Fonctions de plusieurs variables

Benjamin Charlier & Matthieu Hillairet

21 janvier 2021

Table des matières

4 Représentation **5**
4.1 Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ 5
4.1.1 Rappels de bases et définitions 5
4.1.2 Graphe 6
4.1.3 Représentation en couleur 7
4.1.4 Ensembles de niveau 8
4.1.5 Les fonctions partielles 10
4.2 Fonctions de plusieurs variables à valeurs vectorielles 11
4.2.1 Définition 11
4.2.2 Représentation des champs de vecteurs 11

5 Limite, continuité et différentiabilité **13**
5.1 Limites de fonctions 13
5.1.1 Définition 13
5.1.2 Calculer des limites en pratique 13
5.2 Fonctions continues 16
5.2.1 Définition et propriétés 16
5.2.2 Opérations sur les fonctions continues 17
5.2.3 Fonctions partielles 17
5.3 Dérivées partielles 18
5.4 Fonctions différentiables 19
5.4.1 Définition et propriétés 19
5.4.2 Plan tangent 22
5.4.3 Vecteur gradient 23
5.4.4 Matrice jacobienne 24

6 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ **27**
6.1 Définition et propriétés 27
6.1.1 Définition 27
6.1.2 Relation entre les fonctions C^1 et les fonctions différentiables 28
6.2 Composition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ 29
6.3 Difféomorphismes 31
6.4 Fonctions implicites 33

7 Dérivées d'ordres supérieurs et études des extrema **37**
7.1 Dérivées partielles d'ordre supérieur 37
7.1.1 Définitions et propriétés 37
7.1.2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ 39
7.1.3 Formules de Taylor et matrice hessienne 40

7.2 Étude des extrema locaux . . . 41
7.2.1 Définitions . . . 41
7.2.2 Condition nécessaire d'ordre 1 . . . 42
7.2.3 Condition suffisante d'ordre 2 . . . 43
7.2.4 Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ . . . 44

8 Intégrales Multiples **47**
8.1 Détour par les intégrales simples . . . 47
8.1.1 Construction de l'intégrale de Riemann . . . 47
8.1.2 Intégrales à paramètres . . . 48
8.2 Intégrales doubles . . . 49
8.2.1 Intégrales doubles sur un pavé . . . 50
8.2.2 Intégrales doubles sur une partie élémentaire . . . 52
8.2.3 Intégrales doubles sur une partie simple . . . 54
8.2.4 Propriétés . . . 55
8.3 Intégrales triples . . . 56
8.3.1 Intégrales triples sur un pavé . . . 56
8.3.2 Formule de sommation par piles . . . 56
8.3.3 Formule de sommation par tranches . . . 57
8.4 Formule de changement de variables . . . 58
8.4.1 Cas des intégrales doubles . . . 58
8.4.2 Cas des intégrales triples . . . 60
8.5 Circulation d'un champ de vecteurs . . . 61
8.5.1 Définitions et propriétés . . . 62
8.5.2 Champs de Gradient . . . 63
8.5.3 Formule de Green-Riemann (cas $n = 2$) . . . 64

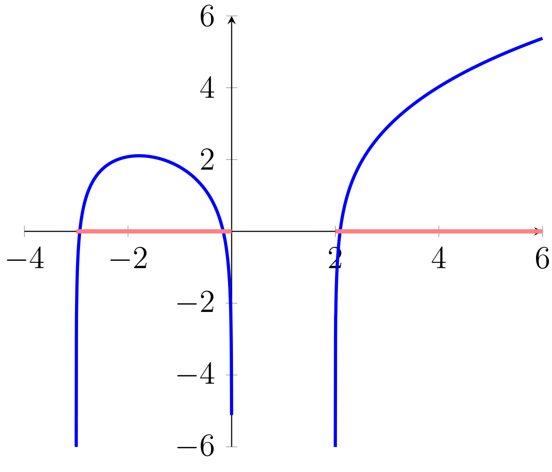
Chapitre 4

Réprésentation des fonctions de plusieurs variables

4.1 Représentation des fonctions de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ à valeurs réelles

4.1.1 Rappels de bases et définitions

Exemple 4.1.1. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par $f(x) = \log(x(x+3)(x-2))$ a pour domaine de définition $\mathcal{D}(f) =]-3, 0[\cup]2, +\infty[$ (en rouge sur le graphique) et pour ensemble image $Im(f) = \mathbb{R}$:

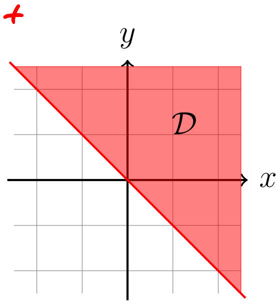


> **Définition 5.1.1.** Une fonction f de plusieurs variables et à valeurs réelles (aussi appelé **champ scalaire**) est une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ Elle fait correspondre à tout point $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\mathcal{D}$ un unique point $y = f(x)$ de $\mathbb{R}$

Dans la suite de ce chapitre nous donnerons principalement des exemples où $n = 2$ et $n = 3$.

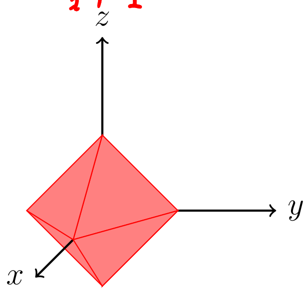
Exemple 4.1.2. Le domaine de définition la fonction $f(x, y) = \sqrt{x+y}$ est l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x, y) \in R^2, x + y \geq 0\}$. C'est la partie du plan suivante :

$y = -x$



Les valeurs prises par la fonction parcourent tout l'ensemble des réels positifs ou nuls : $Im(f) = \mathbb{R}^+$.

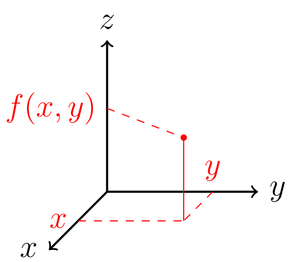
Exemple 4.1.3. Le domaine de définition de la fonction $f(x, y, z) = \ln(1 - |x| - |y| - |z|)$ est l'ensemble $\mathcal{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \underbrace{|x| + |y| + |z|}_{= \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\|_1} < 1\right\}$ qui est représenté ci dessous :



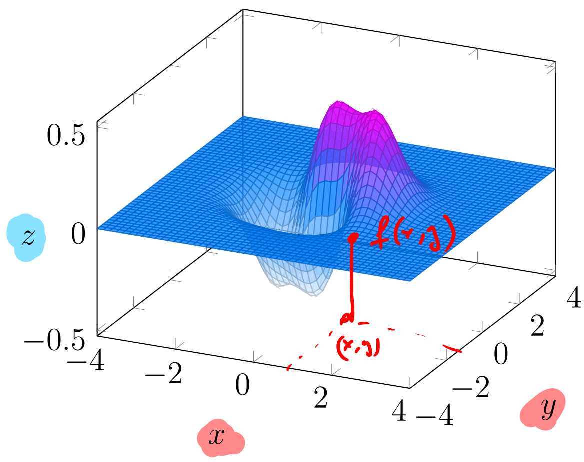
4.1.2 Graphe

Dans le cas des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, le graphe $\mathcal{G}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, (x, y) \in \mathcal{D}\}$ est un sous ensemble de $\mathbb{R}^3$. Lorsque la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est régulière on peut représenter ce graphe comme une surface (on peut penser à un "drap qui flotte") dans $\mathbb{R}^3$.

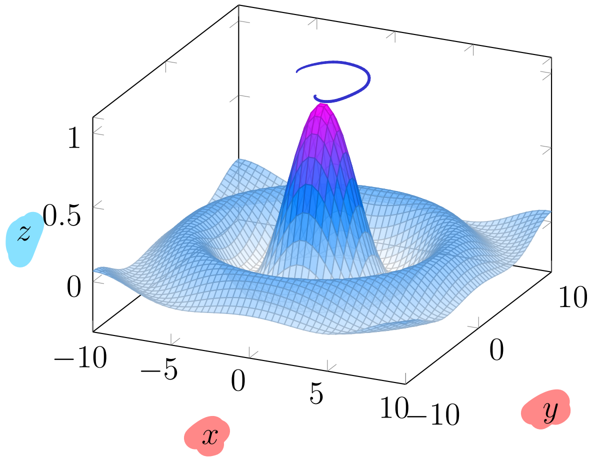
Les axes Ox et Oy (qui forment le plus souvent le plan horizontal dans les représentations graphiques) sont réservés aux variables x et y tandis que l'axe Oz (le plus souvent l'axe vertical) représente la valeur de $z = f(x, y)$. Ainsi, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}(f)$ on a le point $(x, y, f(x, y)) \in \mathcal{G}(f)$.



Exemple 4.1.4. Voici quelques exemples de graphes de fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Les couleurs ne servent qu'à améliorer la lisibilité.

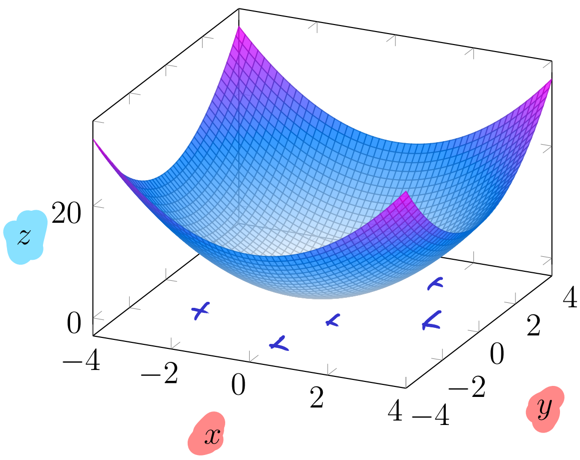


$f(x, y) = (x^3 + y)\exp(-x^2 - y^2)$



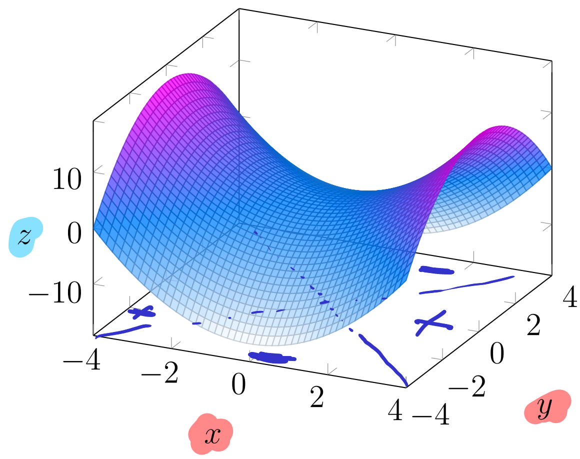
$f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})/\sqrt{x^2 + y^2}$ $= \dfrac{\sin(\|\binom{x}{y}\|_2)}{\|\binom{x}{y}\|_2}$

ne dépend que de la distance à $\binom{0}{0}$



Paraboloïde : $f(x, y) = x^2 + y^2$ $= \|\binom{x}{y}\|_2^2$

forme quad pos.



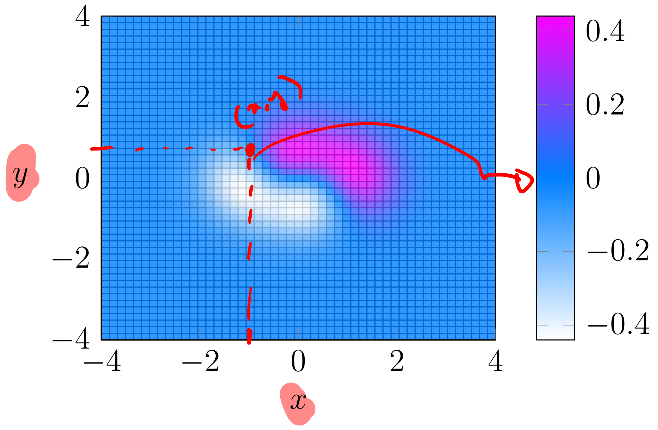
Selle de cheval : $f(x, y) = x^2 - y^2$

forme quad ni pos, ni neg ...

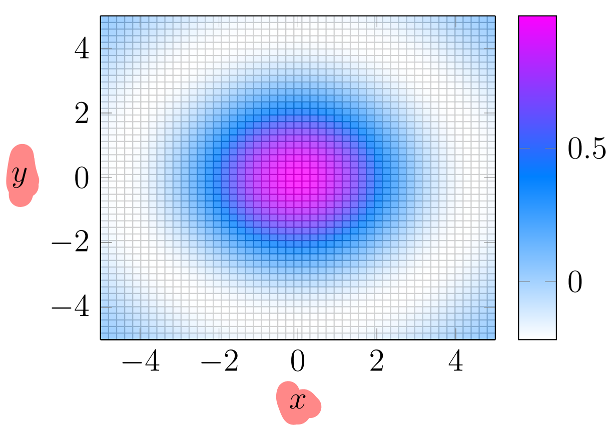
4.1.3 Représentation en couleur

Une image peut être modélisée par une fonction de deux variables à valeurs réelles et définie sur le domaine $[0, 1] \times [0, 1]$.

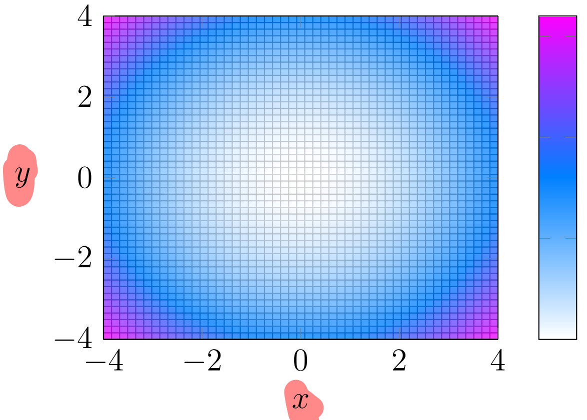
Exemple 4.1.5. Voici les fonctions du paragraphe précédent. Les couleurs codent l'intensité du signal comme l'indique la présence d'une échelle de couleurs à coté de chaque graphique.



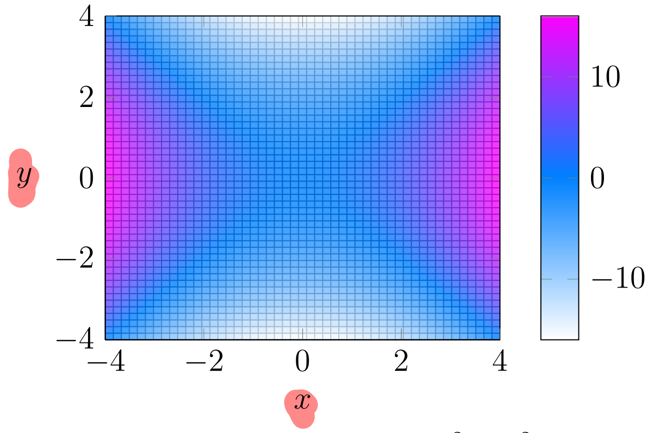
$f(x, y) = (x^3 + y)\exp(-x^2 - y^2)$



$f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})/\sqrt{x^2 + y^2}$

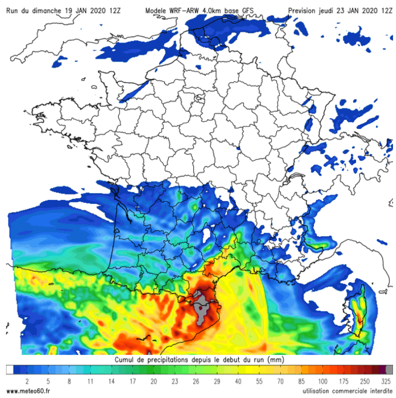


Paraboloïde : $f(x,y) = x^2 + y^2$



Selle de cheval : $f(x,y) = x^2 - y^2$

Exemple 4.1.6. Un exemple issu des prévisions météo donnant les cumuls de pluie prévu par un modèle :

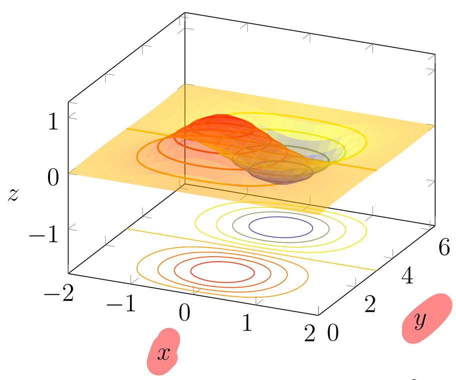


4.1.4 Ensembles de niveau

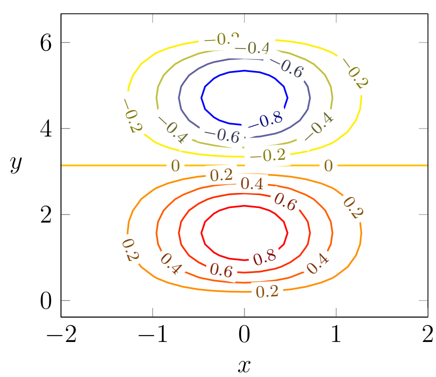
Définition 5.1.2. Étant donnée une fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, l'**ensemble de niveau** $\lambda \in Im(f)$ est

$$L_\lambda(f) = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \lambda\}.$$

Dans le cas des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on parle de **lignes de niveau**. On peut tracer les lignes de niveau en projetant sur le plan horizontal $z = 0$ la courbe donnée par l'intersection du plan horizontal de hauteur λ (*i.e.* le plan d'équation $z = \lambda$) et le graphe de la fonction f.



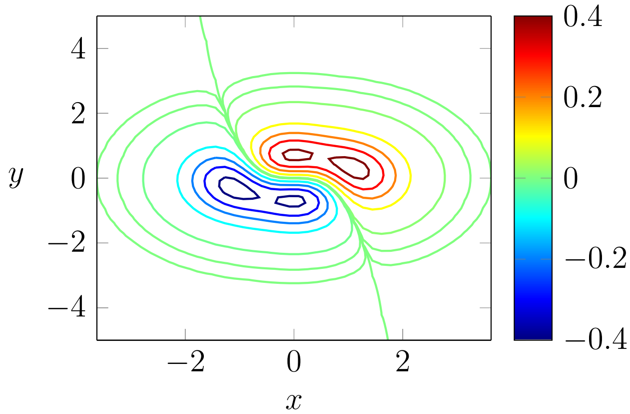
Graphe de $f(x,y) = \sin(y)e^{-x^2}$



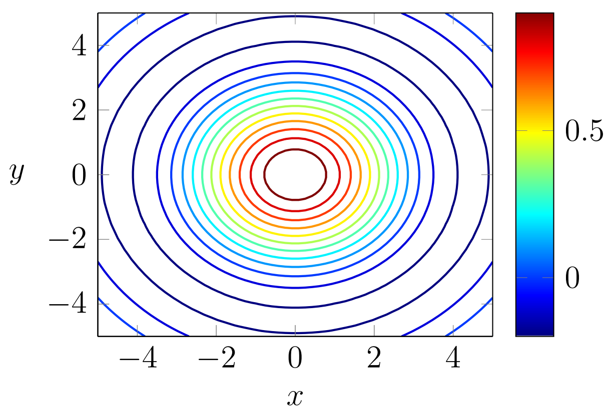
Lignes de niveau de $f(x,y) = \sin(y)e^{-x^2}$

En pratique, on représente simultanément différentes courbes de niveau pour visualiser les différents niveau du graphe. Cette représentation s'apparente aux cartes géographiques où le niveau correspond à l'altitude. En bref, les courbes de niveau d'une fonction $(x, y) \mapsto f(x, y)$ fournissent une représentation géométrique de f dans le plan, alors que son graphe en donne une dans l'espace.

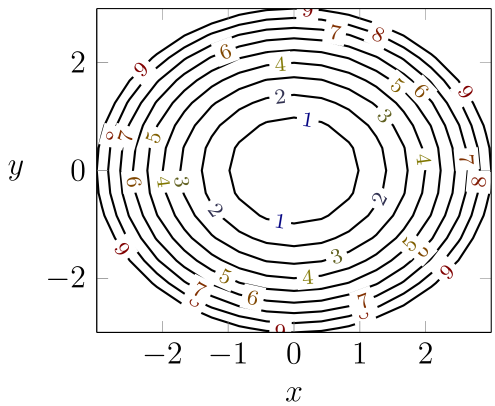
Exemple 4.1.7. Voici les lignes de niveau des fonctions du paragraphe précédent représentées en couleur ou avec des labels.



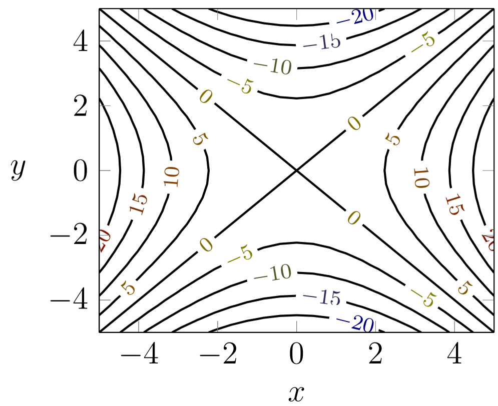
$f(x, y) = (x^3 + y)\exp(-x^2 - y^2)$



$f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})/\sqrt{x^2 + y^2}$

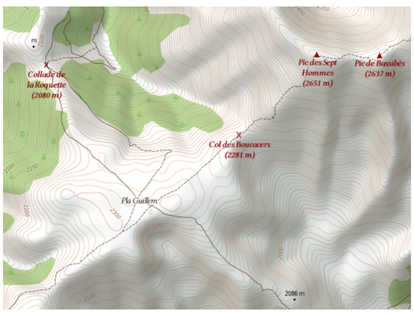


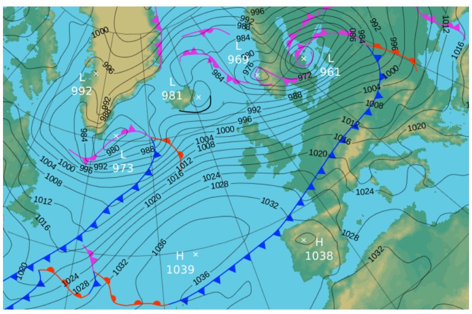
Paraboloïde : $f(x, y) = x^2 + y^2$



Selle de cheval : $f(x, y) = x^2 - y^2$

Quelques exemples de la vie courante :

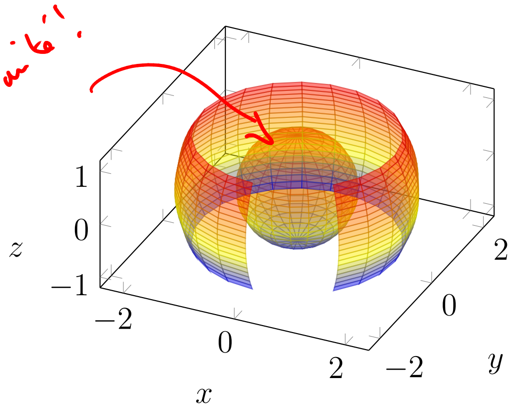




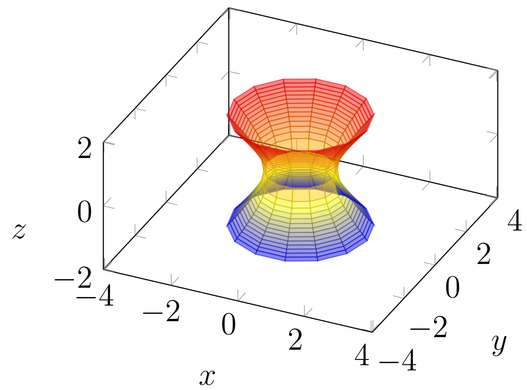
Pour les fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, les ensembles de niveau sont appelés **surfaces de niveau**. Ces surfaces sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ et cela permet de représenter la fonction alors qu'il serait délicat de représenter son graphe, qui est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$.

Exemple 4.1.8. Lorsque la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est polynomiale, on parle de surfaces algébriques. En voici deux exemples classiques :

boule unité !



Sphère : surfaces de niveau 1 et 4 (tronquée) de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ $= \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\|_2^2$

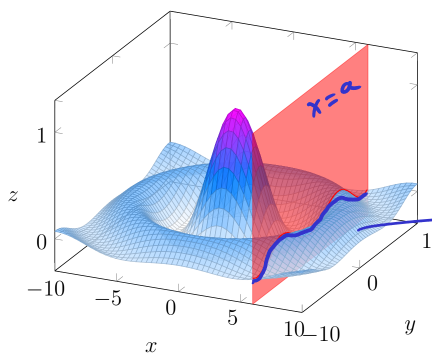


Paraboloïde : Surface de niveau 1 de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

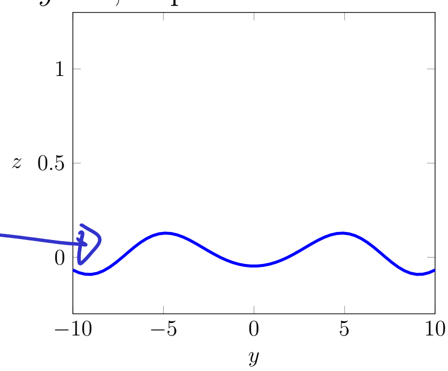
4.1.5 Les fonctions partielles

> **Définition 5.1.3.** Étant donné une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie sur tout le plan et un nombre $a \in \mathbb{R}$, les fonctions partielles de f sont $f_a^1, f_a^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :
>
> $$f_a^1(t) = f(a, t) \quad \text{et} \quad f_a^2(t) = f(t, a).$$

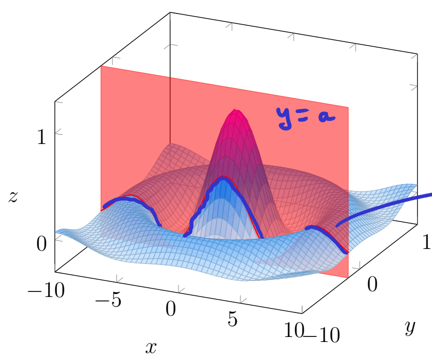
Le graphe des fonctions partielles peut être déduit du graphe $\mathcal{G}_f$ de f en prenant l'intersection entre $\mathcal{G}_f$ et les plans (verticaux) d'équation $x = a$ et $y = a$, respectivement.



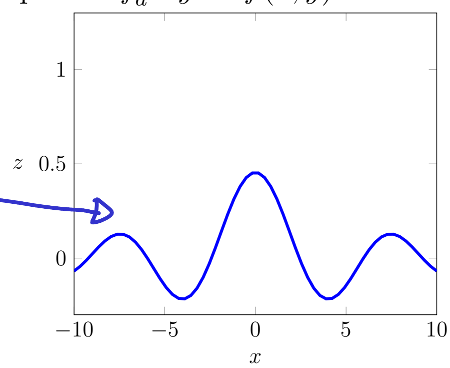
Graphe de $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})/\sqrt{x^2 + y^2}$



Graphe de $f_a^2 : y \mapsto f(a, y)$ où $a = 6$



Graphe de $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})/\sqrt{x^2 + y^2}$



Graphe de $f_b^1 : x \mapsto f(x, b)$ où $b = -2$

4.2 Représentation des fonctions de plusieurs variables à valeurs vectorielles

4.2.1 Définition

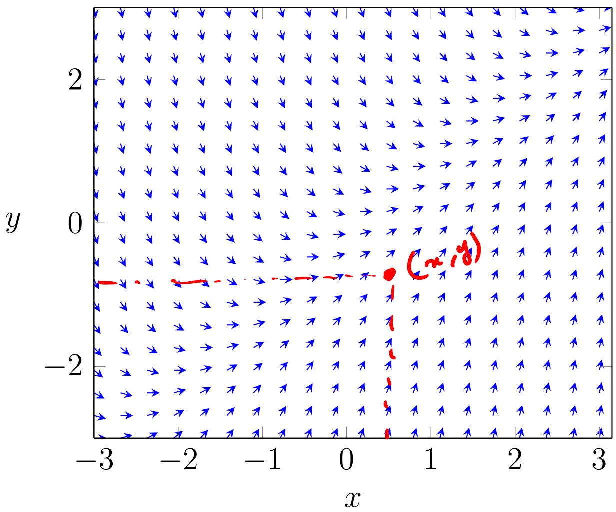
Définition 4.2.1. Une fonction f de plusieurs variables à valeurs vectorielles (aussi appelée **champ de vecteurs**) est une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 1$). Dans ce cas, il existe m fonctions $f_1, \cdots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ de $\mathcal{D}$ on ait $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^m$.

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

4.2.2 Représentation des champs de vecteurs

Lorsque $m = n = 2$ ou 3, on peut représenter l'application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par une collection de flèches : en chaque point $x \in \mathbb{R}^n$ est représenté un vecteur $f(x) \in \mathbb{R}^n$. La terminologie "champ de vecteurs" est donc appropriée.

Exemple 4.2.1. Le champ de vecteurs $f(x,y) = \frac{0.15}{\sqrt{1+(x-y)^2}}(1, x-y)$ défini sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$:



Exemple 4.2.2. Un champ de vecteurs $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini sur $\mathcal{D} = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. On a $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. En chaque point du domaine de définition on a donc un vecteur ("une flèche") représenté :