Chapitre 5

Limite, continuité et différentiabilité des fonctions de plusieurs variables

But : Étendre les notions de limite, continuité, dérivabilité de fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aux fonctions de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

5.1 Limites de fonctions

Soit E et F deux $\mathbb{R}$ espaces vectoriels de dimension finie munis des normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ respectivement.

5.1.1 Définition

$\mathbb{R}^m$ $\quad$ $\mathbb{R}^n$

Définition 5.1.1 (Limite de fonction). Soit $f : \mathcal{D} \to F$ une fonction définie sur $\mathcal{D} \subset E$ et $a \in E$ un point adhérent à $\mathcal{D}$ (*i.e.* $a \in \bar{\mathcal{D}}$). On dit que f admet une limite $\ell \in F$ en a si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in D$, $\|\underbrace{x-a}_{\in E}\| < \alpha \Rightarrow \|\underbrace{f(x)-\ell}_{\in F}\|' < \varepsilon$.

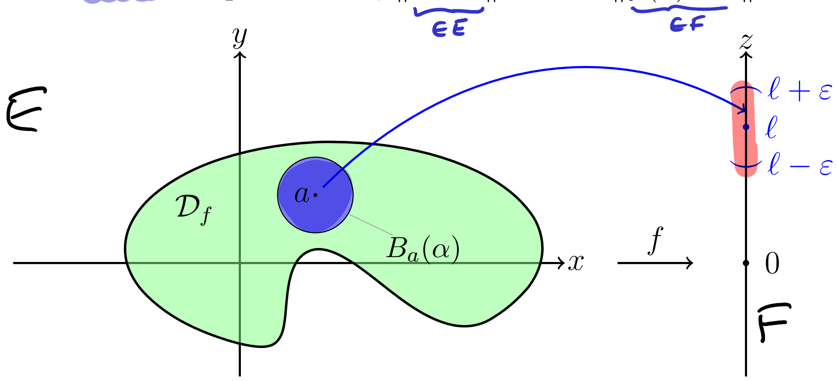


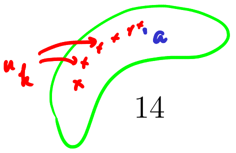
Illustration de la limite $\ell \in \mathbb{R}$ d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en a.

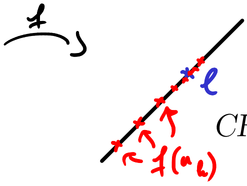
Remarque 1.
1. La définition précédente ne dépend pas du choix des normes sur E et F.
2. La limite d'une fonction est unique.

Définition 5.1.2 Notation de Landau. Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ deux espaces vectoriels normés réels et $f : E \to F$ définie au voisinage de $a \in E$ (c'est à dire au moins sur une boule ouverte $B_r(a) \subset E$) et sauf peut être en a. On dit que $f = o(\|x-a\|^n)$ au voisinage de a si $\frac{\|f(x)\|'}{\|x-a\|^n} \to 0$ quand $x \to a$.

5.1.2 Calculer des limites en pratique

Montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point





Proposition 5.1.1 (Caractérisation séquentielle de la limite). Soit $f : \mathcal{D} \to F$ une fonction définie sur $\mathcal{D} \subset E$ et $a \in E$ un point adhérent à $\mathcal{D}$ (*i.e.* $a \in \bar{\mathcal{D}}$). Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f a pour limite ℓ en a
2. pour toute suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}$ qui converge vers a, la suite $\underbrace{f(\overset{\in E}{u_k})}_{\in F}$ tend vers ℓ.$^{\in F}$

Démonstration.

① ⇒ ② : f cv vers $\ell \in F$ en $a \in \bar{\mathcal{D}}$.

$\forall \varepsilon > 0 ;\ \exists \alpha > 0$ tq $\forall x \in \mathcal{D}$ $\underbrace{\|x - a\| < \alpha}_{x \in B_\alpha^{\|.\|}(a)} \Rightarrow \underbrace{\|f(x) - \ell\|' < \varepsilon}_{f(x) \in B_\varepsilon^{\|.\|'}(\ell)}$

De plus, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}$ tq $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ et on a

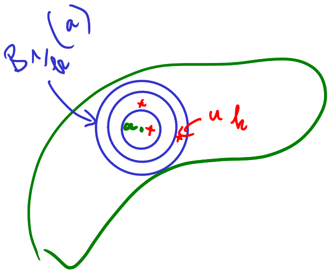
$\exists N > 0$ tq $n \geq N$ $\underbrace{\|u_n - a\| < \alpha}_{u_n \in B_\alpha^{\|.\|}(a)}$

On a donc $\forall n \geq N$, $\|f(u_n) - \ell\|' < \varepsilon$ et $f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

② ⇒ ① : (par contraposée : Mq si $f(x) \underset{x\to a}{\not\to} \ell$ alors $\exists (u_n)_n$ suite de $\mathcal{D}$ telle que $f(u_n) \underset{n\to\infty}{\not\to} \ell$).

Supposé que f n'admet pas de limite ℓ en a. Alors

$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0\ \exists x \in \mathcal{D}$ tq $\|x - a\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\|' > \varepsilon$



En particulier, en prenant $\alpha = \frac{1}{k}$ $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$\exists \varepsilon > 0,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists u_k \in \mathcal{D}$ tq

$\|u_k - a\| < \frac{1}{k}$ et $\|f(u_k) - \ell\|' > \varepsilon$

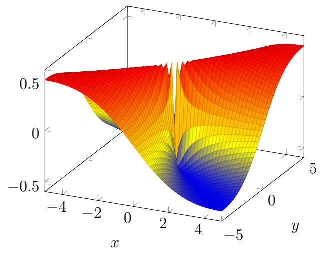
Autrement dit $(u_n)_n$ cv vers le point $a \in \bar{\mathcal{D}}$ et $(f(u_n))_n$ qui ne cv pas vers $\ell \in F$.

□

Pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite, il suffit de trouver deux suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de même limite $a \in \mathcal{D}$ et telles que $(f(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_k))_{k\in\mathbb{N}}$ possèdent des limites différentes.

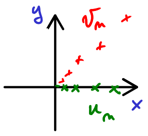
Exemple 5.1.1. Étude de la limite en 0 de $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$



Posons $u_n = \begin{pmatrix}1/n\\0\end{pmatrix}$ tq $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. On a $f(u_n) = f\begin{pmatrix}1/n\\0\end{pmatrix} = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\neq$



$v_n = \begin{pmatrix}1/n\\1/n\end{pmatrix}$ tq $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. on a $f(v_n) = f\begin{pmatrix}1/n\\1/n\end{pmatrix} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$

Montrer qu'une fonction admet une limite en un point

Proposition 5.1.2. Soit $f : \mathcal{D} \to F$, $a \in \bar{\mathcal{D}}$ et $\ell \in F$. S'il existe une fonction $s : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ avec $\lim_{t\to 0} s(t) = 0$ telle que pour tout $x \in D$

$$0 \leq \|f(x) - \ell\|' \leq s(\|x - a\|) \quad (*)$$

alors on a $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

Démonstration.

Comme on a $s(t) \longrightarrow 0$ quand $t \to 0$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tq $t = \|x - a\| < \alpha \Rightarrow s(t) = s(\|a - x\|) < \varepsilon$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \|f(x) - \ell\|' < \varepsilon$

Autrement dit, on a $f(x) \longrightarrow \ell$ quand $x \to a$ —

□

Remarque 2. Pour les fonctions de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cette dernière proposition suggère de passer en coordonnées polaires comme dans l'exemple ci dessous.

Exemple 5.1.2. Calcul de limite en pratique : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \frac{6x^2y}{x^2+y^2}$. Montrons de plusieurs manières que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

1.

on a $E = \mathbb{R}^2$ $\|\cdot\|$ est la norme la norme $\|\cdot\|_1$

$F = \mathbb{R}$ $\|\cdot\|'$ est la valeur absolue.

Pour tout $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ on a $x^2+y^2 \geqslant x^2$. Ainsi :

$$\left| f(x,y) - 0 \right| = \left| \frac{6x^2y}{x^2+y^2} \right| \leqslant \left| \frac{6\cancel{x^2}y}{\cancel{x^2}} \right| = 6|y| \leqslant 6\,(|x|+|y|)$$
$$\leqslant 6 \left\| \binom{x}{y} \right\|_1 = s\left(\left\| \binom{x}{y} \right\|_1 \right)$$

et on a $s(t) = 6t$. Ainsi f cv vers 0 quand $\binom{x}{y}$ tend vers $\binom{0}{0}$.

2. passage en coordonnées polaires :

On a $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

$$\left| f(x,y) - 0 \right| = \left| \frac{6\cancel{r^2}\cos^2\theta \; r\sin\theta}{\cancel{r^2}} \right| = 6r\,|\cos^2\theta\sin\theta| \leqslant 6r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

or $r = \sqrt{x^2+y^2} = \left\| \binom{x}{y} \right\|_2$ et $s(t) = 6t$.

Et f tend vers 0 en l'origine.

5.2 Fonctions continues

Soient E et F deux $\mathbb{R}$ espaces vectoriels de dimension finie munis des normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ respectivement. Dans la suite on note $\mathcal{D}$ un domaine de E et $\mathcal{U}$ un ouvert de E.

5.2.1 Définition et propriétés

Définition 5.2.1. Soit $f : \mathcal{D} \to F$ et $a \in \mathcal{D}$. On dit que f est **continue** en a si

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in\mathcal{D}}} f(x) = f(a).$$

$\shortparallel$ $f\left(\lim_{x\to a} x\right)$

La continuité est une notion **locale**. On dit que f est continue sur $\mathcal{D}$ si f est continue en tout point de $\mathcal{D}$.

Exemple 5.2.1. Si $E = \mathbb{R}^n$ les fonctions polynômiales sont continues. En particulier si $E = \mathbb{R}^2$, $s(x,y) = x+y$ et $p(x,y) = xy$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$. les applications linéaires sont $\mathcal{C}^0$.

Définition - Proposition 5.2.1. Soit $f : \mathcal{D} \to F$ et $a \in \bar{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathcal{D} \cup \{a\}$ par $\tilde{f}(a) = \ell$ et $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$ est l'unique fonction continue en a dont la restriction à $\mathcal{D}$ est f. On appelle $\tilde{f}$ le **prolongement par continuité** de f à $\{a\}$.

Exemple : 5.1.2 $f(x,y) = \frac{6x^2y}{x^2+y^2}$ définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ et

$$\tilde{f}\binom{x}{y} = \begin{cases} 0 & \text{si } \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \\ \frac{6x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\} \end{cases}$$

définit sur $\bar{\mathcal{D}} = \mathbb{R}^2$.

On peut faire le lien entre topologie et continuité :

Théorème 5.2.1. Soit $f : E \to F$ une fonction continue :

(i) si $\mathcal{O} \subset F$ un ensemble ouvert, alors $f^{-1}(\mathcal{O}) \subset E$ est un ouvert.

(ii) si $\mathcal{F} \subset F$ un ensemble fermé, alors $f^{-1}(\mathcal{F}) \subset E$ est un fermé.

(*iii*) si $K \subset E$ un ensemble compact, alors $f(K) \subset F$ est une partie compacte de F.

Démonstration. Admis dans ce cours. □

Remarque 3. Si $F = \mathbb{R}$, la propriété (*iii*) implique que f est bornée (et atteint ses bornes) sur K.

5.2.2 Opérations sur les fonctions continues

La continuité est stable par les opérations algébriques usuelles :

Structure d'espace vect

Proposition 5.2.1. Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés et $\mathcal{D} \subset E$:

(*i*) Addition : $f, g : \mathcal{D} \to F$ continues en $a \in \mathcal{D}$ alors $f + g$ est continue en a

(*ii*) Multiplication par un scalaire : $f : \mathcal{D} \to F$ continue en a alors λf est continue en a.

(*iii*) Multiplication (cas de $F = \mathbb{R}$) : $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ continues en a alors fg est continue en a.

(*iv*) Inverse (cas de $F = \mathbb{R}$) : $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ continue en a et $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est continue en a.

(*v*) Composition : $f : \mathcal{D} \to F$ et $g : F \to G$. Si f est continue en $a \in \mathcal{D}$ et g est continue en $f(a) \in F$, alors $g \circ f : \mathcal{D} \to G$ est continue en a.

Démonstration.

Exemple 5.2.2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $(x,y) \longmapsto \begin{cases} xy/x^2+y^2 & \text{si } \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$

Pour montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ on remarque que

- $(x,y) \mapsto xy$ est continue sur $\mathbb{R}^2$
- $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, mais s'annule en $\binom{0}{0}$.
  (↳ comme est produit de fonction continue)

Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ par iv).

5.2.3 Fonctions partielles

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Pour tout $a \in E$ on note $(a_1, \cdots, a_n)$ les coordonnées de a dans la base $\mathcal{B}$.

Définition 5.2.2. Soit $f : E \to F$ et $a = (a_1, \cdots, a_n) \in E$. On définit la i-ème application partielle de f en a par

$$\begin{aligned} f_a^i : \mathbb{R} &\to F \\ t &\mapsto f(a_1, \cdots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \cdots, a_n) \end{aligned}$$

restriction de f à la droite $\mathcal{D}_a^i = \mathrm{Vect}\{e_i\} + a$
on note $f|_{\mathcal{D}_a^i}$

Proposition 5.2.2. Si f est continue en $a = (a_1, \cdots, a_n) \in E$ chacune de ses applications partielles f_a^i est continue en $a_i \in \mathbb{R}$ avec $i = 1, \cdots, n$.

En effet, f_a^i est la composée $t \xmapsto{C^0} a + t e_i \xmapsto{C^0} f(a + t e_i)$ de 2 fonctions C^0.

Remarque 4. La réciproque est fausse : la fonction $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

on se place en $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f^1_{(0,0)}(t) = f(t,0) = \frac{t \times 0}{t^2 + 0} = 0$ fonction cte nulle.

$f^2_{(0,0)}(t) = f(0,t) = \frac{0 \times t}{0 + t^2} = 0$ fonction cte nulle

Et les 2 fonctions partielles sont $\mathcal{C}^0$, mais f n'est pas $\mathcal{C}^0$ en $(0,0)$.
(cf exemple 5.2.2)

5.3 Dérivées partielles

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert d'un espace vectoriel normé E.

Définition 5.3.1 (Dérivée suivant un vecteur). Soit $a \in \mathcal{U}$ et $v \in E$ avec $v \neq 0$. On dit que f admet une dérivée en a suivant la direction v si l'application $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en $t = 0$. Dans ce cas on note :

droite qui passe par a et dirigée par v.

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

fonctions coordonnées.

Remarque 5. Dans le cas où $F = \mathbb{R}^p$, on a $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}$. Et la limite dans la définition précédente est égale à

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \begin{pmatrix} f_1(a + tv) - f_1(a) \\ \vdots \\ f_p(a + tv) - f_p(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

Définition 5.3.2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Étant donné $a \in \mathcal{U}$, la i-ème **dérivée partielle** de f en a est, lorsqu'elle existe, la dérivée de f en a suivant le vecteur e_i avec $i = 1, \cdots, n$. On la note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ et on a

dérivée directionnelle de f en a suivant $v = e_i$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \doteq D_{e_i} f(a)$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \cdots, a_i + t, \cdots, a_n) - f(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n)}{t}.$$

Si, de plus, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe en tout point $a \in \mathcal{U}$, on définit la i-ème **fonction dérivée partielle** de f par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathcal{U} \to F$$
$$a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Exemple 5.3.1. Calcul des dérivées partielles de la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

① En $(x,y) \neq (0,0)$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(\cancel{x^2}+y^2) - \cancel{2}x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3 - y^2x}{(x^2+y^2)^2}$$

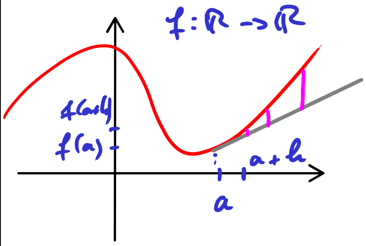
② En $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = D_{e_1} f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(h,0)}} - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0,0)}}}{h} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = D_{e_2} f(0,0) = 0$$

Les applications dérivées partielles sont bien définies sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

5.4 Fonctions différentiables

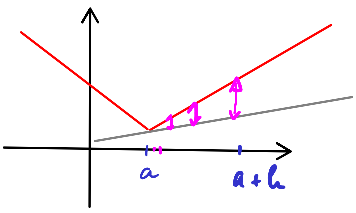
Exemple 5.4.1. Retour sur les fonctions réelles dérivables.



Si f est "régulière" elle peut être approximée en $a \in \mathbb{R}$:

$$f(a+h) = f(a) + h\, f'(a) + o(|h|)$$

$$f(a+h) - f(a) = \underbrace{h\, f'(a)}_{\text{application linéaire } h \mapsto h f'(a)} + o(|h|)$$



Ainsi, à chaque $a \in \mathbb{R}$ correspond une application linéaire $h \mapsto h\, f'(a)$ qui approxime correctement f en a.

on dit que, c'est un champs de forme linéaire

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ a &\longmapsto (h \mapsto h\, f'(a)) \end{aligned}$$

5.4.1 Définition et propriétés

Soit E et F deux $\mathbb{R}$ espaces vectoriels de dimension finie munis des normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ respectivement.

Définition 5.4.1 (Différentiabilité en a). Soit $f : E \to F$ définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ et $a \in \mathcal{U}$.

On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $\varphi_a : E \to F$ telle que

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - \varphi_a(h)\|'}{\|h\|} \xrightarrow[\substack{h \to 0_E \\ h \neq 0_E}]{} 0$$

$f(a+h) - f(a) - \varphi_a(h)$ est un petit o de $\|h\|$.

Avec la notation de Landau cela s'écrit :

$$f(a+h) = f(a) + \varphi_a(h) + o(\|h\|), \quad \text{quand } h \to 0$$

Contrairement aux dérivée partielles ou directionnelles, la notion de différentiabilité implique la continuité :

Proposition 5.4.1. Si f est différentiable en a alors f est continue en a.

Démonstration. $f : E \to F$

Par hypothèse, on a :

$$f(a+h) - f(a) = \varphi_a(h) + o(\|h\|)$$

où $\varphi_a : E \to F$ linéaire et donc continue (car E, F sont dimension finie). Cela implique : $\exists K \in \mathbb{R}$ tq $\sup \frac{\|\varphi_a(h)\|'}{\|h\|} = K$

et $\|\varphi_a(h)\|' \leq K\|h\|$. Ainsi

$$\|f(a+h) - f(a)\|' = \|\underbrace{\varphi_a(h)}_{\substack{\to 0 \\ h \to 0}} + \underbrace{o(\|h\|)}_{\substack{\to 0 \\ h \to 0}}\|' \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

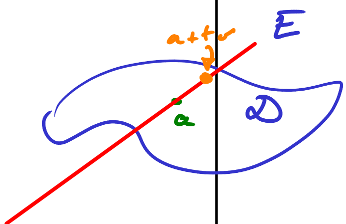
et f C^0 en a. □

Proposition 5.4.2. Si f est différentiable en a, f admet en a une dérivée suivant tout vecteur $v \neq 0$. De plus, cette dérivée vaut $\varphi_a(v)$.

Démonstration. $f : E \to F$ diff. en a et définie sur $\mathcal{D} \subset E$

Par définition : $f(a+h) = f(a) + \varphi_a(h) + o(\|h\|)$

Soit $v \in E$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $(vt + a) \in \mathcal{D}$



$$f(a+tv) = f(a) + \varphi_a(tv) + o(\|tv\|)$$
$$= f(a) + t\,\varphi_a(v) + \underbrace{o(|t|)}_{\to 0} \text{ qd } |t| \to 0.$$

et $\lim \underbrace{\frac{f(a+tv) - f(a)}{t}}_{= D_v f(a)} = \varphi_a(v)$ □

Définition - Proposition 5.4.1. Si f est différentiable en a, l'application linéaire $\varphi_a : E \to F$ est définie de manière unique. Elle est appelée **différentielle** de f en a et est notée $d_a f$.

Démonstration. Montrons l'unicité. On suppose qu'il y en a 2 et on montre qu'ils sont identiques (i.e leur différence est 0).

Supposons qu'il existe $\varphi_a, \phi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linéaire tq

$f(a+h) = f(a) + \varphi_a(h) + o(\|h\|)$ et $f(a+h) = f(a) + \phi_a(h) + o(\|h\|)$

Par différence on a :

$\|\varphi_a(h) - \phi_a(h)\|' = o(\|h\|)$ ce qui signifie

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall h \in E \quad \|h\| < \alpha \Rightarrow \|\varphi_a(h) - \phi_a(h)\|' \leq \varepsilon \|h\|$

quitte à poser $x = t h \in E$ avec $t \in \mathbb{R}$ on a

$\|\varphi_a - \phi_a(x)\|' \leq \varepsilon \|x\|$

Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\varphi_a - \phi_a = 0$ (application linéaire nulle)

□

Proposition 5.4.3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $h = h_1e_1 + \cdots + h_ne_n \in E$. Soit $f : E \to F$ une application différentiable en $a \in E$, alors $\underbrace{d_af(\underbrace{h}_{\in E})}_{\in F} = h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + \underbrace{h_n}_{\in \mathbb{R}}\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)}_{\in F}$

Démonstration.

On a d'après la définition/proposition précédente :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_{e_i} f(a) = d_a f(e_i)$$

Comme $d_a f : E \to F$ est linéaire

$$d_a f(h) = d_a f(h_1 e_1 + h_2 e_2 + \dots + h_n e_n) = h_1 d_a f(e_1) + \dots + h_n d_a f(e_n)$$

$$= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

□

Notation : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Pour tout $i = 1, \cdots, n$, on note $\underbrace{dx_i : E \to \mathbb{R}}$ l'application linéaire duale de e_i définie par

$$dx_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors $dx_i(h) = h_i$ (en d'autres termes dx_i renvoie la i-ème coordonnée de $h \in E$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$). On note alors

$$\underbrace{d_af}_{\in \mathcal{L}(E,F)} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \cdots + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)}_{\in F}\underbrace{dx_n}_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$$

Proposition 5.4.4 (Cas de $E = \mathbb{R}$). Soit $f : \mathbb{R} \to F$. La fonction f est différentiable en a si et seulement si f est dérivable en a et alors d_af est définie par :

$$d_af(h) = hf'(a)$$

$d_a f : \mathbb{R} \to F$

$h \mapsto h f'(a)$

pour tout $h \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

Les deux définitions sont équivalentes dans ce cas :

$$f(a+h) = f(a) + h A + o(\|h\|)$$

$$\text{où } A = f'(a) = d_a f(1)$$

□

Remarque 6. Si $F = \mathbb{R}^n$ on a alors $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ et $f'(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_n'(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Proposition 5.4.5 (Linéarité de la différentielle). Soient $f, g : E \to F$ différentiables en $a \in E$. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a avec

$$d_a(\lambda f + \mu g) = \lambda d_a f + \mu d_a g.$$

Démonstration.

f et g différentiable en $a \in E$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda f(a+h) = \lambda f(a) + \lambda d_a f(h) + o(\|h\|)$$

$$+ \quad \mu g(a+h) = \mu g(a) + \mu d_a g(h) + o(\|h\|)$$

$$[\lambda f + \mu g](a+h) = [\lambda f + \mu g](a) + \boxed{\lambda d_a f(h) + \mu d_a g(h)} + o(\|h\|)$$

$$= d_a(\lambda f + \mu g)(h)$$

par unicité de la différentielle.

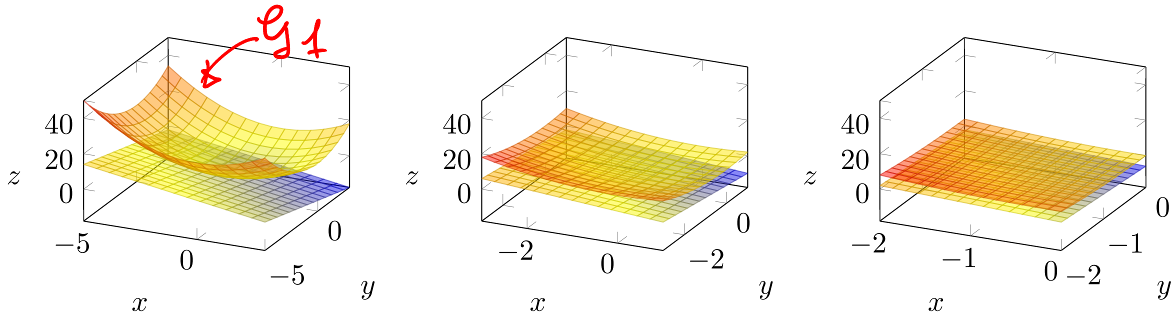
□

5.4.2 Plan tangent

Proposition 5.4.6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ et différentiable en $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$. Le plan tangent à $\mathcal{G}_f$ en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a pour équation :

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Remarque 7. L'application L est bien définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.



Graphe de la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ et le plan tangent au point $(\underbrace{-1}_{= x_0}, \underbrace{-1}_{= y_0}, f(-1,-1))$. On représente trois niveau de “zoom” vers ce point.

5.4.3 Vecteur gradient

$F = \mathbb{R}$

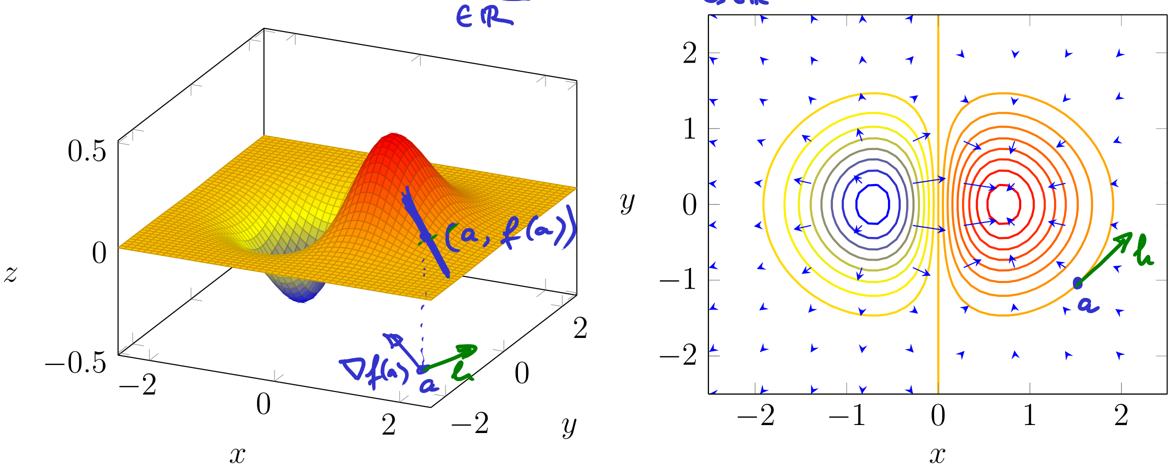
Dans cette section, on considère des applications définies sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles. On note aussi $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 5.4.2. Soit $a \in \mathcal{U}$. On appelle **gradient** de $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ en a le vecteur

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 5.4.7. Pour tout $a \in \mathcal{U}$ le gradient est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on ait

$$\underbrace{d_a f(h)}_{\in \mathbb{R}} = \langle \overbrace{\nabla f(a)}^{\in \mathbb{R}^n}, \overbrace{h}^{\in \mathbb{R}^n} \rangle \in \mathbb{R}$$



Graphe, lignes de niveau et gradient de la fonction $(x,y) \mapsto xe^{-x^2-y^2}$.

Remarque 8.

① le vecteur gradient est $\perp$ aux lignes de niveau :
En effet, suivre la ligne de niveau en a dans E, c'est aller dans la direction $h \in E$ de la tangente à la ligne de niveau. C'est aussi rester à $f = \text{cte}$. Et donc

$$d_a f(h) = 0 = \langle \nabla f(a), h \rangle \iff \nabla f(a) \perp \text{direction tg à la ligne de niveau}$$

(2) le gradient est la direction de plus forte pente.

En effet $h \mapsto \langle \nabla f(a), h \rangle$ est maximum quand h est colinéaire à $\nabla f(a)$

↳ (chap 3 – Cauchy Schwarz)

5.4.4 Matrice jacobienne

$f : E \to F$

Définition 5.4.3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_p)$ une base de F. On suppose f différentiable en $a \in E$. La matrice de l'application linéaire $d_a f : E \to F$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est appelée **matrice jacobienne** de f en a. On la note $\mathrm{Jac}_f(a)$.

Remarque 9. On a donc $\mathrm{Jac}_f(a) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(d_a f)$

Proposition 5.4.8. On a avec les notations précédentes :

$i^{\text{ème}}$ fonction coordonnée $i \to$

$$\mathrm{Jac}_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

où $n = \dim E$ et $p = \dim F$.

j dérivée par rapport à la direction e_j

Démonstration.

Par définition, $\mathrm{Jac}_f(a) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(d_a f)$

Pour tout $j = 1, .., n$ on a

$$d_a f(e_j) = D_{e_j} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \in F$$

Dans la base $\mathcal{B}'$ on a

$$f(a) = f_1(a) e'_1 + \cdots + f_p(a) e'_p$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) e'_1 + \cdots + \frac{\partial f_p}{\partial x_j}(a) e'_p$$

□

Définition 5.4.4. On suppose que $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$. Le déterminant de la matrice $\mathrm{Jac}_f(a)$ est alors appelé **jacobien** de f en a.

3 blue 1 brown

Notation : On note parfois $\frac{D(f_1, \cdots, f_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)} = \det(\mathrm{Jac}_f(a))$.

Exemple 5.4.2. Changement de coordonnées polaires : On a $E = F = \mathbb{R}^2$ et on pose $\psi :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Calcul du jacobien.

$$\Psi :]0,+\infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(r, \theta) \longmapsto (\underbrace{r\cos\theta}_{\Psi_1(r,\theta)}, \underbrace{r\sin\theta}_{\Psi_2(r,\theta)})$$

Alors Ψ est différentiable sur $]0,+\infty[\times \mathbb{R}$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \qquad \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial r}(r,\theta) = \sin\theta \qquad \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta}(r,\theta) = r\cos\theta$$

$$\Rightarrow \mathrm{Jac}_\Psi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(\mathrm{Jac}_\Psi(r,\theta)) = \cos^2\theta\, r + \sin^2\theta\, r$$
$$= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r\ .$$

remarque 1) : $\mathrm{Jac}_\Psi(r,\theta)$ est tj inversible

2) : dans le changement de variable en intégration :
" $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ "