Université Montpellier 2 Année 2014-2015
HLMA 410

Contrôle continu 2

Durée 1h30. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. (Question de cours) Soit E et F deux espaces vectoriels normés et $a \in E$.

1. Donner la définition de la dérivée directionnelle d'une fonction $f : E \to F$. Une fonction qui admet des dérivées partielles en a est-elle nécessairement continue en a (justifier) ?

2. Donner la définition d'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de E sur F. En donner une caractérisation (autrement dit, énoncer le "théorème d'inversion globale").

Exercice 2. Forme quadratique Les formes quadratiques suivantes sont elles positives ? sont elles définies ? :

1. $q(x, y, z, t) = 2xz + 2xy + x^2 + 2tx$

2. $q(x,y,z) = -2(x+y)^2 + (x+y+z)^2 + (x+y-z)^2$

3. $q(x,y) = e^{\sqrt{\pi}}x^2 + \ln(1+e)y^2 - xy$

Exercice 3. (Étude de fonctions de plusieurs variables) Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^m y^2}{x^2+y^2} \text{ si } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

   (b) Calculer le gradient de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$;

(c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$;

(d) Que peut-on conclure sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

2. Étude de la fonction en $(0,0)$:
   (a) Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

   (b) La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$ pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$? si oui, les calculer.

(c) Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

(d) Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0, 0)$?