Fachhochschule Südwestfalen
University of Applied Sciences

Statistik

CH.3 - Maßzahlen

SS 2021 || Prof. Dr. Buchwitz, Sommer, Henke

Wir geben Impulse

Maßzahlen

Ziel der folgenden Maßzahlen ist die Reduktion der Daten auf Kennzahlen, die einen Großteil der *wesentlichen* Infromationen der zugrundeliegenden statistischen Variablen enthalten.

- **Lagemaße:** Beschreiben das Zentrum / die Mitte einer Beobachtungsreihe
- **Streuungsmaße:** Beschreiben die Abweichung vom Zentrum einer Häufikeitsverteilung.
- **Konzentrationsmaße:** beschreiben, wie sich die Summe der Merkmalswerte der Beobachtungsreihe auf die Untersuchungseinheiten verteilt.

Outline

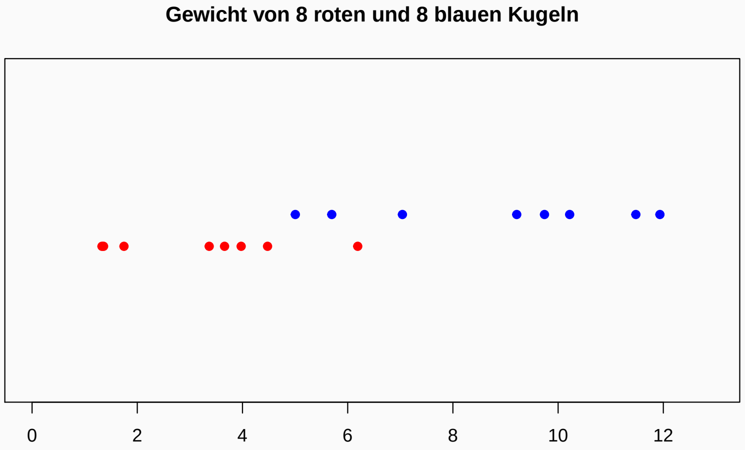
Beispiel

Die folgenden Daten bilden das Gewicht (in kg) von zufällig ausgewählten Kugeln aus der Produktion einer Fabrik für Bowlingkugeln ab.

- Handelt es sich bei den vorliegenden Daten um eine Stichprobe oder um eine Grundgesamtheit?
- Welches Skalenniveau weisen die gezeigten Daten auf?
- Wie könnte man die Daten beschreiben?

	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5	i = 6	i = 7	i = 8
red	1.7471	3.3673	1.3287	6.1906	3.6590	1.3591	3.9749	4.4766
blue	9.7409	11.9352	7.0403	10.2196	11.4776	5.6971	9.2134	5.0044

Beispiel



Übersicht: Lagemaße

Lagemaß	Symbol	Berechnung
Modus	$\bar{x}_{Modus}$	$h_{Modus} \geq h_j$
Median	$\bar{x}_{Median}$	$x_{\frac{n+1}{2}}$ oder $\frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$
Quantil	Q_α	Wert der Verteilungsfunktion
Artimethisches Mittel	$\bar{x}$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
Geometrisches Mittel	$\bar{x}_{geo}$	$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$
Harmonisches Mittel	$\bar{x}_{harm}$	$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} 1/x_i}$

Achtung: Nicht jede Maßzahl ist für jede Art der *Skalierung* und damit nicht für jede Variable (sinnvoll) bestimmbar.

Modus

Definition: Modus

Der **Modus** oder **Modalwert** ist die häufigste Ausprägung einer Verteilung.

- Der Modus *kann* für beliebig skalierte Variablen bestimmt werden.
- Bei klassierten Daten wird die am häufigsten auftretende Klasse als Modalklasse bezeichnet.
- Der Modus hat keine eigene **R-Funktion**, kann aber mittels absoluten oder relativen Häufigkeiten bestimmt werden.

Median

Definition: Median

Sind $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ die der Größe nach geordneten Beobachtungswerte eines metrisch skalierten Merkmals X, ergibt sich der **Median** $\bar{x}_{Median}$ als

$$\bar{x}_{Median} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

- Der Median wird auch als Zentralwert bezeichnet.
- Der Median teilt die Daten in zwei gleich Große Hälften.
- Kann für metrische- und ordinalskalierte Merkmale verwendet werden.
- Ist *robust* gegenüber Ausreißern.
- **R-Funktion:** `median()`

Quantile

Definition: Quantil

Das $\alpha-$Quantil eines Merkmals ist der Wert, unterhalb dessen ein vorgegebener Anteil α aller Beobachtungswerte der Verteilung liegt. Dieser Wert ergibt sich aus der (empirischen) Verteilungsfunktion $S()$.

$$S(Q_\alpha) = \alpha$$

- Quantile sind Verallgemeinerungen des Medians, dieser ist $Q_{0.5}$.
- Einige Gruppen von Quantilen haben spezielle Namen
  - Quartile: $Q_{0.25}, Q_{0.5}, Q_{0.75}$
  - Percentile: $Q_{0.01}, Q_{0.02}, Q_{0.03}, Q_{0.04}, \ldots$
- **R-Funktion:** `quantile()`

Aritmetisches Mittel

Definition: Arithmetisches Mittel

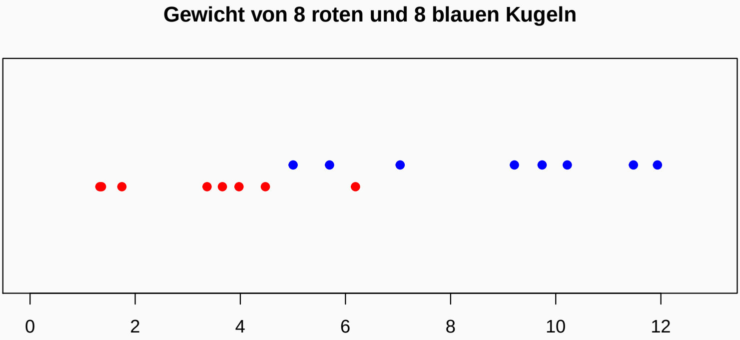
Sind $x_1, \ldots, x_n$ die Beobachtungswerte eines metrisch skalierten Merkmals X, so errechnet sich das **artimetische Mittel** durch

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Das arithmetische Mittel ist nur für metrisch skalierte Daten definiert!
- Ist eine Maßzahl die empfindlich gegenüber Ausreißern ist.
- Das gewichtete arithmetische Mittel erlaubt die Bestimmung des arithmetischen Mittels für klassierte Daten.
- **R-Funktion:** `mean()`

Beispiel: Median und arithmetisches Mittel für die roten Kugeln

	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5	i = 6	i = 7	i = 8
red	1.7471	3.3673	1.3287	6.1906	3.6590	1.3591	3.9749	4.4766
blue	9.7409	11.9352	7.0403	10.2196	11.4776	5.6971	9.2134	5.0044



Beispiel: Median und arithmetisches Mittel für die roten Kugeln

```r
# Ausgabe der Daten
red
```

```
## [1] 1.747092 3.367287 1.328743 6.190562 3.659016 1.359063 3.974858 4.476649
```

```r
# Artimethisches Mittel
mean(red)
```

```
## [1] 3.262909
```

```r
## Median
median(red)
```

```
## [1] 3.513151
```

```r
# Zusammenfassung wesentlicher Lagemaße
summary(red)
```

```
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##   1.329   1.650   3.513   3.263   4.100   6.191
```

Geometrisches und Harmonisches Mittel

- Es gibt zahlreiche spezialisierte Mittelwerte, wie das **geometrische Mittel** $\bar{x}_{geo}$ und das **harmonische Mittel** $\bar{x}_{harm}$. Welcher Mittelwert genutzt werden muss, hängt von den zugrundeliegenden Daten ab.
- Ziel der Mittelwertbildung ist, die durchschnittliche *Gesamtwirkung* von n meist unterschiedlichen Werten mit einem einzigen Wert zu beschreiben.

Geometrisches Mittel: $\bar{x}_{geo} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$

Harmonisches Mittel: $\bar{x}_{harm} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$

- **Anwendung:** Geometrische Mittelwerte eigenen sich für Wachstumsraten, harmonische Mittelwerte für Geschwindigkeiten.

Beispiel: Geometrisches Mittel

```r
# Das Wertpapier-Beispiel (Bitcoin) aus der Einführung liefert die folgenden
# Wertveränderungen (returns) für ersten 3 Jahre des Assets.
ret <- c(.12, .07, .01)

# Geometrisches Mittel
mean_gm <- prod(1 + ret)^(1/length(ret))
mean_gm
```

```
## [1] 1.065715
```

```r
# Probe
(100 * prod(1 + ret)) # Wert nach 3 Perioden bei 100 Euro Startwert
```

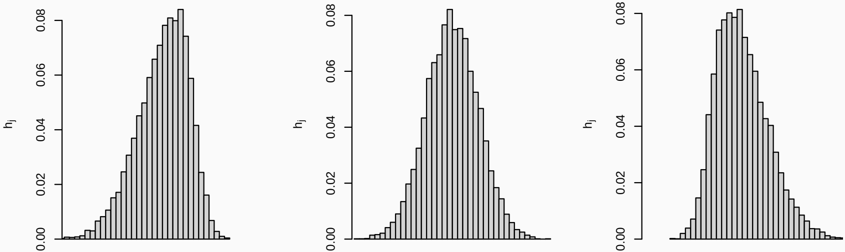
```
## [1] 121.0384
```

```r
(100 * mean_gm^3) # Wert nach 3 Perioden berechnet mit x_{geom}
```

```
## [1] 121.0384
```

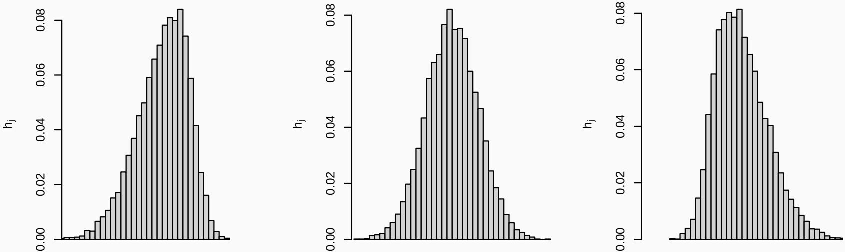
Schiefe

- Wo liegen $\bar{x}$, $\bar{x}_{Median}$ und $\bar{x}_{Modus}$ bei den nachfolgend gezeigten Häufigkeitsverteilungen?



Schiefe

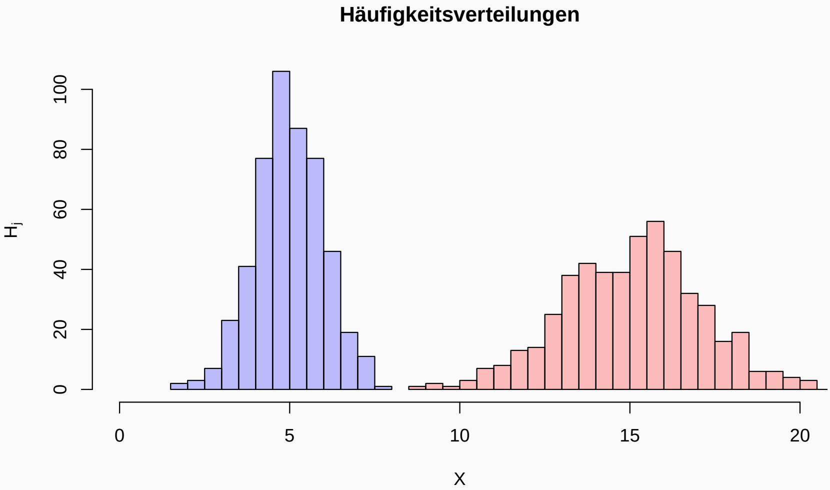
- Wo liegen $\bar{x}$, $\bar{x}_{Median}$ und $\bar{x}_{Modus}$ bei den nachfolgend gezeigten Häufigkeitsverteilungen?



- Linksschiefe Häufigkeitsverteilung: $\bar{x} < \bar{x}_{Median} < \bar{x}_{Modus}$
- Symmetrische Häufigkeitsverteilung: $\bar{x} = \bar{x}_{Median} = \bar{x}_{Modus}$
- Rechtsschiefe Häufigkeitsverteilung: $\bar{x} > \bar{x}_{Median} > \bar{x}_{Modus}$

Outline

Beispiel: Streuungsmaße



Übersicht: Streuungsmaße

Lagemaß	Symbol	Berechnung
Spannweite	R	$x_{max} - x_{min}$
Interquartilsabstand	IQR	$Q_{0.75} - Q_{0.25}$
(empirische) Varianz	s^2	$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$
Standardabweichung	s	$\sqrt{s^2}$
Variationskoeffizient	V	$s/\bar{x}$

Achtung: Nicht jede Maßzahl ist für jede Art der *Skalierung* und damit nicht für jede Variable (sinnvoll) bestimmbar.

Spannweite

Definition: Spannweite

Die Breite eines Streubereichs nennt man Spannweite R. Sie ergibt sich aus dem Maximum und Minimum der Daten.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

- Nachteil: Nur zwei *extreme* Werte gehen in die Berechnung ein, der Großteil der Daten bleibt ungenutzt.
- Die Spannweite hat keine eigene **R-Funktion**, kann aber einfach mittels `max()` und `min()` berechnet werden.

Definition: Interquartilsabstand

Der **Quartilsabstand** gibt die Größe des Bereiches zwischem dem oberen und dem unteren Quartil einer Verteilung an, in dem die mittleren 50% der Beobachtungen fallen.

$$IQR = Q_{0.75} - Q_{0.25}$$

- Zwischen dem oberen und dem unteren Quartil liegen 50% der Beobachtungen.
- Kann auch sinnvoll für ordinalskalierte Merkmale bestimmt werden.
- Ist *robust* in dem Sinne, dass die *IQR* weitgehend unempfindlich gegenüber Ausreißern ist.
- **R-Funktion:** `IQR()`

Varianz

Definition: Varianz

Der **Varianz** ist die mittlere quadrierte Abweichung vom arithmetischen Mittel

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \quad \text{oder} \quad s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

- Es gilt immer $s^2 \geq 0$
- Wird unterschiedlich für die Stichprobe und für die Grundgesamtheit (Population) berechnet.
- Grundidee: Einbezug aller Abweichungen vom Mittelwert
- Beobachtungen die weit von $\bar{x}$ entfernt liegen werden überproportional stark gewichtet.
- **R-Funktion:** `var()`

Standardabweichung

Definition: Standardabweichung

Die **Standardabweichung** ist die Wurzel aus der Varianz.

$$s = \sqrt{s^2}$$

- Weißt die gleiche Maßeinheit wie die Daten auf
- Ist i.d.R. einfacher zu interpretieren als die Varianz.
- **R-Funktion:** `sd()`

Rechenbeispiel

Berechnung der Varianz der roten Kugeln aus dem Eingangsbeispiel.

i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	1.7471	-1.5158	2.2977
2	3.3673	0.1044	0.0109
3	1.3287	-1.9342	3.7410
4	6.1906	2.9277	8.5712
5	3.6590	0.3961	0.1569
6	1.3591	-1.9038	3.6246
7	3.9749	0.7119	0.5069
8	4.4766	1.2137	1.4732

$n = 8 \quad \bar{x} = 3.2629 \quad \sum(x_i - \bar{x}) = 0 \quad \sum(x_i - \bar{x})^2 = 20.3823 \quad s^2 = 2.9118$

Rechenbeispiel

Berechnung der Varianz der blauen Kugeln aus dem Eingangsbeispiel.

i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	9.7409	0.9499	0.9022
2	11.9352	3.1442	9.8858
3	7.0403	-1.7508	3.0653
4	10.2196	1.4285	2.0406
5	11.4776	2.6866	7.2176
6	5.6971	-3.0939	9.5725
7	9.2134	0.4223	0.1783
8	5.0044	-3.7866	14.3386

$n = 8 \quad \bar{x} = 8.7911 \quad \sum(x_i - \bar{x}) = 0 \quad \sum(x_i - \bar{x})^2 = 47.201 \quad s^2 = 6.743$

Variationskoeffizient

Definition: Variationskoeffizient

Der **Variationskoeffizient** ist der Quotient aus Standardabweichung und arithmetischem Mittel.

$$V = \frac{s}{\bar{x}}$$

- Ist dimensionslos und vergleichbar
- Der Variationskoeffizient hat keine eigene **R-Funktion**, kann aber einfach mittels `sd()` und `mean()` berechnet werden.

Beispiel: Streuungsmaße

```r
# Ausgabe der Daten
blue
```

```
## [1]  9.740948 11.935249  7.040281 10.219562 11.477642  5.697140  9.213390
## [8]  5.004441
```

```r
# Spannweite
max(blue) - min(blue)
```

```
## [1] 6.930808
```

```r
## Varianz
var(blue)
```

```
## [1] 6.742995
```

```r
# Interquartilsabstand
IQR(blue)
```

```
## [1] 3.829586
```

```r
# Variationskoeffizient
sd(blue) / mean(blue)
```

Outline

i	1	2	3
x_i	5	5	5

$$Var(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

$$Var(x) = 0$$

IQR ?

Verteilungsfunktion? $S(\quad) =$

1 Lagemaße

2 Streuungsmaße

3 Konzentrationsmaße

Konzentration

Definition: Konzentration

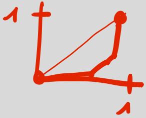
Man spricht von Konzentration oder Ungleichheit, falls zu einem bestimmten Zeitpunkt ein relativ kleiner Anteil der Merkmalsträger einen hohen Anteil an der Summe der Merkmalswerte besitzt.

- Konzentration bzw. Ungleichheitsdiskussionen findet man häufig im Kontext von Einkommen oder Vermögen.
- Beispiele: In Deutschland besitzen 10% der Bevölkerung des Vermögens.

Lorenzkurve

Definition: Lorenzkurve

Der Polygonzug durch die Punkte $P_0 = (0,0)$ und $P_j = (k_j, l_j)$ mit $j = 1, \ldots, q$ heißt **Lorenzkurve**.



$$k_j = \sum_{i=1}^{j} \frac{H_j}{n} = \sum_{i=1}^{j} h_j \qquad l_j = \frac{\sum_{i=1}^{j} a_i H_i}{\sum_{i=1}^{q} a_i H_i}$$

- Die Lorenzkurzve verläuft durch die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 1)$
- Die Lorenzkurve verläuft immer **unterhalb** der Winkelhalbierenden.
- Die Lorenzkurve ist winkelhalbierend, wenn alle Mermalsausprägungen gleich häufig vorkommen. Dann liegt keine Konzentration vor. Je weiter die Lorenzkurve sich von der Winkelhalbierenden entfernt, desto größer ist die Ungleichheit.
- **R-Funktion:** `Lc()` aus dem Zusatzpaket `ineq`

Beispiel

Wir betrachten vereinfachend die Einkommensverteilungen der folgenden drei sehr kleinen Länder.

```
A <- c(1000, 3000, 4000, 4000, 8000)
B <- c(2000, 2000, 4000, 8000)
C <- c(1000, 2000, 5000, 8000)
```

Beispiel 4

$$k_j = \sum_{i=1}^{j} h_j$$

$$P(k_j \mid l_j)$$

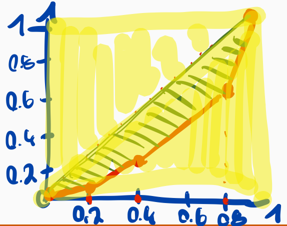
$$l_j = \frac{\sum_{i=1}^{j} a_i H_i}{\sum_{i=1}^{q} a_i H_i}$$

$$\frac{1000}{20000}$$

j	a_j	k_j	l_j	H_i
0		0	0	
1	1000	0.2	0.05	1
2	3000	0.4	0.2	1
3	4000	0.8	0.6	2
4	8000	1	1	1

$n = 5$

$$\begin{aligned} & 1000 \cdot 1 \\ + & 3000 \cdot 1 \\ + & 4000 \cdot 2 \\ + & 8000 \cdot 1 \\ \hline & 20.000 \end{aligned}$$



$$\sum_{i=1}^{j=1} a_i H_i = 1000 \cdot 1$$

Gini Koeffizient

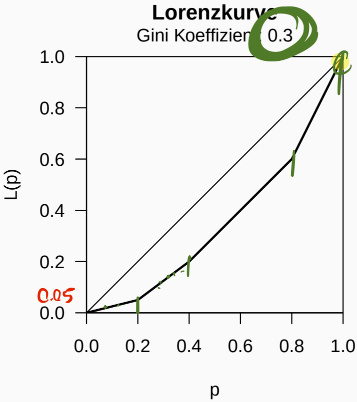
Definition: Gini Koeffizient

Das Doppelte der Fläche zwischen der Lorenzkurve und der Winkelhalbierenden heißt **Gini-Koeffizient** G und wird als Konzentrationsmaß einer Häufigkeitsverteilung verwendet.

$$G = \sum_{i=1}^{n}(k_i + k_{i-1})(l_i + l_{i-1}) - 1$$

- Um den Gini-Koeffizienten zu berechnen sind alle Stützpunkte der Lorenzkurve erforderlich. Es gilt $0 \leq G \leq \frac{n-1}{n} < 1$.
- Wenn die Lorenzkurve winkelhalbierend ist, gilt $G = 0$. In diesem Fall gibt es keine Einkommensunterschiede.
- Werden *alle* Ausgangswerte x_i mit einem Faktor a multipliziert, sodass $y_i = a \cdot x_i$, dann gilt $G_y = G_x$.
- **R-Funktion:** `Gini()` aus dem Zusatzpaket `ineq`

Lorenzkurve mit Gini-Koeffizient



Verständnisfragen

- Welche Lage- und Streuungsparameter eignen sich für ordinalskalierte Merkmale? Welche sind für nominalskalierte Merkmale geeignet?
- Welche Streuungsmaße berücksichtigen nur einzelne Beobachtungswerte der Häufigkeitsverteilung?
- Wie macht sich eine vollkommene Gleichheit in der Einkommensverteilung eines Landes in der Lorenzkurve bemerkbar? Wie groß ist dann der GINI-Koeffizient?

Verständnisfragen (Antworten)

- Welche Lage- und Streuungsparameter eignen sich für ordinalskalierte Merkmale? Welche sind für nominalskalierte Merkmale geeignet?
  - **Ordinal:** Median, Quantile, Modus, Quartilsabstände.
  - **Nominal:** Modus.
- Welche Streuungsmaße berücksichtigen nur einzelne Beobachtungswerte der Häufigkeitsverteilung?
  - **Einzelne Beobachtungswerte:** Spannweite
  - **Alle Beobachtungswerte:** alle weitern die vorgestellt wurden.
- Wie macht sich eine vollkommene Gleichheit in der Einkommensverteilung eines Landes in der Lorenzkurve bemerkbar? Wie groß ist dann der GINI-Koeffizient?
  - Winkelhalbierende, $G = 0$