Exercice 2 :

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) $\mathcal{U} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0 \} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \}^c$

Montrer que $\mathcal{U}$ est ouvert : Plusieurs argument possibles :

① $\{y=0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$: il est donc fermé et $\mathcal{U}$ est alors ouvert.

② Soit $u_n = (x_n, y_n)$ où $y_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ et u_n cv.

on a $u_n = (x_n, 0) \longrightarrow (x_0, 0) \in \mathcal{U}^c$

$\therefore$ $\mathcal{U}$ est ouvert (complémentaire d'un fermé).

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ comme composé de fonctions $\mathcal{C}^1$ et produit de fonctions $\mathcal{C}^1$.

2) Etude de la continuité de f :

* sur $\mathcal{U}$: f est $\mathcal{C}^0$ produit, composition de fonctions $\mathcal{C}^0$.

* sur $\mathcal{U}^c$: Pour montrer que f est $\mathcal{C}^0$ en $(x,0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ on cherche une fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$ tq $u(x,0) = 0$

$$|f(x,y) - f(x,0)| < |u(x,y)|$$

on a si $(x,y) \in \mathcal{U}$

$$|f(x,y) - f(x,0)| = \left| y^2 \sin \frac{x}{y} - 0 \right| < y^2$$

si $(x,y) \in \mathcal{U}^c$

$$|f(x,y) - f(x,0)| = 0$$

prendre $u(x,y) = y^2$.

$\therefore f$ est bien $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$.

3) Sur U^c la fonction f est Cte $= 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h+x,0) - f(x,0)}{h} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(x,k) - f(x,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} k\sin\left(\frac{x}{k}\right) = 0. \end{cases}$$

4) Il suffit de montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est $\mathcal{C}^0$ en tout pt $(x,0)$:

$$\left|y\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right| \leqslant |y| \xrightarrow[(x,y)\to(x,0)]{} 0 .$$

et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est bien $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$

5) On montre que $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(1,0)$ en remarquant que $\cos\left(\frac{1}{y}\right)$ n'a pas de limite en $y \to 0$.