Normes dans $\mathbb{R}^n$ et limites

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

1 Normes et distances sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 1. (Équivalence des normes usuelles) Démontrer que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Remarque : il suffit de montrer que : $\|x\|_\infty \overset{(1)}{\leq} \|x\|_2 \overset{(2)}{\leq} \|x\|_1 \overset{(3)}{\leq} n\,\|x\|_\infty$

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

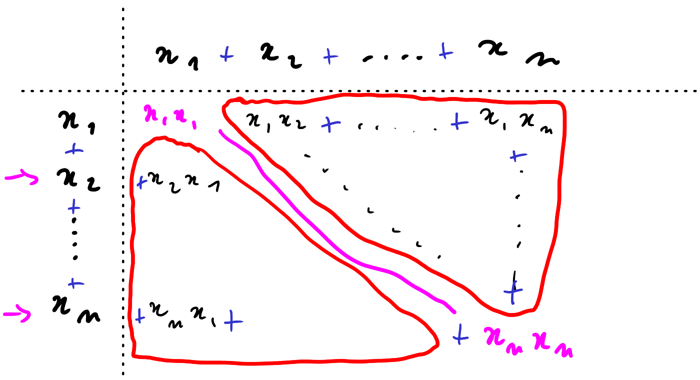
(1)
$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$
$$= \max\{\sqrt{x_1^2}, \sqrt{x_2^2}, \dots, \sqrt{x_n^2}\}$$
$$= \sqrt{x_{j_0}^2} \quad \text{où } j_0 \in \{1, \dots, n\} \text{ tq } \|x\|_\infty = |x_{j_0}|$$
$$\leq \sqrt{x_1^2 + \dots x_n^2} = \|x\|_2$$

(2)
$$\|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

on peut mettre au carré des 2 côtés de l'inégalité $x \mapsto x^2$ est $\nearrow$.

$$\leq |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 + 2\sum_{i=2}^{n} \sum_{0<j<i} |x_i|\,|x_j| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i x_j|$$
$$= (|x_1| + \dots + |x_n|)^2 = \|x\|_1^2$$

remarque :



(3)
$$\|x\|_1 = \underbrace{|x_1|}_{\leq \|x\|_\infty} + \underbrace{|x_2|}_{\leq \|x\|_\infty} + \dots + \underbrace{|x_n|}_{\leq \|x\|_\infty} \leq \underbrace{\|x\|_\infty + \dots + \|x\|_\infty}_{n \text{ fois}}$$

Exercice 2. (Une norme plus exotique) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels fixés avec $a \neq 0$. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$N_{a,b}(x, y) = \max\{|bx + y|, |(a + b)x + y|\}.$$

1. Montrer que l'application $N_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie bien une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner la boule unité dans le cas où $(a, b) = (1, 0)$. *Indication : montrer que* $N_{1,0}(x, y) \leq 1$ *ssi* $-1 \leq y \leq 1$ *et* $-1 \leq x + y \leq 1$.

1) Il faut montrer la

i) Séparation : on a bien $N_{a,b}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \max\{\underbrace{|bx+y|}_{\geq 0} ; \underbrace{|(a+b)x+y|}_{\geq 0}\} \geq 0$

De plus

$$N_{a,b}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} |bx+y| = 0 \\ |(a+b)x+y| = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} bx+y = 0 \\ (a+b)x+y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -bx \\ (a+\cancel{b})x - \cancel{bx} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -bx \\ ax = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -bx = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{car } a \neq 0$$

$$\iff x = y = 0$$

ii) homogénéité : soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$N_{a,b}\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \max\{|\lambda bx + \lambda y| ; |\lambda(a+b)x + \lambda y|\}$$
$$= \max\{|\lambda|\,|bx+y| ; |\lambda|\,|(a+b)x+y|\}$$
$$= |\lambda| \max\{|bx+y| ; |(a+b)x+y|\}$$
$$= |\lambda|\, N_{a,b}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

iii) Inégalité triangulaire : Soit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$

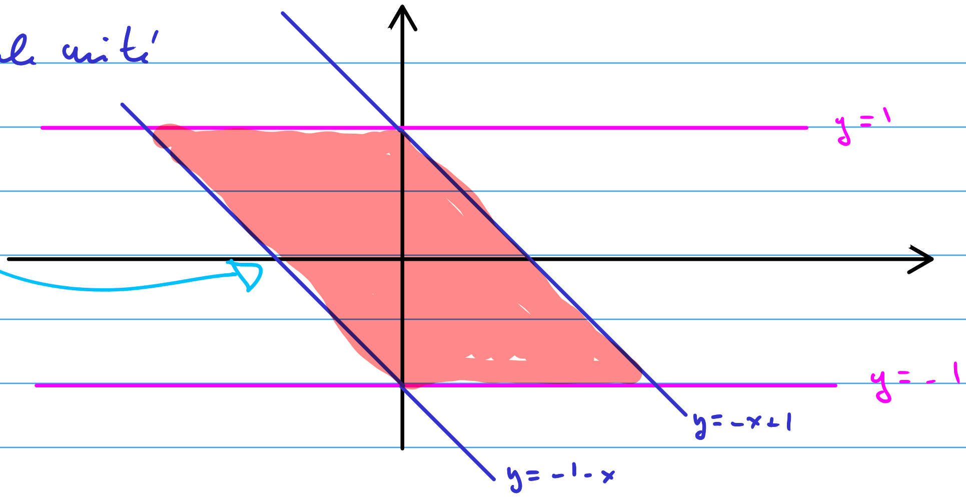
$$N_{a,b}\begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{pmatrix} = \max\{|b(u_1+v_1) + u_2+v_2| ; |(a+b)(u_1+v_1) + u_2+v_2|\}$$
$$\leq \max\{|bu_1+u_2| + |bv_1+v_2| ; |(a+b)u_1+u_2| + |(a+b)v_1+v_2|\}$$
$$\leq \max\{|bu_1+u_2| ; |(a+b)u_1+u_2|\} + \max\{|bv_1+v_2| ; |(a+b)v_1+v_2|\}$$
$$\leq N_{a,b}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + N_{a,b}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

2) On pose $a = 1$ et $b = 0$ et on a :

$$N_{1,0}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \max\{|y| ; |x+y|\}$$ est une norme !

remarque : $N_{1,0}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \| A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \|_\infty$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Traçons la Boule unité de $N_{0,1}(\cdot)$



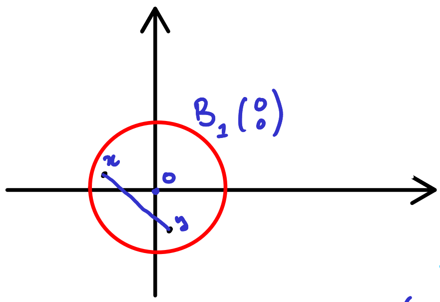
Pour cela on cherche $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; N_{1,0}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq 1 \right\}$

$$= \left\{ \_\_\_\_ \;\middle|\; \begin{matrix} |y| \leq 1 \\ \text{et} \\ |x+y| \leq 1 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \_\_\_\_ \;\middle|\; \begin{matrix} -1 \leq y \leq 1 \\ \text{et} \\ -1 \leq x+y \leq 1 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \_\_\_\_ \;\middle|\; -1 \leq y \text{ et } y \leq 1 \text{ et } -1-x \leq y \text{ et } y \leq 1-x \right\}$$

Exercice 3. (Convexité et inégalité triangulaire) Montrer que la boule unité d'un espace vectoriel normé E est un convexe de cet espace. *Indication : une partie $A \subset E$ est convexe ssi $\forall x, y \in A$ on a $\{\lambda x + (1-\lambda)y | \lambda \in [0,1]\} \subset A$*



combinaison linéaire convexe de x et $y \in E$

et on a $[x,y] = \{ \lambda x + (1-\lambda)y \; ; \; \lambda \in [0,1] \}$

Soit donc $\underbrace{x, y \in B_1(0)}_{\|x\| \leq 1 \text{ et } \|y\| \leq 1}$ et $\lambda \in [0,1]$.

Il suffit de montrer que $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leq 1$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1-\lambda)y\| &\leq \|\lambda x\| + \|(1-\lambda)y\| && ; \text{inégalité triangulaire} \\ &\leq |\lambda| \, \|x\| + |1-\lambda| \, \|y\| && ; \text{remarque } \lambda \geq 0 \text{ et } 1-\lambda \geq 0. \\ &\leq \lambda + 1 - \lambda \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

et on a $\lambda x + (1-\lambda)y \in B_1(0)$

Exercice 4.* (Distance SNCF) On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$. On note $O = (0,0)$ l'origine du plan et on définit

$$d(A,B) = \begin{cases} \|\overrightarrow{AB}\|_2, & \text{si les points } A,\ B \text{ et } O \text{ sont alignés} \\ \|\overrightarrow{OA}\|_2 + \|\overrightarrow{OB}\|_2, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner l'ensemble des points situés à distance inférieure à 3 du point $C = (2,0)$.
3. On considère la suite $u = (1, \frac{1}{m+1})_{m\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que u converge vers $\ell = (1,0)$ pour la norme 2 mais que la suite $d(u_m, \ell)$ ne tend pas vers 0 quand $m \to +\infty$.
4. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$ pour tout $A, B \in \mathbb{R}^2$?

Exercice 5.* (Inégalités de Hölder et de Minkowski) . Soit $(p,q) \in [1,+\infty[^2$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

1. Montrer que pour $(x,y) \in [0,+\infty[^2$, $xy \leq \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$. *Indication : étudier le minimum de la fonction* $x \mapsto \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}-yx$ *pour* $x \geq 0$
2. En déduire que $\forall (a_1,\cdots,a_n),(b_1,\cdots,b_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{1/q}$$

3. En déduire que $\forall (a_1,\cdots,a_n),(b_1,\cdots,b_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k+b_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{1/p}.$$

Exercice 6.* (Les normes N_p) Soit $p \in [1, +\infty[$, pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit $N_p(x) = (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{1/p}$.

1. Montrer que $\forall p \geq 1$, N_p est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. Dessiner les boules unités de $\mathbb{R}^2$ dans le cas où $p = 1, 3/2, 2, 5, +\infty$.
3. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, $\lim\limits_{p \to +\infty} N_p(x) = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\} = N_\infty(x)$.
4. Montrer que si $0 < p < 1$, N_p n'est pas une norme sur $\mathbb{R}^n$ (si $n \geq 2$).

2 Limites de suites

Exercice 7. Étudier la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^3$ ci-dessous et déterminer des sous-suites convergentes en fonction des paramètres réels a, b et c

1. $u_n = \left(\frac{(-1)^n}{n^a}, \frac{1}{n^b}, c^n\right)$ $\rightarrow$ $a>0$; $b \geq 0$, $c \in]-1,1]$
2. $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a}, \sum_{k=1}^{n} \frac{b^k}{k!}, c\right)$ $\rightarrow$ $a>1$ (critère de Riemann) ; $b \in \mathbb{R}$ (rayon de cv de la série entière de $\exp(\cdot)$) ; $c \in \mathbb{R}$
3. $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} a^k, \sum_{k=1}^{n} a^{2k}, \sum_{k=1}^{n} a^{3k}\right)$ $\rightarrow$ $|a|<1$ (Série géométrique).

remarque : s'assurer que les suites des coordonnées cv.

3 Ouverts et fermés des espaces vectoriels normés $\mathbb{R}^n$

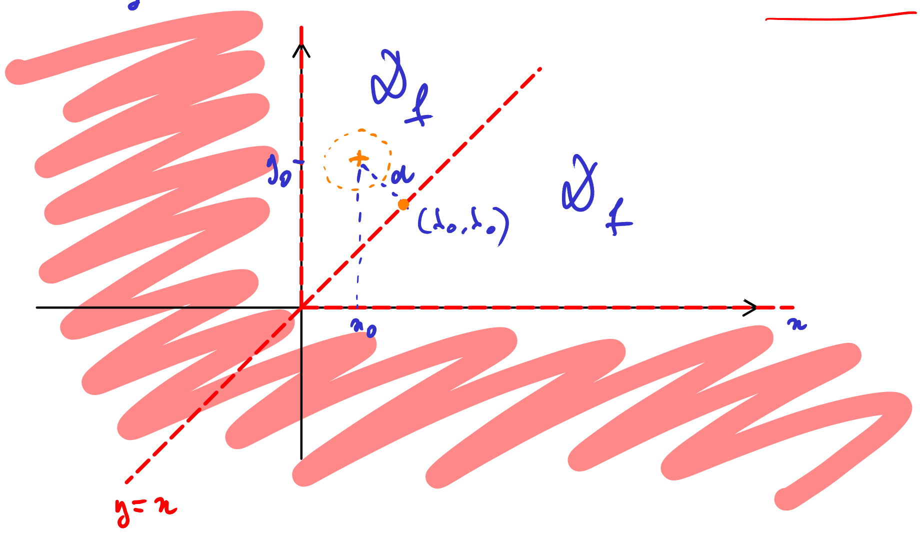
Exercice 8. (Ouvert ou fermé) Dessiner et déterminer la nature (ouvert ou fermé) du domaine de définition des fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = \frac{\ln(x)+\ln(y)}{x-y}$.
2. $f(x,y) = \ln\left((16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)\right)$

3.* $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2-y}}$

4.* $f(x,y) = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$

1) $f(x,y) = \dfrac{\ln x + \ln y}{x-y}$ est bien défini ssi $\begin{cases} x \neq y & \text{division par } 0 \\ x, y > 0 & \text{calcul du } \ln. \end{cases}$



On note le domaine de définition de f $\mathcal{D}_f$. Montrons que c'est un ouvert.

Soit $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_f$, il faut trouver un rayon $r>0$ tq $B_r\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \subset \mathcal{D}_f$

* distance (euclidienne) entre $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et (Oy) est $|x_0|$
* ——— (Ox) est $|y_0|$
* ——— $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et la droite $\{y=x\}$ = $(x_0-y_0)^2/2$.

$\left\|\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}\right\|^2 = (x_0-\lambda)^2 + (y_0-\lambda)^2$
$= x_0^2 + y_0^2 - 2\lambda(x_0+y_0) + 2\lambda^2$

le minimum est atteint en : $\lambda_0 = \frac{x_0+y_0}{2}$

et $d^2 = x_0^2 + y_0^2 - (x_0+y_0)^2 + (x_0+y_0)^2/2$
$= x_0^2+y_0^2 - (x_0^2 - y_0^2 - 2x_0y_0)/2$
$= \frac{x_0^2+y_0^2-2x_0y_0}{2}$
$= \frac{(x_0-y_0)^2}{2}$.

Posons $r = \min\left\{\frac{|x_0|}{2}, \frac{|y_0|}{2}, \frac{d}{2}\right\}$

et on a bien $B_r\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \subset \mathcal{D}_f$.

2) quand est bien définie la quantité

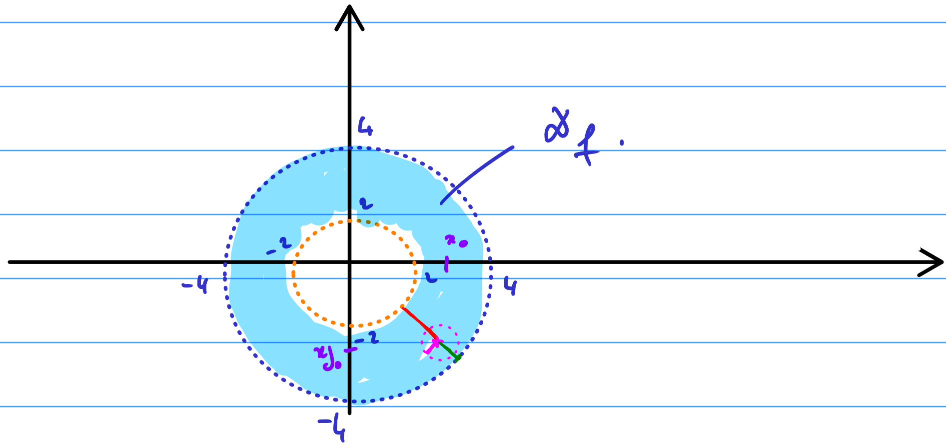
$\ln\left((16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)\right)$ est bien définie

ssi $(16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4) > 0$

ssi $\begin{cases} 16-x^2-y^2 > 0 \\ x^2+y^2-4 > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 16-x^2-y^2 < 0 \\ x^2+y^2-4 < 0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} 4 > \|(x,y)\| \\ \|(x,y)\| > 2 \end{cases}$ ou $\cancel{\begin{cases} 16 < \|(x,y)\|^2 \\ \|(x,y)\|^2 < 4 \end{cases}}$

ssi $(x,y) \in B_4\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \cap B_2^c(0,0)$



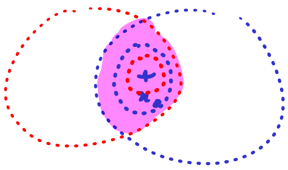
Soit $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \in \mathcal{D}_f$ ie $2 < \left\|\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right\| < 4$. Posons

$$r = \min\left\{ \frac{\left\|\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right\| - 2}{2} ; \frac{4 - \left\|\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right\|}{2} \right\}$$

et on a $B_r\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \subset \mathcal{D}_f$. Ainsi $\mathcal{D}_f$ est ouvert !

Exercice 9. (Stabilité par intersection finie) Montrer qu'une intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'une intersection infinie d'ouvert de $\mathbb{R}^n$ n'est pas nécessairement un ouvert. Qu'en est-il pour les parties fermées de $\mathbb{R}^n$?

- e.g. :



Soit $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_n$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Soit $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$

$\forall i = 1, \dots, n$, on a $x_0 \in \mathcal{O}_i$ et il existe des boules $B_i = B_{r_i}(x_0)$ avec $B_i \subset \mathcal{O}_i$. Posons alors $r = \min\{\underbrace{r_1}_{>0}, \underbrace{r_2}_{>0}, \dots, \underbrace{r_n}_{>0}\} > 0$

(car on prend le min sur un nombre fini de valeur).

Reste à voir que $B_r(x_0) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$. C'est bien le cas car

$$B_r(x_0) \subset B_{r_i}(x_0) = B_i \subset \mathcal{O}_i \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n$$

Autrement dit $B_r(x_0) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$

- Qu'en est-il pour les ensembles fermés ?

passage au complémentaire : $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ ouverts $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$ ouvert

$\mathcal{O}_1^c, \dots, \mathcal{O}_n^c$ fermé $\Rightarrow \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i\right)^c$ fermé

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i^c$ fermé.

L'union finie de fermés est un fermé.

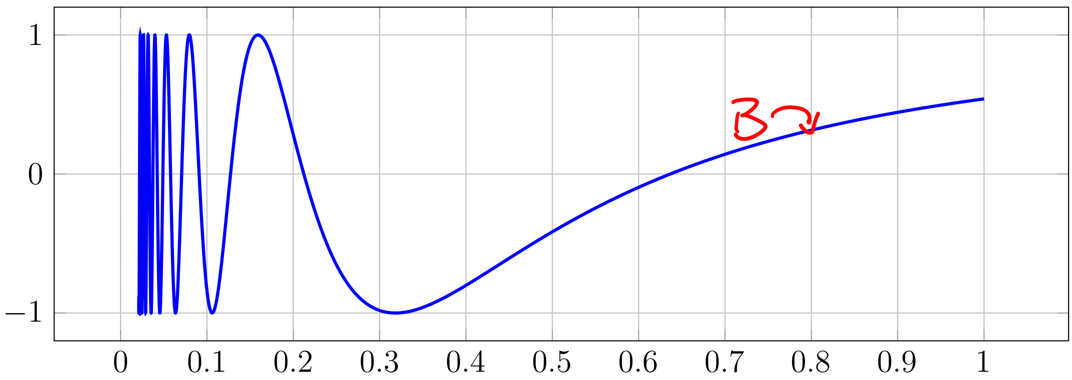
- que se passe-t-il si on considère une intersection infinie d'ouvert

Poser $\mathcal{O}_i = \left]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right[$ tq $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{O}_i = \{0\}$

singleton fermé.

Exercice 10. (Adhérence) Dessiner l'adhérence des ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 2y^2 \leq 1\}$
2. $C = \{\frac{t}{t+1}(\cos(t), \sin(t)), t > 0\}$
3.* $B = \{(t, \cos(1/t)) \in \mathbb{R}^2 | t > 0\}$



4.* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], y \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]\}$