Fachhochschule Südwestfalen
University of Applied Sciences

Statistik

CH.5 - Kombinatorik

SS 2021 || Prof. Dr. Buchwitz, Sommer, Henke

Die Kombinatorik ist das Teilgebiet der Mathematik, das sich mit dem Zählen von **Zusammenstellungen** von Elementen aus einer vorgegebenen endlichen Menge beschäftigt.

- In diesem Kapitel werden wir folgende Fragen beantworten, um sie dann im nächsten Kapitel als Hilfsmittel zur **Berechnung von Wahrscheinlichkeiten** einzusetzen:
  - Wie viele Möglichkeiten gibt es n Elemente anzuordnen?
  - Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus n Elementen k auszuwählen?

Fakultäten

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

Definition: Fakultät

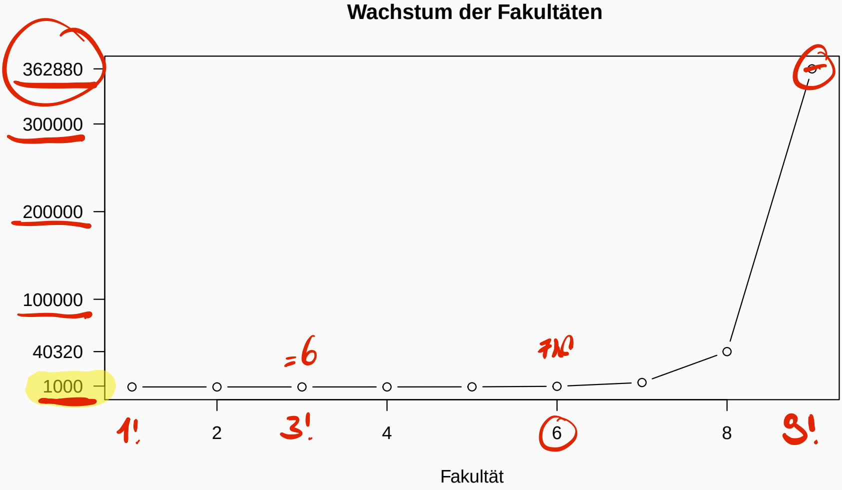
$n!$ bezeichnet das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen. Es gilt $0! = 1$.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

- Fakultäten wachsen mit steigendem n sehr schnell stark an.
- Beispiel: $3! = 6$ und $6! = 720$
- **R-Funktion:** `factorial()`

Fakultäten

9! · 10 ≈ 3,62 mio 10!



Binomialkoeffizient

Definition: Binomialkoeffizient

Der Binomialkoeffizient ist für $n > 0$, $k \geq 0$ und $n \geq k$ definiert als

n über k

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n+1-k)}{k!}$$

- Der Binomialkoeffizient gibt an, auf wie viele verschiedene Arten man k Elemente aus einer begrenzten Menge von n Elementen auswählen kann.
- Der Binomiakoeffizient ist symmetrisch, es gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- **R-Funktion:** `choose()`

nCr

Binomialkoeffizient

Formel:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Rechenregeln:

a) $\binom{n}{1} = n$ für $n \geq 0$

b) $\binom{n}{n} = 1$

c) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für $k \leq n$

d) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

e) $\binom{n}{0} = 1$ für $n \geq 0$

f) $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$

Aufgabe: a) $\binom{8}{3}$ b) $\binom{10}{5}$ c) $\binom{12}{8}$

a) $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,(8-3)!}$

$= \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8\cdot7\cdot6}{3!}$

$= \frac{8\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{6}}{\cancel{1\cdot2\cdot3}} = 56$

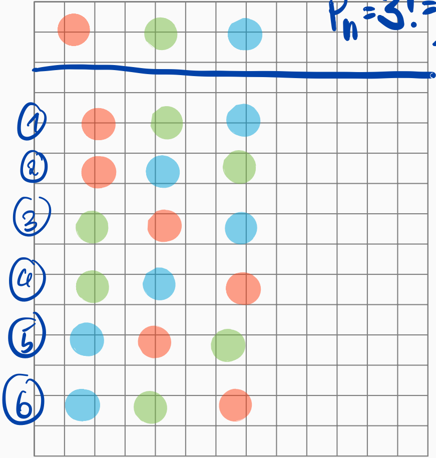
$\frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\cancel{(1\cdot2\cdot3)}\,\cancel{(5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)}}$

Definition: Permutation

Jede Zusammenstellung aus einer Menge mit n Elementen, die dadurch entsteht, dass man die gegebenen Elemente in **beliebiger** Reihenfolge aufreiht, heißt eine *Permutation* dieser Elemente.

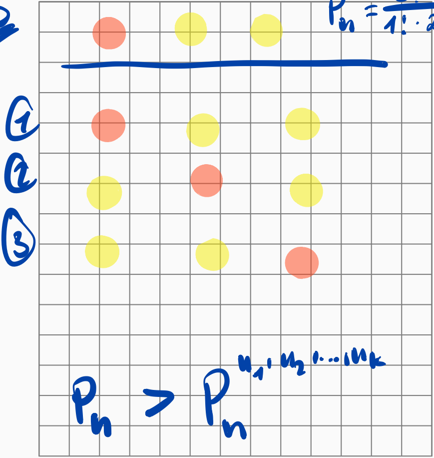
- Sind alle n Elemente verschieden, so ergibt sich die Anzahl der Permutationen $P_n = n!$
- Lassen sich die n Elemente in k Klassen einteilen, wird die Anzahl der Permutationen wie folgt berechnet: $P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$
- **R-Funktion:** `permutations()` aus dem Zusatzpaket `gtools`

Beispiel 1: Wie viele Möglichkeiten gibt es drei verschiedenfarbige Kugeln anzuordnen?



$P_n = 3! = 6$

Beispiel 2: Wie viele Möglichkeiten gibt es zwei gelbe und eine rote Kugel anzuordnen?



$P_n^{1,2} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$

$P_n > P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}$

Permutations

Beispiel 1: Wie viele Möglichkeiten gibt es drei verschiedenfarbige Kugeln anzuordnen?

```r
library(gtools)
balls <- c("red", "blue", "green")
p <- permutations(v=balls, n=3, r=3,
                  set=F, repeats = F)
p
```

```
##      [,1]    [,2]    [,3]
## [1,] "red"   "blue"  "green"
## [2,] "red"   "green" "blue"
## [3,] "blue"  "red"   "green"
## [4,] "blue"  "green" "red"
## [5,] "green" "red"   "blue"
## [6,] "green" "blue"  "red"
```

Beispiel 2: Wie viele Möglichkeiten gibt es zwei gelbe und eine rote Kugel anzuordnen?

install.packages("gtools")

```r
library(gtools)
balls <- c("red", "yellow", "yellow")
p <- permutations(v=balls, n=3, r=3,
                  set=F, repeats = F)
unique(p)
```

```
##      [,1]     [,2]     [,3]
## [1,] "red"    "yellow" "yellow"
## [2,] "yellow" "red"    "yellow"
## [3,] "yellow" "yellow" "red"
```

Kombinationen

Definition: Kombination

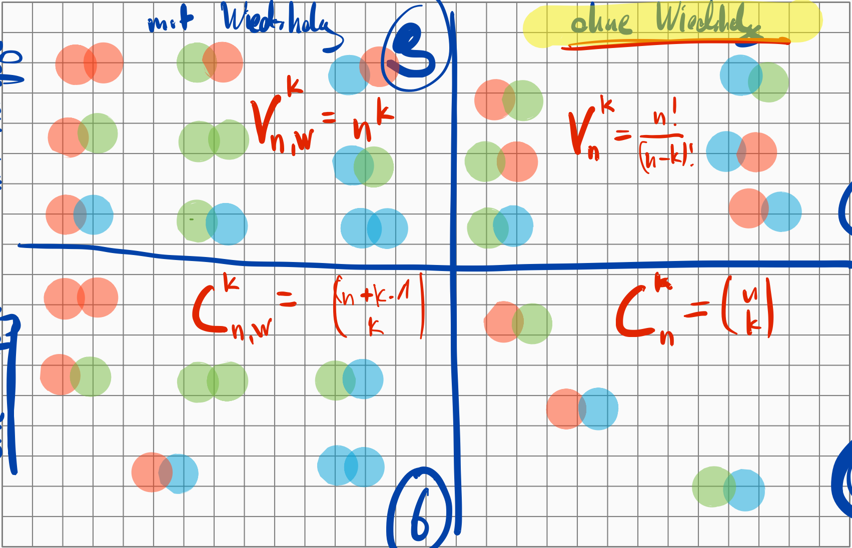
Jede Zusammenstellung, aus k Elementen einer Menge mit n Elementen mit $k < n$ heißt Kombination k-ter Ordnung aus den n Elementen.

Kombinationen können wie folgt unterschieden werden:

- **Reihenfolge:** Gelten zwei Kombinationen mit genau denselben k Elementen aber in verschiedener Reihenfolge als verschiedenen so spricht man von *Variationen* (Kombinationen mit Berücksichtigung der Reihenfolge).
- **Wiederholung:** Dürfen die k Elemente nur einmal vorkommen (keine Mehrfachauswahl des gleichen Elementes) spricht man von *Kombinationen ohne Wiederholung* (ohne zurücklegen).
- **R-Funktion:** `combinations()` aus dem Zusatzpaket `gtools` und `expand.grid()`

$n = 3$

Vier Möglichkeiten: Wählen von 2 aus 3 verschiedenartigen Kugeln mit/ohne Wiederholung und mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.



$V^k_{n,W} = n^k$

$V^k_n = \frac{n!}{(n-k)!}$

$C^k_{n,W} = \binom{n+k-1}{k}$

$C^k_n = \binom{n}{k}$

Kombinationen

```r
balls <- c("red", "blue", "green")

# Mit Wiederholung
## und mit Reihenfolge
mwmr <- expand.grid(balls,balls)
nrow(mwmr)
```

```
## [1] 9
```

```r
## und ohne Reihenfolge
mwor <- combinations(v=balls, n=3, r=2,
                     repeats = T)
nrow(mwor)
```

```
## [1] 6
```

```r
balls <- c("red", "blue", "green")

# Ohne Wiederholung
## und mit Reihenfolge
owmr <- mwmr[mwmr$Var1 != mwmr$Var2, ]
nrow(owmr)
```

```
## [1] 6
```

```r
## und ohne Reihenfolge
owor <- combinations(v=balls, n=3, r=2,
                     repeats = F)
nrow(owor)
```

```
## [1] 3
```

Zusammenfassung

	Permutationen	Kombinationen	
	Reihenfolge berücksichtigt		ohne Reihenfolge
ohne Wiederholung	$P_n = n!$	$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \binom{n}{k}$
mit Wiederholung	$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ \ldots\ n_k!}$	$V_{w,n}^k = n^k$	$C_{w,n}^k = \binom{n+k-1}{k}$

Verständnisfragen

$n = 49$ ohne Reihen

$k = 6$ ohne Wiederholung

- Wieso wird bei Permutationen hinsichtlich der Reihenfolge unterschieden?
- Wann wird eine Kombination Variation genannt?
- Wie hoch sind die Gewinnchancen beim Lotto?

$\frac{1}{13983816}$

$$C_{49}^{6} = \binom{49}{6} = 13\,983\,816$$

$$\frac{1}{13\,983\,816}$$

$$\binom{49}{6} \cdot 10$$