

Statistik

CH.6 - Wahrscheinlichkeitsrechnung

2025 || Prof. Dr. Buchwitz, Sommer, Henke

Wirgeben Impulse

Lernziele

- Erkennen von Unterschieden und Gemeinsamkeiten von relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten.
- Verinnerlichen der Tatsache, dass Zufallsexperimente der Ausgangspunkt der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind.
- Verstehen der Rechenregel für Wahrscheinlichkeiten und bedingte Wahrscheinlichkeiten.

Zufallsexperiment

Definition: Zufallsexperiment

- Ein Zufallsexperiment ist ein Experiment, das alle der folgenden Bedingungen erfüllt:
 - Es wird nach genau festgelegten Vorschriften durchgeführt.
 - Es kann beliebig oft unter gleichen Bedingungen wiederholt werden.
 - Das Ergebnis ist nicht genau vorhersehbar.
 - Alle möglichen Ausgänge sind vor der Durchführung bekannt.
- Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments nennt man Ereignisraum Ω.
- Teilmengen des Ereignisraumes Ω nennt man (zufällige) Ereignisse. Diese werden mit lateinischen Buchstaben (A, B, C, ...) bezeichnet.
- Ereignisse, die sich nicht weiter zerlegen lassen, heißen Elementarereignisse.

Beispiel: Zufallsexperiment

```
# Definition des Ereignisraumes
Omega \leftarrow c(1, 2, 3, 4, 5, 6)
# Durchführen des Experiments
(E <- sample(Omega, size = 1, replace = FALSE))
## [1] 2
# Erneute Durchführung des Experiments
(E <- sample(Omega, size = 1, replace = FALSE))
## [1] 3
```

Ereignisse

Defintion: Sicheres Ereignis

Ein Ereignis *E* heißt **sicheres Ereignis**, wenn es bei jeder Ausführung des Zufallsexperiments eintritt.

$$E = \Omega$$

Beispiel: Würfeln einer Zahl zwischen 1 und 6 bei einem 6-seitigen Würfel.

Defintion: Unmögliches Ereignis

Ein Ereignis Ø heißt unmögliches Ereignis, wenn es niemals eintritt.

$$\emptyset = \{ \}$$

Beispiel: Würfeln einer 9 bei einem 6-seitigen Würfel.

5

Rechnen mit Ereignissen

 Ereignisse sind als Mengen definiert, folglich können die Notation und Operationen der Mengenlehre beim Rechnen verwendet werden.

Definition: Komplementärereignis

Das Ereignis $\bar{A} \subset \Omega$, das genau dann eintritt, wenn A nicht eintritt, heißt das **zu A** komplementäre Ereignis.

Beispiel:
$$\bar{A} = B$$
 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $A = \{1, 3, 5\}$ $B = \{2, 4, 6\}$

Defnition: Disjunkte Ereignisse

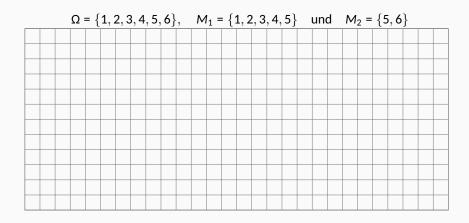
Zwei Ereignisse sind **disjunkt**, wenn sie nicht beide gleichzeitig eintreten können, also $A \cap B = \emptyset$.

Beispiel:
$$C \cap D$$
 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $C = \{1, 2\}$ $D = \{6\}$

6

Operatoren

- lacktriangle Vereinigungsmenge $A \cup B$
- Durchschnittsmenge $A \cap B$
- lacksquare Differenzmenge A \ B



Operatoren

[1] 1 2 3 4

```
M1 \leftarrow c(1,2,3,4,5)
M2 < -c(5,6)
union(M1, M2) # Vereinigungsmenge
## [1] 1 2 3 4 5 6
intersect(M1, M2) # Durchschnittsmenge
## [1] 5
setdiff(M1, M2) # Differenzmenge
```

Definition: Wahrscheinlichkeit (von Mises)

Die statistische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A ist der Grenzwert der relativen Häufigkeit des Auftretens des Ereignisses, also die relative Häufigkeit bei einer sehr großen Anzahl von Wiederholungen.

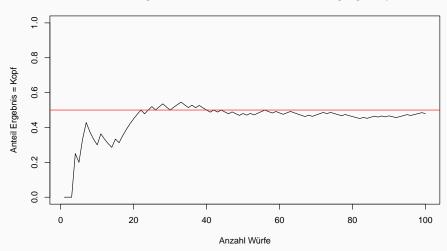
$$P(A) = \frac{\text{Anzahl des Eintreffens von A}}{\text{Anzahl der Wiederholungen des Zufallsexperiments}}$$

9

Kopf ## 0.2

```
set.seed(11)
# 5-malige Wiederholung Münzwurf
Omega <- c("Kopf","Zahl")</pre>
coin <- sample(Omega, size=5, replace=T)</pre>
prop <- proportions(table(coin))</pre>
prop
## coin
## Kopf Zahl
## 0.2 0.8
# Relativer Anteil für Ergebnis = Kopf
prop[1]
```

Entwicklung des Anteils für das Auftreten des Ausgangs 'Kopf'



Definition: Wahrscheinlichkeit (Laplace)

Ein Experiment mit endlich vielen, gleich wahrscheinlichen Ausgängen heißt Laplace-Experiment.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für A 'günstigen' Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Axiome

Axiome nach Kolomogorov:

- **Positivität:** $P(A) \ge 0$ für $A \in \Omega$
- Normiertheit: $P(\Omega) = 1$
- Additivität: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, falls $A \cap B = \emptyset$

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

Seien A_i mit i = 1, ..., n alle möglichen Ereignisse eines Experiments, sodass $\Omega = \{A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n\}$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$$

Für das unmögliche Ereignis gilt

$$P(\varnothing) = 0$$

Für das zu A komplementäre Ereignis gilt

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

■ Für die Vereinigung zweier beliebiger Ergebnisse A und B gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

■ Ist A Teilmenge von B, also A ⊂ B, dann gilt

$$P(A) \leq P(B)$$

■ Für disjunkte Ereignisse A und B gilt

$$P(A \cap B) = 0$$

Unabhängigkeit

Definition: Unabhägigkeit von Ereignissen

Zwei Ereignisse A und B heißen **unabhängig**, wenn das Eintreten des einen Ereignisses die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des anderen Ereignisses nicht beeinflusst. Dann gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

■ $P(A \cap B)$ kann als die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse gleichzeitig eintreten, interpretiert werden.

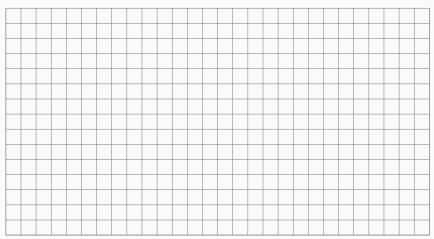
anderes Ereignis B bereits eingetreten ist.

■ Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A kann davon abhängig sein, ob ein

Beispiele:

- Die Wahrscheinlichkeit an einer Krankheit zu erkranken, kann davon abhängig sein, ob man gegen diese Krankheit geimpft ist.
- Die Wahrscheinlichkeit, Deutscher Meister beim Fußball zu werden, ist davon abhängig, ob man vorher Herbstmeister ist.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten können als Ergebnis von mehrstufigen Zufallsexperimenten verstanden werden und lassen sich als Baumdiagramm darstellen:



Definition: Bedingte Wahrscheinlichkeit

Seien A und B zwei Ereignisse. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Bedingung, dass das Ereignis B bereits eingetreten ist, heißt **bedingte**Wahrscheinlichkeit von A unter B oder Wahrscheinlichkeit von A gegeben B und ist definiert als

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
 für $P(B) \neq 0$

■ $P(A \cap B)$ kann als die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse gleichzeitig eintreten, interpretiert werden.

Durch Umformung der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit erhält man den **Multiplikationssatz** der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$
 sowie $P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A|B)$
Es gilt zudem:

$$P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P(B)$$
$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Definition: Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei A_1,A_2,\ldots,A_k eine disjunkte Zerlegung des Ereignisraumes $\Omega.$ Wenn $B\subset\Omega,$ dann gilt

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

Satz von Bayes

- Die bedingten Wahrscheinlichkeiten P(A|B) und P(B|A) sind nicht gleich!
- Die Verbindung zwischen diesen Wahrscheinlichkeiten gibt der Satz von Bayes wieder.

Definition: Satz von Bayes

Wenn der Ereignisraum Ω in A und \bar{A} partitioniert wird und B ein beliebiges Ereignis aus Ω ist, gilt

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

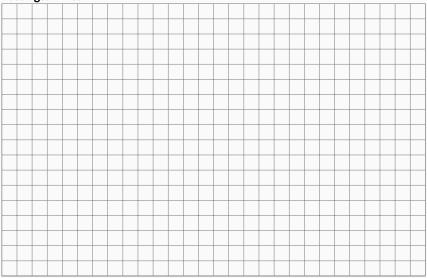
Der Satz von Bayes ergibt sich aus Kombination von $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ und $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$.

Beispiel

- Eine Bank vergibt Privatkredite an Kunden.
 - Sie weiß, dass 3% dieser Kunden den Privatkredit entweder nicht termingerecht oder überhaupt nicht zurückzahlen, in diesem Sinne also schlechte Kreditnehmer sind. Es ist ferner bekannt, dass 25% der schlechten Kreditnehmer mindestens einen weiteren Ratenkredit haben, die guten Kreditnehmer aber zu 85% keinen weiteren Ratenkredit bedienen müssen.
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand ein schlechter Kreditnehmer ist, wenn er schon mindestens einen weiteren Ratenkredit bezieht?
 - Wie viel Prozent derjenigen, die noch keinen Ratenkredit haben, sind gute Kreditnehmer?

Beispiel

Lösungsskizze:



Verständnisfragen

- Was versteht man unter komplementären Ereignissen?
- Sind komplementäre Ereignisse unabhängig?
- Ist die Aussage $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ korrekt?