

# Chapitre 3

## Espaces euclidiens

### 3.1 Formes Bilinéaires et formes quadratiques

#### 3.1.1 Formes bilinéaires symétriques

**Définition 3.1.1.** Une **forme bilinéaire** sur un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel  $E$  est une application  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  qui est linéaire par rapport à chacune de ses variables :

1.  $\forall u, v, w \in E$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(\lambda u + \mu v, w) = \lambda \varphi(u, w) + \mu \varphi(v, w)$ ,
2.  $\forall u, v, w \in E$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(u, \lambda v + \mu w) = \lambda \varphi(u, v) + \mu \varphi(u, w)$ .

Elle est **symétrique** si  $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$  pour tout  $u, v \in E$

Étant donnée une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  et  $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  et  $v = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ .  
On a

$$\varphi(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i y_j$$

$m_{ij} = \varphi(e_i, e_j) \in \mathbb{R}$  pour tout  $i, j = 1, \dots, n$ . Ainsi une forme bilinéaire s'écrit comme un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées de  $u$  et  $v$ .

**Exemple 3.1.1.**



### 3.1.2 Formes quadratiques

**Définition 3.1.2.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel. Une application  $q : E \rightarrow \mathbb{R}$  est appelée une **forme quadratique** s'il existe une forme bilinéaire  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $u \in E$

$$q(u) = \varphi(u, u)$$

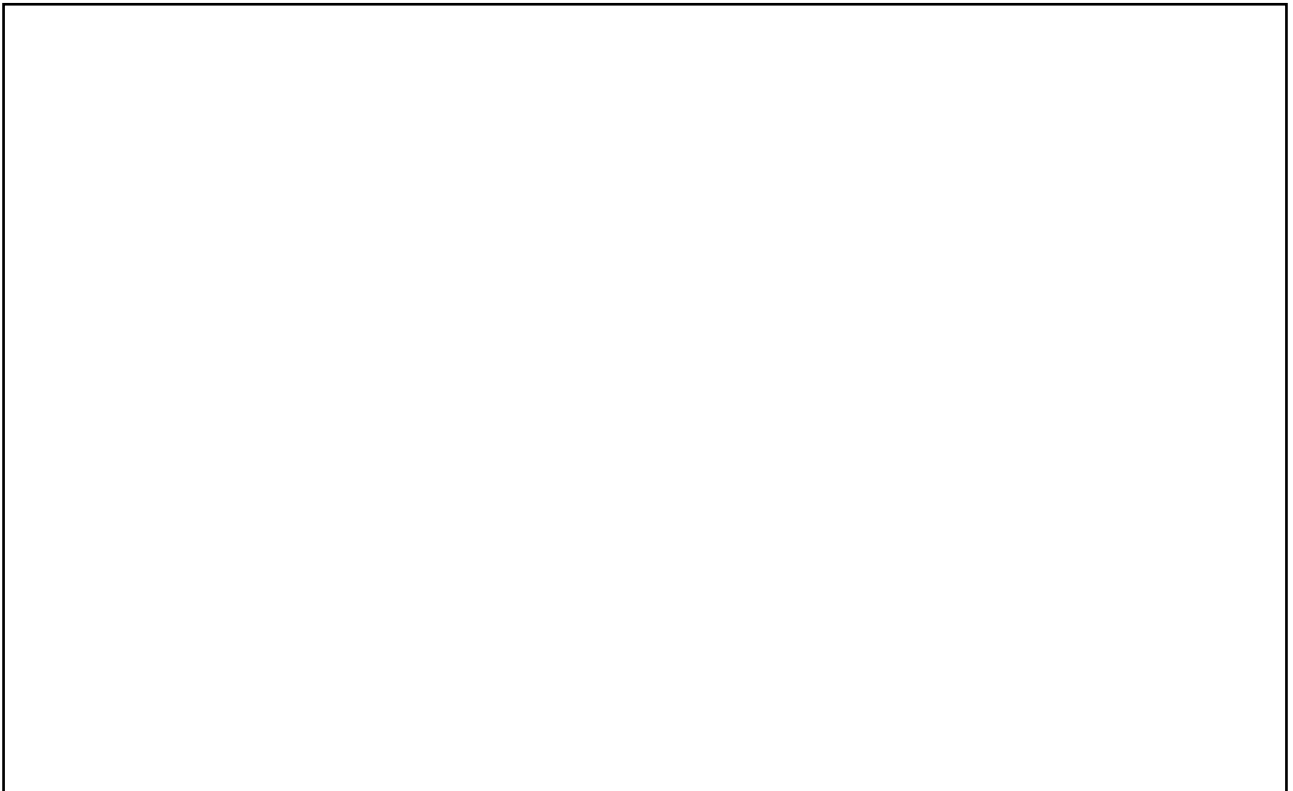
On dit que  $\varphi$  est associée à  $q$ . ( $q$  est un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées).

**Exemple 3.1.2.**



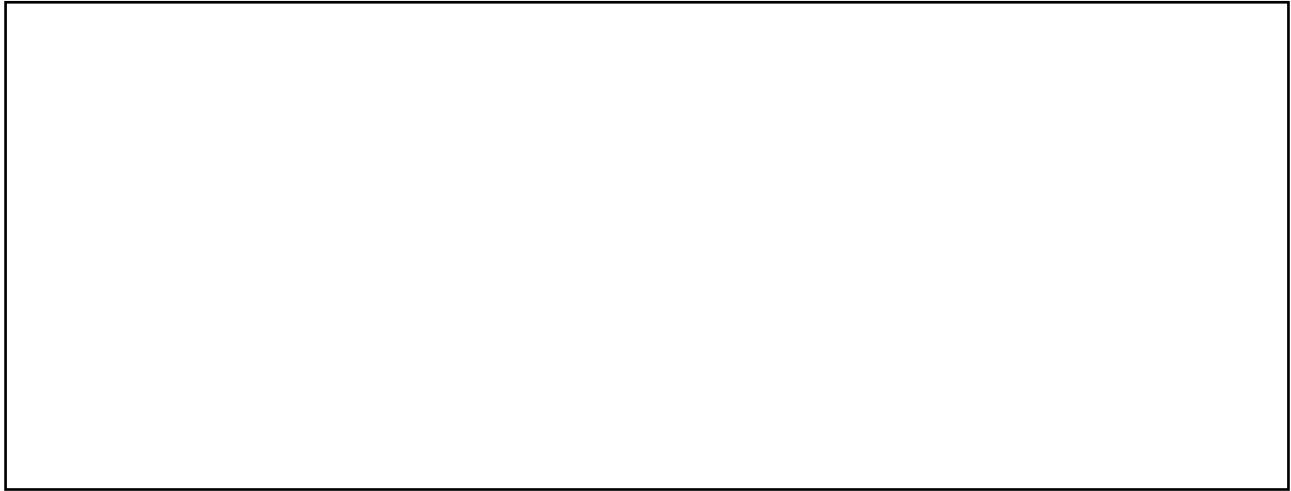
**Proposition 3.1.1.** Toute forme quadratique  $q$  sur un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel  $E$  est associée à une unique forme bilinéaire symétrique.

*Démonstration.*



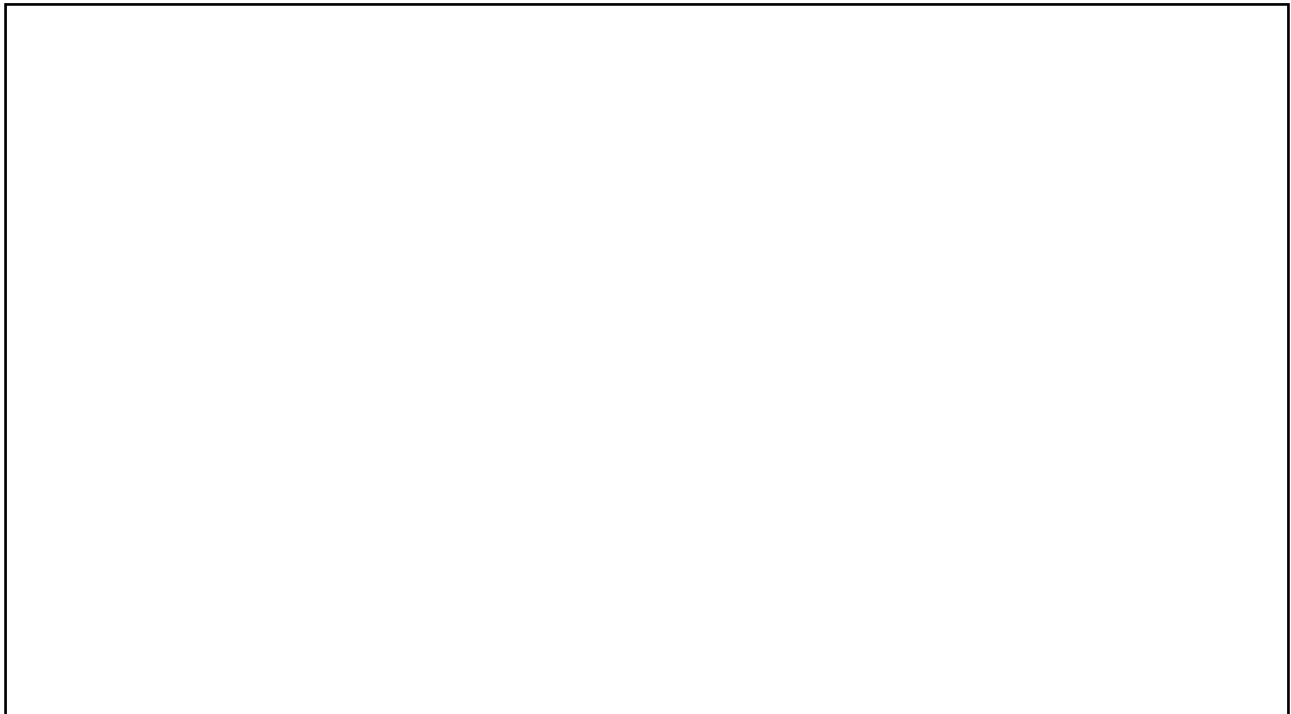
□

**Exemple 3.1.3.** Soit  $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .



**Définition 3.1.3.** Soit  $q : E \rightarrow \mathbb{R}$  une forme quadratique définie sur un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel  $E$ . La forme bilinéaire symétrique  $\varphi(u, v) = \frac{1}{4} (q(u + v) - q(u - v))$  est la **forme polaire** de  $q$ .

**Exemple 3.1.4.** Soit  $E = \mathbb{R}^3$  et  $q : (x_1, x_2, x_3) \mapsto 7x_1^2 + 5x_2x_3$ .



### 3.1.3 Notation matricielle

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension finie et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $u = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$  et  $v = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$  deux éléments de  $E$ . Une forme bilinéaire symétrique

sur  $E$  s'écrit

$$\varphi(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underbrace{\varphi(e_i, e_j)}_{=m_{ij}} x_i y_j.$$

Réciproquement si  $(m_{ij})_{i,j=1}^n$  est une famille de réels telles que  $m_{ij} = m_{ji}$  pour tout  $i, j = 1, \dots, n$ . Alors

$$(u, v) \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i y_j$$

est une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ .

**Définition 3.1.4.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension finie et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

(i) La matrice

$$M = [m_{ij} = \varphi(e_i, e_j)]_{i,j=1}^n$$

est appelée **matrice de la forme bilinéaire symétrique**  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

(ii) La matrice (dans la base  $\mathcal{B}$ ) de la forme quadratique  $q(u) = \varphi(u, u)$  est la matrice  $M$  de  $\varphi$ . Autrement dit, la matrice d'une forme quadratique est la matrice de sa forme polaire.

Si  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  sont les matrices colonnes des coordonnées de  $u$  et  $v$  dans la base  $\mathcal{B}$ , on a

$$\varphi(u, v) = X^t M Y = Y^t M X = \varphi(v, u)$$

et

$$q(u) = X^t M X.$$

On a de plus  $M = M^t$ .

**Exemple 3.1.5.** 1) Soit  $E = \mathbb{R}^2$  et  $q(u) = x_1^2 + x_2^2$

2) Soit  $E = \mathbb{R}^3$  et  $q : (x_1, x_2, x_3) \mapsto 7x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2x_3$ .

## 3.2 Produit scalaire et norme euclidienne

### 3.2.1 Produit scalaire

**Définition 3.2.1.** On dit qu'une forme bilinéaire est

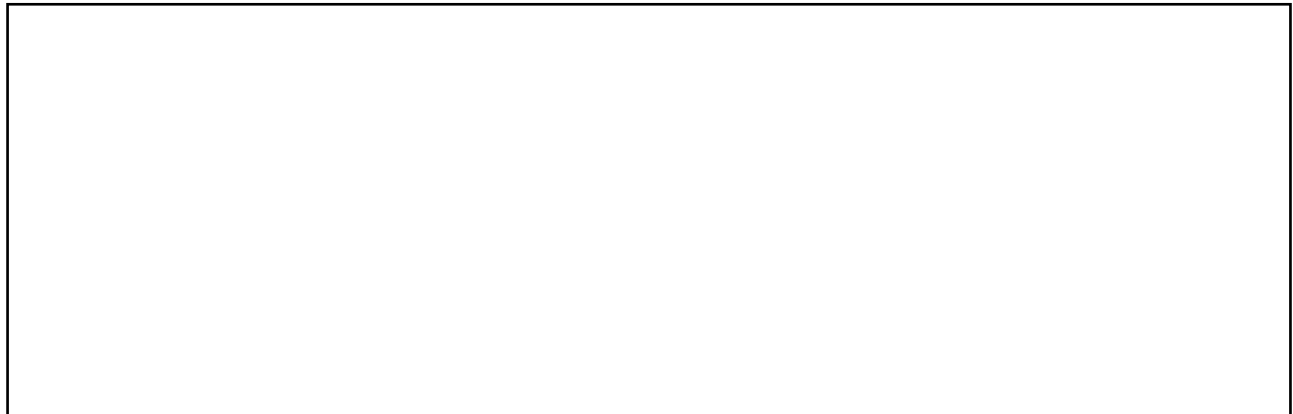
- (i) **Symétrique** : si  $\forall u, v \in E, \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$ .
- (ii) **Positive** : si  $\forall u \in E, \varphi(u, u) \geq 0$ .
- (iii) **Définie** : si  $\varphi(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ .

Une forme bilinéaire symétrique définie positive est appelé **produit scalaire**.

Suivant les auteurs et le contexte, le produit scalaire est noté  $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$  ou  $(u, v) \mapsto \langle u|v \rangle$  ou encore  $(u, v) \mapsto (u|v)$ .

**Définition 3.2.2.** Un espace euclidien est un espace vectoriel réel  $E$  de dimension finie muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On note  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

**Exemple 3.2.1.**



### 3.2.2 Norme euclidienne

Soit l'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \end{aligned}$$

Remarquons qu'elle est bien définie car le produit scalaire est positif.

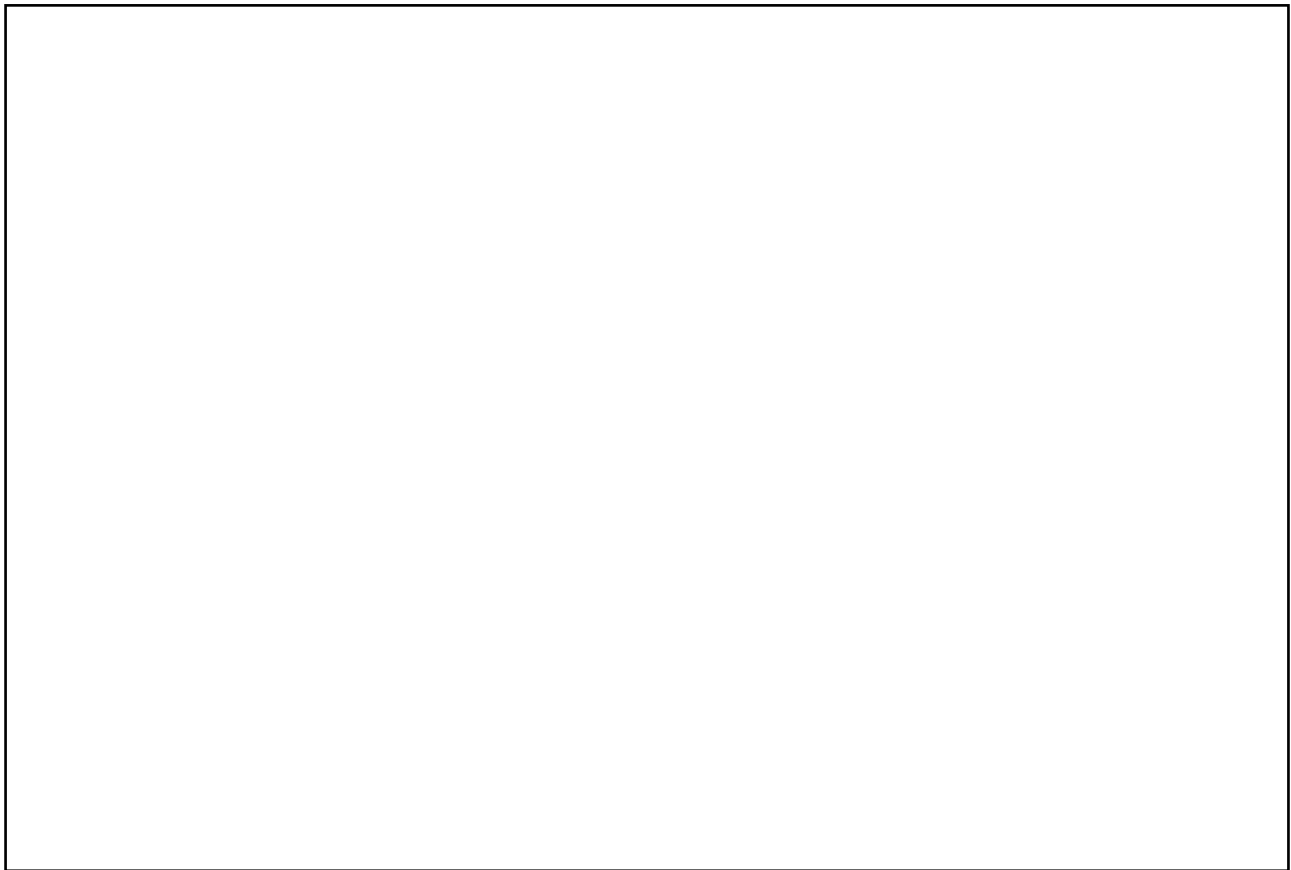
**Exemple 3.2.2.** Si  $E = \mathbb{R}$  on voit que la  $\|\cdot\|$  est simplement la valeur absolue. Si  $E = \mathbb{R}^n$  avec le produit scalaire canonique alors  $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ .

**Proposition 3.2.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).** Pour tous  $u, v \in E$  on a :

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

De plus on a  $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \|v\|$  si et seulement si il existe un  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $v = \lambda u$ .

*Démonstration.*



□

- Remarque 11.** 1. On peut bien sûr utiliser l'expression (au carré) :  $|\langle u, v \rangle|^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$   
 2. Si  $E = \mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire canonique, on obtient  $(\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2$

**Proposition 3.2.2 (Inégalité de Minkowski).**  $\forall u, v \in E$  on a

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

De plus on a  $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$  si et seulement si il existe un  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $v = \lambda u$ .

*Démonstration.*



□

Un espace euclidien est en fait un espace normé :

**Définition - Proposition 3.2.1.** Soit un espace euclidien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . L'application  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $u \in E$  par  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$  est une norme sur  $E$  et elle est appelée **norme euclidienne**.

*Démonstration.* On vérifie les trois propriétés vérifiées pour une norme :

1.  $\|u\| = 0 \Rightarrow \langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$  car le produit scalaire est défini.
2. homogénéité  $\|\lambda u\| = \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u \rangle} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\langle u, u \rangle} = |\lambda| \|u\|$ .
3. Inégalité triangulaire : c'est exactement l'inégalité de Minkowski.

□

Les normes euclidiennes sont donc des normes bien particulières car elles découlent d'un produit scalaire. Les normes euclidiennes satisfont un certain nombre de propriétés remarquables :

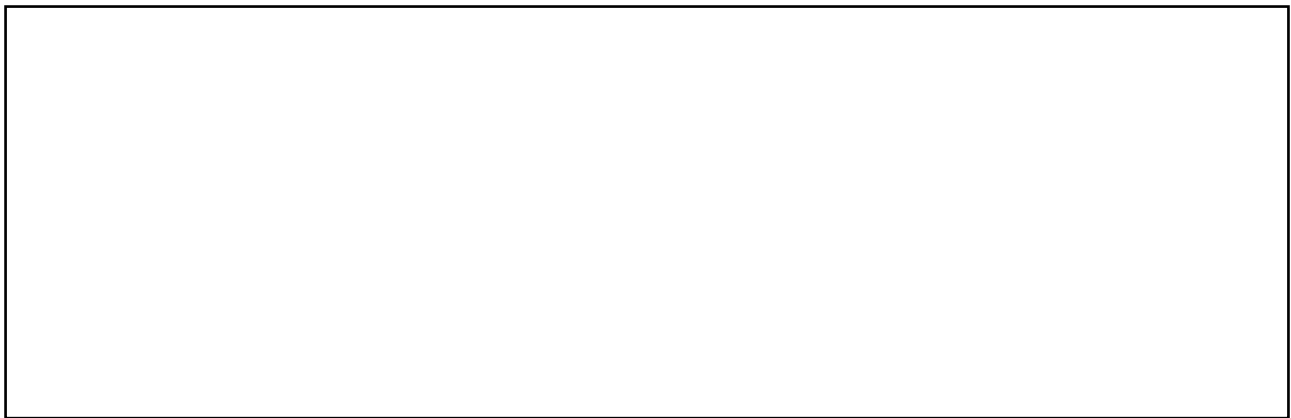
**Proposition 3.2.3.** Soit un espace euclidien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  et  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne sur  $E$ . Pour tous  $u, v \in E$  on a

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} (\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$$

et

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2 (\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

*Démonstration.*



□

### 3.2.3 Mesure d'angle géométrique

Comme on vient de le voir, un produit scalaire permet de mesurer des distances entre point  $E$ . Il permet aussi de mesurer un angle. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que :

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \leq 1$$

On est donc en mesure de poser la définition suivante :

**Définition 3.2.3.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien. Soient  $u, v$  deux vecteurs non nuls de

$E$ . On appelle mesure de l'angle non orienté du couple  $(u, v)$  le réel compris  $\theta \in [0, \pi]$  tel que

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}.$$

**Définition 3.2.4.** On dit que les vecteurs  $u$  et  $v$  de  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sont orthogonaux si  $\langle u, v \rangle = 0$ .

**Proposition 3.2.4 (Théorème de Pythagore).** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien. Les vecteurs  $u$  et  $v$  de  $E$  sont orthogonaux ssi  $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ .

*Démonstration.*



□

## 3.3 Signe d'une forme quadratique

### 3.3.1 Rappels

**Définition 3.3.1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel. Une **forme linéaire**  $\ell$  est une application  $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$  qui est linéaire.

Si  $E = \mathbb{R}^n$  et  $\ell$  une forme linéaire sur  $E$ . Alors il existe un vecteur  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in E$  tel que

$$\ell(u) = \langle a, u \rangle = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n, \quad \text{pour tout } u \in E.$$

En notation matricielle, les vecteurs  $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  sont notés en colonne et les formes linéaires  $\ell$  sont des matrices lignes (de taille  $1 \times n$ ). La matrice de  $\ell$  n'est autre que celle de  $a$  transposée et on a

$$\ell(u) = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

**Définition 3.3.2.** Une forme quadratique  $q : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel  $E$  est

1. **Positive** : si  $\forall u \in E, q(u) \geq 0$ .



2. **Négative** : si  $\forall u \in E, q(u) \leq 0$ .

### 3.3.2 Décomposition de Gauss

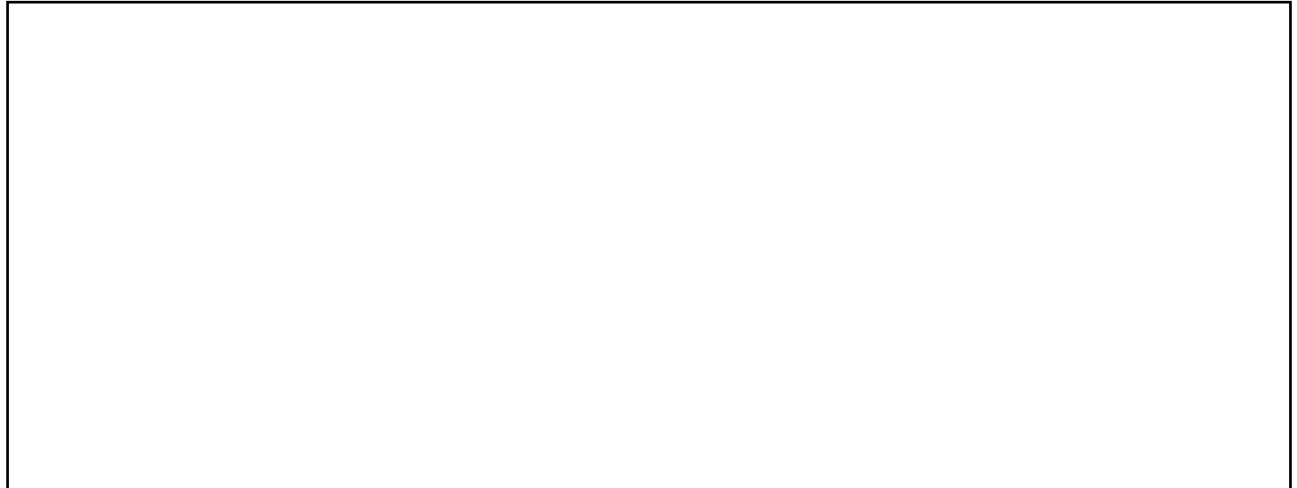
Soit  $q : E \rightarrow \mathbb{R}$  une forme quadratique définie sur un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension  $n$ . Alors il existe  $(s+t) \leq n$  formes linéaires  $\ell_1, \dots, \ell_s, \ell_{s+1}, \dots, \ell_{s+t} : E \rightarrow \mathbb{R}$  linéairement indépendantes telles que pour tout  $u \in E$

$$q(u) = (\ell_1(u))^2 + \dots + (\ell_s(u))^2 - (\ell_{s+1}(u))^2 - \dots - (\ell_{s+t}(u))^2$$

Il n'y a pas unicité des  $\ell_i$  mais les nombres entiers  $s$  et  $t$  ne dépendent pas de la décomposition choisie (c'est la **signature** de  $q$ ).

**Remarque 12.** On peut déduire le signe de la forme quadratique  $q$  grâce à sa décomposition de Gauss :

1. Si  $t = 0$  alors la forme quadratique  $q$  est positive.
2. Si  $s = 0$  alors la forme quadratique  $q$  est négative.



L'algorithme de Gauss permet de calculer les formes linéaires indépendantes  $\ell_i$ . Soit  $q : E \rightarrow \mathbb{R}$  une forme quadratique. On l'écrit tout d'abord dans une base

$$q(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_i x_j.$$

De deux choses l'une :

1. Il y a au moins un "terme carré" dans l'écriture de  $q$ . C'est à dire, il existe un entier  $1 \leq i \leq n$  tel que  $a_{ii}$  n'est pas nul. On supposera pour simplifier qu'il s'agit de  $a_{11}$  et on note  $a = a_{11}$ . On peut alors écrire  $q$  sous la forme :

$$q(x_1, \dots, x_n) = ax_1^2 + x_1 B(x_2, \dots, x_n) + C(x_2, \dots, x_n)$$

où on a factorisé les termes en  $x_1$  et fait apparaître une forme linéaire  $\mathbf{B} = B(x_2, \dots, x_n)$  et une forme quadratique  $\mathbf{C} = C(x_2, \dots, x_n)$ . On peut alors "compléter le carré" (mise

sous forme canonique) :

$$q(x_1, \dots, x_n) = a \left( x_1 + \frac{\mathbf{B}}{2a} \right)^2 + \mathbf{C} - \frac{\mathbf{B}^2}{4a}$$

On a donc écrit la forme quadratique  $q$  comme somme du carré d'une forme linéaire et d'une forme quadratique où  $x_1$  n'intervient plus (linéairement indépendant). Il suffit alors de réitérer la méthode de Gauss avec  $q'(x_2, \dots, x_n) = \mathbf{C}(x_2, \dots, x_n) - \frac{\mathbf{B}^2(x_2, \dots, x_n)}{4a}$ .

2. Il n'y a que des "termes rectangles" dans l'écriture de  $q$ . Si la forme quadratique est nulle, l'algorithme s'arrête. On suppose pour simplifier que  $a_{12} \neq 0$  et on note  $a = a_{12}$ . On écrit alors  $q$  sous la forme :

$$q(x_1, \dots, x_n) = ax_1x_2 + x_1B(x_3, \dots, x_n) + x_2C(x_3, \dots, x_n) + D(x_3, \dots, x_n)$$

où  $B(x_3, \dots, x_n)$  et  $C(x_3, \dots, x_n)$  sont des formes linéaires et  $D(x_3, \dots, x_n)$  est une forme quadratique. Dans la suite, on note respectivement ces applications  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$ . On factorise alors sous la forme suivante :

$$q(x_1, \dots, x_n) = a \left( x_1 + \frac{\mathbf{C}}{a} \right) \left( x_2 + \frac{\mathbf{B}}{a} \right) + \mathbf{D} - \frac{\mathbf{BC}}{a}$$

Puis on utilise le fait que pour tous réels  $a$  et  $b$  on a  $ab = ((a+b)^2 - (a-b)^2)/4$  pour obtenir finalement :

$$q(x_1, \dots, x_n) = \frac{a}{4} \left( x_1 + x_2 + \frac{\mathbf{B} + \mathbf{C}}{a} \right)^2 - \frac{a}{4} \left( x_1 - x_2 + \frac{\mathbf{C} - \mathbf{B}}{a} \right)^2 + \mathbf{D} - \frac{\mathbf{BC}}{a}$$

Il suffit alors d'itérer la méthode avec la forme quadratique  $q'(x_3, \dots, x_n) = \mathbf{D} - \frac{\mathbf{BC}}{a}$ , qui ne fait plus intervenir que  $x_3, \dots, x_n$ .

**Remarque 13.** Il existe d'autres méthodes pour écrire une forme quadratique sous la forme d'une somme de carrés de formes linéaires indépendantes : la diagonalisation de la forme quadratique (conjugaison par une matrice orthogonale) et  $q$ -orthonormalisation d'une base de  $E$  (méthode de Lagrange). A noter que pour les matrices définies positives, il existe aussi l'algorithme de Choleski et pour les matrices non définies il existe l'algorithme LDL.

### 3.3.3 Critère de Sylvester ou des déterminants mineurs principaux

**Proposition 3.3.1.** Soit  $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une forme quadratique sur  $\mathbb{R}^2$  de matrice  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

On note  $\Delta_1 = a$  et  $\Delta_2 = (ad - cb)$  et  $\text{tr}(M) = a + d$ . Alors :

1.  $q$  est définie positive ssi  $\Delta_1 > 0$  et  $\Delta_2 > 0$  ssi  $\text{tr}(M) > 0$  et  $\Delta_2 > 0$ .
2.  $q$  est définie négative ssi  $\Delta_1 < 0$  et  $\Delta_2 > 0$  ssi  $\text{tr}(M) < 0$  et  $\Delta_2 > 0$ .

*Démonstration.* On se contente d'une illustration sur les matrices diagonales.





□

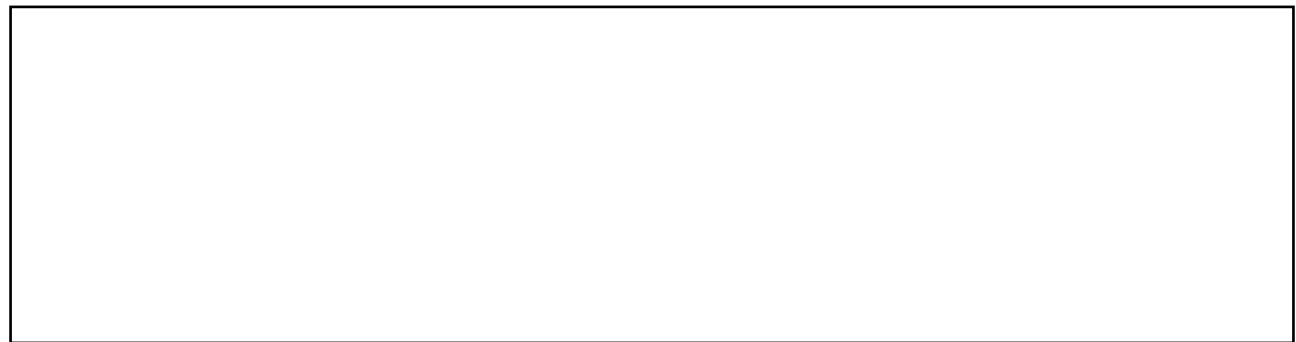
**Proposition 3.3.2.** Soit  $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une forme quadratique sur  $\mathbb{R}^3$  de matrice  $M = (m_{ij})_{i,j=1}^3$ . On note :

$$\Delta_1 = m_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}, \quad \text{et} \quad \Delta_3 = \det(M) = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}.$$

Alors :

1.  $q$  est définie positive ssi  $\Delta_1 > 0$  et  $\Delta_2 > 0$  et  $\Delta_3 > 0$ ,
2.  $q$  est définie négative ssi  $\Delta_1 < 0$  et  $\Delta_2 > 0$  et  $\Delta_3 < 0$ .

*Démonstration.* On se contente d'une illustration sur les matrices diagonales.



□



# Bibliographie

- [1] A. Bodin et al. *exo7 - Cours de mathématiques Première année*. <http://exo7.emath.fr/cours/cours-exo7.pdf>.
- [2] J.P. Ramis, A. Warusfel, X. Buff, J. Garnier, E. Halberstadt, T. Lachand-Robert, et al. *Mathématiques Tout-en-un pour la Licence 1. Cours complet, exemples et exercices corrigés Tome 1*. Collection : Sciences Sup, Dunod, 2013 - 2ème édition.