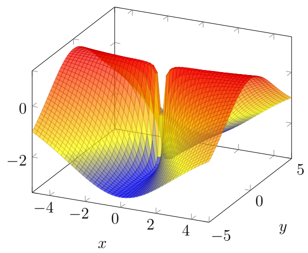
Limites, continuité et différentiabilité

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

1 Limites de fonctions

Exercice 1. Donner le domaine de définition et étudier la limite en l'origine des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \frac{x^2-3y^2}{x^2+y^2}$

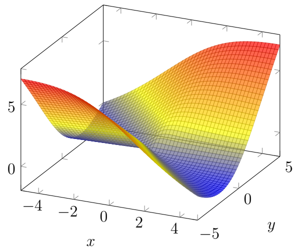


2. $f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\frac{xy}{x+y}$.

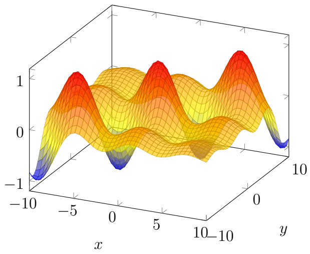
1. Étudier la limite à l'origine de la restriction de f à la droite d'équation $y = ax$.
2. Calculer la limite à l'origine de de la restriction de f à la parabole d'équation $x + y = x^2$ (faire un dessin !)
3. Montrer que f n'admet pas de limite à l'origine.

Exercice 3.* Montrer que la fonction $f(x, y) = \frac{xy+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ tend vers 0 quand (x, y) tend vers l'origine.



Exercice 4. Donner le domaine de définition et étudier la limite en $a = (0, 0)$ de la fonction $f(x, y) = \frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2}$.

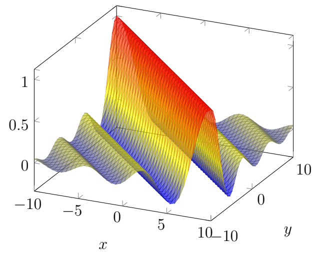
Exercice 5.* Soit f la fonction définie sur le plan privé de la droite Δ d'équation $y = x$ par la formule $f(x, y) = \frac{\sin(x)-\sin(y)}{x-y}$. Étudier la limite de f en tout point de Δ.



2 Continuité

Exercice 6. Étudier la continuité de la fonction $f(x, y) = \max\{x, y\}$. *Indication : On pourra montrer que* $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$ *pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 7.* Montrer que la fonction définie par $f(x,y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y}$ est continue sur son domaine de définition et qu'elle peut se prolonger par continuité à $\mathbb{R}^2$ tout entier.



3 Dérivées partielles

Exercice 8. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = y^5 - 3xy$
2. $f(x, y) = x \cos(e^{xy})$
3. $F(x, y) = \int_y^x \cos(e^t) dt$

Exercice 9.* Existence et calcul des dérivées partielles de la fonction f définie par $\arccos\Big(1 + (x-y)^2\Big)$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 1$.

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2. Déterminer les dérivées partielles de f en un point quelconque distinct de l'origine.
3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$?

Exercice 11. (Gaz parfait) Pour un gaz parfait, l'énergie interne ε s'écrit en fonction du volume spécifique τ et de l'entropie spécifique s comme

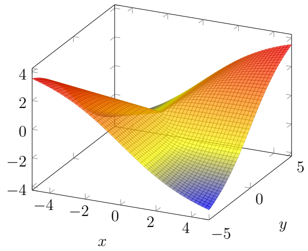
$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (\tau, s) &\mapsto \tau^{1-\gamma} e^{s/c_\nu} \end{aligned}$$

où $\gamma > 1$ et $C_\nu > 0$ sont deux constantes.

1. Calculer la pression $P = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}$ et la température $T = \frac{\partial \varepsilon}{\partial s}$
2. Retrouver la loi des gaz parfaits : $\frac{P\tau}{T}$ est constant.

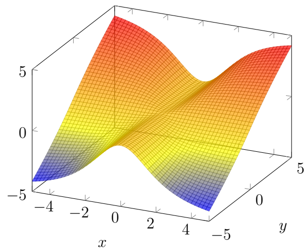
4 Différentiabilité

Exercice 12. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.



1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

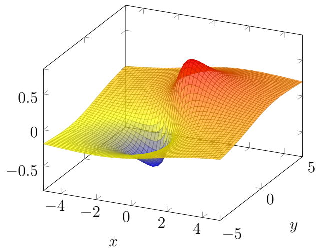
Exercice 13.* On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+|y|}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.



1. Montrer que f est continue et différentiable en l'origine.
2. Étudier la différentiabilité de f au point $(a,0)$, $a \neq 0$.

5 Applications de la différentiabilité

Exercice 14.* Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$.



1. Déterminer et représenter ses courbes de niveau.
2. Calculer les dérivées partielles premières.
3. Écrire l'équation du plan tangent à f en $(0, 0)$

Exercice 15. Sachant que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable et que $f(2,5) = 6$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2,5) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(2,5) = -1$. Donner une valeur approchée de $f(2.2, 4.9)$.

Exercice 16. Soit $\alpha > 0$ et $a = (1, 2)$. On pose $f(x) = \|x - a\|^\alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

1. Représenter les courbes de niveau et le champ de gradient de f pour $\alpha = 2$
2. Même question en $\alpha = 1$ en précisant bien le domaine de définition.

Exercice 17. Calculer le jacobien en tout point de $\mathbb{R}^3$ des applications suivantes :

1. $f(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$
2. $g(r, \varphi, \theta) = (r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi)$