TD 4 Continuité et différentiabilité

Exercice 1 : On utilise la norme $\|\cdot\|_\infty$

Si $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_\infty = \max(|x-x_0|, |y-y_0|) < \varepsilon$

alors on a $\quad x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$

et $\quad y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon$

donc $\max(x_0-\varepsilon, y_0-\varepsilon) < \max(x,y) < \max(x_0+\varepsilon, y_0+\varepsilon)$

$$\max(x_0,y_0) - \varepsilon < \max(x,y) < \max(x_0,y_0)+\varepsilon$$

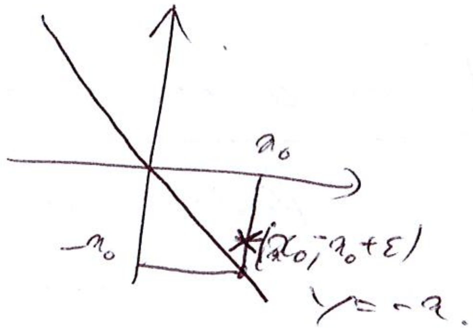
donc $\quad |\max(x,y) - \max(x_0,y_0)| < \varepsilon$

càd $\quad |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon.$

Exercice 2 :

$D_f = \{(x,y) \mid x+y \neq 0\}$

est le plan privé de la diagonale descendante



On sait que l'addition $(x,y) \mapsto x+y$ est continue, la fonction sinus aussi et l'inverse aussi

Donc par composition et produit, f est continue sur D_f.

Soit $(x_0, -x_0)$ un point de la diagonale descendante

pour $\varepsilon \neq 0$, $\quad (x_0, -x_0+\varepsilon) \in D_f$

et $\quad f(x_0, -x_0+\varepsilon) = \dfrac{\sin(\varepsilon)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 1$

Le seul prolongement par continuité possible est $f(x_0,-x_0)=1$.

On pose $f(x_0,-x_0)=1$ et on montre f continue en $(x_0,-x_0)$. On a :

$$\left|\frac{\sin(x+y)}{x+y}-1\right| = \left|\frac{\sin(x+y)-(x+y)}{(x+y)}\right|$$

$$= \left|\frac{O((x+y)^3)}{x+y}\right| = |O((x+y)^2)|$$

car $\sin z = z + O_{z\to 0}(z^3)$.

$$\leq C\,|x+y|^2$$

$$= C\,|x-x_0+y+x_0|^2$$

$$\leq C\left(|x-x_0|+|y-y_0|\right)^2 = C\,\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_1^2 \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} 0$$

car $y_0=-x_0$

Exercice 3 :

$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.

La fonction $x\mapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

La fonction $x\mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$

Par composition et produit, f est continue sur D_f.

On a $f(y^2,y)=\dfrac{y^{2\alpha}y}{2y^4}=\dfrac{1}{2}y^{2\alpha-3}\xrightarrow[y\to 0]{} 0=f(0,0)$

Ssi $2\alpha-3>0$

Donc f n'est pas continue en $(0,0)$ si $\alpha\leq\frac{3}{2}$.

Reste à voir que f est continue en $(0,0)$ si $\alpha > \frac{3}{2}$

Si $|x| \leq y^2$, alors $\left|\frac{|x|^\alpha y}{x^2+y^4}\right| \leq \left|\frac{y^{2\alpha+1}}{y^4}\right| = |y|^{2\alpha-3}$

et

Si $|x| > y^2$, alors $\left|\frac{|x|^\alpha y}{x^2+y^4}\right| < \frac{|x|^\alpha |x|^{1/2}}{|x|^2} = |x|^{\alpha-\frac{3}{2}}$.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|f(x,y)| \leq \max\left(\|(x,y)\|_\infty^{2\alpha-3}, \|(x,y)\|_\infty^{\alpha-\frac{3}{2}}\right) \xrightarrow[\|(x,y)\|_\infty \to 0]{} 0.$$

Exercice 4 :

1) $\frac{\partial f}{\partial x} = -3y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 5y^4 - 3x$

2) $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(e^{xy}) - x\sin(e^{xy})e^{xy}y$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2\sin(e^{xy})e^{xy}$$

3) $\frac{\partial F}{\partial x} = \cos(e^x)$ $\frac{\partial F}{\partial y} = -\cos(e^y)$.

Exercice 5 :

$z \mapsto \arccos(z)$ est définie sur $[-1,1]$

dérivable sur $]-1,1[$.

et $\arccos(z)' = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$

On étudie $f(x,y) = \arccos\left(1-(x-y)^2\right)$

⚠ $+$ dans l'énoncé,

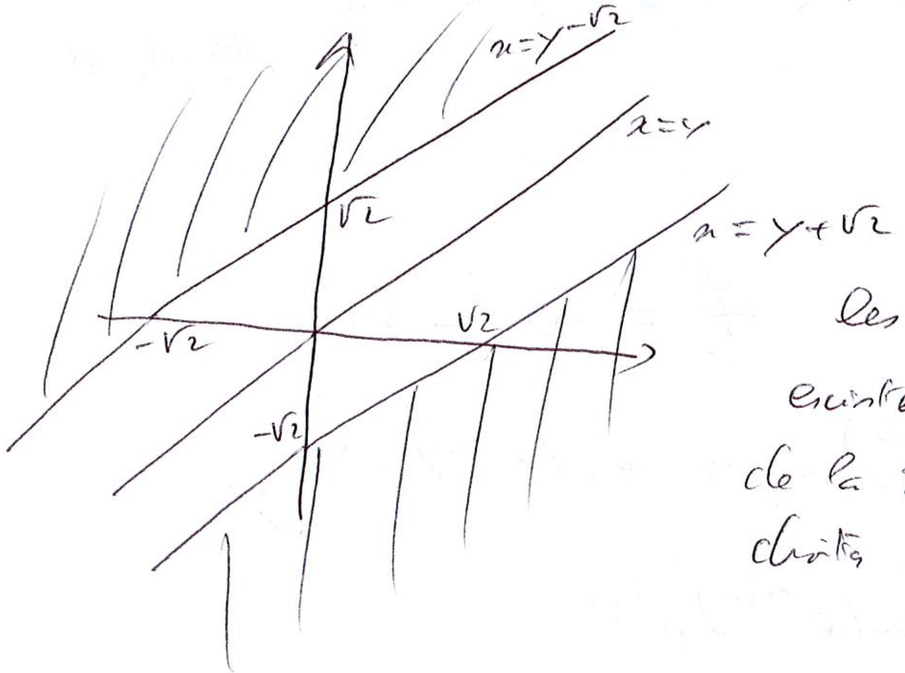
mais alors f presque jamais définie.

On fixe $y \in \mathbb{R}$, $f(x,y)$ est dérivable en x ssi

$$-1 < 1-(x-y)^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < (x-y)^2 < 2.$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \left]y-\sqrt{2}, y\right[\cup \left]y, y+\sqrt{2}\right[$$



$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus$ zone hachurée

Les dérivées partielles existent dans $\mathbb{R}^2$ privé de la zone hachurée et des 3 droites diagonales.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\arccos\left(1-(x-y)^2\right)\right)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{(x-y)^2}}\left(-\left(2x-2y\right)\right) = 2\,\frac{(x-y)}{|x-y|}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2 & \text{si } x>y \\ -2 & \text{si } y>x \end{cases}$$

De même

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 2 & \text{si } y>x \\ -2 & \text{si } y<x. \end{cases}$$

Exercice 6 : $f(x,y) = e^{x\ln(x^2+y^2)}$

1) Pour avoir $f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 1$

il suffit de voir $x\ln(x^2+y^2) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$ (*)

et de composer par exponentielle.

Or $|x\ln(x^2+y^2)| \leq |x|\,|\ln(\|(x,y)\|_2^2)|$

$$\leq \|(x,y)_2\|^2\,|\ln(\|(x,y)\|_2^2)|$$

$\downarrow$ $\|(x,y)\|_2^2 \longrightarrow 0$

0 d'où (*)

2) Hors $(0,0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x\ln(x^2+y^2)}\left(\ln(x^2+y^2) + x\frac{1}{x^2+y^2}\times 2x\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x\ln(x^2+y^2)}\left(x\frac{1}{x^2+y^2}2y\right)$$

3) On veut savoir si $x\mapsto f(x,0)$ est dérivable en 0, càd si

$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$ admet une limite $x\to 0$.

$$\|$$

$$\frac{e^{x\ln x^2}-1}{x} = \frac{x\ln(x^2)+o(x\ln(x^2))}{x} = \ln(x^2)+o(\ln(x^2))$$

$\downarrow x\to 0$

car $e^z = 1+z+\underset{z\to 0}{o}(z)$ $\qquad -\infty$

Il n'y a pas de dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$.

En y : $\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \dfrac{e^0 - 1}{y} = 0 \xrightarrow[y\to 0]{} 0$.

donc $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 0$

Exercice 7 :

1) $P = -\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} = -e^{S/c_v}(1-\gamma)\,\tau^{-\gamma}$

$T = \dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial S} = \dfrac{\tau^{1-\gamma} e^{S/c_v}}{c_v}$

2) $\dfrac{P\tau}{T} = -\dfrac{\cancel{e^{S/c_v}}\,(1-\gamma)\,\cancel{\tau^{1-\gamma}}}{\dfrac{\cancel{\tau^{1-\gamma}}\,\cancel{e^{S/c_v}}}{c_v}} = -(1-\gamma)\,c_v$

constante.

Exercice 8 :

1) f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par composition.

En $(0,0)$, on a :

$$|f(x,y)| \leq \frac{\|(x,y)\|_2^{\,2}}{\|(x,y)\|_2} = \|(x,y)\|_2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

car $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|_2$

2) f est différentiable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par opérations usuelles.

Pour montrer la différentiabilité en $(0,0)$, on montre que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$.

En fait, c'est faux !

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} 2x}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^{2}}$$

(le second terme est négligeable devant le premier.)

et pour ~~x = αy~~ $\cancel{\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha y, y)}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha y, y) = \frac{y}{|y|\sqrt{\alpha^2+1}} - \frac{\alpha^2 y^2}{\sqrt{\alpha^2+1}\,|y|} \xrightarrow[y \to 0]{} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}}.$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'a pas de prolongement par continuité en $(0,0)$

f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Si elle l'était, on aurait

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\, y + \mathcal{E}(x,y)$$

où $\mathcal{E}(x,y)/\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

On $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

sont les seules possibilités car f s'annule sur les axes.

mais alors $\varepsilon(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ne tend pas vers 0 quand $(x,y)\to(0,0)$

car $\varepsilon(\alpha y,y)=\frac{\alpha y^2}{\sqrt{1+\alpha^2}\,y^2}=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ dépend de la direction.

Exercice 9 : ~~D_f $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$~~

1) f est continue et différentiable sur ~~$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$~~ $\mathbb{R}^2\setminus\{y=0\}$ par les opérations usuelles.

On a $\left|\frac{x^2y}{x^2+|y|}\right| \leq \left|\frac{x^2y}{x^2}\right| \leq |y| \leq \|(x,y)\|_\infty \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

donc f est continue en $(0,0)$.

Comme f s'annule sur les axes, on doit avoir

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ si f est différentiable en $(0,0)$

Vérifions que $f(x,y)=0+\varepsilon(x,y)\|(x,y)\|_\infty$

avec $\varepsilon(x,y)=\frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|_\infty} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

On si $|x|\geq|y|$ alors $|f(x,y)|\leq\frac{|x|^3}{|y|}\leq|x|^2\leq\|(x,y)\|_\infty^2$

et si $|x|\leq|y|$ alors $|f(x,y)|\leq\frac{|y|^3}{|y|}=|y|^2\leq\|(x,y)\|_\infty^2$

Dans les 2 cas :

$$\left| \varepsilon(x,y) \right| \leq \|(x,y)\|_\infty \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

2) Soit $a \neq 0$, on a :

$$f(a,0) = 0 \; , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(a,y)-f(a,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{a^2 y}{(a^2+|y|)y} = 1$$

Si f différentiable en $(a,0)$, alors

$$f(a+x,y) = y + \varepsilon(x,y)\,\|(x,y)\|_\infty$$

avec $\varepsilon(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$

- Si $|x| \leq |y|$, alors $\|(x,y)\|_\infty = |y|$ et

$$\left|\varepsilon(x,y)\right| = \left| \frac{f(a+x,y)-y}{y} \right| = \left| \frac{(a+x)^2}{(a+x)^2+|y|} - 1 \right|$$

$$= \frac{|y|}{(a+x)^2+|y|} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

- Si $|x| \geq |y|$, alors $\|(x,y)\|_\infty = |x|$ et

$$\left|\varepsilon(x,y)\right| = \left| \frac{f(a+x,y)-y}{x} \right| = \left| \frac{y^2}{x\left((a+x)^2+|y|\right)} \right|$$

$$\leq \frac{|y|}{\left|(a+x)^2+|y|\right|} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

Exercice 10 :

1) $f(x,y)=c \iff cx^2+cy^2-x-y+c=0$

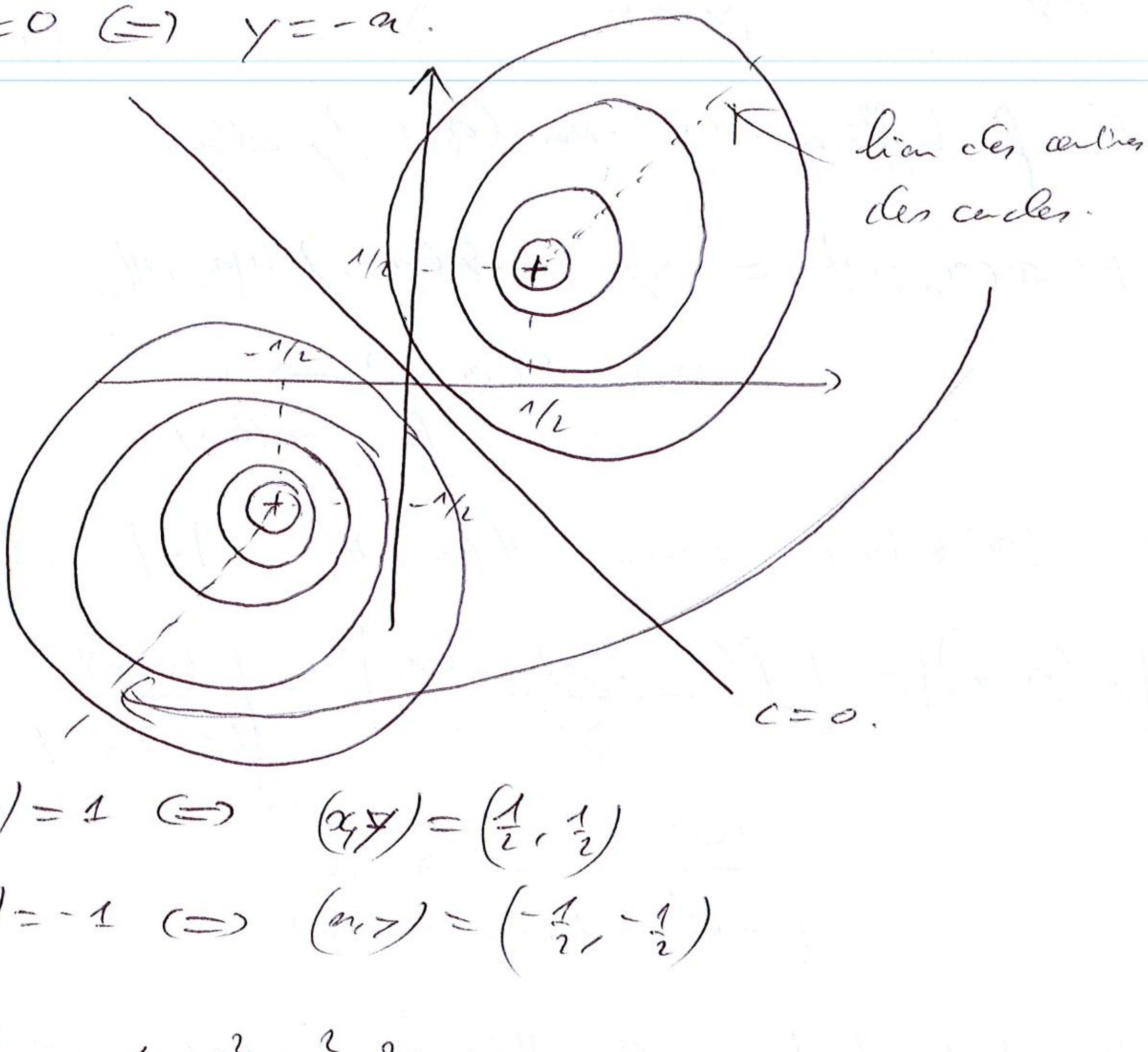
$$\iff \left(x-\frac{1}{2c}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2c}\right)^2=\frac{1}{c}-c.$$

si $c\neq 0$.

équation d'un cercle si $\frac{1}{c}-c>0 \iff c^2<1$

$\iff c\in]-1,1[.$

$f(x,y)=0 \iff y=-x.$



$f(x,y)=1 \iff (x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$f(x,y)=-1 \iff (x,y)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

2) $$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1-x^2+y^2-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1-y^2+x^2-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

3) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, $f(0,0) = 0$.

Le plan tangent est $z = x + y$.

Exercice 11:

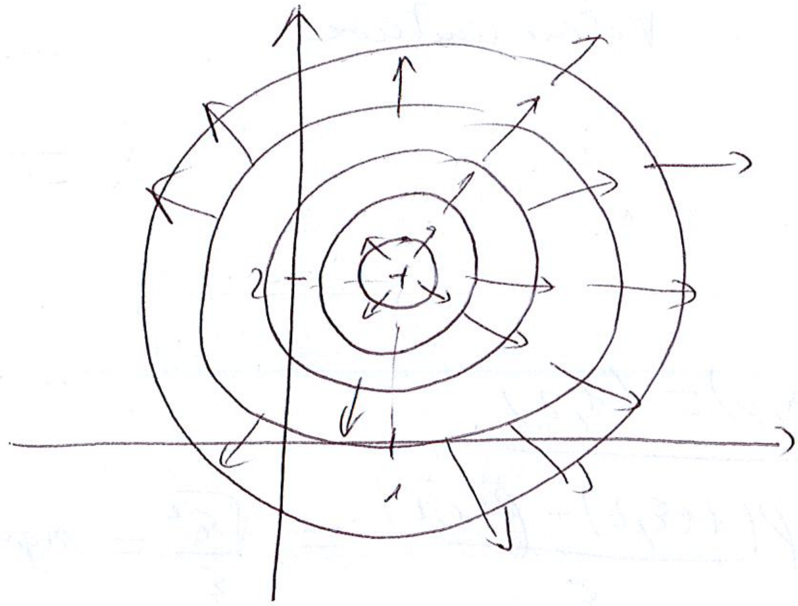
Le plan tangent est $z = 6 + (x-2) - (y-5)$

Par approximation $f(2.2, 4.9) \simeq 6 + 0.2 + 0.1 = 6.3$.

Exercice 12: $f(z) = \|z - a\|_2^\alpha$

1) $f(x,y) = \|(x-1, y-2)\|_2^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$

$f(x,y) = c$ représente le cercle de centre $a = (1,2)$ et de rayon c



$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y-2)$$

$$\nabla f_{(x,y)} = 2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

2) $f(x,y) = \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$

~~M~~ les lignes de niveaux sont les mêmes.

<u>Si $(x,y) \neq (1,2)$</u>

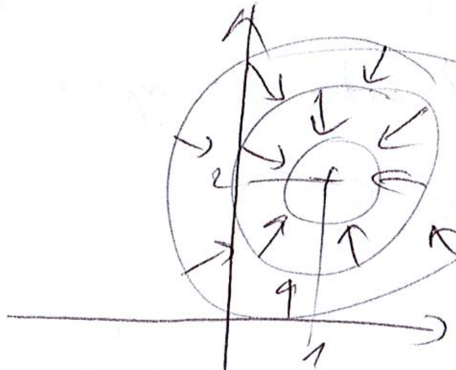
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} \times 2(x-1) = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}$$

$$\nabla f_{(x,y)} = \frac{1}{d((x,y),(1,2))}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

càd $\nabla f_z = \frac{1}{d(z,a)}(z-a)$

vecteurs unitaires



⚠ flèches dans l'autre sens !

<u>Si $(x,y) = (1,2)$</u>

$$\frac{f(1+\varepsilon,2)-f(1,2)}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{\varepsilon^2}}{\varepsilon} = \text{signe}(\varepsilon) \begin{cases} \xrightarrow[\varepsilon>0]{\varepsilon\to 0} 1 \\ \xrightarrow[\varepsilon<0]{\varepsilon\to 0} -1 \end{cases}$$

donc n'a pas de limite quand $\varepsilon \to 0$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ n'existe pas !

∇f n'est pas défini en $(1,2)$.

(7)

Exercice 13 :

1) $f(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$

$$J_f(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial (r\cos\theta)}{\partial r}, & \frac{\partial (r\cos\theta)}{\partial \theta}, & \frac{\partial (r\cos\theta)}{\partial z} \\ \frac{\partial (r\sin\theta)}{\partial r}, & \frac{\partial (r\sin\theta)}{\partial \theta}, & \frac{\partial (r\sin\theta)}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $$J_f(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\cos\theta\sin\varphi & -r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix}$$