

# Statistik

CH.11 - Hypothesentests

2024 || Prof. Dr. Buchwitz, Sommer, Henke

Wir geben Impulse

- Spezifizieren des Konzeptes von Hypothesentests
- Kennenlernen von Hypothesentests für Mittelwerte und Anteilswerte
- Erweiterung des Testportfolios auf Tests für diskrete Verteilungen (Anpassungstest) und Tests auf Unabhängigkeit von Merkmalen

- 1 Evaluation
- 2 Vorgehen Hypothesentests
- 3 Tests für den Mittelwert
- 4 Tests für den Anteilswert
- 5 Verteilungstest
- 6 Unabhängigkeitstest

## Bitte evaluieren Sie den Kurs!

<http://evasys.fh-swf.de/evasys/online.php?pswd=WJVFL>



- 1 Evaluation
- 2 Vorgehen Hypothesentests
- 3 Tests für den Mittelwert
- 4 Tests für den Anteilswert
- 5 Verteilungstest
- 6 Unabhängigkeitstest



- 1 Formulieren Sie Nullhypothese  $H_0$  und Alternativhypothese  $H_1$ .
- 2 Legen Sie ein Signifikanzniveau  $\alpha$  fest.
- 3 Wählen Sie die passende Teststatistik.
- 4 Bestimmen Sie den Wert der Teststatistik, ab dem die Nullhypothese verworfen werden muss.
- 5 Bestimmen Sie den Vergleichswert aus den Stichprobendaten.
- 6 Entscheiden Sie durch Vergleich der Werte aus (4) und (5), ob Sie die Nullhypothese verwerfen können.

- 1 Evaluation
- 2 Vorgehen Hypothesentests
- 3 Tests für den Mittelwert
- 4 Tests für den Anteilswert
- 5 Verteilungstest
- 6 Unabhängigkeitstest



# Tests für den Mittelwert bei bekannter Varianz

| Test         | $H_0$            | $H_1$            | Teststatistik                                   | Verwerfe $H_0$ , wenn gilt: |
|--------------|------------------|------------------|---|-----------------------------|
| Beidseitig   | $\mu = \mu_0$    | $\mu \neq \mu_0$ | $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ | $ z  > z_{1-\alpha/2}$      |
| Rechtsseitig | $\mu \leq \mu_0$ | $\mu > \mu_0$    |   | $z > z_{1-\alpha}$          |
| Linksseitig  | $\mu \geq \mu_0$ | $\mu < \mu_0$    |   | $z < z_\alpha$              |

# Tests für den Mittelwert bei unbekannter Varianz

| Test         | $H_0$            | $H_1$            | Teststatistik                            | Verwerfe $H_0$ , wenn gilt: |
|--------------|------------------|------------------|--|-----------------------------|
| Beidseitig   | $\mu = \mu_0$    | $\mu \neq \mu_0$ | $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ | $ t  > t_{n-1, 1-\alpha/2}$ |
| Rechtsseitig | $\mu \leq \mu_0$ | $\mu > \mu_0$    |  | $t > t_{n-1, 1-\alpha}$     |
| Linksseitig  | $\mu \geq \mu_0$ | $\mu < \mu_0$    |  | $t < t_{n-1, \alpha}$       |

■ **R-Funktion:** `t.test()`

- 1 Evaluation
- 2 Vorgehen Hypothesentests
- 3 Tests für den Mittelwert
- 4 Tests für den Anteilswert
- 5 Verteilungstest
- 6 Unabhängigkeitstest

| Test         | $H_0$            | $H_1$            | Teststatistik   | Verwerfe $H_0$ , wenn gilt: |
|--------------|------------------|------------------|---|-----------------------------|
| Beidseitig   | $\pi = \pi_0$    | $\pi \neq \pi_0$ | $Z = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1 - \pi_0)}{n}}}$ | $ Z  > z_{1-\alpha/2}$      |
| Rechtsseitig | $\pi \leq \pi_0$ | $\pi > \pi_0$    |   | $Z > z_{1-\alpha}$          |
| Linksseitig  | $\pi \geq \pi_0$ | $\pi < \pi_0$    |   | $Z < z_\alpha$              |

■ **R-Funktion:** `prop.test()`

**Aufgabe:** Ein Schraubenproduzent behauptet, dass seine Lieferung eines speziellen Schraubentyps einen Ausschussanteil von höchstens 1% enthält. Der Empfänger der Lieferung ist jedoch der Meinung, dass der Anteil höher ist. Er nimmt eine Stichprobe von 1000 Schrauben und findet in dieser 15 nicht den Anforderungen entsprechenden Schrauben.

- Kann die Behauptung des Lieferanten bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.05$  widerlegt werden?
- **Hinweis:** Verteilungstabelle siehe nächste Seite.



# Verteilungsfunktion $F(z)$ für $z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$

Verteilungsfunktion  $F(z)$  der Standardnormalverteilung  $N(0, 1)$

Beispiel:  $F(z) = P(z \leq 1.96) = 0.9750$

| z   | 0      | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   | 0.07   | 0.08   | 0.09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |

- 1 Evaluation
- 2 Vorgehen Hypothesentests
- 3 Tests für den Mittelwert
- 4 Tests für den Anteilswert
- 5 Verteilungstest
- 6 Unabhängigkeitstest

- **Ausgangssituation:** Es liegen Daten von zwei oder mehr **unabhängig** gewonnenen Stichproben vor.
- **Ziel:** Zwei (oder mehrere) Grundgesamtheiten sollen hinsichtlich ihrer *Verteilung* verglichen werden.
- **Analytische Fragestellung:** Weichen die beiden *empirischen Verteilungen* so sehr voneinander ab, dass die Nullhypothese verworfen werden muss?

$$H_0 : F_1 = F_2 = \dots = F_k$$

- **Folge:** Wenn  $H_0$  verworfen werden muss, dann kann man davon ausgehen, dass die Stichproben nicht dieselbe Verteilungsfunktion aufweisen und infolgedessen nicht aus der gleichen Grundgesamtheit stammen.



An einer Hochschule wurde in einer Befragung von 1529 Studierenden ermittelt, ob die Studierenden in den Semesterferien einem Ferienjob nachgehen.

|        | male | female | Sum  |
|--------|------|--------|------|
| Job    | 718  | 593    | 1311 |
| No Job | 79   | 139    | 218  |
| Sum    | 797  | 732    | 1529 |

Unterscheidet sich das Verhalten von männlichen und weiblichen Studierenden signifikant ( $\alpha = 5\%$ )?

- **Voraussetzung:** Jede Zelle muss mindestens 5 Beobachtungen enthalten.
- **Vorgehensweise:** 6-Schritte Schema für das Testen von Hypothesen
- **Teststatistik:** Die  $\chi^2$ -Teststatistik setzt die Abweichungen von beobachteten ( $f_o$ ) und erwarteten  $f_e$  Häufigkeiten in Relation zu den erwarteten Häufigkeiten:

$$\chi^2 = \sum_{\text{alle Zellen}} \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$$

- Die  $\chi^2$ -Teststatistik folgt einer  $\chi^2$ -Verteilung mit  $(r - 1) \cdot (s - 1)$

- Die **erwarteten** Häufigkeiten ergeben sich als:

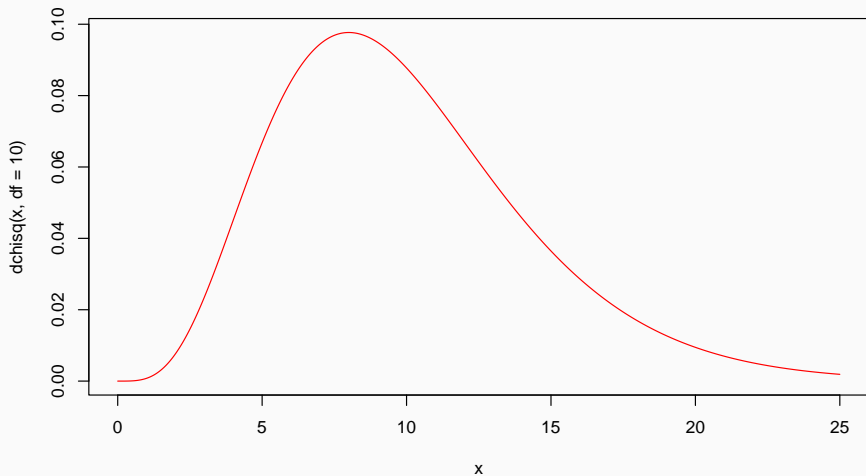
$$\frac{\sum \text{Spalte} \cdot \sum \text{Zeile}}{\text{Gesamtanzahl}}$$

- Die Nullhypothese lautet stets:

$$H_0 : F_1 = F_2 = \dots = F_k$$

- Es handelt sich hier immer um einen **rechtsseitigen Test**.

## Chi-Quadrat-Verteilung



# Quantile der $\chi^2_{n;\gamma}$ -Verteilung

Quantile  $\chi^2_{n;\gamma}$  der  $\chi^2_n$ -Verteilung  
 Beispiel:  $P(\chi^2_{10} \leq 20.4832) = 0.975$

| $n \setminus \gamma$ | 0.995  | 0.99   | 0.975  | 0.95   | 0.9    | 0.75   | 0.5     | 0.25    | 0.1     | 0.05    |
|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| 1                    | 7.879  | 6.635  | 5.024  | 3.841  | 2.705  | 1.323  | 0.4549  | 0.1015  | 0.0158  | 0.0039  |
| 2                    | 10.597 | 9.210  | 7.378  | 5.992  | 4.605  | 2.773  | 1.3863  | 0.5754  | 0.2107  | 0.1026  |
| 3                    | 12.838 | 11.345 | 9.348  | 7.815  | 6.251  | 4.108  | 2.3660  | 1.2125  | 0.5844  | 0.3518  |
| 4                    | 14.860 | 13.277 | 11.143 | 9.488  | 7.779  | 5.385  | 3.3567  | 1.9226  | 1.0636  | 0.7107  |
| 5                    | 16.750 | 15.086 | 12.832 | 11.070 | 9.236  | 6.626  | 4.3515  | 2.6746  | 1.6103  | 1.1455  |
| 6                    | 18.548 | 16.812 | 14.449 | 12.592 | 10.645 | 7.841  | 5.3481  | 3.4546  | 2.2041  | 1.6354  |
| 7                    | 20.278 | 18.475 | 16.013 | 14.067 | 12.017 | 9.037  | 6.3458  | 4.2549  | 2.8331  | 2.1673  |
| 8                    | 21.955 | 20.090 | 17.535 | 15.507 | 13.362 | 10.219 | 7.3441  | 5.0706  | 3.4895  | 2.7326  |
| 9                    | 23.589 | 21.666 | 19.023 | 16.919 | 14.684 | 11.389 | 8.3428  | 5.8988  | 4.1682  | 3.3251  |
| 10                   | 25.188 | 23.209 | 20.483 | 18.307 | 15.987 | 12.549 | 9.3418  | 6.7372  | 4.8652  | 3.9403  |
| 11                   | 26.757 | 24.725 | 21.920 | 19.675 | 17.275 | 13.701 | 10.3410 | 7.5841  | 5.5778  | 4.5748  |
| 12                   | 28.299 | 26.217 | 23.337 | 21.026 | 18.549 | 14.845 | 11.3403 | 8.4384  | 6.3038  | 5.2260  |
| 13                   | 29.820 | 27.688 | 24.736 | 22.362 | 19.812 | 15.984 | 12.3398 | 9.2991  | 7.0415  | 5.8919  |
| 14                   | 31.319 | 29.141 | 26.119 | 23.685 | 21.064 | 17.117 | 13.3393 | 10.1653 | 7.7895  | 6.5706  |
| 15                   | 32.801 | 30.578 | 27.488 | 24.996 | 22.307 | 18.245 | 14.3389 | 11.0365 | 8.5468  | 7.2609  |
| 16                   | 34.267 | 32.000 | 28.845 | 26.296 | 23.542 | 19.369 | 15.3385 | 11.9122 | 9.3122  | 7.9616  |
| 17                   | 35.718 | 33.409 | 30.191 | 27.587 | 24.769 | 20.489 | 16.3382 | 12.7919 | 10.0852 | 8.6718  |
| 18                   | 37.157 | 34.805 | 31.526 | 28.869 | 25.989 | 21.605 | 17.3379 | 13.6753 | 10.8649 | 9.3905  |
| 19                   | 38.582 | 36.191 | 32.852 | 30.143 | 27.204 | 22.718 | 18.3377 | 14.5620 | 11.6509 | 10.1170 |
| 20                   | 39.997 | 37.566 | 34.170 | 31.410 | 28.412 | 23.828 | 19.3374 | 15.4518 | 12.4426 | 10.8508 |
| 21                   | 41.401 | 38.932 | 35.479 | 32.671 | 29.615 | 24.935 | 20.3372 | 16.3444 | 13.2396 | 11.5913 |
| 22                   | 42.796 | 40.289 | 36.781 | 33.924 | 30.813 | 26.039 | 21.3370 | 17.2396 | 14.0415 | 12.3380 |
| 23                   | 44.181 | 41.638 | 38.076 | 35.172 | 32.007 | 27.141 | 22.3369 | 18.1373 | 14.8480 | 13.0905 |
| 24                   | 45.559 | 42.980 | 39.364 | 36.415 | 33.196 | 28.241 | 23.3367 | 19.0373 | 15.6587 | 13.8484 |
| 25                   | 46.928 | 44.314 | 40.647 | 37.653 | 34.382 | 29.339 | 24.3366 | 19.9393 | 16.4734 | 14.6114 |
| 26                   | 48.290 | 45.642 | 41.923 | 38.885 | 35.563 | 30.435 | 25.3365 | 20.8434 | 17.2919 | 15.3792 |
| 27                   | 49.645 | 46.963 | 43.194 | 40.113 | 36.741 | 31.528 | 26.3363 | 21.7494 | 18.1139 | 16.1514 |

- 1 Evaluation
- 2 Vorgehen Hypothesentests
- 3 Tests für den Mittelwert
- 4 Tests für den Anteilswert
- 5 Verteilungstest
- 6 Unabhängigkeitstest

- $\chi^2$ -Tests können auch verwendet werden, um die Frage zu beantworten, ob **zwei Merkmale unabhängig voneinander sind**.
- Im **Beispiel**: Ist die Annahme von Ferienjobs abhängig vom Geschlecht der Studierenden?
- Hypothesen:
  - ▶  $H_0$  : Annahme von Ferienjobs und Geschlecht sind voneinander **unabhängig**.
  - ▶  $H_1$  : Annahme von Ferienjobs und Geschlecht sind voneinander **abhängig**.

- 1 Wozu können  $\chi^2$ -Tests verwendet werden?
- 2 Wie müssen Null- und Alternativhypothese beim  $\chi^2$ -Test ausgestaltet werden?
- 3 Welches Skalenniveau müssen die Merkmale aufweisen, um im  $\chi^2$ -Test verwendet werden zu können?