

# Statistik

CH.3 - Maßzahlen

2025 || Prof. Dr. Buchwitz, Sommer, Henke

Wir geben Impulse

- Erlernen der Grundfähigkeiten zum Beschreiben von Datenmengen mit Hilfe statistischer Maßzahlen.
- Einteilung statistischer Maßzahlen in Lage-, Streuungs- und Konzentrationsmaße.
- Verdeutlichen der Anwendung mit Hilfe von R.

Ziel der folgenden Maßzahlen ist die Reduktion der Daten auf Kennzahlen, die einen Großteil der *wesentlichen* Informationen der zugrundeliegenden statistischen Variablen enthalten.

- **Lagemaße:** Beschreiben das Zentrum / die Mitte einer Beobachtungsreihe
- **Streuungsmaße:** Beschreiben die Abweichung vom Zentrum einer Häufigkeitsverteilung.
- **Konzentrationsmaße:** Beschreiben, wie sich die Summe der Merkmalswerte der Beobachtungsreihe auf die Untersuchungseinheiten verteilt.

- 1 Lagemaße
- 2 Streuungsmaße
- 3 Konzentrationsmaße

Die folgenden Daten bilden das Gewicht (*in kg*) von zufällig ausgewählten Kugeln aus der Produktion einer Fabrik für Bowlingkugeln ab.

- Handelt es sich bei den vorliegenden Daten um eine Stichprobe oder um eine Grundgesamtheit?
- Welches Skalenniveau weisen die gezeigten Daten auf?
- Wie könnte man die Daten beschreiben?

|      | i = 1 | i = 2  | i = 3 | i = 4  | i = 5  | i = 6 | i = 7 | i = 8 |
|------|-------|--------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|
| red  | 1.747 | 3.367  | 1.329 | 6.191  | 3.659  | 1.359 | 3.975 | 4.477 |
| blue | 9.741 | 11.935 | 7.040 | 10.220 | 11.478 | 5.697 | 9.213 | 5.004 |

## Gewicht von 8 roten und 8 blauen Kugeln



| Lagemaß               | Symbol             | Berechnung  |
|-----------------------|--------------------|---|
| Modus                 | $\bar{x}_{Modus}$  | $h_{Modus} \geq h_j$  |
| Median                | $\bar{x}_{Median}$ | $x_{\frac{n+1}{2}}$ oder $\frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$ |
| Quantil               | $Q_\alpha$         | Wert der Verteilungsfunktion  |
| Arithmetisches Mittel | $\bar{x}$          | $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  |
| Geometrisches Mittel  | $\bar{x}_{geo}$    | $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$                             |
| Harmonisches Mittel   | $\bar{x}_{harm}$   | $\frac{n}{\sum_{i=1}^n 1/x_i}$  |

**Achtung:** Nicht jede Maßzahl ist für jede Art der *Skalierung* und damit nicht für jede Variable (sinnvoll) bestimmbar.

## Definition: Modus

Der **Modus** oder **Modalwert** ist die häufigste Ausprägung einer Verteilung.

- Der Modus *kann* für beliebig skalierte Variablen bestimmt werden.
- Bei klassierten Daten wird die am häufigsten auftretende Klasse als Modalklasse bezeichnet.
- Der Modus kann mit Hilfe der **R-Funktion** `modal()` aus dem `fhswf` Paket berechnet werden.



## Definition: Median

Sind  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  die der Größe nach geordneten Beobachtungswerte eines metrisch skalierten Merkmals  $X$ , ergibt sich der **Median**  $\bar{x}_{Median}$  als

$$\bar{x}_{Median} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

- Der Median wird auch als Zentralwert bezeichnet.
- Der Median teilt die Daten in zwei gleich große Hälften.
- Kann für metrisch und ordinal skalierte Merkmale verwendet werden.
- Ist *robust* gegenüber Ausreißern.
- **R-Funktion:** `median()`

## Definition: Quantil

Das  $\alpha$ -Quantil eines Merkmals ist der Wert, unterhalb dessen ein vorgegebener Anteil  $\alpha$  aller Beobachtungswerte der Verteilung liegt. Dieser Wert ergibt sich aus der (empirischen) Verteilungsfunktion  $S()$ .

$$S(Q_\alpha) = \alpha$$

- Quantile sind Verallgemeinerungen des Medians, dieser ist  $Q_{0.5}$ .
- Einige Gruppen von Quantilen haben spezielle Namen
  - ▶ Quartile:  $Q_{0.25}$ ,  $Q_{0.5}$ ,  $Q_{0.75}$
  - ▶ Percentile:  $Q_{0.01}$ ,  $Q_{0.02}$ ,  $Q_{0.03}$ ,  $Q_{0.04}$ , . . .
- **R-Funktion:** `quantile()`

Der Boxplot oder Box-Whisker-Plot ist eine grafische Darstellung von Minimum, 1. Quartil, Median, 3. Quartil und Maximum.

**Boxplot für die roten und blauen Kugeln**



## Definition: Arithmetisches Mittel

Sind  $x_1, \dots, x_n$  die Beobachtungswerte eines metrisch skalierten Merkmals  $X$ , so errechnet sich das **arithmetische Mittel** durch

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- Das arithmetische Mittel ist nur für metrisch skalierte Daten definiert!
- Ist eine Maßzahl, die empfindlich gegenüber Ausreißern ist.
- Das gewichtete arithmetische Mittel erlaubt die Bestimmung des arithmetischen Mittels für klassierte Daten.
- **R-Funktion:** `mean()`

## Beispiel: Median und arithmetisches Mittel für die roten Kugeln

|      | i = 1 | i = 2  | i = 3 | i = 4  | i = 5  | i = 6 | i = 7 | i = 8 |
|------|-------|--------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|
| red  | 1.747 | 3.367  | 1.329 | 6.191  | 3.659  | 1.359 | 3.975 | 4.477 |
| blue | 9.741 | 11.935 | 7.040 | 10.220 | 11.478 | 5.697 | 9.213 | 5.004 |

**Gewicht von 8 roten und 8 blauen Kugeln**



# Beispiel: Median und arithmetisches Mittel für die roten Kugeln

```
# Ausgabe der Daten
```

```
red
```

```
## [1] 1.747 3.367 1.329 6.191 3.659 1.359 3.975 4.477
```

```
# Arithmetisches Mittel
```

```
mean(red)
```

```
## [1] 3.263
```

```
## Median
```

```
median(red)
```

```
## [1] 3.513
```

```
# Zusammenfassung wesentlicher Lagemaße
```

```
summary(red)
```

```
##      Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##      1.33   1.65   3.51   3.26   4.10   6.19
```

- Es gibt zahlreiche spezialisierte Mittelwerte wie das **geometrische Mittel**  $\bar{x}_{geo}$  und das **harmonische Mittel**  $\bar{x}_{harm}$ . Welcher Mittelwert genutzt werden muss, hängt von den zugrundeliegenden Daten ab.
- Ziel der Mittelwertbildung ist, die durchschnittliche *Gesamtwirkung* von  $n$  meist unterschiedlichen Werten mit einem einzigen Wert zu beschreiben.

**Geometrisches Mittel:** 
$$\bar{x}_{geo} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

**Harmonisches Mittel:** 
$$\bar{x}_{harm} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

- **Anwendung:** Geometrische Mittelwerte eignen sich für Wachstumsraten, harmonische Mittelwerte für Geschwindigkeiten.

# Beispiel: Geometrisches Mittel

```
# Das Wertpapier-Beispiel (Bitcoin) aus der Einführung liefert die folgenden  
# Wertveränderungen (returns) für ersten 3 Jahre des Assets.
```

```
ret <- c(.12, .07, .01)
```

```
# Geometrisches Mittel
```

```
mean_gm <- prod(1 + ret)^(1/length(ret))
```

```
mean_gm
```

```
## [1] 1.066
```

```
# Probe
```

```
(100 * prod(1 + ret)) # Wert nach 3 Perioden bei 100 Euro Startwert
```

```
## [1] 121
```

```
(100 * mean_gm^3) # Wert nach 3 Perioden berechnet mit  $x_{\text{geom}}$ 
```

```
## [1] 121
```



- Wo liegen  $\bar{x}$ ,  $\bar{x}_{Median}$  und  $\bar{x}_{Modus}$  bei den nachfolgend gezeigten Häufigkeitsverteilungen?



- Wo liegen  $\bar{x}$ ,  $\bar{x}_{Median}$  und  $\bar{x}_{Modus}$  bei den nachfolgend gezeigten Häufigkeitsverteilungen?



- Linksschiefe Häufigkeitsverteilung:  $\bar{x} < \bar{x}_{Median} < \bar{x}_{Modus}$
- Symmetrische Häufigkeitsverteilung:  $\bar{x} = \bar{x}_{Median} = \bar{x}_{Modus}$
- Rechtsschiefe Häufigkeitsverteilung:  $\bar{x} > \bar{x}_{Median} > \bar{x}_{Modus}$

- 1 Lagemaße
- 2 Streuungsmaße
- 3 Konzentrationsmaße

## Häufigkeitsverteilungen



| Lagemaß               | Symbol | Berechnung                                     |
|-----------------------|--------|--|
| Spannweite            | $R$    | $x_{max} - x_{min}$                            |
| Interquartilsabstand  | $IQR$  | $Q_{0.75} - Q_{0.25}$                          |
| (empirische) Varianz  | $s^2$  | $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ |
| Standardabweichung    | $s$    | $\sqrt{s^2}$                                   |
| Variationskoeffizient | $V$    | $s/\bar{x}$                                    |

**Achtung:** Nicht jede Maßzahl ist für jede Art der *Skalierung* und damit nicht für jede Variable (sinnvoll) bestimmbar.

## Definition: Spannweite

Die Breite eines Streubereichs nennt man Spannweite  $R$ . Sie ergibt sich aus dem Maximum und Minimum der Daten.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

- Nachteil: Nur zwei *extreme* Werte gehen in die Berechnung ein, der Großteil der Daten bleibt ungenutzt.
- Die Spannweite hat keine eigene **R-Funktion**, kann aber einfach mittels `max()` und `min()` berechnet werden.

## Definition: Interquartilsabstand

Der **Quartilsabstand** gibt die Größe des Bereiches zwischen dem oberen und dem unteren Quartil einer Verteilung an, in dem die mittleren 50% der Beobachtungen fallen.

$$IQR = Q_{0.75} - Q_{0.25}$$

- Zwischen dem oberen und dem unteren Quartil liegen 50% der Beobachtungen.
- Kann auch sinnvoll für ordinalskalierte Merkmale bestimmt werden.
- Ist *robust* in dem Sinne, dass der *IQR* weitgehend unempfindlich gegenüber Ausreißern ist.
- **R-Funktion:** `IQR()`

## Definition: Varianz

Die **Varianz** ist die mittlere quadrierte Abweichung vom arithmetischen Mittel.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{oder} \quad s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

- Es gilt immer  $s^2 \geq 0$
- Wird unterschiedlich für die Stichprobe und die Grundgesamtheit (Population) berechnet.
- Grundidee: Einbezug aller Abweichungen vom Mittelwert
- Beobachtungen, die weit von  $\bar{x}$  entfernt liegen, werden überproportional stark gewichtet.
- **R-Funktion:** `var()`



## Definition: Standardabweichung

Die **Standardabweichung** ist die Wurzel aus der Varianz.

$$s = \sqrt{s^2}$$

- Weist die gleiche Maßeinheit wie die Daten auf
- Ist i.d.R. einfacher zu interpretieren als die Varianz.
- **R-Funktion:** `sd()`

Berechnung der Varianz der roten Kugeln aus dem Eingangsbeispiel.

| $i$ | $x_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ |
|-----|-------|-----------------|---------------------|
| 1   | 1.747 | -1.5158         | 2.2977              |
| 2   | 3.367 | 0.1044          | 0.0109              |
| 3   | 1.329 | -1.9342         | 3.7410              |
| 4   | 6.191 | 2.9277          | 8.5712              |
| 5   | 3.659 | 0.3961          | 0.1569              |
| 6   | 1.359 | -1.9038         | 3.6246              |
| 7   | 3.975 | 0.7119          | 0.5069              |
| 8   | 4.477 | 1.2137          | 1.4732              |

$$n = 8 \quad \bar{x} = 3.2629 \quad \sum (x_i - \bar{x}) = 0 \quad \sum (x_i - \bar{x})^2 = 20.3823 \quad s^2 = 2.9118$$

Berechnung der Varianz der blauen Kugeln aus dem Eingangsbeispiel.

| $i$ | $x_i$  | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ |
|-----|--------|-----------------|---------------------|
| 1   | 9.741  | 0.9499          | 0.9022              |
| 2   | 11.935 | 3.1442          | 9.8858              |
| 3   | 7.040  | -1.7508         | 3.0653              |
| 4   | 10.220 | 1.4285          | 2.0406              |
| 5   | 11.478 | 2.6866          | 7.2176              |
| 6   | 5.697  | -3.0939         | 9.5725              |
| 7   | 9.213  | 0.4223          | 0.1783              |
| 8   | 5.004  | -3.7866         | 14.3386             |

$$n = 8 \quad \bar{x} = 8.7911 \quad \sum (x_i - \bar{x}) = 0 \quad \sum (x_i - \bar{x})^2 = 47.201 \quad s^2 = 6.743$$

## Definition: Variationskoeffizient

Der **Variationskoeffizient** ist der Quotient aus Standardabweichung und arithmetischem Mittel.

$$V = \frac{s}{\bar{x}}$$

- Ist dimensionslos und vergleichbar
- Der Variationskoeffizient hat keine eigene **R-Funktion**, kann aber einfach mittels `sd()` und `mean()` berechnet werden.

# Beispiel: Streuungsmaße

```
# Ausgabe der Daten
```

```
blue
```

```
## [1] 9.741 11.935 7.040 10.220 11.478 5.697 9.213 5.004
```

```
# Spannweite
```

```
max(blue) - min(blue)
```

```
## [1] 6.931
```

```
## Varianz
```

```
var(blue)
```

```
## [1] 6.743
```

```
# Interquartilsabstand
```

```
IQR(blue)
```

```
## [1] 3.83
```

```
# Variationskoeffizient
```

```
sd(blue) / mean(blue)
```

```
## [1] 0.2954
```

- 1 Lagemaße
- 2 Streuungsmaße
- 3 Konzentrationsmaße

## Definition: Konzentration

Man spricht von Konzentration oder Ungleichheit, falls zu einem bestimmten Zeitpunkt ein relativ kleiner Anteil der Merkmalsträger einen hohen Anteil an der Summe der Merkmalswerte besitzt.

- Konzentration bzw. Ungleichheitsdiskussionen findet man häufig im Kontext von Einkommen oder Vermögen.
- Beispiel: In Deutschland besitzen 10% der Bevölkerung 90% des Vermögens.

## Definition: Lorenzkurve

Der Polygonzug durch die Punkte  $P_0 = (0, 0)$  und  $P_j = (k_j, l_j)$  mit  $j = 1, \dots, q$  heißt **Lorenzkurve**.

$$k_j = \sum_{i=1}^j \frac{H_i}{n} = \sum_{i=1}^j h_i \quad l_j = \frac{\sum_{i=1}^j a_i H_i}{\sum_{i=1}^q a_i H_i}$$

- Die Lorenzkurve verläuft durch die Punkte  $(0, 0)$  und  $(1, 1)$
- Die Lorenzkurve verläuft immer **unterhalb** der Winkelhalbierenden.
- Die Lorenzkurve ist winkelhalbierend, wenn alle Merkmalsausprägungen gleich häufig vorkommen. Dann liegt keine Konzentration vor. Je weiter die Lorenzkurve sich von der Winkelhalbierenden entfernt, desto größer ist die Ungleichheit.
- **R-Funktion:** `Lc()` aus dem Zusatzpaket `ineq`



Wir betrachten vereinfachend die Einkommensverteilungen der folgenden drei sehr kleinen Länder.

```
A <- c(1000, 3000, 4000, 4000, 8000)
B <- c(2000, 2000, 4000, 8000)
C <- c(1000, 2000, 5000, 8000)
```

|      | j | $s_{a_j}$ | $s_{k_j}$ | $s_{l_j}$ |
|------|---|-----------|-----------|-----------|
| 1    | 0 |           | 0         | 0         |
| 1000 | 1 | 1000      | 0.2       | 0.05      |
| 3000 | 2 | 3000      | 0.4       | 0.2       |
| 4000 | 3 | 4000      | 0.8       | 0.6       |
| 8000 | 4 | 8000      | 1         | 1         |

## Definition: Gini Koeffizient

Das Doppelte der Fläche zwischen der Lorenzkurve und der Winkelhalbierenden heißt **Gini-Koeffizient**  $G$  und wird als Konzentrationsmaß einer Häufigkeitsverteilung verwendet.

$$G = \sum_{i=1}^n (k_i + k_{i-1})(l_i - l_{i-1}) - 1$$

- Um den Gini-Koeffizienten zu berechnen, sind alle Stützpunkte der Lorenzkurve erforderlich. Es gilt  $0 \leq G \leq \frac{n-1}{n} < 1$ .
- Wenn die Lorenzkurve winkelhalbierend ist, gilt  $G = 0$ . In diesem Fall gibt es keine Einkommensunterschiede.
- Werden *alle* Ausgangswerte  $x_i$  mit einem Faktor  $a$  multipliziert, sodass  $y_i = a \cdot x_i$ , dann gilt  $G_y = G_x$ .
- **R-Funktion:** `Gini()` aus dem Zusatzpaket `ineq`



- Welche Lage- und Streuungsparameter eignen sich für ordinalskalierte Merkmale? Welche sind für nominalskalierte Merkmale geeignet?
- Welche Streuungsmaße berücksichtigen nur einzelne Beobachtungswerte der Häufigkeitsverteilung?
- Wie macht sich eine vollkommene Gleichheit in der Einkommensverteilung eines Landes in der Lorenzkurve bemerkbar? Wie groß ist dann der GINI-Koeffizient?

- Welche Lage- und Streuungsparameter eignen sich für ordinalskalierte Merkmale? Welche sind für nominalskalierte Merkmale geeignet?
  - ▶ **Ordinal:** Median, Quantile, Modus, Quartilsabstände.
  - ▶ **Nominal:** Modus.
- Welche Streuungsmaße berücksichtigen nur einzelne Beobachtungswerte der Häufigkeitsverteilung?
  - ▶ **Einzelne Beobachtungswerte:** Spannweite
  - ▶ **Alle Beobachtungswerte:** alle weiteren, die vorgestellt wurden.
- Wie macht sich eine vollkommene Gleichheit in der Einkommensverteilung eines Landes in der Lorenzkurve bemerkbar? Wie groß ist dann der GINI-Koeffizient?
  - ▶ Winkelhalbierende,  $G = 0$