Fachhochschule Südwestfalen
University of Applied Sciences

Statistik

CH.3 - Maßzahlen

SS 2023 || Prof. Dr. Buchwitz, Sommer, Henke

Wir geben Impulse

Lernziele

- Erlernen der Grundfähgikeiten zum Beschreiben von Datenmengen mit Hilfe statistischer Maßzahlen.
- Einteilung statistischer Maßzahlen in Lage-, Streuungs- und Konzentrationsmaße.
- Verdeutlichen der Anwendung mit Hilfe von R.

Maßzahlen

Ziel der folgenden Maßzahlen ist die Reduktion der Daten auf Kennzahlen, die einen Großteil der *wesentlichen* Informationen der zugrundeliegenden statistischen Variablen enthalten.

- **Lagemaße:** Beschreiben das Zentrum / die Mitte einer Beobachtungsreihe
- **Streuungsmaße:** Beschreiben die Abweichung vom Zentrum einer Häufigkeitsverteilung.
- **Konzentrationsmaße:** Beschreiben, wie sich die Summe der Merkmalswerte der Beobachtungsreihe auf die Untersuchungseinheiten verteilt.

Inhaltsübersicht

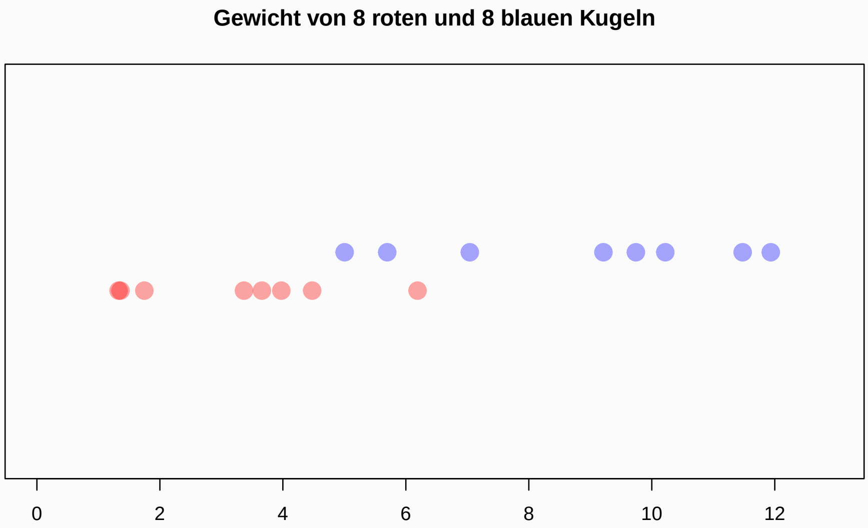
Beispiel

Die folgenden Daten bilden das Gewicht (*in kg*) von zufällig ausgewählten Kugeln aus der Produktion einer Fabrik für Bowlingkugeln ab.

- Handelt es sich bei den vorliegenden Daten um eine Stichprobe oder um eine Grundgesamtheit?
- Welches Skalenniveau weisen die gezeigten Daten auf?
- Wie könnte man die Daten beschreiben?

	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5	i = 6	i = 7	i = 8
red	1.747	3.367	1.329	6.191	3.659	1.359	3.975	4.477
blue	9.741	11.935	7.040	10.220	11.478	5.697	9.213	5.004

Beispiel



Übersicht: Lagemaße

Lagemaß	Symbol	Berechnung
Modus	$\bar{x}_{Modus}$	$h_{Modus} \geq h_j$
Median	$\bar{x}_{Median}$	$x_{\frac{n+1}{2}}$ oder $\frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$
Quantil	Q_α	Wert der Verteilungsfunktion
Arithmetisches Mittel	$\bar{x}$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
Geometrisches Mittel	$\bar{x}_{geo}$	$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$
Harmonisches Mittel	$\bar{x}_{harm}$	$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} 1/x_i}$

Achtung: Nicht jede Maßzahl ist für jede Art der *Skalierung* und damit nicht für jede Variable (sinnvoll) bestimmbar.

Modus

Definition: Modus

Der **Modus** oder **Modalwert** ist die häufigste Ausprägung einer Verteilung.

- Der Modus *kann* für beliebig skalierte Variablen bestimmt werden.
- Bei klassierten Daten wird die am häufigsten auftretende Klasse als Modalklasse bezeichnet.
- Der Modus kann mit Hilfe der **R-Funktion** `modal()` aus dem `fhswf` Paket berechnet werden.

Median

Definition: Median

Sind $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ die der Größe nach geordneten Beobachtungswerte eines metrisch skalierten Merkmals X, ergibt sich der **Median** $\bar{x}_{Median}$ als

$$\bar{x}_{Median} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

- Der Median wird auch als Zentralwert bezeichnet.
- Der Median teilt die Daten in zwei gleich große Hälften.
- Kann für metrisch und ordinal skalierte Merkmale verwendet werden.
- Ist *robust* gegenüber Ausreißern.
- **R-Funktion:** `median()`

Quantile

Definition: Quantil

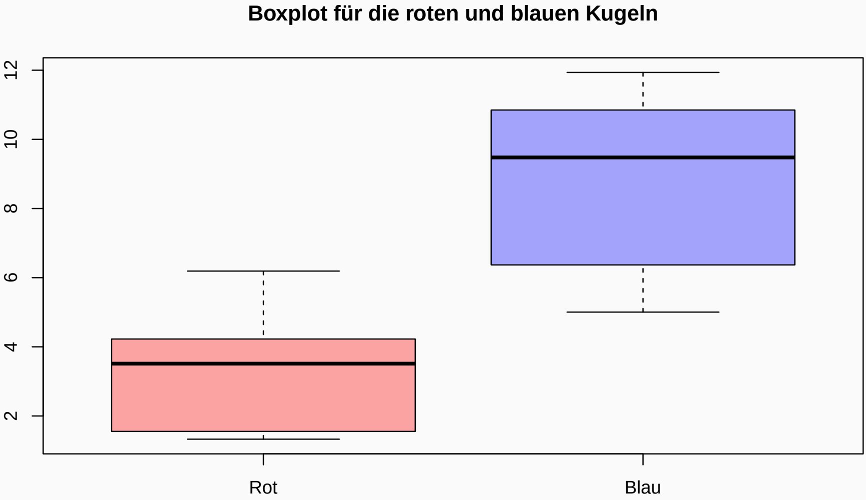
Das $\alpha-$Quantil eines Merkmals ist der Wert, unterhalb dessen ein vorgegebener Anteil α aller Beobachtungswerte der Verteilung liegt. Dieser Wert ergibt sich aus der (empirischen) Verteilungsfunktion $S()$.

$$S(Q_\alpha) = \alpha$$

- Quantile sind Verallgemeinerungen des Medians, dieser ist $Q_{0.5}$.
- Einige Gruppen von Quantilen haben spezielle Namen
  - Quartile: $Q_{0.25}, Q_{0.5}, Q_{0.75}$
  - Percentile: $Q_{0.01}, Q_{0.02}, Q_{0.03}, Q_{0.04}, \ldots$
- **R-Funktion:** `quantile()`

Boxplot

Der Boxplot oder Box-Whisker-Plot ist eine grafische Darstellung von Minimum, 1. Quartil, Median, 3. Quartil und Maximum.



Aritmetisches Mittel

Definition: Arithmetisches Mittel

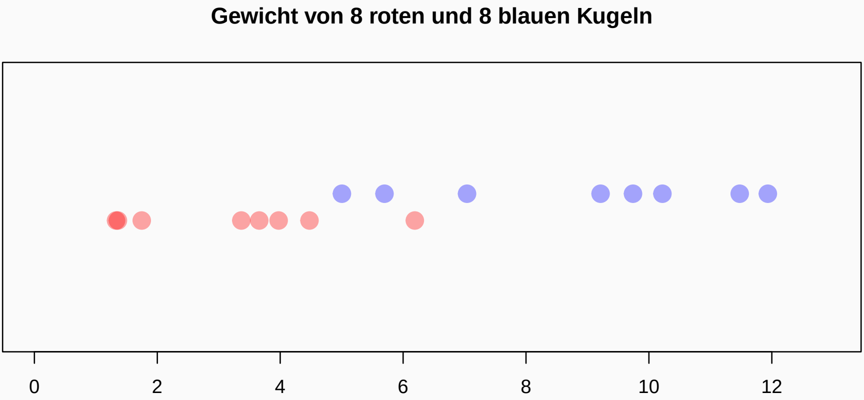
Sind $x_1, \ldots, x_n$ die Beobachtungswerte eines metrisch skalierten Merkmals X, so errechnet sich das **arithmetische Mittel** durch

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Das arithmetische Mittel ist nur für metrisch skalierte Daten definiert!
- Ist eine Maßzahl, die empfindlich gegenüber Ausreißern ist.
- Das gewichtete arithmetische Mittel erlaubt die Bestimmung des arithmetischen Mittels für klassierte Daten.
- **R-Funktion:** `mean()`

Beispiel: Median und arithmetisches Mittel für die roten Kugeln

	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5	i = 6	i = 7	i = 8
red	1.747	3.367	1.329	6.191	3.659	1.359	3.975	4.477
blue	9.741	11.935	7.040	10.220	11.478	5.697	9.213	5.004



Beispiel: Median und arithmetisches Mittel für die roten Kugeln

```r
# Ausgabe der Daten
red
```

```
## [1] 1.747 3.367 1.329 6.191 3.659 1.359 3.975 4.477
```

```r
# Arithmetisches Mittel
mean(red)
```

```
## [1] 3.263
```

```r
## Median
median(red)
```

```
## [1] 3.513
```

```r
# Zusammenfassung wesentlicher Lagemaße
summary(red)
```

```
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##    1.33    1.65    3.51    3.26    4.10    6.19
```

Geometrisches und Harmonisches Mittel

- Es gibt zahlreiche spezialisierte Mittelwerte wie das **geometrische Mittel** $\bar{x}_{geo}$ und das **harmonische Mittel** $\bar{x}_{harm}$. Welcher Mittelwert genutzt werden muss, hängt von den zugrundeliegenden Daten ab.
- Ziel der Mittelwertbildung ist, die durchschnittliche *Gesamtwirkung* von n meist unterschiedlichen Werten mit einem einzigen Wert zu beschreiben.

Geometrisches Mittel: $$\bar{x}_{geo} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Harmonisches Mittel: $$\bar{x}_{harm} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

- **Anwendung:** Geometrische Mittelwerte eigenen sich für Wachstumsraten, harmonische Mittelwerte für Geschwindigkeiten.

Beispiel: Geometrisches Mittel

```r
# Das Wertpapier-Beispiel (Bitcoin) aus der Einführung liefert die folgenden
# Wertveränderungen (returns) für ersten 3 Jahre des Assets.
ret <- c(.12, .07, .01)

# Geometrisches Mittel
mean_gm <- prod(1 + ret)^(1/length(ret))
mean_gm
```

```
## [1] 1.066
```

```r
# Probe
(100 * prod(1 + ret)) # Wert nach 3 Perioden bei 100 Euro Startwert
```

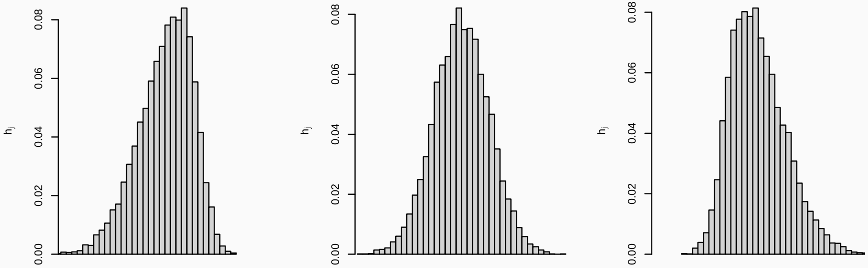
```
## [1] 121
```

```r
(100 * mean_gm^3) # Wert nach 3 Perioden berechnet mit x_{geom}
```

```
## [1] 121
```

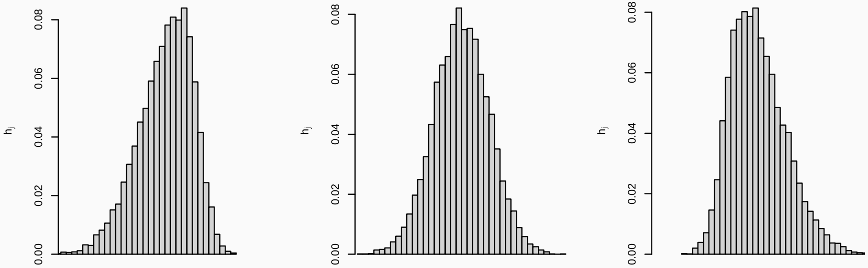
Schiefe

- Wo liegen $\bar{x}$, $\bar{x}_{Median}$ und $\bar{x}_{Modus}$ bei den nachfolgend gezeigten Häufigkeitsverteilungen?



Schiefe

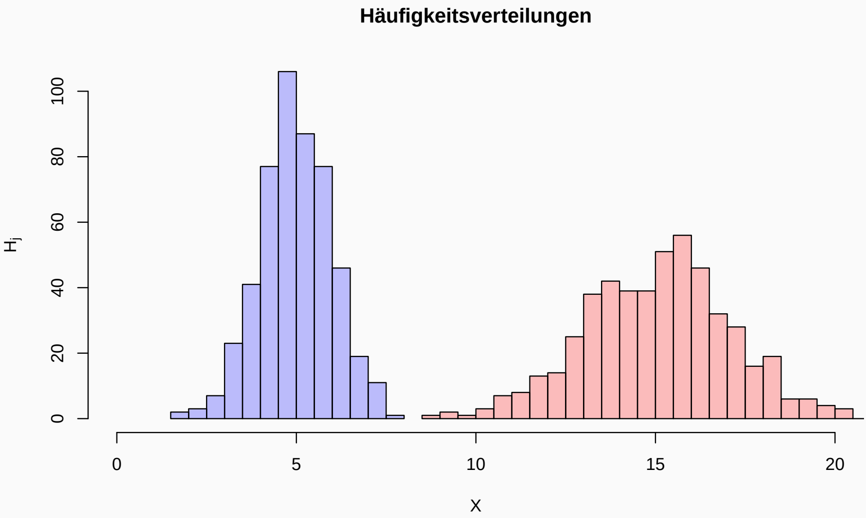
- Wo liegen $\bar{x}$, $\bar{x}_{Median}$ und $\bar{x}_{Modus}$ bei den nachfolgend gezeigten Häufigkeitsverteilungen?



- Linksschiefe Häufigkeitsverteilung: $\bar{x} < \bar{x}_{Median} < \bar{x}_{Modus}$
- Symmetrische Häufigkeitsverteilung: $\bar{x} = \bar{x}_{Median} = \bar{x}_{Modus}$
- Rechtsschiefe Häufigkeitsverteilung: $\bar{x} > \bar{x}_{Median} > \bar{x}_{Modus}$

Inhaltsübersicht

Beispiel: Streuungsmaße



Übersicht: Streuungsmaße

Lagemaß	Symbol	Berechnung
Spannweite	R	$x_{max} - x_{min}$
Interquartilsabstand	IQR	$Q_{0.75} - Q_{0.25}$
(empirische) Varianz	s^2	$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$
Standardabweichung	s	$\sqrt{s^2}$
Variationskoeffizient	V	$s/\bar{x}$

Achtung: Nicht jede Maßzahl ist für jede Art der *Skalierung* und damit nicht für jede Variable (sinnvoll) bestimmbar.

Spannweite

Definition: Spannweite

Die Breite eines Streubereichs nennt man Spannweite R. Sie ergibt sich aus dem Maximum und Minimum der Daten.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

- Nachteil: Nur zwei *extreme* Werte gehen in die Berechnung ein, der Großteil der Daten bleibt ungenutzt.
- Die Spannweite hat keine eigene **R-Funktion**, kann aber einfach mittels `max()` und `min()` berechnet werden.

Interquartilsabstand

Definition: Interquartilsabstand

Der **Quartilsabstand** gibt die Größe des Bereiches zwischem dem oberen und dem unteren Quartil einer Verteilung an, in dem die mittleren 50% der Beobachtungen fallen.

$$IQR = Q_{0.75} - Q_{0.25}$$

- Zwischen dem oberen und dem unteren Quartil liegen 50% der Beobachtungen.
- Kann auch sinnvoll für ordinalskalierte Merkmale bestimmt werden.
- Ist *robust* in dem Sinne, dass der *IQR* weitgehend unempfindlich gegenüber Ausreißern ist.
- **R-Funktion:** `IQR()`

Varianz

Definition: Varianz

Die **Varianz** ist die mittlere quadrierte Abweichung vom arithmetischen Mittel.

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \quad \text{oder} \quad s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

- Es gilt immer $s^2 \geq 0$
- Wird unterschiedlich für die Stichprobe und die Grundgesamtheit (Population) berechnet.
- Grundidee: Einbezug aller Abweichungen vom Mittelwert
- Beobachtungen, die weit von $\bar{x}$ entfernt liegen, werden überproportional stark gewichtet.
- **R-Funktion:** `var()`

Standardabweichung

Definition: Standardabweichung

Die **Standardabweichung** ist die Wurzel aus der Varianz.

$$s = \sqrt{s^2}$$

- Weist die gleiche Maßeinheit wie die Daten auf
- Ist i.d.R. einfacher zu interpretieren als die Varianz.
- **R-Funktion:** `sd()`

Rechenbeispiel

Berechnung der Varianz der roten Kugeln aus dem Eingangsbeispiel.

i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	1.747	-1.5158	2.2977
2	3.367	0.1044	0.0109
3	1.329	-1.9342	3.7410
4	6.191	2.9277	8.5712
5	3.659	0.3961	0.1569
6	1.359	-1.9038	3.6246
7	3.975	0.7119	0.5069
8	4.477	1.2137	1.4732

$n = 8 \quad \bar{x} = 3.2629 \quad \sum(x_i - \bar{x}) = 0 \quad \sum(x_i - \bar{x})^2 = 20.3823 \quad s^2 = 2.9118$

Rechenbeispiel

Berechnung der Varianz der blauen Kugeln aus dem Eingangsbeispiel.

i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	9.741	0.9499	0.9022
2	11.935	3.1442	9.8858
3	7.040	-1.7508	3.0653
4	10.220	1.4285	2.0406
5	11.478	2.6866	7.2176
6	5.697	-3.0939	9.5725
7	9.213	0.4223	0.1783
8	5.004	-3.7866	14.3386

$n = 8 \quad \bar{x} = 8.7911 \quad \sum(x_i - \bar{x}) = 0 \quad \sum(x_i - \bar{x})^2 = 47.201 \quad s^2 = 6.743$

Variationskoeffizient

Definition: Variationskoeffizient

Der **Variationskoeffizient** ist der Quotient aus Standardabweichung und arithmetischem Mittel.

$$V = \frac{s}{\bar{x}}$$

- Ist dimensionslos und vergleichbar
- Der Variationskoeffizient hat keine eigene **R-Funktion**, kann aber einfach mittels `sd()` und `mean()` berechnet werden.

Beispiel: Streuungsmaße

```r
# Ausgabe der Daten
blue
```

```
## [1]  9.741 11.935  7.040 10.220 11.478  5.697  9.213  5.004
```

```r
# Spannweite
max(blue) - min(blue)
```

```
## [1] 6.931
```

```r
## Varianz
var(blue)
```

```
## [1] 6.743
```

```r
# Interquartilsabstand
IQR(blue)
```

```
## [1] 3.83
```

```r
# Variationskoeffizient
sd(blue) / mean(blue)
```

```
## [1] 0.2954
```

Inhaltsübersicht

Konzentration

Definition: Konzentration

Man spricht von Konzentration oder Ungleichheit, falls zu einem bestimmten Zeitpunkt ein relativ kleiner Anteil der Merkmalsträger einen hohen Anteil an der Summe der Merkmalswerte besitzt.

- Konzentration bzw. Ungleichheitsdiskussionen findet man häufig im Kontext von Einkommen oder Vermögen.
- Beispiel: In Deutschland besitzen 10% der Bevölkerung 90% des Vermögens.

Lorenzkurve

Definition: Lorenzkurve

Der Polygonzug durch die Punkte $P_0 = (0, 0)$ und $P_j = (k_j, l_j)$ mit $j = 1, \ldots, q$ heißt **Lorenzkurve**.

$$k_j = \sum_{i=1}^{j} \frac{H_j}{n} = \sum_{i=1}^{j} h_j \qquad l_j = \frac{\sum_{i=1}^{j} a_i H_i}{\sum_{i=1}^{q} a_i H_i}$$

- Die Lorenzkurzve verläuft durch die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 1)$
- Die Lorenzkurve verläuft immer **unterhalb** der Winkelhalbierenden.
- Die Lorenzkurve ist winkelhalbierend, wenn alle Mermalsausprägungen gleich häufig vorkommen. Dann liegt keine Konzentration vor. Je weiter die Lorenzkurve sich von der Winkelhalbierenden entfernt, desto größer ist die Ungleichheit.
- **R-Funktion:** `Lc()` aus dem Zusatzpaket `ineq`

Beispiel

Wir betrachten vereinfachend die Einkommensverteilungen der folgenden drei sehr kleinen Länder.

```
A <- c(1000, 3000, 4000, 4000, 8000)
B <- c(2000, 2000, 4000, 8000)
C <- c(1000, 2000, 5000, 8000)
```

Beispiel

	j	a_j	k_j	l_j
1	0		0	0
1000	1	1000	0.2	0.05
3000	2	3000	0.4	0.2
4000	3	4000	0.8	0.6
8000	4	8000	1	1

Gini Koeffizient

Definition: Gini Koeffizient

Das Doppelte der Fläche zwischen der Lorenzkurve und der Winkelhalbierenden heißt **Gini-Koeffizient** G und wird als Konzentrationsmaß einer Häufigkeitsverteilung verwendet.

$$G = \sum_{i=1}^{n} (k_i + k_{i-1})(l_i - l_{i-1}) - 1$$

- Um den Gini-Koeffizienten zu berechnen, sind alle Stützpunkte der Lorenzkurve erforderlich. Es gilt $0 \leq G \leq \frac{n-1}{n} < 1$.
- Wenn die Lorenzkurve winkelhalbierend ist, gilt $G = 0$. In diesem Fall gibt es keine Einkommensunterschiede.
- Werden *alle* Ausgangswerte x_i mit einem Faktor a multipliziert, sodass $y_i = a \cdot x_i$, dann gilt $G_y = G_x$.
- **R-Funktion:** `Gini()` aus dem Zusatzpaket `ineq`

Lorenzkurve mit Gini-Koeffizient

Verständnisfragen

- Welche Lage- und Streuungsparameter eignen sich für ordinalskalierte Merkmale? Welche sind für nominalskalierte Merkmale geeignet?
- Welche Streuungsmaße berücksichtigen nur einzelne Beobachtungswerte der Häufigkeitsverteilung?
- Wie macht sich eine vollkommene Gleichheit in der Einkommensverteilung eines Landes in der Lorenzkurve bemerkbar? Wie groß ist dann der GINI-Koeffizient?

Verständnisfragen (Antworten)

- Welche Lage- und Streuungsparameter eignen sich für ordinalskalierte Merkmale? Welche sind für nominalskalierte Merkmale geeignet?
  - **Ordinal:** Median, Quantile, Modus, Quartilsabstände.
  - **Nominal:** Modus.
- Welche Streuungsmaße berücksichtigen nur einzelne Beobachtungswerte der Häufigkeitsverteilung?
  - **Einzelne Beobachtungswerte:** Spannweite
  - **Alle Beobachtungswerte:** alle weiteren, die vorgestellt wurden.
- Wie macht sich eine vollkommene Gleichheit in der Einkommensverteilung eines Landes in der Lorenzkurve bemerkbar? Wie groß ist dann der GINI-Koeffizient?
  - Winkelhalbierende, $G = 0$