

# **Statistik**

CH.8 - Wahrscheinlichkeitsverteilungen

2024 | | Prof. Dr. Buchwitz, Sommer, Henke

Wirgeben Impulse

#### Lernziele

- Verstehen des Konzeptes der Verteilung von Zufallsvariablen.
- Unterscheidung von diskreten und stetigen Dichten
- Zusammenhang von Dichte- und Verteilungsfunktion

#### Zufallsvariablen

#### **Definition: Zufallsvariablen**

Unter einer Zufallsvariablen X versteht man eine Funktion, die aufgrund eines Zufallsexperiments den Ergebnissen des Zufallsexperiments numerische Werte zuordnet. Jedes mögliche Ergebnis eines Zufallsexperiments führt dabei zu einem anderen numerischen Wert.

- Kennzeichnend sind die Merkmalsausprägungen  $x_i$  und die damit assoziierten Wahrscheinlichkeiten  $P(X = x_i)$ .
- Zufallsvariablen werden in der Regel mit Großbuchstaben  $(X,Y,X_i)$  bezeichnet.

## Beispiel: Zufallsvariablen

Das Zufallsexperiment "Werfen einer Münze" mit den Ergebnissen **Kopf** und **Zahl** kann als Zufallsvariable *X* modelliert werden:

$$X(x = \text{Kopf}) = X(\text{Kopf}) = 0$$
  
 $X(x = \text{Zahl}) = X(\text{Zahl}) = 1$ 

- Bei der gewählten Zuordnung kann man die Zufallsvariable X auch als Anzahl des Auftretens von Zahl beim Werfen einer Münze auffassen.
- Bei einer fairen Münze gilt  $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$ .

4

### Diskrete und stetige Zufallsvariablen

#### **Definition: Diskrete Zufallsvariable**

Eine Zufallsvariable heißt diskret, wenn sie **nur diskrete Werte**, also endlich viele oder abzählbar unendlich viele, Werte annimmt.

- Beispiel: Anzahl defekter Glühbirnen in einer Stichprobe von 10 Stück
- Beispiel: Anzahl der Kinder unter 18 Jahre in einem Haushalt

#### **Definition: Stetige Zufallsvariable**

Eine Zufallsvariable heißt stetig, wenn sie mit zwei Werten definiert, auch **alle** Werte im Intervall zwischen diesen beiden Werten annehmen kann.

- Beispiel: Zeitaufwand für die Produktion eines Werkstücks
- **Beispiel:** Gewicht einer aus einer Abfüllanlage entnommenen Flasche

#### Wahrscheinlichkeitsfunktion

#### **Definition: Wahrscheinlichkeitsfunktion**

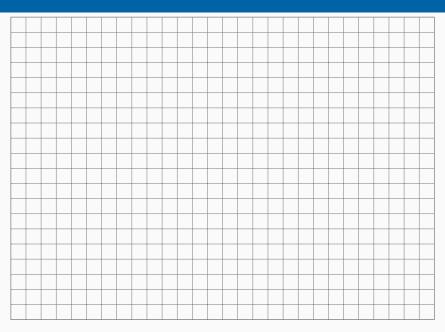
Sei *X* eine diskrete Zufallsvariable. Dann heißt die Funktion *f* Wahrscheinlichkeitsfunktion von *X*.

$$f(x) = P(X = x)$$

Beispiel: Als Zufallsexperiment wird eine faire Münze zweimal geworfen. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl des Auftretens des Ereignisses "Zahl". Definieren Sie die Zufallsvariable und skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion!

6

## Wahrscheinlichkeitsfunktion



## Verteilungsfunktion

#### **Definition: Verteilungsfunktion**

Sei X eine diskrete oder stetige Zufallsvariable. Dann heißt die Funktion F Verteilungsfunktion von X.

$$F(x) = P(X < x)$$

■ **Beispiel:** Als Zufallsexperiment wird eine faire Münze zweimal geworfen. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl des Auftretens des Ereignisses "Zahl". Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion!

## Verteilungsfunktion



## **Eigenschaften Verteilungsfunktion**

#### Für Verteilungsfunktionen gilt:

- $\blacksquare$  F(x) ist monoton steigend
- $\coprod$   $\lim_{X\to\infty} F(X) = 1$
- $\blacksquare$  F(x) ist in jedem Punkt (zumindest rechtsseitig) stetig

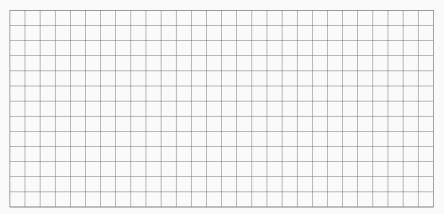
#### Dichtefunktion

Ist *X* eine diskrete Zufallsvariable, dann gilt

$$F(x) = \sum_{x_i < x} f(x_i)$$

Ist X eine stetige Zufallsvariable, dann gilt

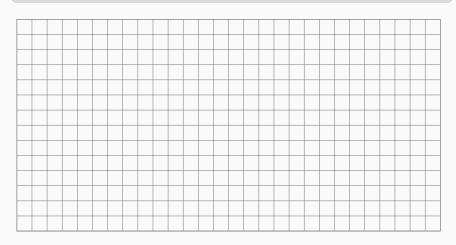
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x_i) dx$$



#### Dichtefunktion

#### Definition: Wahrscheinlichkeitsdichte bzw. Dichtefunktion

Die Funktion f(x) heißt bei **stetigen** Zufallsvariablen Wahrscheinlichkeitsdichte bzw. Dichtefunktion. TODO: Beziehung zur Verteilungsfunktion



## **Eigenschaften Dichtefunktion**

#### Für Wahrscheinlichkeits- und Dichtefunktionen gilt:

- Für alle  $x_i$  gilt, dass  $f(x_i) \ge 0$ .
- Für diskrete Verteilungen mit Wahrscheinlichkeitsfunktion gilt

$$\sum_{\text{alle } x_i} f(x_i) = 1$$

■ Für stetige Verteilungen mit Dichtefunktion gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

### **Erwartungswert**

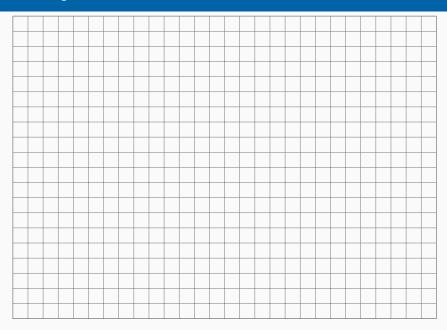
#### **Definition: Erwartungswert**

Sei X eine Zufallsvariable und f die dazugehörige Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion. Der Erwartungswert  $\mu$  ist definiert als

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{\text{alle } x_i} x_i \cdot f(x_i), & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \, dx, & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

■ **Beispiel:** Definieren Sie die Zufallsvariable X für das Werfen eines Würfels und berechnen Sie dessen Erwartungswert.

## Erwartungswert



#### **Varianz**

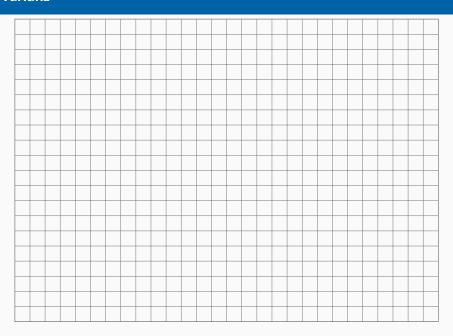
#### **Definition: Varianz**

Sei X eine Zufallsvariable und f die dazugehörige Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion. Die Varianz  $\sigma^2$  (Standardabweichung:  $\sigma$ ) ist definiert als

$$Var(X) = \begin{cases} \sum_{\text{alle } x_i} (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i), & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) \, dx, & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

■ **Beispiel:** Definieren Sie die Zufallsvariable X für das Werfen eines Würfels und berechnen Sie dessen Varianz.

## **Varianz**



## Verständnisfragen

- Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine diskrete und eine stetige Zufallsvariable.
- 2 Erläutern Sie, was man unter einer Verteilungsfunktion versteht.
- Welches ist der maximale Wert, den eine Verteilungsfunktion annehmen kann?