

# **Statistik**

CH.5 - Kombinatorik

SS 2023 | | Prof. Dr. Buchwitz, Sommer, Henke

Wirgeben Impulse

# Lernziele

- Ziel 1
- Ziel 2
- Ziel 3

#### **Kombinatorik**

Die Kombinatorik ist das Teilgebiet der Mathematik, das sich mit dem Zählen von **Zusammenstellungen** von Elementen aus einer vorgegebenen endlichen Menge beschäftigt.

- In diesem Kapitel werden wir folgende Fragen beantworten, um sie dann im nächsten Kapitel als Hilfsmittel zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten einzusetzen:
  - ▶ Wie viele Möglichkeiten gibt es n Elemente anzuordnen?
  - ▶ Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus *n* Elementen *k* auszuwählen?

#### **Fakultäten**

#### **Definition: Fakultät**

n! bezeichnet das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen. Es gilt 0! = 1.

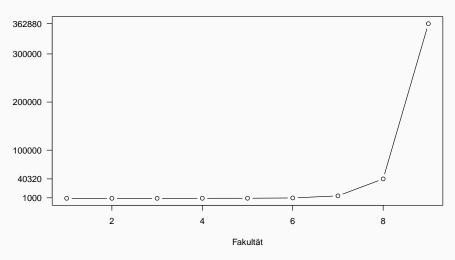
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

- Fakultäten wachsen mit steigendem n sehr schnell stark an.
- Beispiel: 3! = 6 und 6! = 720
- R-Funktion: factorial()

4

## **Fakultäten**

#### Wachstum der Fakultäten



### **Binomialkoeffizient**

#### **Definition: Binomialkoeffizient**

Der Binomialkoeffizient ist für n > 0,  $k \ge 0$  und  $n \ge k$  definiert als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n+1-k)}{k!}$$

- Der Binomialkoeffizient gibt an, auf wie viele verschiedene Arten man k
   Elemente aus einer begrenzten Menge von n Elementen auswählen kann.
- Der Binomialkoeffizient ist symmetrisch, es gilt  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .
- R-Funktion: choose()

6

# **Binomialkoeffizient**

## Formel:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

## Rechenregeln:

a) 
$$\binom{n}{1} = n$$
 für  $n \ge 0$ 

$$\binom{n}{n} = 1$$

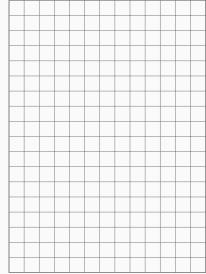
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
 für  $k \le n$ 

d) 
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

e) 
$$\binom{n}{0} = 1$$
 für  $n \ge 0$ 

f) 
$$\binom{n}{k} = 0$$
 für  $k > n$ 

# Aufgabe: a) $\binom{8}{3}$ b) $\binom{10}{5}$ c) $\binom{12}{8}$



#### **Permutationen**

#### **Definition: Permutation**

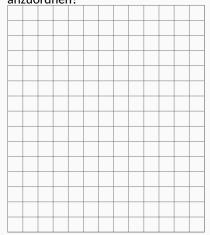
Jede Zusammenstellung aus einer Menge mit *n* Elementen, die dadurch entsteht, dass man die gegebenen Elemente in **beliebiger** Reihenfolge aufreiht, heißt eine *Permutation* dieser Elemente.

- Sind alle n Elemente verschieden, so ergibt sich die Anzahl der Permutationen  $P_n = n!$
- Lassen sich die *n* Elemente in *k* Klassen einteilen, wird die Anzahl der Permutationen wie folgt berechnet  $P_n^{n_1,n_2,...,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$
- R-Funktion: permutations() aus dem Zusatzpaket gtools

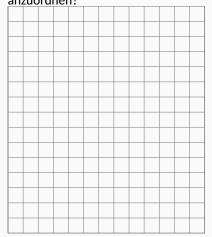
۶

#### **Permutationen**

**Beispiel 1:** Wie viele Möglichkeiten gibt es, drei verschiedenfarbige Kugeln anzuordnen?



**Beispiel 2:** Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei gelbe und eine rote Kugel anzuordnen?



#### **Permutationen**

# **Beispiel 1:** Wie viele Möglichkeiten gibt es, drei verschiedenfarbige Kugeln anzuordnen?

```
## [,1] [,2] [,3]

## [1,] "red" "blue" "green"

## [2,] "red" "green" "blue"

## [4,] "blue" "green" "red" "green"

## [5,] "green" "red" "blue"

## [6,] "green" "blue" "red"
```

# **Beispiel 2:** Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei gelbe und eine rote Kugel anzuordnen?

```
## [,1] [,2] [,3]
## [1,] "red" "yellow" "yellow"
## [2,] "yellow" "red" "yellow"
## [3,] "yellow" "yellow" "red"
```

#### Kombinationen

#### **Definition: Kombination**

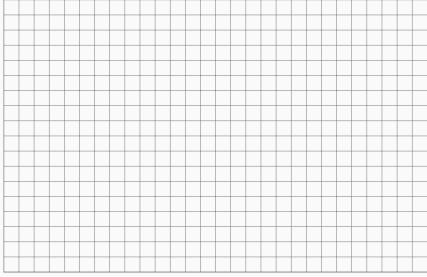
Jede Zusammenstellung aus k Elementen einer Menge mit n Elementen mit k < n heißt Kombination k-ter Ordnung aus den n Elementen.

#### Kombinationen können wie folgt unterschieden werden:

- **Reihenfolge:** Gelten zwei Kombinationen mit genau denselben *k* Elementen, aber in verschiedener Reihenfolge als verschiedenen, so spricht man von *Variationen* (Kombinationen mit Berücksichtigung der Reihenfolge).
- **Wiederholung:** Dürfen die *k* Elemente nur einmal vorkommen (keine Mehrfachauswahl des gleichen Elements), so spricht man von *Kombinationen ohne Wiederholung* (ohne Zurücklegen).
- R-Funktion: combinations() aus dem Zusatzpaket gtools und expand.grid()

## Kombinationen

**Vier Möglichkeiten:** Wählen von 2 aus 3 verschiedenartigen Kugeln mit/ohne Wiederholung und mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.



#### Kombinationen

```
balls <- c("red", "blue", "green")
                                                                  balls <- c("red", "blue", "green")
# Mit Wiederholung
                                                                  # Ohne Wiederholung
## und mit Reihenfolge
                                                                  ## und mit Reihenfolge
mwmr <- expand.grid(balls,balls)</pre>
                                                                  owmr <- mwmr[mwmr$Var1 != mwmr$Var2, ]
nrow(mwmr)
                                                                  nrow(owmr)
## [1] 9
                                                                  ## [1] 6
## und ohne Reihenfolge
                                                                  ## und ohne Reihenfolge
mwor <- combinations(v=balls, n=3, r=2,
                                                                  owor <- combinations(v=balls, n=3, r=2,
                     repeats = T)
                                                                                        repeats = F)
nrow(mwor)
                                                                  nrow(owor)
## [1] 6
                                                                  ## [1] 3
```

# Zusammenfassung

	Permutationen	Kombinationen	
	Reihenfolge berücksichtigt		ohne Reihenfolge
ohne Wiederholung	$P_n = n!$	$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \binom{n}{k}$
mit Wiederholung	$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$	$V_{w,n}^k = n^k$	$C_{w,n}^k = \binom{n+k-1}{k}$

# Verständnisfragen

- Wieso wird bei Permutationen hinsichtlich der Reihenfolge unterschieden?
- Wann wird eine Kombination Variation genannt?
- Wie hoch sind die Gewinnchancen beim Lotto?