério do limite, a série dada é divergente.

4) $a_n = \frac{2.4.6\dots(2n)}{1.3.5\dots(2n-1)}$

Temos que a multiplicação entre os pares é sempre maior que a dos ímpares, isto é, $2 > 1$, $2.4 > 1.3$, $2.4.6 > 1.3.5$. Logo, cada termo da sequência é maior que 1 e, portanto, a sequência diverge.

5) $a_n = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}$

2\. 1) $1,\overline{29} \Rightarrow \begin{cases} x = 1,2929\dots \\ 100x = 129,29\dots \end{cases} \Rightarrow 99x = 128 \Rightarrow x = \frac{128}{99}$

2) $0,3\overline{117} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,3117117\dots \\ 10x = 3,117117\dots \\ 10000x = 3117,117\dots \end{cases} \Rightarrow 9990x = 3114 \Rightarrow x = \frac{3114}{9990}$

3\. Seja (a_n) sequência qualquer dos dígitos $0, 1, 2, \dots, 9$, exemplo: $0, 1, 0, 1 \dots$ temos a série,

$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$

Sendo a_n um inteiro positivo entre 0 e 9 e seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$ a série geométrica convergente, temos que, $\frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n}$ $\forall a_n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a_n \leq 9$. Então, pelo critério da comparação,

como $\sum_{n=1} \frac{a_n}{10^n}$ é uma série limitada superiormente pela série geométrica
convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ também será convergente.

4. Seja (a_n) uma sequencia de números positivos tq $\sum a_n$ diverge, então, $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ou $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existe. Desta forma,

sendo $\sum \frac{a_n}{1+a_n} = \sum \left(1 - \frac{1}{1+a_n}\right)$, temos que

$\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ pode ser convergente $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{1+a_n}\right) = 0$, o

que é verdade apenas se $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+a_n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

o que é uma contradição, pois $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Portanto, como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \neq 0$, a série $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ irá divergir.

5. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série que converge para s, temos que,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{2s} - a_1$$

$$= 2s - a_1$$

6. 1) $$\sum_{n=1}^{\infty} [f(n+1) - f(n)] = \cancel{f(2)} - f(1) + \cancel{f(3)} - \cancel{f(2)} + \dots + f(n+1) - \cancel{f(n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} f(n+1) - f(1) = \lim_{n\to\infty} f(n) - f(1)$$

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} [f(n+1) - f(n-1)] = \cancel{f(2)} - f(0) + \cancel{f(3)} - f(1) + \cancel{f(4)} - \cancel{f(2)} + \dots + \cancel{f(n-1)} - \cancel{f(n-3)} + f(n) - \cancel{f(n-2)} + f(n+1) - \cancel{f(n-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} [f(n) + f(n+1)] - f(0) - f(1)$$

$$= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} f(n) - f(0) - f(1)$$

3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$$

4) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) = \sum_{n=2K}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) - \sum_{n=2K-1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+2}\right), \quad K = 1, 2, 3, \dots$$

$$= \ln(2/4) + \ln(4/6) + \dots + \ln\left(\frac{2K}{2K+2}\right) - \left[\ln(1/3) + \ln(3/5) + \dots + \ln\left(\frac{2K-1}{2K+1}\right)\right]$$

6. 4) $= \ln(2/4) - \ln(1/3) + \ln(4/6) - \ln(3/5) + \dots$

$$+ \ln\left(\frac{2K}{K+1}\right) - \ln\left(\frac{2K-1}{2K+1}\right)$$

$$= \sum_{K=1}^{\infty}\left[\ln\left(\frac{2K}{2K+2}\right) - \ln\left(\frac{2K-1}{2K+1}\right)\right]$$, seja $2K = p$, temos :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) = \sum_{p=2}^{\infty}\left[\ln\left(\frac{p}{p+2}\right) - \ln\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{p-1}{p+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \ln\Big(\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{p-1}{p+1}}_{1}\Big) - \ln 1 + \ln 2 = \ln 2 //$$

5) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\text{sen}\left(\frac{1}{n}\right) - \text{sen}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right] = \text{sen}\,1 - \lim_{n\to\infty}\text{sen}\,\frac{1}{n} = \text{sen}\,1 - \text{sen}\,0$$
$$= \text{sen}\,1$$

6) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right] = \frac{1}{1!} - \cancel{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}}^{\,0} = 1 //$$

7) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\dots(n+K)}, \quad K \geq 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+k)!}$$

• caso $K=2$: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!\cdot 1} = \frac{1}{K!(k-1)}$$

• caso $K=3$: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}\cdot\left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0\right)\right] = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{5}{6}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.2}$$

(usar prova por indução)

• Recursivamente, temos que a série dada converge p/ $\frac{1}{K!(k-1)}$

8) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\text{arctg}(n+1) - \text{arctg}(n)\right] = \lim_{n\to\infty}\text{arctg}(n) - \text{arctg}(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

7. 1) $\sum_{n=0} \left(\underbrace{\frac{1}{10^n}}_{\text{converge}} + \underbrace{2^n}_{\text{diverge}} \right) \Rightarrow$ diverge

2) $\sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \cdot t^{K/2}$, $0 < t < 1$

Pelo critério de Leibniz, sendo $t^{K/2}$ uma sequência decrescente, com $\lim_{K\to\infty} t^{K/2} = 0$, então a série alternada $\sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \cdot t^{K/2}$ é convergente

$$\sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \cdot t^{K/2} = 1 - t^{1/2} + t^{2/2} - t^{3/2} + \dots + t^{2K/2} - t^{\frac{2K+1}{2}}$$

Temos uma PG de razão $-\sqrt{t}$ e $a_1 = 1$, então, a série convergirá p/ $\frac{1}{1+\sqrt{t}}$

3). $\sum_{n=0}^{\infty} u^n(1+u^n)$, p/ $|u| < 1$

$$\sum_{n=0} (u^n + u^{2n}) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n + \sum_{n=0}^{\infty} u^{2n}$$

Ambas as séries são geométricas e, sendo $|u| < 1$, a série irá convergir p/ $\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1-u^2} = \frac{u+2}{1-u^2}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, p/ $|x| < 1$

Para $n = 2K+1$ (ímpar) os termos serão nulas, portanto, analisando a série p/ $n = 2K$, $K = 0, 1, 2, \dots$, temos:

$$\sum_{K=0}^{\infty} x^{2K} \cdot \cos(K\pi) , \quad |x| < 1$$

$\cos(K\pi)$ irá alternar de tal modo que $\cos(K\pi) = (-1)^K$, então, a série dada será uma PG de razão $-x^2$ com $a_1 = 1$, logo ela convergirá para $\frac{1}{1+x^2}$

$1 + sen^2 x$

5) $\sum_{n=0}^{\infty} sen^{2n} x$, $|x| < \pi/2$

Sabendo que p/ $|x| < \pi/2$, $0 < sen x < 1$, temos que, a série $\sum_{n=0}^{\infty} sen^{2n} x = \sum_{n=0}^{\infty} (sen x)^{2n}$ será uma PG com razão $sen^2 x$ e $a_1 = 1$, então, irá convergir p/ $\frac{1}{1-sen^2 x}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{n}{j}\right)$

Para $n=1$, temos uma série harmônica sob o índice j, então, a série dada irá divergir.

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

Como $\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ não existe, a série irá divergir

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\cancel{n}+1-\cancel{n}} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}-1 = +\infty$

Portanto a série irá divergir

9) $\sum_{K=1}^{\infty}\frac{K}{\operatorname{sen}K}$ $\quad \lim_{K\to\infty}\frac{K}{\operatorname{sen}K} = \lim_{K\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{K}\cdot\operatorname{sen}K} = \frac{\lim_{K\to\infty}1}{\underbrace{\lim_{K\to\infty}\frac{1}{K}\operatorname{sen}K}_{=0\text{ T.C.}}} = \frac{1}{0} \Rightarrow \nexists$

Como $\lim_{K\to\infty}\frac{K}{\operatorname{sen}K}$ não existe, a série dada irá divergir

10) $\sum_{s=1}^{\infty}\cos\left(\frac{1}{s}\right)$ $\quad \lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{1}{s}\right) = 1 \neq 0$ ∴ diverge ~~diverge~~

11) $\sum_{K=1}^{\infty}\frac{2+\cos K}{K} = \sum_{K=1}^{\infty}\frac{2}{K} + \sum_{K=1}^{\infty}\frac{\cos K}{K}$

Sendo $\sum_{K=1}^{\infty}\frac{2}{K}$ uma série harmônica, a série dada irá divergir.

8.1) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-4}}$ Seja a série harmônica divergente $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, pelo critério da limite, temos que,

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-4}}\Big/ 1/n = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1-4/n^2}} = 1$

Logo, como $L>0$ e c_n é divergente, a_n será divergente.

2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\text{arctg}\, n}{n^2}$

Pelo critério do limite e seja a série harmônica convergente de ordem 2, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, temos,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{arctg}\, n}{n^2} \Big/ 1/n^2 = \lim_{n\to\infty} \text{arctg}\, n = \frac{\pi}{2}$$

Desta forma, como $\pi/2 > 0$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente, a série dada irá convergir.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

Pelo critério do limite e seja a série harmônica convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, temos,

$$\lim_{n\to\infty} e^{1/n} = e^0 = 1$$

Como $1 > 0$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente, a série dada irá convergir

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n!)^\lambda}$, $\lambda > 0$

Pelo critério da razão, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} / [(n+1)!]^\lambda}{2^n / (n!)^\lambda} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n+1)^\lambda \cancel{n!^\lambda}} \cdot \cancel{(n!)^\lambda} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n+1)^\lambda} \overset{\lambda>0}{=} 0$$

Como $0 < 1$, a série dada irá convergir

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

Pelo critério da razão, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)! / [(n+1)!]^2}{2n! / (n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + 6n + 2}{n^2 + 2n + 1} = 4$$

Como $4 > 1$, a séria dada irá divergir

6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ Pelo critério do limite e escolhendo a função harmônica divergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, temos.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \Big/ 1/n = \lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty$$

Desta forma, a série dada será divergente

7) $\sum_{n=2} \frac{1}{n^{\ln n}}$ Temos $n^{\ln n} > n^2$ quando $n > e^2$, então, $\frac{1}{n^{\ln n}} < \frac{1}{n^2}$, ou seja, pg7

pelo critério da comparação a série dada irá convergir.

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[4]{n^3+3} \cdot \sqrt[5]{n^3+5}} = \sum_{n=1} \frac{n^{1/3} \cdot \sqrt{1+2/n}}{n^{3/4} \cdot \sqrt{1+3/n^3} \cdot n^{3/5}\sqrt{1+5/n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{n^{27/20}} \cdot \frac{\sqrt{1+2/n}}{\sqrt{1+3/n^3} \cdot \sqrt{1+5/n^3}}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{61/60}} \frac{\sqrt{1+2/n}}{\sqrt{1+3/n^3} \cdot \sqrt{1+5/n^3}}$

Seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{61/60}}$ uma série harmônica de ordem $\frac{61}{60} > 1$, então ela será uma série convergente. Logo, pelo critério do limite,

$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{1+2/n}}{\sqrt{1+3/n^3} \cdot \sqrt{1+5/n^3}} = 1$

como $1 > 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{61/60}}$ é uma série convergente, temos que, a série dada também será convergente.

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$ Dado as seguintes relações trigonométricas

$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a \Rightarrow \cos 2a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a \Rightarrow 1 - \cos 2a = 2\operatorname{sen}^2 a$

e sabendo que $\operatorname{sen} a < a$, temos:

$1 - \cos\frac{1}{n} = 2\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n^2}$

Desta forma, pelo critério da comparação, como $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$ é limitada superiormente pela série harmônica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$, a série dada irá convergir.

10) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

Pelo critério da raiz, temos

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln n} = 0$

Logo, como $0 < 1$, a série converge.

11) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ uma função contínua, decrescente e positiva, pelo critério da integral temos,

$\lim_{n \to \infty} \int_2^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx \underset{\substack{u = \ln x \\ du = 1/x \\ dv = 1/x^2 dx \\ v = -1/x}}{=} \lim_{n \to \infty} \left(-\frac{\ln x}{x}\Big|_2^n + \int_2^n \frac{1}{x^2}\,dx \right) = \lim_{n \to \infty} -\frac{(\ln x + 1)}{x}\Big|_2^n$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{(\ln n + 1)}{n} + \frac{(\ln 2 + 1)}{2}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{-1/n}{1} = 0.$$

Logo, como a integral imprópria converge, a série irá convergir.

12) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$, $p > 0$. De modo análogo ao exercício anterior, separar casos de p, $p < 1$, $p = 1$ e $p > 1$.

13) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$, $p > 0$

Seja a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ de ordem p, pelo critério do limite, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^p}\right)}{\frac{1}{n^p}} \overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n^p}} = 1$$

Logo, como $1 > 0$, temos os seguintes casos.

- caso $p \leq 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é divergente, então a série dada irá divergir
- caso $p > 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente, então a série dada irá convergir.

14) $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

Seja a série harmônica divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, utilizando o critério do limite, temos,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]$$

$$\overset{\ln x \text{ contínua}}{=} \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = \ln e = 1$$

Como $1 > 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente, a série dada irá divergir

15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,3^n}{n^n}$ Pelo critério da razão, temos.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{n!\,3^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 3}{(n+1)^n\cdot(n+1)} \cdot n^n = \lim_{n\to\infty} 3\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} 3\cdot\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right) = \frac{3}{e} > 1$$ Logo, a série dada irá divergir.

16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,e^n}{n^n}$, pelo exercício anterior, temos que,

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, mas como, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ e

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$, temos que, $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e \Rightarrow e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n > 1$

$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$. Desta forma, o

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ e a série dada é divergente.

17) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k}}{k^k}$ Pelo critério da raiz, temos

$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{e^{1/k}}{k^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{e^{1/k^2}}{k} = 0$

Como $0 < 1$, a série dada irá convergir

18) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ Pelo critério da raiz, temos

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} 3\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{e}$

Como $\frac{3}{e} > 1$, a série irá divergir

19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$ Pelo critério da razão, temos

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3/(\ln 2)^{n+1}}{n^3/(\ln 2)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{\ln 2} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$

Como $1/\ln 2 > 1$ a série irá divergir

20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

Seja $(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln((\ln n)^{\ln n})} = e^{(\ln n)(\ln \ln n)}$

$= e^{\ln(n^{\ln(\ln n)})} = n^{\ln(\ln n)}$ e, como $n^{\ln(\ln n)} \geqslant n^2$

$\forall n > e^{e^2}$, temos que, a partir de $n = \lceil e^{e^2} \rceil$ a função irá

começar a convergir pois $\frac{1}{n^{\ln(\ln n)}} < \frac{1}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente

9. Não faço a mínima ideia de como resolver.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$, $a>1$. Sendo $f(x)=\frac{1}{a^{\ln x}}$ uma função contínua, decrescente e positiva p/ $a>1$ e, sabendo que,

$$\int \frac{1}{a^{\ln x}}\,dx \underset{x=e^u}{\overset{u=\ln x,\ du=\frac{1}{x}dx}{=}} \underbrace{\int \left(\frac{e}{a}\right)^u du}_{\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}} = \frac{\left(\frac{e}{a}\right)^u}{\ln\left(\frac{e}{a}\right)} = \frac{\left(\frac{e}{a}\right)^{\ln x}}{1-\ln a} = \frac{x}{a^{\ln x}(1-\ln a)}$$

Então, pelo critério da integral, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_1^n \frac{1}{a^{\ln x}}\,dx\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{a^{\ln x}(1-\ln a)}\Bigg|_1^n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{a^{\ln n}(1-\ln a)} - \frac{1}{1-\ln a}\right)$$

- caso $a=e \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n(1-1)}\right) = \frac{1}{0} = \infty$ $\therefore$ a série diverge
- caso $a<e \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{a^{\ln n}(1-\ln a)}\right) = \frac{1}{1-\ln a}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^{\ln n \cdot \ln a}}$

$$= \frac{1}{1-\ln a}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^{\ln a}} = \frac{1}{1-\ln a}\lim_{n\to\infty} n^{1-\ln a} = \infty$$

como $a<e$, $\ln a < 1$ $\therefore$ $1-\ln a > 0$, $\therefore$ a série diverge

- caso $a>e \Rightarrow$ temos caso análogo ao anterior, mas $\ln a > 1$ e, portanto, $1-\ln a < 0$; logo $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\ln a - 1}} = 0$ $\therefore$ a série converge.

11. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$, $p>0$. Seja a série harmônica divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, pelo critério do limite, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(\ln n)^p}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\ln n)^p} \overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p(\ln n)^{p-1}\cdot \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{p(\ln n)^{p-1}}$$

Indutivamente, aplicando a regra de L'hopital, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{p!(\ln n)} \overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{p!} = \infty$$

Logo, como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente, a série dada será divergente $\forall p \in \mathbb{Z}_*^+$ (caso $p \notin \mathbb{Z}_*^+$ eu não sei o que fazer)

12. $\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \dots = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right)$ (pode ajudar no próximo exercício)

$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$

Pela série de potência $\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$ (PG razão $-x$) e integrando-a, temos:

$$\int \frac{1}{1+x} dx = \int (1 - x + x^2 - x^3 + \dots)\, dx$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

Logo, para $x=1$, $\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$, então, temos

$$\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \dots = 1 - \ln 2 \quad //$$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right)$

$\frac{A}{n} + \frac{B}{2n+1} = \frac{1}{n(2n+1)} \Rightarrow A.2n + A + Bn = 1 \Rightarrow \begin{cases} A2n + Bn = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \end{cases}$

Do exercício anterior, temos que, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = 1 - \ln 2$, então:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = 2.(1-\ln 2) = 2 - 2\ln 2$$

14. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ e $a_n > 0$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

Não sei.

b) Seja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$, pelo critério da razão, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+(-1)^n}}{2^{n+1+(-1)^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} 2^{-1+(-1)^n-(-1)^{n+1}}$$

Logo, como $(-1)^n - (-1)^{n+1}$ pode ser igual a $1+1=2$ ou $-1-1=-2$ há uma alternância entre a potência de 2, então o limite não existiria, então, empregando o critério da raiz, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n . 2^{(-1)^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 . 2^{\frac{(-1)^n}{n}}} = \frac{1}{2.2^0} = \frac{1}{2}$$

Como o limite converge e $1/2 < 1$, a série irá convergir.

c) $a, b \in \mathbb{R}$ tq $0 < a < b < 1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a^n + b^n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b^n$, analisando cada série separadamente pelo critério da raiz, temos

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n} = a$ e, portanto, como $a < 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$ é convergente. De forma análoga para $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b^n$ encontramos que ela também converge, portanto, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a^n + b^n)$ irá convergir.

15. séries de potência(?) e bastante manipulação