L2 PEIP - 2016/2017

HLMA 410 - Session 1

Le sujet est constitué de 5 exercices. Il est possible d'admettre et d'utiliser des résultats de l'énoncé pour répondre aux questions suivantes. Aucun document de cours ni matériel électronique n'est autorisé. Une attention particulière sera portée à la clarté de la rédaction et à la précision des références au cours.

Exercice 1.

Soit A et B deux événements aléatoires. On introduit la variable aléatoire $\chi = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.

1. On suppose $\mathbb{E}[\chi] = 1/4$. Calculer la probabilité de l'événement $A \cap B$.

> Par définition, la variable aléatoire prend deux valeurs : 1 et 0 et, pour toute réalisation ω on a:
>
> $$\begin{aligned} \chi(\omega) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (\mathbb{1}_A(\omega) = 1 \text{ et } \mathbb{1}_B(\omega) = 1) \\ &\Leftrightarrow \quad (\omega \in A \text{ et } \omega \in B) \\ &\Leftrightarrow \quad \omega \in A \cap B. \end{aligned}$$
>
> Par conséquent: $\mathbb{E}[\chi] = \mathbb{P}(A \cap B)$.

2. On suppose $E[\chi] = 1$. Montrer que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1$.

> Si $E[\chi] = 1$. D'après la question précédente, on a $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$. Alors, on a $A \cap B \subset A$. Donc par croissance des probabilités
>
> $$1 = \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) \leq 1.$$
>
> Ainsi, on a bien $\mathbb{P}(A) = 1$. On montre de même $\mathbb{P}(B) = 1$.

Exercice 2.

On dispose de deux dés D_e et D_t. Le dé D_e est équilibré. Le dé D_t est truqué si bien que la probabilité d'obtenir un 6 est 1/2 alors que les autres valeurs sont équiprobables.

1. Pour $i \in \{1, \dots, 6\}$ calculer la probabilité de l'événement "D_e donne la valeur i."

> On sait que D_e est équilibré donc les résultats des différentes faces ont la même probabilité. Comme il y a 6 résultats distincts et que la somme des probabilités des résultats vaut 1, on obtient:
>
> $$\mathbb{P}(\text{"}D_e \text{ donne la valeur } i\text{"}) = \frac{1}{6} \quad \forall i = \{1, \dots, 6\}.$$

2. Pour $i \in \{1, \dots, 6\}$ calculer la probabilité de l'événement "D_t donne la valeur i."

L'énoncé donne

- $\mathbb{P}(\text{"}D_t \text{ donne la valeur } 6\text{"}) = 1/2$
- il existe un $p \in [0,1]$ tel que $\mathbb{P}(\text{"}D_t \text{ donne la valeur } i\text{"}) = p$ pour tout $i = 1, \ldots, 5$.

Comme la somme de ces probabilités élémentaires doit être égale à 1 on obtient également:

$$1 = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(\text{"}D_t \text{ donne la valeur } i\text{"}) = \frac{1}{2} + 5p$$

Donc $p = 1/10$. Finalement:

$$\mathbb{P}(\text{"}D_t \text{ donne la valeur } i\text{"}) = \frac{1}{10} \quad \forall\, i = 1, \ldots, 5.$$
$$\mathbb{P}(\text{"}D_t \text{ donne la valeur } 6\text{"}) = \frac{1}{2}$$

Dans la suite de l'exercice, on considère l'expérience où on prend l'un des deux dés au hasard que l'on lance. On observe alors le résultat obtenu.

3. Calculer les probabilités des événements $A =$ "le résultat est pair" et $B =$ "le résultat est un multiple de 3."

Une partition de l'univers est donné par les événements:

$$\Delta_e = \text{"On prend le dé } D_e\text{"} \qquad \Delta_t = \text{"On prend le dé } D_t\text{"}$$

qui ont, d'après l'énoncé, chacun une probabilité 1/2. On va donc calculer la probabilité de chacun des événements sur la base de cette partition.
On peut réecrire :

$$A = \text{"le résultat est 2,4 ou 6"} \quad B = \text{"le résultat est 3 ou 6"}.$$

En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient donc:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|\Delta_e)\mathbb{P}(\Delta_e) + \mathbb{P}(A|\Delta_t)\mathbb{P}(\Delta_t) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(A|\Delta_e) + \mathbb{P}(A|\Delta_t)\right)$$

D'après les réponses à la question précédente, on a:

$$\mathbb{P}(A|\Delta_e) = \mathbb{P}(\text{le résultat est } 2,4,6 \,|\, \text{on a pris le dé } D_e) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(A|\Delta_t) = \mathbb{P}(\text{le résultat est } 2,4,6 \,|\, \text{on a pris le dé } D_t) = \frac{2}{10} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10}.$$

Finalement: $\mathbb{P}(A) = 3/5$.
En répétant le même calcul, on obtient:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(B|\Delta_e) + \mathbb{P}(B|\Delta_t)\right)$$

avec :

$$\mathbb{P}(B|\Delta_e) = \mathbb{P}(\text{le résultat est } 3,6 \,|\, \text{on a pris le dé } D_e) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$\mathbb{P}(B|\Delta_t) = \mathbb{P}(\text{le résultat est } 3,6 \,|\, \text{on a pris le dé } D_t) = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}.$$

donc $\mathbb{P}(B) = 7/15$.

4. Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/3$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Par définition, l'événement $A \cap B$ est "le résultat est 6." En utilisant la formule des probas totales comme ci-dessus, on a:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(A \cap B|\Delta_e) + \mathbb{P}(A \cap B|\Delta_t)\right)$$

où en utilisant les résultats aux questions 1 et 2:

$$\mathbb{P}(A \cap B|\Delta_e) = \mathbb{P}(\text{le résultat est } 6 | \text{ on a pris le dé } D_e) = \frac{1}{6}$$
$$\mathbb{P}(A \cap B|\Delta_t) = \mathbb{P}(\text{le résultat est } 6 | \text{ on a pris le dé } D_t) = \frac{1}{2}.$$

Donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/3$. Or $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 3/5 * 7/15 = 7/25$. On a donc $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Donc A et B ne sont pas indépendants.

5. On suppose que le résultat obtenu est 6. Quelle est la probabilité d'avoir pris le dé D_t ?

Il s'agit d'évaluer la probabilité $\mathbb{P}(\text{"on a pris le dé } D_t\text{"}|\text{"le résultat est 6"})$. Comme les probabilités de chacun des événements qui constituent cette probabilité conditionnelle sont non nulles, on a:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\text{"on a pris le dé } D_t\text{"}|\text{"le résultat est 6"})\\ &\qquad = \mathbb{P}(\text{"le résultat est 6"}|\text{"on a pris le dé } D_t\text{"})\frac{\mathbb{P}(\text{"on a pris le dé } D_t\text{"})}{\mathbb{P}(\text{"le résultat est 6"})}\end{aligned}$$

En remplaçant avec les valeurs numériques trouvées aux questions précédentes. On obtient:

$$\mathbb{P}(\text{"on a pris le dé } D_t\text{"}|\text{"le résultat est 6"}) = \frac{1}{2}\frac{1/2}{1/3} = \frac{3}{4}.$$

Exercice 3.

On se donne l'application:

$$\begin{array}{rccl} q: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z,t) & \longmapsto & x^2+3y^2-3z^2-t^2+4xy+2xz+8yz-2yt+5zt. \end{array}$$

1. Montrer que q est une forme quadratique.

L'application q est une somme de produits de deux composantes de (x,y,z,t). c'est donc une forme quadratique.

2. En appliquant l'algorithme de Gauss, décomposer la forme q en une combinaison de carrés.

On s'intéresse d'abord aux termes en x puis y.Ceci donne:

$$\begin{array}{rcl} q(x,y,z,t) & = & x^2+4xy+2xz+3y^2-3z^2-t^2+8yz-2yt+5zt \\ & = & (x+2y+z)^2-y^2-4z^2-t^2+4yz-2yt+5zt \\ & = & (x+2y+z)^2-(y-2z+t)^2+zt \\ & = & (x+2y+z)^2-(y-2z+t)^2+\frac{1}{4}(z+t)^2-\frac{1}{4}(z-t)^2. \end{array}$$

On rappelle que ceci donne par construction une décomposition de q comme une combinaison de carrés de formes linéaires indépendantes.

3. Quelle est la forme polaire de q ? Quelle est la signature de la forme q ?

A partir de la forme en carrés, on peut écrire $q(x,y,z,t) = \varphi((x,y,z,t),(x,y,z,t))$ où

$$\begin{aligned}\varphi((x,y,z,t),(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t})) &= (x+2y+z)(\bar{x}+2\bar{y}+\bar{z})-(y-2z+t)(\bar{y}-2\bar{z}+\bar{t})\\ &\quad+\frac{1}{4}(z+t)(\bar{z}+\bar{t})-\frac{1}{4}(z-t)(\bar{z}-\bar{t}).\end{aligned}$$

est bien une forme bilinéaire symétrique.φ est donc la forme prolaire de q. Les signes des coefficients devant les carrés dans la décomposition de q nous donnent également que la signature de q est $(2,2)$ (2 plus et 2 moins).

Exercice 4.

On se donne $\Gamma = (I, \phi)$ l'arc paramétré de $\mathbb{R}^2$ où $I = \mathbb{R}$ et

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cos(t)^2 \\ (1+\sin(t))\cos(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Montrer que Γ est un arc C^∞ 2π-périodique. On a alors, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\phi'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ -\sin(t) + \cos(2t) \end{pmatrix} \quad \phi"(t) = \begin{pmatrix} -2\cos(2t) \\ -\cos(t) - 2\sin(2t) \end{pmatrix} \quad \phi^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 4\sin(2t) \\ \sin(t) - 4\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Les deux applications composantes de ϕ sont des polynomes trigonométriques. Ce sont donc des applications C^∞. De plus, on a $\phi(t + 2\pi) = \phi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cet arc est donc 2π-périodique.

2. Déterminer $t_0 \in [0, 2\pi]$ tel que $\phi'(t_0) = 0$. Quelle est la nature du point $\phi(t_0)$ et la tangente au support de Γ en ce point ?

D'après les données de l'énoncé, on a, pour $t_0 \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \phi'(t_0) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\sin(2t_0) = 0 \text{ et } -\sin(t_0) + \cos(2t_0) = 0) \\ &\Leftrightarrow \quad (t_0 \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, \pi\} \text{ et } -\sin(t_0) + \cos(2t_0) = 0) \end{aligned}$$

Par énumération des cas, on trouve alors que la seule valeur possible pour t_0 qui satisfasse les deux contraintes à droite simultanément est $t_0 = 3\pi/2$. On obtient donc:

$$\phi'(t_0) = 0 \Leftrightarrow t_0 = 3\pi/2.$$

Pour $t_0 = 3\pi/2$, on trouve

$$\phi"(t_0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \phi^{(3)}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Donc $\phi"(t_0) \neq 0$ et est colinéaire à e_1 alors que $\phi^{(3)}(t_0)$ est colinéaire à e_2. Avec les conventions du cours, on a donc que $p = 2$ et $q = 3$ ce qui correspond à un point de rebroussement de premier espèce où la tangente est fixé par $\phi"(t_0)$ c'est à dire que c'est la droite (Ox).

3. L'arc Γ admet-il des points d'inflexion ?

On a vu dans la quesiton précédente que ϕ' ne s'annule qu'en $t_0 = 3\pi/2$ pour lequel on a un point de rebroussement. La seule possibilité pour avoir un point d'inflexion est donc de trouver un $t \in [0, 2\pi]$ pour lequel $\phi'(t) \neq 0$ et donc $p = 1$ et q est impair. Cependant, on remarque que, $\phi^{"}(t)$ est colinéaire à $\phi'(t)$ si et seulement leur produit mixte est nul, c'est-à-dire:

$$0 = \phi'(t) \times \phi^{"}(t) = \begin{vmatrix} -\sin(2t) & -2\cos(2t) \\ -\sin(t) + \cos(2t) & -\cos(t) - 2\sin(2t) \end{vmatrix}.$$

On peut expliciter cette condition par le calcul suivant:

$$\begin{aligned} \phi'(t) \times \phi^{"}(t) &= (-\sin(2t))(-\cos(t) - 2\sin(2t)) - (-2\cos(2t))(-\sin(t) + \cos(2t)) \\ &= \sin(2t)\cos(t) - 2\cos(2t)\sin(t) + 2 \\ &= (1 - \sin(t)) + (1 - \cos(2t)\sin(t)). \end{aligned}$$

Pour que cette somme de termes positifs soit nulle, il faut qu'ils soient tous les deux nuls, c'est-à-dire:

$$\sin(t) = 1 \text{ et } \cos(2t)\sin(t) = 1$$

La premiere condition implique que $t = \pi/2$. Dans ce cas $\cos(2t)\sin(t) = -1$ ce qui contredit la deuxième assertion. Pour tout $t \in [0, 2\pi] \setminus \{3\pi/2\}$, on a donc finalement que $p = 1$ et $q = 2$ et le point considéré est un point ordinaire. Il n'y a pas de point d'inflexion.

4. Dresser les tableaux de variations des applications composantes de ϕ sur $[0, 2\pi]$.

Pour ϕ_1 on remarque que $\phi'(t) = -\sin(2t)$ qui est négative sur $[0, \pi/2]$ puis positive de $\pi/2$ à π puis négative de π à $3\pi/2$ puis positive de $3\pi/2$ à 2π. Avec les calculs des bornes, on obtient:

t	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
$\phi_1'(t)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
	1				1				1
ϕ_1		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			0				0		1

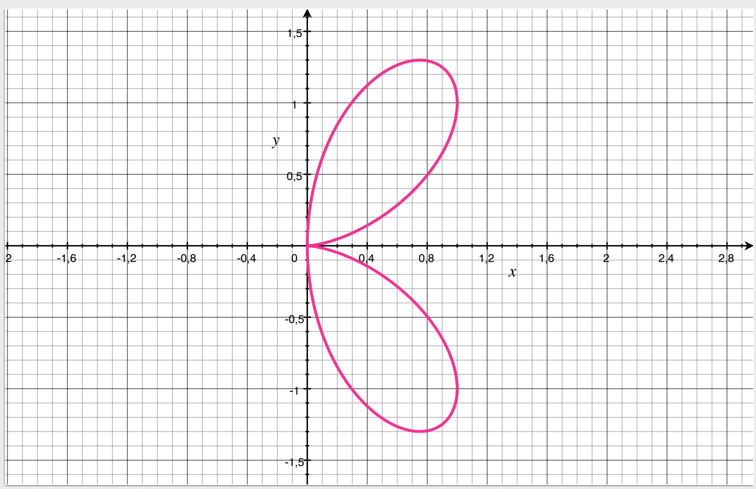
Pout ϕ_2 on applique les formules de duplication du cos pour obtenir:

$$\begin{aligned}
\phi_2'(t) &= -\sin(t) + \cos(2t) = -\sin(t) + 1 - 2(\sin(t))^2 \\
&= -2\left(\sin(t)^2 + \frac{\sin(t)}{2} - \frac{1}{2}\right) \\
&= -2\left[\left(\sin(t) + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right] \\
&= -2\left(\sin(t) - \frac{1}{2}\right)(\sin(t) + 1)
\end{aligned}$$

On remarque que $\sin(t) + 1$ est positif et ne s'annule que en $t = 3\pi/2$ alors que $\sin(t) - 1/2$ change de signe quand t travers $\pi/6$ et $11\pi/6$. Ceci donne le tableau de variation suivant:

t	0		$\pi/6$		π		$5\pi/6$		2π
$\phi_2'(t)$		$+$		$-$		$-$		$+$	
			$3\sqrt{3}/4$		0				1
ϕ_2		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	1				0		$-3\sqrt{3}/4$		

5. Représenter le support de Γ dans un repère orthonormé en incluant les éléments calculés précédemment.



Exercice 5.

Dans cet exercice, étant donné $r > 0$, on note:

$$D_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 + y^2 < r^2\} \qquad \overline{D}_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

Dans la première partie de cet exercice, on se donne $f : D_2 \to \mathbb{R}$ et on suppose que f satisfait:

$$f \in C^2(D_2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) > 0 \quad \forall\,(x,y) \in D_1. \tag{H}$$

1. Justifier en une phrase que la restriction de f à $\overline{D}_1$ (notée $f_{\overline{D}_1}$ dans la suite) est bornée et atteint ses bornes.

> Par hypothèse, la fonction f est continue sur $\overline{D}_1$ fermé borné de $\mathbb{R}^2$ (donc compact). D'après un théorème du cours, son image est donc un compact de $\mathbb{R}$. A fortiori, elle est bornée et atteint ses bornes.

On se donne $(x_0, y_0) \in D_1$.

(2.a) Donner le développement limité à l'ordre 2 de f en (x_0, y_0).

> D'après le théorème de cours, il existe une fonction ε définie sur un voisinage $\mathcal{U}$ de $(0,0)$ et telle que $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ pour laquelle quelque soit (h,k) de norme suffisamment petite, on a:
>
> $$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) &+ h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ &+ \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right) + (h^2+k^2)\varepsilon(h,k). \end{aligned}$$

(2.b) En considérant $t \mapsto f(x_0 + t, y_0)$ et $t \mapsto f(x_0, y_0 + t)$ pour t proche de 0, montrer que l'hypothèse (H) implique que $f_{\overline{D}_1}$ ne peut pas atteindre son maximum en (x_0, y_0).

Supposons que f atteint son maximum en (x_0, y_0). Alors, pour tout $(x, y) \in D_1$ on a $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$. En particulier, comme D_1 est ouvert, il contient un disque de centre (x_0, y_0) et, pour t suffisamment petit, on a que $(x_0 + t, y_0)$ est dans ce disque dans D_1 si bien que:

$$f(x_0 + t, y_0) \leq f(x_0, y_0).$$

De plus, un théorème de cours nous garantit que, si f est maximale en (x_0, y_0) alors:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Ainsi, pour t suffisament proche de 0, le développement limité à l'ordre 2 de f en (x_0, y_0) se réécrit:

$$f(x_0 + t, y_0) = f(x_0, y_0) + \frac{t^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + t^2 \varepsilon(t, 0).$$

où $\varepsilon(t, 0) \to 0$ quand $t \to 0$. Etant donné que $f(x_0 + t, y_0) \leq f(x_0, y_0)$ et $t^2 > 0$ on a:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \varepsilon(t^2, 0) \leq 0$$

et, à la limite $t \to 0$, on obtient que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0.$$

On montre de même, en considérant $t \mapsto f(x_0, y_0 + t)$ que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0.$$

Par somme, on obtient donc que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0$$

ce qui contredit (H). $f_{\overline{D}_1}$ ne peut donc être maximale en (x_0, y_0).

On suppose maintenant que $f_{\overline{D}_1}$ atteint son maximum en $(x_0, y_0) \in \overline{D}_1 \setminus D_1$. On introduit:

$$f_\Gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(\cos(t), \sin(t)) \end{array}$$

(3.a) Justifier qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $(x_0, y_0) = (\cos(t_0), \sin(t_0))$ puis que f_Γ admet un maximum en t_0.

Si $(x_0, y_0) \in \overline{D}_1 \setminus D_1$ cela veut dire que $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Le point $M_0(x_0, y_0)$ est donc sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. Si on note t_0 l'angle entre $[Ox)$ et $[OM_0)$ on peut lire sur un dessin que $x_0 = \cos(t_0)$ et $y_0 = \sin(t_0)$.
Comme $f_{\overline{D}_1}$ est maximale en (x_0, y_0) on a que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ pour tout $(x, y) \in \overline{D}_1$. Ceci est en particulier vrai pour tout les points de la forme $(\cos(t), \sin(t))$ (qui sont effectivement dans $\overline{D}_1$) . Ainsi, $f(x_0, y_0) \geq f(\cos(t), \sin(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. c'est-à-dire:

$$f(\cos(t_0), \sin(t_0)) \geq f(\cos(t), \sin(t)) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

On a donc bien que f_Γ est maximale en t_0.

(3.b) En déduire que

$$y_0 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - x_0 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Par composition, $f_\Gamma \in C^1(\mathbb{R})$. Comme f_Γ est maximale en t_0 on a donc $f'_\Gamma(t_0) = 0$. En utilisant la règle de la chaîne, on a:

$$f'_\Gamma(t_0) = -\sin(t_0)\frac{\partial f}{\partial x}(\cos(t_0), \sin(t_0)) + \cos(t_0)\frac{\partial f}{\partial y}(\cos(t_0), \sin(t_0)).$$

En remplaçant $\sin(t_0) = y_0$ et $\cos(t_0) = x_0$ et $f'_\Gamma(t_0) = 0$ on obtient la condition donnée (au signe près).

(3.c) Quelle propriété satisfont alors les vecteurs $\nabla f(x_0, y_0)$ et (x_0, y_0) ?

La condition

$$y_0 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - x_0 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

siginifie que le produit mixte de $\nabla f(x_0, y_0)$ et (x_0, y_0) est nul, c'est-à-dire qu'ils sont colinéaires.

Dans la deuxième partie de l'exercice, on pose:

$$f(x, y) = \frac{y}{(x-4)^2 + y^2} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\,, \quad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(4, 0)\}$$

On rappelle qu'on peut utiliser les résultats de la première partie de l'exercice même sans avoir répondu à ces questions.

(4.a) Justifier que f satisfait (H).

La fonction f est la somme d'un polynome et d'une fraction de polynomes dont le dénominateur ne s'annule que pour $(x, y) = (4, 0)$. La fonction f est donc C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(4, 0)\}$. Comme $(4, 0) \notin D_2$ elle est a fortiori C^2 sur D_2. De plus, pour $(x, y) \in D_2$ on a:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2\frac{y(x-4)}{((x-4)^2+y^2)^2} + x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{6y(x-4)^2-2y^3}{((x-4)^2+y^2)^3} + 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x-4)^2-y^2}{((x-4)^2+y^2)^2} + y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2y^3-6y(x-4)^2}{((x-4)^2+y^2)^3} + 1.$$

Par conséquent:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 > 0 \quad \forall\,(x,y) \in D_1.$$

(4.b) En déduire que $f_{\overline{D}_1}$ est bornée et atteint ses bornes puis que sa valeur maximale ne peut pas être atteinte en un $(x_0, y_0) \in D_1$.

D'après la question 1. la fonction $f_{\overline{D}_1}$ est bornée et atteint ses bornes. En appliquant le résultat de la question 2.b, on obtient que la valeur maximale de $f_{\overline{D}_1}$ ne peut être atteinte en aucun $(x_0, y_0) \in D_1$.

(4.c) Soit $(x_0, y_0) \in \overline{D}_1 \setminus D_1$ tel que $f_{\overline{D}_1}$ est maximale en (x_0, y_0). Trouver une équation satisfaite par (x_0, y_0). Puis, en utilisant que $y_0^2 = 1 - x_0^2$, montrer que $x_0 = 8/17$.

En appliquant le résultat de la question 3.b, on obtient que, si $f_{\overline{D}_1}$ est maximale en (x_0, y_0) alors

$$y_0\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - x_0\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$$

En remplaçant par les valeurs des dérivées partielles calculées ci-dessus, on obtient:

$$y_0\left(-2\frac{y_0(x_0-4)}{((x_0-4)^2+y_0^2)^2} + x_0\right) - x_0\left(\frac{(x_0-4)^2-y_0^2}{((x_0-4)^2+y_0^2)^2} + y_0\right) = 0.$$

On remarque que le terme y_0x_0 se simplifie et qu'il ne reste que la combinaison des deux fractions. Après avoir mis au même dénominateur ceci implique que le numérateur doit s'annuler, c'est-à-dire (quitte à changer les signes):

$$2y_0^2(x_0-4) + x_0((x_0-4)^2 - y_0^2) = 0.$$

En remplaçant $y_0^2 = 1 - x_0^2$, on obtient l'équation équivalente:

$$\begin{aligned}&2(1-x_0^2)(x_0-4) + x_0(2x_0^2 - 8x_0 + 15) = 0\\ \Leftrightarrow\ &2(-x_0^3 + 4x_0^2 + x_0 - 4) + (2x_0^3 - 8x_0^2 + 15x_0) = 0\end{aligned}$$

qui se simplifie en

$$17x_0 - 8 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 8/17.$$