Chapitre 6

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Soient E et F deux $\mathbb{R}$ espaces vectoriels de dimension finie munis des normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ respectivement.

But :

$\mathcal{C}^1 \Rightarrow$ diff $\Rightarrow$ existence des dérivées partielles.

diff $\Rightarrow$ continue ($\mathcal{C}^0$).

bonne notion mais complexe à vérifier

6.1 Définition et propriétés

6.1.1 Définition

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E de dimension finie.

Définition 6.1.1 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$). Une fonction $\mathcal{U} \to F$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si pour tout $i = 1, \cdots, n$ la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est bien définie et est continue sur $\mathcal{U}$.

Exemple 6.1.1. La fonction $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

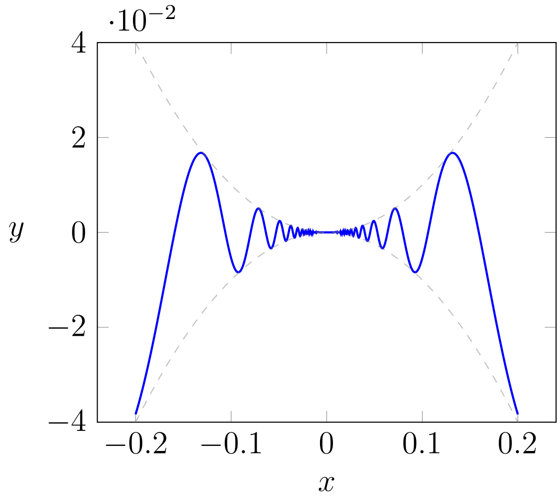
6.1.2 Relation entre les fonctions C^1 et les fonctions différentiables

Théorème 6.1.1. Soit $f : E \to F$ définie sur un ouvert $\mathcal{U} \subset E$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$. Alors f est différentiable sur $\mathcal{U}$.

Démonstration.

$\square$

Remarque 10. La réciproque est fausse : la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{|x|}\right)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$ n'est pas $\mathcal{C}^1$ mais est différentiable sur $\mathbb{R}$.



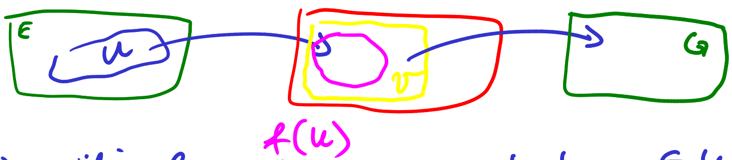
6.2 Composition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés de dimension finie.

Théorème 6.2.1 (Règle de la chaine). Soient $f : E \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{U} \subset E$ et $g : F \to G$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{V} \supset f(\mathcal{U})$. Alors $g \circ f : E \to G$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ avec, pour tout $x \in U$:

$$d_x(g \circ f) = d_{f(x)}g \circ d_x f$$

Démonstration.



1) vérifier la relation pour tout $a \in U$. Soit $a \in U$, $h \in E$, $k \in F$

$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \alpha(h)$ où $\alpha : E \to F$ et $\alpha(h) = o(\|h\|)$

$g(f(a)+k) = g(f(a)) + d_{f(a)} g(k) + \beta(k)$ où $\beta : F \to G$ et $\beta(k) = o(\|k\|)$

Ainsi

$$g\circ f(a+h) = g(f(a+h)) = g(f(a) + d_a f(h) + \alpha(h))$$
$$= g(f(a)) + d_{f(a)} g(d_a f(h) + \alpha(h)) + \beta(d_a f(h) + \alpha(h))$$
$$= g\circ f(a) + d_{f(a)} g \circ d_a f(h) + \underbrace{d_{f(a)}(\alpha(h)) + \beta(d_a f(h) + \alpha(h))}_{= o(\|h\|)}$$

2) vérifier que l'application

$a \mapsto d_a(g\circ f)$ est bien $\mathcal{C}^0$. (composée d'applications).

□

Remarque 11. Il s'agit de la généralisation de la formule de dérivation d'une composée pour $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On a alors pour $x \in \mathbb{R}$ $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

Proposition 6.2.1. Soient $f : E \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{U} \subset E$ et $g : F \to G$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{V} \supset f(\mathcal{U})$.
La matrice jacobienne de $g \circ f$ en $x \in \mathcal{U}$ est donnée par

$$J_{g\circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x).$$

produit matriciel ≃ composée d'applications linéaires

Démonstration. C'est la traduction matricielle du théorème précédent. □

On note $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_p)$ une base de F. Soit une application $f : E \to F$, on note $f_1, \cdots, f_p : E \to \mathbb{R}$ les fonctions coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}'$. Autrement dit, on a $f(x) = f_1(x)e'_1 + \cdots + f_p(x)e'_p \in F$ pour tout $x \in E$.

Proposition 6.2.2. Soient $f : E \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{U} \subset E$ et $g : F \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{V} \supset f(\mathcal{U})$. Alors en tout point $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{U}$, on a pour tout $j = 1, \cdots, n$

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x_j}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial f_i}(f_1(x), \cdots, f_p(x)) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, \cdots, x_n).$$

où on a noté $\frac{\partial g}{\partial f_i}(f_1(x), \cdots, f_p(x))$ la i-ème dérivée partielle de g en $f(x) \in \mathcal{V}$.

Démonstration. c'est la conséquence directe de l'égalité matricielle.

- $\mathrm{Jac}_{g\circ f}(x) = \underbrace{J_g(f(x))}_{1 \times p} \cdot \underbrace{J_f(x)}_{p\times n} = \underbrace{\left[\frac{\partial g\circ f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial g \circ f}{\partial x_n}(x)\right]}_{1\times n} \in \mathbb{R}^{1\times n}$

Ici : $E = \mathbb{R}^n$
$F = \mathbb{R}^p$
$G = \mathbb{R}$

$$\overbrace{\boxed{J_g(f(x))}}^{p} \; \overbrace{\boxed{J_f(x)}}^{n} = \overbrace{\boxed{\mathrm{Jac}_{g\circ f}(x)}}^{n}$$

- $\mathrm{Jac}_g(f(x)) = \left[\frac{\partial g}{\partial f_1}(f(x)), \dots, \frac{\partial g}{\partial f_p}(f(x))\right] \in \mathbb{R}^{1\times p}$

• $\mathrm{Jac}_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x) & & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n}$

remarque : Pourquoi le nom "règle de la chaîne" (Chain's rule)

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x_j}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial f_1}\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_j}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \frac{\partial g}{\partial f_2}\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_j}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \cdots + \frac{\partial g}{\partial f_p}\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix} \frac{\partial f_p}{\partial x_j}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

□

Remarque 12. On a la notation plus condensée suivante :

la notation $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ "suggère" que l'on manipule des taux d'accroissement.

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

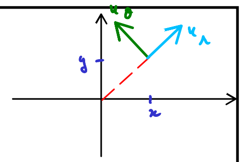
La formule est concise mais les abus de notations peuvent être trompeurs pour le néophyte...

Exemple 6.2.1. Coordonnées cylindriques : $\psi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ [$= x(\theta)$, $y(\theta)$] et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calcul de $\frac{\partial f \circ \psi}{\partial x_j}$.

1) on pose $\tilde{f} = f \circ \psi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\psi} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ est bien $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonction $\mathcal{C}^1$.

2) on note $\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta = x\binom{r}{\theta} \\ r\sin\theta = y\binom{r}{\theta} \end{pmatrix}$ et $u_r\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\binom{x}{y}\|}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$u_\theta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\binom{x}{y}\|}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$



3) $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \frac{\partial f \circ \psi}{\partial r}\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial \psi_1}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial r}\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} + \frac{\partial f}{\partial \psi_2}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \frac{\partial \psi_2}{\partial r}\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$

$= \frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sin\theta$

$= d_{(x,y)} f(u_r) = D_{u_r} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ "dérivée de f en (x,y) dans la direction u_r"

$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \frac{\partial f \circ \psi}{\partial \theta}\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial \psi_1}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta}\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} + \frac{\partial f}{\partial \psi_2}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta}\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} r\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} r\cos\theta$

$= r\, d_{\binom{x}{y}} f(u_\theta) = r\, D_{u_\theta} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ "r fois la dérivée de f dans la direction u_θ"

6.3 Difféomorphismes ← chgt de variable.

Soient E et F deux $\mathbb{R}$ espaces vectoriels normés de dimension finie et $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts de E et F respectivement.

> **Définition 6.3.1 (Difféomorphismes).** On dit que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ vers $\mathcal{V}$ si f est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V}$ dont la réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{V}$.

Exemple 6.3.1. L'application $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 6.3.2. L'application $\phi : x \mapsto \mathrm{Sign}(x)\sqrt{|x|}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ d'inverse $\phi^{-1} : x \mapsto \mathrm{Sign}(x)x^2$. L'application ϕ^{-1} est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ mais ϕ n'est pas $\mathcal{C}^1$.

les appli linéaires inversibles sont des difféo

Exemple : 6.3.1

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

* f est inversible ? oui, car $\boxed{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0}$

inversible.

et $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (x+y)/2 \\ (x-y)/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

* f est $\mathcal{C}^1$, oui c'est une appli linéaire ! et on a

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

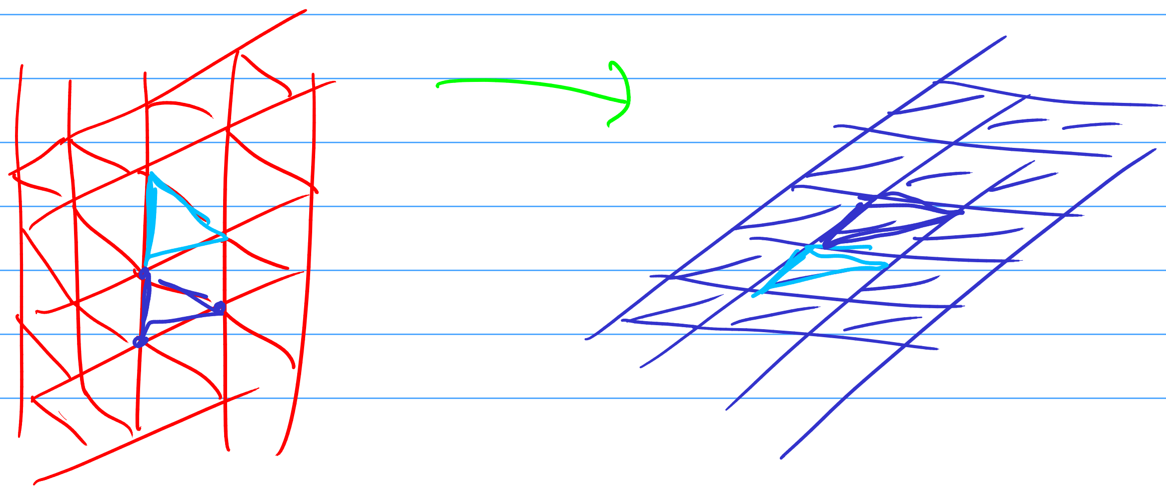
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1$$

autrement dit $\mathrm{Jac}_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}(f)$

De même f^{-1} est linéaire et comme $f^{-1} = \frac{1}{2} f$.

$$\mathrm{Jac}_{f^{-1}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \mathrm{Mat}(f) = \mathrm{Mat}(f^{-1})$$

$\Rightarrow$ et f est difféomorphisme.



Exemple déjà vu au chap I. Idée : vérifier que

$\phi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x|}}$ n'est pas définie en 0.

à relier au fait que $(\phi^{-1})'$ s'annule en 0.

Proposition 6.3.1. Soit $f : E \to F$ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V}$. Alors pour tout $a \in \mathcal{U}$, $d_a f$ est un isomorphisme de E sur F tel que

iso morphisme = appli linéaire inversible.

$$(d_a f)^{-1} = d_{f(a)}(f^{-1}).$$

Démonstration. $\mathcal{U} \subset E \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \mathcal{V} \subset F$

inverse à gauche de $d_a f$

$f^{-1} \circ f = Id_{\mathcal{U}}$ donne $d_{f(a)}(f^{-1}) \circ d_a f = Id_{\mathcal{U}}$

$f \circ f^{-1} = Id_{\mathcal{V}}$ donne $d_a f \circ d_{f(a)} f^{-1} = Id_{\mathcal{V}}$

inverse à droite de $d_a f$

cf : Remarque 2 du chap. I (p. 10) □

Remarque 13. On a donc $\dim E = \dim F$.

On dispose de la caractérisation suivante des difféomorphismes

Théorème 6.3.1 (Inversion globale). Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de E et $f : \mathcal{U} \to F$ une application injective de classe $\mathcal{C}^1$. Alors f définit un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme du $\mathcal{U}$ sur $f(\mathcal{U})$ si et seulement si $d_a f$ est un isomorphisme pour tout $a \in \mathcal{U}$.

Démonstration. Admis. □

Remarque 14.

1) isomorphisme : appli linéaire inversible (injective et surjective)
$\Rightarrow$ Il suffit de vérifier que $\det(\text{Jac } f) \neq 0$

condition local

2) on a besoin de l'injectivité dans le cas général.
(Si $E = F = \mathbb{R}$, cette condition est "inutile" car la condition 1) donne directement l'injectivité).

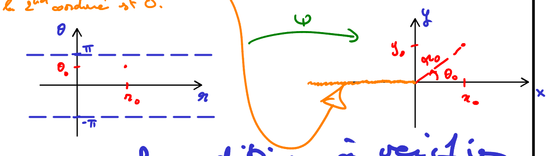
condition globale

Exemple 6.3.3. Coordonnées polaires : $\psi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$ ($\mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite des réels négatif).

$U = \;]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{R}^- \times \{0\}\}$

$(r, \theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$

on enlève les pts dont la 1ère coordonnée est négat. et la 2ème coordonnée est 0.



* Pour montrer que ψ est un $\mathcal{C}^1$ difféo, on a 2 conditions à vérifier

① $Jac_\psi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ est inversible pour tout (r,θ)

car $\det(Jac_\psi)(r,\theta) = (\cos^2\theta + \sin^2\theta) r = r > 0$ sur U

② ψ est injectif sur U car $f(U) = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$

ouvert

6.4 Fonctions implicites

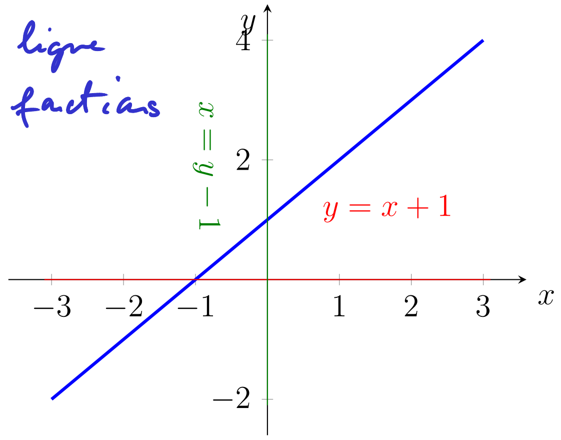
Dans $\mathbb{R}^2$, la droite $\mathcal{D}$ d'équation

$$ax + by + c = 0$$

est la ligne de niveau 0 de la fonction $(x,y) \mapsto ax+by+c$. Si $b \neq 0$ (*i.e.* si la droite n'est pas verticale) on peut définir la fonction $\varphi(x) = -\frac{ax+c}{b}$ de sorte que $(x,\varphi(x)) \in \mathcal{D}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De la même manière, si $a \neq 0$ les points $(\phi(y), y)$ où $\phi(y) = -\frac{by+c}{a}$ sont sur $\mathcal{D}$.

on a une paramétrisation de la droite $\mathcal{D}$.

Idée : généraliser aux lignes de niveau des fonctions $\mathcal{C}^1$.



U

$\|$

$(R, I, g(R,I))$

Remarque 15. En physique, on utilise très souvent cette formulation implicite. Par exemple, la loi d'Ohm, souvent énoncée par $U = RI$, devrait plutôt être comprise comme la formulation implicite de la courbe de niveau 0 de l'application $f(U,R,I) = U - RI$. En effet, on peut, suivant les besoins, exprimer U en fonction de R et de I, ou I en fonction de U et de R, *etc.*...

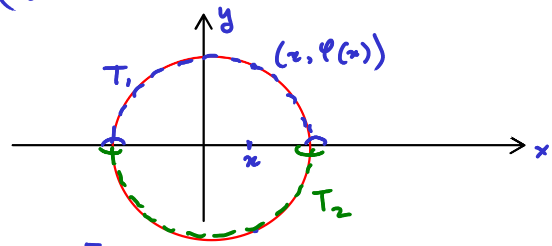
Question : étant donnée une équation $f(x,y) = 0$. À quelles conditions sur f peut-on faire le même procédé ?

ensemble de niveau 0 de f.

Définition 6.4.1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = 0\}$. Si T peut être représenté au voisinage de $(x_0, y_0) \in T$ par le graphe d'une fonction $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}$ où $x_0 \in]a, b[$ (*i.e.* $(x, \varphi(x)) \in T$ pour tout $x \in]a, b[$), alors on dit que φ est une fonction implicite de l'équation $f(x, y) = 0$.

Exemple 6.4.1. Soit $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

on a $T = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1=0 \right\}$ = cercle centré en $\binom{0}{0}$ de rayon 1.



$x^2+y^2-1=0$

$x^2 = 1-y^2$

$x = \pm\sqrt{1-y^2}$

Posant $\varphi_1 :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{1-y^2}$

$T_1 = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid (x, \varphi_1(x)), x \in]-1,1[\right\}$

fonctions implicites

$\varphi_2 :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto -\sqrt{1-y^2}$

$T_2 = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid (x, \varphi_2(x)) \; x \in]-1,1[\right\}$

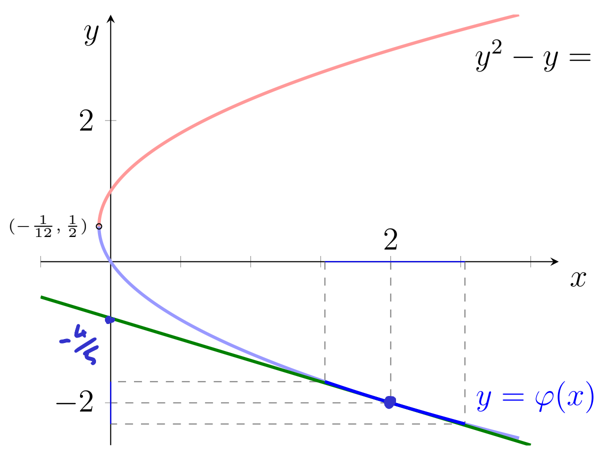
Théorème 6.4.1 (Fonction implicite sur $\mathbb{R}^2$). Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$. Si $f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ alors il existe un intervalle ouvert I contentant x_0 et une unique fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

1. $\varphi(x_0) = y_0$.
2. $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$.
3. $\varphi'(x) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$ pour tout $x \in I$.
4. la droite tangente à la courbe $y = \varphi(x)$ en $x = x_0$ a pour équation $y = \varphi'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

la tangente à T en $\binom{x_0}{y_0}$ n'est pas verticale

Démonstration. Admis. Mais on trouvera une preuve dans [1] page 204. □

Exemple 6.4.2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = y^2 - y - 3x$ et le point $(x_0, y_0) = (2, -2)$. On a $f(2, -2) = 0$ et on considère la courbe de niveau 0.



$T = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0 \right\} = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - y - 3x = 0 \right\}$

$(x_0, y_0) = (2, -2)$ satisfait bien $f(2,-2) = 0$

$$y^2 - y - 3x = 0 \iff y = \frac{1 - \sqrt{1+12x}}{2} \quad \text{ou} \quad y = \frac{1+\sqrt{1+12x}}{2}$$

et le point de coordonnée $(2,-2)$ appartient au graphe de la fonction (décrivant la branche bleue sur le dessin) d'équation

$$\varphi(x) = \frac{1 - \sqrt{1+12x}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1+12x)^{1/2}$$

La tangente au graphe de φ en x_0 est donnée par :

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{2} \times 12 \times \frac{1}{2} (1+12x)^{1/2 - 1} = -3(1+12x)^{-1/2} = \frac{-3}{\sqrt{1+12x}}$$

mais d'après le point 3. du th :

$$\varphi'(x) = - \frac{-3}{2y-1} = \frac{-3}{2\varphi(x) - 1} = \frac{-3}{\sqrt{1+12x}}$$

Ainsi la droite tg au graphe de φ en (x_0, y_0) est

$$\begin{aligned} y &= \varphi'(2)(x-2) - 2 \\ &= \frac{-3}{5}(x-2) - 2 = -\frac{3}{5}x + \frac{6}{5} - 2 \\ &= -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5} \end{aligned}$$