Contrôle continu 2

Durée 1h10. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

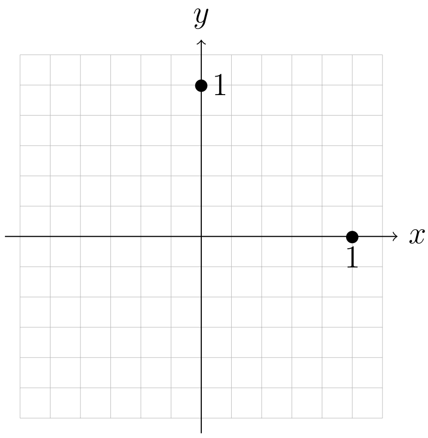
Exercice 1. Soit $u = (2, 1)$ et D la droite vectorielle dirigee par u (*i.e.* $D = \mathbb{R}u$). Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

1. Calculer $d_1(x)$ la distance de x a D en fonction de x_1 et x_2.

2. Calculer $d_2(x) = \langle x, u \rangle$ en fonction de x_1 et x_2.

3. Montrer que $N(x) = \sqrt{5}|d_1(x)| + |d_2(x)|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

4. Dessiner la boule unité pour la norme N.



5. Montrer que N et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.

Exercice 2. Soit la courbe paramétrée $\Gamma = (\mathbb{R}, \phi)$ définie par $\phi(t) = \begin{cases} x(t) = t - \tanh t \\ y(t) = \frac{1}{\cosh t} \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$

1. Étudier la parité des fonctions $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$. Quelle(s) symétrie(s) cela implique-t-il sur le support de la courbe Γ ? Peut on réduire le domaine d'étude ?

2. Calculer ϕ', ϕ'' (on donne $\phi'''(t) = \begin{pmatrix} 2(1 - 2\sinh^2 t)/\cosh^4 t \\ (5\tanh t - 6\tanh^3 t)/\cosh t \end{pmatrix}$) et déterminer si Γ à un/des point(s) stationnaire(s).

3. On se place en $t = 0$: donner la nature du point $\Gamma(0)$ ainsi que le comportement local de la courbe (faire un petit dessin).

4. On se place au voisinage de $t = +\infty$. Étudier la branche infinie (asymptote et position

relative).

5. Compléter le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$	0	∞
signe de $x'(t)$			
variation de $x(t)$			
signe de $y'(t)$			
variation de $y(t)$			

6. Sur le graphique suivant, tracer la courbe Γ ainsi que les tangentes et asymptotes étudiées aux questions précédentes.