Examen

Durée 3h00. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. On considère le domaine $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;;\quad 0 \leq z \leq 1,\;\; x^2 + y^2 \leq z^4\}$.

1. Dessiner D.
2. Calculer son volume V.
3. Calculer son centre de gravité $G = \frac{1}{V}\left(\iiint_D x dxdydz, \iiint_D y dxdydz, \iiint_D z dxdydz\right)$.

Exercice 2. Un joueur dispose d'un dé et d'une pièce. Le dé est équilibré et la pièce a une probabilité p $(0 < p < 1)$ de tomber sur pile. Le joueur lance d'abord le dé, puis lance la pièce autant de fois que le résutlat du dé. Il compte enfin le nombre de piles obtenu au cours des lancers. Les résultats de chaque lancer sont indépendants. On note $q = 1 - p$. On note également D la variable aléatoire correspondant à la valeur du dé et X celle correspondant au nombre de piles obtenus à la fin du jeu.

1. Soit $i \in \{1, \cdots, 6\}$ et $j \in \{0, 1, \cdots, 6\}$. Que vaut $\mathbb{P}(X = j | D = i)$?
2. Montrer que $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{q}{6}\left(\frac{1-q^6}{1-q}\right)$
3. Sachant que l'on n'a obtenu aucun pile au cours du jeu, quelle était la probabilité que le résultat du dé était 1 ? Évaluer cette quantité quand $p = q = \frac{1}{2}$.

Exercice 3. On note $\Delta =]-\infty, 0] \times \{0\}$ et $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ et on pose :

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \mathcal{O} & \longrightarrow &]0, \infty[\times]-\pi, \pi[\\ & (x, y) & \longmapsto & \left(\sqrt{x^2 + y^2}, 2\arctan\left(\dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right) \end{array}$$

1. Montrer que Δ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Que peut-on dire de $\mathcal{O}$?
2. Montrer que $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ et calculer la matrice jacobienne de Φ.
3. En déduire que le déterminant J de la matrice jacobienne de Φ satisfait $J(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{O}$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 + xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue ?
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles ? Les calculer.
3. La fonction f est-elle différentiable ?
4. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 5. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose :

$$\begin{array}{rccl} N : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & a\|(x, y)\|_\infty + b\|(x, y)\|_1 \end{array}$$

1. Dans cette question, on considère un cas particulier en posant $a = -1$ et $b = 1$.
   (a) Tracer alors L, l'ensemble de niveau 1 de N.
   (b) N est définit-elle une norme ?
2. On revient au cas général avec $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose que N est une norme : montrer qu'alors $a + b > 0$ et $(a + 2b) > 0$.
3. On suppose maintenant que $(a, b) \in [0, +\infty[^2 \setminus \{(0, 0)\}$. L'application N est-elle une norme ?