Contrôle continu 1

Durée 1h30. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. (Question de cours) Calculer la moyenne et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. (On demande la démonstration complète)

Exercice 2. On jette 2 dés équilibrés.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre 6, sachant que les 2 résultats sont différents ?

2. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre 6, sachant que leur somme vaut i ? Calculer le résultat pour toutes les valeurs possibles de i.

Exercice 3. Une machine à sous fonctionne de la manière suivante : on introduit une pièce de 1 euro et 3 roues se mettent à tourner : ces roues représentent les dix chiffres de 0 à 9 et chaque roue s'arrête en montrant un chiffre au hasard. Si les trois chiffres sont différents, le joueur perd sa mise ; s'il y a un "double", le joueur récupère sa mise plus deux euros ; s'il y a un "triple", le joueur récupère sa mise plus a euros.

1. Soit X la variable aléatoire associée au gain d'un joueur. Déterminer la loi de X.

2. On dit que le jeu est favorable au propriétaire de la machine si l'espérance de gain du joueur est négative. Jusqu'à quelle valeur de a le jeu est-il favorable au propriétaire de la machine ?

Exercice 4. On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc “Pile” ou “Face” avec la probabilité 1/2.

On note P_k (resp. F_k) l'événement : “on obtient Pile (resp. Face) au k-ième lancer”. Pour ne pas surcharger l'écriture on écrira, par exemple, P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$. On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient, pour la première fois, “Pile” puis “Face” dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

L'objet de l'exercice est de calculer l'espérances de X (i.e. la durée moyenne d'une partie)

1. Calculer $\mathbb{P}(X = 2)$.

2. Soit k un entier supérieur ou égal à 3.
   (a) Remarquer que que si le premier lancer est un “Pile”, alors il faut et il suffit que $P_2P_3 \ldots P_{k-1}F_k$ se réalise pour que $\{X = k\}$ se réalise. En déduire que : $\forall k \geq 3$, on a $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X = k-1) + \frac{1}{2^k}$

(b) On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_k = 2^k \mathbb{P}(X = k)$. Déterminer u_k,

(c) Donner alors la loi de X.

3. Montrer que X a une espérance, notée $\mathbb{E}(X)$, et la calculer.