Chapitre 2

Normes sur $\mathbb{R}^n$ et limites

2.1 Normes et distances

Le but de se chapitre est de formaliser et de donner un sens précis à l'assertion "x est proche de y" quand $x, y \in \mathbb{R}^n$. On sait déjà mesurer les distances dans $\mathbb{R}^n$. Si $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont deux points de $\mathbb{R}^n$. La distance est différente suivant que l'on mesure la trajectoire

- "à vol d'oiseau" : c'est la distance ℓ^2 ou euclidienne.
- "taxi cab" : distance ℓ^1 ou "city norm".

2.1.1 Normes

Définition 2.1.1. Soit un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E. Une **norme** est une application $N : E \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty[$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Séparation : $\forall u \in E, N(u) \geq 0$ et $N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$,
2. Homogénéité : $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda u) = |\lambda| \, N(u)$,
3. Inégalité triangulaire : $\forall (u, v) \in E^2, N(u + v) \leq N(u) + N(v)$.

Dans la suite, on notera le plus souvent $N(\cdot) = \|\cdot\|$. L'espace E muni d'une norme $\|\cdot\|$ est appelé un espace normé et est noté $(E, \|\cdot\|)$.

Exemple 2.1.1. Si $E = \mathbb{R}^n$ et si $u = (x_1, \cdots, x_n) \in E$, on définit les normes usuelles suivantes :

1. La norme 1 est $\|u\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$
2. La norme 2 est $\|u\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ dispose de propriétés particulières (norme euclidienne).
3. La norme infinie est $\|u\|_\infty = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}$

Proposition 2.1.1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. On a pour tout $u, v \in E$

$$\Big| \|u\| - \|v\| \Big| \leq \|u - v\| \,.$$

Démonstration.

□

2.1.2 Distances

Définition 2.1.2. Soit E un ensemble, une **distance** est une application $d : E \times E \to [0, +\infty[$ telle que

1. Symétrie : $\forall u, v \in E$ on a $d(u, v) = d(v, u)$
2. Séparabilité : $d(u, v) = 0$ si et seulement si $u = v$
3. Inégalité triangulaire : $\forall u, v, w \in E$ on a $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$

Un espace E muni d'une distance d est appelé espace métrique. On note (E, d). Un espace normé est un espace métrique :

Proposition 2.1.2. Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé. L'application $d : E \times E \to [0, +\infty[$ définie par $d(u, v) = \|u - v\|$ est une distance sur E.

Démonstration.

$\square$

Remarque 7. Toutes les distances ne sont pas issues de normes : dans $E = \mathbb{R}$ on définit $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $d(x, y) = \mathrm{atan}(|x - y|)$.

2.1.3 Boules ouvertes et fermées

La notion de norme généralise la notion de valeur absolue dans $\mathbb{R}$ aux espaces vectoriels. La définition suivante généralise la notion d'intervalle ouvert et fermé dans $\mathbb{R}$ aux espaces vectoriels :

Définition 2.1.3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé, $a \in E$ et un nombre réel $r > 0$ fixé. L'ensemble

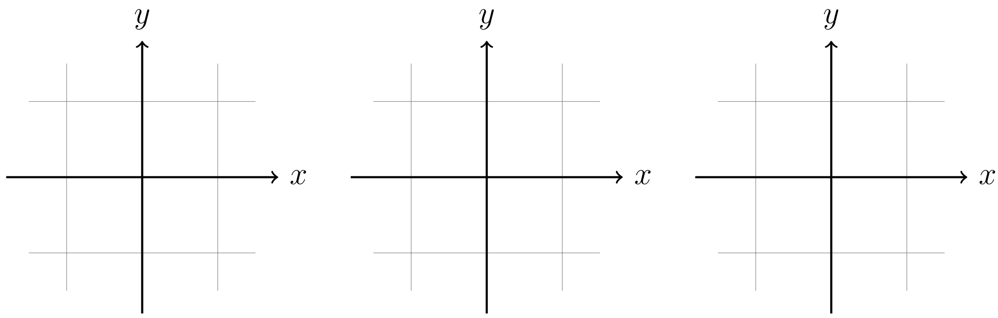
$$B_r(a) = \{u \in E, \|u - a\| < r\}$$

est appelé **boule ouverte** de centre a et de rayon r. L'ensemble

$$\overline{B_r}(a) = \{u \in E, \|u - a\| \leq r\}$$

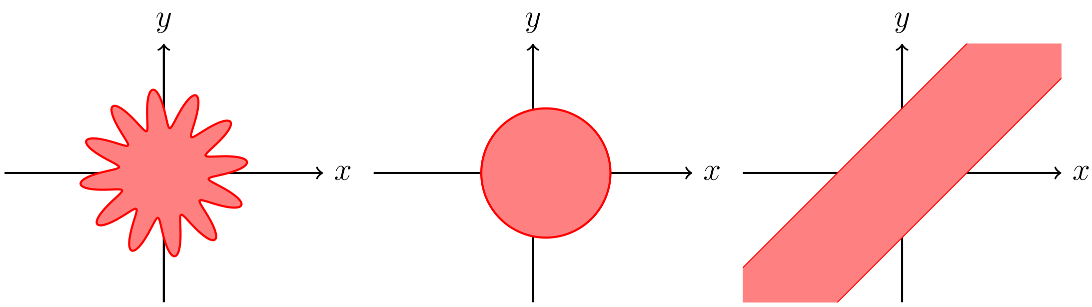
est appelé **boule fermée** de centre a et de rayon r.

Exemple 2.1.2. Voici les boules unités fermées dans $E = \mathbb{R}^2$ pour :



La norme $\|\cdot\|_1$ La norme $\|\cdot\|_2$ La norme $\|\cdot\|_\infty$

Exemple 2.1.3. Existe-t-il une norme dont la boule est l'un des ensembles suivants :



2.1.4 Normes équivalentes

Définition 2.1.4 (Normes équivalentes). On dit que deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|' : E \to \mathbb{R}$ sont équivalentes (et on note $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$) s'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que, $\forall u \in E$

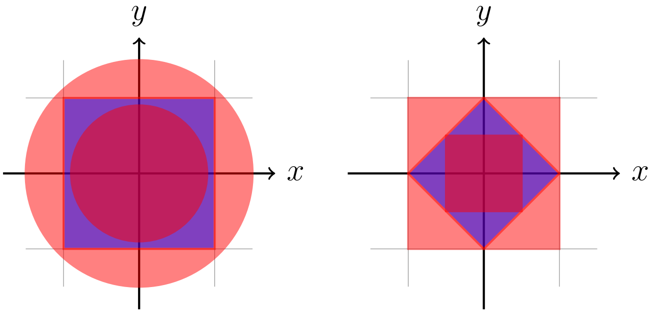
$$\alpha \|u\| \leq \|u\|' \leq \beta \|u\|$$

Proposition 2.1.3. La relation $\sim$ définit une relation d'équivalence sur les normes.

Démonstration.

□

On a l'interprétation géométrique suivante en termes de boules :



$\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_\infty$ $\qquad$ $\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_1$

Théorème 2.1.1. Dans un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie, toute les normes sont équivalentes.

Démonstration. Admis dans ce cours. □

Remarque 8. Ce n'est pas vrai en dimension infinie.

2.2 Limites de suites

Définition 2.2.1 (Limite d'une suite). Soit $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points dans $(E, \|\cdot\|)$ et $\ell \in E$. On dit que la suite u converge vers ℓ (ou la suite u admet ℓ pour limite, ou u tend vers ℓ) au sens de la norme $\|\cdot\|$ si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

1. la suite de réels $\|u_k - \ell\|$ tend vers 0 (*i.e.* $\lim_{k\to\infty} \|u_k - \ell\| = 0$)
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, k \geq N \Rightarrow \|u_k - \ell\| < \varepsilon$

Deux normes équivalentes ont les mêmes suites convergentes :

Proposition 2.2.1. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et $\|\cdot\|, \|\cdot\|' : E \to [0, +\infty[$ deux normes équivalentes sur E. Pour toutes suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{k\to+\infty} u_k = \ell$ pour $\|\cdot\|$,
2. $\lim_{k\to+\infty} u_k = \ell$ pour $\|\cdot\|'$.

Démonstration.

□

Dans $\mathbb{R}^n$ une suite converge si toutes les suites de ses coordonnées convergent :

Proposition 2.2.2. Soit $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} u_{k,1} \\ \vdots \\ u_{k,n} \end{pmatrix}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^n$ et $\ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{k\to+\infty} u_k = \ell$ dans $\mathbb{R}^n$
2. Pour tout $i = 1, \cdots, n$ on a $\lim_{k\to+\infty} u_{k,i} = \ell_i$ dans $\mathbb{R}$

Démonstration.

□

Remarque 9. La limite est donc, si elle existe, unique.

2.3 Notions élémentaires de topologie

2.3.1 Ensembles ouverts et ensembles fermés

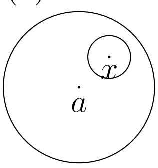
Définition 2.3.1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé. On dit que

1. une partie $\mathcal{U}$ de E est un **ouvert** pour la norme $\|\cdot\|$ si pour tout $a \in \mathcal{U}$, on peut trouver un réel $r > 0$ tel que la boule $B_r(a) \subset \mathcal{U}$.
2. une partie $\mathcal{F}$ de E est un **fermé** pour la norme $\|\cdot\|$ si le complémentaire $E \setminus \mathcal{F} = \mathcal{F}^c = \{u \in E | u \notin \mathcal{F}\}$ est une partie ouverte.

Exemple 2.3.1.

Proposition 2.3.1. Dans un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé de dimension finie, une boule ouverte est un ouvert et une boule fermée est un fermé.

Démonstration. Soit $B_r(a)$ une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ et $x \in B_r(a)$. La boule $B_\rho(x)$ où $\rho = \frac{r - \|a-x\|}{2}$



est incluse dans $B_r(a)$. □

Si deux normes sont équivalentes, alors les parties ouvertes (et fermées) sont les mêmes :

Proposition 2.3.2. Soit $\mathcal{U}$ une partie d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E et $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes équivalentes sur E. La partie $\mathcal{U}$ est un ouvert pour $\|\cdot\|$ si et seulement si $\mathcal{U}$ est un ouvert pour $\|\cdot\|'$.

Démonstration.

□

Proposition 2.3.3 (Caractérisation séquentielle des fermés). Soit $\mathcal{F}$ une partie non vide d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. La partie $\mathcal{F}$ est fermée.
2. Pour toute suite convergente de points de $\mathcal{F}$ alors la limite est dans $\mathcal{F}$.

Démonstration.

□

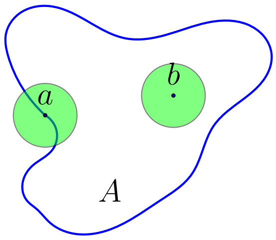
2.3.2 Position d'un point

Définition 2.3.2. Soit A une partie de $(E, \|\cdot\|)$ et $a \in E$. On dit que a est un point

1. **Intérieur** à A si on peut trouver un ouvert $\mathcal{U} \subset E$ tel que $a \in \mathcal{U}$ et $\mathcal{U} \subset A$. L'ensemble

des points intérieurs à A est noté $\mathring{A}$.

2. **Adhérent** à A si tout ouvert $\mathcal{U} \subset E$ qui contient a satisfait $\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$. L'ensemble des points adhérents à A est noté $\bar{A}$.



Le point a est adhérent à A et b est intérieur à A.

Remarque 10. La partie $\mathring{A}$ est ouverte et la partie $\bar{A}$ est fermée.

Exemple 2.3.2.

2.3.3 Ensembles compacts

Rappel sur les suites extraites

Définition 2.3.3. Une partie $\mathcal{K}$ d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel $(E, \|\cdot\|)$ est dite **compacte** si de toute suite de points de $\mathcal{K}$ on peut extraire une sous suite convergente dont la limite est dans $\mathcal{K}$.

Autrement dit, toute suite de $\mathcal{K}$ admet une valeur d'adhérence dans $\mathcal{K}$.

Théorème 2.3.1 (Bolzano-Weierstrass). Dans un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées bornées.

Démonstration. Admise dans ce cours… mais identique à la preuve dans le cas réel. □

Exemple 2.3.3.