

Statistik

CH.11 - Hypothesentests

SS 2021 | | Prof. Dr. Buchwitz, Sommer, Henke

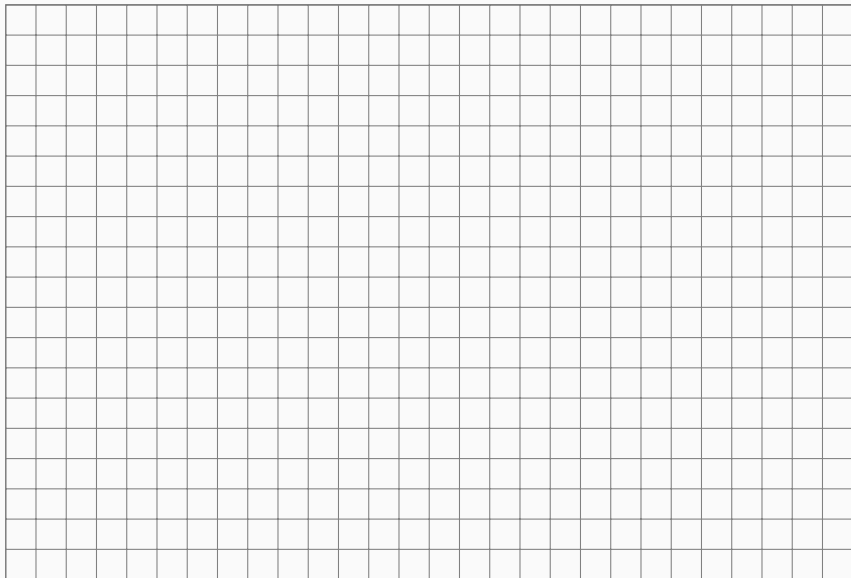
Wir geben Impulse

- 1 Evaluation
- 2 Vorgehen Hypothesentests
- 3 Tests für den Mittelwert
- 4 Tests für den Anteilswert
- 5 Verteilungstest
- 6 Unabhängigkeitstest

Bitte evaluieren Sie den Kurs!

<http://evasys.fh-swf.de/evasys/online.php?pswd=64D4W>

- 1 Evaluation
- 2 Vorgehen Hypothesentests
- 3 Tests für den Mittelwert
- 4 Tests für den Anteilswert
- 5 Verteilungstest
- 6 Unabhängigkeitstest



- 1 Formulieren Sie Nullhypothese H_0 und Alternativhypothese H_1 .
- 2 Legen Sie ein Signifikanzniveau α fest.
- 3 Wählen Sie die passende Teststatistik.
- 4 Bestimmen Sie den Wert der Teststatistik, ab dem die Nullhypothese verworfen werden muss.
- 5 Bestimmen Sie den Vergleichswert aus den Stichprobendaten.
- 6 Entscheiden Sie durch Vergleich der Werte aus (4) und (5), ob Sie die Nullhypothese verwerfen können.

- 1 Evaluation
- 2 Vorgehen Hypothesentests
- 3 Tests für den Mittelwert
- 4 Tests für den Anteilswert
- 5 Verteilungstest
- 6 Unabhängigkeitstest

Tests für den Mittelwert bei bekannter Varianz

Test	H_0	H_1	Teststatistik	Verwerfe H_0 , wenn gilt:
Beidseitig	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$ z > z_{1-\alpha/2}$
Rechtsseitig	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$z > z_{1-\alpha}$
Linksseitig	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$z < z_\alpha$

Tests für den Mittelwert bei unbekannter Varianz

Test	H_0	H_1	Teststatistik	Verwerfe H_0 , wenn gilt:
Beidseitig	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$	$ t > t_{n-1, 1-\alpha/2}$
Rechtsseitig	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$t > t_{n-1, 1-\alpha}$
Linksseitig	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$t < t_{n-1, \alpha}$

■ **R-Funktion:** `t.test()`

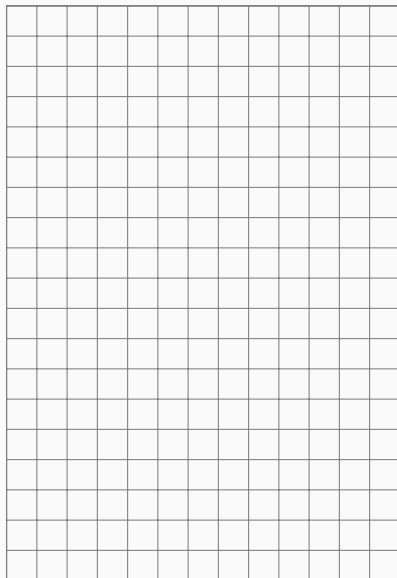
- 1 Evaluation
- 2 Vorgehen Hypothesentests
- 3 Tests für den Mittelwert
- 4 Tests für den Anteilswert
- 5 Verteilungstest
- 6 Unabhängigkeitstest

Test	H_0	H_1	Teststatistik	Verwerfe H_0 , wenn gilt:
Beidseitig	$\pi = \pi_0$	$\pi \neq \pi_0$	$Z = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$	$ Z > Z_{1-\alpha/2}$
Rechtsseitig	$\pi \leq \pi_0$	$\pi > \pi_0$		$Z > Z_{1-\alpha}$
Linksseitig	$\pi \geq \pi_0$	$\pi < \pi_0$		$Z < Z_\alpha$

■ **R-Funktion:** `prop.test()`

Aufgabe: Ein Schraubenproduzent behauptet, dass seine Lieferung eines speziellen Schraubentyps einen Ausschussanteil von höchstens 1% enthält. Der Empfänger der Lieferung ist jedoch der Meinung, dass der Anteil höher ist. Er nimmt eine Stichprobe von 1000 Schrauben und findet in dieser 15 nicht den Anforderungen entsprechende Schrauben.

- Kann die Behauptung des Lieferanten mit dieser Stichprobe bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ widerlegt werden?
- **Hinweis:** Verteilungstabelle siehe nächste Seite.



Verteilungsfunktion $F(z)$ für $z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$

Verteilungsfunktion $F(z)$ der Standardnormalverteilung $N(0, 1)$

Beispiel: $F(z) = P(z \leq 1.96) = 0.9750$

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916

- 1 Evaluation
- 2 Vorgehen Hypothesentests
- 3 Tests für den Mittelwert
- 4 Tests für den Anteilswert
- 5 Verteilungstest
- 6 Unabhängigkeitstest

- **Ausgangssituation:** Es liegen Daten von zwei oder mehr **unabhängig** gewonnenen Stichproben vor.
- **Ziel:** Zwei (oder mehrere) Grundgesamtheiten sollen hinsichtlich ihrer *Verteilung* verglichen werden.
- **Analytische Fragestellung:** Weichen die beiden *empirischen Verteilungen* so sehr voneinander ab, dass die Nullhypothese verworfen werden muss?

$$H_0 : F_1 = F_2 = \dots = F_k$$

- **Folge:** Wenn H_0 verworfen werden muss, dann kann man davon ausgehen, dass die Stichproben nicht die selbe Verteilungsfunktion aufweisen und infolgedessen nicht aus der gleichen Grundgesamtheit stammen.

An einer Hochschule wurde in einer Befragung von 1529 Studierenden ermittelt, ob die Studierenden in den Semesterferien einem Ferienjob nachgehen.

	male	female	Sum
Job	718	593	1311
No Job	79	139	218
Sum	797	732	1529

Unterscheidet sich das Verhalten von männlichen und weiblichen Studierenden signifikant ($\alpha = 5$)?

- **Voraussetzung:** Jede Zelle muss mindestens 5 Beobachten enthalten.
- **Vorgehensweise:** 6-Schritte Schema für das Testen von Hypothesen
- **Teststatistik:** Die χ^2 Teststatistik setzt die Abweichungen von beobachteten (f_o) und erwarteten f_e Häufigkeiten in Relation zu den erwarteten Häufigkeiten:

$$\chi^2 = \sum_{\text{alle Zellen}} \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$$

- Die χ^2 Teststatistik folgt einer χ^2 Verteilung mit $(r - 1) \cdot (s - 1)$

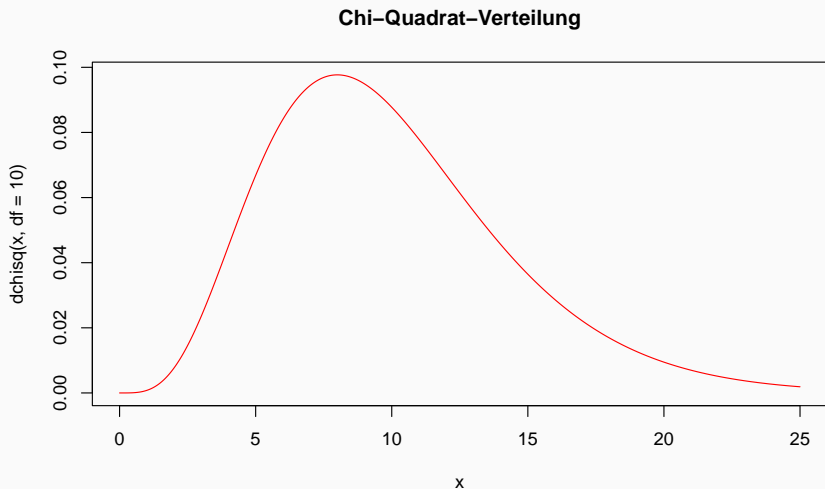
- Die **erwarteten** Häufigkeiten ergeben sich als:

$$\frac{\sum \text{Spalte} \cdot \sum \text{Zeile}}{\text{Gesamtanzahl}}$$

- Die Nullhypothese lautet stets:

$$H_0 : F_1 = F_2 = \dots = F_k$$

- Es handelt sich hier immer um einen **rechtsseitigen Test**.



Quantile der $\chi^2_{n;\gamma}$ Verteilung

Quantile $\chi^2_{n;\gamma}$ der χ^2_n -Verteilung
 Beispiel: $P(\chi^2_{10} \leq 20.4832) = 0.975$

$n \setminus \gamma$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75	0.5	0.25	0.05
1	7.8794	6.6349	5.0239	3.8415	2.7055	1.3233	0.4549	0.1015	0.0044
2	10.5966	9.2103	7.3778	5.9915	4.6052	2.7726	1.3863	0.5754	0.0201
3	12.8382	11.3449	9.3484	7.8147	6.2514	4.1083	2.3660	1.2125	0.0541
4	14.8603	13.2767	11.1433	9.4877	7.7794	5.3853	3.3567	1.9226	0.1013
5	16.7496	15.0863	12.8325	11.0705	9.2364	6.6257	4.3515	2.6746	0.1549
6	18.5476	16.8119	14.4494	12.5916	10.6446	7.8408	5.3481	3.4546	0.2148
7	20.2777	18.4753	16.0128	14.0671	12.0170	9.0371	6.3458	4.2549	0.2719
8	21.9550	20.0902	17.5345	15.5073	13.3616	10.2189	7.3441	5.0706	0.3287
9	23.5894	21.6660	19.0228	16.9190	14.6837	11.3888	8.3428	5.8988	0.3843
10	25.1882	23.2093	20.4832	18.3070	15.9872	12.5489	9.3418	6.7372	0.4398
11	26.7568	24.7250	21.9200	19.6751	17.2750	13.7007	10.3410	7.5841	0.4943
12	28.2995	26.2170	23.3367	21.0261	18.5493	14.8454	11.3403	8.4384	0.5484
13	29.8195	27.6882	24.7356	22.3620	19.8119	15.9839	12.3398	9.2991	0.6021
14	31.3193	29.1412	26.1189	23.6848	21.0641	17.1169	13.3393	10.1653	0.6554
15	32.8013	30.5779	27.4884	24.9958	22.3071	18.2451	14.3389	11.0365	0.7085
16	34.2672	31.9999	28.8454	26.2962	23.5418	19.3689	15.3385	11.9122	0.7614
17	35.7185	33.4087	30.1910	27.5871	24.7690	20.4887	16.3382	12.7919	0.8141
18	37.1565	34.8053	31.5264	28.8693	25.9894	21.6049	17.3379	13.6753	0.8666
19	38.5823	36.1909	32.8523	30.1435	27.2036	22.7178	18.3377	14.5620	0.9189
20	39.9968	37.5662	34.1696	31.4104	28.4120	23.8277	19.3374	15.4518	0.9711
21	41.4011	38.9322	35.4789	32.6706	29.6151	24.9348	20.3372	16.3444	1.0231
22	42.7957	40.2894	36.7807	33.9244	30.8133	26.0393	21.3370	17.2396	1.0750
23	44.1812	41.6284	38.0756	35.1725	32.0069	27.1412	22.3369	18.1372	1.1267
24	45.5584	42.9515	39.3566	36.4154	33.1961	28.2412	23.3369	19.0372	1.1782
25	46.9273	44.2618	40.6518	37.6521	34.3816	29.3385	24.3372	19.9396	1.2295
26	48.2889	45.5604	41.9515	38.8826	35.5633	30.4331	25.3385	20.8445	1.2806
27	49.6432	46.8485	43.2556	40.1163	36.7413	31.5261	26.3398	21.7519	1.3315
28	50.9903	48.1271	44.5642	41.3528	37.9159	32.6176	27.3410	22.6618	1.3823
29	52.3303	49.3973	45.8772	42.5824	39.0879	33.6973	28.3428	23.5742	1.4330
30	53.6732	50.6599	47.1845	43.8050	40.2568	34.7794	29.3441	24.4891	1.4836
31	55.0091	51.9159	48.4862	45.0207	41.4229	35.8578	30.3458	25.4065	1.5341
32	56.3381	53.1664	49.7823	46.2287	42.5865	36.9326	31.3479	26.3265	1.5845
33	57.6603	54.4124	51.0728	47.4292	43.7470	38.0039	32.3504	27.2491	1.6349
34	58.9757	55.6549	52.3578	48.6224	44.9043	39.0717	33.3534	28.1734	1.6852
35	60.2844	56.8939	53.6374	49.8085	46.0587	40.1269	34.3569	29.1005	1.7355
36	61.5864	58.1294	54.9116	50.9877	47.2034	41.1796	35.3609	30.0305	1.7857
37	62.8818	59.3615	56.1805	52.1601	48.3367	42.2298	36.3654	30.9635	1.8359
38	64.1706	60.5902	57.4442	53.3258	49.4578	43.2766	37.3704	31.9005	1.8861
39	65.4529	61.8156	58.7028	54.4849	50.5669	44.3200	38.3759	32.8415	1.9362
40	66.7287	63.0378	59.9564	55.6376	51.6642	45.3610	39.3819	33.7865	1.9863
41	68.0000	64.2568	61.2051	56.7841	52.7598	46.3987	40.3884	34.7355	2.0364
42	69.2668	65.4727	62.4489	57.9246	53.8538	47.4331	41.3954	35.6885	2.0865
43	70.5292	66.6856	63.6888	59.0593	54.9464	48.4643	42.4029	36.6455	2.1366
44	71.7873	67.8955	64.9248	60.1885	56.0482	49.4922	43.4109	37.6075	2.1867
45	73.0412	69.1025	66.1569	61.3124	57.1497	50.5169	44.4194	38.5735	2.2368
46	74.2910	70.3066	67.3852	62.4312	58.2509	51.5385	45.4284	39.5435	2.2869
47	75.5368	71.5078	68.6097	63.5451	59.3518	52.5571	46.4379	40.5175	2.3370
48	76.7787	72.7062	69.8305	64.6543	60.4525	53.5728	47.4479	41.4955	2.3871
49	78.0168	73.9018	71.0476	65.7589	61.5531	54.5856	48.4584	42.4775	2.4372
50	79.2512	75.0947	72.2611	66.8591	62.6536	55.5955	49.4694	43.4635	2.4873

- 1 Evaluation
- 2 Vorgehen Hypothesentests
- 3 Tests für den Mittelwert
- 4 Tests für den Anteilswert
- 5 Verteilungstest
- 6 Unabhängigkeitstest

- χ^2 Tests können auch verwendet werden um die Fragen zu beantworten, ob **zwei Merkmale unabhängig voneinander sind**.
- Im **Beispiel**: Ist die Annahme von Ferienjobs abhängig vom Geschlecht der Studierenden?
- Hypothesen:
 - H_0 : Annahme von Ferienjobs und Geschlecht sind voneinander **unabhängig**.
 - H_1 : Annahme von Ferienjobs und Geschlecht sind voneinander **abhängig**.

- 1 Wozu können χ^2 Tests verwendet werden?
- 2 wie müssen Null- und Alternativhypothese beim χ^2 Test ausgestaltet werden?
- 3 Welches Signifikanzniveau müssen die Merkmale aufweisen um im χ^2 Test verwendet werden zu können?