

# **Statistik**

CH.13 - Multiple Regression

SS 2023 | | Prof. Dr. Buchwitz, Sommer, Henke

Wirgeben Impulse

#### Lernziele

- Erweitern des Prinzips der einfachen linearen Regression auf mehrere Variablen.
- Unterscheidung zwischen und Test von Partial- und aggregierten Effekten mittels Hypothesentest.
- Identifikation von und Umgang mit speziellen Problemen (Residualannahmen, Multikollinearität, Nichtlinearität) im Kontext der Regression.

# Inhaltsübersicht

- 1 Multiple Lineare Regression
- 2 Hypothesentests
- 3 Residualdiagnostik
- 4 Multikollinearität
- 5 Nichtlinearität

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_p) + \epsilon$$

- Mit Hilfe der einfachen linearen Regression kann der Zusammenhang einer abhängigen Variablen Y mit einer unabhängigen Variablen X modelliert werden.
- Die **multiple lineare Regression** erlaubt das Modellieren des Zusammenhangs einer abhängigen Variablen Y mit **mehreren** unabhängigen Variablen  $X_1, X_2, \ldots, X_p$ .

4

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_p X_p + \epsilon$$

- Die zuvor diskutierte einfache lineare Regression kann als Spezialfall der multiplen linearen Regression aufgefasst werden, bei der gilt p = 1.
- Wir nehmen weiterhin an, dass innerhalb des Wertebereichs der Daten der wahre Zusammenhang zwischen Y und den Prädiktoren durch ein lineares Modell approximiert werden kann.
- Jeder Regressor geht mit einem eigenen Koeffizienten  $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$  in die Gleichung ein. Der Fehlerterm  $\epsilon$  enthält zudem keine **systematischen Informationen** zur Erklärung der Streuung von Y, die nicht bereits durch die Regressoren abgebildet wurden.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i$$
  
 $i = 1, 2, \dots, n$ 

- Aus der Modellgleichung folgt die obige Darstellung für jede Beobachtung. Dabei repräsentiert  $y_i$  die i-te Beobachtung der abhängigen Variablen Y. Die Werte  $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ip}$  sind die Werte der zugehörigen Regressoren für die i-te Beobachtung in der Stichprobe (üblicherweise i-te Zeile im Datensatz).
- Der Wert  $\epsilon_i$  ist der Anpassungsfehler (Fehlerterm) der linearen Approximation für die i-te Beobachtungseinheit.

#### **Beispiel: Autodaten**

d 1100km weight hp cyl hub ## ## Mazda RX4 11.201 1.1884 110 6 2.622 ## Mazda RX4 Wag 11.201 1.3041 110 6 2,622 ## Datsun 710 10.316 1.0523 4 1 770 ## Hornet 4 Drive 10.991 1.4583 110 6 4.228 ## Hornet Sportabout 12.578 1.5604 175 8 5.899 ## Valiant 6 3.687 12.995 1.5694 105 ## Duster 360 8 5.899 16.449 1.6193 245 ## Merc 240D 9 640 1 4470 62 4 2 404 ## Merc 230 10 316 1 4288 95 4 2 307 ## Merc 280 12 251 1 5604 123 6 2 746 ## Merc 280C 13.214 1.5604 123 6 2.746 ## Merc 450SE 8 4.520 14.342 1.8461 180 ## Merc 450SL 13.596 1.6919 180 8 4.520 ## Merc 450SLC 15 475 1 7146 180 8 4 520 ## Cadillac Fleetwood 22 617 2 3814 205 8 7 735 ## Lincoln Continental 22,617 2,4603 215 8 7.538 ## Chrysler Imperial 16.001 2.4244 230 8 7.210 ## Fiat 128 7.260 0.9979 66 4 1.290 ## Honda Civic 7.737 0.7326 52 4 1.241 ## Tovota Corolla 6.938 0.8323 4 1 165 ## Tovota Corona 10.940 1.1181 4 1 968 ## Dodge Challenger 15.175 1.5966 150 8 5.211 ## AMC Javelin 15.475 1.5581 150 8 4.982 ## Camaro 728 17.685 1.7418 245 8 5.735 ## Pontiac Firebird 12 251 1 7441 175 8 6 555 ## Fiat X1-9 8 616 0 8777 4 1 295 ## Porsche 914-2 9.047 0.9707 91 4 1.971 ## Lotus Europa 4 1.558 7.737 0.6863 113 ## Ford Pantera I. 14.887 1.4379 264 8 5.752 ## Ferrari Dino 11.940 1.2564 175 6 2.376 ## Maserati Rora 15 681 1 6193 335 8 4 933

#### Datenbeschreibung

1100km Kraftstoffverbrauch in Litern pro 100km bei normaler Fahrweise

weight Fahrzeuggewicht in Tonnen.

hp Motorleistung in PS.
cyl Anzahl der Zylinder des
Fahrzeugmotors.
hub Hubraum des Motors in

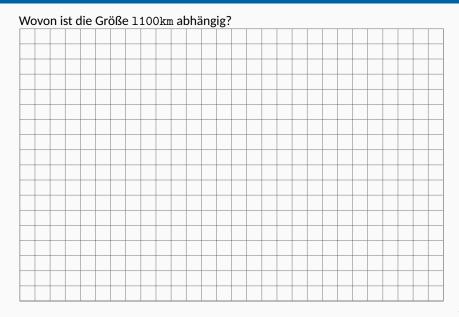
hub Hubraum des Motors in Litern.

#### **Beispiel: Autodaten**

```
dim(d)
                    # Anzahl Beobachtungen und Anzahl Variablen
## [1] 32 5
t(sapply(d, summary)) # Deskriptive Statistik für alle Variablen
           Min. 1st Qu. Median Mean 3rd Qu.
##
                                                Max.
## 1100km 6.9385 10.316 12.251 12.755 15.250
                                              22.617
## weight 0.6863 1.171 1.508
                                1.459
                                        1.637
                                               2.460
## hp
         52,0000 96,500 123,000 146,688 180,000 335,000
## cyl
      4.0000 4.000 6.000 6.188 8.000 8.000
## hub
          1.1651 1.980 3.217
                                3.781 5.342 7.735
```

#### **Beispiel: Autodaten**

```
round(var(d),4)
                   # Varianz-Kovarianz-Matrix
##
         1100km weight hp
                                   cyl
                                          hiib
## 1100km 14.925 1.5258 202.09 5.6144 6.9033
## weight 1.526 0.1970 20.05 0.6202 0.8004
## hp
      202.086 20.0454 4700.87 101.9315 110.1403
## cyl 5.614 0.6202 101.93 3.1895 3.2719
## hub 6.903 0.8004 110.14 3.2719
                                        4.1249
round(cor(d),4)
                   # Paarweise Korrelationskoeffizienten
        1100km weight hp cyl
##
                                    hub
## 1100km 1.0000 0.8899 0.7629 0.8137 0.8798
## weight 0.8899 1.0000 0.6587 0.7825 0.8880
## hp 0.7629 0.6587 1.0000 0.8324 0.7909
## cyl 0.8137 0.7825 0.8324 1.0000 0.9020
## hub 0.8798 0.8880 0.7909 0.9020 1.0000
```

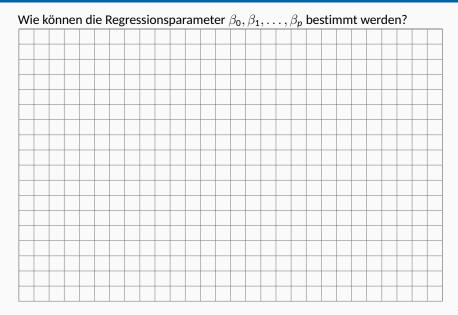


- Wir nehmen an, dass Y linear von (mindestens) zwei erklärenden Variablen abhängig ist.
- Diese Annahme muss verifiziert werden (was wir zunächst ignorieren), da sonst nicht sichergestellt ist, dass diese Variablen einen Einfluss haben oder entscheidende Variablen im Modell fehlen.

- Wir nehmen an, dass Y linear von (mindestens) zwei erklärenden Variablen abhängig ist.
- Diese Annahme muss verifiziert werden (was wir zunächst ignorieren), da sonst nicht sichergestellt ist, dass diese Variablen einen Einfluss haben oder entscheidende Variablen im Modell fehlen.

Wie können die Parameter  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$  bei der multiplen linearen Regression bestimmt werden?

# Parameterschätzung



# **Parameterschätzung**

- Lösung: Minimieren der Fehlerquadratsumme nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate (Kleinste-Quadrate-Schätzung).
- Der Anpassungsfehler für jede Beobachtung ergibt sich aus der umgestellten Beobachtungsgleichung:

$$\epsilon_i = y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2} - \ldots - \beta_p x_{ip}$$

■ Die zu minimierende Funktion in Abhängigkeit der Parameter  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$  ergibt sich damit wie folgt:

$$S(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2} - \dots - \beta_p x_{ip})^2$$

 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p$  bzw.  $b_0, b_1, \dots, b_p$  sind die Werte, die die Funktion S( ) minimieren.

# **Parameterschätzung**

#### **Your Turn**

```
mod <- lm(1100km \sim 1 + weight + hp, data=d) mod
```

Schreiben Sie die zugehörige Regressionsgleichung auf.

```
##
## Call:
## lm(formula = 1100km ~ 1 + weight + hp, data = d)
##
## Coefficients:
## (Intercept) weight hp
## 1.4831 5.9558 0.0176
```

- Multiple lineare Regressionsmodelle k\u00f6nnen in R ebenfalls mit Hilfe der Funktion lm() gesch\u00e4tzt werden.
- R greift für die Bestimmung der Parameterschätzer ebenfalls auf die Methode der kleinsten Quadrate zurück.

#### **Darstellung und Interpretation**

- Einfache Regressionsmodelle (nur  $X_1$ ) können als Gerade dargestellt werden. Multiple Regressionsmodelle ( $X_1$  und  $X_2$ ) können mit einer Ebene oder als Hyperebene (mehr als zwei Prädiktoren) dargestellt werden. Diese Darstellung wird sehr schnell unübersichtlich.
- $\beta_0$  ist der Achsenabschnitt und der abgebildete Wert von Y, wenn  $X_1 = X_2 = \ldots = X_p = 0$ .
- Die Steigungskoeffizienten  $\beta_j$  haben mehrere Interpretationen:
  - $\beta_j$  ist die **Veränderung** in Y, wenn sich  $X_j$  um eine Einheit erhöht und alle anderen Prädiktoren konstant gehalten werden (ceteris paribus).
  - ho  $ho_j$  wird also als **Partialeffekt** bezeichnet, weil er den Effekt von  $X_j$  auf Y abbildet, nachdem die Zielvariable um die Effekte der anderen Variablen adjustiert wurde.

#### **Darstellung und Interpretation**

```
mod <- lm(1100km ~ 1 + weight + hp, data=d)
summary(mod)
##
## Call:
## lm(formula = 1100km ~ 1 + weight + hp, data = d)
##
## Residuals:
     Min
            1Q Median
                                Max
## -3.968 -1.167 0.180 0.941 3.344
##
## Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 1.48306 0.96288 1.54
                                           0.134
## weight
            5.95580 0.84011 7.09 8.4e-08 ***
            0.01759 0.00544 3.23 0.003 **
## hp
## Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
## Residual standard error: 1.56 on 29 degrees of freedom
## Multiple R-squared: 0.847, Adjusted R-squared: 0.837
## F-statistic: 80.3 on 2 and 29 DF, p-value: 1.49e-12
```

#### **Your Turn**

Interpretieren Sie die Schätzergebnisse ( $\alpha$  = 0.05) und das Gütemaß des Regressionsmodells.

# **Darstellung und Interpretation**

 In wissenschaftlichen Aufsätzen werden Regressionsmodelle häufig schrittweise aufgebaut und übersichtlich in Tabellen dargestellt.

	Model 1	Model 2	Model 3
(Intercept)	1.45	6.45***	1.48
	(1.10)	(1.07)	(0.96)
weight	7.75***		5.96***
	(0.72)		(0.84)
hp		0.04***	0.02**
		(0.01)	(0.01)
R <sup>2</sup>	0.79	0.58	0.85
Adj. R <sup>2</sup>	0.78	0.57	0.84
Num. obs.	32	32	32
ata ata ata	ete ete	als.	

<sup>\*\*\*</sup>p < 0.001; \*\*p < 0.01; \*p < 0.05

Table 1: Statistical models

#### **Inhaltsübersicht**

- 1 Multiple Lineare Regression
- 2 Hypothesentests
- 3 Residualdiagnostik
- 4 Multikollinearität
- 5 Nichtlinearität

- Ergänzend zum t-Test für die einzelnen Koeffizienten ( $H_0: \beta_j = 0$  vs.  $H_1: \beta_j \neq 0$ ) gibt es auch die Möglichkeit, **alle Koeffizienten auf einmal** einem Hypothesentest zu unterziehen.
- Das Szenario, ob alle Regressoren zusammen genommen einen Effekt auf die abhängige Variable Y haben, kann mit Hilfe des F-Tests untersucht werden.
- Die Idee dieses simultanen Testens ist, zu prüfen, ob mit hoher Wahrscheinlichkeit davon auszugehen ist, dass nicht alle Parameter  $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$  gleich 0 sind, also zu prüfen:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_p = 0$$
 vs  $H_1: \beta_j \neq 0$  für min. ein j

FM: 
$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + ... + \beta_p X_p + \epsilon$$
  
RM:  $Y = \beta_0 + \epsilon$ 

- Die Nullhypothese ist gleichbedeutend mit der Tatsache, dass auch ein reduziertes Modell (RM) ohne Regressoren den gleichen Erklärungsgehalt liefert wie das volle Modell (FM) mit allen p Regressoren.
- Dieser fehlende Fit kann mit Hilfe der Fehlerquadratsumme (SSE) für die beiden Modelle messbar gemacht werden.

$$SSE(FM) = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 \qquad SSE(RM) = \sum (y_i - \hat{y}_i^*)^2$$

$$F = \frac{[SSE(RM) - SSE(FM)]/(p+1-k)}{SSE(FM)/(n-p-1)}$$

- Die Differenz SSE(RM) SSE(FM) gibt die Erhöhung der Residualstreuung durch Rückgriff auf das reduzierte Model an. Wenn diese Differenz groß ist, ist das RM mit k Parametern nicht adäquat.
- Wenn der beobachtete F-Wert größer ist als der kritische Wert, ist der F-Test signifikant zum Level  $\alpha$ .
- Das bedeutet, dass das reduzierte Modell (RM) nicht zufriedenstellend ist und die Nullhypothese (und die entsprechenden Werte für die  $\beta$ 's) verworfen werden kann.
- Verwerfe  $H_0$ , wenn gilt:

$$F \ge F_{(p+1-k, n-p-1; 1-\alpha)}$$
 oder  $p(F) \le \alpha$ 

```
mod <- lm(1100km - 1 + weight + hp, data=d)
summary(mod)</pre>
```

```
##
## Call:
## lm(formula = 1100km ~ 1 + weight + hp, data = d)
##
## Residuals:
     Min
         1Q Median
                         3Q
                               Max
## -3.968 -1.167 0.180 0.941 3.344
##
## Coefficients:
##
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 1.48306 0.96288 1.54 0.134
## weight
           5.95580 0.84011 7.09 8.4e-08 ***
            0.01759 0.00544 3.23 0.003 **
## hp
## Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.56 on 29 degrees of freedom
## Multiple R-squared: 0.847, Adjusted R-squared: 0.837
## F-statistic: 80.3 on 2 and 29 DF, p-value: 1.49e-12
```

#### **Inhaltsübersicht**

- 1 Multiple Lineare Regression
- 2 Hypothesentests
- 3 Residualdiagnostik
- 4 Multikollinearität
- 5 Nichtlinearität

# Residualdiagnostik

- Modellierungsprobelme wie inkorrekt spezifizierte Modelle, fehlende und vergessene Variablen äußern sich häufig in einer Verletzung der Annahmen der Residuen.
- Um zu überprüfen, ob das ausgewählte Regressionsmodell den theoretischen Anforderungen genügt, müssen daher die Residuen inspiziert werden. Diesen Prozess nennt man Residualdiagnostik.
- Residuen sollten (annähernd) normalverteilt sein, keine
   Zusammenhangsstrutkur aufweisen (i.i.d.) und frei von Ausreißern sein.
   Diese Eigenschaften werden häufig in grafischen Darstellungen der
   Residuen sichtbar.
- **R-Funktion:** residuals() erlaubt das Extrahieren von Residuen aus der Rückgabe der lm() Funktion.

# Residualdiagnostik

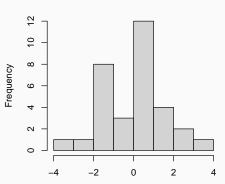
■ Darstellung Residuen der Regression Kraftstroffverbrauch Y erklärt durch Fahrzeuggewicht  $(X_1)$  und Motorleistung  $(X_2)$ .

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \epsilon$$

#### Indexplot der Residuen

# 

#### Histogramm der Residuen



#### **Inhaltsübersicht**

- 1 Multiple Lineare Regression
- 2 Hypothesentests
- 3 Residualdiagnostik
- 4 Multikollinearität
- 5 Nichtlinearität

#### Multikollinearität

- Die Interpretation der Koeffizienten eines multiplen Regressionsmodells setzt voraus, dass die Prädiktoren keinen ausgeprägten Zusammenhang untereinander haben, da die (ceteris paribus) Interpretation der Koeffizienten dann nicht mehr greift.
- Wenn eine starke Abhängigkeitsstruktur zwischen den Prädiktoren vorhanden ist, dann bezeichnet man dieses Problem als Multikollinearität.
   Multikollinearität ist ein Problem in den Daten und kein Problem der Modellierung.
- Multikollinearität führt zu unplausiblen Werten der Koeffizientenschätzer und wird durch spezielle Maßzahlen wie Varianzinflationsfaktoren (VIF) messbar.

#### Multikollinearität

#### cor(d)

```
## 1100km weight hp cyl hub

## 1100km 1.0000 0.8899 0.7629 0.8137 0.8798

## weight 0.8899 1.0000 0.6587 0.7825 0.8880

## hp 0.7629 0.6587 1.0000 0.8324 0.7909

## cyl 0.8137 0.7825 0.8324 1.0000 0.9020

## hub 0.8798 0.8880 0.7909 0.9020 1.0000
```

#### Varianzinflationsfaktoren

 Um Multikollinearitätsprobleme zu diagnostizieren, müssen die Zusammenhangsstrukturen zwischen den Prädiktoren untersucht werden.
 Das beinhaltet die Analyse des R<sup>2</sup>, das aus der Regression jedes Prädiktors auf alle verbleibenden Prädiktoren resultiert.

$$VIF_j = \frac{1}{1 - R_i^2}$$
 mit  $j = 1, ..., p$ 

■  $R_j^2$  bezeichnet das Bestimmtheitsmaß bei der Erklärung von  $X_j$  durch alle verbleibenden p-1 Prädiktoren. Wenn  $X_j$  gut durch die anderen Variablen erklärt werden kann, wird das  $R_j^2$  nah bei 1 sein und in einem großen Wert des VIF $_j$  resultieren.

Ein Wert von VIF > 10 wird oft als Grenzwert gesehen, ab dem man von Multikollinearität in problematischem Ausmaß ausgeht.

#### Varianzinflationsfaktoren

 Varianzinflationsfaktoren können mit der R-Funktion vif() aus dem Zusatzpaket car berechnet werden.

```
mod1 <- lm(1100km ~ 1 + weight + hp, data=d)
car::vif(mod1)

## weight hp
## 1.767 1.767

mod2 <- lm(1100km ~ 1 + weight + hp + hub + cyl, data=d)
car::vif(mod2)

## weight hp hub cyl
## 4.848 3.406 10.373 6.738</pre>
```

#### **Inhaltsübersicht**

- 1 Multiple Lineare Regression
- 2 Hypothesentests
- 3 Residualdiagnostik
- 4 Multikollinearität
- 5 Nichtlinearität

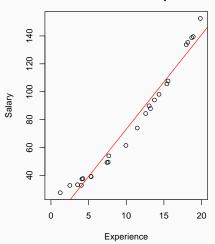
#### **Nichtlinearität**

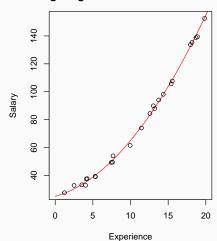
$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_1^2 + \epsilon$$

- Die lineare Regression ist linear in Bezug auf die Tatsache, dass die Parameter  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$  linear in das Modell eingehen.
- Mit der linearen Regression k\u00f6nnen dennoch nicht-lineare Zusammenh\u00e4nge modelliert werden, indem nicht-lineare Transformationen als zus\u00e4tzliche unabh\u00e4ngige Variablen in das Modell integriert werden.

#### **Nichtlinearität**

#### Welches Modell passt besser zu den gezeigten Daten?





#### **Nichtlinearität**

```
mod1
##
## Call:
## lm(formula = y ~ 1 + x)
##
## Coefficients:
## (Intercept)
                   х
## 5.33 6.78
mod2
##
## Call:
## lm(formula = y \sim 1 + x + x_sq)
##
## Coefficients:
## (Intercept) x
                          x_sq
##
  25.58 1.44
                            0.25
```

# Verständnisfragen

- Wie ist das Bestimmtheitsmaß R² bei der multiplen Regression zu interpretieren?
- Was ist damit gemeint, dass die diskutierten Regressionsmodelle lineare Modelle sind?
- Was ist Multikollinearität?