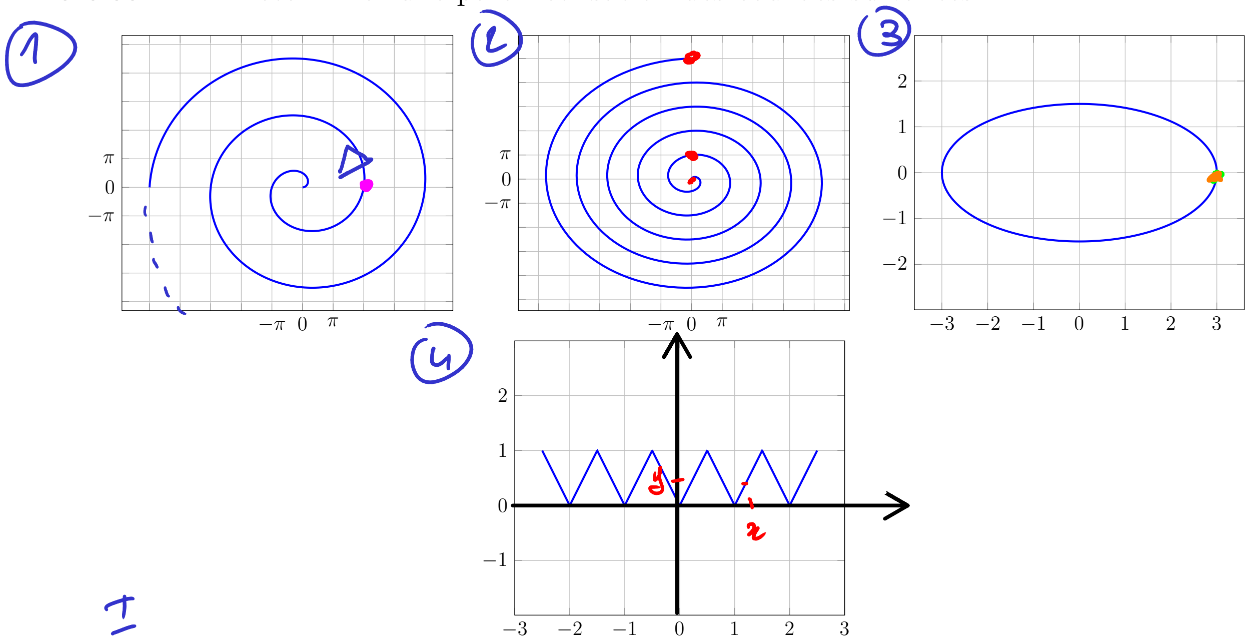
Étude de courbes paramétrées et calculs de longueurs

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

1 Tracer des courbes paramétrées simples

Exercice 1. Déterminer une paramétrisation des courbes suivantes



③ • $\overset{I}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\phi : t \longmapsto \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3/2 \sin t \end{pmatrix}$.

en $t = 2k\pi$; $\phi(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

en $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $\phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

$k \in \mathbb{Z}$

ellipse !

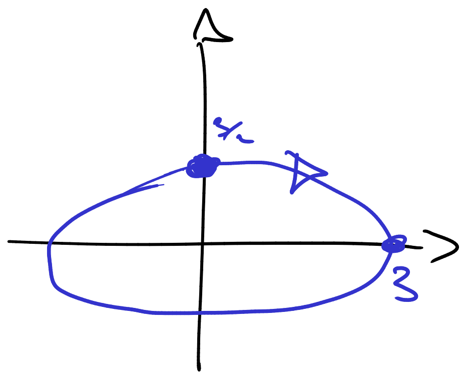
• une autre paramétrisation.

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\phi_1 : t \longmapsto \begin{pmatrix} 3 \sin t \\ 3/2 \cos t \end{pmatrix}$

$\phi_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

$\phi_1(\pi/2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$



remarque : $\theta(t) = -t + \frac{\pi}{2}$ on a $\phi_1 \circ \theta(t) = \phi(t)$

on a $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ et $\phi_1 \circ \theta(0) = \phi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi(0)$

$\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\phi_1 \circ \theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \phi_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$

En résumé : on peut passer de ϕ_1 à ϕ par un chgt de variable affine (c'est un difféomorphisme)

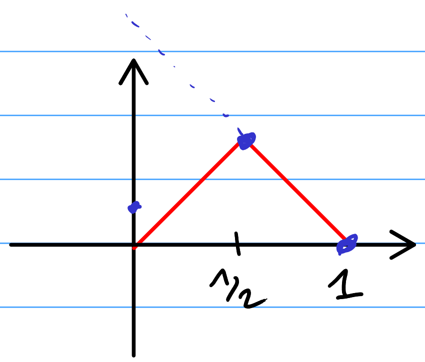
bijectif et $\theta \in \mathcal{C}^1$
$\theta^{-1} \in \mathcal{C}^1$.

(4) c'est le graphe d'une fonction (périodique)

Autrement dit, on peut chercher une courbe de la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- on peut décrire f comme la fonction périodique de période 1 et définie par

$$[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \begin{cases} 2t & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ -2t + 2 & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$



- on peut définir directement f par :

$$f : t \longmapsto 1 - 2\left|\, \left| t - \lceil t \rceil \right| - 1/2 \,\right|$$

où $\lceil \cdot \rceil$ est la fonction partie entière plus 1 "ceil"
$\lfloor \cdot \rfloor$ partie entière "floor"

① Spirale $I = \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$.

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) \\ \sin(\alpha t) \end{pmatrix} t \qquad \alpha = ?$$

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \phi(2\pi) = 2\pi \begin{pmatrix} \cos(\alpha 2\pi) \\ \sin(\alpha 2\pi) \end{pmatrix}$$

Pour déterminer α, on remarque la courbe passe par le point de $\begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$ en $t = 2\pi$

cela donne $\alpha = 1$ et

$$\phi : t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} t$$

② Même idée que précédemment. Mais le sens de parcours change, ainsi que la vitesse de rotation.

On cherche une fonction vectorielle de la forme :

$$\begin{aligned} I = \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto t \begin{pmatrix} \sin(\alpha t) \\ \cos(\alpha t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $\alpha = 2$ (un tour en π unité de temps)

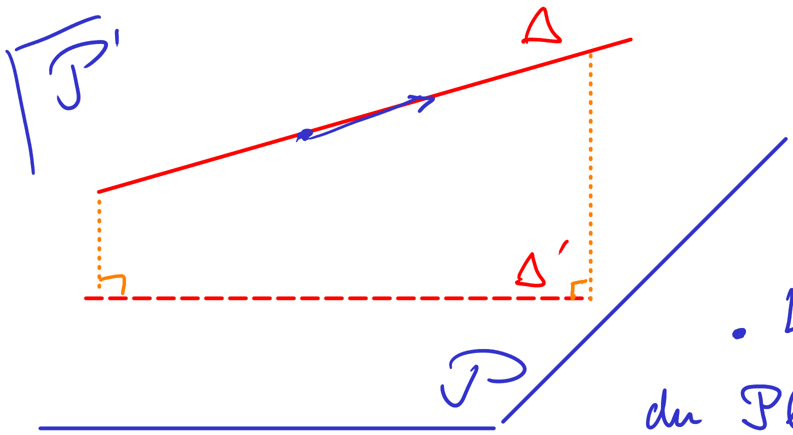
la courbe passe par le point $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (en $t = 0$) et $\begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}$ en $t = \pi$

Exercice 2. Déterminer une paramétrisation de la droite Δ' projettée orthogonale de la droite Δ d'équation :

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

z

dans le plan P d'équation $x + y + z = 1$.



- $\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$
- $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1 \right\}$
- La droite Δ' est l'intersection du Plan P et P' (plan qui contient Δ et qui est perpendiculaire à P)
- le plan P' est unique car Δ n'est pas orthogonale à P.

$$P' = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vecteur normal à P' — vecteur directeur de Δ — car P satisfait l'éq. $x+y+z=1$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & (x-1) \\ 1 & 1 & (y-1) \\ 0 & 1 & (z-2) \end{pmatrix} \right\}$$

on développe le déterminant par rapport à la première colonne:

$$2\big((z-2) - (y-1)\big) - 1\big((z-2) - (x-1)\big) + 0 = 0$$

$$z - 2y + x = 5$$

et $P' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z - 2y + x - 5 = 0 \right\}$

Retour à la droite Δ' qui satisfait

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+z=5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7/3 - z \\ y = -4/3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -1\, t + 7/3 \\ y = 0 . t - 4/3 \\ z = 1 . t + 0 \end{cases}$$

la droite Δ est la courbe paramétrée

$$I = \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} -t + 7/3 \\ -4/3 \\ t \end{pmatrix}$$

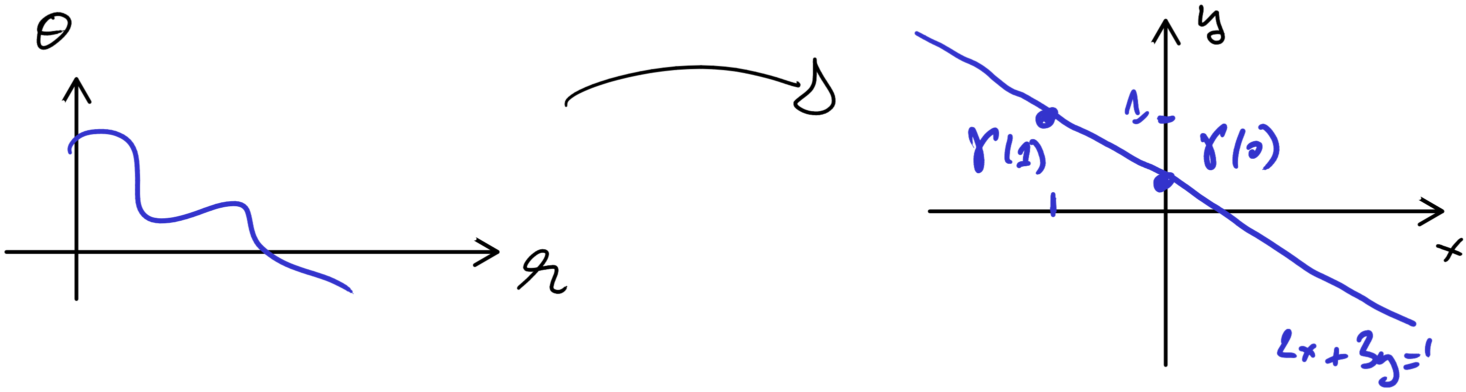
Exercice 3. Tracer, puis déterminer une paramétrisation (en coordonnées cartésiennes) des courbes du plan décrites en coordonnées polaires par

1. $r = \frac{1}{2\cos(\theta)+3\sin(\theta)}$,
2. $r = 4\cos(\theta)$.

remarque : Passage coordonnée polaire / cartésiennes

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta .$$

① $\mathcal{C} = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \mid r \overset{(*)}{=} \frac{1}{2\cos\theta + 3\sin\theta}\}$



$$(*) \iff 2\underbrace{r\cos\theta}_{=x} + 3\underbrace{r\sin\theta}_{=y} = 1$$

$$\iff 2x + 3y = 1$$

Équation d'une droite. Elle passe

$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1/3\end{pmatrix}$

I =

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}0\\1/3\end{pmatrix}(1-t)$$

② On cherche un cercle dans le plan

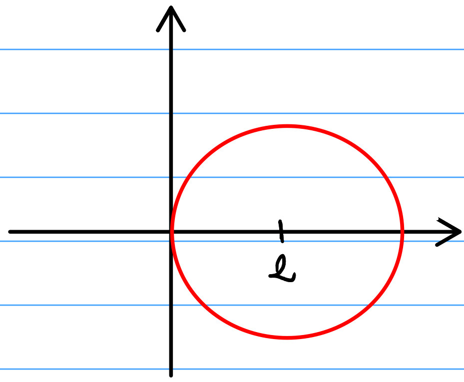
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

centre (a,b) et rayon r

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = 4\cos^2\theta \\ y = r\sin\theta = 4\cos\theta\sin\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\,\dfrac{1+\cos 2\theta}{2} = 2(1+\cos 2\theta) \\ y = 2\sin 2\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2\theta = \dfrac{x}{2} - 1 \\ \sin 2\theta = \dfrac{y}{2} \end{cases}$$



Ainsi comme on a

$$\cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta) = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{y}{2} - 0\right)^2 = 1$$

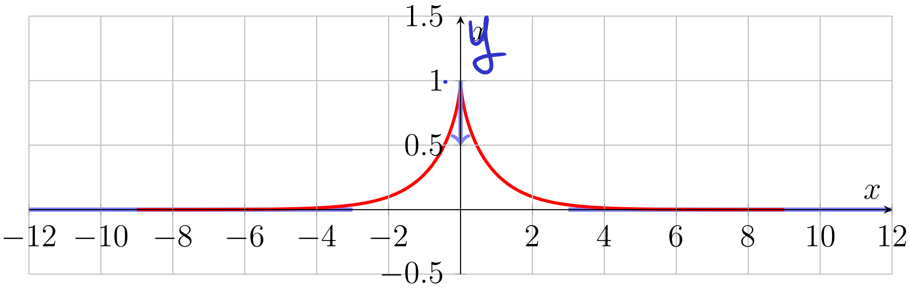
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$$

$\therefore$ cercle de centre $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon 2.

2 Étude de courbes paramétrées

Exercice 4. Soit la courbe paramétrée $\Gamma = (\mathbb{R}, \phi)$ définie par $\phi(t) = \begin{cases} x(t) = t - \tanh t \\ y(t) = \frac{1}{\cosh t} \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$

1. Étudier la parité des fonctions $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$. Quelle(s) symétrie(s) cela implique-t-il sur le support de la courbe Γ ? Peut on réduire le domaine d'étude ?
2. Calculer ϕ', ϕ'' (on donne $\phi'''(t) = \begin{pmatrix} 2(1 - 2\sinh^2 t)/\cosh^4 t \\ (5\tanh t - 6\tanh^3 t)/\cosh t \end{pmatrix}$) et déterminer si Γ à un/des point(s) stationnaire(s).
3. On se place en $t = 0$: donner la nature du point $\phi(0)$ ainsi que le comportement local de la courbe (faire un petit dessin).
4. On se place au voisinage de $t = +\infty$. Étudier la branche infinie (asymptote et position relative).
5. Faire le tableau de variations de Γ.
6. Tracer la courbe Γ ainsi que les tangentes et asymptotes étudiées aux questions précédentes.



center

remarque : f paire ssi $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathcal{D}_f$

f impaire ssi $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in \mathcal{D}_f$

$\mathcal{D}_f$ domaine de déf de f.

1) • $y(-t) = \dfrac{1}{ch(-t)} = \dfrac{1}{ch(t)} = y(t)$ et y est paire.

• $x(-t) = -t - th(-t) = -t - \dfrac{sh(-t)}{ch(-t)} = -t + \dfrac{sh(t)}{ch(t)}$

$= -t + th(t) = -x(t)$ et x est impaire

Ainsi $\phi(-t) = \begin{pmatrix} x(-t) \\ y(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \Rightarrow$ symétrie selon l'axe (Oy)

et il suffit d'étudier la courbe pour $t > 0$.

2) $$\phi'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{ch^2(t)} \\ -\frac{sh(t)}{ch^2(t)} \end{pmatrix}$$

$$\phi''(t) = \begin{pmatrix} \frac{2\, sh\, t}{ch^3 t} \\ \frac{2\, sh^2(t) - ch^2(t)}{ch^3(t)} \end{pmatrix}$$

$\phi'''(t) =$ voir énoncé.

Rappel: Pt stationnaire satisfait

$$\phi'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ie } x'(t) = y'(t) = 0)$$

On a un pt critique en $t = 0$, et il est unique.

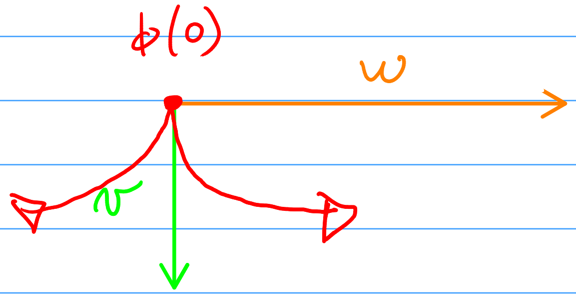
3) Etude locale de Γ en $t = 0$.

$$\phi(0 + h) = \phi(0) + \cancel{h\,\phi'(0)} + \frac{h^2}{2!}\phi''(0) + \frac{h^3}{6}\phi'''(0) + o(|h|^3)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{h^3}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + o(|h|^3)$$

Avec les notations du cours, on a

$p = 2$ et $q = 3$



pt de rebroussement de $1^{ère}$ espèce.

4) Étude du comportement global $t = +\infty$.

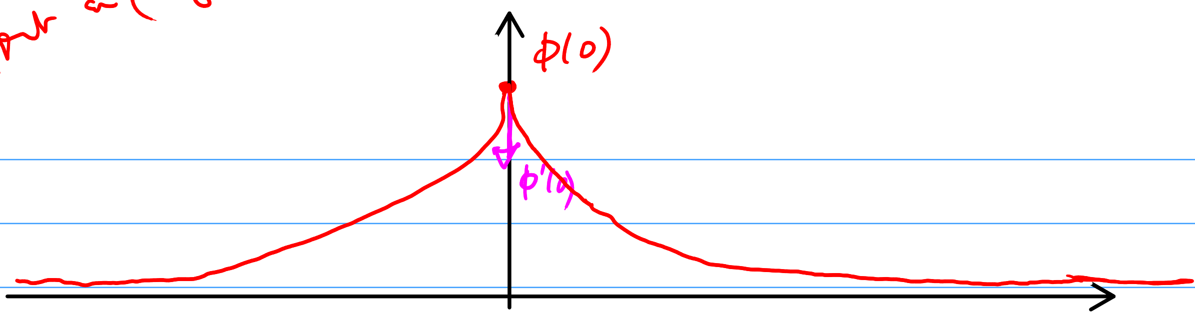
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty \\ \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} t \mapsto \phi(t) \text{ admet une} \\ \text{droite asymptotique} \\ \text{d'équation } y = 0. \end{array}$$

5) tableau de variation de Γ :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $x'(t)$		$+$	0	$+$	
variation de $x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
signe de $y'(t)$		$+$	0	$-$	
variation de $y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

symétrique
par rapport à (Oy)

5)



Exercice 5. (La deltoïde) Soit la courbe paramétrée Γ définie par $\phi(t) = \begin{cases} x(t) = 2\cos t + \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$ pour $t \in [-\pi, \pi]$

1. Étudier la parité des fonctions $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$. Quelle(s) symétrie(s) cela implique-t-il sur le support de la courbe Γ ?

   On a $x(-t) = 2\cos(-t) + \cos(-2t) = 2\cos(t) + \cos(2t) = x(t)$ et la fonction x est paire. De même, $y(-t) = 2\sin(-t) - \sin(-2t) = -2\sin t + \sin 2t = -y(t)$ et la fonction y est impaire. Cela donne une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses.

2. Calculer ϕ', ϕ'' et ϕ'''.

   On a

$$\phi'(t) = \begin{cases} x'(t) = -2\sin t - 2\sin 2t \\ y'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t \end{cases}$$
$$\phi''(t) = \begin{cases} x''(t) = -2\cos t - 4\cos 2t \\ y''(t) = -2\sin t + 4\sin 2t \end{cases}$$
$$\phi'''(t) = \begin{cases} x'''(t) = 2\sin t + 8\sin 2t \\ y'''(t) = -2\cos t + 8\cos 2t \end{cases}$$

3. Soit $t \in [-\pi, \pi[$. Montrer que $\cos(t) - \cos(2t) = 0$ a trois solutions $t = 0$ et $t = 2\pi/3$ et $t = -2\pi/3$.

   Une solution consiste à se souvenir que $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$. Ansi,

$$\begin{aligned} &\cos t - \cos 2t = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\cos t - 2\cos^2 t + 1 = 0 \end{aligned}$$

   En cherchant les racines du polynôme de degré deux, $X \mapsto -2X^2 + X + 1$, on arrive à $\cos t = -1/2$ ou $\cos t = 1$. Ce qui donne le résultat escompté (faire un dessin avec un cercle trigonométrique !).

4. Calculer la position des points stationnaires. Donner leur nature ainsi que le comportement local de la courbe en leur voisinage (faire un petit dessin à chaque fois).

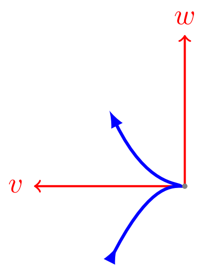
   La question précédentes donne les temps en lesquels y' s'annule. Reste à vérifier si x' s'annule aussi en ces temps. C'est bien le cas, on a

$$x'(0) = x'(2\pi/3) = x'(-2\pi/3) = 0$$

   Il y a donc 3 points stationnaires en $t = -2\pi/3, 0, 2\pi/3$.
   Étude des points stationnaires :
   (a) $t = 0$ on a $\phi(0) = \binom{3}{0}$, $\phi''(0) = \binom{-6}{0}$ et $\phi'''(0) = \binom{0}{6}$. Cela donne le DL suivant,

$$\phi(0+h) = \begin{pmatrix} 3 - 3h^2 + o(|h|^3) \\ h^3 + o(|h|^3) \end{pmatrix}$$

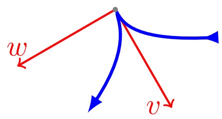
   Avec les notations du cours on a $p = 2$ et $q = 3$. Ainsi, c'est un point de rebroussement de première espèce.



(b) $t = 2\pi/3$ on a $\phi(2\pi/3) = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$, $\phi''(2\pi/3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $\phi'''(2\pi/3) = \begin{pmatrix} -3\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}$. Cela donne le DL suivant,

$$\phi(2\pi/3 + h) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3+3h^2-\sqrt{3}h^3 o(|h|^3) \\ 3\sqrt{3}-3\sqrt{3}h^2-h^3+o(|h|^3) \end{pmatrix}$$

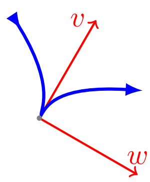
Avec les notations du cours on a $p = 2$ et $q = 3$. Ainsi, c'est un point de rebroussement de première espèce.



(c) $t = -2\pi/3$. C'est l'image par la symétrie axiale du point traité en (b). On a donc : $\phi(-2\pi/3) = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$, $\phi''(-2\pi/3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $\phi'''(-2\pi/3) = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}$. Cela donne le DL suivant,

$$\phi(-2\pi/3 + h) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3+3h^2+\sqrt{3}h^3 o(|h|^3) \\ -3\sqrt{3}+3\sqrt{3}h^2-h^3+o(|h|^3) \end{pmatrix}$$

Avec les notations du cours on a $p = 2$ et $q = 3$. Ainsi, c'est un point de rebroussement de première espèce.



5. Calculer les tangentes aux points stationnaires et montrer qu'elles s'intersectent toutes en un même et unique point.

Il suffit de calculer le point d'intersection de deux des tangentes et de vérifier que la troisème passe bien par ce même point.

Comme la tangente au point $\phi(0)$ est l'axe des abscisses, il suffit de calculer où les 2 autres tangentes coupent cet axe. Par exemple, la tangente au point $\phi(2\pi/3)$ est

$$t \mapsto 3/2\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + 3t\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

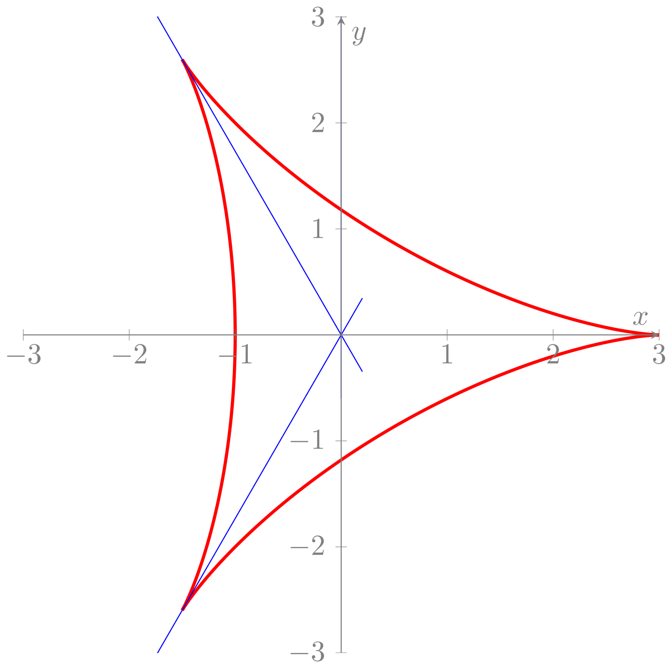
Elle annule sa deuxième coordonnée en $t = 1/2$ en passant par l'origine. Par symétrie, on vérifie immédiatement que la troisième tangente passe elle aussi par l'origine.

6. Faire le tableau de variations associé à ϕ.

On utilise les propriétés de parité de x et de y !

t	$-\pi$		$-2\pi/3$		0		$2\pi/3$		π
signe de $x'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
variation de $x(t)$	-1	$\searrow$	$-3/2$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-3/2$	$\nearrow$	-1
signe de $y'(t)$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0
variation de $y(t)$	0	$\searrow$	$-3\sqrt{3}/2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$3\sqrt{3}/2$	$\searrow$	0

7. Sur le graphique suivant, tracer la courbe Γ ainsi que les tangentes étudiées aux questions précédentes. *Indication : on commencera par tracer les tangentes aux points stationnaires (ces points apparaissent déjà sur le graphique).*



8. La courbe $\Gamma = ([-\pi, \pi[, \phi)$ est-elle paramétrée par l'abscisse curviligne ?

   Non, car la norme de son vecteur dérivée n'est pas constante. En effet, $\|\Gamma'\|^2 = 8(1 - \cos(3t)) = 16\sin^2(3t/2)$ pour tout $t \in]-\pi, \pi]$.

9. Montrer que la longueur de Γ est 16.

$$L = 4\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(3t/2)|\, dt = 12\int_0^{2\pi/3} \sin(3t/2)dt = 8\int_0^{\pi} \sin(t)dt = 8\,[\cos(t)]_{t=0}^{\pi} = 16.$$

Exercice 6.* On se place dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; i, j)$. Étant donné un réel $\alpha > 0$, on note Γ la courbe paramétrée $\phi : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi_\alpha(t) = (1 + \alpha \cos t, \tan t + \alpha \sin t)$$

1. Étude des points stationnaires :
   (a) Dans le cas $\alpha = 1$, étudier les points stationnaires éventuels de la courbe Γ et, pour chacun, donner (en justifiant les calculs) sa nature et l'allure locale de Γ au voisinage.
   (b) Montrer qu'il n'y a pas de point stationnaire pour $\alpha \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
2. Tangentes : discuter, suivant α, le nombre (et la position) des points de Γ admettant une tangente horizontale ou verticale.
3. Un cas particulier : Dans le cas où $\alpha = 8$, étudier la courbe Γ (symétries, variations, étude asymptotique, représentation graphique. . .).
4. Donner l'allure de Γ dans les cas où $\alpha \in]0, 1[$, $\alpha = 1$ et $\alpha > 1$.

3 Calculer des longueurs

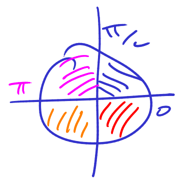
Exercice 7. Tracer le support et calculer la longueur L des courbes Γ dans chacun des cas suivants :

1. Γ est l'*astroïde* de représentation paramétrique $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} a$ où $t \in [-\pi, \pi]$ et $a > 0$ donné.
2. * Γ est l'*arche de cycloïde* de représentation paramétrique $t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} R$, où $t \in [0, 2\pi]$ et $R > 0$ donné.
3. Γ est la *cardioïde* d'équation polaire $t \mapsto \begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1+\cos t) \\ t \end{pmatrix}$ où $t \in [-\pi, \pi]$ et $a > 0$ donné.

1)
$$[-\pi,\pi] \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} a$$
et
$$[-\pi,\pi] \xrightarrow{\phi'} \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto a\begin{pmatrix} -3\cos^2 t \sin t \\ 3\sin^2 t \cos t \end{pmatrix}$$

Calcul de la longueur de Γ

$$L = \int_{-\pi}^{\pi} \|\phi'(t)\|\, dt$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} a\left(9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t\right)^{1/2} dt$$
$$= 3a\int_{-\pi}^{\pi} \left((\cos^2(t)\sin^2(t))\,\cancel{(\cos^2(t)+\sin^2(t))}\right)^{1/2} dt$$
$$= 3a\int_{-\pi}^{\pi} |\cos t \sin t|\, dt$$
$$= 3 \times 4a\int_{0}^{\pi/2} \cos(t)\sin(t)\, dt$$
$$= 12a\left[\frac{1}{2}\sin^2(t)\right]_0^{\pi/2}$$
$$= 6a(1-0)$$
$$= 6a$$



Si $t\in[\frac{\pi}{2},\pi]$ $|\cos t \sin t| = -\cos t \sin t$

Si $x\in[\pi,\frac{3\pi}{2}]$ $|\cos t \sin t| = \cos t \sin t$

Si $x\in[-\frac{\pi}{2},0]$ $|\cos t \sin t| = -\sin t \cos t$

Si $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ $|\cos t \sin t| = \cos t \sin t$

2) $\phi(t) = \begin{cases} x(t) = (t - \sin t)R \\ y(t) = (1 - \cos t)R \end{cases}$; $\phi'(t) = \begin{cases} x'(t) = (1 - \cos t)R \\ y'(t) = R \sin t \end{cases}$

$$\|\phi(t)\|^2 = R^2\left[1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t\right] = 2R^2(1 - \cos t)$$

La longueur de la courbe :

$$L = \int_0^{2\pi} \|\phi'(t)\| \, dt .$$

$$= \sqrt{2} R \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} \, dt = \sqrt{2} R \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2\left(\tfrac{t}{2}\right)} \, dt$$

remarque : • Formule de l'angle double : $\frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) = \sin^2(2\theta)$

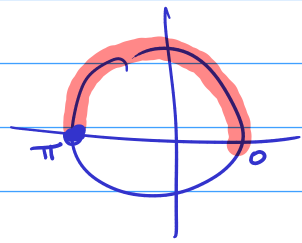
• $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \rightarrow \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

• re (remarque) : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on peut écrire

$f = f_{paire} + f_{impaire}$

où $f_{paire}(x) = \left(f(x) + f(-x)\right)\frac{1}{2}$

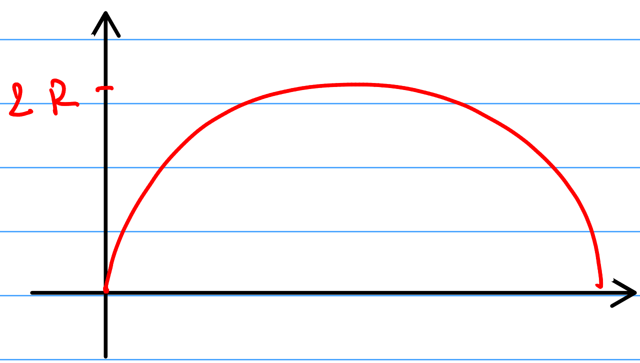
$f_{impaire}(x) = \left(f(x) - f(-x)\right)\frac{1}{2}$



$$= 2R \int_0^{2\pi} \left|\sin \tfrac{t}{2}\right| dt = 2R \int_0^{2\pi} \sin \tfrac{t}{2} \, dt$$

$$= 2R \left[-2\cos \tfrac{t}{2}\right]_{t=0}^{2\pi} = -4R(\underbrace{\cos\pi}_{=-1} - \underbrace{\cos 0}_{=1}) = 8R$$

cycloïde : cf cours.
(deg ±)



3) $]-\pi,\pi[\ni t \xmapsto{\varphi} \begin{pmatrix} r(t) = a(1+\cos t) \\ \theta(t) = t \end{pmatrix} \xmapsto{\psi} \boxed{\begin{pmatrix} x(t) = r(t)\cos(\theta(t)) \\ y(t) = r(t)\sin(\theta(t)) \end{pmatrix}}$

\# coordonnées polaire

\# coordonnées cartesiennes.

$$\xrightarrow{\qquad\qquad\quad \phi \quad\qquad\qquad}$$

Et on cherche à calculer $L = \int_{-\pi}^{\pi} \| \phi'(t) \| \, dt$

- $x(t) = a(1+\cos t)\cos t$ $\qquad x'(t) = -a(\sin t + 2\sin t \cos t)$

- $y(t) = a(1+\cos t)\sin t$ $\qquad y'(t) = a(\cos t + \cos^2 t - \sin^2 t)$

$$\|\phi'(t)\|^2 = a^2\big(\cancel{\sin^2 t} + 4\,\cancel{\sin^2 t\cos^2 t} + 4\,\cancel{\sin^2 t\cos t} + \cancel{\cos^2 t} + \cos^4 t + \sin^4 t + 2\cos^3 t - 2\cos t\,\cancel{\sin^2 t} - 2\,\cancel{\cos^2 \sin^2 t}\big)$$

$$= a^2\big(1 + 2\,\cancel{\sin^2\cos^2 t} + \cancel{\cos^4 t} + \cancel{\sin^4 t} + 2\cos^3 t + 2\sin^2 t\cos t\big)$$

$$= a^2\big(1 + \cos^2(\cancel{\sin^2 + \cos^2}) + \sin^2(\cancel{\cos^2 + \sin^2}) + 2\cos t(\cos^2 t + \sin^2 t)\big)$$

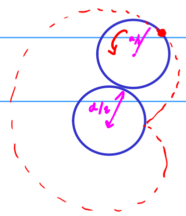
$$= a^2(2 + 2\cos t) = 4a^2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$L = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{4a^2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt = 2a\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\cos^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$$= 2a\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt = 2a\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt$$

$$= 2a\left[2\sin\frac{t}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 4a\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$$

$$= 4a(1+1) = 8a.$$



c'est le lieu géométrique d'un pt sur un cercle roulant (sans glissement) extérieurement, autour d'un cercle de même rayon $\frac{a}{2}$.