Bartłomiej Chwast

Równania Różniczkowe i Różnicowe

Zadanie domowe

Odkształcenie sprężyste – rozwiązanie metodą elementów skończonych

$$-\frac{d}{dx}\left(E(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = 0$$

$$u(2) = 0$$

$$\frac{du(0)}{dx} + u(0) = 10$$

$$E(x) = \begin{cases} 3 & dla\ x \in [0,1] \\ 5 & dla\ x \in (1,2] \end{cases}$$

Gdzie u to poszukiwana funkcja

$$[0,2] \ni x \to u(x) \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{d}{dx}\left(E(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = -\frac{dE(x)}{dx}\frac{du(x)}{dx} - E(x)\frac{d^2(x)}{dx^2} = 0 - E(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2}$$

Zatem możemy rozpatrywać problem dla równania:

$$-E(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0$$

Za przestrzeń V funkcji testowych przyjmujemy te, które zerują się na prawym brzegu, czyli jeżeli $v(x) \in V$ to $v(2) = 0$

Mnożymy obustronnie równanie przez funkcję testową $v(x)$

$$-E(x)u''(x)v(x) = 0$$

Całkujemy obustronnie przez części na dziedzinie u

$$\int_0^2 -E(x)u''(x)v(x)dx = 0$$

Całkujemy przez części

$$-[E(x)u'(x)v(x)]_0^2 + \int_0^2 E(x)u'(x)v'(x)dx = 0$$

$$\int_0^2 E(x)u'(x)v'(x)dx - 5u'(2)v(2) + 3u'(0)v(0) = 0$$

Korzystając z tego, że funkcja testowa zeruje się na prawym brzegu:

$$v(2) = 0 \Rightarrow 5u'(2)v(2) = 0$$

Ponadto z warunku Robina:

$$u'(0) + u(0) = 10 \Rightarrow u'(0) = 10 - u(0)$$

Zatem otrzymujemy

$$\int_0^2 E(x)u'(x)v'(x)dx - 3u(0)v(0) = -30v(0)$$

Co możemy zapisać w postaci

$$B(u, v) = L(v)$$