Université Montpellier 2
HLMA 410

Année 2014-2015

Contrôle continu 3

Durée 1h30. Les documents, la calculatrice, les téléphones portables, tablettes, ordinateurs ne sont pas autorisés. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. (Question de cours) Soit A un événement aléatoire. On appelle variable aléatoire indicatrice de A une variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ qui vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon. Soit $A, B, C \subset \Omega$:

1. Exprimer en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ les variables $\mathbb{1}_{A\cup B}$, $\mathbb{1}_{A\cap B}$ et $\mathbb{1}_{A\Delta B}$. Faire les démontrations !

2. Que dire de A et B si $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$

Exercice 2. (Longueur de courbes) Calculer la longueur des courbes paramétrées suivantes :

1. $\gamma(t) = ((1-t)^2 e^t, 2(1-t)e^t)$, $t \in [0, 1]$.

2. γ est la courbe d'équation polaire $r(t) = \sin(t)$, $\theta(t) = t$.

Exercice 3. (Intégrale de Gauss) Pour $R > 0$, on pose $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq R^2\}$ et $\Delta_R = [-R,R] \times [-R,R]$.

1. Montrer que $D_R \subset \Delta_R \subset D_{\sqrt{2}R}$. En déduire que :

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \iint_{\Delta_R} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \iint_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

.

2. En utilisant les coordonnées polaires, calculer $\displaystyle\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$.

3. Montrer que $\displaystyle\iint_{\Delta_R} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \left(\int_{-R}^{R} e^{-t^2}\,dt\right)^2$

4. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} e^{-t^2}\,dt$.