

# Statistik

CH.9 - Spezielle Verteilungen

2025 || Prof. Dr. Buchwitz, Sommer, Henke

Wir geben Impulse

- Kennenlernen häufig verwendeter Verteilungen
- Verdeutlichen des Zusammenhangs von Dichte- und Verteilungsfunktionen
- Nachvollziehen von Verteilungstabellen als zentrales Arbeitsinstrument für das händische Rechnen mit Verteilungen

- Im Folgenden werden **stetige** und **diskrete** Verteilungen diskutiert, die vielfach in der Statistik angewandt werden.

- 1 Normalverteilung
- 2 Binomialverteilung
- 3 Poissonverteilung
- 4 Hypergeometrische Verteilung
- 5 Exponentialverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Dichte der Standardnormalverteilung



## Dichten von Normalverteilungen



## Definition: Normalverteilung

Eine stetige Zufallsvariable  $X$  heißt **normalverteilt**, wenn ihre Dichtefunktion mit den beiden Parameter Erwartungswert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$  gegeben ist durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- Ist die am meisten verwendete stetige Verteilung.
- Kann in der Praxis in vielen Situationen (näherungsweise) beobachtet werden.
- Stellt oft eine hinreichend gute Approximation für andere Verteilungen dar.
- **R-Funktion:** `dnorm()`, `pnorm()`, `qnorm()` und `rnorm()`



- Parameter der Normalverteilung sind Erwartungswert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$ .
- Die Kurzschreibweise für eine normalverteilte Zufallsvariable  $X$  mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  lautet:  $X \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ .
- Der Graph der Dichtefunktion der Normalverteilung ist **symmetrisch** an der Stelle  $\mu$  und besitzt an dieser Stelle ein Maximum.
- Der Wert an der Stelle  $\mu$  ist **umso größer** (die Dichtefunktion also umso höher und steiler), **je kleiner** der Wert der Standardabweichung ist.

- Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert einer normalverteilten Zufallsvariablen um den Betrag *einer Standardabweichung*  $\sigma$  vom Erwartungswert  $\mu$  abweicht, beträgt etwa 68%.

$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert einer normalverteilten Zufallsvariablen um den Betrag von *zwei Standardabweichungen*  $\sigma$  vom Erwartungswert  $\mu$  abweicht, beträgt etwa 95%.

$$P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert einer normalverteilten Zufallsvariablen um den Betrag von *drei Standardabweichungen*  $\sigma$  vom Erwartungswert  $\mu$  abweicht, beträgt über 99%.

$$P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$$

## Dichte der Normalverteilung



Dichtefunktion



Verteilungsfunktion



- Als **Standardnormalverteilung** wird die Normalverteilung mit den Parametern  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$  bezeichnet.
- Durch Transformation lassen sich normalverteilte Daten in **standardnormalverteilte Daten** übertragen.
- Die Transformation zur Standardisierung von normalverteilten zu standardnormalverteilten Zufallsvariablen heißt **z-Transformation**.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

## Dichten von Normalverteilungen



Die Verteilungsfunktion der Normalverteilung wird per Definition durch Integration der Dichtefunktion zwischen  $-\infty$  und  $x$  bestimmt:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- Das erforderliche Integral ist nicht einfach lösbar und die Variantenvielfalt möglicher Normalverteilungen sehr groß. Tabelliert wird daher üblicherweise **nur die Standardnormalverteilung**.
- Die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung wird üblicherweise zur einfachen Unterscheidung mit  $\Phi(z)$  bezeichnet.

## Ablesen aus der Tabelle:

- Die Zeilen geben den  $z$ -Wert bis zur **ersten Nachkommastelle** an.
- Die Spalten ergänzen die **zweite Nachkommastelle** des  $z$ -Wertes.
- Innerhalb der Tabelle befindet sich der Flächeninhalt unter der Dichtefunktion von  $-\infty$  bis zur Stelle  $z$ .

$$\Phi(z) = F(z) = P(Z \leq z)$$

- In den Tabellen sind aufgrund der Symmetrie nur Werte für positive  $z$  angegeben. Es gilt  $\Phi(-z) = F(-z) = 1 - F(z)$ .

Die Tabellen befinden sich im Studienbuch auf S. 352 ff.



# Verteilungsfunktion $F(z)$ für $z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$

Verteilungsfunktion  $F(z)$  der Standardnormalverteilung  $N(0, 1)$

Beispiel:  $F(z) = P(z \leq 1.96) = 0.9750$

| z   | 0      | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   | 0.07   | 0.08   | 0.09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |

# Normalverteilung (R-Funktionen)

```
# Dichtefunktion (Density)  
dnorm(0, mean=0, sd=1)
```

```
## [1] 0.3989
```

```
# Verteilungsfunktion (Probabilitydistribution)  
pnorm(q=0, mean=0, sd=1)
```

```
## [1] 0.5
```

```
# Quantilsfunktion  
qnorm(p=0.5, mean=0, sd=1)
```

```
## [1] 0
```

```
# Zufallszahlengenerator (Random Number Generator)  
set.seed(100)  
rnorm(n=1, mean=0, sd=1)
```

```
## [1] -0.5022
```

Die Gleichspannung von Batterien, die zum Betrieb eines Sensors verwendet werden, lässt sich als normalverteilte Zufallsgröße mit  $\mu = 12\text{V}$  und  $\sigma = 0.6\text{V}$  modellieren. Für den Betrieb des Sensors sind mehr als 11.3V notwendig.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Batterie eine Spannung von mehr als 12V liefert?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Sensor mit einer zufällig ausgewählten Batterie nicht betrieben werden kann?



- 1 Normalverteilung
- 2 Binomialverteilung
- 3 Poissonverteilung
- 4 Hypergeometrische Verteilung
- 5 Exponentialverteilung

**Experiment:**  $n$ -fache stochastisch unabhängige Wiederholung eines Bernoulli-Experiments mit identischer Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  und den Zufallsvariablen  $X_i$  mit  $i = 1, \dots, n$  und  $X_i \in \{0, 1\}$ .

- **Wahrscheinlichkeitsfunktion:**  $f(x) = \binom{n}{k} p^x (1 - p)^{n-x}$
- **Erwartungswert:**  $\mu = n \cdot p$
- **Varianz:**  $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$

## Anwendungsfall

Qualitätssicherung bei großen Produktionsmengen:  $n$  Proben werden zur Prüfung ausgewählt,  $p$  ist die Wahrscheinlichkeit für einen Defekt.

- **R-Funktion:** `dbinom()`, `pbinom()`, `qbinom()` und `rbinom()`

Binomialverteilung mit  $p=0.5$  und  $n=28$



- 1 Normalverteilung
- 2 Binomialverteilung
- 3 Poissonverteilung
- 4 Hypergeometrische Verteilung
- 5 Exponentialverteilung



**Experiment:** Modellierung seltener Ereignisse, die (theoretisch) in unbegrenzter Anzahl auftreten können.

- **Wahrscheinlichkeitsfunktion:**  $f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$
- **Erwartungswert:**  $\mu = \lambda$
- **Varianz:**  $\sigma^2 = \lambda$

### Anwendungsfall

z.B. Anzahl Großbrände in einem Bezirk in einem Monat; Anzahl Personen, die sich in einem bestimmten Zeitintervall in eine Warteschlange stellen.

- **R-Funktion:** `dpois()`, `ppois()`, `qpois()` und `rpois()`

Poissonverteilung mit  $\Lambda=1.5$



- 1 Normalverteilung
- 2 Binomialverteilung
- 3 Poissonverteilung
- 4 Hypergeometrische Verteilung
- 5 Exponentialverteilung

# Hypergeometrische Verteilung (diskret)

**Experiment:** Eine Urne enthält  $N$  Kugeln, von denen  $N \cdot p$  weiß und  $N \cdot (1 - p)$  schwarz sind. Aus der Urne werden  $n$  Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable  $X$  gibt die Anzahl der weißen Kugeln an.

- **Wahrscheinlichkeitsfunktion:**  $f(x) = \frac{\binom{N \cdot p}{x} \cdot \binom{N \cdot (1-p)}{n-x}}{\binom{N}{n}}$
- **Erwartungswert:**  $\mu = n \cdot p$
- **Varianz:**  $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) \cdot \frac{N-n}{N-1}$

## Anwendungsfall

Ziehen ohne Zurücklegen, z.B. in der Qualitätskontrolle bei kleinen Stückzahlen ( $n$  klein,  $N$  nicht riesig).

- **R-Funktion:** `dhyper()`, `phyper()`, `qhyper()` und `rhyper()`

# Hypergeometrische Verteilung (diskret)



- 1 Normalverteilung
- 2 Binomialverteilung
- 3 Poissonverteilung
- 4 Hypergeometrische Verteilung
- 5 Exponentialverteilung

**Experiment:** Modellierung der Zeit zwischen dem Auftreten zwei aufeinander folgender poisson-verteilter Ereignisse.

- **Dichtefunktion:**  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$
- **Erwartungswert:**  $\mu = \frac{1}{\lambda}$
- **Varianz:**  $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

## Anwendungsfall

Verteilung der Ankunftszeiten in Warteschlangen.

- **R-Funktion:** `dexp()`, `pexp()`, `qexp()` und `rexp()`

Exponentialverteilung mit Lambda=1.5





# Approximation



- Im Rahmen der Inferenzstatistik werden wir noch weitere Verteilungen kennenlernen, die zur Berechnung von Teststatistiken und Konfidenzintervallen benötigt werden.
- Die **wichtigsten Verteilungen** sind im Studienbuch tabelliert.
- Weitere Verteilungen sind:
  - ▶  $\chi^2$ -Verteilung
  - ▶ t-Verteilung
  - ▶ F-Verteilung

- 1 Wieso ist es nützlich, die Standardnormalverteilung zu kennen?
- 2 Wie unterscheiden sich die Dichten  $N(0, 5)$ ,  $N(0, 0.5)$  und  $N(5, 1)$  von der Gestalt der Standardnormalverteilung?
- 3 Wie kann eine normalverteilte Zufallsvariable in eine standardnormalverteilte Zufallsvariable überführt werden?