TD6 :

Exercice 1 :

1) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto x^2(x+y)$

f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ (c'est un polynôme)

① $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2xy$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2$

② $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x + 2y$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x$

$*$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$.

$J_f(x,y) = [3x^2 + 2xy \ , \ x^2]$ $\qquad$ $Hess_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x+2y & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix}$

2) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto e^{xy}$

f est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

① $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y e^{xy}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x e^{xy}$

② $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2 e^{xy}$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^{xy}(1+xy)$

$*$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2 e^{xy}$

$J_f(x,y) = [y \ , \ x]\, e^{xy}$ $\qquad$ $Hess_f(x,y) = e^{xy} \begin{bmatrix} y^2 & 1+xy \\ 1+xy & x^2 \end{bmatrix}$

3) $f(x,y,z) = z e^{xy}$ $\quad f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

① $\partial_x f(x,y,z) = yz e^{xy}$ $\quad \partial_y f(x,y,z) = zx e^{xy}$ $\quad \partial_z f(x,y,z) = e^{xy}$

② $$\begin{cases} \partial_{xx} f(x,y,z) = y^2 z e^{xy} & \partial_{xy} f = z e^{xy}(1 + xy) \quad \partial_{xz} f(x,y,z) = y e^{xy} \\ & \partial_y \partial_y f = z x^2 e^{xy} \quad \partial_{yz} f = x e^{xy} \\ & \partial_{zz} f = 0 \end{cases}$$

La jacobienne : $J_f(x,y,z) = \left[yz \ , \ zx \ , \ 1 \right] e^{xy}$

$$\mathrm{Hess}_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} y^2 z & z(1+xy) & y \\ z(1+xy) & z x^2 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix} e^{xy}.$$

Exercice 2 :

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) $U = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0 \} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \}^c$

Montrer que U est ouvert : Plusieurs argument possibles :

① $\{y=0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$: il est donc fermé et U est alors ouvert.

② Soit $u_n = (x_n, y_n)$ où $y_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et u_n cv.

on a $u_n = (x_n, 0) \longrightarrow (x_0, 0) \in U^c$

$\therefore$ U est ouvert (complémentaire d'un fermé).

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U comme composé de fonctions $\mathcal{C}^1$ et produit de fonctions $\mathcal{C}^1$,

2) Etude de la continuité de f :

* sur U : f est $\mathcal{C}^0$ produit, composition de fonctions $\mathcal{C}^0$.

* sur U^c : pour montrer que f est $\mathcal{C}^0$ en $(x,0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ on cherche une fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$ tq $u(x,0) = 0$

$$|f(x,y) - f(x,0)| < |u(x,y)|$$

on a si $(x,y) \in U$

$$|f(x,y) - f(x,0)| = \left| y^2 \sin \frac{x}{y} - 0 \right| < y^2$$

si $(x,y) \in U^c$

$$|f(x,y) - f(x,0)| = 0$$

prendre $u(x,y) = y^2$.

$\therefore f$ est bien $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$.

3) Sur U^c la fonction f est $C^{te} = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h+x,0) - f(x,0)}{h} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(x,k) - f(x,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} k\sin\left(\frac{x}{k}\right) = 0. \end{cases}$$

4) Il suffit de montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est $\mathcal{C}^0$ en tout pt $(x,0)$:

$$\left|y\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right| \leq |y| \xrightarrow[(x,y)\to(x,0)]{} 0.$$

et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est bien $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$

5) On montre que $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(1,0)$ en remarquant que $\cos\left(\frac{1}{y}\right)$ n'a pas de limite en $y \to 0$.

Exercice 3 :

1) on cherche les fonctions $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ tq

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0 \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^2.$$

* intègre une première fois en x et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \varphi_1(y) \qquad \text{où } \varphi_1(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est } \mathcal{C}^2$$

* ——— deuxième fois ———

$$f(x,y) = \varphi_1(y)\,x + \varphi_2(y) \qquad \text{où } \varphi_2(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est } \mathcal{C}^2$$

2) on cherche les fonctions $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ tq

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

* intègre une première fois en x et :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \varphi_1(y) \qquad \text{où } \varphi_1(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est } \mathcal{C}^1$$

* ——— deuxième ——— y —

$$f = \varphi_2(y) + \varphi_3(x) \qquad \text{où } \varphi_2(\cdot) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ est } \mathcal{C}^2.$$

$$\text{et } \varphi_2' = \varphi_1$$

*

∴ En résumé $f(x,y) = \varphi(y) + \psi(x)$ où $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3) on cherche une fonction $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ tq

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \cos(x+y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

* intègre une première fois :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(x+y) + \varphi_1(y) \qquad \text{où } \varphi_1 \text{ est } \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$$

* ——— deuxième fois :

$$f(x,y) = -\cos(x+y) + \varphi_1(y)\,x + \varphi_2(y)$$

où $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$.

Exercice 4 :

1) D'après la figure on a 6 pts critiques :

$(-1,0)$: col ; $(1,0)$: max

$(-1,1)$: min ; $(1,1)$: col

$(-1,-1)$: min ; $(1,-1)$: col

2) Calcul du gradient de $f \; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$$

$$\nabla f(x,y) = \left[3 - 3x^2 \; ; -4y + 4y^3 \right]$$

$$= \left[3(1-x^2) \; ; -4y(1-y^2) \right]$$

les pts critiques sont en $x = \pm 1$ et $y = 0, -1, 1$

ie $A = (-1,0)$ $\quad D = (1,0)$

$B = (-1,1)$ $\quad E = (1,1)$

$C = (-1,-1)$ $\quad F = (1,-1)$

Calcul de la Hessienne :

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{bmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 12y^2-4 \end{bmatrix}$$

pt critique	signe de $\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	signe de $\Delta_2 = \det(\mathrm{Hess}_f)$	nature
$(1,0)$	$-6<0$	$24>0$	max
$(1,1)$	$-6<0$	$-48<0$	col
$(1,-1)$	$-6<0$	$-48<0$	col
$(-1,0)$	$6>0$	$-24<0$	col
$(-1,1)$	$6>0$	$48>0$	min
$(-1,-1)$	$6>0$	$48>0$	min.

Exercice 5 :

1) $\nabla_f(x,y,z) = [\,2x\,,\ 2y\,,\ 3z^2\,]$ $\qquad \mathrm{Hess}_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{bmatrix}$

le seul pt critique est $(0,0,0)$. La forme quadratique

$$(h_1,h_2,h_3) \overset{Q_{(0,0,0)}f}{\longmapsto} 2h_1^2 + 2h_2^2 + 0\times h_3^2 = 2(h_1^2+h_2^2)$$

n'est pas définie (en effet $(0,0,1)\,\mathrm{Hess}_f(0,0,0)\,(0,0,1)^t = 0$)

le théorème du cours ne s'applique pas.

remarque : $(0,0,0)$ n'est pas un extremum de f car $f(0,0,z)$ prend des valeurs positive et négative au voisinage de $(0,0,0)$.

2) $\nabla_f(x,y,z) = [2x \quad 2y \quad 4z^3]$ et $\mathrm{Hess}_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12z^2 \end{bmatrix}$

le seul pt critique est encore l'origine.

on obtient le même DL à l'ordre 2 que à la question 1) : Et on ne peut utiliser le th. du cours.

Remarque : il est facile de voir que $f(x,y,z) \geq 0$ et que $f(x,y,z) = 0$ <u>ssi</u> $x = y = z = 0$.

Ainsi $(x,y,z) = (0,0,0)$ est un minimum (global strict) de f.

3) $\nabla f(x,y,z) = [2x + y + 2 \; ; \; 2y + x + z - 2 \; ; \; 2z + y - 4]$.

* Recherche des pts critiques :

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ 2y + x + z - 2 = 0 \\ 2z + y - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 - \frac{y}{2} \\ 2y + x + z - 2 = 0 \\ z = 2 - \frac{y}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3/2 \\ y = 1 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Il n'y a qu'un pt critique. $a = \left(-\frac{3}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$

* Calcul de la Hessienne :

$$\mathrm{Hess}_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

remarque : on retrouve (à un facteur $\frac{1}{2}$ près) la partie homogène de d° 2 de f...

$Q_a f : (h_1, h_2, h_3) \longmapsto 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz$

* Pour étudier le signe de $Q_a f$: plusieurs solutions :

i) Mineurs : $\Delta_1 = 2 > 0 \quad \Delta_2 = 4 - 1 = 3 > 0$

$$\Delta_3 = 8 - 2 - 2 = 4 > 0$$

et $Q_a f$ est déf pos

ii) $Q_a f(h_1, h_2, h_3) = 2 \left[\left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right)^2 + \left(h_3 + \frac{h_2}{2}\right)^2 + \frac{h_2^2}{2} \right]$

et $Q_a f$ est déf pos.

$\therefore$ $a = \left(-\frac{3}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$ est minim (local) pour f.

<u>Exercice 6 :</u> $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto (x^2 + y^2) e^{x^2 - y^2}$$

* Recherche des pts critiques :

$$\nabla f(x,y) = \left[2x + 2x(x^2+y^2) \; ; \; 2y - 2y(x^2+y^2) \right] e^{x^2-y^2}$$

$$= \left[x(1+x^2+y^2) \; ; \; y(1-x^2-y^2) \right] 2 e^{x^2-y^2}$$

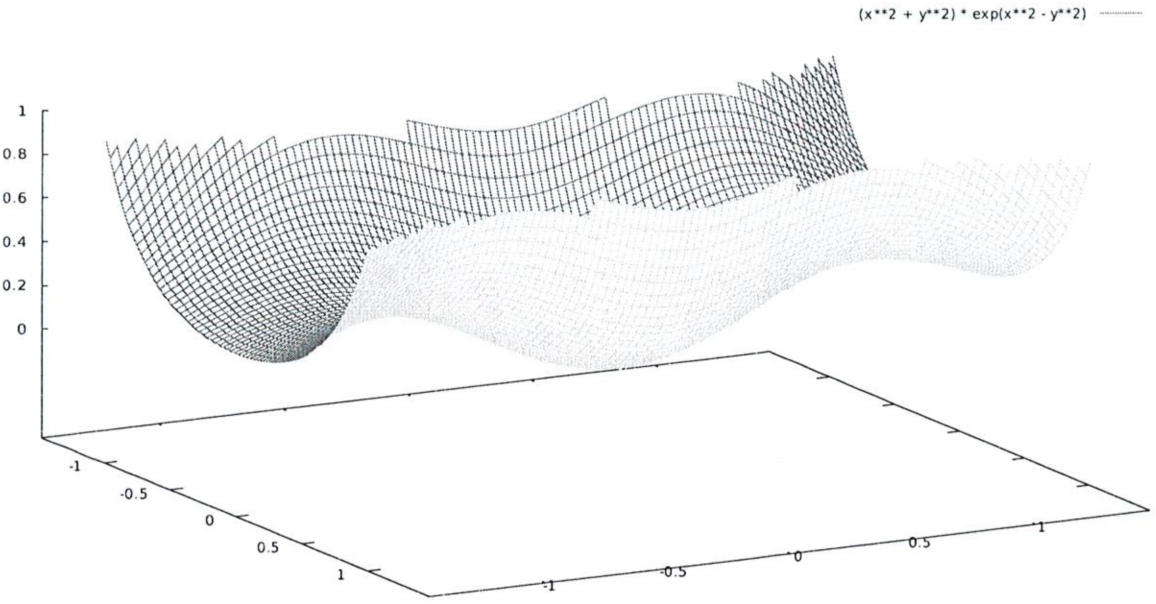
on a

$$\begin{cases} x(1+x^2+y^2) = 0 \\ y(1-x^2-y^2) = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y(1-y^2) = 0 \end{cases}$$

et il y 3 pts critiques : $(0,0)$; $(0,1)$; $(0,-1)$

* étude des pts critiques : $\mathrm{Hess}_f(x,y) =$

$$\begin{bmatrix} 2(1+x^2+y^2) + 4x^2 + 2x^2(1+x^2+y^2) & 4xy(x^2+y^2) \\ * & 2(1-x^2-y^2) - 4y^2 - 2y^2(1-x^2-y^2) \end{bmatrix} e^{x^2-y^2}$$


(x**2 + y**2) * exp(x**2 - y**2)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-1
-0.5
0
0.5
1
-1
-0.5
0
0.5
1

i) le pt $(0,0)$: on a $\mathrm{Hess}_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

et c'est un minimum local.

Mieux : on a $f(x,y) \geq 0$ et $f(x,y) = 0$ ssi $y = x = 0$.
Donc $(0,0)$ est un minimum global strict de f.

ii) le pt $(0,1)$: $\mathrm{Hess}_f(0,1) = \frac{1}{e} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

La forme quadratique $Q_{(0,1)} f : h \mapsto h^t \,\mathrm{Hess}_f(0,1)\, h$
est définie mais n'est ni pos ni neg. C'est un pt col.

iii) idem en $(0,-1)$ c'est un point col.

<u>Exercice 7</u> : $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $c \neq 0$.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2}$$

où $\langle \cdot , \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$ sont les produits scalaire et norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$

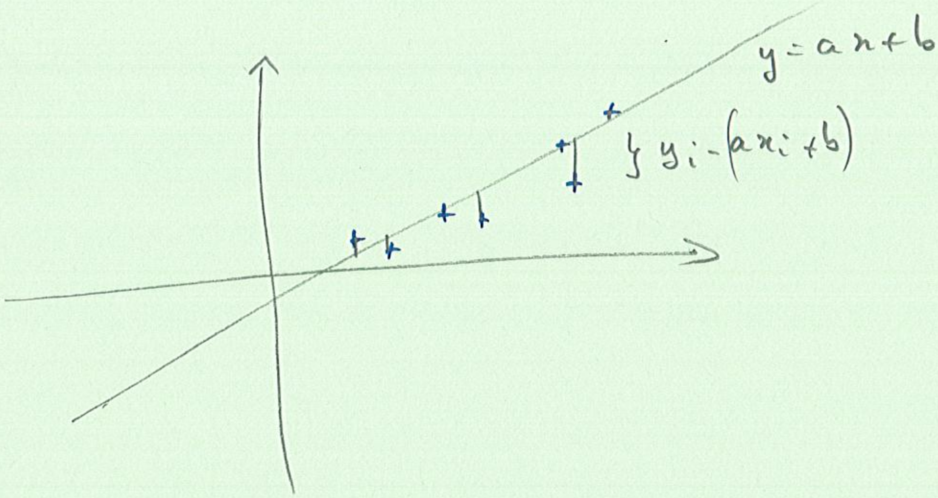
Th de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right| \leq \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$$

et on a $\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$ <u>ssi</u> $\begin{matrix} x = a/c \\ y = b/c \end{matrix}$

$\therefore$ le max est atteint en $\frac{1}{c}(a,b)$ et vaut $\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Exercice 8 : $(x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$



1) $\frac{1}{n} \sum \left(x_i - \left(\frac{1}{n} \sum x_i\right)\right)^2 = A$. On pose $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$ et

$A = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = 0$

$\Leftrightarrow \forall i : x_i - \bar{x} = 0$

$\Leftrightarrow x_i$ sont constants.

(*) signifie que les points ne sont pas alignés sur une droite verticale.

2) $(a,b) \longmapsto d(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a x_i - b)^2$

$$\nabla d(a,b) = -2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - a x_i - b) \\ \sum_{i=1}^{n} (y_i - a x_i - b) \end{pmatrix}$$

* Recherche du pt critique.

$\nabla d(a,b) = 0$ ssi $\begin{cases} \sum_i x_i y_i - a \sum_i x_i^2 - b \sum x_i = 0 \\ n b = \sum_{i=1}^{n} y_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i \end{cases}$

ssi $\begin{cases} \sum_i x_i y_i - a \sum_i x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum y_i\right)\left(\sum x_i\right) + a \frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2 = 0 \\ b = \frac{1}{n} \sum_i y_i - a \frac{1}{n} \sum_i x_i \end{cases}$

ssi $\begin{cases} a = \dfrac{\sum x_i y_i - \frac{1}{n} \sum y_i \cdot \sum x_i}{\sum x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2} \\ b = \frac{1}{n} \sum y_i - a\left(\frac{1}{n} \sum x_i\right) \end{cases}$

En posant $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i \quad \overline{xy} = \sum_i x_i y_i \quad \overline{x^2} = \frac{1}{i} \sum x_i^2$

ssi $\begin{cases} a = \dfrac{\overline{xy} - \bar{y}\bar{x}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} & (1) \\ b = \bar{y} - a\bar{x} & (2) \end{cases}$ $\qquad a^* = \dfrac{\bar{x}y - \bar{y}\bar{x}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$, $\quad b^* = \bar{y} - a^* \bar{x}$.

(1) s'interprète comme la covariance de x et y divisé par la variance de x.

(2) s'interprète comme ceci : la droite des moindres carrés passe par le centre de gravité du nuage $(\bar{x}, \bar{y})$.

3) Calcul de

$$\mathrm{Hess}_d(a,b) = 2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix}$$

et $\mathrm{Hess}(a^*, b^*) = 2 \begin{pmatrix} n\overline{x^2} & n\bar{x} \\ n\bar{x} & n \end{pmatrix}$

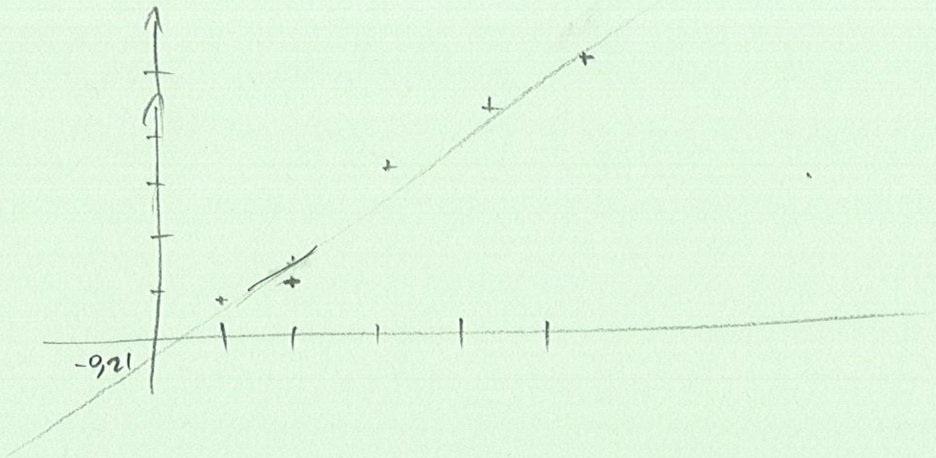
Mineurs : $\Delta_1 = 2n\overline{x^2} > 0$ et $\Delta_2 = 4\left(n^2 \overline{x^2} - n^2 (\bar{x})^2\right) = 4n^2 \underbrace{\left[\overline{x^2} - (\bar{x})^2\right]}_{= A}$.

Δ_2 est > 0 par $(*)$

remarque : (a^*, b^*) est un minimum local. On admettra que c'est un min globale.

4) on trouve $a^* = 1,07$

$b^* = -0,21$



<u>Exercice 9 :</u> $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

1) soit $n \geqslant 3$; $f(x) = \dfrac{1}{\|x\|^{n-2}} = \|x\|^{2-n} = \left(x_1^2 + \dots + x_n^2\right)^{1-\frac{n}{2}}$. $\boxed{x \neq 0}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 2\left(1 - \frac{n}{2}\right) x_i \left(x_1^2 + \dots + x_n^2\right)^{-\frac{n}{2}} = (2-n)\, x_i\, \|x\|^{-n}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = (2-n)\left(\|x\|^{-n} + \left(-\frac{n}{2}\right) \times 2 x_i^2 \left(x_1^2 + \dots + x_n^2\right)^{-\frac{n}{2}-1}\right)$$

$$= (2-n)\left(\|x\|^{-n} - n\, x_i^2\, \|x\|^{-n-2}\right)$$

$$\Delta f(x) = (2-n)\left(n\|x\|^{-n} - n\|x\|^{-n-2} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{=\|x\|^2}\right)$$

$$= (2-n)\left(n\|x\|^{-n} - n\|x\|^{-n}\right) = 0 .$$

2) $n = 2$ $\quad f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{\|x\|}\right) = -\dfrac{1}{2}\ln\left(x_1^2 + x_2^2\right)$ $\quad \boxed{x \neq 0}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{-x_i}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{-x_i}{\|x\|^2} = -x_i \|x\|^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = \frac{-1}{\|x\|^2} + 2x_i \frac{x_i}{\|x\|^4} = \frac{1}{\|x\|^2}\left(\frac{2x_i^2}{\|x\|^2} - 1\right)$$

$$\Delta f = \frac{1}{\|x\|^2}\left(\frac{2}{\|x\|^2}\sum_{i=1}^{2} x_i^2 - 2\right)$$

$$= \frac{1}{\|x\|^2}(2-2) = 0.$$

<u>Exercice 10</u> :

on pose $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $g = f \circ \phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

① $$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(x,y)) + 2y \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(x,y))$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -2y \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(x,y)) + 2x \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(x,y))$$

② $$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(x,y)) + 2x\left[2x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\phi(x,y)) + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\phi(x,y))\right]$$
$$+ 2y\left[2x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\phi(x,y)) + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\phi(x,y))\right]$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = -2\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(x,y)) - 2y\left[(-2y)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\phi(x,y)) + 2x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\phi(x,y))\right]$$
$$+ 2x\left[(-2y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\phi(x,y)) + 2x\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\phi(x,y))\right]$$

Ainsi

$$\Delta g(x,y) = 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\phi) + \cancel{8xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\phi)} + 4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\phi)$$
$$+ 4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\phi) - \cancel{8xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\phi)} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\phi)$$

$$= 4(x^2+y^2)\,\Delta f(x,y).$$

Exercice 10 :

on pose $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \phi_1(x,y) = x^2 - y^2 \\ \phi_2(x,y) = 2xy \end{pmatrix}$$

et $g(x,y) = f(\phi_1, \phi_2) . \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

remarque: le laplacien de f s'écrit

$$\Delta f(\phi_1, \phi_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_1^2}(\phi_1, \phi_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_2^2}(\phi_1, \phi_2)$$

——— g ———

$$\Delta g(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)$$

① $$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial \phi_1}(\phi_1, \phi_2) \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial \phi_2}(\phi_1, \phi_2) \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x,y)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \phi_1}(\phi_1, \phi_2)\, 2x + \frac{\partial f}{\partial \phi_2}(\phi_1, \phi_2)\, 2y$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \phi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \phi_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = -2y \frac{\partial f}{\partial \phi_1} + 2x \frac{\partial f}{\partial \phi_2}.$$

② $$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial \phi_1}}{\partial x}(\phi_1, \phi_2)\, 2x + \frac{\partial f}{\partial \phi_1}(\phi_1, \phi_2)\, 2$$

$$+ \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_2}\right)}{\partial x}(\phi_1, \phi_2)\, 2y.$$

$$= \cancel{2 \frac{\partial f}{\partial \phi_1}(\phi_1, \phi_2)} + 2x \left[2x \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_1^2}(\phi_1, \phi_2) + 2y \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_1 \partial \phi_2}(\phi_1, \phi_2) \right]$$

$$+ 2y \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \phi_2 \partial \phi_1}(\phi_1, \phi_2)(2x) + \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_2^2}(\phi_1, \phi_2)\, 2y \right]$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \cancel{-2\frac{\partial f}{\partial \phi_1}} - 2y\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \phi_1^2}(-2y) + \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial \phi_1 \partial \phi_2}(2x)}\right]$$

$$+ 2x\left[\cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial \phi_1 \partial \phi_2}(-2y)} + \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_2^2}(2x)\right]$$

Les termes croisés vont s'annuler :

$$\Delta g(x,y) = 4(x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \phi_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_2^2}\right)$$

$$= 4(x^2+y^2)\ \Delta f(\phi_1, \phi_2).$$

Exercice 11 :

Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u = x + at \\ v = x + bt \end{pmatrix}$$

on pose $f(x,t) = F(u,v)$. Autrement dit $F = f \circ \phi^{-1}$

et $f = F \circ \phi$

on exprime $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ en fonction de $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$

* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

* $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = a\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right) + b\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$= a^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2ab\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + b^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}.$$

L'équation

$$c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) \iff c^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2c^2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}c^2$$

$$= a^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2ab\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + b^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

$$\iff (c^2 - a^2)\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2(c^2 - ab)\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + (c^2 - b^2)\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0$$

Posons $a = c$ et $b = -c$

et l'équation devient

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$$

dont la solution générale est

$$F(u,v) = \phi(u) + \psi(v)$$ où ϕ, ψ sont C^2

La solution générale de l'équation est alors :

$$f(x,t) = \phi(x+tc) + \psi(x-ct) .$$

Exercice 12

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2 est harmonique $\Delta f = 0$.

1) Si $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ * On pose $g = \frac{\partial f}{\partial x}$ et d'après le th. de Schwarz

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = 0$$

* Idem pour $g = \frac{\partial f}{\partial y}$ ...

* On pose $h = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

et $$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + y\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

on trouve de même

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + y\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + x\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$$

Ainsi

$$\Delta h = 2\Delta f + x\,\underbrace{\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}_{=0} + y\,\underbrace{\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{=0} = 0$$

2) on suppose que f est radiale :

$$f(x,y) = \varphi(x^2+y^2) \quad \text{où } \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \mathcal{C}^1.$$

* on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\,\varphi'(x^2+y^2)$

et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\varphi'(x^2+y^2) + (2x)^2\,\varphi''(x^2+y^2)$

* de même $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\varphi'(x^2+y^2) + (2y)^2\,\varphi''(x^2+y^2)$

De par le fait que f est harmonique :

$$\varphi'(t) + 2t\,\varphi''(t) = 0 \quad \text{où } t = x^2+y^2$$

3) φ' est donc solution de l'EDO

$$y + x y' = 0$$

sol : $\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{1}{x} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{y'}{y} = -\int \frac{1}{x} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + c$

$\Rightarrow y = \dfrac{c'}{x}$ pour $c' \in \mathbb{R}$

Ainsi $\varphi'(x) = \dfrac{c}{x}$ et $\varphi(x) = C\ln(x) + D$ où $C, D \in \mathbb{R}$

et f s'écrit necessairement

$$f(x,y) = C\ln(x^2+y^2) + D$$

Reciproquement on vérifie que toutes les fonctions

de la forme :

$$f(x,y) = C \ln(x^2+y^2) + D \text{ sont harmonique}$$

(cf Exo 5.)