

# **Statistik**

CH.7 - Anwendungen Wahrscheinlichkeitsrechnung

2025 | Prof. Dr. Buchwitz, Sommer, Henke

Wirgeben Impulse

#### Lernziele

- Verinnerlichen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.
- Verknüpfen der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Kombinatorik.
- Verstehen, dass das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten zu präzisieren Aussagen führt als sich auf die eigenen Intuition zu verlassen.

# Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Bei der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung gibt es zahlreiche Sonderfälle und Überraschungen. Wir diskutieren im Folgenden diese Themen:

- Urnenmodell
- Entscheidungsbäume
- Simpson Paradoxon
- Geburtstagsproblem

## Inhaltsübersicht

- 1 Urnenmodell
- 2 Entscheidungsbäume
- 3 Simpsons Paradoxon
- 4 Geburtstagsproblem

#### Urnenmodell: Überblick

Gegeben sei eine Urne mit N Kugeln, davon W weiße und S schwarze (W + S = N). Aus der Urne werden n Kugeln ( $1 \le n \le N$ ) nacheinander **ohne Zurücklegen** gezogen. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, dass sich unter den n Kugeln genau W weiße und S schwarze befinden, lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$P(A) = \frac{\binom{W}{W}\binom{S}{S}}{\binom{N}{n}}$$

#### Hypergeometrische Verteilung

ohne Zurücklegen

5

### **Urnenmodell: Beispiel**

Gegeben sei eine Urne mit N = 11 Kugeln, davon W = 5 weiße und S = 6 schwarze (5 + 6 = 11).

Aus der Urne werden n Kugeln ( $1 \le n \le 11$ ) nacheinander ohne Zurücklegen gezogen. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, dass sich unter den n Kugeln w weiße und s schwarze befinden, lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$P(A) = \frac{\binom{W=5}{w} \binom{S=6}{s}}{\binom{N=11}{n}}$$

Noch konkreter: Aus der Urne werden 5 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, dass sich unter den 5 Kugeln 2 weiße und 3 schwarze befinden, lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$P(A) = \frac{\binom{W=5}{w=2} \binom{S=6}{S=3}}{\binom{N=11}{n=5}}$$

6

#### **Urnenmodell: Simulation**

```
balls <- factor(c(rep("w",5), rep("s", 6)))
s <- sample(balls, size=1, replace=F)
balls <- factor(c(rep("w",5), rep("s", 6)))
s <- sample(balls, size=5, replace=F)
is.match <- function(x, s, w){
 tab <- table(x)
 return(tab[1] == s && tab[2] == w)
s
## [1] sswww
## Levels: s w
```

```
is.match(s, w=2, s=3)
```

```
## [1] FALSE
```

#### **Urnenmodell: Simulation**

```
set.seed(1)
# Lösung per Simulation
x \leftarrow replicate(n = 10000,
                expr = is.match(sample(balls, size=5, replace=F), s=3, w=2))
mean(x)
## [1] 0.4334
# Lösung per Rechnung
(choose(5,2) * choose(6, 3))/choose(11,5)
## [1] 0.4329
```

## **Urnenmodell: Anwendungsbeispiel**

Ein Unternehmen erhält wiederholt Lieferungen von 800 Flaschen zur Verpackung von flüssigem Waschmittel. Mit dem Lieferanten ist vereinbart, dass Lieferungen mit mehr als 2% fehlerhaften Flaschen zurückgewiesen werden dürfen. Um zu entscheiden, ob es eine Lieferung zurückweist, verfährt das Unternehmen nach folgender Regel: Der Lieferung werden 50 Flaschen zufällig entnommen und geprüft. Die Lieferung wird zurückgewiesen, wenn mehr als eine Flasche nicht dem vereinbarten Qualitätsstandard entspricht.

■ Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gerade noch zulässige Lieferung, d.h. mit genau 2% fehlerhaften Flaschen, zurückgewiesen wird?

# **Urnenmodell: Anwendungsbeispiel**



### **Urnenmodell: Anwendungsbeispiel**

```
# Flasche Fehlerfrei = TRUE, Flasche Fehlerhaft = FALSE
f <- c(rep(TRUE, 784), rep(FALSE, 16))
x <- replicate(n=10000, expr=sum(sample(f, size=50, replace = FALSE)))
p_0 <- mean(x == 50)
p_1 <- mean(x == 49)
1 - p_0 - p_1</pre>
## [1] 0.2644
```

```
# Lösung per Binomialkoeffizient
p_0 <- (choose(16,0)*choose(784,50))/choose(800,50)
p_1 <- (choose(16,1)*choose(784,49))/choose(800,50)
1 - p_0 - p_1</pre>
```

```
## [1] 0.2639
```

#### Inhaltsübersicht

- 1 Urnenmodell
- 2 Entscheidungsbäume
- 3 Simpsons Paradoxon
- 4 Geburtstagsproblem

# Entscheidungsbäume: Überblick

 Zahlreiche von Unsicherheit geprägte Sachverhalte können als Entscheidungsbäume dargestellt werden. Beispiel: Würfeln mit einem und mit zwei Würfeln.



# Entscheidungsbäume: Überblick



#### Entscheidungsbäume

- Unternehmen müssen täglich Entscheidungen treffen, z.B.:
  - über den Standort eines neuen Werkes
  - zwischen mehreren unterschiedlichen Anlageformen
  - über Investitionen in neue Maschinen etc.
- Was ist dabei zu beachten:
  - Nicht alle Informationen, die der Entscheider gerne zur Verfügung hätte, sind bekannt
  - Das Unternehmen ist darauf angewiesen, Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der verschiedenen Ereignisse abzuschätzen
  - Basierend auf diesen Wahrscheinlichkeiten werden Entscheidungen getroffen
  - Während des Entscheidungsprozesses kann es möglich sein, dass das Unternehmen an Zusatzinformationen gelangt
  - Durch diese Zusatzinformationen verändern sich die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der verschiedenen Ereignisse.

# Entscheidungsbäume: Beispiel



# Entscheidungsbäume: Beispiel



# Entscheidungsbäume: Beispiel



#### Inhaltsübersicht

- 1 Urnenmodell
- 2 Entscheidungsbäume
- 3 Simpsons Paradoxon
- 4 Geburtstagsproblem

```
UCBAdmissions[ , ,1] # Department A
```

```
## Gender
## Admit Male Female
## Admitted 512 89
## Rejected 313 19
```

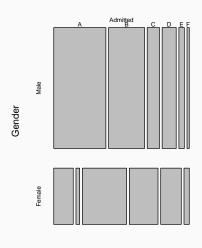
■ Frauen haben eine niedrigere Zulassunsgsquote

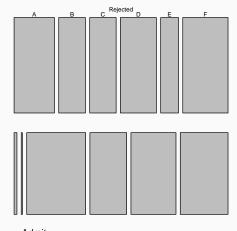
```
apply(UCBAdmissions,c(1,2),sum)
```

```
## Gender
## Admit Male Female
## Admitted 1198 557
## Rejected 1493 1278
```

plot(UCBAdmissions)

#### **UCBAdmissions**





Bewertung verschiedener Gruppen fällt scheinbar unterschiedlich aus, je nachdem, ob man die Ergebnisse der Gruppen kombiniert oder nicht.

#### Inhaltsübersicht

- 1 Urnenmodell
- 2 Entscheidungsbäume
- 3 Simpsons Paradoxon
- 4 Geburtstagsproblem

## Geburtstagsproblem: Überblick

■ Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Statistikvorlesung mit *k* = 100 Studierenden (mindestens) zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben (Ereignis A)?



## Geburtstagsproblem: Lösung

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\text{Anzahl der für } \bar{A} \text{ günstigen Geburtstagsanordenungen}}{\text{Anzahl der möglichen Geburtstagsanordnungen}}$$

Hierbei handelt es sich um Kombinationen *k*-ter Ordnung von 365 Tage mit Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne Wiederholung, sodass die Anzahl der möglichen Anordnungen für Ā folgt

Anzahl der für  $\bar{A}$  günstigen Geburtstagsanordnungen =  $\frac{365!}{(365-k)!}$ Bei den möglichen Anordnungen handelt es sich um Kombinationen k-ter Ordnung von 365 Tage mit Berücksichtigung der Reihenfolge und mit Wiederholung, sodass

Anzahl der möglichen Geburtstagsanordnungen = 365<sup>k</sup>

# Geburtstagsproblem: Lösung

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - k + 1)}{365^k}$$

Zwei Personen in einer Gruppe mit k = 100 Personen haben am gleichen Tag Geburtstag:

```
k <- 100
1- prod(365:(365-k+1))/365^k
```

## [1] 1

Intuitiv werden bestimmte Wahrscheinlichkeiten häufig falsch eingeschätzt.