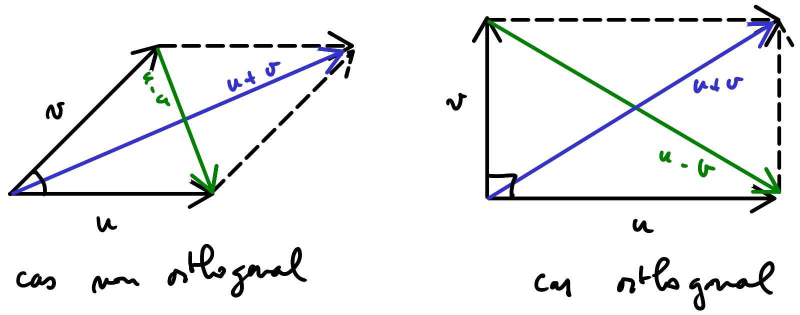
Espaces euclidiens, formes bilinéaires et quadratiques

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

1 Norme Euclidienne

Dans ces exercices, les normes considérées sont des normes euclidiennes.

Exercice 1. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Démontrer que deux vecteurs u et v de E qui satisfont $\|u - v\| = \|u + v\|$ sont orthogonaux.



remarque : u et v sont orthogonaux ssi $\langle u,v \rangle = 0$

Idée : trouver une relation (dans le cours) qui relie $\|u+v\|$, $\|u-v\|$ et $\langle u,v \rangle$

on utilise directement la formule de Polarisation.

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = \cancel{\|u\|^2} + \cancel{\|v\|^2} + 2\langle u,v\rangle - \cancel{\|u\|^2} - \cancel{\|v\|^2} + 2\langle u,v\rangle$$

$$= 4\langle u,v\rangle$$

Ainsi : $\|u+v\| = \|u-v\|$ ssi $\langle u,v\rangle = 0$ ssi $u \perp v$.

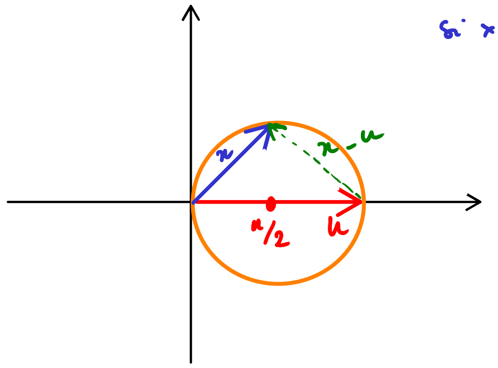
produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Exercice 2. Soit u un vecteur d'un espace euclidien E. Déterminer l'ensemble $\{x \in E \mid \langle x, x-u\rangle = 0\}$. *Indication : faire un dessin dans le cas* $E = \mathbb{R}^2$.

Idée : dans $\mathbb{R}^2$

si $x = u$? $\langle u, u-u\rangle = \langle u, 0\rangle = 0$ ✓

si $x = 0$? $\langle 0, 0-u\rangle = \langle 0, u\rangle = 0$ ✓



On reconnaît le cercle : le lieu géométrique des solutions est le cercle de centre $\frac{u}{2}$ et de rayon $\frac{\|u\|}{2}$.

Montrons que $C = \{x \in E \mid \langle x, x-u\rangle = 0\}$

$= \{x \in E \mid \|x - \frac{u}{2}\| = \frac{\|u\|}{2}\}$

Soit $x \in E$ tq $\|x - \frac{u}{2}\|^2 = \|\frac{u}{2}\|^2$

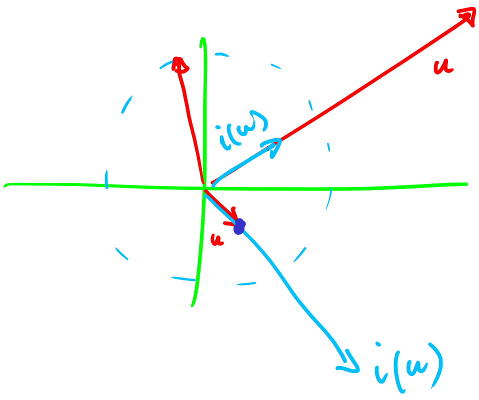
$\iff \|x\|^2 + \cancel{\|\frac{u}{2}\|^2} - \cancel{2}\langle x, \frac{u}{\cancel{2}}\rangle = \cancel{\|\frac{u}{2}\|^2}$

$\iff \langle x, x\rangle - \langle x, u\rangle = 0$

$\iff \langle x, x-u\rangle = 0$

Exercice 3. (Inversion) Soit E un espace vectoriel euclidien. On définit l'application : $i(u) = \begin{cases} \frac{u}{\|u\|^2} & \text{si } u \neq 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que i est une involution (*i.e.* $i(i(u)) = u$ pour tout $u \in E \setminus \{0\}$) et déterminer les points fixes de i (*i.e.* les $u \in E$ tels que $i(u) = u$).
2. Vérifier que pour tout $u, v \in E \setminus \{0\}$ on a $\|i(u) - i(v)\| = \frac{\|u-v\|}{\|u\|\|v\|}$.
3. On considère le cas où $E = \mathbb{R}^2$. Déterminer l'image par i :
   (a) d'une droite qui passe par 0.
   (b) d'un cercle passant par 0,
   (c) d'une droite affine ne passant pas par 0,



remarque : . i envoie le cercle unité sur lui même
. i envoie la boule ouverte unité sur son complémentaire
. i envoie le complémentaire de la boule ouverte unité sur la boule ouverte unité.

1) Montrer que $i \circ i = id$. (involution)

remarque : . dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est une involution.

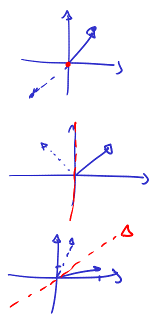
$x \mapsto x$ (identité) est une involution

$x \mapsto -x$ est une involution

. dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ symétrie centrale est une involution

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ symétrie axiale ————

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ symétrie axiale ————



* si $u = 0$ on a $i \circ i(0) = i(i(0)) = i(0) = 0$ ✓

* si $u \neq 0$ on a $i(i(u)) = i\left(\frac{u}{\|u\|^2}\right) = \frac{u/\|u\|^2}{\left\|u/\|u\|^2\right\|^2}$

$$= \frac{u/\|u\|^2}{\|u\|^2/\|u\|^4} = u$$ ✓

* Les points fixes de i : (les points tq $u = i(u)$)

* $u = 0 \Rightarrow i(u) = 0$ et l'origine est un pt fixe
* $u \neq 0 \Rightarrow i(u) = \frac{u}{\|u\|^2} = u$

$$\Leftrightarrow \left\| \frac{u}{\|u\|^2} - u \right\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\|u\|^2}{\|u\|^4} + \|u\|^2 - 2 \left< \frac{u}{\|u\|^2}, u \right> = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\|u\|^2} + \|u\|^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \|u\|^4 - 2\|u\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\|u\|^2 - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \|u\| = 1$$

le cercle unité est invariant par i.

$\therefore$ l'ensemble des pts invariants par i = $S^1 \cup \{0\}$

où S^1 : cercle unité.

2) On développe les expressions au carré : Soit $u, v \in E \setminus \{0\}$

$$\cdot \frac{\|u-v\|^2}{\|u\|^2 \|v\|^2} = \frac{\|u\|^2}{\|u\|^2 \|v\|^2} + \frac{\|v\|^2}{\|u\|^2 \|v\|^2} - \frac{2}{\|u\|^2 \|v\|^2} \left< u , v \right>$$

$$= \frac{1}{\|v\|^2} + \frac{1}{\|u\|^2} - 2 \left< \frac{u}{\|u\|^2}, \frac{v}{\|v\|^2} \right> = (1)$$

$$\cdot \|i(u) - i(v)\|^2 = \|i(u)\|^2 + \|i(v)\|^2 - 2 \left< i(u), i(v) \right>$$

$$= \frac{1}{\|u\|^2} + \frac{1}{\|v\|^2} - 2 \left< \frac{u}{\|u\|^2}, \frac{v}{\|v\|^2} \right> = (2)$$

(1) = (2) cqfd.

remarque : si $\|u\|, \|v\| < 1$ on a $\|i(u) - i(v)\| > \|u - v\|$ dilatation

si $\|u\|, \|v\| > 1$ on a $\|i(u) - i(v)\| < \|u - v\|$ contraction

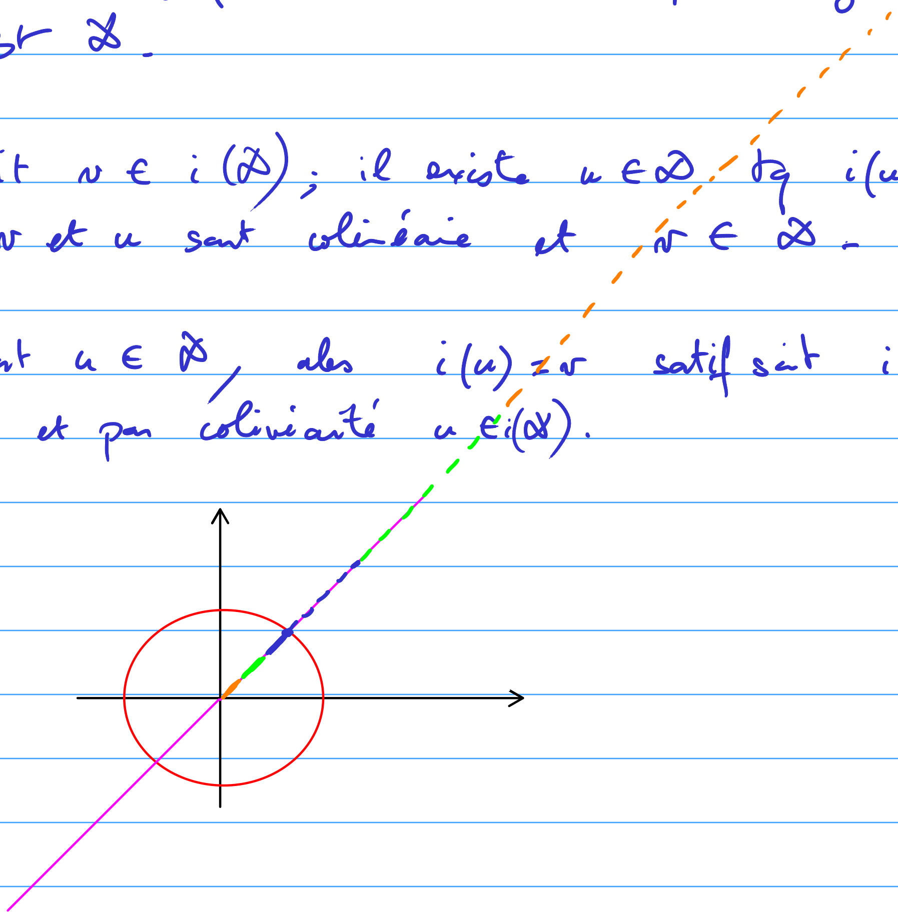
3) $E = \mathbb{R}^2$.

a) Soit $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}\{u\}$ avec $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$. L'image $i(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ par i est $\mathcal{D}$.

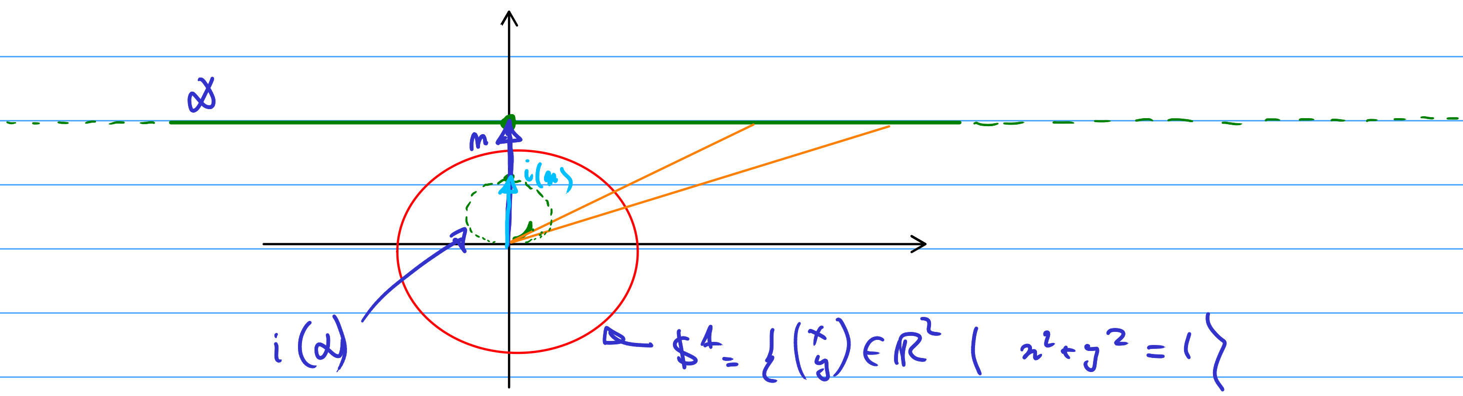
[⊂] Soit $v \in i(\mathcal{D})$; il existe $u \in \mathcal{D}$ tq $i(u) = v$. Or v et u sont colinéaire et $v \in \mathcal{D}$.

[⊃] Soit $u \in \mathcal{D}$, alors $i(u) = v$ satisfait $i(v) = i(i(u)) = u$ et par colinéarité $u \in i(\mathcal{D})$.

remarque:

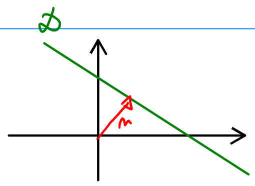


b) Soit $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}\{u\} + A$



Étant donnée une Droite $\mathcal{D}$, il existe un vecteur $m \in \mathbb{R}^2$ tq

$$\mathcal{D} = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle m, m - x \rangle = 0 \} \quad (*)$$



On va montrer que l'image de $\mathcal{D}$ (droite affine) par i est un cercle de diamètre $i(n)$.

D'après l'exercice 2, on a :

$$C = \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \| y - \frac{i(n)}{2} \| = \| \frac{i(n)}{2} \| \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{R} \mid \langle i(n) - y , y \rangle = 0 \}$$

Soit $y = i(x) \in C$.

ssi $\langle i(x) - i(n) , i(x) \rangle = 0$

ssi $\langle \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{n}{\|n\|^2} , \frac{x}{\|x\|^2} \rangle = 0$

ssi $\frac{1}{\|x\|^2 \|n\|^2} \langle \frac{\|n\|^2}{\|x\|^2} x - n , x \rangle = 0$

ssi $\frac{1}{\|x\|^2 \|n\|^2} \left(\frac{\|n\|^2}{\cancel{\|x\|^2}} \cancel{\langle x , x \rangle} - \langle n , x \rangle \right) = 0$

ssi $\frac{-1}{\|x\|^2 \|n\|^2} (\langle n , x - n \rangle) = 0$ (*)

ssi $x \in \mathcal{D}$.

l'image par i d'une droite affine est un cercle passant par l'origine.

c) l'image d'un cercle passant par l'origine est une droite affine. (car i est une involution).

2 Formes quadratiques

Dans tous les exercices de cette partie, on précisera le signe (positif, négatif ou aucun des deux) de chaque forme quadratique.

Exercice 4. Mettre les formes quadratiques suivantes sous forme de sommes et de différences de carrés de formes linéaires indépendantes :

1. $q(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$
2. $q(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$
3. $q(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx$

1) $q : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto 1x^2 + 1y^2 - 3xy \end{array}$ est une forme quadratique de matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$q(x,y) = \left[x^2 - 2 \times \left(\frac{3}{2} y\right) + \left(\frac{3}{2} y\right)^2 \right] - \frac{9}{4} y^2 + y^2$$

$$= \left[x - \frac{3}{2} y \right]^2 - \left[\frac{\sqrt{5}}{2} y \right]^2$$

on pose $\ell_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x - \frac{3}{2} y = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}$

$\ell_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{2} y = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5}/2 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5}/2 \end{pmatrix}$

on a bien u_1 et u_2 qui forment une famille libre (linéairement indépendants)

Avec les notations du cours $(s,t) = (1,1)$ et q n'est ni positive ni négative :

2) $q(x,y,z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$

$$q(x,y,z) = 2\left[x^2 + \frac{2}{2}x\left(\frac{3}{2}y - 2z\right)\right] - 2y^2 - 6z^2 + 7yz$$

$$= 2\left[x + \frac{3}{4}y - z\right]^2 \underbrace{- \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}y - 2z\right)^2 - 2y^2 - 6z^2 + 7yz}_{= q'(y,z)}$$

$$q'(y,z) = -\frac{25}{8}y^2 - 8z^2 + 10yz$$

$$= -\frac{25}{8}\left[y^2 + 2y\left(-\frac{40}{25}z\right)\right] - 8z^2$$

$$= -\frac{25}{8}\left[y - \frac{8}{5}z\right]^2 + \frac{\cancel{25}}{\cancel{8}} \times \frac{\cancel{8^2}}{\cancel{5^2}} z^2 - 8z^2$$

$$= -\frac{25}{8}\left[y - \frac{8}{5}z\right]^2$$

$$q(x,y,z) = 2\left(x + \frac{3}{4}y - z\right)^2 - \frac{25}{8}\left(y - \frac{8}{5}z\right)^2$$

- Il a suffit de 2 étapes pour écrire la forme quad q en somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

- La signature de q est $(1,1)$. q n'est ni pos ni neg.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & -2 \\ 3/2 & -2 & 7/2 \\ -2 & 7/2 & -6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ -1 & -8/5 & 0 \end{pmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{25}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3/4 & -1 \\ 0 & 1 & -8/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{G^t}$$

Exercice 5. Déterminer si les formes quadratiques suivantes sont sous forme de sommes et de différences de carrés de formes linéaires indépendantes (sinon les y mettre) :

1. $q(x,y) = 9\left(\frac{x+2y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-3y}{2}\right)^2$
2. $q(x,y,z) = (x-6y+4z)^2 - (y-4z)^2 + 2z^2$
3. $q(x,y) = (x+y)^2 - (x-y)^2 + x^2 + 2y^2$
4. $q(x,y,z) = (x+y+z)^2 + (-x+y+z)^2 - x^2$

A faire et mettre sous forme de carré de forme linéaire indépendante

1) $q(x,y) = 9\left(\frac{x}{2}+y\right)^2 + \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}y\right)^2$

on pose

$l_1(x,y) = \frac{x}{2} + y = \left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$l_2(x,y) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}y = \left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & -3/2 \end{pmatrix} \neq 0$. les vecteurs u_1 et u_2 sont libres et q est bien sous forme de somme / diff de carrés de formes linéaires indépendantes.

Ainsi la signature de q $(2,0)$ et q est pos.

2) $q(x,y,z) = (x-6y+4z)^2 - (y-4z) + 2(z)^2$

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

u_1, u_2, u_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$ et q est bien sous forme de somme / diff de carrés de formes linéaires indépendantes.

Signature de q est $(2,1)$. q n'est ni pos ni neg

3) La décomposition comporte 4 termes de carrés de forme linéaire. Or $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, les 4 formes linéaires sont donc nécessairement liées.

Ainsi, il faut développer l'expression de q et appliquer l'algo de Gauss :

$$q(x,y) = (x+y)^2 - (x-y)^2 + x^2 + 2y^2$$
$$= x^2 + 4xy + 2y^2$$
$$= +(x+2y)^2 - 2y^2 = +(x+2y)^2 - (\sqrt{2}y)^2$$

Les formes linéaires sont bien linéairement indépendantes : $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$.

Forme matricielle :

$$q(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{\text{diag}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{G^t} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{G'} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{diag}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{(G')^t} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

4) Attention, q n'est pas sous forme de carrés de formes linéaires indépendantes...
En effet, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont liés :

$$u_1 = 2u_3 + u_2$$

Il faut développer et appliquer l'algo de Gauss :

$$q(x,y,z) = 2(y+z)^2 + x^2$$

- q est bien positive (i.e. $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad q(x,y,z) \geq 0$).
- q n'est pas définie ! $\quad q(0,1,-1) = 0$

remarque: $(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n)^2$

$$\left(\sum x_i\right)^2 =$$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & \boxed{x_1} & + & x_2 & + & x_3 & + x_4 + \dots + & x_n \\
\hline
x_1 & x_1x_1 & + & x_1x_2 & + & x_1x_3 & + \dots & + x_1x_n \\
+ x_2 & + x_2x_1 & + & x_2x_2 & + & x_2x_3 & + \dots & \\
+ x_3 & & & & & \ddots & & \\
+ x_4 & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & \\
+ x_n & + x_nx_1 & + & x_nx_2 & & & & + x_nx_n
\end{array}$$

$$= \sum_i \sum_j x_i x_j = \sum_i x_i^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} x_i x_j$$

$$= \sum_i x_i^2 + 2 \sum_i \sum_{j > i} x_i x_j$$

Exercice 6.* Déterminer si les formes quadratiques suivantes sont définies et positives

1. $q(x, y) = (1-\lambda)x^2 + 2\mu xy + (1+\lambda)y^2$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
2. $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z(x \cos\alpha + y \sin\alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

| Hint : utiliser Sylvester !

1) $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$q(x,y) = (1-\lambda)x^2 + 2\mu xy + (1+\lambda)y^2$$

$$= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda & \mu \\ \mu & 1+\lambda \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

le critère de Sylvester :

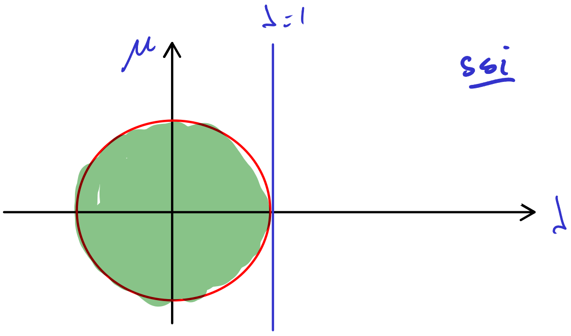
$\Delta_1 = 1-\lambda$ et $\Delta_2 = \det M = (1-\lambda)(1+\lambda) - \mu^2$
$= 1 - \lambda^2 - \mu^2$

q est déf. pos ssi $\Delta_1 > 0$ et $\Delta_2 > 0$

ssi $1-\lambda > 0$ et $1 - (\lambda^2 + \mu^2) > 0$

ssi $1 > \lambda$ et $(\lambda^2 + \mu^2) < 1$

ssi $(\lambda^2 + \mu^2) < 1$ (on voit sur le dessin)



2) À faire

Exercice 7. (Décomposition dans différentes bases) Soit la forme quadratique $q(x_1, x_2) = 3(x_1^2 + x_2^2) + 2x_1x_2$ définie pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On note A la matrice de q dans la base canonique.

1. Vérifier que $a = (1,1)\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $b = (1,-1)\frac{1}{\sqrt{2}}$ sont des vecteurs propres de A et qu'ils forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$. Écrire alors q sous forme de sommes et de différences de carrés de formes linéaires indépendantes.
2. En utilisant l'algorithme de Gauss : mettre q sous forme de sommes et de différences de carrés de formes linéaires indépendantes et écrire cette décomposition sous forme matricielle
3. En utilisant les deux questions précédentes, trouver d'autres représentations en sommes et différences de carrés de formes linéaires indépendantes.

$q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2$$

$$= (x_1 \ \ x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

1) Rappel : v vecteur propre de A <u>ssi</u> $Av = \lambda v$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

Ainsi, il faut vérifier que

$$A a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4a \quad \text{et} \quad Ab = 2b$$

De plus on a $\|a\| = \|b\| = 1$ et $\langle a, b\rangle = \frac{1}{2}(1 \ \ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

les vecteurs a et b forment une base orthonormée, posons alors

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = Q^t$$

on a $\quad QQ^t = QQ = Q^tQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} - & a & - \\ - & b & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | \\ a & b \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^t a & a^t b \\ b^t a & b^t b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|a\|^2 & \langle a, b\rangle \\ \langle b, a\rangle & \|b\|^2 \end{pmatrix}$$

Et $\quad Q^{-1} = Q^t = Q$

On peut alors diagonaliser A :

$$A = \begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$= Q \begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix} Q^t$$

Autrement dit :

$$q(x,y) = \frac{1}{2}\left[4(x+y)^2 + 2(x-y)^2\right]$$

$$= 2(x+y)^2 + (x-y)^2$$

En résumé, diagonaliser la matrice A, permet d'écrire la forme quad q comme carré de formes linéaires indépendantes.

2) On utilise la décomposition de Gauss

À faire

$$q(x,y) = \dots = 3\left(x + \frac{y}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}y^2$$

Ainsi

$$A = \begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\1/3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&8/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1/3\\0&1\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix}\sqrt{3}&0\\ \sqrt{3}/3&\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}}_{P} \quad Id \quad \underbrace{\begin{pmatrix}\sqrt{3}&\sqrt{3}/\sqrt{3}\\ 0&\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}}_{P^t}$$

Décomposition de Gauss, permet d'écrire la matrice A comme le produit de matrices triangulaires (inférieure et supérieure). On parle de décomposition LU (L = lower, U = upper).

3) D'après la question 1) on a $Id = QQ^t$

D'après la question 2) on a $A = PP^t$

on a donc

$$A = P \, Id \, P^t$$
$$\iff A = P \, Q \, Q^t \, P^t$$
$$\iff A = P Q \, (P Q)^t$$

Avec
$$PQ = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3}/3 & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Et on peut vérifier

$$q(x,y) = (x \;\; y) \; A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \;\; y) \, PQ \, (PQ)^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= \left[(x \;\; y) \, PQ \right] \left[(x \;\; y) \, PQ \right]^t$$
$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{3}\, x + \frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \, y \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\sqrt{3}\, x + \frac{1-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \, y \right)^2$$

Idée : on peut créer de nouvelles décompositions en somme de carrés de formes linéaires indépendantes à partir des ≠ algo de décomposition matricielle.

Exercice 8.* Soit ϕ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\phi(x, y) = (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2 y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$$

1. Vérifier que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.
2. Soit $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ et $k = (0, 0, 1)$. Calculer

$$e_1 = \frac{i}{\|i\|}, \quad e_2 = \frac{j - \phi(e_1, j)e_1}{\|j - \phi(e_1, j)e_1\|}, \quad e_3 = \frac{k - \phi(e_1, k)e_1 - \phi(e_2, k)e_2}{\|k - \phi(e_1, k)e_1 - \phi(e_2, k)e_2\|}$$

3. Vérifier que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormale pour ϕ.
4. Déterminer (sans calcul) la matrice de ϕ dans la base (e_1, e_2, e_3).

3 Pour aller plus loin

Exercice 9.* Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n > 2$. La forme bilinéaire dont la matrice est

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2(n-1) & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 2(n-1) \end{pmatrix}$$

est-elle positive ? définie ?

Exercice 10.* (Identité du parallélogramme) Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E vérifiant l'identité du parallèlogramme, c'est-à-dire :

$$\forall (u, v) \in E^2,\ \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

On se propose de démontrer qu'une telle norme $\|\cdot\|$ est associée à un produit scalaire. On définit sur E^2 une application f par :

$$\forall (u, v) \in E^2,\ f(u, v) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2).$$

1. Montrer que pour tout (u, v, w) de E^3, on a : $f(u+w, v) + f(u-w, v) = 2f(u, v)$.
2. Montrer que pour tout (u, v) de E^2, on a : $f(2u, v) = 2f(u, v)$.
3. Montrer que pour tout (u, v) de E^2 et tout rationnel r, on a : $f(ru, v) = rf(u, v)$.
   On admettra que pour tout réel λ et tout (u, v) de E^2 on a : $f(\lambda u, v) = \lambda f(u, v)$ (ce résultat provient de la continuité de f).
4. Montrer que pour tout (u, v, w) de E^3, $f(u, w) + f(v, w) = f(u+v, w)$.
5. Montrer que f est bilinéaire.
6. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne.