Géométrie et Toplogie

Benjamin Charlier & Matthieu Hillairet

20 janvier 2020

Chapitre 1

Courbes paramétrées

TD4 : Cinématique

Un disque de rayon R et de centre C se déplace dans le plan $(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0)$, en restant tangent à l'axe $(O,\vec{x}_0)$. On note $(C;\vec{x}_1,\vec{y}_1)$ le repère lié au disque. On note x_c l'abscisse de C et on pose $\boldsymbol{\theta}=(\vec{x}_0,\vec{x})$

1) Quel est le nombre de degrés de liberté du disque.

2) Déterminer la vitesse de C et d'un point M quelconque du disque.

3) On note I_d le point du disque qui à l'instant t coïncide avec I, le point géométrique de contact entre le disque et l'axe $(O,\vec{x}_0)$. On note I_S le point de l'axe $(O,\vec{x}_0)$ coïncidant à l'instant t avec I.

Calculer la vitesse par rapport au repère R_0 : $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$, des points I_d , I et I_S.

4) Calculer la vitesse de glissement du disque sur l'axe $(O,\vec{x}_0)$, définie par :

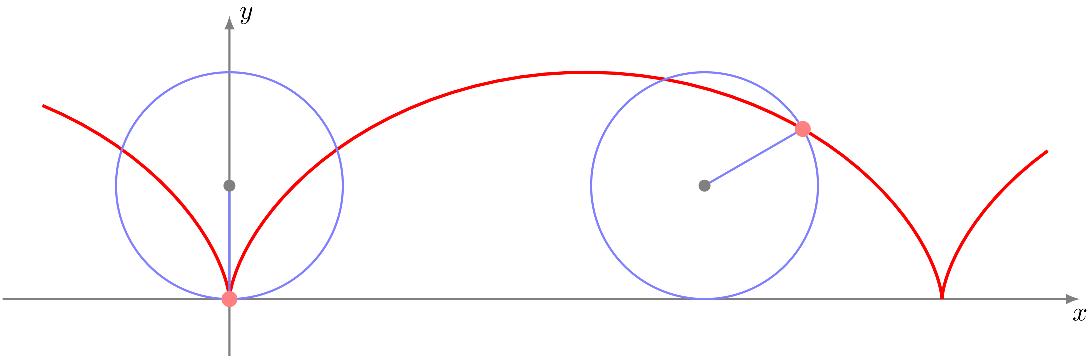
$$\vec{V}_g(I)=\vec{V}(I_d\in D/R_0)-\vec{V}(I_S\in(0,\vec{x}_0)/R_0)\ .$$

5) On suppose que le disque roule sans glisser sur l'axe $(O,\vec{x}_0)$. Ecrire la condition de roulement sans glissement.

6) En gardant l'hypothèse d'un roulement sans glissement, calculer la vitesse d'un point M quelconque du disque, en utilisant la relation de torseur cinématique et le point I_d. En déduire le mouvement du disque.

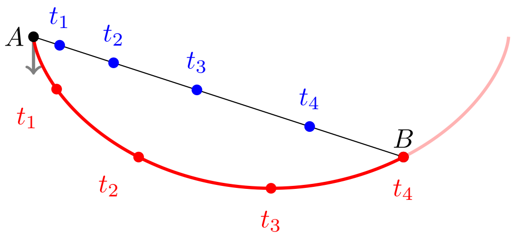
$$\begin{cases} x(t) & = & r(t - \sin t) \\ y(t) & = & r(1 - \cos t) \end{cases}$$

où r est le rayon de la roue.



La cycloïde a des propriétés remarquables. Par exemple, la cycloïde renversée est une courbe **brachistochrone** :

c'est-à-dire que c'est la courbe qui permet à une bille (soumis à la seule gravité) d'arriver le plus vite possible d'un point A à un point B. Contrairement à ce que l'on pourrait croire ce n'est pas une ligne droite, mais bel et bien un arc de cycloïde. Sur le dessin suivant les deux billes sont lâchées en A à l'instant t_0, l'une sur le segment $[AB]$; elle aura donc une accélération constante. La seconde parcourt la cycloïde renversée, ayant une tangente verticale en A et passant par B. La bille accélère beaucoup au début et elle atteint B bien avant l'autre bille (à l'instant t_4 sur le dessin). Notez que la bille passe même par des positions en-dessous de B (par exemple en t_3).



Dans ce chapitre, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique. La norme $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne : pour $x \in E$ ayant pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Tous les résultats de ce chapitre s'étendent aux $\mathbb{R}$ espaces vectoriels de dimension finie munis d'une base quelconque.

1.1 Fonctions vectorielles d'une variable réelle

1.1.1 Définition et structure d'espace vectoriel

> **Définition 1.1.1.** Soit $E = \mathbb{R}^n$. Une fonction vectorielle d'une variable réelle est une application définie sur un sous ensemble $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans E. On note $t \mapsto f(t)$. L'ensemble des applications $I \to E$ se notera $\mathcal{F}(I, E)$ ou parfois E^I.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$. Alors toute $f \in \mathcal{F}(I, E)$ est définie par ses **fonctions coordonnées** $f_i : I \to \mathbb{R}$:

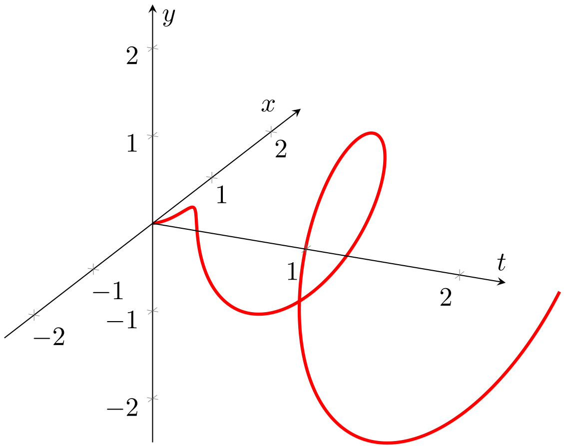
$$t \mapsto f(t) = f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + \cdots + f_n(t)e_n.$$

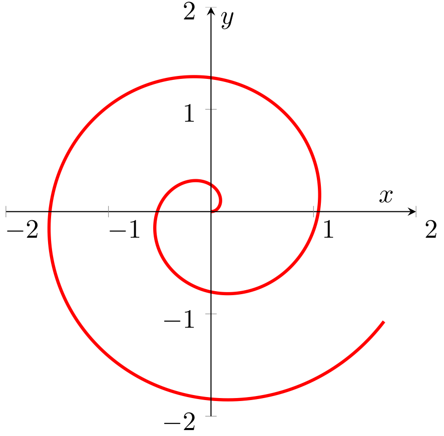
En pratique, on considère pratiquement toujours le cas $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ munis de leur base canonique respective. On note alors :

$$t \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}$$

En résumé, considérer une fonction vectorielle d'une variable réelle, c'est simplement "regrouper" n fonctions réelles de la variable réelle.

Exemple 1.1.1. Si $E = \mathbb{R}^2$ et $I = [0, 2]$ le graphe de $t \mapsto (t\cos(6t), t\sin(6t))$ est un sous ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^3$:





On peut munir $\mathcal{F}(I,E)$ de l'addition $\mathcal{F}(I,E)\times\mathcal{F}(I,E)\to\mathcal{F}(I,E)$ définie par $(f,g)\mapsto f+g$ avec

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t),\qquad \text{pour tout } t\in I.$$

Cette opération est associative, commutative, admet un élément neutre (la fonction nulle $t\mapsto 0$) et chaque $f\in\mathcal{F}(I,E)$ admet un opposé $-f$ définit par $(-f)(t)=-f(t)$. De plus pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ l'application $(\alpha,f)\mapsto\alpha f$ est une application $\mathbb{R}\times\mathcal{F}(I,E)\to\mathcal{F}(I,E)$ (appelée multiplication externe). On a

$$(\alpha f)(t)=\alpha f(t),\qquad \text{pour tout } t\in I.$$

On a le résultat suivant :

Proposition 1.1.1. L'espace $\mathcal{F}(I,E)$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel (de dimension infinie).

Démonstration. La démonstration ne pose pas de problème particulier : il faut vérifier un à un les axiomes des $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Noter que c'est le fait que l'espace d'arrivée E soit un $\mathbb{R}$ espace vectorielqui fait fonctionner le tout. $\square$

1.1.2 Limite et continuité

On note toujours $E = \mathbb{R}^n$ muni de la base canonique et de la norme euclidienne. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to E$ alors on note $f_i : I \to \mathbb{R}$ les fonctions coordonnées pour $i = 1, \cdots, n$. Avec ces notations on a :

Définition 1.1.2 (limite). On dit que f admet une limite $\ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} \in E$ quand t tend vers $a \in I$ si $\lim\limits_{t \to a} f_i(t) = \ell_i$ pour tout $i = 1, \cdots, n$. Dans ce cas on a

$$\lim_{t \to a} f(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{t \to a} f_1(t) \\ \vdots \\ \lim\limits_{t \to a} f_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} = \ell$$

En bref, f admet une limite en a si toutes ses fonctions coordonnées convergent en a. Cette définition équivaut à $\lim\limits_{t \to a} \|f(t) - \ell\| = 0$ et on peut se ramener à la limite d'une fonction réelle. Si la limite existe, elle est unique.

Remarque 1. Cette définition s'adapte sans difficultés aux notions de limites à droite (*i.e.* quand $t \to a$ avec $t > a$)

noté $\lim_{t \to a^+} f(t)$ ou $f(a^+)$ et limite à gauche (*i.e.* quand $t \to a$ avec $t < a$) notée $\lim_{t \to a^-} f(t)$ ou $f(a^-)$. Ainsi, si $f(a^+) = f(a^-) = \ell$ alors f admet ℓ pour limite en a.

De même que dans le cas des fonctions réelles on a la caractérisation suivante :

> **Proposition 1.1.2 (caractérisation séquentielle).** Pour que f admette une limite $\ell \in E$ en $a \in I$ il faut et il suffit que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I telle que $\lim_n u_n = a \in I$ on ait $\lim_n f(u_n) = \ell \in E$ (ou autrement dit que pour tout $i = 1, \cdots, n$ on a $f_i(u_n) \to \ell_i$ quand $n \to +\infty$).

On rappelle que la continuité est une notion **locale**. Plus précisément on a :

Définition 1.1.3. Soit $f : I \to E$ une fonction vectorielle. On dit que f est **continue** en $a \in I$ si

$$\lim_{t \to a} f(t) = f(a)$$

En d'autre termes, f est continue en $a \in I$ si

$$\lim_{t \to a} \|f(t) - f(a)\| = 0$$

Ainsi, une fonction vectorielle est dite continue en a si toutes ses fonctions coordonnées sont continues en a. Si l'intervalle I est minoré (resp. majoré), on peut étendre facilement la définition de continuité à droite (resp. à gauche) pour le réel a situé à l'extrémité inférieure (resp. supérieure) de I.
Une fonction est continue sur un intervalle I si et seulement si elle est continue en tout point de I. Dans la suite, on notera $\mathcal{C}^0(I, E)$ l'ensemble des fonctions continues de $I \subset \mathbb{R}$ dans E.

Proposition 1.1.3. L'espace fonctionnel $\mathcal{C}^0(I, E)$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Démonstration. Même remarque que pour la preuve de la Proposition 1.1.1 $\square$

Définition 1.1.4. On dit que $f : I \to E$ est **uniformément continue** sur I si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $t, t' \in I$ on a

$$|t - t'| < \delta \Rightarrow \|f(t) - f(t')\| < \varepsilon.$$

Proposition 1.1.4 (Théorème de Heine). Soit I un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^n$. Toute application continue de I dans E est uniformément continue sur I.

1.1.3 Dérivabilité

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de la base canonique et de la norme euclidienne. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to E$ alors on note $f_i : I \to \mathbb{R}$ les fonctions coordonnées pour $i = 1, \cdots, n$. Avec ces notations on a :

Définition 1.1.5 (dérivabilité). Soit $f : I \to E$ une fonction vectorielle. On dit que f est dérivable en $a \in I$ si toutes les fonctions coordonnées de f sont dérivables en a. On note

$$f'(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_n'(a) \end{pmatrix}$$

La dérivabilité est comme la continuité une définition locale. Une fonction vectorielle f est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.

Bien sûr, si les fonctions coordonnées sont suffisamment régulières, on peut généraliser la définition aux dérivées d'ordres supérieurs. On alors $f'' = \begin{pmatrix} f_1'' \\ \vdots \\ f_n'' \end{pmatrix}$ et plus généralement on note $f^{(k)} = \begin{pmatrix} f_1^{(k)} \\ \vdots \\ f_n^{(k)} \end{pmatrix}$ le vecteurs des dérivées k-ème. On notera enfin $\mathcal{C}^k(I, E)$ l'ensemble des fonctions vectorielles admettant une dérivée d'ordre k continue (*i.e.* dont les fonctions coordonnées sont $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$).

On rappelle que le théorème des accroissements finis (TAF) pour une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Sous cette forme, le théorème ne se généralise pas aux fonctions vectorielles.

Exemple 1.1.2. On considère la fonction vectorielle $t \mapsto (\sin(t), \sin(2t))$.

On a le résultat plus faible suivant mais qui est valable pour les fonctions vectorielles et numériques :

Théorème 1.1.1 (Inégalité des accroissements finis). Soit $f : [a, b] \to E$ une fonction vectorielle continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe $M \geq 0$ tel que

$$\|f'(x)\| \leq M.$$

pour tout $x \in]a, b[$. ALors

$$\|f(a) - f(b)\| \leq M(b - a).$$

1.2 Courbes paramétrées

1.2.1 Définitions

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

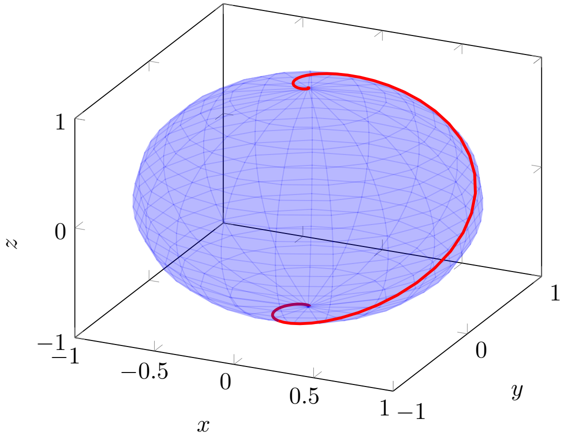
> **Définition 1.2.1.** On appelle **courbe paramétrée** (on dit aussi **arc paramétrée**) de E, un couple $\Gamma = (I, \phi)$ formé d'un intervalle de I de $\mathbb{R}$ et d'une application $\phi : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. L'image $\phi(I) \subset E$ de ϕ est le **support** de la courbe paramétrée Γ.

Lorsque ϕ est de classe $\mathcal{C}^k$ on dit que la courbe paramétrée est de classe $\mathcal{C}^k$.

Exemple 1.2.1.

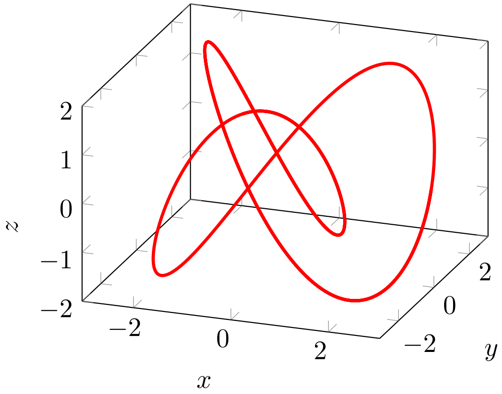
1. Soit $E = \mathbb{R}^3$, un point $A \in E$ et $v \in E$ alors $\phi : t \mapsto A + tv$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ est une droite affine passant par A et de direction v.
2. Soit $I = [0, 2\pi]$, $E = \mathbb{R}^2$ et $a, b > 0$. Alors $\phi : t \mapsto (a\cos(t), b\sin(t))$ est une ellipse.

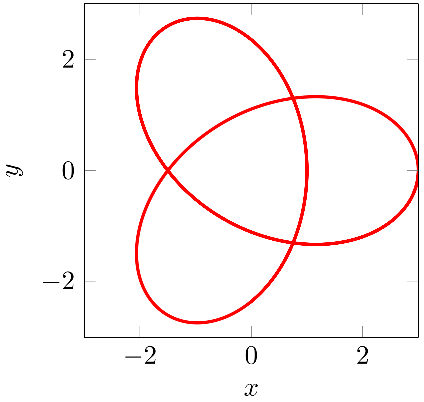
Exemple 1.2.2. $E = \mathbb{R}^3$ et $\phi : t \mapsto (\cos t, \sin t, \sinh t)\, \frac{1}{\cosh t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.



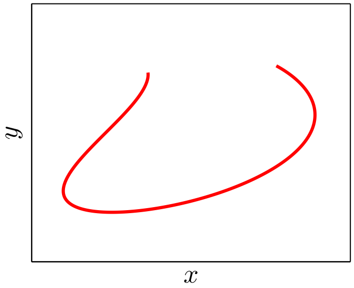
Pour des détails concernant la fonction $t \mapsto \cosh t$ on pourra voir `http://exo7.emath.fr/cours/ch_chainette.pdf`. Concernant les fonctions de la trigonométrie hyperbolique voir [**?**] ou [**?**] Chapitre 10.

Exemple 1.2.3. Le trèfle gauche : $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) + 2\cos(2t) \\ \sin(t) - 2\sin(2t) \\ -2\sin(3t) \end{pmatrix}$





Définition 1.2.2. Une courbe paramétrée continue $\Gamma = (I, \phi)$ est **simple** si tout point $M = \phi \in \phi(I)$ a un unique antécédents par ϕ.



Un point **multiple** est un point qui possède plusieurs antécédent par ϕ.

1.2.2 Interprétation cinématique

Soit (I, ϕ) une courbe paramétrée. Si $t \in I$ désigne le temps :

1. $\phi(t) \in E$ est la position d'un mobile ponctuel à l'instant $t \in I$.
2. $\phi'(t)$ est la vitesse du mobile.
3. $\phi''(t)$ est l'accélération du mobile.
4. le support de Γ correspond à la trajectoire du mobile.

Le chemin parcouru par le mobile ne change pas si on modifie sa vitesse instantanée. Pour formaliser cela on introduit la définition suivante :

> **Définition 1.2.3.** Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $\theta : I \to J$ une fonction bijective (on note θ^{-1} son inverse). Si $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que θ est un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme si θ est de classe $\mathcal{C}^k(I, J)$ **et** θ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k(J, I)$.

Remarque 2. La définition d'un difféomorphisme θ implique que les dérivées θ' et $(\theta^{-1})' = \frac{1}{\theta' \circ \theta^{-1}}$ ne s'annulent pas sur leur intervalle de définition respectif.

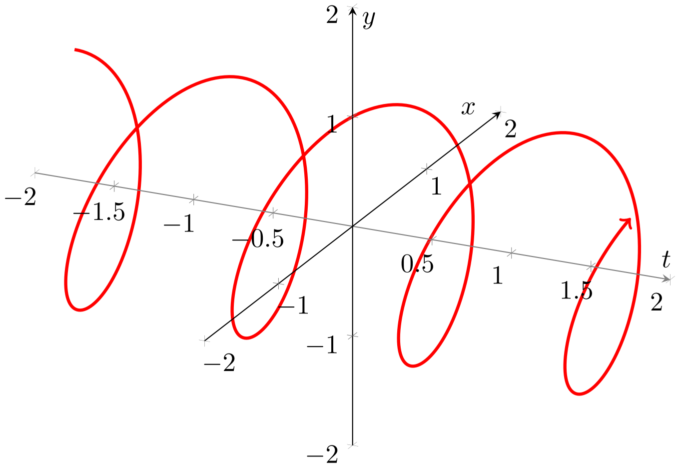
Exemple 1.2.4. L'application $\theta : t \mapsto t^3$ n'est pas un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Mais l'application $t \mapsto t^3 + t$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

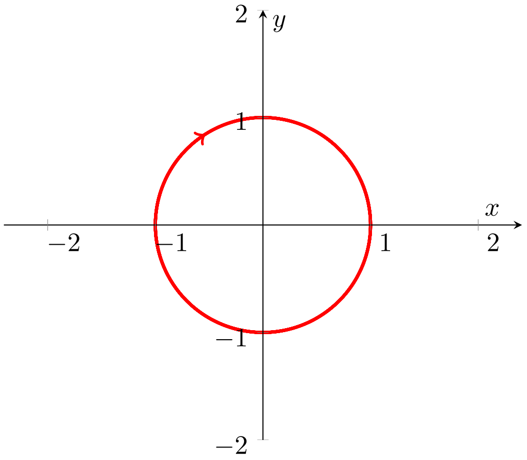
Les $\mathcal{C}^k$ difféomorphismes sont les changements de variables ayant une régularité suffisante pour reparamétrer les courbe de classe $\mathcal{C}^k$ tout en conservant cette régularité. Plus précisément on a :

> **Définition 1.2.4 (Paramétrage admissible).** Soit $\Gamma_0 = (I, \phi)$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ et J un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que $\theta : J \to I$ est un changement de paramètre admissible si c'est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de J sur I. On dit que $\Gamma_1 = (J, \phi \circ \theta)$ est un autre **paramétrage admissible** de Γ_0.

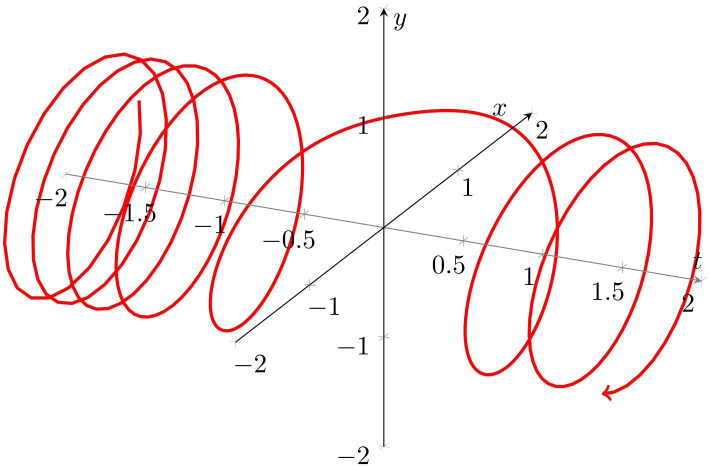
Remarque 3. Les arcs paramétrés Γ_0 et Γ_1 ont le même support. C'est la vitesse de parcours qui change.

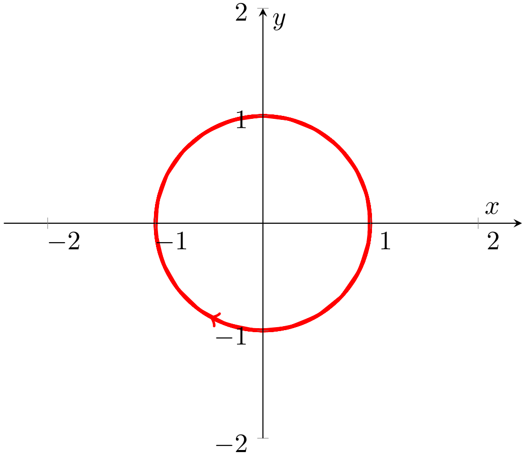
Exemple 1.2.5. Voici le graphe de $\Gamma_0 = (\mathbb{R}, \phi)$ où $\phi : t \mapsto (\cos(8t), \sin(8t))$:





Traçons maintenant le graphe de $\Gamma_1 = (\mathbb{R}, \phi_2)$ où $\phi_2 : t \mapsto (\cos((3t/2)^3 + 3t/2), \sin((3t/2)^3 + 3t/2))$:





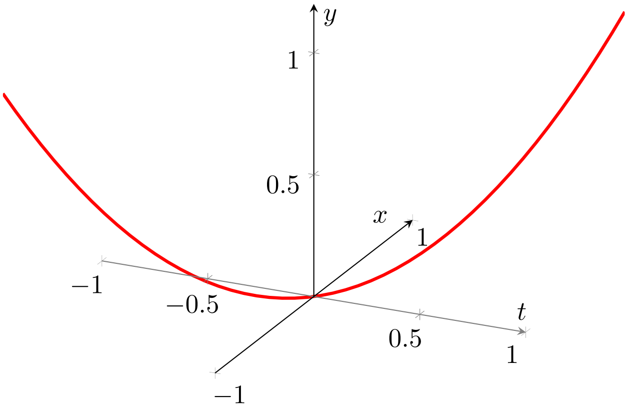
Les deux courbes Γ_0 et Γ_1 ont le même support et décrivent toutes deux le cercle unité du plan. Mais les vitesses de parcours sont différentes.

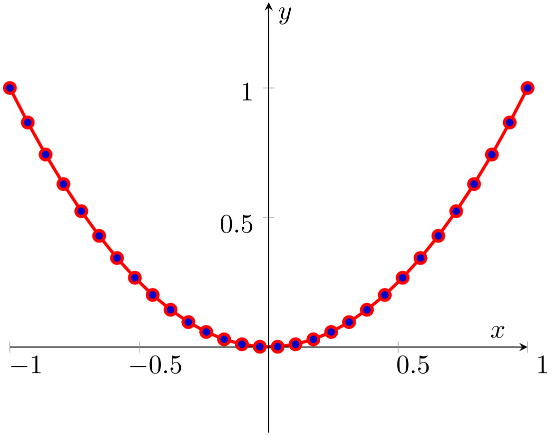
Définition 1.2.5. On dit qu'une courbe paramétrée $\Gamma = (I, \phi)$ de classe $\mathcal{C}^1$ est **régulière** si pour tout $t \in I$ $\phi'(t) \neq 0$.

Remarque 4. Si $\Gamma_0 = (I, \phi)$ est une courbe paramétrée régulière et $\Gamma_1 = (J, \varphi = \phi \circ \theta)$ est une reparamétrisation admissible de Γ_0 alors Γ_1 est aussi régulière. En effet, comme $\theta : J \to I$ est une $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, on a :

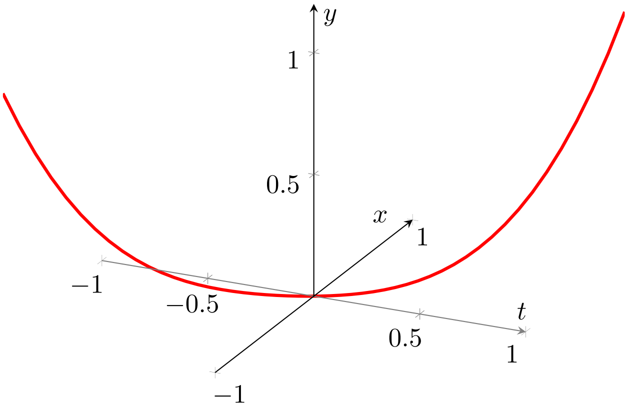
$$\forall t \in J, \varphi'(t) = \phi'(\theta(t))\theta'(t) \neq 0.$$

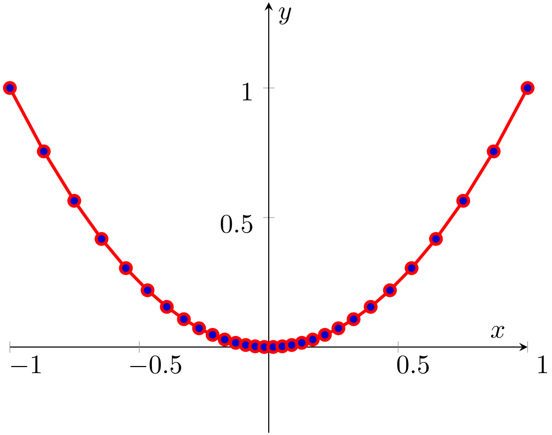
Exemple 1.2.6. Considérons la courbe paramétrée définie par $\phi(t) = (t, t^2)$ pour $t \in \mathbb{R}$:



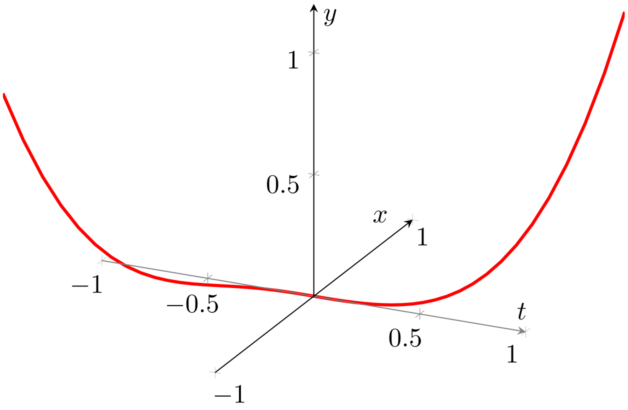


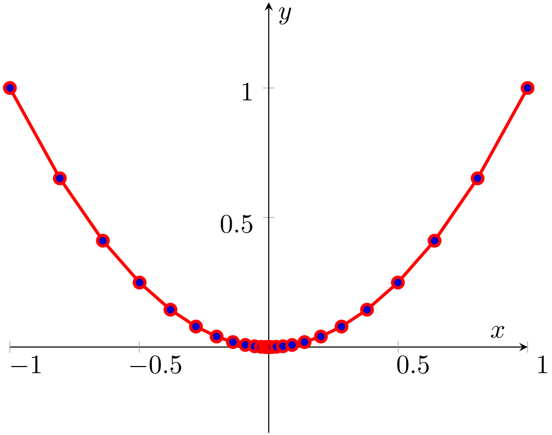
La courbe paramétrée Γ_1 définie par $\phi_1(t) = (t^3 + t, (t^3 + t)^2)$ avec $t \in \mathbb{R}$ est une reparamétrisation admissible de Γ :





La courbe paramétrée Γ_2 définie par $\phi_2(t) = (t^3, t^6)$ avec $t \in \mathbb{R}$ n'est pas une reparamétrisation admissible de Γ :





La courbe géométrique associée est toujours la parabole d'équation $y = x^2$ mais on a "créé un arrêt" car $\phi_3'(0)$ est nul.

1.3 Étude locale d'un arc

Soit $\Gamma = (I, \phi)$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand. La formule de Taylor-Young en $t_0 \in I$ s'écrit

$$\phi(t_0 + h) = \phi(t_0) + h\phi'(t_0) + \frac{h^2}{2}\phi''(t_0) + \cdots + \frac{h^k}{k!}\phi^{(k)}(t_0) + |h|^k \varepsilon(h).$$

où $\varepsilon : \mathbb{R} \to E$ satisfait $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Si les vecteurs dérivées de ϕ ne sont pas tous nul en t_0, on note :

1. p le plus petit entier non nul tel que $\phi^{(p)}(t_0) \neq 0$.
2. q le premier entier supérieur à p tel que $\phi^{(q)}(t_0)$ ne soit pas colinéaire à $\phi^{(p)}(t_0)$. Autrement dit, pour tout entier $i \in \{p, \cdots, q-1\}$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que : $\phi^{(i)}(t_0) = \lambda_i \phi^{(p)}(t_0)$.

La formule de Taylor-Young devient :

$$\phi(t_0 + h) = \phi(t_0) + \left(\sum_{i=p}^{q-1} \lambda_i \frac{h^i}{i!}\right) \phi^{(p)}(t_0) + \frac{h^q}{q!}\phi^{(q)}(t_0) + |h|^q \varepsilon(h).$$

où $\varepsilon : \mathbb{R} \to E$ est tel que $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Définition 1.3.1. Le point $\phi(t_0)$ est un point :

1. **régulier** si $\phi'(t_0) \neq 0$ (cas $p = 1$).
2. **stationnaire** si $\phi'(t_0) = 0$ (cas $p > 1$).
3. **birégulier** si $\phi'(t_0)$ et $\phi''(t_0)$ ne sont pas colinéaires ($p = 1$ et $q = 2$).

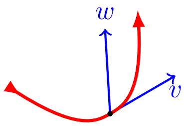
Définition 1.3.2. La **tangente** à l'arc Γ au point $M_0 = \phi(t_0)$ est la droite affine passant par M_0 et dirigée par le vecteur $\phi^{(p)}(t_0)$.

Remarque 5. L'entier p et la droite tangente $\mathbb{R}\phi^{(p)}(t_0)$ sont invariant par changement de paramétrisation admissible.

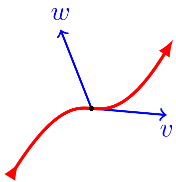
Exemple 1.3.1. Retour sur $E = \mathbb{R}^3$ et $\phi : t \mapsto (\cos t, \sin t, \sinh t)\ \frac{1}{\cosh t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On montre que $\langle \phi(t), \phi'(t) \rangle = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Définition - Proposition 1.3.1. On se place dans le cas $E = \mathbb{R}^2$. On pose $M_0 = \phi(t_0)$, les vecteurs $v = \phi^{(p)}(t_0)$ et $w = \phi^{(q)}(t_0)$ forment un base de $\mathbb{R}^2$ et (M_0, v, w) est un repère du plan.

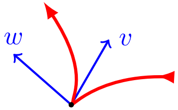
1. Cas p impair et q pair : point **ordinaire**.



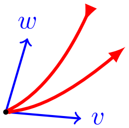
2. Cas p impair et q impair : point **d'inflexion**.



3. Cas p pair et q impair : point **rebroussement de première espèce**.



4. Cas p pair et q pair : point **rebroussement de deuxième espèce**.



1.4 Étude globale d'un arc paramétré - Cas plan ($E = \mathbb{R}^2$)

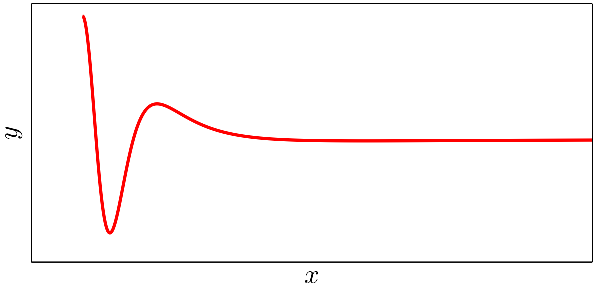
1.4.1 Branches infinies

Soit $\Gamma = (I, \phi)$ un arc paramétré du plan $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique (i, j). Pour $t \in I$, on pose $\phi(t) = (x(t), y(t))$ et $\|\phi\| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$. Dans ce qui suit, a désigne une borne de I (éventuellement infinie).

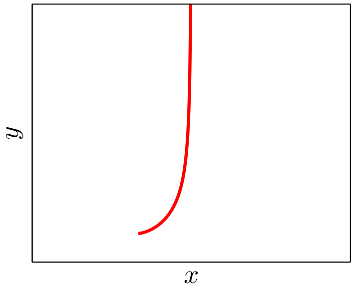
Définition 1.4.1. On dit que Γ admet une **branche infinie** lorsque $t \to a$ si $\lim_{t\to a}\|\phi(t)\| = +\infty$

Plusieurs cas se présentent

1. Si $\lim_{t \to a} |x(t)| = +\infty$ et $\lim_{t \to a} |y(t)| = y_0$, alors la courbe Γ admet la droite horizontale d'équation $y = y_0$ pour **asymptote**.

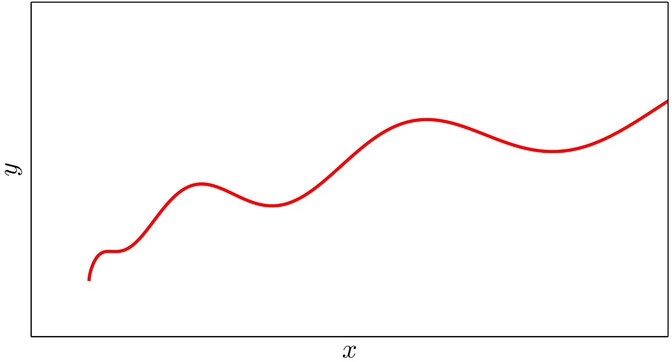


2. Si $\lim_{t\to a}|x(t)| = x_0$ et $\lim_{t\to a}|y(t)| = +\infty$, alors la courbe Γ admet la droite verticale d'équation $x = x_0$ pour **asymptote**.



3. On suppose que $\lim_{t\to a} |x(t)| = +\infty$ et $\lim_{t\to a} |y(t)| = +\infty$, alors

(a) Si $\lim_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, on dit que Γ admet une branche parabolique de direction $\mathbb{R}i$.

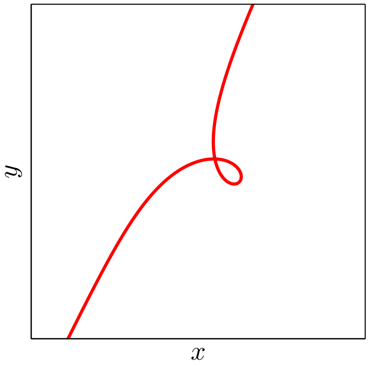


(b) Si $\lim_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, on dit que Γ admet une branche parabolique de direction $\mathbb{R}j$.

(c) Si $\lim_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha$, deux cas se présentent

i. Si $\lim_{t\to a} y(t) - \alpha x(t) = \pm\infty$, on dit que Γ admet une branche parabolique de direction $\mathbb{R}(i + \alpha j)$.

ii. Si $\lim_{t\to a} y(t) - \alpha x(t) = \beta$, on dit que Γ admet la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ pour asymptote. Dans ce cas, on étudie la position de la courbe Γ par rapport à l'asymptote. Pour cela, on étudie le signe de $(y(t) - \alpha x(t) - \beta)$ au voisinage de a.



1.5 Longueur et abscisse curviligne

Définition 1.5.1. Soit une courbe Γ paramétrée par $\phi : [a, b] \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$. La **longueur** de Γ est le nombre réel

$$L = \int_a^b \|\phi'(t)\| dt.$$

La longueur est indépendante du choix de la paramétrisation.

Remarque 6. On définit généralement la longueur d'une courbe paramétrée Γ comme suit : si l'ensemble des longueurs $L_\sigma > 0$ des lignes polygonales inscrites dans Γ où σ décrit les subdivisions de $[a, b]$ admet une borne supérieure $L = \sum_\sigma L_\sigma$, on dit que l'arc Γ est **rectifiable** (noter que l'ensemble des courbes rectifiables est plus grand que l'ensemble des courbes $\mathcal{C}^1$). Le réel L est appelé **longueur** de Γ. Les deux définitions coïncident dans le cas des courbes $\mathcal{C}^1$.

Exemple 1.5.1. Calcul de la longueur de l'ellipse paramétrée par $(x(t), y(t)) = (2\cos t, \sin t)$.

Définition 1.5.2 (Abscisse curviligne). Soit $\Gamma = (I, \phi)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$. Au réel t_0 correspond la fonction

$$\begin{aligned} s : I &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_{t_0}^{t} \|\phi'(u)\| du. \end{aligned}$$

appelée **abscisse curviligne** d'origine $\phi(t_0)$ sur l'arc Γ orienté dans le sens des t croissants.

Exemple 1.5.2. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'arc $\Gamma : t \mapsto (\cos t, \sin t, \sinh t)\,\frac{1}{\cosh t}$ défini sur $I = \mathbb{R}$.

Proposition 1.5.1. Soit $\Gamma = (I, \phi)$ un arc paramétré régulier de classe $\mathcal{C}^1$. L'abscisse curviligne sur Γ permet de définir un nouveau paramétrage admissible de cet arc.

Démonstration. $\square$

Interprétation cinématique : paramétrer par l'abscisse curviligne c'est parcourir le support de Γ à vitesse constante

1.

1.6 Plan d'étude

Voici comment peut s'organiser l'étude d'une courbe paramétrée $\Gamma = (I, \phi)$. On suppose ici que ϕ est dans $\mathbb{R}^2$ (c'est donc une courbe du plan) et on note $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ les fonctions coordonnées.

Domaine de définition de la courbe.

La position du point $\phi(t)$ est défini si et seulement si ses coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont définies. Il faut ensuite déterminer un **domaine d'étude** (plus petit que le domaine de définition) grâce aux symétries, périodicités...

Vecteur dérivé.

Calcul des dérivées des coordonnées de $t \mapsto \phi(t)$. Les valeurs de t pour lesquelles $x'(t) = 0$ (et $y'(t) \neq 0$) fournissent les points à tangente verticale et les valeurs de t pour lesquelles $y'(t) = 0$ (et $x'(t) \neq 0$) fournissent les points à tangente horizontale. Enfin, les valeurs de t pour lesquelles $x'(t) = y'(t) = 0$ fournissent les points singuliers, en lesquels on n'a encore aucun renseignement sur la tangente.

Tableau de variations conjointes.

L'étude de x' et y' permet de connaître les variations de x et y. Reporter les résultats obtenus des **variations conjointes** des fonctions x et y dans un tableau. Cela donne alors un tableau à compléter :

t	
$x'(t)$	
x	
y	
$y'(t)$	

Ce tableau est le tableau des variations des deux fonctions x et y **ensemble**. Il nous montre l'évolution du point $\phi(t)$.

Étude des points singuliers.

À l'aide de la partie précédente, on peut facilement déterminer les points stationnaires (les temps t où l'on a $x'(t) = y'(t) = 0$). On peut alors étudier le comportement local de la courbe en ces points (rebroussement, inflexion, *etc.*...).

Étude des branches infinies.

Construction méticuleuse de la courbe.

On place dans l'ordre les deux axes et les unités. On construit ensuite toutes les droites asymptotes. On place ensuite les points importants avec leur tangente (points à tangente verticale, horizontale, points singuliers, points d'intersection avec une droite asymptote,...).Tout est alors en place pour la construction.

Points multiples.

On cherche les points multiples s'il y a lieu. On attend souvent de commencer la construction de la courbe pour voir s'il y a des points multiples et si on doit les chercher.

Chapitre 2

Normes sur $\mathbb{R}^n$ et limites

2.1 Normes et distances

Le but de se chapitre est de formaliser et de donner un sens précis à l'assertion "x est proche de y" quand $x, y \in \mathbb{R}^n$. On sait déjà mesurer les distances dans $\mathbb{R}^n$. Si $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont deux points de $\mathbb{R}^n$. La distance est différente suivant que l'on mesure la trajectoire

- "à vol d'oiseau" : c'est la distance ℓ^2 ou euclidienne.
- "taxi cab" : distance ℓ^1 ou "city norm".

2.1.1 Normes

Définition 2.1.1. Soit un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E. Une **norme** est une application $N : E \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty[$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Séparation : $\forall u \in E, N(u) \geq 0$ et $N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$,
2. Homogénéité : $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda u) = |\lambda| \, N(u)$,
3. Inégalité triangulaire : $\forall (u, v) \in E^2, N(u + v) \leq N(u) + N(v)$.

Dans la suite, on notera le plus souvent $N(\cdot) = \|\cdot\|$. L'espace E muni d'une norme $\|\cdot\|$ est appelé un espace normé et est noté $(E, \|\cdot\|)$.

Exemple 2.1.1. Si $E = \mathbb{R}^n$ et si $u = (x_1, \cdots, x_n) \in E$, on définit les normes usuelles suivantes :

1. La norme 1 est $\|u\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$
2. La norme 2 est $\|u\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ dispose de propriétés particulières (norme euclidienne).
3. La norme infinie est $\|u\|_\infty = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}$

Proposition 2.1.1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. On a pour tout $u, v \in E$

$$\big| \|u\| - \|v\| \big| \leq \|u - v\| .$$

Démonstration. □

2.1.2 Distances

Définition 2.1.2. Soit E un ensemble, une **distance** est une application $d : E \times E \to [0, +\infty[$ telle que

1. Symétrie : $\forall u, v \in E$ on a $d(u, v) = d(v, u)$
2. Séparabilité : $d(u, v) = 0$ si et seulement si $u = v$
3. Inégalité triangulaire : $\forall u, v, w \in E$ on a $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$

Un espace E muni d'une distance d est appelé espace métrique. On note (E, d). Un espace normé est un espace métrique :

Proposition 2.1.2. Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé. L'application $d : E \times E \to [0, +\infty[$ définie par $d(u, v) = \|u - v\|$ est une distance sur E.

Démonstration. $\square$

Remarque 7. Toutes les distances ne sont pas issues de normes : dans $E = \mathbb{R}$ on définit $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $d(x, y) = \text{atan}(|x - y|)$.

2.1.3 Boules ouvertes et fermées

La notion de norme généralise la notion de valeur absolue dans $\mathbb{R}$ aux espaces vectoriels. La définition suivante généralise la notion d'intervalle ouvert et fermé dans $\mathbb{R}$ aux espaces vectoriels :

Définition 2.1.3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé, $a \in E$ et un nombre réel $r > 0$ fixé. L'ensemble

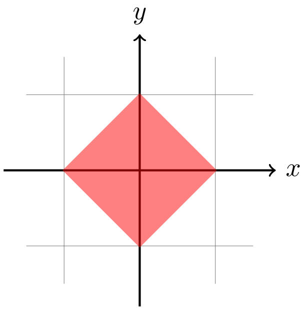
$$B_r(a) = \{u \in E, \|u - a\| < r\}$$

est appelé **boule ouverte** de centre a et de rayon r. L'ensemble

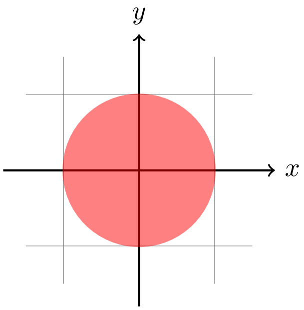
$$\overline{B_r}(a) = \{u \in E, \|u - a\| \leq r\}$$

est appelé **boule fermée** de centre a et de rayon r.

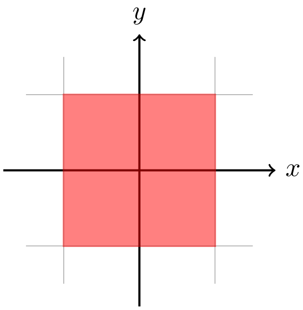
Exemple 2.1.2. Voici les boules unités fermées dans $E = \mathbb{R}^2$ pour :



La norme $\|\cdot\|_1$

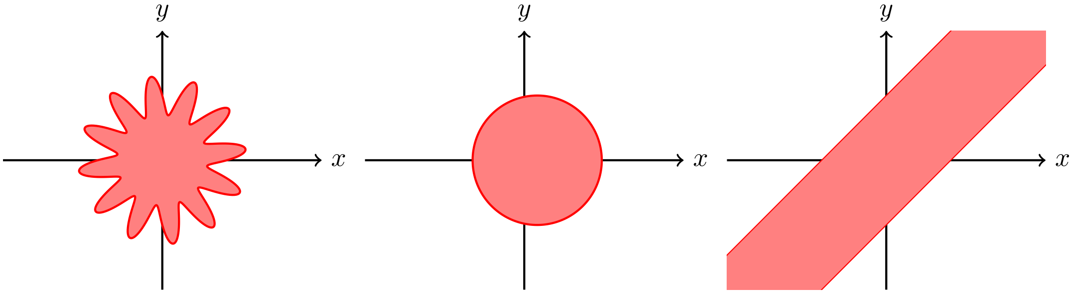


La norme $\|\cdot\|_2$



La norme $\|\cdot\|_\infty$

Exemple 2.1.3. Existe-t-il une norme dont la boule est l'un des ensembles suivants :



2.1.4 Normes équivalentes

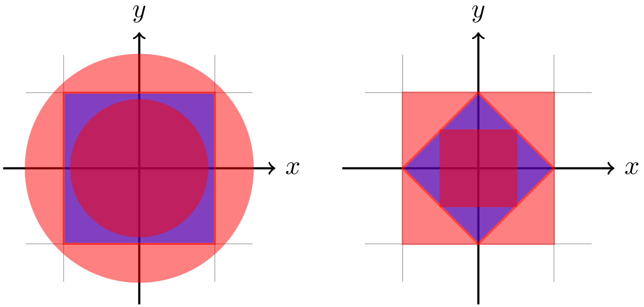
Définition 2.1.4 (Normes équivalentes). On dit que deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|' : E \to \mathbb{R}$ sont équivalentes (et on note $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$) s'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que, $\forall u \in E$

$$\alpha \|u\| \leq \|u\|' \leq \beta \|u\|$$

Proposition 2.1.3. La relation $\sim$ définit une relation d'équivalence sur les normes.

Démonstration. $\square$

On a l'interprétation géométrique suivante en termes de boules :



$\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_\infty$ $\qquad$ $\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_1$

Théorème 2.1.1. Dans un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie, toute les normes sont équivalentes.

Démonstration. Admis dans ce cours. $\square$

Remarque 8. Ce n'est pas vrai en dimension infinie.

2.2 Limites de suites

Définition 2.2.1 (Limite d'une suite). Soit $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points dans $(E, \|\cdot\|)$ et $\ell \in E$. On dit que la suite u converge vers ℓ (ou la suite u admet ℓ pour limite, ou u tend vers ℓ) au sens de la norme $\|\cdot\|$ si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

1. la suite de réels $\|u_k - \ell\|$ tend vers 0 ($i.e.$ $\lim_{k\to\infty} \|u_k - \ell\| = 0$)
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, k \geq N \Rightarrow \|u_k - \ell\| < \varepsilon$

Deux normes équivalentes ont les mêmes suites convergentes :

Proposition 2.2.1. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et $\|\cdot\|, \|\cdot\|' : E \to [0, +\infty[$ deux normes équivalentes sur E. Pour toutes suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{k\to+\infty} u_k = \ell$ pour $\|\cdot\|$,
2. $\lim_{k\to+\infty} u_k = \ell$ pour $\|\cdot\|'$.

Démonstration. □

Dans $\mathbb{R}^n$ une suite converge si toutes les suites de ses coordonnées convergent :

Proposition 2.2.2. Soit $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} u_{k,1} \\ \vdots \\ u_{k,n} \end{pmatrix}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^n$ et $\ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{k\to+\infty} u_k = \ell$ dans $\mathbb{R}^n$
2. Pour tout $i = 1, \cdots, n$ on a $\lim_{k\to+\infty} u_{k,i} = \ell_i$ dans $\mathbb{R}$

Démonstration. $\square$

Remarque 9. La limite est donc, si elle existe, unique.

2.3 Notions élémentaires de topologie

2.3.1 Ensembles ouverts et ensembles fermés

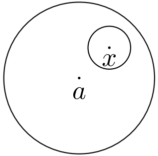
Définition 2.3.1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé. On dit que

1. une partie $\mathcal{U}$ de E est un **ouvert** pour la norme $\|\cdot\|$ si pour tout $a \in \mathcal{U}$, on peut trouver un réel $r > 0$ tel que la boule $B_r(a) \subset \mathcal{U}$.
2. une partie $\mathcal{F}$ de E est un **fermé** pour la norme $\|\cdot\|$ si le complémentaire $E \setminus \mathcal{F} = \mathcal{F}^c = \{u \in E | u \notin \mathcal{F}\}$ est une partie ouverte.

Exemple 2.3.1.

Proposition 2.3.1. Dans un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé de dimension finie, une boule ouverte est un ouvert et une boule fermée est un fermé.

Démonstration. Soit $B_r(a)$ une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ et $x \in B_r(a)$. La boule $B_\rho(x)$ où $\rho = \frac{r-\|a-x\|}{2}$ est incluse dans



$B_r(a)$. □

Si deux normes sont équivalentes, alors les parties ouvertes (et fermées) sont les mêmes :

Proposition 2.3.2. Soit $\mathcal{U}$ une partie d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E et $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes équivalentes sur E. La partie $\mathcal{U}$ est un ouvert pour $\|\cdot\|$ si et seulement si $\mathcal{U}$ est un ouvert pour $\|\cdot\|'$.

Démonstration. □

Proposition 2.3.3 (Caractérisation séquentielle des fermés). Soit $\mathcal{F}$ une partie non vide d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

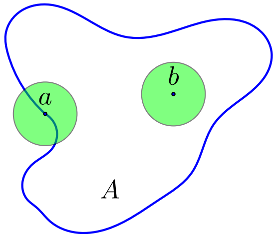
1. La partie $\mathcal{F}$ est fermée.
2. Pour toute suite convergente de points de $\mathcal{F}$ alors la limite est dans $\mathcal{F}$.

Démonstration. $\square$

2.3.2 Position d'un point

Définition 2.3.2. Soit A une partie de $(E, \|\cdot\|)$ et $a \in E$. On dit que a est un point

1. **Intérieur** à A si on peut trouver un ouvert $\mathcal{U} \subset E$ tel que $a \in \mathcal{U}$ et $\mathcal{U} \subset A$. L'ensemble des points intérieurs à A est noté $\mathring{A}$.
2. **Adhérent** à A si tout ouvert $\mathcal{U} \subset E$ qui contient a satisfait $\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$. L'ensemble des points adhérents à A est noté $\bar{A}$.



Le point a est adhérent à A et b est intérieur à A.

Remarque 10. La partie $\mathring{A}$ est ouverte et la partie $\bar{A}$ est fermée.

Exemple 2.3.2.

2.3.3 Ensembles compacts

Définition 2.3.3. Une partie $\mathcal{K}$ d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel $(E, \|\cdot\|)$ est dite **compacte** si de toute suite de points de $\mathcal{K}$ on peut extraire une sous suite convergente dont la limite est dans $\mathcal{K}$.

Autrement dit, toute suite de $\mathcal{K}$ admet une valeur d'adhérence dans $\mathcal{K}$.

Théorème 2.3.1 (Bolzano-Weierstrass). Dans un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées bornées.

Démonstration. Admise dans ce cours... mais identique à la preuve dans le cas réel. $\square$

Exemple 2.3.3.

Chapitre 3

Espaces euclidiens

3.1 Formes Bilinéaires et formes quadratiques

3.1.1 Formes bilinéaires symétriques

Définition 3.1.1. Une **forme bilinéaire** sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E est une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ qui est linéaire par rapport à chacune de ses variables :

1. $\forall u, v, w \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda u + \mu v, w) = \lambda\varphi(u, w) + \mu\varphi(v, w)$,
2. $\forall u, v, w \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\varphi(u, \lambda v + \mu w) = \lambda\varphi(u, v) + \mu\varphi(u, w)$.

Elle est **symétrique** si $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$ pour tout $u, v \in E$

Étant donnée une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E et $u = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ et $v = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$. On a

$$\varphi(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_iy_j$$

$m_{ij} = \varphi(e_i, e_j) \in \mathbb{R}$ pour tout $i, j = 1, \cdots, n$. Ainsi une forme bilinéaire s'écrit comme comme un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées de u et v.

Exemple 3.1.1.

3.1.2 Formes quadratiques

Définition 3.1.2. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Une application $q : E \to \mathbb{R}$ est appelée une **forme quadratique** s'il existe une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $u \in E$

$$q(u) = \varphi(u, u)$$

On dit que φ est associée à q. (q est un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées).

Exemple 3.1.2.

Proposition 3.1.1. Toute forme quadratique q sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E est associée à une unique forme bilinéaire symétrique.

Démonstration. $\square$

Exemple 3.1.3. Soit $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Définition 3.1.3. Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique définie sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E. La forme bilinéaire symétrique $\varphi(u, v) = \frac{1}{4}\left(q(u + v) - q(u - v)\right)$ est la **forme polaire** de q.

Exemple 3.1.4. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $q : (x_1, x_2, x_3) \mapsto 7x_1^2 + 5x_2x_3$.

3.1.3 Notation matricielle

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $u = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ et $v = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$ deux éléments de E. Une forme bilinéaire symétrique sur E s'écrit

$$\varphi(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\varphi(e_i, e_j)}_{=m_{ij}} x_i y_j.$$

Réciproquement si $(m_{ij})_{i,j=1}^{n}$ est une famille de réels telles que $m_{ij} = m_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \cdots, n$. Alors

$$(u, v) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_i y_j$$

est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Définition 3.1.4. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.

(i) La matrice
$$M = [m_{ij} = \varphi(e_i, e_j)]_{i,j=1}^n$$
est appelée **matrice de la forme bilinéaire symétrique** φ dans la base $\mathcal{B}$.

(ii) La matrice (dans la base $\mathcal{B}$) de la forme quadratique $q(u) = \varphi(u, u)$ est la matrice M de φ. Autrement dit, la matrice d'une forme quadratique est la matrice de sa forme polaire.

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont les matrices colonnes des coordonnées de u et v dans la base $\mathcal{B}$, on a
$$\varphi(u, v) = X^t M Y = Y^t M X = \varphi(v, u)$$
et
$$q(u) = X^t M X.$$
On a de plus $M = M^t$.

Exemple 3.1.5. 1) Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $q(u) = x_1^2 + x_2^2$ 2) Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $q : (x_1, x_2, x_3) \mapsto 7x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2x_3$.

3.2 Produit scalaire et norme euclidienne

3.2.1 Produit scalaire

Définition 3.2.1. On dit qu'une forme bilinéaire est

(i) **Symétrique** : si $\forall u, v \in E, \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.

(ii) **Positive** : si $\forall u \in E, \varphi(u, u) \geq 0$.

(iii) **Définie** : si $\varphi(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Une forme forme bilinéaire symétrique définie positve est appelé **produit scalaire**.

Suivant les auteurs et le contexte, le produit scalaire est noté $(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle$ ou $(u, v) \mapsto \langle u|v\rangle$ ou encore $(u, v) \mapsto (u|v)$.

Définition 3.2.2. Un espace euclidien est un espace vectoriel réel E de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle\cdot, \cdot\rangle$. On note $(E, \langle\cdot, \cdot\rangle)$.

Exemple 3.2.1.

3.2.2 Norme euclidienne

Soit l'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} \end{aligned}$$

Remarquons qu'elle est bien définie car le produit scalaire est positif.

Exemple 3.2.2. Si $E = \mathbb{R}$ on voit que la $\|\cdot\|$ est simplement la valeur absolue. Si $E = \mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire canonique alors $\|(x_1, \cdots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Proposition 3.2.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Pour tous $u, v \in E$ on a :

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$$

De plus on a $|\langle u, v\rangle| = \|u\| \, \|v\|$ si et seulement si il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$.

Démonstration. □

Remarque 11.

1. On peut bien sûr utiliser l'expression (au carré) : $|\langle u, v\rangle|^2 \leq \langle u, u\rangle \langle v, v\rangle$
2. Si $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire cannonique, on obtient $(\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i$

Proposition 3.2.2 (Inégalité de Minkowski). $\forall u, v \in E$ on a

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

De plus on a $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$ si et seulement si il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$.

Démonstration. □

Un espace euclidien est en fait un espace normé :

Définition - Proposition 3.2.1. Soit un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. L'application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ définie pour tout $u \in E$ par $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ est une norme sur E et elle est appelé **norme euclidienne**.

Démonstration. On vérifie les trois propriétés vérifiées pour une norme :

1. $\|u\| = 0 \Rightarrow \langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$ car le produit scalaire est défini.
2. homogénéité $\|\lambda u\| = \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u \rangle} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\langle u, u \rangle} = |\lambda| \, \|u\|$.
3. Inégalité triangulaire : c'est exactement l'inégalité de Minkowski.

$\square$

Les normes euclidiennes sont donc des normes bien particulières car elles découlent d'un produit scalaire. Les normes euclidiennes satisfont un certain nombre de propriétés remarquables :

Proposition 3.2.3. Soit un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E. Pour tous $u, v \in E$ on a

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$$

et

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$$

Démonstration. $\square$

3.2.3 Mesure d'angle géométrique

Comme on vient de le voir, un produit scalaire permet de mesurer des distances entre point E. Il permet aussi de mesurer un angle. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que :

$$-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \, \|v\|} \leq 1$$

On est donc en mesure de poser la définition suivante :

Définition 3.2.3. Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Soient u, v deux vecteurs non nuls de E. On appelle mesure de l'angle non orienté du couple (u, v) le réel compris $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \, \|v\|}.$$

Définition 3.2.4. On dit que les vecteurs u et v de $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sont orthogonaux si $\langle u, v\rangle = 0$.

Proposition 3.2.4 (Théorème de Pythagore). Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Les vecteurs u et u de E sont orthogonaux ssi $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Démonstration. $\square$

3.3 Signe d'une forme quadratique

3.3.1 Rappels

Définition 3.3.1. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Une **forme linéaire** ℓ est une application $\ell : E \to \mathbb{R}$ qui est linéaire.

Si $E = \mathbb{R}^n$ et ℓ une forme linéaire sur E. Alors il existe un vecteur $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in E$ tel que

$$\ell(u) = \langle a, u \rangle = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n, \quad \text{pour tout } u \in E.$$

En notation matricielle, les vecteurs $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ sont notés en colonne et les formes linaires ℓ sont des matrices lignes (de taille $1 \times n$). La matrice de ℓ n'est autre que celle de a transposée et on a

$$\ell(u) = \begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Définition 3.3.2. Une forme quadratique $q : E \to \mathbb{R}$ définie sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E est

1. **Positive** : si $\forall u \in E$, $q(u) \geq 0$.
2. **Négative** : si $\forall u \in E$, $q(u) \leq 0$.

3.3.2 Décomposition de Gauss

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique définie sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension n. Alors il existe $(s+t) \leq n$ formes linéaires $\ell_1, \cdots, \ell_s, \ell_{s+1}, \cdots, \ell_{s+t} : E \to \mathbb{R}$ linéairement indépendantes telles que pour tout $u \in E$

$$\begin{aligned} q(u) = {} & (\ell_1(u))^2 + \cdots + (\ell_s(u))^2 \\ & - (\ell_{s+1}(u))^2 - \cdots - (\ell_{s+t}(u))^2 \end{aligned}$$

Il n'y a pas unicité des ℓ_i mais les nombres entiers s et t ne dépendent pas de la décomposition choisie (c'est la **signature** de q).

Remarque 12. On peut déduire le signe de la forme quadratique q grâce à sa décomposition de Gauss :

1. Si $t = 0$ alors la forme quadratique q est positive.
2. Si $s = 0$ alors la forme quadratique q est négative.

L'algorithme de Gauss permet de calculer les formes linéaires indépendantes ℓ_i. Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. On l'écrit tout d'abord dans une base

$$q(x_1, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}x_i x_j.$$

De deux choses l'une :

1. Il y a au moins un “terme carré” dans l’écriture de q. C’est à dire, il existe un entier $1 \leq i \leq n$ tel que a_{ii} n’est pas nul. On supposera pour simplifier qu’il s’agit de a_{11} et on note $a = a_{11}$. On peut alors écrire q sous la forme :

$$q(x_1, \cdots, x_n) = ax_1^2 + x_1 B(x_2, \cdots, x_n) + C(x_2, \cdots, x_n)$$

où on a factorisé les termes en x_1 et fait apparaître une forme linéaire $\boldsymbol{B} = B(x_2, \cdots, x_n)$ et une forme quadratique $\boldsymbol{C} = C(x_2, \cdots, x_n)$. On peut alors “complèter le carré” (mise sous forme canonique) :

$$q(x_1, \cdots, x_n) = a\left(x_1 + \frac{\boldsymbol{B}}{2a}\right)^2 + \boldsymbol{C} - \frac{\boldsymbol{B}^2}{4a}$$

On a donc écrit la forme quadratique q comme somme du carré d’une forme linéaire et d’une forme quadratique où x_1 n’intervient plus (linéairement indépendant). Il suffit alors de réitérer la méthode de Gauss avec $q'(x_2, \cdots, x_n) = C(x_2, \cdots, x_n) - \frac{B^2(x_2, \cdots, x_n)}{4a}$.

2. Il n'y a que des "termes rectangles" dans l'écriture de q. Si la forme quadratique est nulle, l'algorithme s'arrête. On suppose pour simplifier que $a_{12} \neq 0$ et on note $a = a_{12}$. On écrit alors q sous la forme :

$$q(x_1, \cdots, x_n) = a x_1 x_2 + x_1 B(x_3, \cdots, x_n) + x_2 C(x_3, \cdots, x_n) + D(x_3, \cdots, x_n)$$

où $B(x_3, \cdots, x_n)$ et $C(x_3, \cdots, x_n)$ sont des formes linéaires et $D(x_3, \cdots, x_n)$ est une forme quadratique. Dans la suite, on note respectivement ces applications $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$. On factorise alors sous la forme suivante :

$$q(x_1, \cdots, x_n) = a\left(x_1 + \frac{\boldsymbol{C}}{a}\right)\left(x_2 + \frac{\boldsymbol{B}}{a}\right) + \boldsymbol{D} - \frac{\boldsymbol{BC}}{a}$$

Puis on utilise le fait que pour tous réels a et b on a $ab = ((a+b)^2 - (a-b)^2)/4$ pour obtenir finalement :

$$q(x_1, \cdots, x_n) = \frac{a}{4}\left(x_1 + x_2 + \frac{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}}{a}\right)^2 - \frac{a}{4}\left(x_1 - x_2 + \frac{\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}}{a}\right)^2 + \boldsymbol{D} - \frac{\boldsymbol{BC}}{a}$$

Il suffit alors d'itérer la méthode avec la forme quadratique $q'(x_3, \cdots, x_n) = \boldsymbol{D} - \frac{\boldsymbol{BC}}{a}$, qui ne fait plus intervenir que $x_3, \cdots, x_n$.

Remarque 13. Il existe d'autres méthodes pour écrire une forme quadratique sous la forme d'une somme de carrés formes linéaires indépendantes : la diagonalisation de la forme quadratique (conjugaison par une matrice orthogonal) et q-orthonormalisation d'une base de E (méthode de Lagrange). A noter que pour les matrices définie positive, il existe aussi l'algorithme de Choleski et pour les matrice non définie il existe l'algorithme LDL.

3.3.3 Critère de Sylvester ou des déterminants mineurs principaux

Proposition 3.3.1. Soit $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ de matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On note $\Delta_1 = a$ et $\Delta_2 = (ad - cb)$ et $\mathrm{tr}(M) = a + d$. Alors :

1. q est définie positive ssi $\Delta_1 > 0$ et $\Delta_2 > 0$ ssi $\mathrm{tr}(M) > 0$ et $\Delta_2 > 0$.
2. q est définie négative ssi $\Delta_1 < 0$ et $\Delta_2 > 0$ ssi $\mathrm{tr}(M) < 0$ et $\Delta_2 > 0$.

Démonstration. On se contente d'une illustration sur les matrices diagonales. □

Proposition 3.3.2. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ de matrice $M = (m_{ij})_{i,j=1}^3$. On note :

$$\Delta_1 = m_{11}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}, \quad \text{et} \quad \Delta_3 = \det(M) = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}.$$

Alors :

1. q est définie positive ssi $\Delta_1 > 0$ et $\Delta_2 > 0$ et $\Delta_3 > 0$,
2. q est définie négative ssi $\Delta_1 < 0$ et $\Delta_2 > 0$ et $\Delta_3 < 0$.

Démonstration. On se contente d'une illustration sur les matrices diagonales. $\square$