Fachhochschule Südwestfalen
University of Applied Sciences

Statistik

CH.6 - Wahrscheinlichkeitsrechnung

SS 2022 || Prof. Dr. Buchwitz, Sommer, Henke

Wir geben Impulse

Lernziele

- Ziel 1
- Ziel 2
- Ziel 3

Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Zufallsexperimente sind der Ausgangspunkt der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Zufallsexperiment

Definition: Zufallsexperiment

- Ein **Zufallsexperiment** ist ein Experiment, das alle der folgenden Bedingungen erfüllt:
  - Es wird nach genau festgelegten Vorschriften durchgeführt.
  - Es kann beliebig oft unter gleichen Bedingungen wiederholt werden.
  - Das Ergebnis ist nicht genau vorhersehbar.
  - Alle *möglichen* Ausgänge sind vor der Durchführung bekannt.

- Die Menge aller möglichen Ergebnisses eines Zufallsexperiments nennt man **Ereignisraum** Ω.
- Teilmengen des Ereignisraumes Ω nennt man (*zufällige*) Ereignisse. Diese werden mit lateinischen Buchstaben ($A, B, C, ..$) bezeichnet.
- Ereignisse, die sich nicht weiter zerlegen lassen, heißen Elementarereignisse.

Beispiel: Zufallsexperiment

```r
# Definition des Ereignisraumes
Omega <- c(1, 2, 3, 4, 5, 6)

# Durchführen des Experiments
(E <- sample(Omega, size = 1, replace = FALSE))
```

```
## [1] 2
```

```r
# Erneute Durchführung des Experiments
(E <- sample(Omega, size = 1, replace = FALSE))
```

```
## [1] 3
```

Ereignisse

Defintion: Sicheres Ereignis

Ein Ereignis E heißt **sicheres Ereignis**, wenn es bei jeder Ausführung des Zufallsexperiments eintritt.

$$E = \Omega$$

Beispiel: Würfeln einer Zahl zwischen 1 und 6 bei einem 6-seitigen Würfel.

Defintion: Unmögliches Ereignis

Ein Ereignis $\varnothing$ heißt **unmögliches Ereignis**, wenn es niemals eintritt.

$$\varnothing = \{\ \}$$

Beispiel: Würfeln einer 9 bei einem 6-seitigen Würfel.

Rechnen mit Ereignissen

- Ereignisse sind als Mengen definiert, folglich können die Notation und Operationen der Mengenlehre beim Rechnen verwendet werden.

Definition: Komplementärereignis

Das Ereignis $\bar{A} \subset \Omega$, das genau dann eintritt, wenn A nicht eintritt, heißt das **zu A komplementäre Ereignis**.

Beispiel: $\bar{A} = B \quad \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad A = \{1, 3, 5\} \quad B = \{2, 4, 6\}$

Defnition: Disjunkte Ereignisse

Zwei Ereignisse sind **disjunkt**, wenn sie nicht beide gleichzeitig eintreten können, also $A \cap B = \varnothing$.

Beispiel: $C \cap D \quad \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad C = \{1, 2\} \quad D = \{6\}$

Operatoren

- Vereinigungsmenge $A \cup B$
- Durchschnittsmenge $A \cap B$
- Differenzmenge $A \setminus B$

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{und} \quad M_2 = \{5, 6\}$$

Operatoren

```r
M1 <- c(1,2,3,4,5)
M2 <- c(5,6)

union(M1, M2)      # Vereinigungsmenge
```

```
## [1] 1 2 3 4 5 6
```

```r
intersect(M1, M2) # Durchschnittsmenge
```

```
## [1] 5
```

```r
setdiff(M1, M2)    # Differenzmenge
```

```
## [1] 1 2 3 4
```

Wahrscheinlichkeiten

Definition: Wahrscheinlichkeit (von Mieses)

Die statistische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A ist der Grenzwert der relativen Häufigkeit des Auftretens des Ereignisses, also die relative Häufigkeit bei einer sehr großen Anzahl von Wiederholungen.

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl des Eintreffens von A}}{\text{Anzahl der Wiederholungen des Zufallsexperiments}}$$

Wahrscheinlichkeiten

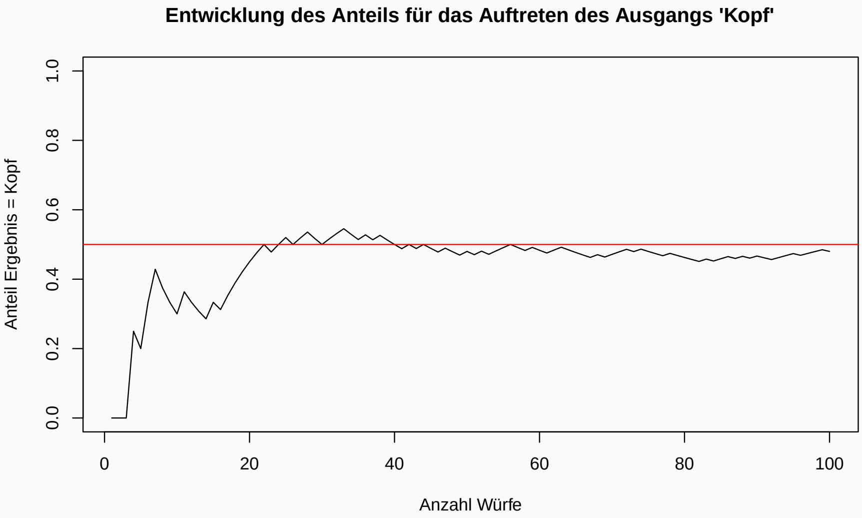
```r
set.seed(11)
# 5-malige Wiederholung Münzwurf
Omega <- c("Kopf","Zahl")
coin <- sample(Omega, size=5, replace=T)
prop <- proportions(table(coin))
prop
```

```
## coin
## Kopf Zahl
##  0.2  0.8
```

```r
# Relativer Anteil für Ergebnis = Kopf
prop[1]
```

```
## Kopf
##  0.2
```

Wahrscheinlichkeiten



Wahrscheinlichkeiten

Definition: Wahrscheinlichkeit (Laplace)

Ein Experiment mit endlich vielen, gleich wahrscheinlichen Ausgängen heißt Laplace-Experiment.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für A 'günstigen' Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Axiome

Axiome nach Kolomogorov:

- **Positivität:** $P(A) \geq 0 \quad \text{für} \quad A \in \Omega$
- **Normiertheit:** $P(\Omega) = 1$
- **Additivität:** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{falls} \quad A \cap B = \varnothing$

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

- Seien A_i mit $i = 1, \ldots, n$ alle möglichen Ereignisse eines Experiments, sodass $\Omega = \{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n\}$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

- Für das unmögliche Ereignis gilt

$$P(\emptyset) = 0$$

- Für das zu A komplementäre Ereignis gilt

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

- Für die Vereinigung zweier beliebiger Ergebnisse A und B gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Ist A Teilmenge von B, also $A \subset B$, dann gilt

$$P(A) \leq P(B)$$

- Für disjunkte Ereignisse A und B gilt

$$P(A \cap B) = 0$$

Unabhängigkeit

Definition: Unabhägigkeit von Ereignissen

Zwei Ereignisse A und B heißen **unabhängig**, wenn das Eintreten des einen Ereignisses die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des anderen Ereignisses nicht beeinflusst. Dann gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- $P(A \cap B)$ kann als die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse gleichzeitig eintreten, interpretiert werden.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A kann davon abhängig sein, ob ein anderes Ereignis B bereits eingetreten ist.

$$P(A|B)$$

Beispiele:

- Die Wahrscheinlichkeit an einer Krankheit zu erkranken, kann davon abhängig sein, ob man gegen diese Krankheit geimpft ist.
- Die Wahrscheinlichkeit Deutscher Meister beim Fußball zu werden, ist davon abhängig, ob man vorher Herbstmeister ist.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- Bedingte Wahrscheinlichkeiten können als Ergebnis von mehrstufigen Zufallsexperimenten verstanden werden und lassen sich als Baumdiagramm darstellen:

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition: Bedingte Wahrscheinlichkeit

Seien A und B zwei Ereignisse. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Bedingung, dass das Ereignis B bereits eingetreten ist, heißt **bedingte Wahrscheinlichkeit** von A unter B oder Wahrscheinlichkeit von A gegeben B und ist definiert als

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{für} \quad P(B) \neq 0$$

- $P(A \cap B)$ kann als die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse gleichzeitig eintreten, interpretiert werden.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Durch Umformung der Defintion der bedingten Wahrscheinlichkeit erhält man den **Multiplikationssatz** der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad \text{sowie} \quad P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Es gilt zudem:

$$P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P(B)$$
$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Definition: Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei $A_1, A_2, \ldots, A_k$ eine disjunkte Zerlegung des Ereignisraumes Ω. Wenn $B \subset \Omega$ dann gilt

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

Satz von Bayes

- Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A|B)$ und $P(B|A)$ sind nicht gleich!
- Die Verbindung zwischen diesen Wahrscheinlichkeiten gibt der Satz von Bayes wieder.

Definition: Satz von Bayes

Wenn der Ereignisraum Ω in A und $\bar{A}$ partitioniert wird und B ein beliebiges Ereignis aus Ω ist, gilt

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Der Satz von Bayes ergibt sich aus Kombination von $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ und $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$.

Beispiel

- Eine Bank vergibt Privatkredite an Kunden.
  - Sie weiß, dass 3% dieser Kunden den Privatkredit entweder nicht termingerecht oder überhaupt nicht zurückzahlen, in diesem Sinne also schlechte Kreditnehmer sind. Es ist ferner bekannt, dass 25% der schlechten Kreditnehmer mindestens einen weiteren Ratenkredit haben, die guten Kreditnehmer aber zu 85% keinen weiteren Ratenkredit bedienen müssen.
  - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand ein schlechter Kreditnehmer ist, wenn er schon mindestens einen weiteren Ratenkredit bezieht?
  - Wie viel Prozent derjenigen, die noch keinen Ratenkredit haben, sind gute Kreditnehmer?

Beispiel

Lösungsskizze:

Verständnisfragen

- Was versteht man unter komplementären Ereignissen?
- Sind komplementäre Ereignisse unabhängig?
- Ist die Aussage $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ korrekt?