Fachhochschule Südwestfalen
University of Applied Sciences

Statistik

CH.8 - Wahrscheinlichkeitsverteilungen

SS 2021 || Prof. Dr. Buchwitz, Sommer, Henke

Wir geben Impulse

Zufallsvariablen

Definition: Zufallsvariablen

Unter einer Zufallsvariablen X versteht man eine Funktion, die aufgrund eines Zufallsexperiments den Ergebnissen des Zufallsexperiments numerische Werte zuordnet. Jedes mögliche Ergebnis eines Zufallsexperiments führt dabei zu einem anderen numerischen Wert.

- Kennzeichnend sind die Merkmalsausprägungen x_i und die damit assoziierten Wahrscheinlichkeiten $\boxed{P(X = x_i)}$.
- Zufallsvariablen werden in der Regel mit Großbuchstaben (X, Y, X_i) bezeichnet.

Beispiel: Zufallsvariablen

- Das Zufallsexperiment „Werfen einer Münze“ mit den Ergebnissen **Kopf** und **Zahl** kann als Zufallsvariable X modelliert werden:

$$\begin{aligned} X(x = \text{Kopf}) &= X(\text{Kopf}) &= 0 \\ X(x = \text{Zahl}) &= X(\text{Zahl}) &= 1 \end{aligned}$$

- Bei der gewählten Zuorndung kann man die Zufallsvariable X auch als *Anzahl des Auftretens von Zahl beim Werfen einer Münze* auffassen.
- Bei einer fairen Münze gilt $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$.

Diskrete und stetige Zufallsvariablen

Definition: Diskrete Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable heißt diskret, wenn sie **nur diskrete Werte**, also endlich viele oder abzählbar unendlich viele, Werte annimmt.

- **Beispiel:** Anzahl defekter Glühbirnen in einer Stichprobe von 10 Stück
- **Beispiel:** Anzhal der Kinder unter 18 Jahre in einem Haushalt

Definition: Stetige Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable heißt stetig, wenn sie mit zwei Werten definiert, auch **alle Werte im Intervall** zwischen diesen beiden Werten annehmen kann.

- **Beispiel:** Zeitaufwand für die Produktion eines Werkstücks
- **Beispiel:** Gewicht einer aus einer Abfüllanlage entnommenen Flasche

Wahrscheinlichkeitsfunktion

K, K   0
K, Z   1
Z, K   1
Z, Z   2

Definition: Wahrscheinlichkeitsfunktion

Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Dann heißt die Funktion f Wahrscheinlichkeitsfunktion von X.

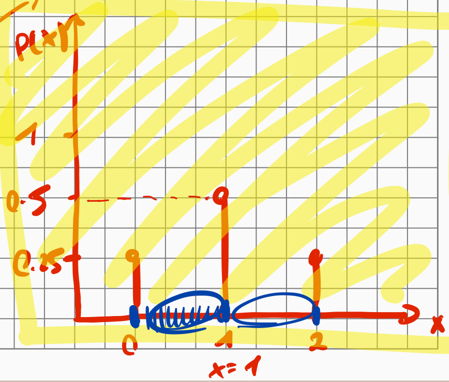
$$f(x) = P(X = x)$$

- **Beispiel:** Als Zufallsexperiment wird eine faire Münze zweimal geworfen. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl des Auftretens des Ereignisses „Zahl“. Definieren Sie die Zufallsvariable und skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion?

Wahrscheinlichkeitsfunktion

1. Wf	2. Wf	X	
K	K	0	0.25
K	Z	1	0.5
Z	K	1	
Z	Z	2	0.25

P(X=1)



Verteilungsfunktion

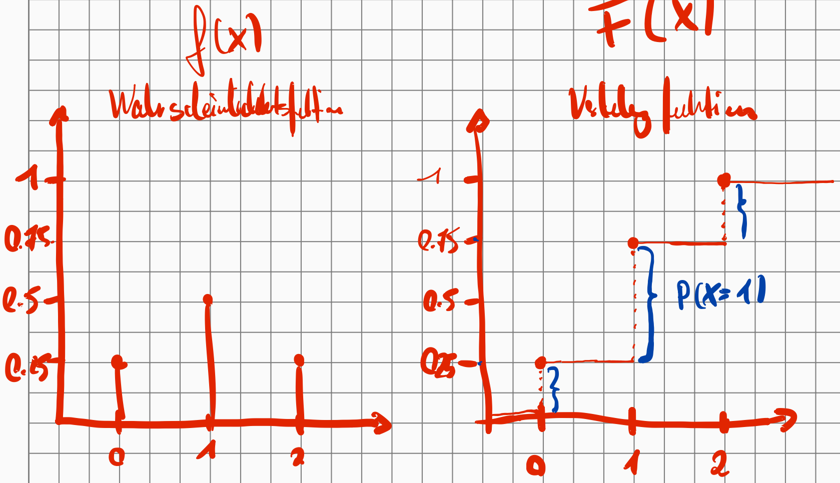
Definition: Verteilungsfunktion

Sei X eine diskrete oder stetige Zufallsvariable. Dann heißt die Funktion F Verteilungsfunktion von X.

$$F(x) = P(X \leq x)$$

- **Beispiel:** Als Zufallsexperiment wird eine faire Münze zweimal geworfen. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl des Auftretens des Ereignisses „Zahl“. Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion?

Verteilungsfunktion



$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0.25 + 0.5 = 0.75$$

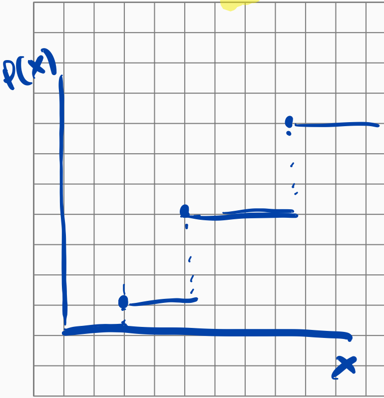
Dichtefunktion

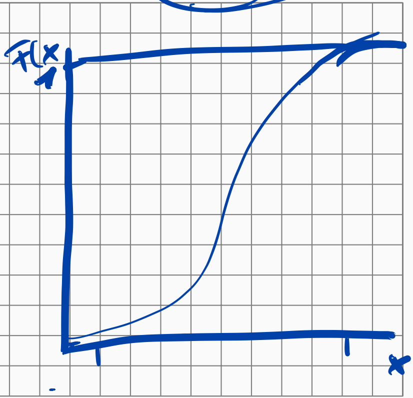
Ist X eine diskrete Zufallsvariable, dann gilt

$$F(x) = \sum_{x_i<x} f(x_i)$$

Ist X eine stetige Zufallsvariable, dann gilt

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x_i)dx$$

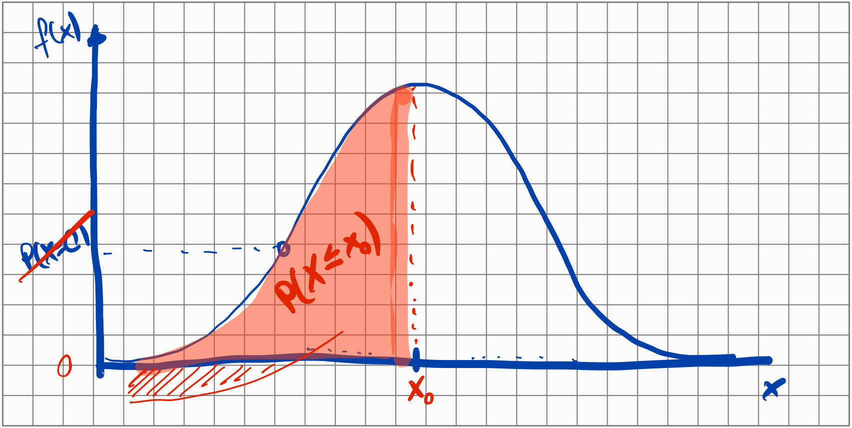




Dichtefunktion

Definition: Wahrscheinlichkeitsdichte bzw. Dichtefunktion.

Die Funktion $f(x)$ heißt bei **stetigen** Zufallsvariablen Wahrscheinlichkeitsdichte bzw. Dichtefunktion.



Eigenschaften Dichtefunktion

Für Wahrscheinlichkeits- und Dichtefunktionen gilt:

- Für alle x_i gilt, dass $f(x_i) \geq 0$.
- Für diskrete Verteilungen mit Wahrscheinlichkeitsfunktion gilt

$$\sum_{\text{alle } x_i} f(x_i) = 1$$

- Für stetige Verteilungen mit Dichtefunktion gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Eigenschaften Verteilungsfunktion

Für Verteilungsfunktionen gilt:

- $F(x)$ is monoton steigend
- $\lim_{x \to -\infty} F(X) = 0$
- $\lim_{x \to \infty} F(X) = 1$
- $F(x)$ is in jedem Punkt (zumindest rechtsseitig) stetig

Definition: Erwartungswert

Sei X eine Zufallsvariable und f die dazugehörige Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion. Der Erwartungswert μ ist definiert als

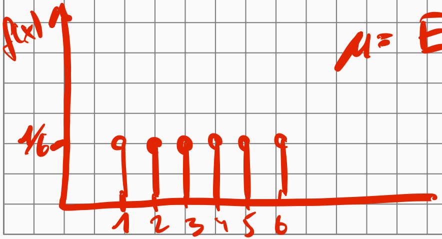
$$E(X) = \begin{cases} \sum_{\text{alle } x_i} x_i \cdot f(x_i), & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx, & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

- **Beispiel:** Definieren Sie die Zufallsvariable X für das Werfen eines Würfels und berechnen Sie deren Erwartungswert.

! **X:** Anzahl der Augen nach einem Würfelwurf eines normalen (fairen) 6 seitigen Würfels an!

$$X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

i	1	2	3	4	5	6
x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i) = P(x_i)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$



$$\mu = E(X) = \tfrac{1}{6}\cdot 1 + \tfrac{1}{6}\cdot 2 + \tfrac{1}{6}\cdot 3$$
$$= \tfrac{1}{6}\cdot 4 + \tfrac{1}{6}\cdot 5 + \tfrac{1}{6}\cdot 6$$
$$= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)$$
$$= \underline{\underline{3{,}5}}$$

Varianz

Definition: Varianz

Sei X eine Zufallsvariable und f die dazugehörige Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion. Die Varianz σ^2 (Standardabweichung: σ) ist definiert als

$$Var(X) = \begin{cases} \sum_{\text{alle } x_i} (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i), & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x)\, dx, & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

- **Beispiel:** Definieren Sie die Zufallsvariable X für das Werfen eines Würfels und berechnen Sie deren Varianz.

Varianz

4 NKS

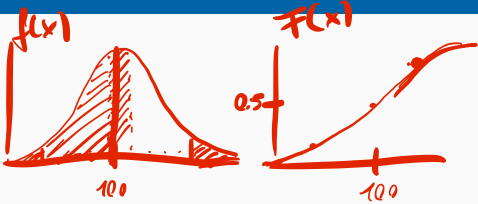
$Var(X)$ X: Anzahl der Augen beim Werfen eines fairen 6-seitigen Würfel

Bekannt: $E(X) = \mu = 3.5$

i	x_i	$f(x_i)$	$x_i - \mu$	$(x_i-\mu)^2$	$(x_i-\mu)^2 \cdot f(x_i)$
1	1	1/6	−2.5	6.25	1,0417
2	2	1/6	−1.5	2.25	0.375
3	3	1/6	−0.5	0.25	0,0417
4	4	1/6	0.5	0.25	0,0417
5	5	1/6	1.5	2.25	0,375
6	6	1/6	2.5	6.25	1,0417

$\approx \Sigma$ 2,9168

Verständnisfragen



1. Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine diskrete und eine stetige Zufallsvariable.
2. Erläutern Sie was man unter einer Verteilungsfunktion versteht.
3. Welches ist der maximale Wert, den eine Verteilungsfunktion annehmen kann?

$$F(x) = P(X \leq x)$$