

## Formes quadratiques (3pt)

### 1. Forme quadratique

Soit  $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la forme quadratique donnée par  $q(x, y, z) = 10z^2 - 8yz + 4xz + 2y^2 - 2xy + x^2$ . Déterminer lesquelles de ces assertions sont vraies.

- (a) la forme polaire de  $q$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^3$  (50%)
- (b)  $q$  est de signature  $(3, 0)$  (50%)
- (c)  $q$  est de signature  $(0, 3)$  (0%)
- (d)  $q$  est de signature  $(1, 2)$  (0%)
- (e)  $q$  est de signature  $(2, 1)$  (0%)
- (f)  $q$  peut prendre des valeurs positives ou négatives (0%)

### 2. Forme quadratique

Soit  $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la forme quadratique donnée par  $q(x, y, z) = -4z^2 + 10yz + 2xz - y^2 + 2xy + x^2$ . Déterminer lesquelles de ces assertions sont vraies.

- (a)  $q$  est de signature  $(2, 1)$  (50%)
- (b)  $q$  peut prendre des valeurs positives ou négatives (50%)
- (c) la forme polaire de  $q$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^3$  (0%)
- (d)  $q$  est de signature  $(1, 2)$  (0%)
- (e)  $q$  est de signature  $(1, 1)$  (0%)
- (f)  $q$  est de signature  $(3, 0)$  (0%)
- (g)  $q$  est de signature  $(0, 3)$  (0%)

### 3. Forme quadratique

Soit  $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la forme quadratique donnée par  $q(x, y, z) = 2x^2 + 4xy + 3y^2 + 4xz + 9z^2$ . Déterminer lesquelles de ces assertions sont vraies.

- (a)  $q$  est définie positive (33.33333%)
- (b)  $q$  est de signature  $(3, 0)$  (33.33333%)
- (c) le point  $(0, 0, 0)$  est un minimum de  $q$  (33.33333%)
- (d)  $q$  est de signature  $(2, 1)$  (0%)
- (e)  $q$  est de signature  $(1, 2)$  (0%)
- (f)  $q$  est de signature  $(0, 3)$  (0%)

(g)  $q$  peut prendre des valeurs positives ou négatives (0%)

#### 4. Forme quadratique

Soit  $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la forme quadratique donnée par  $q(x, y, z) = (x + y)^2 + (x + z)^2 + (y - z)^2$ . Déterminer lesquelles de ces assertions sont vraies.

- (a)  $q$  est de signature  $(2, 0)$  (50%)
- (b) le point  $(0, 0, 0)$  est un minimum de  $q$  (50%)
- (c)  $q$  est sous forme de somme de carrés de formes linéaires indépendantes (0%)
- (d)  $q$  est définie positive (0%)
- (e)  $q$  est de signature  $(2, 1)$  (0%)
- (f)  $q$  est de signature  $(3, 0)$  (0%)

#### 5. Forme quadratique

Soit  $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la forme quadratique donnée par  $q(x, y, z) = (x + 2y + z)^2 - (x + y)^2 - (y + z)^2$

- (a)  $q$  est de signature  $(1, 1)$  (100%)
- (b) le point  $(0, 0, 0)$  est un minimum de  $q$  (0%)
- (c)  $q$  est sous forme de somme de carrés de formes linéaires indépendantes (0%)
- (d)  $q$  est définie positive (0%)
- (e)  $q$  est de signature  $(2, 1)$  (0%)
- (f)  $q$  est de signature  $(3, 0)$  (0%)

#### 6. Forme quadratique

Soit  $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la forme quadratique donnée par  $q(x, y, z) = 2(x + y + z)^2 - (x + y)^2 - (y + z)^2 - (x + z)^2$ . Déterminer lesquelles de ces assertions sont vraies.

- (a)  $q$  est de signature  $(1, 2)$  (100%)
- (b) le point  $(0, 0, 0)$  est un minimum de  $q$  (0%)
- (c)  $q$  est sous forme de somme de carrés de formes linéaires indépendantes (0%)
- (d)  $q$  est définie positive (0%)
- (e)  $q$  est définie négative (0%)
- (f)  $q$  est de signature  $(2, 1)$  (0%)

(g)  $q$  est de signature  $(3, 0)$  (0%)