MAT0236 - Funções Diferenciáveis e Séries
Lista 2 - 2019

1. Verifique a convergência ou divergência das seguintes sequências.

   1) $s_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^3}$ 2) $s_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{e^r}$ 3) $s_n = \sum_{r=3}^{n} \frac{1}{\ln r}$

   4) $a_n = \frac{2.4.6....(2n)}{1.3.5....(2n-1)}$ 5) $a_n = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$.

2. Expresse as seguintes representações decimais como quociente de 2 inteiros

   1) $1,\overline{29}$ 2) $0,3\overline{117}$.

3. Seja (a_n) uma sequência qualquer dos dígitos 0,1,2,...,9. Mostre que a série

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ...$$

   é convergente.

4. Seja (a_n) uma sequência de números positivos tal que $\sum a_n$ diverge. Mostre que $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ também diverge.

5. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, calcule $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$.

6. Verifique as relações 1) e 2) abaixo e use-as para calcular as somas 3) - 8):

   1) $\sum_{n=1}^{\infty} [f(n+1) - f(n)] = \lim_{n\to\infty} f(n) - f(1)$, se o limite existir.

   2) $\sum_{n=1}^{\infty} [f(n+1) - f(n-1)] = \lim_{n\to\infty} [f(n) + f(n+1)] - f(0) - f(1)$, se o limite existir.

   3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\text{sen}\left(\frac{1}{n}\right) - \text{sen}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]$

   6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ \dots\ (n+k)}$, $(k \geq 2)$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty} [\text{arctg}(n+1) - \text{arctg}(n)]$

7. Decida se cada uma das séries abaixo é convergente. Se possível, calcule sua soma.

   1) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^n} + 2^n\right)$ 2) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, t^{\frac{k}{2}}$ para $0 < t < 1$ 3) $\sum_{n=0}^{\infty} u^n(1+u^n)$ para $|u| < 1$

   4) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ para $|x| < 1$ 5) $\sum_{n=0}^{\infty} \text{sen}^{2n} x$ para $|x| < \frac{\pi}{2}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{n}{j}\right)$

   7) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ 9) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\text{sen} k}$

   10) $\sum_{s=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{s}\right)$ 11) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + \cos\ k}{k}$

8. É convergente ou divergente? Justifique.

   1) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-4}}$ 2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\text{arctg}\ n}{n^2}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n!)^\lambda}$, $\lambda > 0$

   5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ 6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ 7) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[4]{n^3+3}\ \sqrt[5]{n^3+5}}$

   9) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$ 10) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ 11) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 12) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$, $p > 0$

   13) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$, $p > 0$ 14) $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n}\ \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ 15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{n^n}$ 16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n}$

   17) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^k}$ 18) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$ 20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

9. Se $a_1, a_2, a_3, \cdots$ são os inteiros positivos cuja expansão decimal não contém o dígito 5, mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ converge e tem soma < 90.

10. Seja $a > 1$. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a^{\ln n}}$ converge se $a > e$ e diverge se $a \leq e$.

11. Seja $p > 0$. Mostre que $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^p}$ diverge.

12. Mostre que
$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \cdots = 1 - \ln 2.$$

13. Mostre que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = 2 - 2\ln 2.$$

14. (a) Seja (a_n) é uma sequência qualquer de números positivos Mostre que se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$, então $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.
    (b) Mostre que o Critério da Razão não se aplica à série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n+(-1)^n}}$, mas sua convergência pode ser decidida pelo Critério da Raiz.
    (c) Seja $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $0 < a < b < 1$. Mostre que a série $a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots$ converge. (Veja que é possível provar a convergência usando o Critério da Raiz, mas não dá usando o Critério da Razão.)

15. Mostre que $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n} = \gamma \ln 2 - \dfrac{1}{2}(\ln 2)^2$. (Aqui γ é a constante de Euler.)

RESPOSTAS

1. 1) converge, 2) converge para $\frac{1}{e-1}$, 3) diverge, 4) diverge (Dica: calcular $\ln a_n$), 5) converge para 0 (Dica: calcular $\ln a_n$).

2. 1) $\frac{128}{99}$ 2) $\frac{3114}{999}$

5. converge para $2s - a_1$.

6. 3) 1; 4) $\ln 2$; 5) $\mathrm{sen}(1)$; 6) converge para 1; 7) converge para $\frac{1}{k!(k-1)}$; 8) converge para $\frac{\pi}{4}$.

7. 1) diverge, 2) $\frac{1}{1+\sqrt{t}}$, 3) $\frac{2+u}{1-u^2}$, 4) $\frac{1}{1+x^2}$, 5) $\frac{1}{1-\mathrm{sen}^2 x}$, 6) diverge, 7) diverge, 8) diverge, 9) diverge, 10) diverge, 11) diverge.

8. 1) diverge, 2) converge, 3) converge, 4) converge, 5) diverge, 6) diverge, 7) converge, 8) converge, 9) converge, 10) converge, 11) converge, 12) converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$, 13) converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$, 14) diverge, 15) diverge, 16) diverge, 17) converge, 18) diverge, 19) diverge, 20) converge.