Chapitre 8

Intégrales Multiples

Intégral : "Machine linéaire qui prend en entrée un vecteur et qui renvoie un $\mathbb{R}$. $E \longrightarrow \mathbb{R}$

$(v_n) + (3u_n)_n \longrightarrow 3\sum_n u_n + v_n \in \mathbb{R}$ si cv.

$g + \alpha f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \longrightarrow \alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) + g(t)\, dt \in \mathbb{R}$

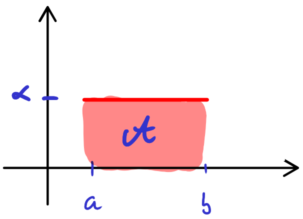
$(v_1, v_2, v_3) + 4.5\,(u_1, u_2, u_3) \longrightarrow u_1 + u_2 + u_3 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} \right\rangle 4.5$

8.1 Détour par les intégrales simples

8.1.1 Construction de l'intégrale de Riemann

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue. On construit l'intégrale de Riemann en plusieurs étapes : ↖ définie sur un Compact.

1. l'intégrale des fonctions constantes sur $[a, b]$.

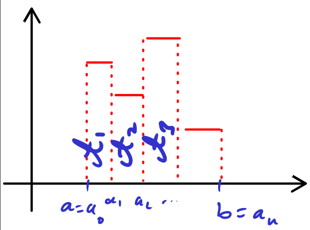


. $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \alpha$

. Intégrale de f.

$\int_a^b f(t)dt = \mathcal{A} = \alpha(b-a)$

2. on définit par linéarité l'intégrale des fonctions en escalier (constantes par morceaux).



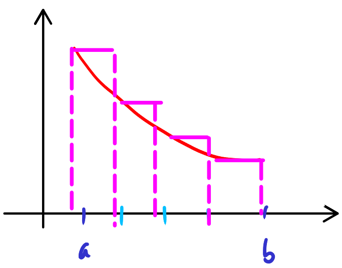
. $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{[a_{i-1}, a_i]}(x)$ ⟵ fonction indicatrice $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$

$a_0 = a < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$

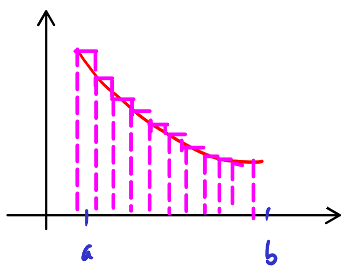
. Intégral de f

$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^n \mathcal{A}_i = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)dt = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} \alpha_i\, dt = \sum_{i=1}^n \alpha_i (a_i - a_{i-1})$

3. Si f est suffisament régulière ("Riemann intégrable"), on approche f par une suite de fonctions en escalier, puis on définit l'intégrale comme la limite des intégrales des fonctions en escalier.

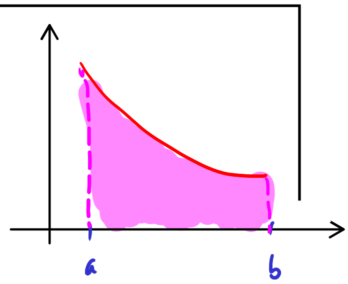


1^{er} approximation u_1



$2^{ème}$ approximation u_2

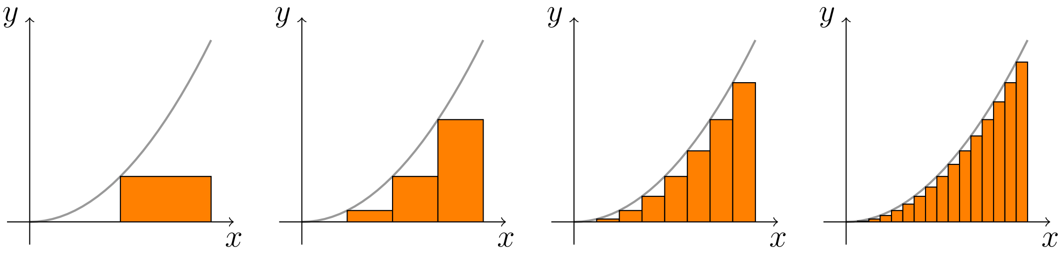
. . .



objet limite.

Idée ici : Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann intégrable.
$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_n \int_a^b u_n(t)\,dt$

4. On montre que les fonctions continues sur un fermé borné sont Riemann intégrable.



Enfin, on montre le théorème fondamental de l'analyse (lien entre calcul de primitive et intégration).

8.1.2 Intégrales à paramètres

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et J un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. On considère une fonction f de $\underbrace{[a,b]}_{t} \times \underbrace{J}_{y}$ dans $\mathbb{R}$. On cherche à étudier l'application ϕ définie sur J par

$$\phi(y) = \int_a^b f(t,y)dt.$$

← le résultat ne dépend que de la valeur du paramètre y.

Proposition 8.1.1. On suppose que f est continue sur $[a,b] \times J$. Alors ϕ est définie et continue sur J.

$\phi(y)$

$\phi : J \to \mathbb{R}$

Démonstration. Admis. Mais on peut aller Voir [1] page 229. □

Proposition 8.1.2. On suppose que J est un intervalle ouvert. On suppose que f est continue sur $[a,b] \times J$ et admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ continue sur $[a,b] \times J$. Alors l'application ϕ est défnie et de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\phi'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(t,y)dt$$

« La dérivée de l'intégrale (ϕ') est l'intégrale de la dérivée » ⚠ aux hypothèses.

Démonstration. Admis. Mais on peut aller Voir [1] page 230. □

Remarque 18. Sous les hypothèses de la proposition précédente : la dérivée de l'intégrale est égale à l'intégrale de la dérivée...

Exemple 8.1.1. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt$. Calcul de $f(0)$ et $f'(0)$. Idée : calculer le DL à l'ordre 1 de f en 0.

* on pose $u : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[\times \mathbb{R}$ (quotient de fonctions $\mathcal{C}^\infty$)

on a $\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = \frac{-t e^{-tx}}{1+t^2}$ est bien continue. et on a

$$f'(x) = -\int_0^1 \frac{t e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$$

* Calcul du DL de f en 0 :

$* f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^1 = \mathrm{Arctan}\,1 - \mathrm{Arctan}\,0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$

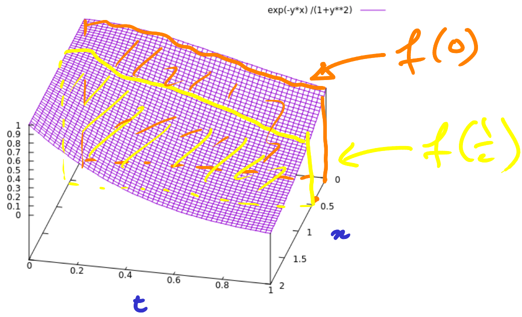
$* f'(0) = -\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{w'(t)}{w(t)}\,dt$ où $w(t) = 1+t^2$

$= -\frac{1}{2}\left[\log(w(t))\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\left(\log(\underset{=}{\overset{2}{w(1)}}) - \log(\underset{=}{\overset{1}{w(0)}})\right) = -\frac{1}{2}\log 2.$

Ainsi : pour $x \in \mathbb{R}$, suffisament petit :

$f(0+x) = f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{\log 2}{2}x + o(|x|)$

perturbation de 0

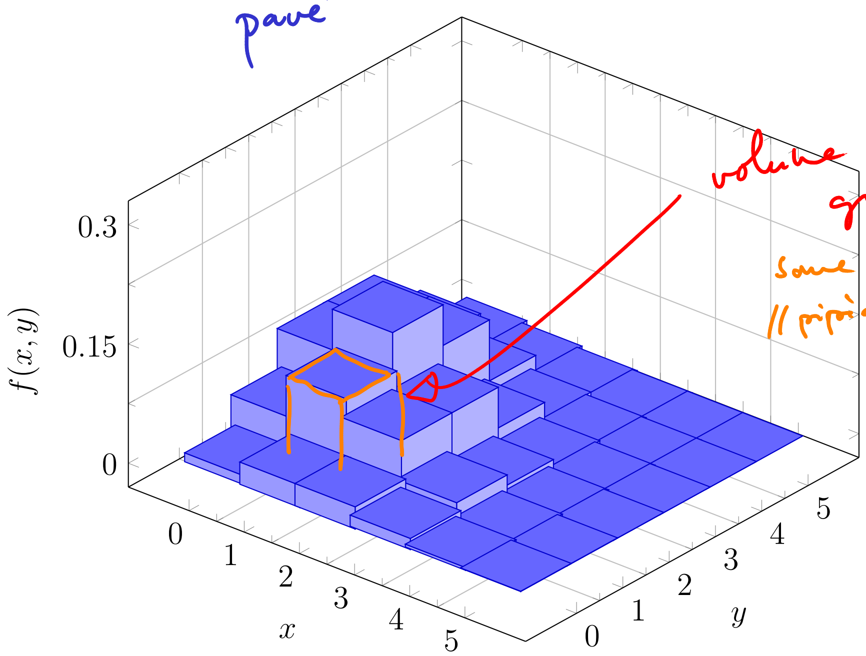


8.2 Intégrales doubles

La construction de l'intégrale de fonctions de plusieurs variables suit sensiblement le même schéma que pour l'intégrale simple. Au lieu de calculer une aire, on calcul un volume.

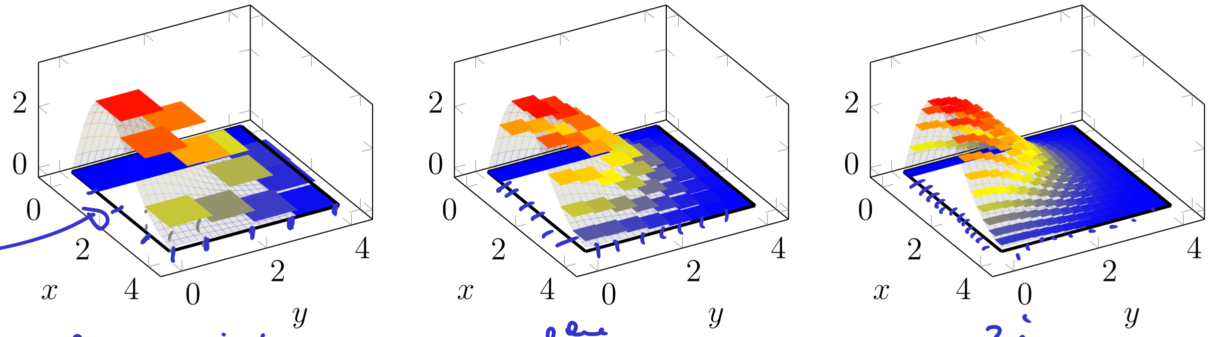
1. On définit l'intégrale de fonctions indicatrices : $[a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto \alpha$ (cte)

pavé



2. L'intégrale de fonction plus générale est alors définie comme la limite des intégrales de fonctions indicatrices :

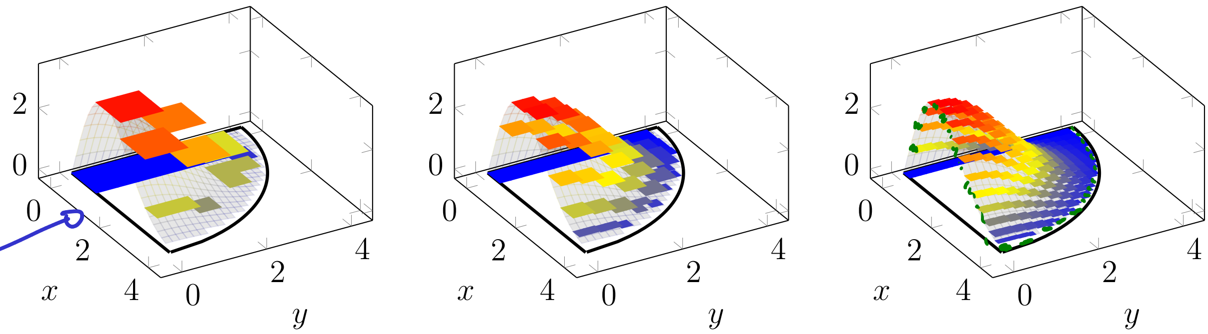
domaine de def de f est [a,b]×[c,d]



1ère approxim 2ème approx. 3ème approx

La difficulté supplémentaire pour les intégrales doubles est que le domaine d'intégration peut être plus compliqué qu'un simple pavé ("un rectangle"). Ici, on souhaite calculer le volume situé sous le graphe d'une focntion et dont la base est un quart de disque.

domaine de def + compliqué



8.2.1 Intégrales doubles sur un pavé

> **Définition 8.2.1.** Un **pavé** P est un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ de la forme $P = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ où $a \leq b$ et $c \leq d$.

> **Théorème 8.2.1 (Fubini pour les pavés).** Soit $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ une application continue. On a alors
> $$\overbrace{\int_a^b \underbrace{\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)}_{\text{intégrale à paramètre}} dx}^{\text{intégral d'une intégrale à paramètre}} = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

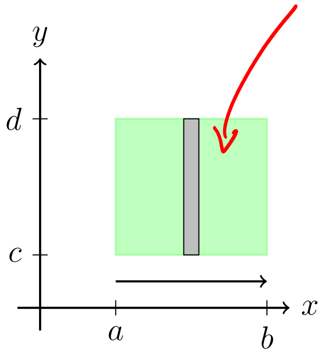
Démonstration. Admis. Mais on peut aller voir [1] page 250. □

> **Définition 8.2.2 (Intégrale double sur un pavé).** L'intégrale double sur le pavé $P = [a,b] \times [c,d]$ de la fonction réelle f est la valeur commune des deux intégrales du théorème précédent :
> $$\iint_P f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

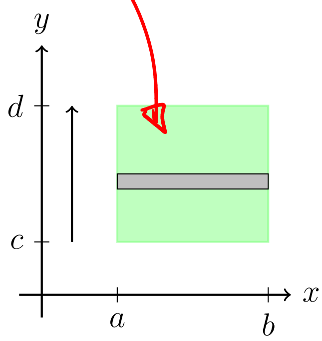
Notations : $\iint_P f(x,y)dxdy$ ou $\iint_P f$ ou $\int_P f(x,y)dxdy$ ou $\int_P f$ si il n'y a pas d'ambigüités.

Remarque 19. On peut calculer l'intégrale double de deux manières différentes :

domaine de déf de la fonction



Fubini !
=



2) intégrer par rapport à y ("en colonne"), puis intégrer par rapport à x ("en ligne")

1) intégrer par rapport à x ("en ligne"), puis intégrer par rapport à y ("en colonne")

Proposition 8.2.1. Si $f : \overset{=[a,b]\times[c,d]}{P} \to \mathbb{R}$ se décompose en $f(x,y) = g(x)\ell(y)$ alors on a :

$$\iint_P f(x,y)dxdy = \left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_c^d \ell(y)dy\right)$$

Démonstration.

$$\iint_P f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d g(x)\,\ell(y)\,dy\right)dx$$

$$= \int_a^b g(x)\underbrace{\left(\int_c^d \ell(y)dy\right)}_{\in\mathbb{R}}dx = \left(\int_c^d \ell(y)dy\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)$$

□

Exemple 8.2.1. $f(x,y) = xy^2$ définie sur $P = \overset{x}{[0,1]} \times \overset{y}{[1,2]}$.

$$* \iint_P xy^2\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_1^2 x y^2\,dy\right)dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} x y^3\right]_{y=1}^{y=2} dx = \int_0^1 \frac{7}{3} x\,dx = \frac{7}{3}\int_0^1 x\,dx = \frac{7}{6}$$

$$* \iint_P xy^2\,dx\,dy = \int_1^2\left(\int_0^1 x y^2\,dx\right)dy = \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} y^2\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_1^2 \frac{y^2}{2}\,dy = \left[\frac{y^3}{6}\right]_{y=1}^{y=2}$$

$$= 7/6.$$

$$* \iint_I xy^2\,dx\,dy = \int_0^1 x\,dx \int_1^2 y^2\,dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{3} = \frac{7}{6}.$$

8.2.2 Intégrales doubles sur une partie élémentaire

Définition 8.2.3 (Partie élémentaire du plan). Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite élémentaire si elle admet les deux définitions suivantes

$x \in [a,b]$

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\right\} \tag{1}$$

et

$y \in [c,d]$

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | c \leq y \leq d, \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)\right\} \tag{2}$$

où φ_1, φ_2 (resp. ϕ_1, ϕ_2) sont des fonctions continues sur $[a,b]$ (resp. $[c,d]$)

remarque : un pavé est une partie élémentaire : prendre $\varphi_1 = cte = a$ $\varphi_2 = cte = b$ $\phi_1 = cte = c$ $\phi_2 = cte = d$

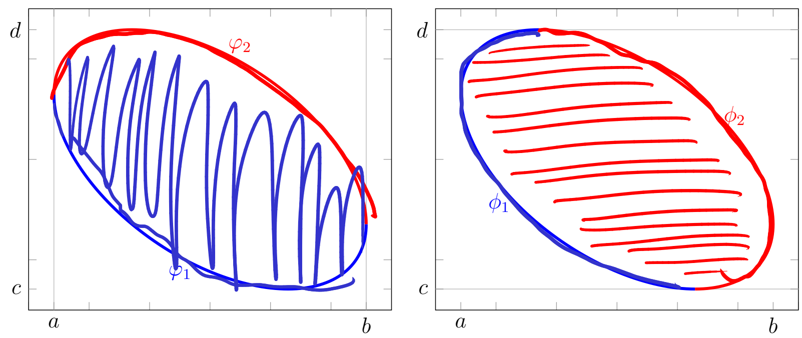
Remarque 20. L'intérieur de A est :

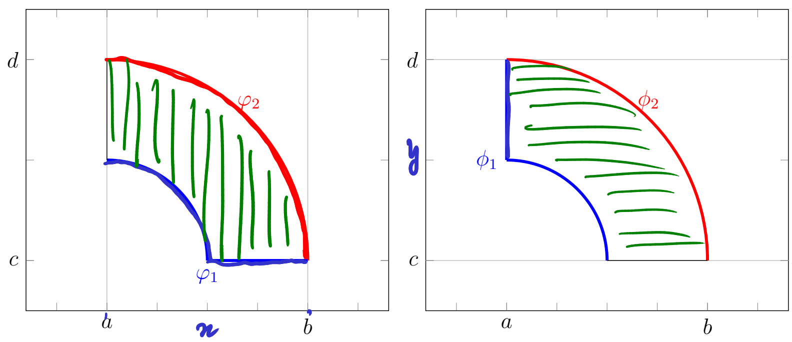
$$\mathring{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a < x < b, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\right\} \tag{1}$$

et

$$\mathring{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | c < y < d, \phi_1(y) < x < \phi_2(y)\right\}. \tag{2}$$

Exemple 8.2.2. Voici quelques exemples :





Théorème 8.2.2 (Fubini). Soit A une partie élémentaire définie par les formule (1) et (2) ci dessus. Soit $f : A \to \mathbb{R}^2$ une fonction continue. On a alors :

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Démonstration. Admis. □

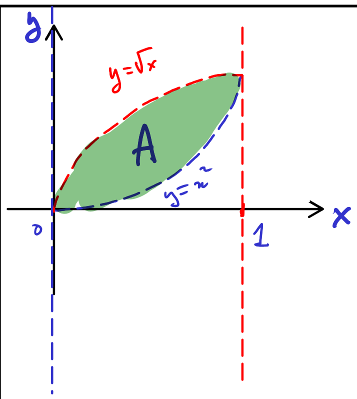
Définition 8.2.4 (Intégrale double sur une partie élémentaire). L'intégrale double sur A de f est alors la valeur commune des deux intégrales ci-dessus. On a

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Notations : $\iint_A f(x,y)dxdy$ ou $\iint_A f$ ou $\int_A f(x,y)dxdy$ ou $\int_A f$ si il n'y a pas d'ambigüités.

Exemple 8.2.3. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1$ et $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ et $f(x,y) = xy$.

$\varphi_1(x) = x^2$
$\varphi_2(x) = \sqrt{x}$
$\phi_1(y) = y^2$
$\phi_2(y) = \sqrt{y}$



$$\iint_A xy\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx$$

fonction de x !

$$= \int_0^1 x \left(\frac{|x|}{2} - \frac{x^4}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} \right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{12}$$

Définition - Proposition 8.2.1. L'**aire** de la partie élémentaire A est définie par

$$\text{Aire}(A) = \iint_A dxdy.$$

On a alors

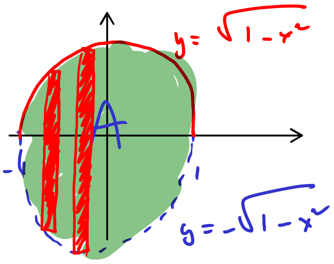
$$\text{Aire}(A) = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\, dx = \int_c^d (\phi_2(y) - \phi_1(y))\, dy.$$

$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy$ = ; $\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} dy$ =

Exemple 8.2.4. Soit A de disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1. Retrouver $\text{Aire}(A) = \pi$

on peut écrire A comme une partie élémentaire :

$$A = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1 \right\} = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1 ; -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \right\}$$



$$\text{Aire}(A) = \iint_A dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} \right) dx$$

fonction paire !

$$= 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$$

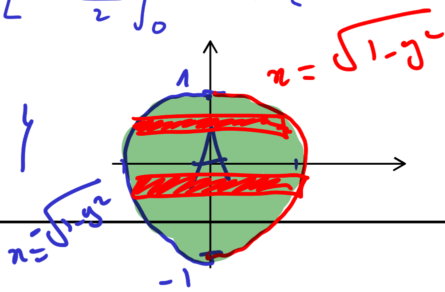
$x = \sin t$

$dx = \cos t\, dt$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} |\cos t| \cos t\, dt = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt$$

$$= \frac{4}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, dt = 2 \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \pi.$$

$$* \; A = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le y \le 1 ; -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2} \right\}$$



8.2.3 Intégrales doubles sur une partie simple

Définition 8.2.5. On dit que A est une **partie simple** de $\mathbb{R}^2$ si c'est la réunion d'une famille finie de parties élementaires dont les intérieurs sont deux à deux disjoints.

au sens topo du chap II.

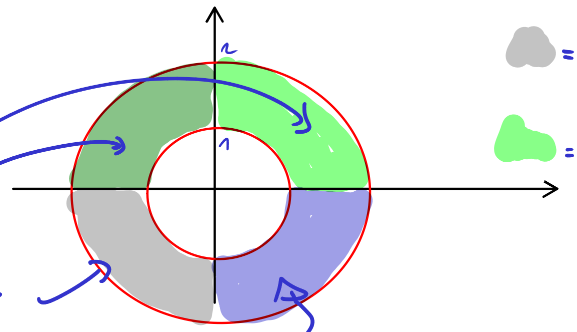
Définition 8.2.6 (Intégrale double sur une partie simple). Soit A une partie simple de $\mathbb{R}^2$, on peut écrire $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ où les A_i sont des parties élémentaires. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue, on définit l'intégrale double de f sur A par

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{A_i} f(x,y) dx dy.$$

Notations : $\iint_A f(x,y) dx dy$ ou $\iint_A f$ ou $\int_A f(x,y) dx dy$ ou $\int_A f$ si il n'y a pas d'ambigüités.

Exemple 8.2.5.

La couronne $\left\{\binom{x}{y}\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 2\right\}$ est une partie simple du plan :



$= \left\{\binom{x}{y}\in\mathbb{R}^2 \mid \begin{matrix} x<0 \\ y<0 \end{matrix}\ ;\ 1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 2\right\}$

$= \left\{ \ \text{———} \mid \begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix}\ ;\ \text{———} \right\}$

$\vdots$

parties élémentaires

Définition 8.2.7. L'**aire** Aire(A) d'une partie simple de A de $\mathbb{R}^2$ est définie par

$$\text{Aire}(A) = \iint_A dxdy = \sum_{i=1}^{n}\iint_{A_i} dxdy = \sum_{i=1}^{n}\text{Aire}(A_i).$$

8.2.4 Propriétés

Proposition 8.2.2 (Linéarité). Soit A une partie simple de $\mathbb{R}^2$. Soient $f, g : A \to \mathbb{R}$ continues et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\iint_A \lambda f + \mu g = \lambda \iint_A f + \mu \iint_A g.$$

Proposition 8.2.3 (Croissance). Soit A une partie simple de $\mathbb{R}^2$ et $f, g : A \to \mathbb{R}$ continues telles que $f \le g$. Alors

$$\iint_A f \le \iint_A g.$$

Proposition 8.2.4. Soient A_1 et A_2 deux parties simples de $\mathbb{R}^2$ telles que $A_1 \subset A_2$ et f une fonction continue et positive sur A_2. Alors

$$\iint_{A_1} f \le \iint_{A_2} f.$$

Définition 8.2.8. Soit A une partie simple de $\mathbb{R}^2$. On appelle centre de gravité de A, le point de coordonnées :

$$\frac{1}{\text{Aire } A}\left(\iint_A xdxdy, \iint_A ydxdy\right).$$

Exemple 8.2.6. Calculer le centre de gravité du disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

$D = \left\{\binom{x}{y}\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2}\le 1\right\}$

$* \iint_D x\,dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(x\left[y\right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

$= \int_{-1}^{1} 2x\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{=(1-x^2)^{1/2}}dx = \left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]_{-1}^{1} = 0$

remarque : $x \mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$ est impaire intégrée sur $[-1,1]$ $\Rightarrow$ intégrale $= 0$.

$+\iint_D y\, dxdy = \dots = 0$ le calcul est le même !

Ainsi le centre de gravité du Disque D est $(0,0)$.

8.3 Intégrales triples

Les définitions des domaines élémentaires peuvent être généralisées de manière évidente à $\mathbb{R}^n$. On se contente ici de traiter le cas $n = 3$.

8.3.1 Intégrales triples sur un pavé

Définition 8.3.1. Soient $a < a'$, $b < b'$ et $c < c'$ des réels. L'ensemble $P = [a, a'] \times [b, b'] \times [c, c']$ est un pavé de $\mathbb{R}^3$.

Définition 8.3.2. L'intégrale triple sur P de $f : P \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\iiint_P f(x, y, z)dxdydz = \int_a^{a'} \left(\int_b^{b'} \left(\int_c^{c'} f(x, y, z)dz \right) dy \right) dx$$

Notations : $\iiint_P f(x, y)dxdy$ ou $\iiint_P f$ ou $\int_P f(x, y)dxdy$ ou $\int_P f$ si il n'y a pas d'ambigüités.

Remarque 21. Les propriétés de l'intégrale triples sont identiques à l'intégrale double :

1. on peut permuter l'ordre d'intégration. (Fubini)
2. si $f(x, y, z) = \alpha(x)\beta(y)\gamma(z)$ alors

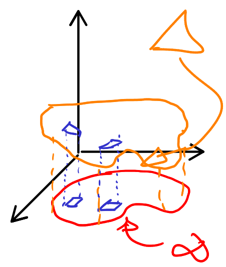
$$\iiint_P f(x, y, z)dxdydz = \left(\int_a^{a'} \alpha(x)dx \right) \left(\int_b^{b'} \beta(y)dy \right) \left(\int_c^{c'} \gamma(z)dz \right).$$

Intégrale du produit = produit des intégrales

8.3.2 Formule de sommation par piles

Définition 8.3.3. On suppose que $\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | u(x, y) \leq z \leq v(x, y), (x, y) \in \mathcal{D}\}$ où $\mathcal{D}$ est une partie simple de $\mathbb{R}^2$ et $u, v : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues. L'intégrale d'une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue sur Δ est

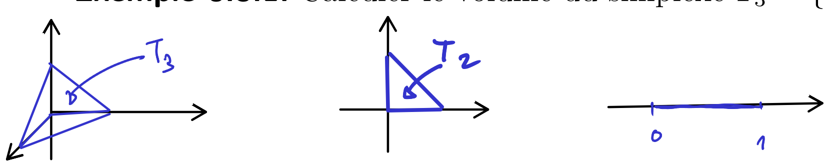
$$\iiint_\Delta f(x, y, z)dxdydz = \iint_\mathcal{D} \left(\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dxdy.$$



Définition 8.3.4. Le **volume** de Δ est noté $\mathrm{Vol}(\Delta)$ et est défini par

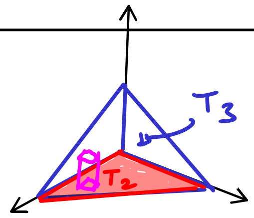
$$\mathrm{Vol}(\Delta) = \iiint_\Delta dxdydz = \iint_\mathcal{D} (v(x, y) - u(x, y))\, dxdy$$

Exemple 8.3.1. Calculer le volume du simplexe $T_3 = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 | x + y + z \leq 1\}$.



$T_2 = \{(x, y) \in [0,1]^2 \mid x + y \leq 1\}$

$T_1 = \{x \in [0,1]\}$



$T_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \leq x \leq 1 ;\ 0 \leq y \leq 1 ;\ 0 \leq z \leq 1 ;\ x+y+z \leq 1 \right\}$

$= \left\{ \text{———} \,\middle|\, 0 \leq x \leq 1 ,\ 0 \leq y \leq 1 ;\ 0 \leq z \leq 1-x-y \right\}$

$= \left\{ \text{———} \,\middle|\, 0 \leq z \leq 1-x-y \text{ et } (x,y) \in T_2 \right\}$

La Formule de Sommation par pile donne :

$$\mathrm{Vol}(T_3) = \iiint_{T_3} dx\,dy\,dz = \iint_{T_2} \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 1-x-y \; dy \right) dx \qquad T_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq x \leq 1 ;\ 0 \leq y \leq 1-x \right\}$$

$$= \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{1-x} dx$$

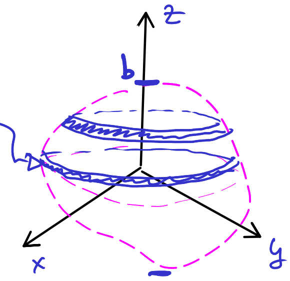
$$= \int_0^1 (1-x) - x(1-x) - (1-x)^2 \frac{1}{2} \; dx$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{6}(1-x)^3 \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

8.3.3 Formule de sommation par tranches

Définition 8.3.5. On suppose que $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y) \in \mathcal{D}_z, a \leq z \leq b\}$ où $\mathcal{D}_z$ est une partie simple de $\mathbb{R}^2$ pour tout $z \in [a,b]$. L'intégrale de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue est

$$\iiint_\Delta f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\iint_{\mathcal{D}_z} f(x,y,z)dxdy \right) dz.$$



Définition 8.3.6. Le volume de Δ est noté $\mathrm{Vol}(\Delta)$ et est défini par

$$\mathrm{Vol}(\Delta) = \iiint_\Delta dxdydz = \int_a^b \mathrm{Aire}(\mathcal{D}_z)dz.$$

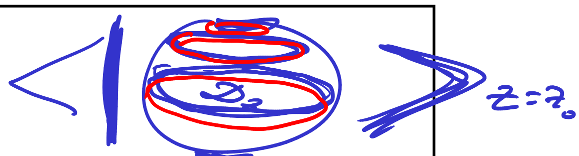
Exemple 8.3.2. Montrer que le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^3$ vaut $\frac{4\pi}{3}$

$B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 \leq 1 \right\}$

$= \left\{ \text{———} \,\middle|\, (x,y) \in \mathcal{D}_z \quad -1 \leq z \leq 1 \right\}$

où $\mathcal{D}_z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leq 1 - z^2 \right\}$

$=$ disque de rayon $1 - z^2$



La formule de Sommation par tranche donne :

$$\mathrm{Vol}(B_3) = \iiint_{B_3} dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} \iint_{D_z} dx\,dy \; dz$$

$$= \int_{-1}^{1} \text{aire}(D_z)\, dz$$

$$= \int_{-1}^{1} \pi(1-z^2)\, dz$$

$$= \pi\left[z - \frac{z^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \pi\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi .$$

Définition 8.3.7. Soit A une partie simple de $\mathbb{R}^3$. On appelle centre de gravité de A, le point de coordonnées :

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}\,A}\left(\iiint_A x\,dxdydz, \iiint_A y\,dxdydz, \iiint_A z\,dxdydz\right).$$

8.4 Formule de changement de variables

Proposition 8.4.1. Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que $\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$. Alors pour toute fonction $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ continue :

les u_i les x_i

$$\int_{\varphi(\mathcal{U})} f(x_1, \cdots, x_n)dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathcal{U}} f(\varphi(u_1, \cdots, u_n)) \left|\det J_\varphi(u)\right| du_1 \cdots du_n.$$

où $\det J_\varphi$ est le déterminant de la matrice jacobienne de φ. ⚠ valeur absolue

Démonstration. Admis. □

La formule précédente généralise la formule de changement de variables dans les intégrales simples :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f \circ \varphi(t)\, \varphi'(t)dt. \qquad x = \varphi(t)$$

8.4.1 Cas des intégrales doubles

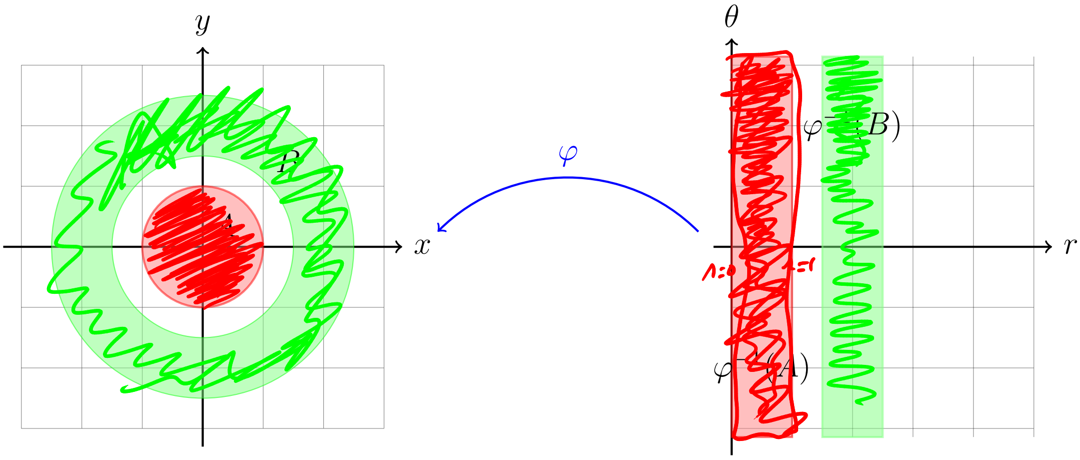
Dans le cas où $n = 2$ on a $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $\varphi(u_1, u_2) = (\varphi_1(u_1, u_2) = x_1, \varphi_2(u_1, u_2) = x_2)$ et

$$\iint_{\varphi(\mathcal{U})} f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \iint_{\mathcal{U}} f(\varphi(u_1, u_2)) \left|\det J_\varphi(u_1, u_2)\right| du_1du_2,$$

où $\det J_\varphi(\cdot) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} \right|$.

Exemple 8.4.1. Changement de coordonnées polaires : $\varphi :]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$ (x,y) défini par $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$. On a alors $\det J_\varphi(r, \theta) = r$ et la formule du changement de variable s'écrit :

$$\iint_\Delta f(x,y)dxdy = \iint_{\varphi^{-1}(\Delta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta.$$



L'aire du rectangle rouge $\varphi^{-1}(A)$ et du rectangle vert $\varphi(B)$ dans le plan (r, θ) sont égales. Pour retrouver les aires des couronnes A et B correspondantes dans le plan (x, y) il faut multiplier par un facteur correctif $|\det J_\varphi(r, \theta)| = r$:

$$\text{Aire}(A) = \iint_A dxdy = \iint_{\varphi^{-1}(A)} r dr d\theta = \int_0^1 r dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = \frac{1}{2}(2\pi) = \pi$$
$$\text{Aire}(B) = \iint_B dxdy = \iint_{\varphi^{-1}(B)} r dr d\theta = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} r dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2(2\pi) = 4\pi$$

Exemple 8.4.2. Changement de coordonnées affines.

$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ linéaire

et A inversible. On a $d_{\binom{u}{v}}\varphi = A$ (et $\mathrm{Jac}_\varphi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}\, A$) qui ne dépend pas de (u,v). La formule de chgt de variable donne :

$$\iint_\Delta f(x,y)\,dxdy = \iint_{\varphi^{-1}(\Delta)} f(\varphi(u,v))\,du\,dv\ \underbrace{|\det A|}_{\neq 0}$$ car A inversible.

Remarque : Si φ est une translation (ie $A = Id$)

$$\iint_\Delta f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2 = \iint_{\varphi^{-1}(\Delta)} f(\varphi(u,v))\,du\,dv$$

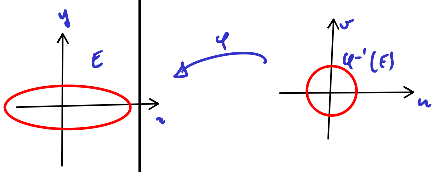
• Si φ est une dilatation (scaling) $b = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et $A = \alpha \, Id$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\iint_\Delta f(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 = \alpha^2 \iint_{\varphi^{-1}(\Delta)} f\circ\varphi(u_1,u_2)\,du_1 du_2$$

car $\det A = \det\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix} = \alpha^2 \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \alpha^2$. En effet si on dilate par α le domaine Δ, l'aire de $\alpha\Delta$ est multipliée par α^2.

exemple : Soit $a,b>0$ et on cherche à calculer l'aire de

$$E = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \underbrace{\frac{x^2}{a^2}}_{=u^2} + \underbrace{\frac{y^2}{b^2}}_{=v^2} < 1 \right\} = \text{intérieur d'une ellipse.}$$



$$\varphi^{-1}(E) = \left\{ \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; u^2+v^2<1 \right\}$$

on pose $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\frac{1}{a} & 0\\ 0 & \frac{1}{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^2 \leftarrow \mathbb{R}^2 : \varphi$

$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}au = x\\ bv = y\end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$

$$\text{Aire}(E) = \iint_E dx\,dy = \iint_{\varphi^{-1}(E)} \left|J_\varphi\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right| du\,dv$$

$$= |ab| \underbrace{\iint_{\varphi^{-1}(E)} du\,dv}_{= \text{Aire}\left(\text{Disque}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \text{rayon } 1\right)\right)} = |ab|\pi$$

8.4.2 Cas des intégrales triples

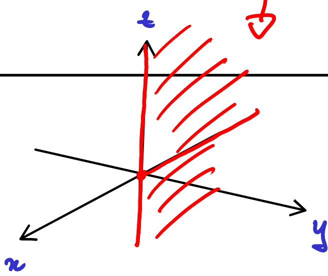
Dans le cas où $n = 3$ on a $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avec $\varphi(u_1,u_2,u_3) = (\varphi_1(u_1,u_2,u_3) = x_1, \varphi_2(u_1,u_2,u_3) = x_2, \varphi_3(u_1,u_2,u_3) = x_3)$ et

$$\iiint_{\varphi(\mathcal{U})} f(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3 = \iiint_{\mathcal{U}} f(\varphi(u_1,u_2,u_3)) \left|\det J_\varphi(u_1,u_2,u_3)\right| du_1du_2du_3,$$

où $\det J_\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial u_1} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial u_2} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial u_3} \end{vmatrix}$.

Exemple 8.4.3. Changement de coordonnées cylindriques.

demi plan.



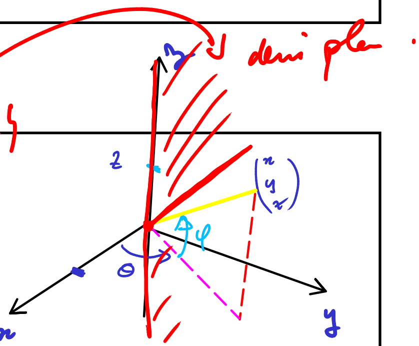
$\varphi : \,]0,+\infty[\, \times \,]-\pi,\pi[\, \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus (\,]-\infty,0] \times \{0\} \times \mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix}r\\ \theta\\ z\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

le Jacobien $\left|\det J_\varphi\begin{pmatrix}r\\ \theta\\ z\end{pmatrix}\right| = r$ et on a :

$$\iiint_\Delta f(x,y,z) = \iiint_{\varphi^{-1}(\Delta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,dr\,d\theta\,dz$$

Exemple 8.4.4. Changement de coordonnées sphériques.



$$]0,+\infty[\times]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\times]-\pi,\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{]-\infty,0]\times\{0\}\times\mathbb{R}\}$$

distance à l'origine

latitude

longitude

$$\begin{pmatrix} r\\ \varphi\\ \theta\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi\end{pmatrix}$$

le $$|\det \mathrm{Jac}_\varphi| = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\end{vmatrix} = \dots = |-r^2\cos\varphi|$$

on a donc

$$\iiint_\Delta f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\varphi^{-1}(\Delta)} f\begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi\\ r\sin\theta\cos\varphi\\ r\sin\varphi\end{pmatrix} r^2|\cos\varphi|\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

Exemple: Calcul de volume de $B_3=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$

$$Vol(B_3)=\iiint_{B_3} dx\,dy\,dz = \iiint_D r^2|\cos\varphi|\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

où $D=\left\{\begin{pmatrix}r\\\varphi\\\theta\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid 0<r\le 1, -\pi<\theta<\pi, -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right\}$ ← pavé !

$$= \int_0^1\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2|\cos\varphi|\,d\varphi\right)d\theta\right)dr = \left(\int_0^1 r^2\,dr\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\cos\varphi|\,d\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{3}\times 2\pi\times 2 = \frac{4\pi}{3}.$$

8.5 Circulation d'un champ de vecteurs

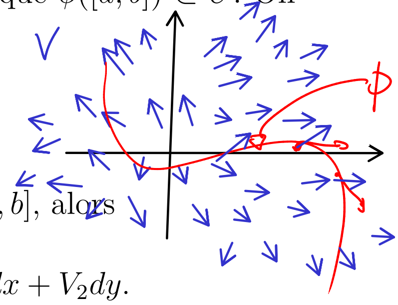
8.5.1 Définitions et propriétés

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

Définition 8.5.1 (Intégrale d'une fonction le long d'une courbe). Soit $\Gamma = ([a,b], \phi)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$. On considère $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ouvert $\mathcal{U} \subset E$. On suppose que $\phi([a,b]) \subset U$. L'intégrale de f le long de la courbe $\Gamma = ([a,b], \phi)$ est

$$\int_\Gamma f d\phi = \int_a^b f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| \, dt.$$

Définition 8.5.2. Soit $\Gamma = ([a,b], \phi)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$. On considère le champ de vecteurs $V : \mathcal{U} \to E$ continue sur un ouvert $\mathcal{U} \subset E$. On suppose que $\phi([a,b]) \subset U$. On appelle **circulation** du champ de vecteurs V le long de Γ le réel :



$$\int_\Gamma \langle V, d\phi \rangle = \int_a^b \langle V(\phi(t)), \phi'(t) \rangle \, dt.$$

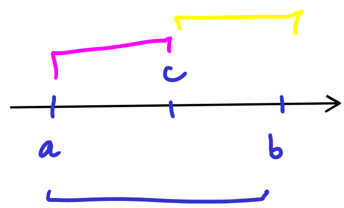
Notation : Si $E = \mathbb{R}^2$ on pose $V = (V_1, V_2)$ et $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ définie sur $[a,b]$, alors

$$\int_\Gamma \langle V, d\phi \rangle = \int_a^b V_1(\phi(t))\phi_1'(t)dt + \int_a^b V_2(\phi(t))\phi_2'(t)dt = \int_\Gamma V_1 dx + V_2 dy.$$

Remarque 22. Les fonctions ϕ et ϕ' sont continues sur $[a,b]$ et V est continu sur $\mathcal{U} \supset \phi([a,b])$. Ansi, $t \mapsto \langle V(\phi(t)), \phi'(t) \rangle$ est continue et l'intégrale est bien définie.

Proposition 8.5.1 (Relation de Chasles). Avec les notations de la définition précédente. Pour $c \in [a,b]$ on note :

$$\Gamma_{a,c} = ([a,c], \phi), \quad \Gamma_{c,b} = ([c,b], \phi), \quad \Gamma_{a,b} = ([a,b], \phi)$$



Alors,

$$\int_{\Gamma_{a,b}} \langle V, d\phi \rangle = \int_{\Gamma_{a,c}} \langle V, d\phi \rangle + \int_{\Gamma_{c,b}} \langle V, d\phi \rangle$$

Cette formule se généralise à un nombre fini de point de $]a,b[$. On étend alors la définition de l'intégrale curviligne aux arcs continues de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Si $\Gamma = ([a,b], \phi)$ est $\mathcal{C}^1$ par morceau pour la subdivision $a = a_0 < \cdots < b = a_m$ alors on pose

$$\int_\Gamma \langle V, d\phi \rangle = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\Gamma_{a_i, a_{i+1}}} \langle V, d\phi \rangle .$$

- variable t

Proposition 8.5.2 (Changement de paramétrage). Soit $\Gamma = ([a,b], \phi)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$. Étant donné le $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\theta : [c,d] \to [a,b]$ considérons la courbe Γ' définie par la paramétrisation $([c,d], \psi = \phi \circ \theta)$. Alors,

variable u

$$\int_\Gamma \langle V, d\phi \rangle = \varepsilon \int_{\Gamma'} \langle V, d\psi \rangle$$

où $\varepsilon = \text{sign}(\theta') = \begin{cases} 1 \text{ si } \theta \text{ est croissant} \\ -1 \text{ si } \theta \text{ est décroissant} \end{cases}$.

Démonstration. Le changement de variable $t = \theta(u)$ donne

$$\int_\Gamma \langle V, d\phi\rangle = \int_a^b \langle V(\phi(t)), \phi'(t)\rangle \, dt$$

$$= \int_{\theta^{-1}(a)}^{\theta^{-1}(b)} \langle V(\phi\circ\theta(u)), \phi'\circ\theta(u)\rangle \, \theta'(u)\, du$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_c^d \langle V(\psi(u)), \psi'(u)\rangle \, du & \text{si } \theta \text{ est } \nearrow \\ \displaystyle -\int_c^d \langle V(\psi(u)), \psi'(u)\rangle \, du & \text{si } \theta \text{ est } \searrow \end{cases}$$

□

Exemple 8.5.1. Soit $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $V(x, y, z) = (y^2, x^2, z)$. Calculer la circulation de V le long du segment reliant $(0, 0, 0)$ à $(1, 2, 3)$.

• Trouver une paramétrisation du segment :

$$\phi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix} \qquad \text{et } \Gamma = ([0,1], \phi)$$

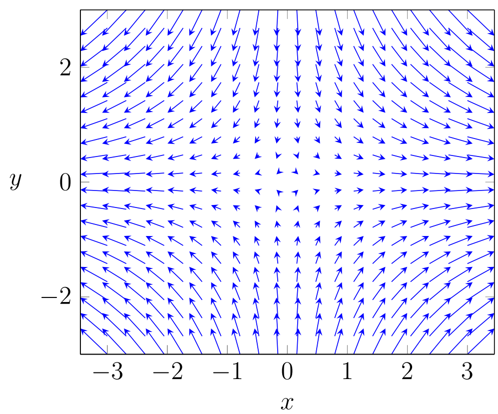
$$\bullet \int_\Gamma \langle V, d\phi\rangle = \int_0^1 \langle V(\phi(t)), \phi'(t)\rangle dt = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} (2t)^2 \\ t^2 \\ 3t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^1 (4t^2 \times 1 + 2t^2 + 9t)\, dt = \dots = 13/2$$

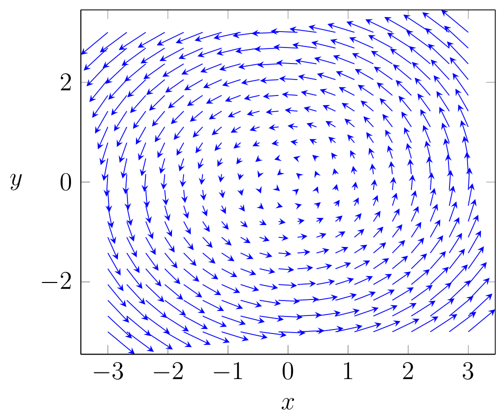
8.5.2 Champs de Gradient

Définition 8.5.3. $V : E \to E$ est un champ de gradient s'il existe une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ régulière telle que $V = \nabla f$.

Exemple 8.5.2. Voici deux exemples de champs de vecteurs :



$V(x, y) = (x, -y)$ (champ de gradient)



$V(x, y) = (-y, x)$

, champ conservatif $= \nabla f$

Théorème 8.5.1. On suppose que V est un champ de gradient continue. Alors pour tout courbe paramétrée $\Gamma = (I, \phi)$ d'origine A et d'extrémité B incluse dans $\mathcal{U}$, on a

$$\int_\Gamma \langle V, d\phi \rangle = f(B) - f(A).$$

différence de potentiel.

Démonstration.

□

Définition 8.5.4. Un ouvert $\mathcal{U}$ est dit **étoilé** si il existe $a \in \mathcal{U}$ tel que pour tout $\omega \in \mathcal{U}$ on a $[a, \omega] \in \mathcal{U}$.

Théorème 8.5.2 (Poincaré, cas $n = 2$). Soit $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteur défini sur $\mathcal{U}$ et de classe $\mathcal{C}^1$. Si $\mathcal{U}$ est un ouvert étoilé alors $V = (V_1, V_2)$ est un champ de gradient si et seulement si $\frac{\partial V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial V_2}{\partial x_1}$.

Démonstration. Admis. □

8.5.3 Formule de Green-Riemann (cas $n = 2$)

On considère $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique (i, j).

Théorème 8.5.3. Soit Δ une partie de $\mathbb{R}^2$ dont le bord est le support d'une courbe paramétrée $\partial\Delta$ fermée, orientée positivement et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Soit $V = (V_1, V_2)$ un champ de vecteur de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert contenant Δ. On a alors,

$$\int_{\partial\Delta} \langle V, d\phi \rangle = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) dxdy,$$

Démonstration. Admis. □

Remarque 23. Orientation positive de $\partial\Delta$: le point $\phi(t)$ qui parcourt le bord de Δ se déplace pour t croissant "en laissant le domaine Δ à gauche".

Notation : le théorème de Green-Riemann est le plus souvent énoncé en introduisant la notion de forme différentielle. La notation utilisée dans ce cas est $\int_\Gamma V_1 dx + V_2 dy = \int_a^b V_1(\phi(t))\phi_1'(t) + V_2(\phi(t))\phi_2'(t)dt = \int_\Gamma \langle V, d\phi \rangle$.

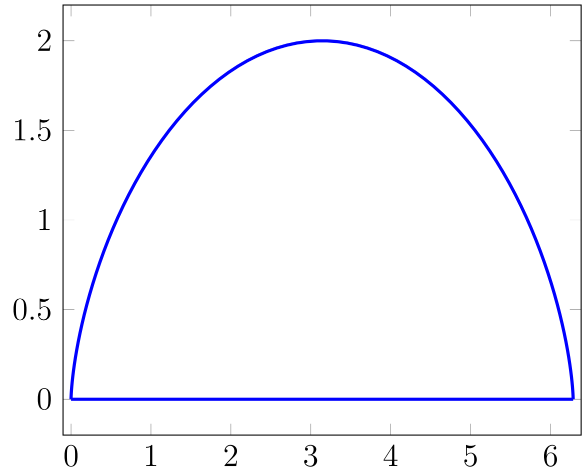
Proposition 8.5.3 (Calcul d'aire planes). Avec les notations différentielle on a

$$\text{Aire}(\Delta) = \int_{\partial\Delta} xdy = -\int_{\partial\Delta} ydx = \frac{1}{2}\int_{\partial\Delta} xdy - ydx.$$

Démonstration.

□

Exemple 8.5.3. Calcul de l'aire de la partie du plan Δ délimitée par l'axe Ox et l'arc paramétré $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$


2
1.5
1
0.5
0
0
1
2
3
4
5
6

Bibliographie

[1] F. Liret and D. Martinais. *Cours de mathématiques. Analyse 2ème année. Cours et exercices avec solutions.* Collection : Sciences Sup, Dunod, 2004 - 2ème édition.