Bartłomiej Chwast

Równania Różniczkowe i Różnicowe

Zadanie domowe

1. Wstęp

Odkształcenie sprężyste – rozwiązanie metodą elementów skończonych

$$-\frac{d}{dx}\left(E(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = 0$$

$$u(2) = 0$$

$$\frac{du(0)}{dx} + u(0) = 10$$

$$E(x) = \begin{cases} 3 & dla\ x \in [0,1] \\ 5 & dla\ x \in (1,2] \end{cases}$$

gdzie u to poszukiwana funkcja

$$[0,2] \ni x \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{d}{dx}\left(E(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = -\frac{dE(x)}{dx}\frac{du(x)}{dx} - E(x)\frac{d^2(x)}{dx^2} = 0 - E(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2}$$

Zatem możemy rozpatrywać problem dla równania:

$$-E(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0$$

2. Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego

Za przestrzeń V funkcji testowych przyjmujemy te, które zerują się na prawym brzegu, czyli jeżeli $v(x) \in V$ to $v(2) = 0$

Mnożymy obustronnie równanie przez funkcję testową $v(x)$

$$-E(x)u''(x)v(x) = \ 0$$

Całkujemy obustronnie przez części na dziedzinie u

$$\int_0^2 -E(x)u''(x)v(x)dx = 0$$

Całkujemy przez części

$$-[E(x)u'(x)v(x)]_0^2 + \int_0^2 E(x)u'(x)v'(x)dx = 0$$

$$\int_0^2 E(x)u'(x)v'(x)dx - 5u'(2)v(2) + 3u'(0)v(0) = 0$$

Korzystając z tego, że funkcja testowa zeruje się na prawym brzegu:

$$v(2) = 0 \Rightarrow 5u'(2)v(2) = 0$$

Ponadto z warunku Robina:

$$u'(0) + u(0) = 10 \Rightarrow u'(0) = 10 - u(0)$$

Zatem otrzymujemy

$$\int_0^2 E(x)u'(x)v'(x)dx - 3u(0)v(0) = -30v(0)$$

Co możemy zapisać w postaci

$$B(u, v) = L(v)$$

3. Dyskretyzacja problemu

Po prawej stronie Ω mamy warunek Dirichleta, natomiast po lewej nie, zatem za przestrzeń, w której będziemy rozwiązywać nasz problem przyjąłem:

$$V_h = \langle e_0, e_1, e_2, \dots, e_{n-1} \rangle$$

gdzie n jest parametrem wejściowym

Funkcje testowe tworzące bazę V_h definiujemy jako:

$$e_i(x) = \begin{cases} \frac{x}{h} - i + 1, & x \in [h(i-1), hi] \\ -\frac{x}{h} + i + 1, & x \in (hi, h(i+1)] \end{cases}$$

gdzie $h = \frac{2}{n}$ oznacza długość przedziału

4. Równanie w postaci macierzowej

W takim razie równanie liniowe, do którego sprowadza się odnalezienie $u = u_0 e_0 + u_1 e_1 + \dots + u_{n-1} e_{n-1} \in V_h$ spełniającego to równanie dla każdego $v \in V_h$ ma postać układu równań:

$$\begin{cases} u_o B(e_0, e_0) + u_1 B(e_1, e_0) + \cdots u_{n-1} B(e_{n-1}, e_0) = L(e_0) \\ u_o B(e_0, e_1) + u_1 B(e_1, e_1) + \cdots u_{n-1} B(e_{n-1}, e_1) = L(e_1) \\ \vdots \\ u_o B(e_0, e_{n-1}) + u_1 B(e_1, e_{n-1}) + \cdots u_{n-1} B(e_{n-1}, e_{n-1}) = L(e_{n-1}) \end{cases}$$

Co macierzowo zapisujemy:

$$\begin{bmatrix} B(e_0, e_0) & B(e_1, e_0) & \cdots & B(e_{n-1}, e_0) \\ B(e_1, e_0) & B(e_1, e_1) & \cdots & B(e_{n-1}, e_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_{n-1}, e_0) & B(e_{n-1}, e_1) & \dots & B(e_{n-1}, e_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_0) \\ L(e_1) \\ \vdots \\ L(e_{n-1}) \end{bmatrix}$$