

# Statistik

CH.5 - Kombinatorik

2025 || Prof. Dr. Buchwitz, Sommer, Henke

Wir geben Impulse

Die Kombinatorik ist das Teilgebiet der Mathematik, das sich mit dem Zählen von **Zusammenstellungen** von Elementen aus einer vorgegebenen endlichen Menge beschäftigt.

- In diesem Kapitel werden wir folgende Fragen beantworten, um sie dann im nächsten Kapitel als Hilfsmittel zur **Berechnung von Wahrscheinlichkeiten** einzusetzen:
  - ▶ Wie viele Möglichkeiten gibt es  $n$  Elemente anzuordnen?
  - ▶ Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus  $n$  Elementen  $k$  auszuwählen?

## Definition: Fakultät

$n!$  bezeichnet das Produkt der ersten  $n$  natürlichen Zahlen. Es gilt  $0! = 1$ .

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$$

- Fakultäten wachsen mit steigendem  $n$  sehr schnell stark an.
- Beispiel:  $3! = 6$  und  $6! = 720$
- **R-Funktion:** `factorial()`

## Wachstum der Fakultäten



## Definition: Binomialkoeffizient

Der Binomialkoeffizient ist für  $n > 0$ ,  $k \geq 0$  und  $n \geq k$  definiert als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n+1-k)}{k!}$$

- Der Binomialkoeffizient gibt an, auf wie viele verschiedene Arten man  $k$  Elemente aus einer begrenzten Menge von  $n$  Elementen auswählen kann.
- Der Binomialkoeffizient ist symmetrisch, es gilt  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .
- **R-Funktion:** `choose()`

# Binomialkoeffizient

Formel:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Rechenregeln:

- a)  $\binom{n}{1} = n$  für  $n \geq 0$
- b)  $\binom{n}{n} = 1$
- c)  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$  für  $k \leq n$
- d)  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
- e)  $\binom{n}{0} = 1$  für  $n \geq 0$
- f)  $\binom{n}{k} = 0$  für  $k > n$

Aufgabe: a)  $\binom{8}{3}$  b)  $\binom{10}{5}$  c)  $\binom{12}{8}$



## Definition: Permutation

Jede Zusammenstellung aus einer Menge mit  $n$  Elementen, die dadurch entsteht, dass man die gegebenen Elemente in **beliebiger** Reihenfolge aufreihet, heißt eine *Permutation* dieser Elemente.

- Sind alle  $n$  Elemente verschieden, so ergibt sich die Anzahl der Permutationen  $P_n = n!$
- Lassen sich die  $n$  Elemente in  $k$  Klassen einteilen, wird die Anzahl der Permutationen wie folgt berechnet  $P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$
- **R-Funktion:** `permutations()` aus dem Zusatzpaket `gtools`

**Beispiel 1:** Wie viele Möglichkeiten gibt es, drei verschiedenfarbige Kugeln anzuordnen?



**Beispiel 2:** Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei gelbe und eine rote Kugel anzuordnen?





**Beispiel 1:** Wie viele Möglichkeiten gibt es, drei verschiedenfarbige Kugeln anzuordnen?

```
library(gtools)
balls <- c("red", "blue", "green")
p <- permutations(v=balls, n=3, r=3,
                  set=F, repeats = F)
p
```

```
##      [,1]  [,2]  [,3]
## [1,] "red"  "blue" "green"
## [2,] "red"  "green" "blue"
## [3,] "blue" "red"   "green"
## [4,] "blue" "green" "red"
## [5,] "green" "red"   "blue"
## [6,] "green" "blue"  "red"
```

**Beispiel 2:** Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei gelbe und eine rote Kugel anzuordnen?

```
library(gtools)
balls <- c("red", "yellow", "yellow")
p <- permutations(v=balls, n=3, r=3,
                  set=F, repeats = F)
unique(p)
```

```
##      [,1]  [,2]  [,3]
## [1,] "red"  "yellow" "yellow"
## [2,] "yellow" "red"   "yellow"
## [3,] "yellow" "yellow" "red"
```

## Definition: Kombination

Jede Zusammenstellung aus  $k$  Elementen einer Menge mit  $n$  Elementen mit  $k < n$  heißt Kombination  $k$ -ter Ordnung aus den  $n$  Elementen.

**Kombinationen können wie folgt unterschieden werden:**

- **Reihenfolge:** Gelten zwei Kombinationen mit genau denselben  $k$  Elementen, aber in verschiedener Reihenfolge als verschiedenen, so spricht man von *Variationen* (Kombinationen mit Berücksichtigung der Reihenfolge).
- **Wiederholung:** Dürfen die  $k$  Elemente nur einmal vorkommen (keine Mehrfachauswahl des gleichen Elements), so spricht man von *Kombinationen ohne Wiederholung* (ohne Zurücklegen).
- **R-Funktion:** `combinations()` aus dem Zusatzpaket `gtools` und `expand.grid()`

# Kombinationen

**Vier Möglichkeiten:** Wählen von 2 aus 3 verschiedenartigen Kugeln mit/ohne Wiederholung und mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.



# Kombinationen

```
balls <- c("red", "blue", "green")
```

```
# Mit Wiederholung
```

```
## und mit Reihenfolge
```

```
mwmr <- expand.grid(balls,balls)
```

```
nrow(mwmr)
```

```
## [1] 9
```

```
## und ohne Reihenfolge
```

```
mwor <- combinations(v=balls, n=3, r=2,  
                     repeats = T)
```

```
nrow(mwor)
```

```
## [1] 6
```

```
balls <- c("red", "blue", "green")
```

```
# Ohne Wiederholung
```

```
## und mit Reihenfolge
```

```
owmr <- mwmr[mwmr$Var1 != mwmr$Var2, ]
```

```
nrow(owmr)
```

```
## [1] 6
```

```
## und ohne Reihenfolge
```

```
owor <- combinations(v=balls, n=3, r=2,  
                     repeats = F)
```

```
nrow(owor)
```

```
## [1] 3
```

|                   | Permutationen  | Kombinationen               |                                |
|-------------------|--|-----------------------------|--------------------------------|
|                   | Reihenfolge berücksichtigt                                     | ohne Reihenfolge            |                                |
| ohne Wiederholung | $P_n = n!$   | $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ | $C_n^k = \binom{n}{k}$         |
| mit Wiederholung  | $P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ | $V_{w,n}^k = n^k$           | $C_{w,n}^k = \binom{n+k-1}{k}$ |

- Wieso wird bei Permutationen hinsichtlich der Reihenfolge unterschieden?
- Wann wird eine Kombination Variation genannt?
- Wie hoch sind die Gewinnchancen beim Lotto?