Fachhochschule Südwestfalen
University of Applied Sciences

Statistik

CH.11 - Hypothesentests

SS 2021 || Prof. Dr. Buchwitz, Sommer, Henke

Wir geben Impulse

Outline

Bitte evaluieren Sie den Kurs!

http://evasys.fh-swf.de/evasys/online.php?pswd=64D4W

Outline

Ausgangslage

Vorgehen Hypothesentests

1. Formulieren Sie Nullhypothese H_0 und Alternativhypothese H_1.
2. Legen Sie ein Signifikanzniveau α fest.
3. Wählen Sie die passende Teststatistik.
4. Bestimmen Sie den Wert der Teststatistik, ab dem die Nullhypothese verworfen werden muss.
5. Bestimmen Sie den Vergleichswert aus den Stichprobendaten.
6. Entscheiden Sie durch Vergleich der Werte aus (4) und (5), ob Sie die Nullhypothese verwerfen können.

Outline

Tests für den Mittelwert bei bekannter Varianz

Test	H_0	H_1	Teststatistik	Verwerfe H_0, wenn gilt:
Beidseitig	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$		$\mid z \mid > z_{1-\alpha/2}$
Rechtsseitig	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$z > z_{1-\alpha}$
Linksseitig	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$z < z_{\alpha}$

Tests für den Mittelwert bei unbekannter Varianz

Test	H_0	H_1	Teststatistik	Verwerfe H_0, wenn gilt:
Beidseitig	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$		$\mid t \mid > t_{n-1,\, 1-\alpha/2}$
Rechtsseitig	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$	$t > t_{n-1,\, 1-\alpha}$
Linksseitig	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$t < t_{n-1,\, \alpha}$

- **R-Funktion:** `t.test()`

Outline

Tests für den Anteilswert

Test	H_0	H_1	Teststatistik	Verwerfe H_0, wenn gilt:
Beidseitig	$\pi = \pi_0$	$\pi \neq \pi_0$	$z = \frac{p-\pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$	$\mid z \mid > z_{1-\alpha/2}$
Rechtsseitig	$\pi \leq \pi_0$	$\pi > \pi_0$		$z > z_{1-\alpha}$
Linksseitig	$\pi \geq \pi_0$	$\pi < \pi_0$		$z < z_{\alpha}$

- **R-Funktion:** `prop.test()`

Beispiel

Aufgabe: Ein Schraubenproduzent behauptet, dass seine Lieferung eines speziellen Schraubentyps einen Ausschussanteil von höchstens 1% enthält. Der Empfänger der Lieferung ist jedoch der Meinung,dass der Anteil höher ist. Er nimmt eine Stichprobe von 1000 Schrauben und findet in dieser 15 nicht den Anforderungen entsprechende Schrauben.

- Kann die Behauptung des Lieferanten mit dieser Stichprobe bei einem Signifikanzniveau von α = 0.05 widerlegt werden?
- **Hinweis:** Verteilungstabelle siehe nächste Seite.

Verteilungsfunktion $F(z)$ für $z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$

Verteilungsfunktion $F(z)$ **der Standardnormalverteilung** $N(0, 1)$

Beispiel: $F(z) = P(z \leq 1.96) = 0.9750$

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916

Outline

Verteilungstest

- **Ausgangssituation:** Es liegen Daten von zwei oder mehr **unabhägngig** gewonnenen Stichproben vor.
- **Ziel:** Zwei (oder mehrere) Grundgesamtheiten sollen hinsichtlich ihrer *Verteilung* verglichen werden.
- **Analytische Fragestellung:** Weichen die beiden *empirischen Verteilungen* so sehr voneinander ab, dass die Nullhypothese verworfen werden muss?

$$H_0 : F_1 = F_2 = \ldots = F_k$$

- **Folge:** Wenn H_0 verworfen werden muss, dann kann man davon ausgehen, dass die Stichproben nicht die selbe Verteilungsfunktion aufweisen und infolgedessen nicht aus der gleichen Grundgesamtheit stammen.

An einer Hochschule wurde in einer Befragung von 1529 Studierenden ermittelt, ob die Studierenden in den Semesterferien einem Ferienjob nachgehen.

	male	female	Sum
Job	718	593	1311
No Job	79	139	218
Sum	797	732	1529

Unterscheidet sich das Verhalten von männlichen und weiblichen Studierenden signifikant (α = 5)?

Chi-Quadrat Test

- **Voraussetzung:** Jede Zelle muss mindestens 5 Beobachten enthalten.
- **Vorgehensweise:** 6-Schritte Schema für das Testen von Hypothesen
- **Teststatistik:** Die $\mathcal{X}^2$ Teststatistik setzt die Abweichungen von beobachteten (f_o) und erwarteten f_e Häufigkeiten in Relation zu den erwarteten Häufigkeiten:

$$\mathcal{X}^2 = \sum_{\text{alle Zellen}} \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$$

- Die $\mathcal{X}^2$ Teststatistik folg einer $\mathcal{X}^2$ Verteilung mit $(r-1) \cdot (s-1)$

Chi-Quadrat Test

- Die **erwarteten** Häufigkeiten ergeben sich als:

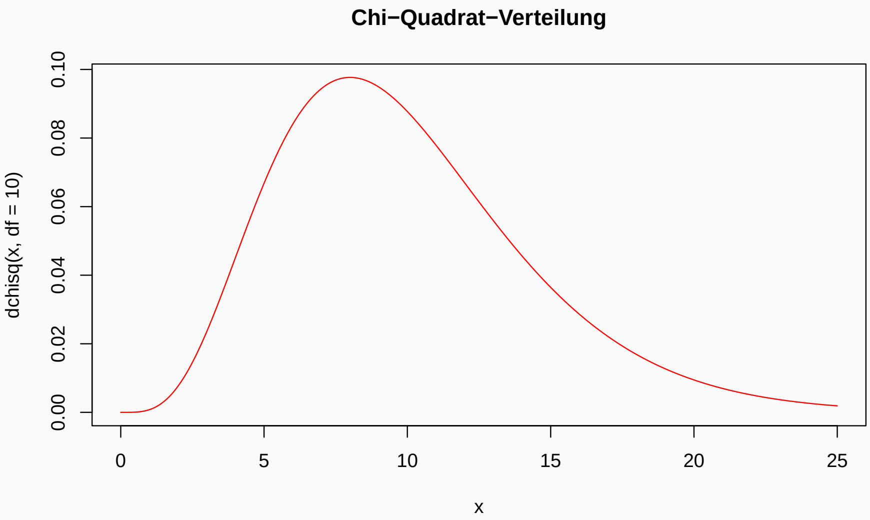
$$\frac{\sum \text{Saplte} \cdot \sum \text{Zeile}}{\text{Gesamtanzahl}}$$

- Die Nullhypothese lautet stets:

$$H_0 : F_1 = F_2 = \ldots = F_k$$

- Es handelt sich hier immer um einen **rechtsseitigen Test**.

$\mathcal{X}^2$ Verteilung



Quantile der $\mathcal{X}^2_{n;\,\gamma}$ Verteilung

Quantile $\mathcal{X}^2_{n;\,\gamma}$ der $\mathcal{X}^2_n$-Verteilung

Beispiel: $P(\mathcal{X}^2_{10} \leq 20.4832) = 0.975$

$n \setminus \gamma$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75	0.5	0.25	
1	7.8794	6.6349	5.0239	3.8415	2.7055	1.3233	0.4549	0.1015	0.0
2	10.5966	9.2103	7.3778	5.9915	4.6052	2.7726	1.3863	0.5754	0.2
3	12.8382	11.3449	9.3484	7.8147	6.2514	4.1083	2.3660	1.2125	0.5
4	14.8603	13.2767	11.1433	9.4877	7.7794	5.3853	3.3567	1.9226	1.0
5	16.7496	15.0863	12.8325	11.0705	9.2364	6.6257	4.3515	2.6746	1.6
6	18.5476	16.8119	14.4494	12.5916	10.6446	7.8408	5.3481	3.4546	2.2
7	20.2777	18.4753	16.0128	14.0671	12.0170	9.0371	6.3458	4.2549	2.8
8	21.9550	20.0902	17.5345	15.5073	13.3616	10.2189	7.3441	5.0706	3.4
9	23.5894	21.6660	19.0228	16.9190	14.6837	11.3888	8.3428	5.8988	4.1
10	25.1882	23.2093	20.4832	18.3070	15.9872	12.5489	9.3418	6.7372	4.8
11	26.7568	24.7250	21.9200	19.6751	17.2750	13.7007	10.3410	7.5841	5.5
12	28.2995	26.2170	23.3367	21.0261	18.5493	14.8454	11.3403	8.4384	6.3
13	29.8195	27.6882	24.7356	22.3620	19.8119	15.9839	12.3398	9.2991	7.0
14	31.3193	29.1412	26.1189	23.6848	21.0641	17.1169	13.3393	10.1653	7.7
15	32.8013	30.5779	27.4884	24.9958	22.3071	18.2451	14.3389	11.0365	8.5
16	34.2672	31.9999	28.8454	26.2962	23.5418	19.3689	15.3385	11.9122	9.3
17	35.7185	33.4087	30.1910	27.5871	24.7690	20.4887	16.3382	12.7919	10.0
18	37.1565	34.8053	31.5264	28.8693	25.9894	21.6049	17.3379	13.6753	10.8
19	38.5823	36.1909	32.8523	30.1435	27.2036	22.7178	18.3377	14.5620	11.6
20	39.9968	37.5662	34.1696	31.4104	28.4120	23.8277	19.3374	15.4518	12.4
21	41.4011	38.9322	35.4789	32.6706	29.6151	24.9348	20.3372	16.3444	13.2
22	42.7957	40.2894	36.7807	33.9244	30.8133	26.0393	21.3370	17.2396	14.0
23	44.1813	41.6384	38.0756	35.1725	32.0069	27.1413	22.3369	18.1373	14.8

Outline

Unabhängigkeitstest

- $\mathcal{X}^2$ Tests können auch verwendet werden um die Fragen zu beantworten, ob **zwei Merkmale unabhängig voneinander sind**.
- Im **Beispiel:** Ist die Annahme von Ferienjobs abhängig vom Geschlecht der Studierenden?
- Hypothesen:
  - H_0 : Annahme von Ferienjobs und Geschlecht sind voneinander **unabhängig**.
  - H_1 : Annahme von Ferienjobs und Geschlecht sind voneinandern **ab**hängig.

Verständnisfragen

1. Wozu können $\mathcal{X}^2$ Tests verwendet werden?
2. wie müssen Null- und Alternativhypothese beim $\mathcal{X}^2$ Test ausgestaltet werden?
3. Welches Sklaenniveau müssen die Merkmale aufweisen um im $\mathcal{X}^2$ Test verwendet werden zu können?