Chapitre 7

Dérivées d'ordres supérieurs et études des extrema

7.1 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et $\mathcal{U}$ un ouvert de E. On suppose que $\dim E = n$ et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E.

7.1.1 Définitions et propriétés

fonction de $\mathcal{U}$ dans F

Définition 7.1.1. Soit $f : \mathcal{U} \to F$ et $a \in \mathcal{U}$. On suppose que f admet une j-ème dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ pour $j = 1, \cdots, n$. Si $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ admet en a une k-ème dérivée partielle $\frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_k}$, $1 \leq k \leq n$, on dit que f admet en a une (k, j)-ième **dérivée partielle seconde** que l'on note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)$.

$\hookrightarrow$ nouvelle fonction de $\mathcal{U} \to F$

Remarque 16. En itérant le procédé, on définit les dérivées partielles triples, quadruples...

Définition 7.1.2. Une fonction $f : \mathcal{U} \to F$ est de **classe** $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$ si pour tout $j_1, j_2, \cdots, j_k \in \{1, \cdots, n\}$ la fonction $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \cdots \partial x_{j_2} \partial x_{j_1}} : \mathcal{U} \to F$ est continue sur $\mathcal{U}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exemple 7.1.1. Calcul des dérivées partielles secondes de la fonction $f(x, y) = x^2 \cos(y)$.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1) Dérivées partielle premières.

$\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x \cos y$ $\quad$ $\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -x^2 \sin(y)$

2) Dérivées partielle secondes

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cos y$ $\quad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2x \sin y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2x \sin y$ $\quad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -x^2 \cos y$

Question : on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Est ce vrai tout le temps ???

Le calcul des dérivées secondes de l'exemple précédent semble suggérer que les dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sont égales. C'est le cas pour les fonctions suffisamment régulières :

Théorème 7.1.1 (Schwarz). On suppose que $f : \mathcal{U} \to F$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$. Alors, pour tout $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ on a sur $\mathcal{U}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Démonstration. Idée de la preuve : Calcul de taux d'accroissement successifs (limites). Et le th de Schwarz donne la condition dans laquelle on peut intervertir les 2 limites :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a) = \lim_{h_k \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + h_k e_k) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)}{h_k}$$

$$= \lim_{h_k \to 0} \frac{\lim_{h_j \to 0} \frac{f(a + h_k e_k + h_j e_j) - f(a + h_k e_k)}{h_j} - \lim_{h_j \to 0} \frac{f(a + h_j e_j) - f(a)}{h_j}}{h_k}$$

$$= \lim_{h_k \to 0} \lim_{h_j \to 0} \underbrace{\frac{1}{h_k h_j} \Big[f(a + h_k e_k + h_j e_j) - f(a + h_k e_k) - f(a + h_j e_j) + f(a) \Big]}_{\phi(h_k, h_j)}$$

de même on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \lim_{h_j \to 0} \lim_{h_k \to 0} \phi(h_k, h_j)$$

demontrer le th, revient à se convaincre que

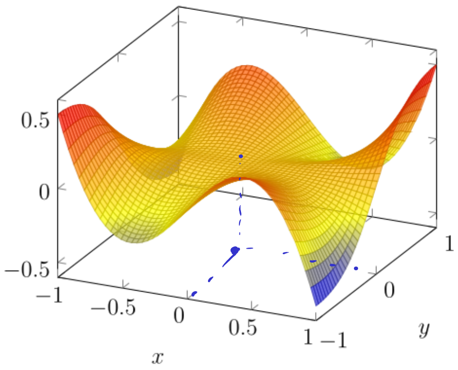
$$\lim_{h_j \to 0} \lim_{h_k \to 0} \phi(h_k, h_j) = \lim_{h_k \to 0} \lim_{h_j \to 0} \phi(h_k, h_j)$$

$$= \lim_{(h_k, h_j) \to (0,0)} \phi(h_k, h_j)$$

le th de Schwarz donne une condition pour laquelle cela est vérifié : ok si $f \in \mathcal{C}^2$.

Exo 2 (Dérivées d'ordres supérieures et application)

Exercice 2.* **(Contre exemple au théorème de Schwarz)** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.



1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?
3. La fonction f est elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
4. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?
5. La fonction f est-elle $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

1) Pour montrer que f est continue en $\binom{0}{0}$ il suffit de mq

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

Ainsi

$$|f(x,y) - 0| = |f(x,y)| = r^4 \frac{|\cos^3\theta \sin\theta - \cos\theta \sin^3\theta|}{r^2}$$

$$\leq r^2 |\cos^3\theta \sin\theta| + |\cos\theta \sin^3\theta| \leq \underbrace{2r^2}_{\substack{\to 0 \\ r\to 0}}$$

et f est bien continue en $(0,0)$.

remarque: sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ est $\mathcal{C}^\infty$ (quotient de polynômes)

$$\Rightarrow f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2).$$

2) Dérivées partielles de f en $\binom{0}{0}$. Il faut revenir à la définition :

• $\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$

remarque : la fonction $h \mapsto f(h,0)=0$ est la fonction nulle. Son taux d'accroissement est 0 !

• $\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$

remarque : Idem $h \mapsto f(0,h)=0$ ...

les dérivées partielles de f en $(0,0)$ existent et $\nabla f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

3) La fonction f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? oui si on montre que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont $\mathcal{C}^0$ en $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ (cf. remarque 1))

Calculons les dérivées partielles :

• $\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\, y & \text{sinon} \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

• $\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\, x & \text{sinon} \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

les dérivées partielles sont continues en $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$: en effet

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \overset{0}{\overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}} \right| = \left| \frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\, y \right| \leq r^5 \frac{|\cos\theta|^4+|\sin\theta|^4+4|\cos\theta|^2|\sin\theta|^2}{r^4}$$

$$\leq \underbrace{6\, r}_{\xrightarrow[r\to 0]{} 0}$$

et $\frac{\partial f}{\partial x} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$

De même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right| \leq 6r \xrightarrow[r \to 0]{} 0$$

et $\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$

$\therefore$ la fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

4) La fonction f est-elle diff en l'origine ?

oui la fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, elle est donc différentiable en tout pt de $\mathbb{R}^2$. En particulier en $(0,0)$.

5) La fonction est-elle $\mathcal{C}^2$ en $(0,0)$?

remarque : on a vu que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\})$

Calculons :

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \overset{=0}{\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h - 0}{h} = -1$$

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

La fonction n'est pas $\mathcal{C}^2$ en $(0,0)$ car si elle l'était on aurait $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\square$

Le résultat s'étend aux dérivées partielles d'ordre supérieur :

Proposition 7.1.1. Si $f : E \to F$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$, alors pour tout $j_1, \cdots, j_k \in \{1, \cdots, n\}$ et toute permutation σ de $\{1, \cdots, k\}$, on a :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \cdots \partial x_{j_1}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_{\sigma(k)}} \cdots \partial x_{j_{\sigma(1)}}}$$

Démonstration. C'est un corollaire du théorème de Schwarz. $\square$

Notations : Par exemple, si f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $\mathcal{U}$ les calculs de dérivées partielles d'ordres ≤ 4 peuvent se faire dans un ordre arbitraire et on écrit : $\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}$ pour $\frac{\partial^4 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2 \partial x_1}$.

7.1.2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Proposition 7.1.2. Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, $\mathcal{U} \subset E$ et $\mathcal{V} \subset F$ des ouverts :

- (i) Addition : $f, g : \mathcal{U} \to F$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$ alors $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$.
- (ii) Multiplication par un scalaire : $f : \mathcal{U} \to F$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$ alors λf est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$.
- (iii) Multiplication (cas de $F = \mathbb{R}$) : $f, g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$ alors fg est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$.
- (iv) Inverse (cas de $F = \mathbb{R}$) : $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$ et $a \in \mathcal{U}$ tel que $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur un voisinage de $a \in \mathcal{U}$.
- (v) Composition : $f : \mathcal{U} \to F$ et $g : F \to G$. Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$ et g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{V} \supset f(\mathcal{U})$, alors $g \circ f : E \to G$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$.

7.1.3 Formules de Taylor et matrice hessienne

Théorème 7.1.2 (Formule de Taylor-Young). Soit $f : \mathcal{U} \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathcal{U}$. Alors il existe une fonction $\omega : E \to F$ définie au voisinage de 0 telle que pour tout $h \in E$ assez petit en norme,

note : $o(\|h\|^2)$.

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \frac{1}{2} d_a^2 f(h,h) + \|h\|^2 \omega(h) \text{ avec } \|\omega(h)\|' \xrightarrow[\|h\|\to 0]{} 0$$

forme quadratique

où $d_a^2 f(h,h) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$.

Démonstration.

1) Applique le th de Taylor-Lagrange dans $\mathbb{R}$ à la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t) = f(a+th)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$

restriction de f à la droite $\{a + th, t \in \mathbb{R}\}$

$\exists c \in]0,1[$ tq $g(1) = g(0+1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(c)$

$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \frac{1}{2} d_\alpha^2(h,h)$

où $\alpha = a + ch$

2) Montrer que $d_\alpha^2 f(h,h) = d_a^2 f(h,h) + o(\|h\|^2)$

(i.e. montrer que la forme quad. est proche sous les hypothèses) □

Exemple 7.1.2. Développement limité en $(0,0)$ et à l'ordre 2 de $(x,y) \mapsto (ye^x, \cos(x+y))$.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y) = y e^x \\ f_2(x,y) = \cos(x+y) \end{pmatrix}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$

I) Première fonction coordonnée $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1) dérivée ordre 1

$\frac{\partial f_1}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y e^x$ $\qquad$ $\frac{\partial f_1}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^x$

2) dérivée ordre 2

$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y e^x$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^x$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f_1}{\partial^2 y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

3) DL de f_1 en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Soit $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$f_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right) = f_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\left\langle \nabla f_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right\rangle}_{d_{(0,0)} f(h)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_i \partial x_j}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} h_i h_j}_{= d^2_{(0,0)} f(h,h)} + o(\|h\|^2)$$

$$f_1\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\right) = f_1\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} h_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} h_2$$

$$+ \frac{1}{2} h_1^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2} h_1 h_2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

les 2 termes sont égaux par th de schwarz

$$+ \frac{1}{2} h_2 h_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2} h_2^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + o(\|h\|^2)$$

$$= 0 + 0 . h_1 + 1 . h_2 + \frac{1}{2} 0 . h_1^2 + 1 . h_1 h_2 + \frac{1}{2} 0 . h_2^2 + o(\|h\|^2)$$

$$= h_2 + h_1 h_2 + o(\|h\|^2)$$

II) Seconde fonction coordonnée : $f_2(x,y) = \cos(x+y)$.

1) dérivée ordre 1

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = -\sin(x+y) \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = -\sin(x+y)$$

2) dérivée ordre 2

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = -\cos(x+y)$$

3) DL de f_2 en $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Soit $h = \begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$f_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\right) = f_2\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + h_1 \frac{\partial f_2}{\partial x}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + h_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2} h_1^2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2} h_2^2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$+ o(h_1^2 + h_2^2)$$

$$= 1 + h_1 \times 0 + h_2 \times 0 - \frac{h_1^2}{2} - \frac{h_2^2}{2} - h_1 h_2 + o(\|h\|^2)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(h_1 + h_2)^2 + o(\|h\|^2)$$

III) la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. On pose $h=\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}h_2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}h_1h_2\\-\frac{1}{2}(h_1+h_2)^2\end{pmatrix}+\|h\|^2\omega(h)$$

où $\omega:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ et tq $\lim_{h\to0}\omega(h)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Dans le cas $F=\mathbb{R}$: Pour une fonction $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a,h\in\mathbb{R}^n$, la formule de Taylor donne :

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)h_ih_j+\underset{h\to0}{o}(\|h\|^2).$$

L'application $Q_af:h\mapsto d_a^2f(h,h)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)h_ih_j$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. On peut donc l'écrire sous forme matricielle :

Définition 7.1.3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $a\in\mathcal{U}$. On appelle **matrice Hessienne** de f en a la matrice

$$\mathrm{Hess}_f(a)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right)_{i,j=1}^n=\overbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)&\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(a)&\cdots&\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(a)\\\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(a)&\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)&\cdots&\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}(a)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}(a)&\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2}(a)&\cdots&\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a)\end{pmatrix}}^{n}\ n$$

En notations matricielles on a alors :

$$\mathbb{R}\ni f(a+h)=\underbrace{f(a)}_{\in\mathbb{R}}+\underbrace{[J_f(a)]}_{1\times n}\underbrace{h}_{n\times1}+\frac{1}{2}\underbrace{h^t}_{1\times n}\underbrace{\mathrm{Hess}_f(a)}_{n\times n}\underbrace{h}_{n\times1}+o(\|h\|^2)$$

Exemple 7.1.3. Soit $f_1(x,y)=ye^x$

$*$ $\mathrm{Jac}_{f_1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ye^x & e^x\end{pmatrix}$ $\qquad *$ $\mathrm{Hess}_{f_1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y&1\\1&0\end{pmatrix}e^x$

DL de f_1 en $(0,0)$. $\forall h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$:

$$f_1\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}=f_1\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}h_1&h_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}+o(\|h\|^2)$$

$$=0+h_2+\frac{1}{2}h_1h_2+\frac{1}{2}h_2h_1+o(\|h\|^2)$$

$$=h_2+h_1h_2+o(\|h\|^2)$$

7.2 Étude des extrema locaux

7.2.1 Définitions

Définition 7.2.1. Soit $f:E\to\mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}\subset E$ et $a\in\mathcal{D}$. La fonction f admet en a

1. un **maximum** (resp. **minimum**) **global** si pour tout $x\in\mathcal{D}$ on a $f(x)\le f(a)$ (resp. $f(x)\ge f(a)$).

Exercice 9.* (Fonctions harmoniques) Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est dite harmonique si son laplacien est nul :

$$\Delta f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Dans toute la suite, on fixe f une fonction harmonique.

1. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^3$. Démontrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.
2. On suppose désormais que f est radiale, c'est-à-dire qu'il existe $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$. Démontrer que φ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
3. En déduire toutes les fonctions harmoniques radiales.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Harmonique $\Delta f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0.$ et $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$

1). on pose $g = \frac{\partial f}{\partial x}$ et on vérifie que g est harmonique :

$$\Delta g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{\partial^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \frac{\partial^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{th Schwarz}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\Bigg(\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{=\Delta f = 0}\Bigg) = 0.$$

• De même, si on pose $g = \frac{\partial f}{\partial y}$ on montre que $\Delta g = 0$

• on pose $h\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + y\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$$\cdot\ \frac{\partial h}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$(*)\quad \cdot\ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + x\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + y\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

. De même, on peut montrer que

$$(\#)\quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + y\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + x\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Ainsi:

$$\Delta h\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (*) + (\#) = 2\Delta f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + x\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + y\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$= 0$$

2) On suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est harmonique et radiale

$$f(x,y) = \varphi(x^2+y^2) \quad \text{où} \quad \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \mathcal{C}^1$$

* Calcul des dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 2x\,\varphi'(x^2+y^2) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 2\,\varphi'(x^2+y^2) + \underbrace{(2x)^2}_{4x^2}\varphi''(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 2\,\varphi'(x^2+y^2) + \underbrace{(2y)^2}_{4y^2}\varphi''(x^2+y^2)$$

Comme $\Delta f = 0$ cela donne

$$4\,\varphi'(\overbrace{x^2+y^2}^{t}) + 4\,(\overbrace{x^2+y^2}^{t})\,\varphi''(\overbrace{x^2+y^2}^{t}) = 0$$

$$\varphi'(t) + t\,\varphi''(t) = 0 \qquad \text{avec } t = x^2+y^2.$$

et φ' est solution de l'EDO :

$$y + x\,y' = 0 \qquad \text{⚠ deux notations !}$$

sol : $\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{1}{x} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{y'}{y}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx$

$$\Rightarrow \ln(|y|) = -\ln|x| + c$$

$$x>0 \Rightarrow \ln(|y|) = \ln x^{-1} + c$$

$$\Rightarrow y = \frac{c'}{x} \quad \text{où } c' \in \mathbb{R}$$

Ainsi $\varphi'(x) = \dfrac{c'}{x}$ et $\varphi(x) = k\ln x + k'$

$k, k' \in \mathbb{R}$

En résumé f s'écrit nécessairement :

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = c\ln(x^2+y^2) + D \quad (*)$$

$c, D \in \mathbb{R}$.

3) Cf Exo 10 où l'on vérifie que les fonctions de la forme $(*)$ sont harmoniques.

Exercice 10.* Soit l'opérateur de Laplace n-dimensionnel $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

1. Montrer que pour $n \geq 3$ on a $\Delta\left(\frac{1}{\|x\|^{n-2}}\right) = 0$ pour tout $x \neq 0$ où $\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$ est la norme euclidienne.
2. Pour $n = 2$ on a $\Delta\left(\ln \frac{1}{\|x\|}\right) = 0$ pour tout $x \neq 0$.

1) $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \underline{\underline{n \geq 3}}$

$$x \longmapsto \frac{1}{\|x\|^{n-2}} = \|x\|^{2-n} = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1-n/2}$$

* Calcul des dérivées partielles :

$i = 1, \dots, n$

$$\cdot \ \frac{\partial f}{\partial x_i}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 2\left(1 - \frac{n}{2}\right) x_i \underbrace{\|x\|^{-n}}_{\substack{\| \\ (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-n/2}}} = (2-n)\, x_i \, \|x\|^{-n}$$

$$\cdot \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (2-n)\left(\|x\|^{-n} + 2x_i^2 \cdot \left(-\frac{n}{2}\right) \cdot (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-n/2 - 1}\right)$$

$$= (2-n)\left(\|x\|^{-n} - n\, x_i^2 \, \|x\|^{-n-2}\right)$$

* Calcul du Laplacien de f :

$$\Delta f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (2-n) \sum_{i=1}^{n} \left(\|x\|^{-n} - n\, x_i^2 \, \|x\|^{-n-2}\right)$$

$$= (2-n)\left(n\|x\|^{-n} - n\,\|x\|^{-n-2} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{= \|x\|^2}\right)$$

$$= (2-n)\left(n\,\|x\|^{-n} - n\,\|x\|^{-n}\right) = 0 .$$

Et f est bien harmonique.

2) $\underline{\underline{n = 2}}$ $\qquad f(x) = \ln\left(\frac{1}{\|x\|}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(x_1^2 + x_2^2\right)$

* Calcul des dérivées partielles :

$i = 1, 2$

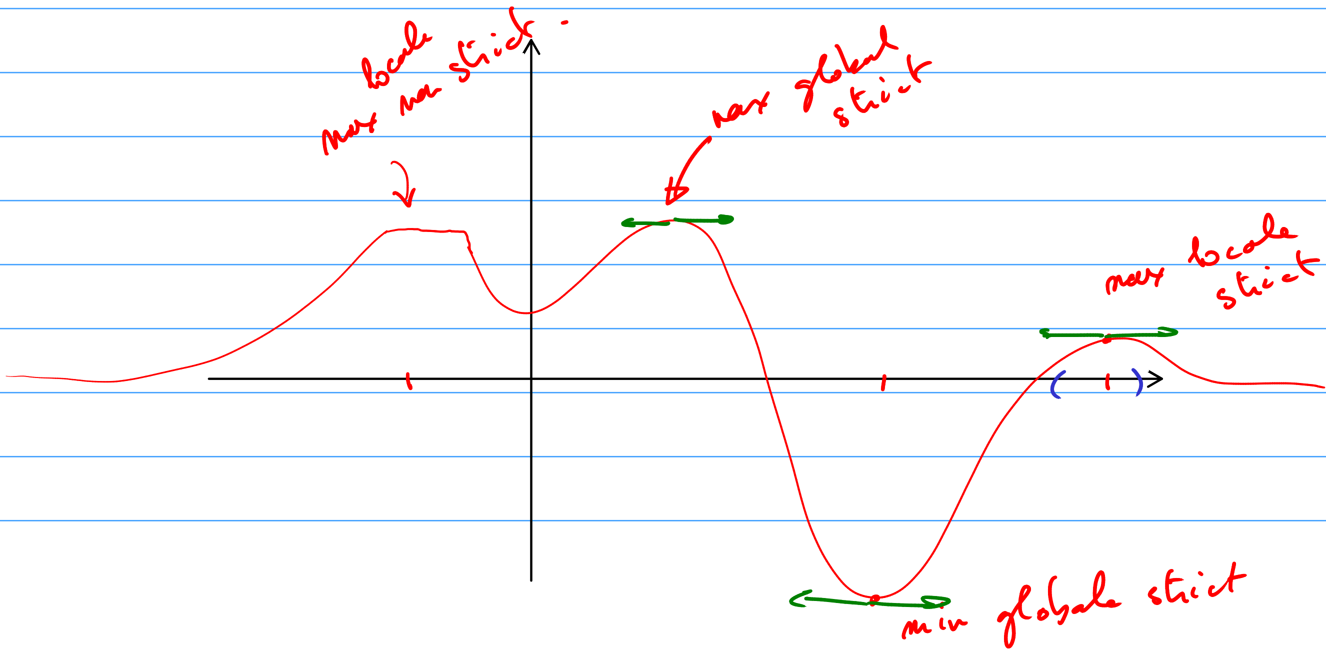
$$\cdot \ \frac{\partial f}{\partial x_i}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{-x_i}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{-x_i}{\|x\|^2} = -x_i \underbrace{\|x\|^{-2}}_{\substack{\| \\ (x_1^2 + x_2^2)^{-1}}}$$

• $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\|x\|^{-2} + 2\, x_i^2 \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{-2} = -\|x\|^{-2} + 2\,\dfrac{x_i^2}{\|x\|^4}$

* Calcul du Laplacien de f :

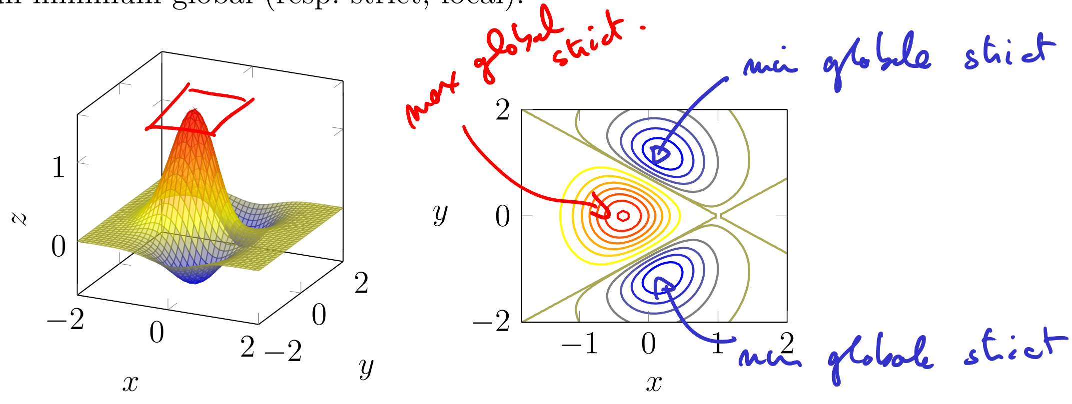
$$\Delta f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\|x\|^{-2} + 2\,\frac{x_1^2}{\|x\|^4} - \|x\|^{-2} + 2\,\frac{x_2^2}{\|x\|^4}$$

$$= -2\|x\|^{-2} + \frac{2}{\|x\|^4}\|x\|^2 = 2\left(-\|x\|^{-2} + \|x\|^{-2}\right) = 0$$



2. un **maximum** (resp. **minimum**) **strict** si pour tout $x \in \mathcal{D} \setminus \{a\}$ on a $f(x) < f(a)$ (resp. $f(x) > f(a)$).
3. un **maximum** (resp. **minimum**) **local** si il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que pour tout $x \in \mathcal{D} \cap \mathcal{V}$ on a $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).

On dit que f admet en $a \in \mathcal{D}$ un **extremum global** (resp. **strict** ou **local**) si f admet un maximum ou un minimum global (resp. strict, local).



Graphe et lignes de niveau de la fonction $(x, y) \mapsto ((x-1)^2 - 2y^2)e^{-2x^2-y^2}$.

7.2.2 Condition nécessaire d'ordre 1

appli linéaire nulle.
↓

Définition 7.2.2. On suppose que $\dim E = n$. On dit que $f : \mathcal{U} \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ admet un point critique en $a \in \mathcal{U}$ si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ pour tout $i = 1, \cdots, n$.

remarque : dans ce cas $d_a f = 0$

Théorème 7.2.1. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$. Si f admet un extremum local en $a \in \mathcal{U}$ alors a est un point critique de f.

Démonstration.

Si f admet un extremum en $a \in \mathcal{U}$, chaque fonction partielle

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x_i &\mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

admet aussi un extremum en $x_i = a_i$. Sa dérivée s'annule et on a $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

□

Exemple 7.2.1. La condition n'est pas suffisante : prendre $f(x, y) = xy$ en $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto xy \end{aligned}$$

* $\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y$ et $\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$
* $\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Autrement dit, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un point critique de f. On a $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Mais pour tout voisinage V ouvert de $\binom{0}{0}$, V contient des points $\binom{x}{y}$ pour lesquels $f\binom{x}{y} > 0$ et des points $\binom{x'}{y'}$ pour lesquels $f\binom{x'}{y'} < 0$

Ainsi f n'admet pas de minimum ni de maximum en l'origine (ici on appelle cela un pt selle).

remarque : penser à $x \mapsto x^3$ pour la fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

7.2.3 Condition suffisante d'ordre 2

On suppose maintenant que $f : E \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que a est un point critique de f. D'après la formule de Taylor-Young on a :

" $d_a f(h) = 0$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} Q_a f(h) + o(\|h\|^2)$$

Le signe de la forme quadratique $Q_a f : h \mapsto d_a^2 f(h,h) = h^t \operatorname{Hess}_f(a) h$ permet dans certains cas de caractériser les extrema :

↳ forme bilinéaire symétrique associée à $Q_a f$.

Proposition 7.2.1. Soit $a \in \mathcal{D}$ un point critique de $f : E \to \mathbb{R}$. Si la forme quadratique $Q_a f$ est :

1. définie et positive alors f admet un minimum local strict en a.
2. définie et négative alors f admet un maximum local strict en a.

Démonstration. D'après la formule de Taylor-Young :

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} Q_a f(h) + o(\|h\|^2)$$

$Q_a f$ est def pos $\Rightarrow d_a^2 f(\cdot,\cdot)$ est un produit scalaire sur E

$\Rightarrow h \overset{N}{\mapsto} \sqrt{d_a^2 f(h,h)}$ est une norme (euclidienne) sur E

Comme E est de dimension finie, la norme $\|\cdot\|$ de E et N sont équivalentes

Donc $\exists A > 0$ tq

$$f(a+h) - f(a) \geq A\|h\|^2 + o(\|h\|^2) \geq \frac{A}{2}\|h\|^2$$

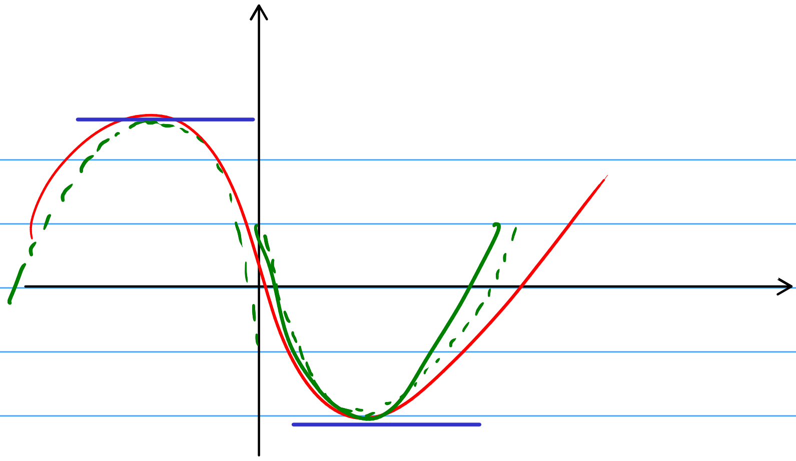
car si h est suffisament petit $o(\|h\|^2) < \frac{A}{2}$. De plus $\frac{A}{2}\|h\|^2 > 0$ si $\|h\| \neq 0$, on a $f(a+h) > f(a)$ $\forall h \neq 0$. Autrement dit a est un minimum local de f.

□

Remarque 17. Ne pas oublier la condition "définie" : soit $f_1 : (x,y) \mapsto \frac{1}{2}x^2 - y^4$ et $f_2 : (x,y) \mapsto \frac{1}{2}x^2 + y^4$. On a $J_{f_1}(a) = J_{f_2}(a) = (0,0)$ et $\operatorname{Hess}_{f_1}(0,0) = \operatorname{Hess}_{f_2}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, l'origine est un point critique de f_1 et f_2, les formes quadratiques $Q_a f_1$ et $Q_a f_2$ sont positives $\underbrace{\text{non-définies}}$.

1. l'origine n'est pas un extremum de f_1 :

En effet : $(0\ 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$



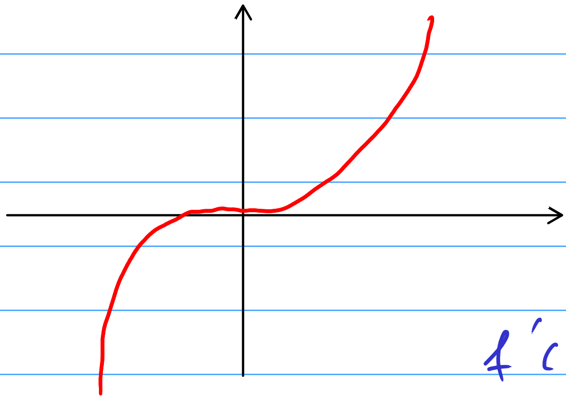
pt critique

$f'(x) = 0$.

nature du pt critique

$f''(x) > 0 \Rightarrow$ min

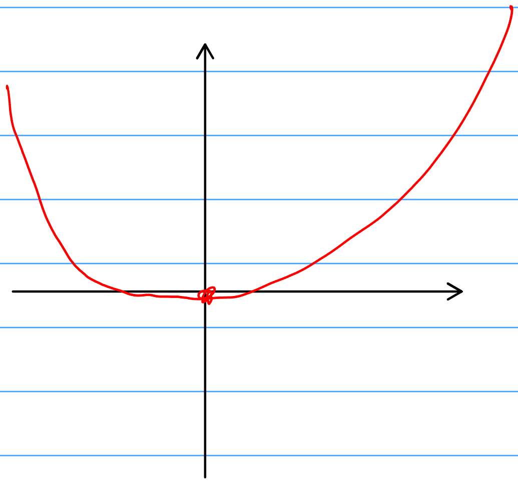
$f''(x) < 0 \Rightarrow$ max,



$x \mapsto x^3$

$f'(0) = 0$ et $f''(0) = 0$

point d'inflexion.



$x \mapsto x^4 \longrightarrow 4x^3 \longrightarrow 12x^2$

$f'(0) = 0$ $\quad$ $f''(0) = 0$ /

0 soit un min global strict

Retour sur la remarque 17:

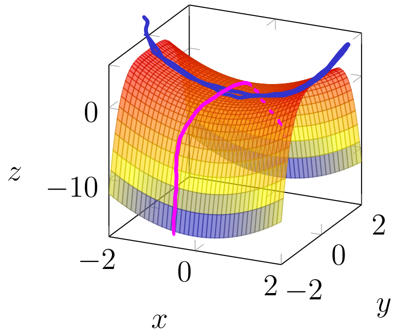
$f_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{x^2}{2} - y^4$ $\qquad$ $\frac{\partial f_1}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = -4y^3$

$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 1$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0$

$Jac_f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = -12y^2$

$Hess_f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

la fonction partielle $f_1(0,y) = -y^4$ $\qquad$ $f_1(x,0) = \frac{x^2}{2}$

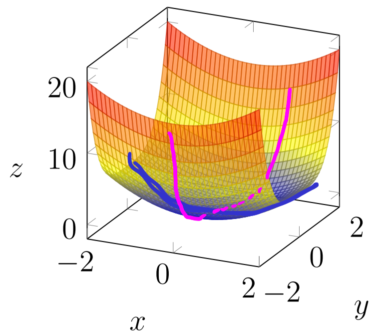


point selle.

2. l'origine est un minimum (global) de f_2 :

$f_2(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y^4 \geq 0$

et $f_2(x,y) = 0$ ssi $x = y = 0$



$\mathrm{Jac}_f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}$; $\mathrm{Hess}_f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$

7.2.4 Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Notation de Monge : Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$ et $(a,b) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$. On note $p = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$. La formule de Taylor-Young devient :

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \underbrace{ph + qk}_{= d_{(a,b)} f \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}} + \frac{1}{2}\overbrace{\left(rh^2 + 2shk + tk^2\right)}^{= d^2_{(a,b)} f \left(\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\right)} + o(h^2 + k^2)$$

Définition - Proposition 7.2.1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$ et $(a,b) \in \mathcal{U}$ un point critique de f :

$\det \mathrm{Hess}_f \neq 0$
$\Updownarrow$
2 val propres $\neq 0$

1. si $\boxed{rt - s^2 \neq 0}$ on dit que (a,b) est un **point critique non dégénéré**. Dans ce cas :
   (a) si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$: (a,b) est un minimum local de f. ← 2 val propres > 0
   (b) si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$: (a,b) est un maximum local de f. ← 2 val propres < 0
   (c) si $rt - s^2 < 0$: (a,b) est un **point selle** de f. ← 1 val propre > 0 ; 1 val propre $<$
   critère de Sylvester!
2. si $rt - s^2 = 0$ on dit que (a,b) est un **point critique dégénéré**.

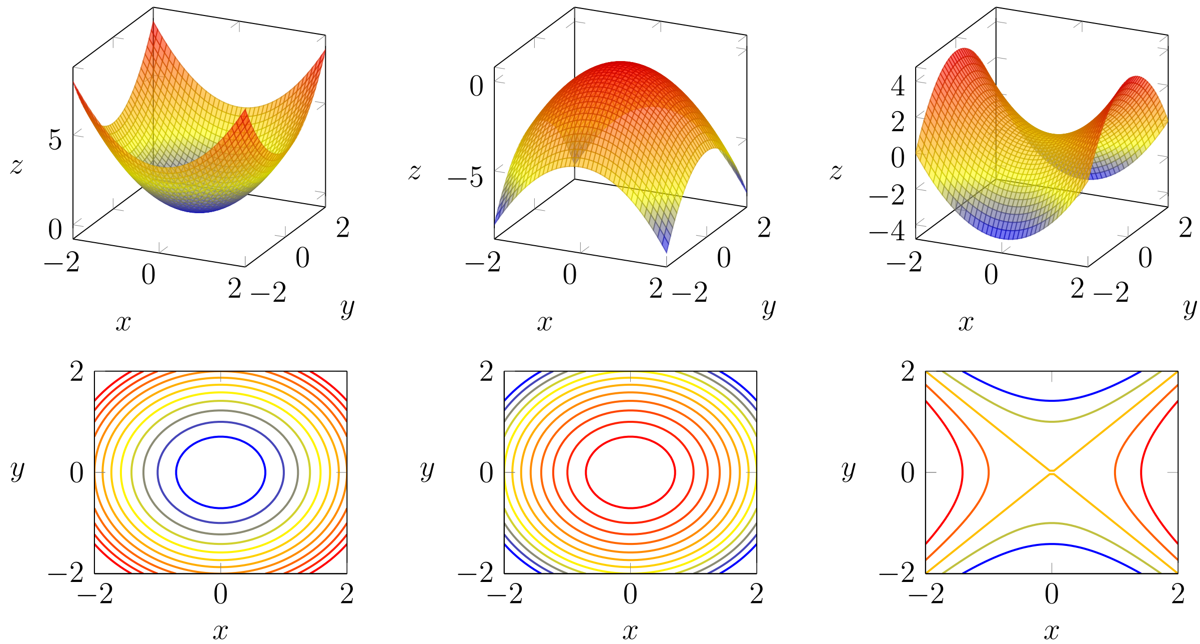
Démonstration.

3 blue 1 brown

Idée : Etudier le signe de la forme quadratique $Q_a f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et det la matrice est $\mathrm{Hess}_f(a)$.

On a $\mathrm{Hess}_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ et on applique les critères de Sylvester.

□



Minimum Maximum Point selle

Exemple 7.2.2. $f(x, y) = (x - y)^2 + x^3 + y^3$.

* point critique :

$\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2(x-y) + 3x^2$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2(x-y) + 3y^2$

$(0,0)$ est un pt critique de f.

* nature du point critique $(0,0)$:

$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$ $\qquad$ $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2$ $\qquad$ $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$

$\det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \times 2 - 2 \times 2 = 0$ et $(0,0)$ est pt critique dégénéré.

On remarque néanmoins que :

$f(x, x) = 2x^3$ et f change de signe au voisinage de $(0,0)$ $\Rightarrow$ $(0,0)$ n'est pas un min
$\Rightarrow$ max

Exemple 7.2.3. $f(x, y) = (x - y)^2 + x^4 + y^4$.

* pt critique :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2(x-y)+4x^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2(x-y)+4y^3$$

et $(0,0)$ est bien un pt critique.

* nature du pt critique :

$r = 2$ $\quad s = -2$ $\quad t = 2$

et $rt - s^2 = 0$ et $(0,0)$ est un pt critique dégénéré.

or clairement, $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) > 0$ si $(x,y) \neq (0,0)$

Ainsi $(0,0)$ est un min global strict !

---

valeur propre : Si la matrice est diagonale $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

• 1 est val propre car $M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

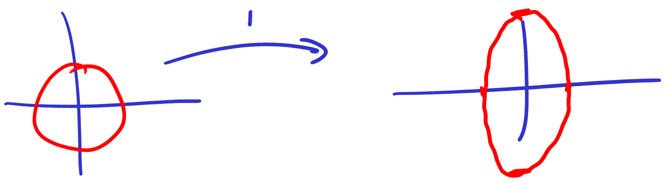
et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est le vect propre associé.

• 2 ——— $M\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

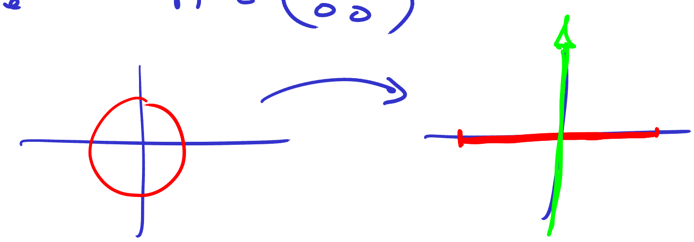
et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ———

∴ Cas "facile" vecteur = base canonique

val prop. = elt diagon.



ronage $\quad M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



rang 1

PS : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} 4{,}5 & 0 \\ 0 & \boxed{1{,}5} \end{pmatrix} P$