Université Montpellier 2 Année 2014-2015
HLMA 410

Examen - Session 1

Durée 2h00. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. La qualité de la rédaction sera prise en compte. Les exercices sont indépendants.

1 Analyse

Exercice 1. Question de cours Soit $\Gamma = ([a,b], \phi)$ un arc paramétré dans $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continu.

1. Qu'appelle-t-on circulation de V le long de Γ ?

Soit $\theta : [c,d] \to [a,b]$ un C^1-difféomorphisme et $\psi = \phi \circ \theta$.

2. Quelle relation y a-t-il entre la circulation de V le long de $\Gamma' = ([c,d], \psi)$ et la circulation le long de Γ ?
3. Le-démontrer.

Exercice 2. On considère le champ de vecteurs

$$\begin{aligned} F : &\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ &(x,y) \mapsto (2xy + y\cos(xy), x\cos(xy) + x^2 - 1) \end{aligned}$$

On admettra provisoirement l'existence d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $F = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$.

1. Déterminer les points critiques de la fonction f.
2. Calculer la matrice Hessienne de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer la nature de la matrice Hessienne de f en chacun des points critiques (*i.e.* la forme quadratique associée est-elle définie ? est-elle positive ? est elle négative ?)
4. Peut-on déduire, de la question précédente, la nature des points critiques de f (*i.e.* minimum, maximum, strict, global) ? Justifier !
5. Trouver une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\nabla f = F$.
6. Soit Γ la courbe paramétrée par $\phi : t \mapsto (t, t^2)$ pour $t \in [0,1]$. Calculer la circulation de F le long de Γ.

Exercice 3.

1. Soient $\alpha, \beta, R > 0$. Calculer l'aire de l'ellipse $E \subset R^2$ définie par l'équation
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} < R^2.$$
Indication : On pourra utiliser le changement de variables $(u,v) \mapsto (\alpha u, \beta v)$.
2. Soit $H_{a,b,c} \subset \mathbb{R}^3$ le solide défini par
$$H_{a,b,c} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 | -1 < z < 2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} < 1 \right\}$$
où a, b et c sont des réels strictement positifs. Calculer le volume de $H_{a,b,c}$.
3. On suppose que $a = b = 1$ et $c = 2$. Calculer l'intégrale
$$I = \iiint_{H_{1,1,2}} z e^{x^2+y^2} dxdydz.$$

2 Probabilités

Exercice 4. (Dominos) Un domino se compose de deux cases, portant chacune un numéro n entier, $0 \leq n \leq 6$. Un jeu est formé de tous les dominos différents possibles.

1. Combien y a-t-il de domino dans un jeu ?
2. On choisit deux dominos au hasard. Quelle est la probabilité qu'ils soient compatibles (*i.e.* possèdent un numéro commun) ?

Exercice 5. (Jeans) L'enseigne « Massimo Dutti » produit et vend 4×10^4 jeans par mois. Le coût de fabrication est de 100 euros par jean. Le fabricant fait réaliser un test de conformité, dans les mêmes conditions, sur chacun de ses jeans fabriqués. Le test est positif dans 90% des cas et un jean reconnu conforme peut alors être vendu à 200 euros. Si le test est en revanche négatif, le jean est bradé au prix de 50 euros.

1. On note Y la variable aléatoire qui indique le nombre de jeans conformes parmi les 4×10^4 produits. Calculer l'espérance et la variance de Y.
2. On note Z la variable aléatoire qui indique le bénéfice mensuel, exprimé en euros. Calculer l'espérance et la variance de Z.