TD5.

Exercice 1 :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{sinon.} \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

1) * f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions continues.

\+ en $(x,y)=(0,0)$. Vérifier que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{1/2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

remarque : on a utilisé le fait que $|y| < \|(x,y)\|_2$ ...

$\therefore$ f est C^0 sur $\mathbb{R}^2$.

2) oui on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 y}{(x^2+y^2)^2} & \text{sinon.} \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{sinon.} \\ \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

3) * sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ les dérivées partielles existent et sont continues.

f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

* en $(0,0)$ les dérivées partielles ne sont pas continues :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{1}{2} \not\longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 .$$

$\therefore$ f n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

4) * $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ et donc f est diff. en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

* en $(0,0)$. Si f est différentiable la diff doit être ~~nécessairement~~ égale à $h \mapsto h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Mais

$$h(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\not\longrightarrow} 0$$

car $h(x,x) = \frac{1}{2^{3/2}} \underset{x \to 0}{\not\longrightarrow} 0$

f n'est pas diff en $(0,0)$.

Exercice 2 : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$

1) on a bien $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ car

$$|f(x,y)| \leq \frac{2\,\|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^2} = 2\,\|(x,y)\|^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

f est $\mathcal{C}^0$ en $(0,0)$

2) il faut revenir à la définition :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0.$$

les dérivées partielles existent et $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

3) on calcule les dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et on vérifie qu'elles sont continues en $(0,0)$;

* $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\, y & \text{sinon.} \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq 6\,\|(x,y)\| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x\,\dfrac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| < 6\,\|(x,y)\|_2 \xrightarrow[\text{qd } (x,y)\to(0,0)]{} 0. \quad \text{et } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ sur } \mathbb{R}^2$$

$\therefore$ f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

4) f est bien diff sur $\mathbb{R}^2$ car $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

1) $m : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$m(p,q) \longmapsto p^5q^3$

Soit $a\in\mathbb{R}^2$ on a

$$\underbrace{d_a m}_{\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} = \underbrace{\frac{\partial m}{\partial p}(a)}_{\in\mathbb{R}}\, \underbrace{d_a p}_{\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{\partial m}{\partial q}(a)}_{\in\mathbb{R}}\, \underbrace{d_a q}_{\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \quad \underline{\underline{\text{linéaire}}}$$

où
$$\begin{cases} d_a p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad (h,k) \longmapsto d_a p(h,k) = h \\ d_a q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad (h,k) \longmapsto d_a q(h,k) = k \end{cases}$$

Ainsi si $a=(p_0,q_0)\in\mathbb{R}^2$

$$d_a m(h,k) = \underbrace{5p_0^4q_0^3}_{\in\mathbb{R}}\, h + \underbrace{3p_0^5q_0^2}_{\in\mathbb{R}}\, k \in\mathbb{R}$$

et la differentielle est l'application.

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

$$a \longmapsto d_a m = \left((h,k) \longmapsto d_a m(h,k)\right)$$

que l'on note (abusivement!)

$$dm = 5p^4 q^3 \, dp + 3p^5 q^2 \, dq$$

2) $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(\alpha, \beta, \gamma) \longmapsto \alpha \beta^2 \cos(\gamma)$

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha, \beta, \gamma) = \beta^2 \cos(\gamma)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \beta}(\alpha, \beta, \gamma) = 2\alpha\beta\cos(\gamma)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \gamma}(\alpha, \beta, \gamma) = -\alpha \beta^2 \sin(\gamma)$$

La differentielle en $a = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ est :

$$\underbrace{d_a g}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})} = \underbrace{\beta_0^2 \cos(\gamma_0)}_{\in \mathbb{R}} \, d_a\alpha + \underbrace{2\alpha\beta_0 \cos(\gamma_0)}_{\in \mathbb{R}} \, d_a\beta + \underbrace{\alpha_0 \beta_0^2 \sin(\gamma_0)}_{\in \mathbb{R}} \, d_a\gamma \quad \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$

Ainsi la differentielle est noté :

$$dg = \beta^2 \cos(\gamma) \, d\alpha + 2\alpha\beta\cos(\gamma) \, d\beta + \alpha\beta^2 \sin(\gamma) \, d\gamma$$

Exercice 4 :

1) $g \circ f(x,y) = g(f(x,y)) = xy \cos(xy)\, e^{y^2}$

2) $\frac{\partial g \circ f}{\partial x}(x,y) = y e^{y^2} \left(\cos(xy) - xy \sin(xy) \right)$

$\frac{\partial g \circ f}{\partial y}(x,y) = x \left(\cos(xy)\, e^{y^2} - xy \sin(xy)\, e^{y^2} + 2y^2 \cos(xy)\, e^{y^2} \right)$

3) Matrices jacobiennes:

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} -y \sin(xy) & -x \sin(xy) \\ 0 & 1 \\ e^{y^2} & 2xy\, e^{y^2} \end{bmatrix}$$

$$J_g(u,v,w) = [\, vw \;,\; uw \;,\; uv \,]$$

et

$$J_g(f(x,y)) = [\, xy\, e^{y^2} \;,\; x \cos(xy)\, e^{y^2} \;;\; y \cos(xy)$$

Ainsi on a

$$J_{g\circ f}(x,y) = \left[xy\, e^{y^2},\ x\cos(xy) e^{y^2},\ y\cos(xy) \right] \begin{bmatrix} -y\sin(xy) & -x\sin(xy) \\ 0 & 1 \\ e^{y^2} & 2xy\, e^{y^2} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\underbrace{y e^{y^2}\left(-xy\sin(xy) + \cos(xy)\right)}_{= \frac{\partial g\circ f}{\partial x}(x,y)} ;\ \underbrace{x\left(-xy\sin(xy) e^{y^2} + \cos(xy) e^{y^2} + 2y^2\cos(xy)\, e^{y^2}\right)}_{= \frac{\partial g\circ f}{\partial y}(x,y)} \right].$$

Exercice 5 :

on note $\Psi :]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(r, \theta) \longmapsto (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

et :

$$g(r,\theta) = f\circ\Psi(r,\theta) = f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

$$* \ \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \Psi_1}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial \Psi_2}{\partial}(r,\theta)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\sin(\theta)$$

$$* \ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta}(r,\theta)$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, r\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, r\cos\theta$$

$$\begin{cases} \partial_r g(r,\theta) = \partial_x f \cos\theta + \partial_y f \sin(\theta) \\ \partial_\theta g(r,\theta) = \partial_x f\ r\sin\theta + \partial_y f\ r\cos\theta \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos\theta \, \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - \frac{1}{r}\sin\theta \, \frac{\partial g}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin\theta \, \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r}\cos\theta \, \frac{\partial g}{\partial \theta}, \end{cases}$$

$$\text{et } \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2$$

Exercice 6

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x^2-y^2,\ y^2-z^2,\ z^2-x^2)$$

1)

$$J_\varphi(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 0 & 2y & -2z \\ -2x & 0 & 2z \end{bmatrix}$$

$$J_{f\circ\varphi}(x,y,z) = \left[J_f(\varphi(x,y,z))\right]\left[J_\varphi(x,y,z)\right]$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}(\varphi(x,y,z)),\ \frac{\partial f}{\partial \varphi_2}(\varphi(x,y,z)),\ \frac{\partial f}{\partial \varphi_3}(\varphi(x,y,z))\right] J_\varphi(x,y,z)$$

$$= 2\Big[x\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}(\varphi(x,y,z)) - x\frac{\partial f}{\partial \varphi_3}(\varphi(x,y,z)),$$
$$-y\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}(\varphi(x,y,z)) + y\frac{\partial f}{\partial \varphi_2}(\varphi(x,y,z)),$$
$$-z\frac{\partial f}{\partial \varphi_2}(\varphi(x,y,z)) + z\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_3}(x,y,z)\Big]$$

2) $\frac{\partial g}{\partial x}(t,t,t) = 2t\left[\cancel{\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}(0,0,0)} - \cancel{\frac{\partial f}{\partial \varphi_3}(0,0,0)}\right]$

$+\ \frac{\partial g}{\partial y}(t,t,t) = 2t\left[-\cancel{\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}(0,0,0)} + \cancel{\frac{\partial f}{\partial \varphi_2}(0,0,0)}\right]$

$+\ \frac{\partial g}{\partial z}(t,t,t) = 2t\left[-\cancel{\frac{\partial f}{\partial \varphi_2}(0,0,0)} + \cancel{\frac{\partial f}{\partial \varphi_3}(0,0,0)}\right]$

$= 0.$

Exercice 7 : $f(x,y) = x e^y + y e^x$

1) La fonction est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus on a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

on est dans les hypothèses du théorème des fonctions implicites. Il existe une fonction φ définie dans V un voisinage de 0 tq

$\varphi(0) = 0$

$g(x, \varphi(x)) = 0 \qquad \forall x \in V.$

remarque : on admettra que φ est (au moins) $\mathcal{C}^2$ sur V.

2) Par définition on a $\forall x \in V$:

* $g(x) = f(x, \varphi(x)) = 0$ ce qui donne $x e^{\varphi(x)} + \varphi(x) e^{x} = 0$

$$\Rightarrow g(0) = \varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi(0) = 0}$$

* comme $g(\cdot)$ est l'appli cte égale à 0 on a

$g'(x) = 0$ ce qui donne : $g'(x) = e^{\varphi(x)} + x\varphi'(x)e^{\varphi(x)} + \varphi'(x)e^{x} + \varphi(x)e^{x}$

$$\Rightarrow g'(0) = + \varphi'(0) + \underset{=0}{} = 0$$

$$\text{et} \quad \boxed{\varphi'(0) = -1}$$

* dérive une deuxième fois :

$g''(x) = 0$ ce qui donne :

$$g''(x) = \varphi'(x)e^{\varphi(x)} + \varphi'(x)e^{\varphi(x)} + x(\varphi'(x))^2 e^{\varphi(x)} + x\varphi''(x)e^{\varphi(x)} + \varphi''(x)e^{x} + \varphi'(x)e^{x}$$
$$+ \varphi'(x)e^{x} + \varphi(x)e^{x}$$

$$g''(0) = -1 -1 + 0 \overset{+0}{} + \varphi''(x) - 1 - 1 + 0$$

$$\text{et} \quad \boxed{g''(0) = 4}$$

En résumé on a :

$$\varphi(x) = 0 - x + \frac{4}{2}x^2 + o(|x|^2)$$

$$= -x + 2x + o(|x|^2).$$

Exercice 8. $\quad f(x,y) = x^2 y + \ln(1+y^2)$

1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \quad$ et $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + \dfrac{2y}{1+y^2}$

on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \quad$ (point critique).

Le th. des fonctions implicites ne s'applique pas en ce point.

(on a tout de même $f(0,0) = 0$)

2) Soit $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$.

* on a bien $x \mapsto f(x,0) = 0$ et l'axe des x (noté $\mathcal{C}$) est dans Γ.

* Soit $y \neq 0$: $\quad x^2 y + \ln(1+y^2) = 0$

ssi $\quad x^2 y = -\ln(1+y^2)$

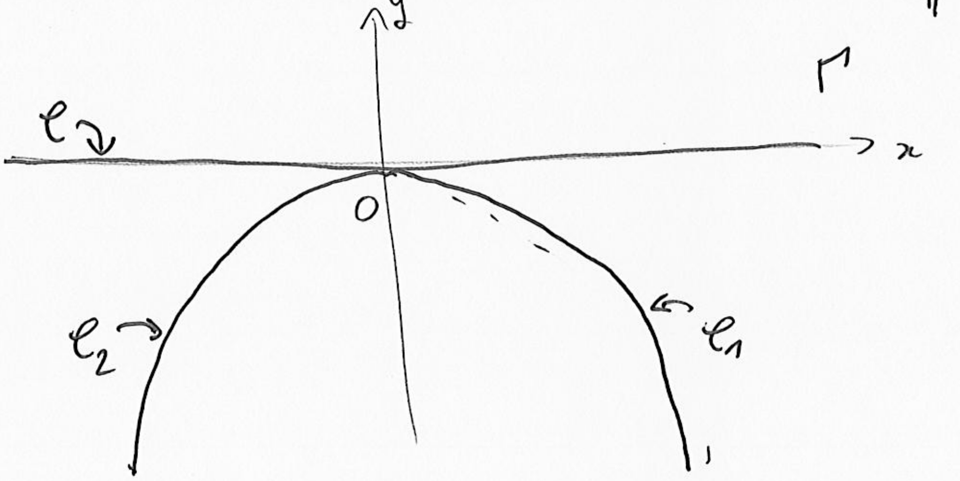
implique que $y < 0$ et

$$x^2 = \frac{-\ln(1+y^2)}{y}$$

les points correspondant sont sur la courbe : $\mathcal{C}_1$:

$$\begin{aligned}]0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \left(\sqrt{\frac{\ln(1+t^2)}{t}}, -t\right) \end{aligned}$$

et sa symétrique (noté $\mathcal{C}_2$) par rapport à l'axe Oy.



Exercice 9 :

1) $(*)\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x y^2 & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y x^2 \end{cases}$

Soit f une solution de $(*)$ et $y \in \mathbb{R}$ fixé. On pose

$$g(x) = f(x,y)$$

par (1) on a $g'(x) = x y^2 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2} x^2 y^2 + \underbrace{c(y)}_{cte}$

où $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Par (2)

on a $c'(y) = 0$

et
$$f(x,y) = \frac{1}{2} x^2 y^2 + A \quad \text{où } A \in \mathbb{R}.$$

2) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x y & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + e^x & (2) \end{cases}$

Même méthode : $g(x) = f(x,y)$ où $y \in \mathbb{R}$ fixé

(1) $\Rightarrow$ $g'(x) = e^x y$ et $g(x) = y e^x + c(y)$

où $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$. On pose $h(y) = f(x,y) = y e^x + c(y)$

(2) $\Rightarrow$ $h'(y) = 2y + e^x$ et $c'(y) = 2y$

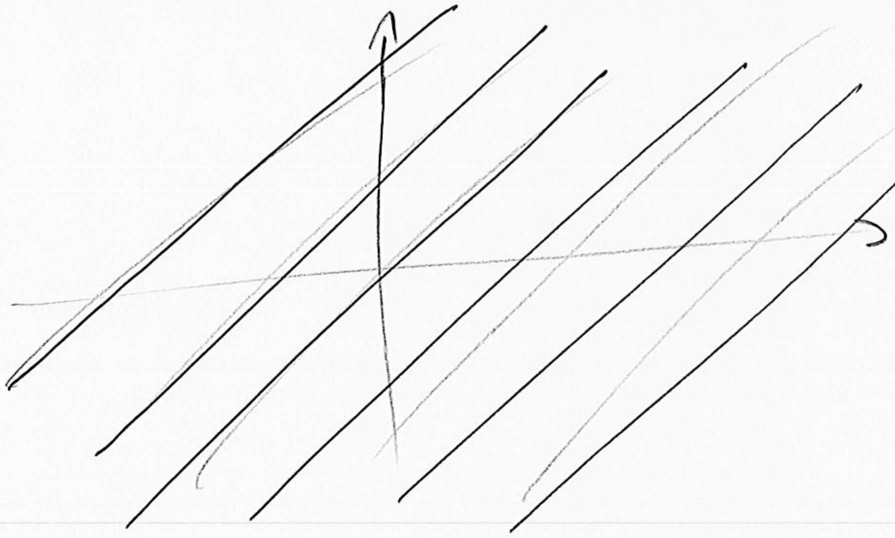
et
$$f(x,y) = y e^x + y^2 + A \quad \text{où } A \in \mathbb{R}.$$

~~3) Idem~~

~~$f(x,y) = \frac{1}{2} x^2 y^2 + c(y)$ où $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.~~

Exercice 10.

1) Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tq $f(x+t, y+t) = f(x,y)$ (*)



Ligne de niveau de f.

on dérive par rapport à t :

$$\frac{d}{dt} f(x+t, y+t) = 0$$

(règle de la chaîne)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x+t, y+t) \times \underbrace{\frac{\partial t}{\partial t}(t)}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial y}(x+t, y+t) \cdot \underbrace{\frac{\partial t}{\partial t}(t)}_{=1} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$ par (*).

2) $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$

$$F(u,v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

et on a :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \times \underbrace{\frac{\partial (u+v)/2}{\partial u}}_{= 1/2} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \underbrace{\frac{\partial (u-v)/2}{\partial u}}_{= 1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = 0.$$

3) La question précédente nous apprend que F ne dépend que de v : $\exists\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q.

$$F(u,v) = g(v)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x,y) = g(x-y)$$

Réciproquement : si f s'écrit $f(x,y) = g(x-y)$ avec g une fonction, alors on a bien

$$f(x+t, y+t) = f(x,y) \qquad \forall x,y,t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 11 :

On pose en coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ et $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$

on a vu à l'exo 5 que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos\theta \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - \dfrac{\sin\theta}{r} \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin\theta \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \dfrac{\cos\theta}{r} \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta). \end{cases}$$

Ainsi

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = r\cos\theta\left(\cos\theta \frac{\partial g}{\partial r} - \cancel{\frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}}\right)$$
$$+ r\sin\theta\left(\sin\theta \frac{\partial g}{\partial r} + \cancel{\frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}}\right)$$

$$= r \frac{\partial g}{\partial r}$$

et l'équation $(*)$ devient $\dfrac{\partial g}{\partial r} = 1$. $\forall r > 0$.

il existe $\varphi :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ (car $r>0$) C^1 et tq

$$g(r,\theta) = r + \varphi(\theta)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \varphi\left(\operatorname{Arctan} \frac{y}{x}\right)$$

$\Leftrightarrow \quad \exists \ \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1 tq

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$