

# Géométrie et Topologie

Benjamin Charlier & Matthieu Hillairet

21 janvier 2021

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Courbes paramétrées</b>	<b>3</b>
1.1	Fonctions vectorielles . . . . .	4
1.1.1	Définition et structure d'espace vectoriel . . . . .	4
1.1.2	Limite et continuité . . . . .	5
1.1.3	Dérivabilité . . . . .	6
1.2	Courbes paramétrées . . . . .	7
1.2.1	Définitions . . . . .	7
1.2.2	Interprétation cinématique . . . . .	10
1.3	Étude locale d'un arc . . . . .	13
1.4	Étude globale d'un arc paramétré - Cas plan ( $E = \mathbb{R}^2$ ) . . . . .	15
1.4.1	Branches infinies . . . . .	15
1.5	Longueur et abscisse curviligne . . . . .	17
1.6	Plan d'étude . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Normes</b>	<b>21</b>
2.1	Normes et distances . . . . .	21
2.1.1	Normes . . . . .	21
2.1.2	Distances . . . . .	22
2.1.3	Boules ouvertes et fermées . . . . .	23
2.1.4	Normes équivalentes . . . . .	24
2.2	Limites de suites . . . . .	25
2.3	Notions élémentaires de topologie . . . . .	27
2.3.1	Ensembles ouverts et ensembles fermés . . . . .	27
2.3.2	Position d'un point . . . . .	28
2.3.3	Ensembles compacts . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Espaces euclidiens</b>	<b>31</b>
3.1	Formes Bilinéaires et formes quadratiques . . . . .	31
3.1.1	Formes bilinéaires symétriques . . . . .	31
3.1.2	Formes quadratiques . . . . .	32
3.1.3	Notation matricielle . . . . .	33
3.2	Produit scalaire et norme euclidienne . . . . .	35
3.2.1	Produit scalaire . . . . .	35
3.2.2	Norme euclidienne . . . . .	35
3.2.3	Mesure d'angle géométrique . . . . .	37
3.3	Signe d'une forme quadratique . . . . .	38
3.3.1	Rappels . . . . .	38
3.3.2	Décomposition de Gauss . . . . .	39
3.3.3	Critère de Sylvester ou des déterminants mineurs principaux . . . . .	40

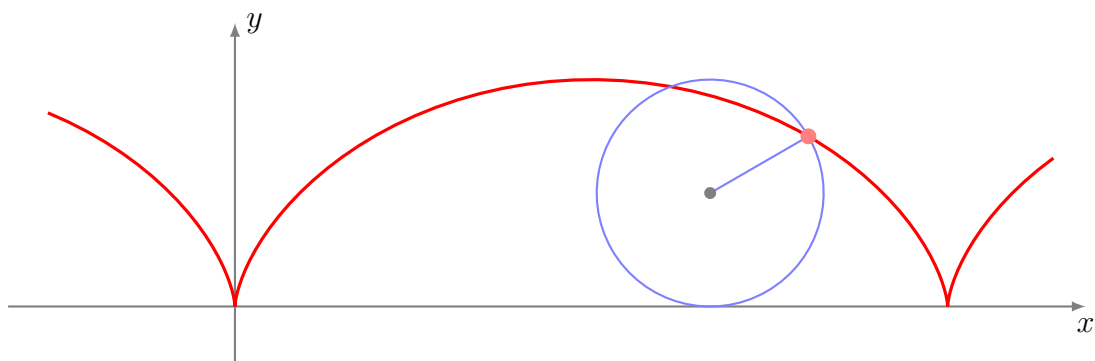
# Chapitre 1

## Courbes paramétrées

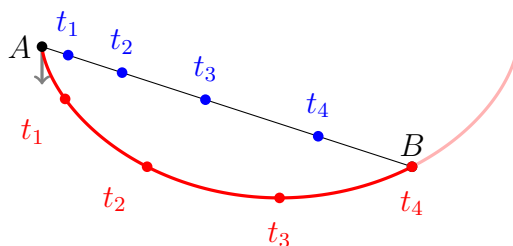
Dans ce chapitre nous allons voir les propriétés fondamentales des courbes paramétrées. Pour fixer les idées, commençons par présenter une courbe particulière : la **cycloïde**. C'est la courbe que parcourt un point choisi de la roue d'un vélo, lorsque le vélo avance. Les coordonnées  $(x, y)$  de ce point  $M$  varient en fonction du temps :

$$\begin{cases} x(t) = r(t - \sin t) \\ y(t) = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

où  $r$  est le rayon de la roue.



La cycloïde a des propriétés remarquables. Par exemple, la cycloïde renversée est une courbe **brachistochrone** : c'est-à-dire que c'est la courbe qui permet à une bille (soumis à la seule gravité) d'arriver le plus vite possible d'un point  $A$  à un point  $B$ . Contrairement à ce que l'on pourrait croire ce n'est pas une ligne droite, mais bel et bien un arc de cycloïde. Sur le dessin suivant les deux billes sont lâchées en  $A$  à l'instant  $t_0$ , l'une sur le segment  $[AB]$  ; elle aura donc une accélération constante. La seconde parcourt la cycloïde renversée, ayant une tangente verticale en  $A$  et passant par  $B$ . La bille accélère beaucoup au début et elle atteint  $B$  bien avant l'autre bille (à l'instant  $t_4$  sur le dessin). Notez que la bille passe même par des positions en-dessous de  $B$  (par exemple en  $t_3$ ).



Dans ce chapitre,  $E$  désigne l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  muni de sa base canonique. La norme  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne : pour  $x \in E$  ayant pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , on a

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Tous les résultats de ce chapitre s'étendent aux  $\mathbb{R}$  espaces vectoriels de dimension finie munis d'une base quelconque.

## 1.1 Fonctions vectorielles d'une variable réelle

### 1.1.1 Définition et structure d'espace vectoriel

**Définition 1.1.1.** Soit  $E = \mathbb{R}^n$ . Une fonction vectorielle d'une variable réelle est une application définie sur un sous ensemble  $I \subset \mathbb{R}$  et à valeurs dans  $E$ . On note  $t \mapsto f(t)$ . L'ensemble des applications  $I \rightarrow E$  se notera  $\mathcal{F}(I, E)$  ou parfois  $E^I$ .

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $E = \mathbb{R}^n$ . Alors toute  $f \in \mathcal{F}(I, E)$  est définie par ses **fonctions coordonnées**  $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  :

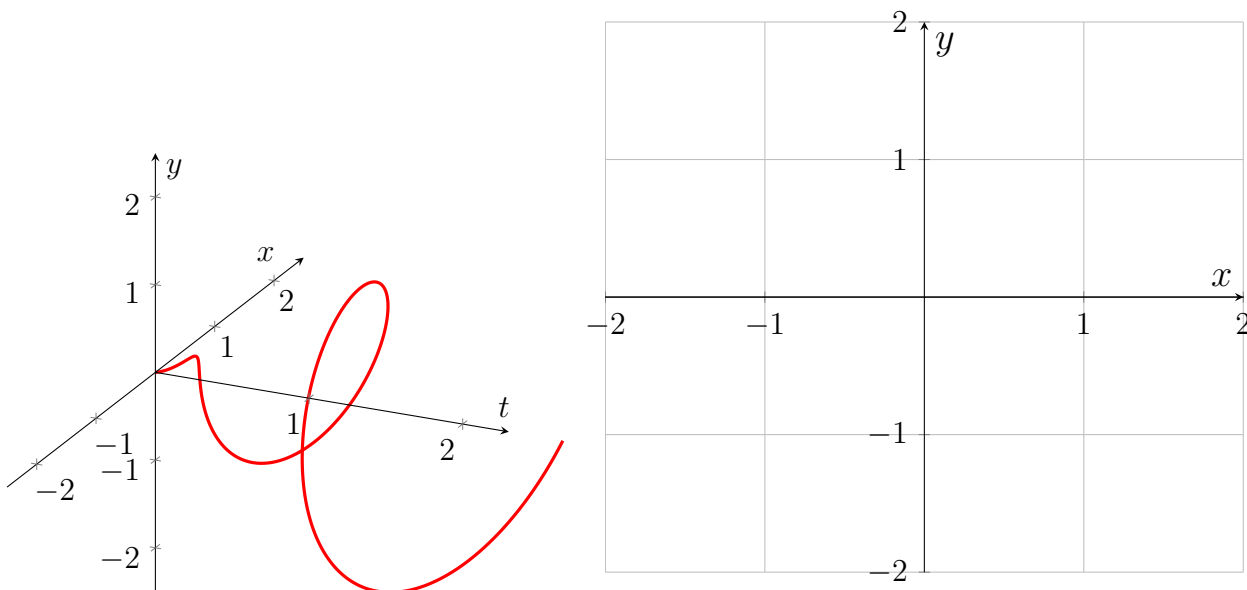
$$t \mapsto f(t) = f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + \cdots + f_n(t)e_n.$$

En pratique, on considère pratiquement toujours le cas  $E = \mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  munis de leur base canonique respective. On note alors :

$$t \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad t \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}$$

En résumé, considérer une fonction vectorielle d'une variable réelle, c'est simplement "regrouper"  $n$  fonctions réelles de la variable réelle.

**Exemple 1.1.1.** Si  $E = \mathbb{R}^2$  et  $I = [0, 2]$  le graphe de  $t \mapsto (t \cos(6t), t \sin(6t))$  est un sous ensemble de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^3$  :



On peut munir  $\mathcal{F}(I, E)$  de l'addition  $\mathcal{F}(I, E) \times \mathcal{F}(I, E) \rightarrow \mathcal{F}(I, E)$  définie par  $(f, g) \mapsto f + g$  avec

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Cette opération est associative, commutative, admet un élément neutre (la fonction nulle  $t \mapsto 0$ ) et chaque  $f \in \mathcal{F}(I, E)$  admet un opposé  $-f$  défini par  $(-f)(t) = -f(t)$ . De plus pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  l'application  $(\alpha, f) \mapsto \alpha f$  est une application  $\mathbb{R} \times \mathcal{F}(I, E) \rightarrow \mathcal{F}(I, E)$  (appelée multiplication externe). On a

$$(\alpha f)(t) = \alpha f(t), \quad \text{pour tout } t \in I.$$

On a le résultat suivant :

**Proposition 1.1.1.** L'espace  $\mathcal{F}(I, E)$  est un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel (de dimension infinie).

*Démonstration.* La démonstration ne pose pas de problème particulier : il faut vérifier un à un les axiomes des  $\mathbb{R}$  espace vectoriel. Noter que c'est le fait que l'espace d'arrivée  $E$  soit un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel qui fait fonctionner le tout.  $\square$

### 1.1.2 Limite et continuité

On note toujours  $E = \mathbb{R}^n$  muni de la base canonique et de la norme euclidienne. Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow E$  alors on note  $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  les fonctions coordonnées pour  $i = 1, \dots, n$ . Avec ces notations on a :

**Définition 1.1.2 (limite).** On dit que  $f$  admet une limite  $\ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} \in E$  quand  $t$  tend vers  $a \in I$  si  $\lim_{t \rightarrow a} f_i(t) = \ell_i$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ . Dans ce cas on a

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow a} f_1(t) \\ \vdots \\ \lim_{t \rightarrow a} f_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} = \ell$$

En bref,  $f$  admet une limite en  $a$  si toutes ses fonctions coordonnées convergent en  $a$ . Cette définition équivaut à  $\lim_{t \rightarrow a} \|f(t) - \ell\| = 0$  et on peut se ramener à la limite d'une fonction réelle. Si la limite existe, elle est unique.

**Remarque 1.** Cette définition s'adapte sans difficultés aux notions de limites à droite (i.e. quand  $t \rightarrow a$  avec  $t > a$ ) noté  $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t)$  ou  $f(a^+)$  et limite à gauche (i.e. quand  $t \rightarrow a$  avec  $t < a$ ) notée  $\lim_{t \rightarrow a^-} f(t)$  ou  $f(a^-)$ . Ainsi, si  $f(a^+) = f(a^-) = \ell$  alors  $f$  admet  $\ell$  pour limite en  $a$ .

De même que dans le cas des fonctions réelles on a la caractérisation suivante :

**Proposition 1.1.2 (caractérisation séquentielle).** Pour que  $f$  admette une limite  $\ell \in E$  en  $a \in I$  il faut et il suffit que pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $I$  telle que  $\lim_n u_n = a \in I$  on ait  $\lim_n f(u_n) = \ell \in E$  (ou autrement dit que pour tout  $i = 1, \dots, n$  on a  $f_i(u_n) \rightarrow \ell_i$  quand  $n \rightarrow +\infty$ ).

On rappelle que la continuité est une notion **locale**. Plus précisément on a :

**Définition 1.1.3.** Soit  $f : I \rightarrow E$  une fonction vectorielle. On dit que  $f$  est **continue** en  $a \in I$  si

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$$

En d'autre termes,  $f$  est continue en  $a \in I$  si

$$\lim_{t \rightarrow a} \|f(t) - f(a)\| = 0$$

Ainsi, une fonction vectorielle est dite continue en  $a$  si toutes ses fonctions coordonnées sont continues en  $a$ . Si l'intervalle  $I$  est minoré (resp. majoré), on peut étendre facilement la définition de continuité à droite (resp. à gauche) pour le réel  $a$  situé à l'extrémité inférieure (resp. supérieure) de  $I$ .

Une fonction est continue sur un intervalle  $I$  si et seulement si elle est continue en tout point de  $I$ . Dans la suite, on notera  $\mathcal{C}^0(I, E)$  l'ensemble des fonctions continues de  $I \subset \mathbb{R}$  dans  $E$ .

**Proposition 1.1.3.** L'espace fonctionnel  $\mathcal{C}^0(I, E)$  est un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel.

*Démonstration.* Même remarque que pour la preuve de la Proposition 1.1.1 □

**Définition 1.1.4.** On dit que  $f : I \rightarrow E$  est **uniformément continue** sur  $I$  si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $t, t' \in I$  on a

$$|t - t'| < \delta \Rightarrow \|f(t) - f(t')\| < \varepsilon.$$

**Proposition 1.1.4 (Théorème de Heine).** Soit  $I$  un intervalle fermé et borné de  $\mathbb{R}$  et  $E = \mathbb{R}^n$ . Toute application continue de  $I$  dans  $E$  est uniformément continue sur  $I$ .

### 1.1.3 Dérivabilité

Soit  $E = \mathbb{R}^n$  muni de la base canonique et de la norme euclidienne. Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow E$  alors on note  $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  les fonctions coordonnées pour  $i = 1, \dots, n$ . Avec ces notations on a :

**Définition 1.1.5 (dérivabilité).** Soit  $f : I \rightarrow E$  une fonction vectorielle. On dit que  $f$  est dérivable en  $a \in I$  si toutes les fonctions coordonnées de  $f$  sont dérivables en  $a$ . On note

$$f'(a) = \begin{pmatrix} f'_1(a) \\ \vdots \\ f'_n(a) \end{pmatrix}$$

La dérivabilité est comme la continuité une définition locale. Une fonction vectorielle  $f$  est dite dérivable sur  $I$  si elle est dérivable en tout point de  $I$ .

Bien sûr, si les fonctions coordonnées sont suffisamment régulières, on peut généraliser la définition aux dérivées d'ordres supérieurs. On alors  $f'' = \begin{pmatrix} f_1'' \\ \vdots \\ f_n'' \end{pmatrix}$  et plus généralement on note

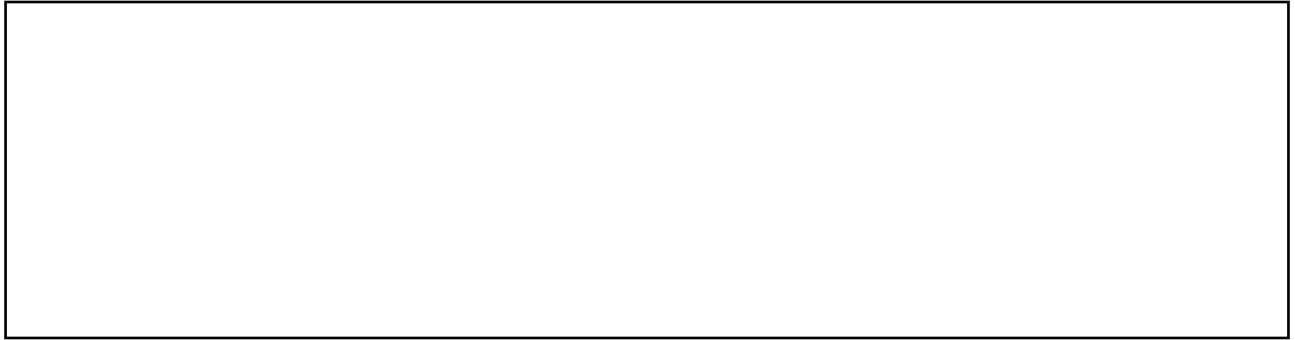
$f^{(k)} = \begin{pmatrix} f_1^{(k)} \\ \vdots \\ f_n^{(k)} \end{pmatrix}$  le vecteurs des dérivées  $k$ -ème. On notera enfin  $\mathcal{C}^k(I, E)$  l'ensemble des fonctions vectorielles admettant une dérivée d'ordre  $k$  continue (*i.e.* dont les fonctions coordonnées sont  $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ ).

On rappelle que le théorème des accroissements finis (TAF) pour une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$  alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Sous cette forme, le théorème ne se généralise pas aux fonctions vectorielles.

**Exemple 1.1.2.** On considère la fonction vectorielle  $t \mapsto (\sin(t), \sin(2t))$ .



On a le résultat plus faible suivant mais qui est valable pour les fonctions vectorielles et numériques :

**Théorème 1.1.1 (Inégalité des accroissements finis).** Soit  $f : [a, b] \rightarrow E$  une fonction vectorielle continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . On suppose qu'il existe  $M \geq 0$  tel que

$$\|f'(x)\| \leq M.$$

pour tout  $x \in ]a, b[$ . Alors

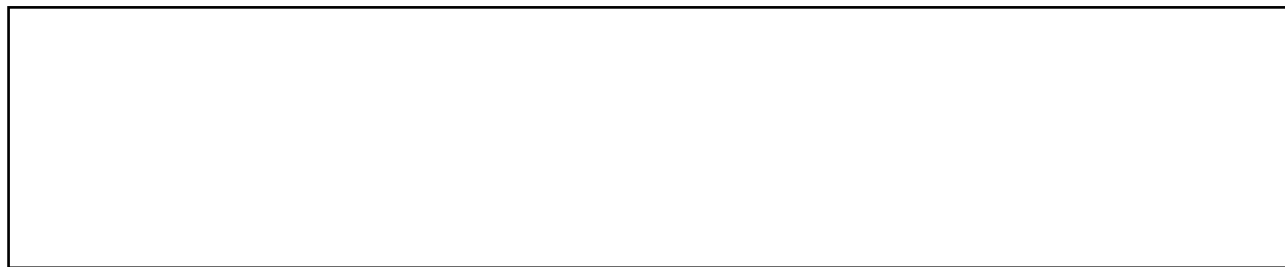
$$\|f(a) - f(b)\| \leq M(b - a).$$

## 1.2 Courbes paramétrées

### 1.2.1 Définitions

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel.

**Définition 1.2.1.** On appelle **courbe paramétrée** (on dit aussi **arc paramétrée**) de  $E$ , un couple  $\Gamma = (I, \phi)$  formé d'un intervalle de  $I$  de  $\mathbb{R}$  et d'une application  $\phi : I \rightarrow E$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . L'image  $\phi(I) \subset E$  de  $\phi$  est le **support** de la courbe paramétrée  $\Gamma$ .

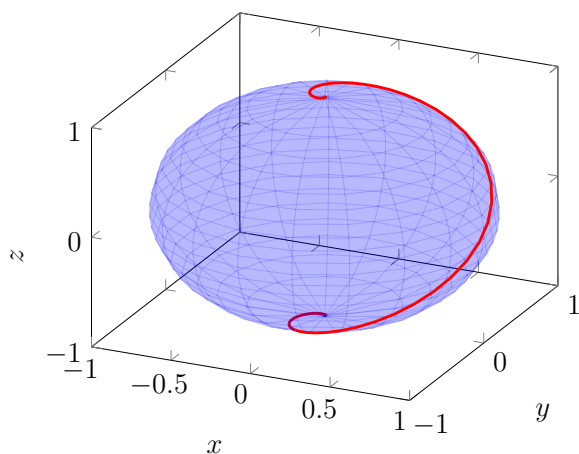


Lorsque  $\phi$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  on dit que la courbe paramétrée est de classe  $\mathcal{C}^k$ .

**Exemple 1.2.1.**



**Exemple 1.2.2.**  $E = \mathbb{R}^3$  et  $\phi : t \mapsto (\cos t, \sin t, \sinh t) \frac{1}{\cosh t}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

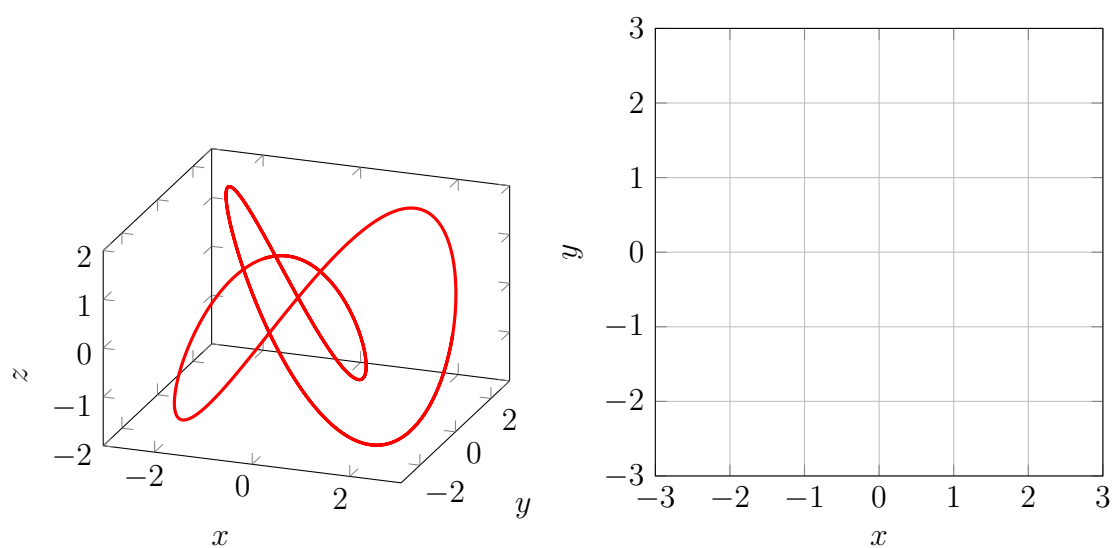


Pour des détails concernant la fonction  $t \mapsto \cosh t$  on pourra voir [http://exo7.emath.fr/cours/ch\\_chainette.pdf](http://exo7.emath.fr/cours/ch_chainette.pdf). Concernant les fonctions de la trigonométrie hyperbolique voir [2] ou [1] Chapitre 10.

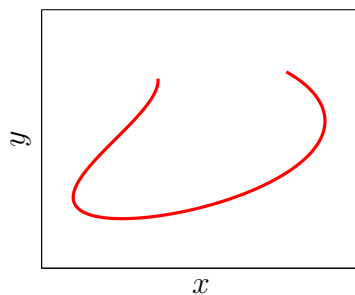




**Exemple 1.2.3.** Le trèfle gauche :  $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) + 2 \cos(2t) \\ \sin(t) - 2 \sin(2t) \\ -2 \sin(3t) \end{pmatrix}$



**Définition 1.2.2.** Une courbe paramétrée continue  $\Gamma = (I, \phi)$  est **simple** si tout point  $M = \phi \in \phi(I)$  a un unique antécédents par  $\phi$ .

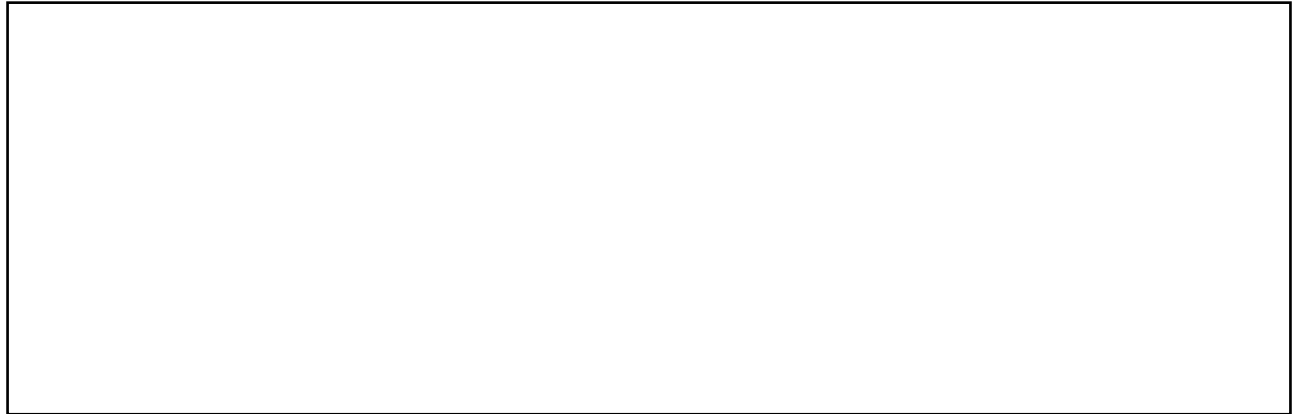


Un point **multiple** est un point qui possède plusieurs antécédents par  $\phi$ .

### 1.2.2 Interprétation cinématique

Soit  $(I, \phi)$  une courbe paramétrée. Si  $t \in I$  désigne le temps :

1.  $\phi(t) \in E$  est la position d'un mobile ponctuel à l'instant  $t \in I$ .
2.  $\phi'(t)$  est la vitesse du mobile.
3.  $\phi''(t)$  est l'accélération du mobile.
4. le support de  $\Gamma$  correspond à la trajectoire du mobile.

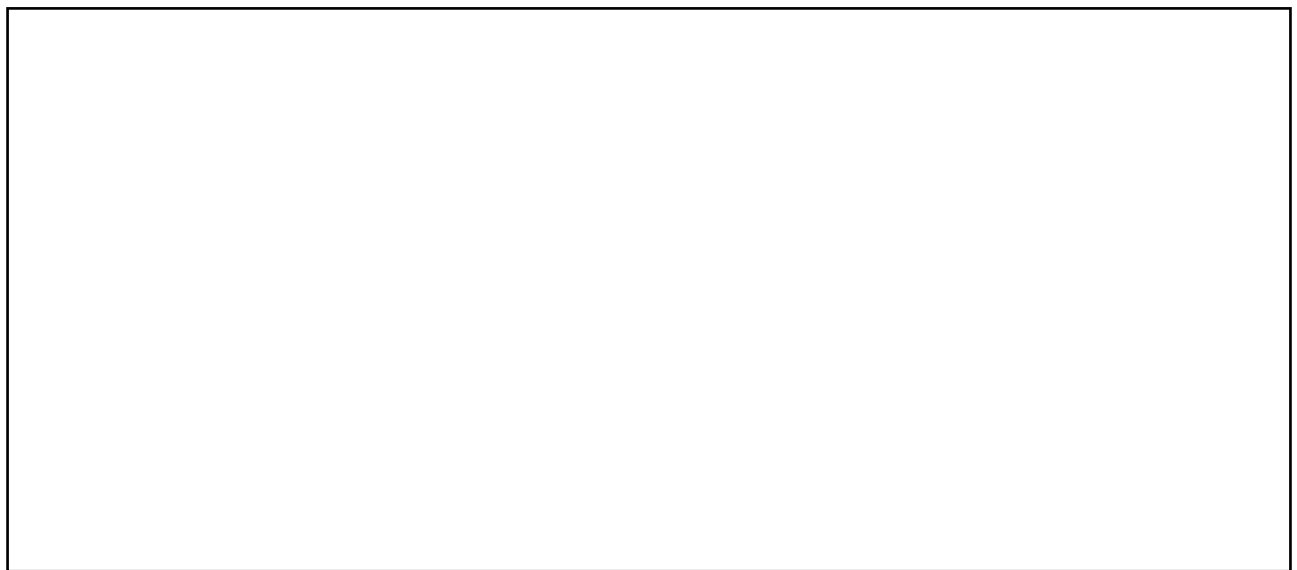


Le chemin parcouru par le mobile ne change pas si on modifie sa vitesse instantanée. Pour formaliser cela on introduit la définition suivante :

**Définition 1.2.3.** Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$  et  $\theta : I \rightarrow J$  une fonction bijective (on note  $\theta^{-1}$  son inverse). Si  $k \in \mathbb{N}^*$ , on dit que  $\theta$  est un  $\mathcal{C}^k$  difféomorphisme si  $\theta$  est de classe  $\mathcal{C}^k(I, J)$  **et**  $\theta^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^k(J, I)$ .

**Remarque 2.** La définition d'un difféomorphisme  $\theta$  implique que les dérivées  $\theta'$  et  $(\theta^{-1})' = \frac{1}{\theta' \circ \theta^{-1}}$  ne s'annulent pas sur leur intervalle de définition respectif.

**Exemple 1.2.4.** L'application  $\theta : t \mapsto t^3$  n'est pas un  $\mathcal{C}^1$  difféomorphisme de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Mais l'application  $t \mapsto t^3 + t$  est un  $\mathcal{C}^1$  difféomorphisme de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .



Les  $\mathcal{C}^k$  difféomorphismes sont les changements de variables ayant une régularité suffisante pour

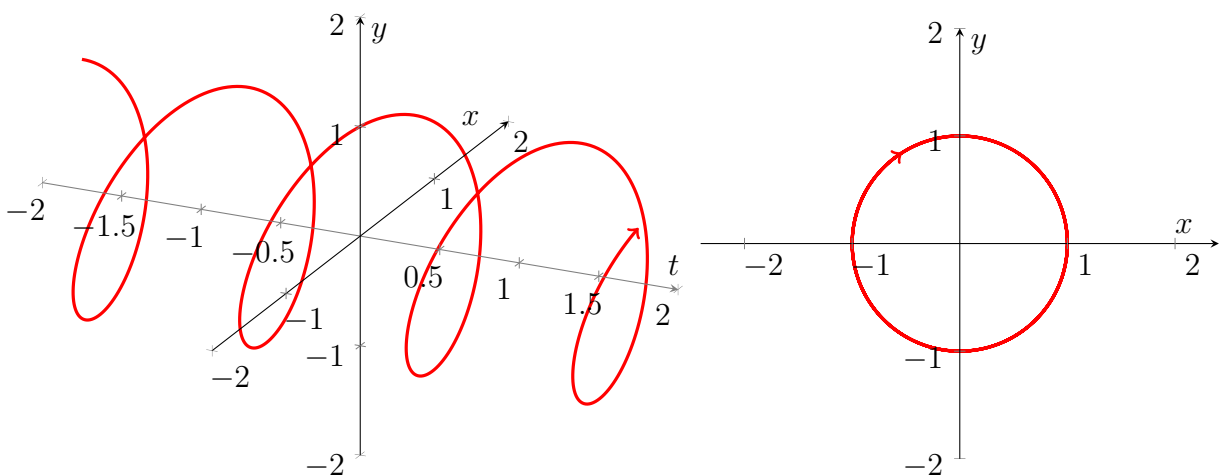
reparamétriser les courbes de classe  $\mathcal{C}^k$  tout en conservant cette régularité. Plus précisément on a :

**Définition 1.2.4 (Paramétrage admissible).** Soit  $\Gamma_0 = (I, \phi)$  une courbe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 1$ ) et  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $\theta : J \rightarrow I$  est un changement de paramètre admissible si c'est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de  $J$  sur  $I$ . On dit que  $\Gamma_1 = (J, \phi \circ \theta)$  est un autre **paramétrage admissible** de  $\Gamma_0$ .

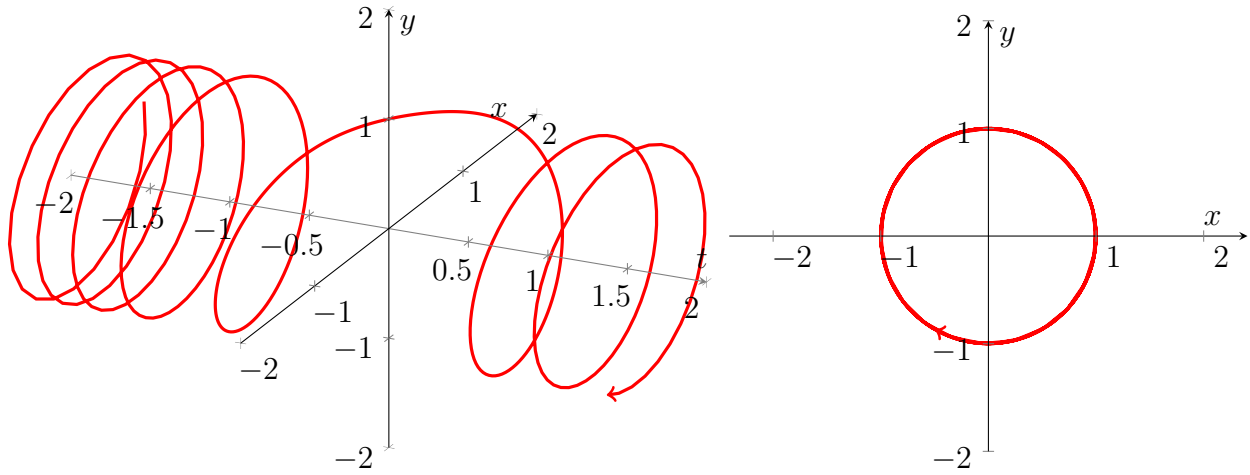


**Remarque 3.** Les arcs paramétrés  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  ont le même support. C'est la vitesse de parcours qui change.

**Exemple 1.2.5.** Voici le graphe de  $\Gamma_0 = (\mathbb{R}, \phi)$  où  $\phi : t \mapsto (\cos(8t), \sin(8t))$  :



Traçons maintenant le graphe de  $\Gamma_1 = (\mathbb{R}, \phi_2)$  où  $\phi_2 : t \mapsto (\cos((3t/2)^3 + 3t/2), \sin((3t/2)^3 + 3t/2))$  :



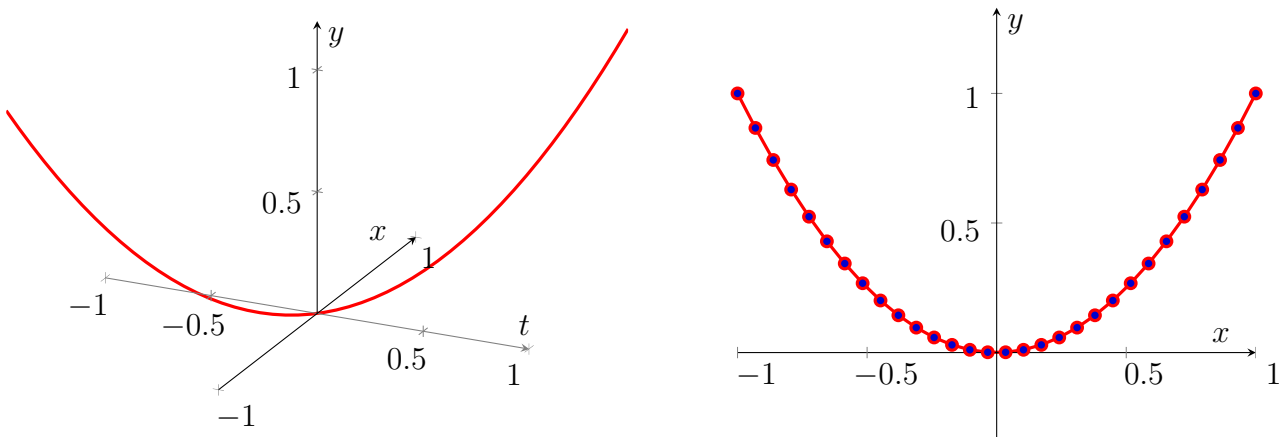
Les deux courbes  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  ont le même support et décrivent toutes deux le cercle unité du plan. Mais les vitesses de parcours sont différentes.

**Définition 1.2.5.** On dit qu'une courbe paramétrée  $\Gamma = (I, \phi)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  est **régulière** si pour tout  $t \in I$   $\phi'(t) \neq 0$ .

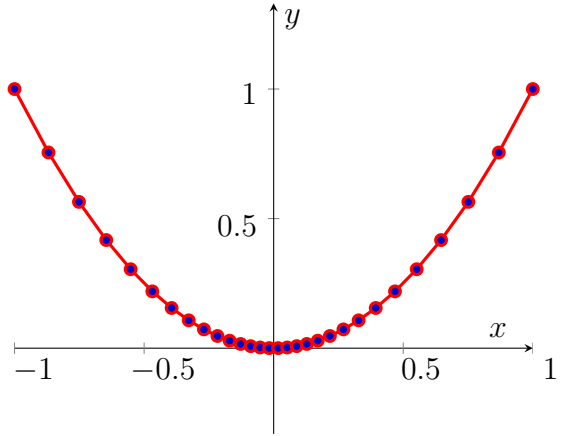
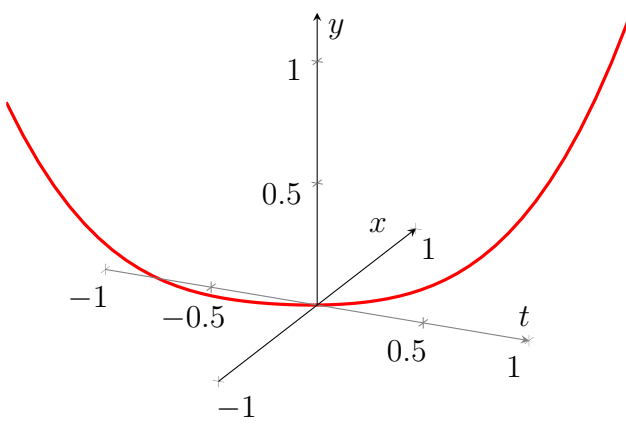
**Remarque 4.** Si  $\Gamma_0 = (I, \phi)$  est une courbe paramétrée régulière et  $\Gamma_1 = (J, \varphi = \phi \circ \theta)$  est une reparamétrisation admissible de  $\Gamma_0$  alors  $\Gamma_1$  est aussi régulière. En effet, comme  $\theta : J \rightarrow I$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme, on a :

$$\forall t \in J, \varphi'(t) = \phi'(\theta(t))\theta'(t) \neq 0.$$

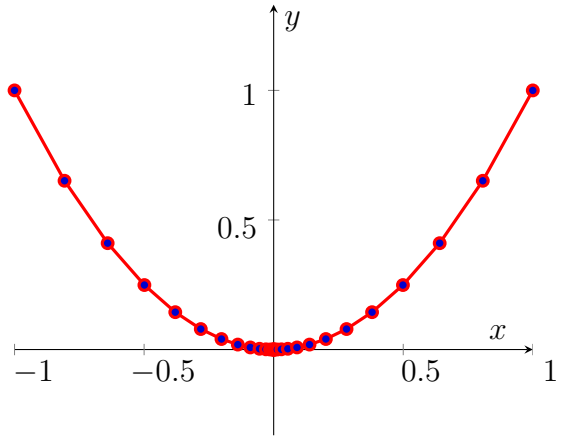
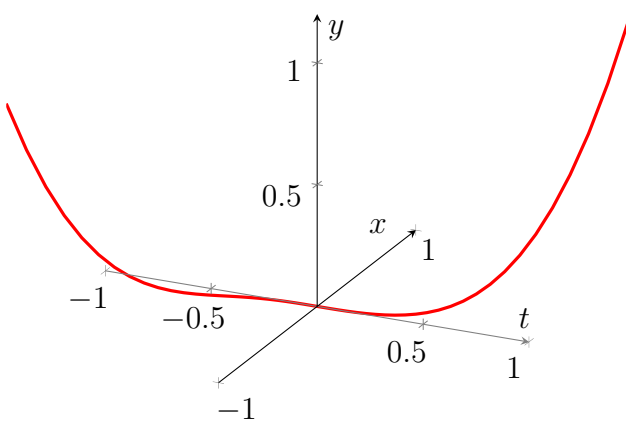
**Exemple 1.2.6.** Considérons la courbe paramétrée définie par  $\phi(t) = (t, t^2)$  pour  $t \in \mathbb{R}$  :



La courbe paramétrée  $\Gamma_1$  définie par  $\phi_1(t) = (t^3+t, (t^3+t)^2)$  avec  $t \in \mathbb{R}$  est une reparamétrisation admissible de  $\Gamma$  :



La courbe paramétrée  $\Gamma_2$  définie par  $\phi_2(t) = (t^3, t^6)$  avec  $t \in \mathbb{R}$  n'est pas une reparamétrisation admissible de  $\Gamma$  :



La courbe géométrique associée est toujours la parabole d'équation  $y = x^2$  mais on a “créé un arrêt” car  $\phi'_3(0)$  est nul.

### 1.3 Étude locale d'un arc

Soit  $\Gamma = (I, \phi)$  une courbe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  suffisamment grand. La formule de Taylor-Young en  $t_0 \in I$  s'écrit

$$\phi(t_0 + h) = \phi(t_0) + h\phi'(t_0) + \frac{h^2}{2}\phi''(t_0) + \cdots + \frac{h^k}{k!}\phi^{(k)}(t_0) + |h|^k\varepsilon(h).$$

où  $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow E$  satisfait  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ . Si les vecteurs dérivées de  $\phi$  ne sont pas tous nul en  $t_0$ , on note :

1.  $p$  le plus petit entier non nul tel que  $\phi^{(p)}(t_0) \neq 0$ .
2.  $q$  le premier entier supérieur à  $p$  tel que  $\phi^{(q)}(t_0)$  ne soit pas colinéaire à  $\phi^{(p)}(t_0)$ . Autrement dit, pour tout entier  $i \in \{p, \dots, q-1\}$ , il existe  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  tel que :  $\phi^{(i)}(t_0) = \lambda_i \phi^{(p)}(t_0)$ .

La formule de Taylor-Young devient :

$$\phi(t_0 + h) = \phi(t_0) + \left( \sum_{i=p}^{q-1} \lambda_i \frac{h^i}{i!} \right) \phi^{(p)}(t_0) + \frac{h^q}{q!} \phi^{(q)}(t_0) + |h|^q \varepsilon(h).$$

où  $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow E$  est tel que  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ .

**Définition 1.3.1.** Le point  $\phi(t_0)$  est un point :

1. **régulier** si  $\phi'(t_0) \neq 0$  (cas  $p = 1$ ).
2. **stationnaire** si  $\phi'(t_0) = 0$  (cas  $p > 1$ ).
3. **birégulier** si  $\phi'(t_0)$  et  $\phi''(t_0)$  ne sont pas colinéaires ( $p = 1$  et  $q = 2$ ).

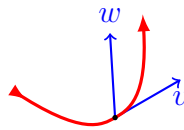
**Définition 1.3.2.** La **tangente** à l'arc  $\Gamma$  au point  $M_0 = \phi(t_0)$  est la droite affine passant par  $M_0$  et dirigée par le vecteur  $\phi^{(p)}(t_0)$ .

**Remarque 5.** L'entier  $p$  et la droite tangente  $\mathbb{R}\phi^{(p)}(t_0)$  sont invariant par changement de paramétrisation admissible.

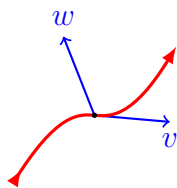
**Exemple 1.3.1.** Retour sur  $E = \mathbb{R}^3$  et  $\phi : t \mapsto (\cos t, \sin t, \sinh t) \frac{1}{\cosh t}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On montre que  $\langle \phi(t), \phi'(t) \rangle = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

**Définition - Proposition 1.3.1.** On se place dans le cas  $E = \mathbb{R}^2$ . On pose  $M_0 = \phi(t_0)$ , les vecteurs  $v = \phi^{(p)}(t_0)$  et  $w = \phi^{(q)}(t_0)$  forment une base de  $\mathbb{R}^2$  et  $(M_0, v, w)$  est un repère du plan.

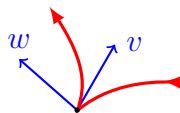
1. Cas  $p$  impair et  $q$  pair : point **ordinaire**.



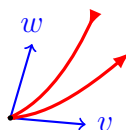
2. Cas  $p$  impair et  $q$  impair : point **d'inflexion**.



3. Cas  $p$  pair et  $q$  impair : point **rebroussement de première espèce**.



4. Cas  $p$  pair et  $q$  pair : point **rebroussement de deuxième espèce**.



## 1.4 Étude globale d'un arc paramétré - Cas plan ( $E = \mathbb{R}^2$ )

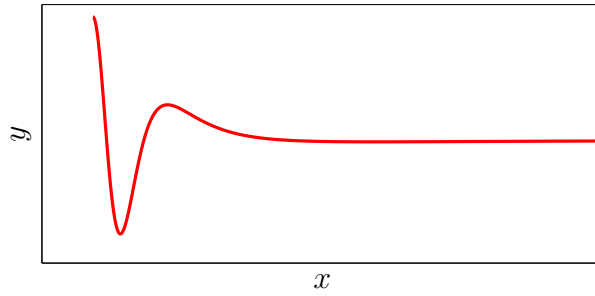
### 1.4.1 Branches infinies

Soit  $\Gamma = (I, \phi)$  un arc paramétré du plan  $\mathbb{R}^2$  muni de la base canonique  $(i, j)$ . Pour  $t \in I$ , on pose  $\phi(t) = (x(t), y(t))$  et  $\|\phi\| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ . Dans ce qui suit,  $a$  désigne une borne de  $I$  (éventuellement infinie).

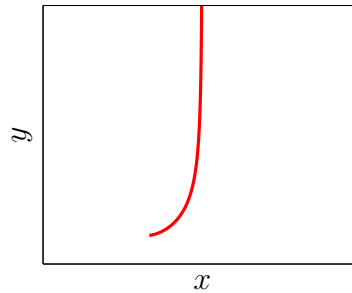
**Définition 1.4.1.** On dit que  $\Gamma$  admet une **branche infinie** lorsque  $t \rightarrow a$  si  $\lim_{t \rightarrow a} \|\phi(t)\| = +\infty$

Plusieurs cas se présentent

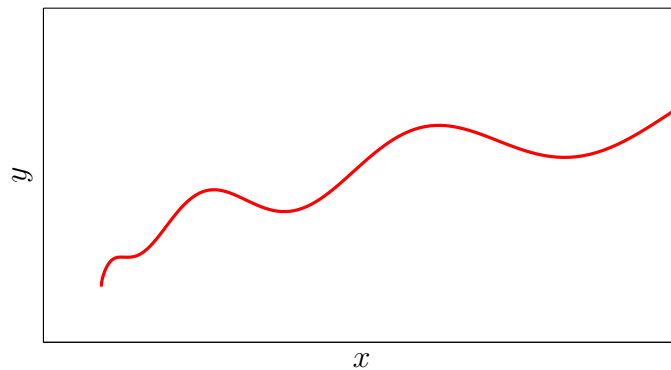
1. Si  $\lim_{t \rightarrow a} |x(t)| = +\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow a} |y(t)| = y_0$ , alors la courbe  $\Gamma$  admet la droite horizontale d'équation  $y = y_0$  pour **asymptote**.



2. Si  $\lim_{t \rightarrow a} |x(t)| = x_0$  et  $\lim_{t \rightarrow a} |y(t)| = +\infty$ , alors la courbe  $\Gamma$  admet la droite verticale d'équation  $x = x_0$  pour **asymptote**.

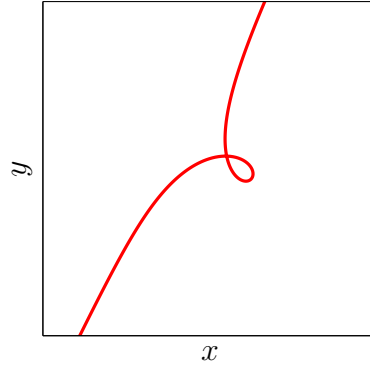


3. On suppose que  $\lim_{t \rightarrow a} |x(t)| = +\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow a} |y(t)| = +\infty$ , alors
- (a) Si  $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ , on dit que  $\Gamma$  admet une branche parabolique de direction  $\mathbb{R}i$ .



- (b) Si  $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ , on dit que  $\Gamma$  admet une branche parabolique de direction  $\mathbb{R}j$ .
- (c) Si  $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha$ , deux cas se présentent
- i. Si  $\lim_{t \rightarrow a} y(t) - \alpha x(t) = \pm\infty$ , on dit que  $\Gamma$  admet une branche parabolique de direction  $\mathbb{R}(i + \alpha j)$ .
  - ii. Si  $\lim_{t \rightarrow a} y(t) - \alpha x(t) = \beta$ , on dit que  $\Gamma$  admet la droite d'équation  $y = \alpha x + \beta$  pour asymptote. Dans ce cas, on étudie la position de la courbe  $\Gamma$  par rapport à l'asymptote. Pour cela, on étudie le signe de  $(y(t) - \alpha x(t) - \beta)$  au voisinage de  $a$ .





## 1.5 Longueur et abscisse curviligne

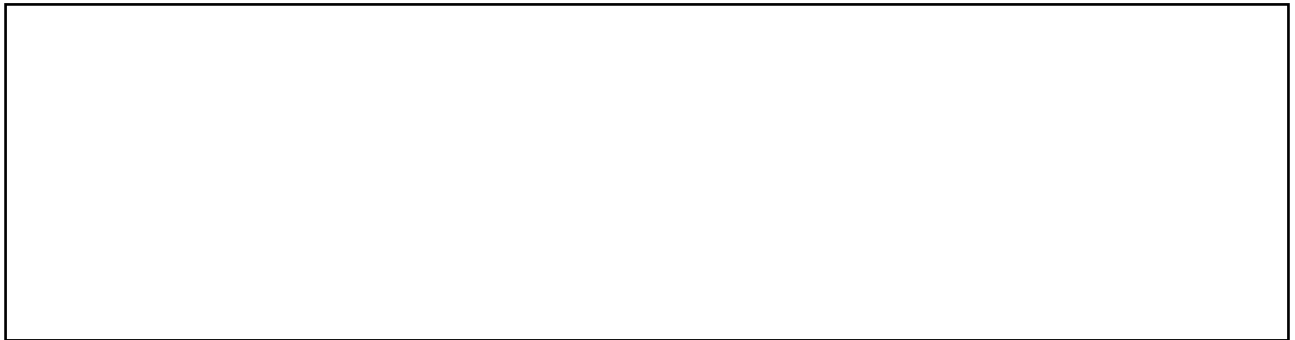
**Définition 1.5.1.** Soit une courbe  $\Gamma$  paramétrée par  $\phi : [a, b] \rightarrow E$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . La **longueur** de  $\Gamma$  est le nombre réel

$$L = \int_a^b \|\phi'(t)\| dt.$$

La longueur est indépendante du choix de la paramétrisation.

**Remarque 6.** On définit généralement la longueur d'une courbe paramétrée  $\Gamma$  comme suit : si l'ensemble des longueurs  $L_\sigma > 0$  des lignes polygonales inscrites dans  $\Gamma$  où  $\sigma$  décrit les subdivisions de  $[a, b]$  admet une borne supérieure  $L = \sum_\sigma L_\sigma$ , on dit que l'arc  $\Gamma$  est **rectifiable** (noter que l'ensemble des courbes rectifiables est plus grand que l'ensemble des courbes  $\mathcal{C}^1$ ). Le réel  $L$  est appelé **longueur** de  $\Gamma$ . Les deux définitions coïncident dans le cas des courbes  $\mathcal{C}^1$ .

**Exemple 1.5.1.** Calcul de la longueur de l'ellipse paramétrée par  $(x(t), y(t)) = (2 \cos t, \sin t)$ .



**Définition 1.5.2 (Abscisse curviligne).** Soit  $\Gamma = (I, \phi)$  un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^1$ . Au réel  $t_0$  correspond la fonction

$$\begin{aligned} s : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_{t_0}^t \|\phi'(u)\| du. \end{aligned}$$

appelée **abscisse curviligne** d'origine  $\phi(t_0)$  sur l'arc  $\Gamma$  orienté dans le sens des  $t$  croissants.

**Exemple 1.5.2.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère l'arc  $\Gamma : t \mapsto (\cos t, \sin t, \sinh t) \frac{1}{\cosh t}$  défini sur  $I = \mathbb{R}$ .



**Proposition 1.5.1.** Soit  $\Gamma = (I, \phi)$  un arc paramétré régulier de classe  $\mathcal{C}^1$ . L'abscisse curviligne sur  $\Gamma$  permet de définir un nouveau paramétrage admissible de cet arc.

*Démonstration.*



□

**Interprétation cinématique :** paramétrer par l'abscisse curviligne c'est parcourir le support de  $\Gamma$  à vitesse constante 1.

## 1.6 Plan d'étude

Voici comment peut s'organiser l'étude d'une courbe paramétrée  $\Gamma = (I, \phi)$ . On suppose ici que  $\phi$  est dans  $\mathbb{R}^2$  (c'est donc une courbe du plan) et on note  $t \mapsto x(t)$  et  $t \mapsto y(t)$  les fonctions

coordonnées.

### Domaine de définition de la courbe.

La position du point  $\phi(t)$  est défini si et seulement si ses coordonnées  $x(t)$  et  $y(t)$  sont définies. Il faut ensuite déterminer un **domaine d'étude** (plus petit que le domaine de définition) grâce aux symétries, périodicités...

### Vecteur dérivé.

Calcul des dérivées des coordonnées de  $t \mapsto \phi(t)$ . Les valeurs de  $t$  pour lesquelles  $x'(t) = 0$  (et  $y'(t) \neq 0$ ) fournissent les points à tangente verticale et les valeurs de  $t$  pour lesquelles  $y'(t) = 0$  (et  $x'(t) \neq 0$ ) fournissent les points à tangente horizontale. Enfin, les valeurs de  $t$  pour lesquelles  $x'(t) = y'(t) = 0$  fournissent les points singuliers, en lesquels on n'a encore aucun renseignement sur la tangente.

### Tableau de variations conjointes.

L'étude de  $x'$  et  $y'$  permet de connaître les variations de  $x$  et  $y$ . Reporter les résultats obtenus des **variations conjointes** des fonctions  $x$  et  $y$  dans un tableau. Cela donne alors un tableau à compléter :

$t$	
$x'(t)$	
$x$	
$y$	
$y'(t)$	

Ce tableau est le tableau des variations des deux fonctions  $x$  et  $y$  **ensemble**. Il nous montre l'évolution du point  $\phi(t)$ .

### Étude des points singuliers.

À l'aide de la partie précédente, on peut facilement déterminer les points stationnaires (les temps  $t$  où l'on a  $x'(t) = y'(t) = 0$ ). On peut alors étudier le comportement local de la courbe en ces points (rebroussement, inflexion, *etc.*...).

### Étude des branches infinies.

#### Construction méticuleuse de la courbe.

On place dans l'ordre les deux axes et les unités. On construit ensuite toutes les droites asymptotes. On place ensuite les points importants avec leur tangente (points à tangente verticale, horizontale, points singuliers, points d'intersection avec une droite asymptote,...). Tout est alors en place pour la construction.

### Points multiples.

On cherche les points multiples s'il y a lieu. On attend souvent de commencer la construction de la courbe pour voir s'il y a des points multiples et si on doit les chercher.

