

# Statistik

CH.7 - Anwendungen Wahrscheinlichkeitsrechnung

SS 2022 | | Prof. Dr. Buchwitz, Sommer, Henke

Wir geben Impulse

- Ziel 1
- Ziel 2
- Ziel 3

Bei der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung gibt es zahlreiche Sonderfälle und Überraschungen. Wir diskutieren im Folgenden diese Themen:

- Urnenmodell
- Geburtstagsproblem
- Simpson Paradoxon
- Entscheidungsbäume

- 1 Urnenmodell
- 2 Geburtstagsproblem
- 3 Simpsons Paradoxon
- 4 Entscheidungsbäume

Gegeben sei eine Urne mit  $N$  Kugeln, davon  $W$  weiße und  $S$  schwarze ( $W + S = N$ ). Aus der Urne werden  $n$  Kugeln ( $1 \leq n \leq N$ ) nacheinander **ohne Zurücklegen** gezogen. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis  $A$ , dass sich unter den  $n$  Kugeln genau  $w$  weiße und  $s$  schwarze befinden, lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$P(A) = \frac{\binom{W}{w} \binom{S}{s}}{\binom{N}{n}}$$

## Hypergeometrische Verteilung

ohne Zurücklegen

- Gegeben sei eine Urne mit  $N = 11$  Kugeln, davon  $W = 5$  weiße und  $S = 6$  schwarze ( $5 + 6 = 11$ ).

Aus der Urne werden  $n$  Kugeln ( $1 \leq n \leq 11$ ) nacheinander ohne Zurücklegen gezogen. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis  $A$ , dass sich unter den  $n$  Kugeln  $w$  weiße und  $s$  schwarze befinden, lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$P(A) = \frac{\binom{W=5}{w} \binom{S=6}{s}}{\binom{N=11}{n}}$$

Noch konkreter: Aus der Urne werden 5 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis  $A$ , dass sich unter den 5 Kugeln 2 weiße und 3 schwarze befinden, lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$P(A) = \frac{\binom{W=5}{w=2} \binom{S=6}{s=3}}{\binom{N=11}{n=5}}$$

# Urnenmodell: Simulation

```
balls <- factor(c(rep("w",5), rep("s", 6)))  
s <- sample(balls, size=1, replace=F)
```

```
balls <- factor(c(rep("w",5), rep("s", 6)))  
s <- sample(balls, size=5, replace=F)
```

```
is.match <- function(x, s, w){  
  tab <- table(x)  
  return(tab[1] == s && tab[2] == w)  
}
```

```
s
```

```
## [1] w s s w s  
## Levels: s w
```

```
is.match(s, w=2, s=3)
```

```
## [1] TRUE
```

# Urnenmodell: Simulation

```
set.seed(1)

# Lösung per Simulation
x <- replicate(n = 10000,
               expr = is.match(sample(balls, size=5, replace=F), s=3, w=2))
mean(x)
```

```
## [1] 0.4334
```

```
# Lösung per Rechnung
(choose(5,2) * choose(6, 3))/choose(11,5)
```

```
## [1] 0.4329
```



Ein Unternehmen erhält wiederholt Lieferungen von 800 Flaschen zur Verpackung von flüssigem Waschmittel. Mit dem Lieferanten ist vereinbart, dass Lieferungen mit mehr als 2% fehlerhaften Flaschen zurückgewiesen werden dürfen. Um zu entscheiden, ob es eine Lieferung zurückweist, verfährt das Unternehmen nach folgender Regel: Der Lieferung werden 50 Flaschen zufällig entnommen und geprüft. Die Lieferung wird zurückgewiesen, wenn mehr als eine Flasche nicht dem vereinbarten Qualitätsstandard entspricht.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gerade noch zulässige Lieferung, d.h. mit genau 2% fehlerhaften Flaschen, zurückgewiesen wird?

# Urnenmodell: Anwendungsbeispiel



# Urnenmodell: Anwendungsbeispiel

```
# Flasche Fehlerfrei = TRUE, Flasche Fehlerhaft = FALSE
f <- c(rep(TRUE, 784), rep(FALSE, 16))
x <- replicate(n=10000, expr=sum(sample(f, size=50, replace = FALSE)))
p_0 <- mean(x == 50)
p_1 <- mean(x == 49)
1 - p_0 - p_1
```

```
## [1] 0.2644
```

```
# Lösung per Binomialkoeffizient
p_0 <- (choose(16,0)*choose(784,50))/choose(800,50)
p_1 <- (choose(16,1)*choose(784,49))/choose(800,50)
1 - p_0 - p_1
```

```
## [1] 0.2639
```

- 1 Urnenmodell
- 2 Geburtstagsproblem
- 3 Simpsons Paradoxon
- 4 Entscheidungsbäume

# Geburtstagsproblem: Überblick

- **Frage:** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Statistikvorlesung mit  $k = 100$  Studierenden (mindestens) zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben (Ereignis A)?



$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{\text{Anzahl der für } \bar{A} \text{ günstigen Geburtstagsanordnungen}}{\text{Anzahl der möglichen Geburtstagsanordnungen}}$$

Hierbei handelt es sich um Kombinationen  $k$ -ter Ordnung von 365 Tage mit Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne Wiederholung, sodass die Anzahl der möglichen Anordnungen für  $\bar{A}$  folgt

$$\text{Anzahl der für } \bar{A} \text{ günstigen Geburtstagsanordnungen} = \frac{365!}{(365 - k)!}$$

Bei den möglichen Anordnungen handelt es sich um Kombinationen  $k$ -ter Ordnung von 365 Tage mit Berücksichtigung der Reihenfolge und mit Wiederholung, sodass

$$\text{Anzahl der möglichen Geburtstagsanordnungen} = 365^k$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - k + 1)}{365^k}$$

**Zwei Personen in einer Gruppe mit  $k = 100$  Personen haben am gleichen Tag Geburtstag:**

```
k <- 100  
1- prod(365:(365-k+1))/365^k
```

```
## [1] 1
```

Intuitiv werden bestimmte Wahrscheinlichkeiten häufig falsch eingeschätzt.

- 1 Urnenmodell
- 2 Geburtstagsproblem
- 3 Simpsons Paradoxon
- 4 Entscheidungsbäume



# Simpsons Paradoxon

```
UCBAdmissions[ ,1] # Department A
```

```
##           Gender
## Admit      Male Female
## Admitted  512     89
## Rejected  313     19
```

- Frauen haben eine niedrigere Zulassungsquote

```
apply(UCBAdmissions,c(1,2),sum)
```

```
##           Gender
## Admit      Male Female
##  Admitted 1198    557
##   Rejected 1493   1278
```

# Simpsons Paradoxon

```
plot(UCBAdmissions)
```

UCBAdmissions



Bewertung verschiedener Gruppen fällt scheinbar unterschiedlich aus, je nachdem ob man die Ergebnisse der Gruppen kombiniert oder nicht.

- 1 Urnenmodell
- 2 Geburtstagsproblem
- 3 Simpsons Paradoxon
- 4 Entscheidungsbäume

# Entscheidungsbäume: Überblick

- Zahlreiche von Unsicherheit geprägte Sachverhalte können als Entscheidungsbäume dargestellt werden. **Beispiel:** Würfeln mit einem und mit zwei Würfeln.



# Entscheidungsbäume: Überblick



- Unternehmen müssen täglich Entscheidungen treffen, z.B.:
  - ▶ über den Standort eines neuen Werkes
  - ▶ zwischen mehreren unterschiedlichen Anlageformen
  - ▶ über Investitionen in neue Maschinen etc.
- Was ist dabei zu beachten:
  - ▶ Nicht alle Informationen, die der Entscheider gerne zur Verfügung hätte, sind bekannt
  - ▶ Das Unternehmen ist darauf angewiesen, Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der verschiedenen Ereignisse abzuschätzen
  - ▶ Basierend auf diesen Wahrscheinlichkeiten, werden Entscheidungen getroffen
  - ▶ Während des Entscheidungsprozesses kann es möglich sein, dass das Unternehmen an Zusatzinformationen gelangt
  - ▶ durch diese Zusatzinformationen verändern sich die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der verschiedenen Ereignisse.



# Entscheidungsbäume: Beispiel



# Entscheidungsbäume: Beispiel



# Entscheidungsbäume: Beispiel

