Fachhochschule Südwestfalen
University of Applied Sciences

Statistik

CH.7 - Anwendungen Wahrscheinlichkeitsrechnung

SS 2021 || Prof. Dr. Buchwitz, Sommer, Henke

Wir geben Impulse

Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Bei der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung gibt es zahlreiche Sonderfälle und Überraschungen. Wir diskutieren die im Folgenden diese Themen:

- Urnenmodell
- Geburtstagsproblem
- Simpson Paradoxon
- Entscheidungsbäume

Outline

1 Urnenmodell

2 Geburtstagsproblem

3 Simpsons Paradoxon

4 Entscheidungsbäume

Urnnemodell: Überblick

Gegeben sei eine Urne mit N Kugeln, davon W weiße und S schwarze ($W + S = N$). Aus der Urne werden n Kugeln ($1 \leq n \leq N$) nacheinander **ohne Zurücklegen** gezogen. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, dass sich unter den n Kugeln genau w weiße und s schwarze befinden lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$P(A) = \frac{\binom{W}{w}\binom{S}{s}}{\binom{N}{n}}$$

Urnenmodell: Beispiel

- Gegeben sei eine Urne mit $N = 11$ Kugeln, davon $W = 5$ weiße und $S = 6$ schwarze $(5 + 6 = 11)$.

Aus der Urne werden n Kugeln $(1 \leq n \leq 11)$ nacheinander ohne Zurücklegen gezogen. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, dass sich unter den n Kugeln w weiße und s schwarze befinden lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$P(A) = \frac{\binom{W=5}{w}\binom{S=6}{s}}{\binom{N=11}{n}}$$

Noch konkreter: Aus der Urne werden 5 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, dass sich unter den 5 Kugeln 2 weiße und 3 schwarze befinden lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$P(A) = \frac{\binom{W=5}{w=2}\binom{S=6}{s=3}}{\binom{N=11}{n=5}}$$

Urnenmodell: Simulation

```r
balls <- factor(c(rep("w",5), rep("s", 6)))
s <- sample(balls, size=1, replace=F)

balls <- factor(c(rep("w",5), rep("s", 6)))
s <- sample(balls, size=5, replace=F)

is.match <- function(x, s, w){
  tab <- table(x)
  return(tab[1] == s && tab[2] == w)
}

s
```

```
## [1] s w w s s
## Levels: s w
```

```r
is.match(s, w=2, s=3)
```

```
## [1] TRUE
```

Urnenmodell: Simulation

```r
set.seed(1)

# Lösung per Simulation
x <- replicate(n = 10000,
               expr = is.match(sample(balls, size=5, replace=F), s=3, w=2))
mean(x)
```

```
## [1] 0.4334
```

```r
# Lösung per Rechnung
(choose(5,2) * choose(6, 3))/choose(11,5)
```

```
## [1] 0.4329004
```

Urnenmodell: Anwendungsbeispiel

Ein Unternehmen erhält wiederholt Lieferungen von 800 Flaschen zur Verpackung von flüssigem Waschmittel. Mit dem Lieferanten ist vereinbart, dass Lieferungen mit mehr als 2% fehlerhaften Flaschen zurückgewiesen werden dürfen. Um zu entscheiden, ob es eine Lieferung zurückweist, verfährt das Unternehmen nach folgender Regel: Der Lieferung werden 50 Flaschen zufällig entnommen und geprüft. Die Lieferung wird zurückgewiesen, wenn mehr als eine Flasche nicht dem vereinbarten Qualitätsstandard entspricht.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gerade noch zulässige Lieferung d.h. mit genau 2% fehlerhaften Flaschen, zurückgewiesen wird?

Urnenmodell: Anwendungsbeispiel

Urnenmodell: Anwendungsbeispiel

```r
# Flasche Fehlerfrei = TRUE, Flasche Fehlerhaft = FALSE
f <- c(rep(TRUE, 784), rep(FALSE, 16))
x <- replicate(n=10000, expr=sum(sample(f, size=50, replace = FALSE)))
p_0 <- mean(x == 50)
p_1 <- mean(x == 49)
1 - p_0 - p_1
```

```
## [1] 0.2644
```

```r
# Lösung per Binomialkoeffizient
p_0 <- (choose(16,0)*choose(784,50))/choose(800,50)
p_1 <- (choose(16,1)*choose(784,49))/choose(800,50)
1 - p_0 - p_1
```

```
## [1] 0.2638613
```

Outline

1 Urnenmodell

2 Geburtstagsproblem

3 Simpsons Paradoxon

4 Entscheidungsbäume

Geburtstagsproblem: Überblick

- **Frage:** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Statistikvorlesung mit k = 100 Studierenden (mindestens) zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben (Ereignis A)?

Geburtstagsproblem: Lösung

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{\text{Anzahl der für } \bar{A} \text{ günstigen Geburtstagsanordenungen}}{\text{Anzahl der möglichen Geburtstagsanordnungen}}$$

Hierbei handelt es sich um Kombinationeen k-ter Ordnung von 365 Tage mit Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne Wiederholung, sodass die Anzahl der möglichen Anordnungen für $\bar{A}$ folgt

$$\text{Anzahl der für } \bar{A}\text{günstigen Geburtstagsanordenungen} = \frac{365!}{(365-k)!}$$

Bei den möglichen Anordnungen handelt es sich um Kombinationen k-ter Ordnung von 365 Tage mit Berücksichtigung der Reihenfolge und mit Wiederholung, sodass

$$AnzahldermglichenGeburtstagsanordnungen = 365^k$$

Geburtstagsproblem: Lösung

$$P(A) = 1 - (\bar{A}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - k + 1)}{365^k}$$

Zwei Personen in einer Gruppe mit $k = 100$ Personen haben am gleichen Tag Geburtstag:

```
k <- 100
1- prod(365:(365-k+1))/365^k
```

```
## [1] 0.9999997
```

Intuitiv werden bestimmte Wahrscheinlichkeiten häufig falsch eingeschätzt.

Outline

1 Urnenmodell

2 Geburtstagsproblem

3 Simpsons Paradoxon

4 Entscheidungsbäume

Simpsons Paradoxon

```
UCBAdmissions[ , ,1] # Department A
```

```
##           Gender
## Admit      Male Female
##   Admitted  512     89
##   Rejected  313     19
```

Simpsons Paradoxon

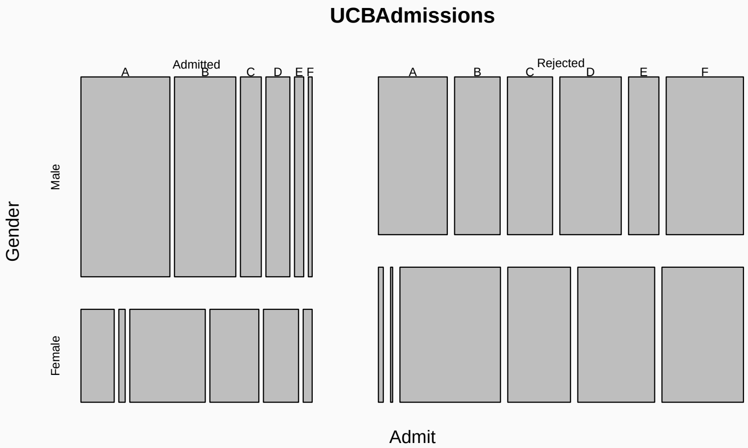
- Frauen haben eine niedrigere Zulassunsgsquote

```
apply(UCBAdmissions,c(1,2),sum)
```

```
##           Gender
## Admit      Male Female
##   Admitted 1198    557
##   Rejected 1493   1278
```

Simpsons Paradoxon

```r
plot(UCBAdmissions)
```



Bewertung verschiedener Gruppen fällt scheinbar unterschiedlich aus, je nachdem ob man die Ergebnisse der Gruppen kombiniert oder nicht.

Outline

1 Urnenmodell

2 Geburtstagsproblem

3 Simpsons Paradoxon

4 Entscheidungsbäume

Entscheidungsbäume: Überblick

- Zahlreiche von Unsicherheit geprägte Sachverhalte können als Entscheidungsbäume dargestellt werden. **Beispiel:** Würfeln mit einem und mit zwei Würfeln.

Entscheidungsbäume: Überblick

Entscheidungsbäume

- Unternehmen müssen täglich Entscheidungen treffen, z.B.:
  - über den Standort eines neuen Werkes
  - zwischen mehreren unterschiedlichen Anlageformen
  - über Investitionen in neue Maschinen etc.
- Was ist dabei zu beachten:
  - Nicht alle Informationen, die der Entscheider gerne zur Verfügung hätte sind bekannt
  - Das Unternehmen ist darauf angewiesen, Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der verschiedenen Ereignisse abzuschätzen
  - Basierend auf diesen Wahrscheinlichkeiten, werden Entscheidungen getroffen
  - Während des Entscheidungsprozesses kann es möglich sein, dass das Unternehmen an Zusatzinformationen gelangt
  - durch diese Zusatzinformationen verändern sich die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der verschiedenen Ereignisse.

Entscheidungsbäume: Beispiel

Entscheidungsbäume: Beispiel

Entscheidungsbäume: Beispiel