Examen - Session 2

Durée 3h00. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. La qualité de la rédaction sera prise en compte. Les exercices sont indépendants.

1 Analyse

Exercice 1. (Question de cours) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Rappeler la définition du gradient de f et la formule liant gradient et différentielle.

Exercice 2. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\phi(x, y) = (u, v) = (x + y, x - y)$$

1. Démontrer que ϕ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme. Calculer son inverse ϕ^{-1}.
2. Calculer le déterminant jacobien de ϕ au point (x, y) et le déterminant jacobien de ϕ^{-1} au point (u, v).
3. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^{x^2-y^2}$. Soit $g = f \circ \phi^{-1}$. Calculer les dérivées partielles de f puis calculer les dérivées partielle de g **en utilisant la règle de la chaîne**.
4. On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0,\ (x - 1) < y < (1 - x)\}$. Déterminer le domaine Δ image de D par ϕ. Faire un dessin.
5. En déduire $\int_D f(x, y)dxdy$.

Exercice 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}.$$

1. Étudier la continuité de f en chaque point de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles de f en chaque point où elles existent.
3. Étudier la continuité des dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, puis en $(0, 0)$.
4. Étudier la différentiabilité de f en chaque point de $\mathbb{R}^2$.
5. En déduire une valeur approchée de $f(1.01, 0)$.

Exercice 4. Soit $f(x, y) = |4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 39|$.

1. Déterminer l'ensemble $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 39 < 0\}$.
2. Étudier la continuité f et donner l'ensemble image de f.
3. Dessiner l'ensemble $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) > 1/2\}$.
4. Sur quel ensemble f est-elle $\mathcal{C}^\infty$? Justifier succinctement la réponse.
5. Donner les points de minimum de f sur $\mathbb{R}^2$. Indiquer, en justifiant, la nature de ces points (minimum global ou local). *Indication : cette question se traitera sans calcul*
6. Calculer le gradient et la Hessienne de f en les points de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels ces quantités sont bien définies.
7. Déterminer alors le(s) point(s) critique(s) de f donner leur nature (minimum/maximum, local/global, point selle,. . .).
8. Tracer qualitativement le graphe de f.

2 Probabilités

Exercice 5. (Question de cours) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2. Démontrer que l'on a

$$\mathbb{E}(XY) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}.$$

Exercice 6. (Lois géométriques) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois géométriques de paramètre $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$ respectivement. On note $Z = \min\{X, Y\}$. Le but de l'exercice est de déterminer la loi de Z.

1. Calculer $\mathbb{P}(X \leq k)$ et $\mathbb{P}(Y \leq k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer alors $\mathbb{P}(Z \leq k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Exprimer l'évènement $\{Z = k\}$ en fonction des évènements du type $\{Z \leq \ell\}$, $\ell \in \mathbb{N}^*$.
4. En déduire que Z est une variable aléatoire de loi géométrique dont on déterminera le paramètre.