

# Statistik

CH.11 - Regression

SS 2021 || Prof. Dr. Buchwitz, Sommer, Henke

Wir geben Impulse

- **Ziel:** Erkennen von Abhängigkeiten und Zusammenhängen zwischen mehreren Merkmalen und Modellierung der Effektgrößen der Zusammenhänge.
- **Beispiele:**
  - Umsatz und Werbeetat einer Supermarktkette: *Hängt der Umsatz von den eingesetzten Werbemitteln ab?*
  - Körpergröße und Gewicht von Personen: *Ist das Gewicht einer Person von dessen Körpergröße abhängig?*
  - Benzinpreis und Mineralölpreis: *Ist der deutsche Benzinpreis eine Funktion des globalen Mineralölpreises?*

## Sind die beiden gezeigten Größen voneinander Abhängig?

##		x	y
##	[1,]	5.310173	32.24161
##	[2,]	7.442478	35.41568
##	[3,]	11.457067	41.15682
##	[4,]	18.164156	52.87679
##	[5,]	4.033639	28.82066
##	[6,]	17.967794	53.04090
##	[7,]	18.893505	50.24641
##	[8,]	13.215956	44.26326
##	[9,]	12.582281	44.81691
##	[10,]	1.235725	27.18693
##	[11,]	4.119491	33.18971
##	[12,]	3.531135	30.15394
##	[13,]	13.740457	46.86971
##	[14,]	7.682074	39.23753
##	[15,]	15.396828	46.36786
##	[16,]	9.953985	36.71948
##	[17,]	14.352370	46.64537
##	[18,]	19.838122	54.16792
##	[19,]	7.600704	35.04383
##	[20,]	15.548904	47.24008
##	[21,]	18.694105	51.41748

### Datenbeschreibung

x Berufserfahrung in Jahren

y Gehalt in Euro

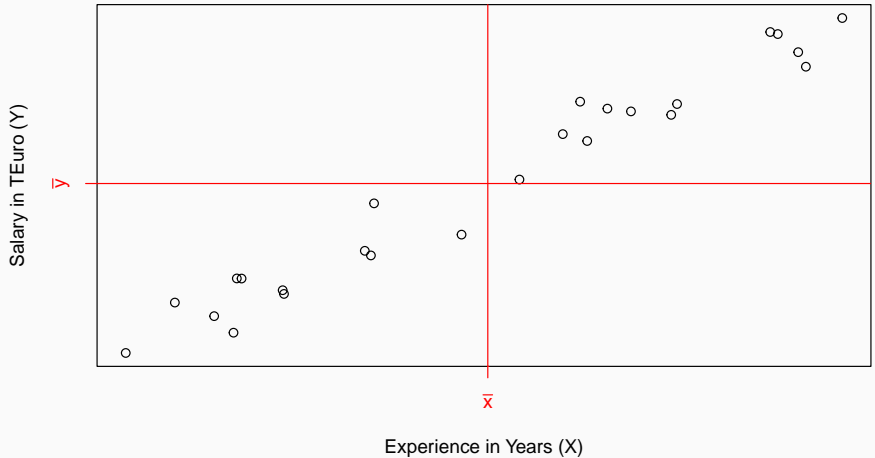
# Sind die beiden gezeigten Größen voneinander Abhängig?



$$Y = f(X) + \epsilon$$

- Wir betrachten zunächst den einfachen Fall, bei dem die abhängige Variable  $Y$  durch **eine** unabhängige Variable  $X$  erklärt wird. Unabhängige Variablen bezeichnet man auch als Regressoren oder Prädiktoren.
- $\epsilon$  bezeichnet den Anpassungsfehler und wird Fehlerterm oder Residuum genannt.
- Wir verzichten auf die vollständige Herleitung der gezeigten Formeln und fokussieren auf die zugrundeliegenden Mechanismen und die zugehörige Intuition.

Salary vs. Experience



## Aufgabe: Bestimmen des Vorzeichens

- $y_i - \bar{y}$  ist die Differenz jeder Beobachtung  $y_i$  vom arithmetischen Mittel der abhängigen Variablen
- $x_i - \bar{x}$  ist die Abweichung  $x_i$  vom arithmetischen Mittel des Prädiktors
- $(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$  ist das Produkt der vorherigen beiden Größen

Quadrant	$y_i - \bar{y}$	$x_i - \bar{x}$	$(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$
1 (top right)			
2 (top left)			
3 (bottom left)			
4 (bottom right)			

## Positiver Zusammenhang

- Wenn der Zusammenhang zwischen  $Y$  und  $X$  **positiv** ist (also wenn  $X$  größer wird, dann wird auch  $Y$  größer), dann sind mehr Datenpunkte im ersten und dritten Quadranten als im zweiten und vierten.
- Die Summe der Elemente in der letzten Spalte der vorherigen Tabelle ist dann mit großer Wahrscheinlichkeit positiv, also  $\text{Cov}(Y, X) > 0$ .



## Positiver Zusammenhang

- Wenn der Zusammenhang zwischen  $Y$  und  $X$  **positiv** ist (also wenn  $X$  größer wird, dann wird auch  $Y$  größer), dann sind mehr Datenpunkte im ersten und dritten Quadranten als im zweiten und vierten.
- Die Summe der Elemente in der letzten Spalte der vorherigen Tabelle ist dann mit großer Wahrscheinlichkeit positiv, also  $\text{Cov}(Y, X) > 0$ .

## Negativer Zusammenhang

- Wenn der lineare Zusammenhang zwischen  $Y$  und  $X$  **negativ** ist (z.B. wenn  $X$  sinkt, steigt  $Y$ ), dann befinden sich mehr Datenpunkte im zweiten und vierten Quadranten als im ersten und dritten.
- Die Summe der Elemente in der letzten Spalte der vorherigen Tabelle ist dann mit großer Wahrscheinlichkeit negativ, also  $\text{Cov}(Y, X) < 0$ .

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$$

- Die aufwändig berechnete Größe ist die Kovarianz zwischen Y und X.
- Das Vorzeichen der Kovarianz gibt die Richtung des Zusammenhangs zwischen Y und X an.
- Die Kovarianz gibt **nur die Richtung des Zusammenhangs an** und erlaubt keine Beurteilung der Stärke dieses Zusammenhangs.
- Die Kovarianz verändert sich mit Veränderungen der Einheit der Daten (z.B. von Euro in TEuro).

## Your turn

Wie ändert sich die Kovarianz, wenn Sie  $\text{Cov}(X, Y)$  anstelle von  $\text{Cov}(Y, X)$  berechnen?

$$\text{Cor}(Y, X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - \bar{y}}{s_y} \right) \left( \frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \right) = \frac{\text{Cov}(Y, X)}{s_y s_x}$$

- $\text{Cor}(Y, X)$  kann auf zwei Arten interpretiert werden:
  - als Kovarianz der z-Standardisierten Variablen  $X$  und  $Y$ .
  - als Verhältnis von Kovarianz zum Produkt der Standardabweichungen der Variablen.
- Im Gegensatz zur Kovarianz ist  $\text{Cor}(Y, X)$  skaleninvariant mit einem Wertebereich von  $-1 \geq \text{Cor}(Y, X) \geq 1$  und erlaubt daher die Beurteilung von **Richtung** und **Stärke** des Zusammenhangs.

```
cov(y, x)
```

```
## [1] 49.66758
```

```
cor(y, x)
```

```
## [1] 0.9810286
```

## Verwendung des Zusammenhangs

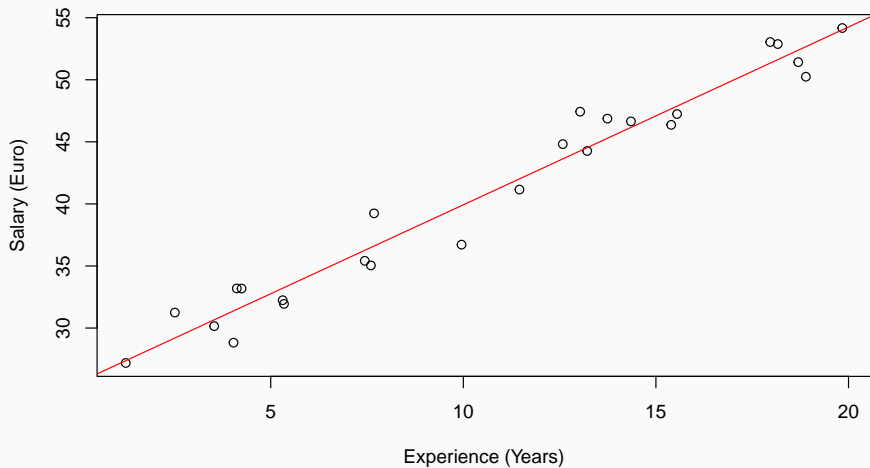
Kovarianz und Korrelationskoeffizient können nicht für Vorhersagen (X gegeben und Y gesucht) verwendet werden!

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$$

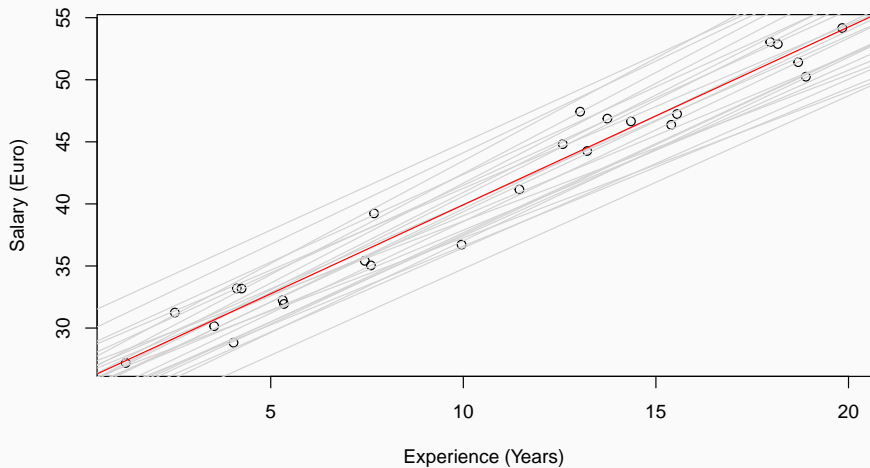
- Regressionsanalyse ist eine Erweiterung der Korrelationsanalyse und erlaubt es den Zusammenhang zwischen abhängiger und unabhängigen Variablen numerisch zu beschreiben.
- $\beta_0$  und  $\beta_1$  sind konstanten die als **Regressionskoeffizienten** bezeichnet werden,  $\epsilon$  ist der Fehlerterm
  - $\beta_0$  ist der Achsenabschnitt und ist der vorhergesagte Wert, wenn  $X = 0$ .
  - $\beta_1$  ist die Steigung und kann interpretiert werden als Änderung in  $Y$ , wenn  $X$  sich um eine Einheit erhöht.

Wie bestimmen wir  
Werte für  $\beta_0$  und  $\beta_1$ ?

**Salary vs. Experience**



**Salary vs. Experience**





## Residuen: Wieso ist die eingezeichnete Gerade optimal?



## Residuen: Wieso ist die eingezeichnete Gerade optimal?



Minimieren: 
$$S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_0 + \beta_1 \cdot x_i))^2$$

$$S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_0 + \beta_1 \cdot x_i))^2$$

- Die quadratische Funktion  $S(\beta_0, \beta_1)$  muss minimiert werden und liefert dann die Lösung  $\hat{\beta}_0$  und  $\hat{\beta}_1$ . Diese Werte werden zuweilen auch mit  $b_0$  und  $b_1$  bezeichnet.
- Die Werte  $\hat{\beta}_0 = b_0$  und  $\hat{\beta}_1 = b_1$  werden **Kleinste-Quadrate-Schätzer** (Ordinary Least Squares Estimates, OLS Estimates) genannt und spezifizieren die Gerade mit der kleinsten möglichen Summe der quadrierten vertikalen Distanzen zu den Beobachtungen.

- Die mit der Methode der kleinsten Quadrate bestimmten Regressionslinie existiert immer und ist gegeben durch:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$$

- Mit Hilfe der Beobachtungsgleichung können die angepassten Werte (fitted Values) berechnet werden:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n$$

- Jeder Punkt  $(x_i, \hat{y}_i)$  **liegt auf der Regressionsgerade.**
- Die zugehörigen Residuen (Ordinary Least Squares Residuals) geben die vertikale Distanz zwischen Beobachtung und Gerade (Anpassungsfehler) an und können wie folgt berechnet werden:

$$\hat{\epsilon}_i = y_i - \hat{y}_i \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n$$

- Für die Lösung des Minimierungsproblems gibt es eine analytische Lösung:

$$\hat{\beta}_1 = b_1 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{und} \quad \hat{\beta}_0 = b_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

## Herleitung der Formeln:

- Minimierung der quadratischen Funktion  $S(\beta_0, \beta_1)$  mit Hilfe der Differentialrechnung
- Bildung der partiellen Ableitungen nach  $b_0$  und  $b_1$
- Setzen der Ableitungen = 0
- Lösen des resultierenden Gleichungssystems
- Die gezeigten Formeln sind die erhaltene Lösung

# Lineare Regression

```
summary(x) # Experience in Years
```

```
##      Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##  1.236   5.310   11.457  10.636   15.397   19.838
```

```
summary(y) # Salary in Euro
```

```
##      Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##  27.19   33.18   41.16   40.84   47.24   54.17
```

```
cor(y,x)
```

```
## [1] 0.9810286
```

```
lm(y ~ 1 + x)
```

```
##
```

```
## Call:
```

```
## lm(formula = y ~ 1 + x)
```

```
##
```

```
## Coefficients:
```

```
## (Intercept)          x
```

```
##      25.601      1.433
```

- Die bestimmte Gerade beschreibt die Daten der **Stichprobe**. Interessant ist jedoch die Frage ob der Zusammenhang auch verallgemeinert werden und für die Grundgesamtheit angenommen werden kann.
- Prüfen der Hypothese  $\beta_1 = 0$  is equivalent zur Aussage, dass **kein linearer Zusammenhang** vorhanden ist.
- Sollte  $\beta_1 > 0$  oder  $\beta_1 < 0$  gelten (Annahme der entsprechenden Alternativhypothese) liefert **Evidenz** (keinen Beweis) für die Existenz eines linearen Zusammenhangs.

- Unter der Annahme, dass die Residuen **unabhängig und gleich verteilt** (i.i.d.) sind ( $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$ ), kann die Residualvarianz  $\sigma^2$  geschätzt werden.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \epsilon_i^2}{n - 2} = \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2} = \frac{SSE}{n - 2}$$

- Mit Hilfe der geschätzten Residualvarianz  $\hat{\sigma}^2$  kann der Standardfehler (s.e.) der Regressionsparameter geschätzt werden.

$$s.e.(\hat{\beta}_0) = \hat{\sigma}^2 \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}} \quad \text{and} \quad s.e.(\hat{\beta}_1) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$$



- Unter der Annahme der Normalverteilung kann der  $t$ -Tests für die Regressionskoeffizienten durchgeführt werden:

$$H_0 : \beta_1 = 0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \beta_1 \neq 0$$

- Die Teststatistik  $t$  folgt einer  $t$ -Verteilung mit  $n-2$  Freiheitsgraden. Ergänzend muss noch eine Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  für den Test festgelegt werden.

$$t_1 = \frac{\hat{\beta}_1}{s.e.(\hat{\beta}_1)}$$

- Die Nullhypothese  $\beta_1 = 0$  kann für eine gegebene Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  verworfen werden, wenn gilt:

$$|t| \geq t_{(n-2, 1-\alpha/2)}$$

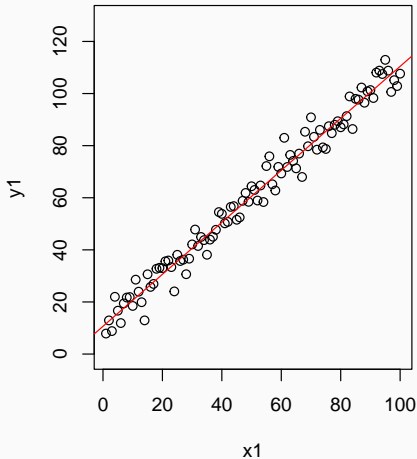
# Lineare Regression

```
summary(lm(y ~ 1 + x))
```

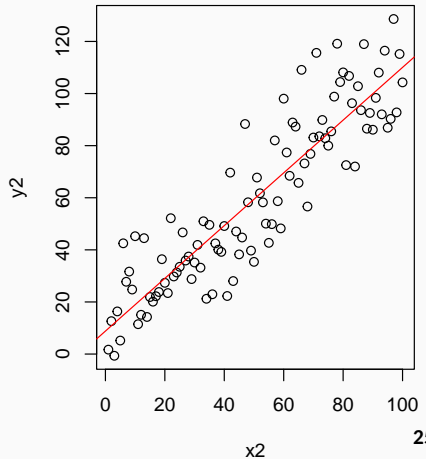
```
##
## Call:
## lm(formula = y ~ 1 + x)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -3.1407 -0.9661 -0.2699  1.5024  3.1583
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  25.60062    0.71422   35.84  <2e-16 ***
## x            1.43255    0.05903   24.27  <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.703 on 23 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9624, Adjusted R-squared:  0.9608
## F-statistic: 589 on 1 and 23 DF, p-value: < 2.2e-16
```

Welche Gerade hat eine höhere Anpassungsgüte und bildet daher den Sachverhalt in den Daten präziser ab?

(a)



(b)



## Definition von Streuungsgrößen:

$$SST = \sum (y_i - \bar{y})^2 \quad SSR = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad SSE = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$$

- Sum of Squares Total (SST) ist die gesamte Abweichung von Y vom zugehörigen arithmetischem Mittel  $\bar{y}$ .
- Sum of Squares Regression (SSR) ist die erklärte Variation, die durch die Regressionsgerade abgebildet werden kann
- Sum of Squares Error (SSE) ist die unerklärte Streuung und die Varianz der Residuen.

- **SSR**, misst die Qualität von  $X$  als Prädiktor für  $Y$
- **SSE**, misst den Fehler in dieser Prädiktion
- Das Verhältnis  $R^2 = SSR/SST$  ist der Anteil der durch  $X$  erklärten Varianz and der totalen Varianz. Zur Beurteilung der Anpassungsgüte einer Regressionsgerade kann entsprechend das Bestimmtheitsmaß  $R^2$  herangezogen werden.

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} = [Cor(Y, \hat{Y})]^2$$

- Es gilt  $0 \leq R^2 \leq 1$  und je näher  $R^2$  an 1 liegt, desto intensiver ausgeprägt ist der lineare Zusammenhang.

Im Fall von nur einem einzigen Prädiktor gilt zudem  $[Cor(Y, X)]^2$ !

# Lineare Regression

```
summary(lm(y ~ 1 + x))

##
## Call:
## lm(formula = y ~ 1 + x)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -3.1407 -0.9661 -0.2699  1.5024  3.1583
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  25.60062    0.71422   35.84  <2e-16 ***
## x            1.43255    0.05903   24.27  <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.703 on 23 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9624, Adjusted R-squared:  0.9608
## F-statistic: 589 on 1 and 23 DF, p-value: < 2.2e-16
```

- Wozu wird die Methoden der linearen Regression verwendet?
- Was ist die zugrundeliegende Methodik zu bestimmung der Parameter der Regressionsgerade?
- Wozu dient das Bestimmtheitsmaß  $R^2$ .