

# **Statistik**

CH.3 - Maßzahlen

SS 2023 | | Prof. Dr. Buchwitz, Sommer, Henke

Wirgeben Impulse

#### Lernziele

- Erlernen der Grundfähgikeiten zum Beschreiben von Datenmengen mit Hilfe statistischer Maßzahlen.
- Einteilung statistischer Maßzahlen in Lage-, Streuungs- und Konzentrationsmaße.
- Verdeutlichen der Anwendung mit Hilfe von R.

#### Maßzahlen

Ziel der folgenden Maßzahlen ist die Reduktion der Daten auf Kennzahlen, die einen Großteil der wesentlichen Informationen der zugrundeliegenden statistischen Variablen enthalten.

- Lagemaße: Beschreiben das Zentrum / die Mitte einer Beobachtungsreihe
- Streuungsmaße: Beschreiben die Abweichung vom Zentrum einer Häufigkeitsverteilung.
- Konzentrationsmaße: Beschreiben, wie sich die Summe der Merkmalswerte der Beobachtungsreihe auf die Untersuchungseinheiten verteilt.

# **Inhaltsübersicht**

- 1 Lagemaße
- 2 Streuungsmaße
- 3 Konzentrationsmaße

# **Beispiel**

Die folgenden Daten bilden das Gewicht (*in kg*) von zufällig ausgewählten Kugeln aus der Produktion einer Fabrik für Bowlingkugeln ab.

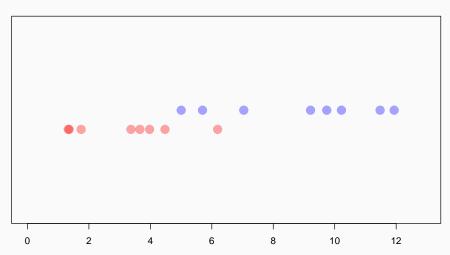
- Handelt es sich bei den vorliegenden Daten um eine Stichprobe oder um eine Grundgesamtheit?
- Welches Skalenniveau weisen die gezeigten Daten auf?
- Wie könnte man die Daten beschreiben?

	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5	i = 6	i = 7	i = 8
		3.367						
blue	9.741	11.935	7.040	10.220	11.478	5.697	9.213	5.004

5

# **Beispiel**

### Gewicht von 8 roten und 8 blauen Kugeln



# Übersicht: Lagemaße

Lagemaß	Symbol	Berechnung
Modus	$\bar{X}_{Modus}$	$h_{Modus} \geq h_{j}$
Median	$\bar{X}_{Median}$	$x_{\frac{n+1}{2}}$ oder $\frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$
Quantil	$Q_\alpha$	Wert der Verteilungsfunktion
Arithmetisches Mittel	$\bar{x}$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{i}$
Geometrisches Mittel	$\bar{X}_{geo}$	$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$
Harmonisches Mittel	Χ̄ <sub>harm</sub>	$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} 1/x_i}$

**Achtung:** Nicht jede Maßzahl ist für jede Art der *Skalierung* und damit nicht für jede Variable (sinnvoll) bestimmbar.

#### **Modus**

#### **Definition: Modus**

Der Modus oder Modalwert ist die häufigste Ausprägung einer Verteilung.

- Der Modus kann für beliebig skalierte Variablen bestimmt werden.
- Bei klassierten Daten wird die am häufigsten auftretende Klasse als Modalklasse bezeichnet.
- Der Modus kann mit Hilfe der R-Funktion modal() aus dem fhswf Paket berechnet werden.

#### Median

#### **Definition: Median**

Sind  $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$  die der Größe nach geordneten Beobachtungswerte eines metrisch skalierten Merkmals X, ergibt sich der **Median**  $\bar{x}_{Median}$  als

$$\bar{\mathbf{x}}_{Median} = \begin{cases} \mathbf{x}_{\frac{n+1}{2}} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{\frac{n}{2}} + \mathbf{x}_{\frac{n}{2}+1}) & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

- Der Median wird auch als Zentralwert bezeichnet.
- Der Median teilt die Daten in zwei gleich große Hälften.
- Kann für metrisch und ordinal skalierte Merkmale verwendet werden.
- Ist robust gegenüber Ausreißern.
- R-Funktion: median()

9

# Quantile

#### **Definition: Quantil**

Das  $\alpha$ —Quantil eines Merkmals ist der Wert, unterhalb dessen ein vorgegebener Anteil  $\alpha$  aller Beobachtungswerte der Verteilung liegt. Dieser Wert ergibt sich aus der (empirischen) Verteilungsfunktion S().

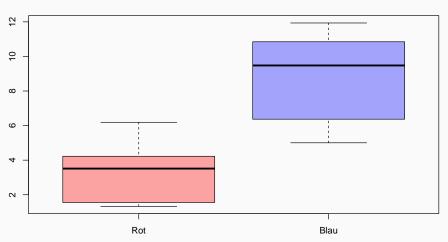
$$S(Q_{\alpha}) = \alpha$$

- Quantile sind Verallgemeinerungen des Medians, dieser ist Q<sub>0.5</sub>.
- Einige Gruppen von Quantilen haben spezielle Namen
  - ▶ Quartile: Q<sub>0.25</sub>, Q<sub>0.5</sub>, Q<sub>0.75</sub>
  - Percentile: Q<sub>0.01</sub>, Q<sub>0.02</sub>, Q<sub>0.03</sub>, Q<sub>0.04</sub>, . . .
- R-Funktion: quantile()

### **Boxplot**

Der Boxplot oder Box-Whisker-Plot ist eine grafische Darstellung von Minimum, 1. Quartil, Median, 3. Quartil und Maximum.

#### Boxplot für die roten und blauen Kugeln



#### **Aritmetisches Mittel**

#### **Definition: Arithmetisches Mittel**

Sind  $x_1, \ldots, x_n$  die Beobachtungswerte eines metrisch skalierten Merkmals X, so errechnet sich das **arithmetische Mittel** durch

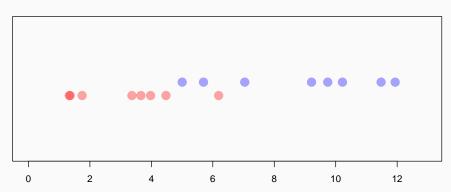
$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Das arithmetische Mittel ist nur für metrisch skalierte Daten definiert!
- Ist eine Maßzahl, die empfindlich gegenüber Ausreißern ist.
- Das gewichtete arithmetische Mittel erlaubt die Bestimmung des arithmetischen Mittels für klassierte Daten.
- R-Funktion: mean()

# Beispiel: Median und arithmetisches Mittel für die roten Kugeln

	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5	i = 6	i = 7	i = 8
red	1.747	3.367	1.329	6.191	3.659	1.359	3.975	4.477
blue	9.741	11.935	7.040	10.220	11.478	5.697	9.213	5.004

#### Gewicht von 8 roten und 8 blauen Kugeln



# Beispiel: Median und arithmetisches Mittel für die roten Kugeln

```
# Ausgabe der Daten
red
  [1] 1.747 3.367 1.329 6.191 3.659 1.359 3.975 4.477
# Arithmetisches Mittel
mean(red)
## [1] 3.263
## Median
median(red)
## [1] 3.513
# Zusammenfassung wesentlicher Lagemaße
summary(red)
##
     Min. 1st Qu. Median Mean 3rd Qu.
                                              Max.
```

1.33 1.65 3.51 3.26 4.10 6.19

##

#### **Geometrisches und Harmonisches Mittel**

- Es gibt zahlreiche spezialisierte Mittelwerte wie das **geometrische Mittel**  $\bar{x}_{geo}$  und das **harmonische Mittel**  $\bar{x}_{harm}$ . Welcher Mittelwert genutzt werden muss, hängt von den zugrundeliegenden Daten ab.
- Ziel der Mittelwertbildung ist, die durchschnittliche Gesamtwirkung von n meist unterschiedlichen Werten mit einem einzigen Wert zu beschreiben.

Geometrisches Mittel: 
$$\bar{x}_{geo} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$
  
Harmonisches Mittel:  $\bar{x}_{harm} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$ 

Anwendung: Geometrische Mittelwerte eigenen sich für Wachstumsraten, harmonische Mittelwerte für Geschwindigkeiten.

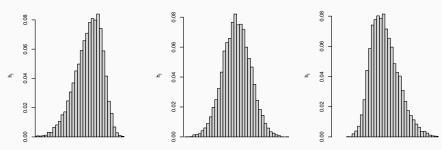
# **Beispiel: Geometrisches Mittel**

## [1] 121

```
# Das Wertpapier-Beispiel (Bitcoin) aus der Einführung liefert die folgenden
# Wertveränderungen (returns) für ersten 3 Jahre des Assets.
ret \leftarrow c(.12, .07, .01)
# Geometrisches Mittel
mean gm <- prod(1 + ret)^(1/length(ret))
mean_gm
## [1] 1.066
# Probe
(100 * prod(1 + ret)) # Wert nach 3 Perioden bei 100 Euro Startwert
## [1] 121
(100 * mean_gm^3) # Wert nach 3 Perioden berechnet mit x_{geom}
```

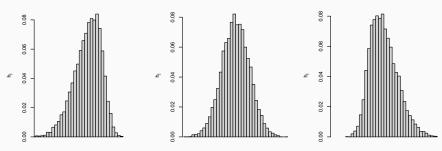
### **Schiefe**

■ Wo liegen  $\bar{x}$ ,  $\bar{x}_{Median}$  und  $\bar{x}_{Modus}$  bei den nachfolgend gezeigten Häufigkeitsverteilungen?



### **Schiefe**

■ Wo liegen  $\bar{x}$ ,  $\bar{x}_{Median}$  und  $\bar{x}_{Modus}$  bei den nachfolgend gezeigten Häufigkeitsverteilungen?

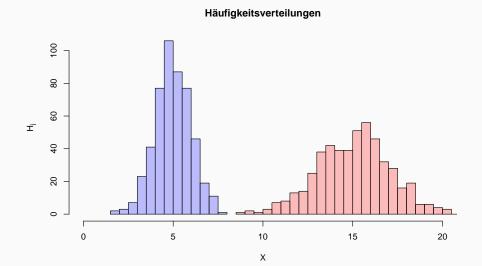


- Linksschiefe Häufigkeitsverteilung:  $\bar{x} < \bar{x}_{Median} < \bar{x}_{Modus}$
- Symmetrische Häufigkeitsverteilung:  $\bar{x} = \bar{x}_{Median} = \bar{x}_{Modus}$
- lacktriangle Rechtsschiefe Häufigkeitsverteilung:  $ar{x} > ar{x}_{Median} > ar{x}_{Modus}$

# **Inhaltsübersicht**

- 1 Lagemaße
- 2 Streuungsmaße
- 3 Konzentrationsmaße

# Beispiel: Streuungsmaße



# Übersicht: Streuungsmaße

Lagemaß	Symbol	Berechnung
Spannweite	R	$x_{max} - x_{min}$
Interquartilsabstand	IQR	$Q_{0.75} - Q_{0.25}$
(empirische) Varianz	$s^2$	$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$
Standardabweichung	S	$\sqrt{s^2}$
Variationskoeffizient	V	$s/\bar{x}$

**Achtung:** Nicht jede Maßzahl ist für jede Art der *Skalierung* und damit nicht für jede Variable (sinnvoll) bestimmbar.

# **Spannweite**

#### **Definition: Spannweite**

Die Breite eines Streubereichs nennt man Spannweite R. Sie ergibt sich aus dem Maximum und Minimum der Daten.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

- Nachteil: Nur zwei extreme Werte gehen in die Berechnung ein, der Großteil der Daten bleibt ungenutzt.
- Die Spannweite hat keine eigene R-Funktion, kann aber einfach mittels max() und min() berechnet werden.

# Interquartilsabstand

#### **Definition: Interquartilsabstand**

Der **Quartilsabstand** gibt die Größe des Bereiches zwischem dem oberen und dem unteren Quartil einer Verteilung an, in dem die mittleren 50% der Beobachtungen fallen.

$$IQR = Q_{0.75} - Q_{0.25}$$

- Zwischen dem oberen und dem unteren Quartil liegen 50% der Beobachtungen.
- Kann auch sinnvoll für ordinalskalierte Merkmale bestimmt werden.
- Ist robust in dem Sinne, dass der IQR weitgehend unempfindlich gegenüber Ausreißern ist.
- R-Funktion: IQR()

#### **Varianz**

#### **Definition: Varianz**

Die Varianz ist die mittlere quadrierte Abweichung vom arithmetischen Mittel.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$
 oder  $s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$ 

- Es gilt immer  $s^2 \ge 0$
- Wird unterschiedlich für die Stichprobe und die Grundgesamtheit (Population) berechnet.
- Grundidee: Einbezug aller Abweichungen vom Mittelwert
- Beobachtungen, die weit von  $\bar{x}$  entfernt liegen, werden überproportional stark gewichtet.
- R-Funktion: var()

# Standardabweichung

#### **Definition: Standardabweichung**

Die **Standardabweichung** ist die Wurzel aus der Varianz.

$$s = \sqrt{s^2}$$

- Weist die gleiche Maßeinheit wie die Daten auf
- Ist i.d.R. einfacher zu interpretieren als die Varianz.
- R-Funktion: sd()

# Rechenbeispiel

Berechnung der Varianz der roten Kugeln aus dem Eingangsbeispiel.

\$i\$	\$x_i\$	\$x_i - \bar x\$	\$(x_i-\bar x)^2\$
1	1.747	-1.5158	2.2977
2	3.367	0.1044	0.0109
3	1.329	-1.9342	3.7410
4	6.191	2.9277	8.5712
5	3.659	0.3961	0.1569
,		4 0000	0./0.//
6	1.359	-1.9038	3.6246
7	3.975	0.7119	0.5069
8	4.477	1.2137	1.4732

$$n=8$$
  $\bar{x}=3.2629$   $\sum (x_i-\bar{x})=0$   $\sum (x_i-\bar{x})^2=20.3823$   $s^2=2.9118$ 

# Rechenbeispiel

Berechnung der Varianz der blauen Kugeln aus dem Eingangsbeispiel.

\$i\$	\$x_i\$	\$x_i - \bar x\$	\$(x_i-\bar x)^2\$
1	9.741	0.9499	0.9022
2	11.935	3.1442	9.8858
3	7.040	-1.7508	3.0653
4	10.220	1.4285	2.0406
5	11.478	2.6866	7.2176
6	5.697	-3.0939	9.5725
7	9.213	0.4223	0.1783
8	5.004	-3.7866	14.3386

$$n=8$$
  $\bar{x}=8.7911$   $\sum (x_i-\bar{x})=0$   $\sum (x_i-\bar{x})^2=47.201$   $s^2=6.743$ 

### **Variations**koeffizient

#### Definition: Variationskoeffizient

Der **Variationskoeffizient** ist der Quotient aus Standardabweichung und arithmetischem Mittel.

$$V = \frac{s}{\bar{x}}$$

- Ist dimensionslos und vergleichbar
- Der Variationskoeffizient hat keine eigene R-Funktion, kann aber einfach mittels sd() und mean() berechnet werden.

# Beispiel: Streuungsmaße

## [1] 0.2954

```
# Ausgabe der Daten
blue
## [1] 9.741 11.935 7.040 10.220 11.478 5.697 9.213 5.004
# Spannweite
max(blue) - min(blue)
## [1] 6.931
## Varianz
var(blue)
## [1] 6.743
# Interquartilsabstand
IQR(blue)
## [1] 3.83
# Variationskoeffizient
sd(blue) / mean(blue)
```

### **Inhaltsübersicht**

- 1 Lagemaße
- 2 Streuungsmaße
- 3 Konzentrationsmaße

#### Konzentration

#### **Definition: Konzentration**

Man spricht von Konzentration oder Ungleichheit, falls zu einem bestimmten Zeitpunkt ein relativ kleiner Anteil der Merkmalsträger einen hohen Anteil an der Summe der Merkmalswerte besitzt.

- Konzentration bzw. Ungleichheitsdiskussionen findet man häufig im Kontext von Einkommen oder Vermögen.
- Beispiel: In Deutschland besitzen 10% der Bevölkerung 90% des Vermögens.

#### Lorenzkurve

#### **Definition: Lorenzkurve**

Der Polygonzug durch die Punkte  $P_0 = (0, 0)$  und  $P_j = (k_j, l_j)$  mit j = 1, ..., q heißt **Lorenzkurve**.

$$k_j = \sum_{i=1}^{j} \frac{H_j}{n} = \sum_{i=1}^{j} h_j$$
  $l_j = \frac{\sum_{i=1}^{j} a_i H_i}{\sum_{i=1}^{q} a_i H_i}$ 

- Die Lorenzkurzve verläuft durch die Punkte (0,0) und (1,1)
- Die Lorenzkurve verläuft immer unterhalb der Winkelhalbierenden.
- Die Lorenzkurve ist winkelhalbierend, wenn alle Mermalsausprägungen gleich häufig vorkommen. Dann liegt keine Konzentration vor. Je weiter die Lorenzkurve sich von der Winkelhalbierenden entfernt, desto größer ist die Ungleichheit.
- R-Funktion: Lc() aus dem Zusatzpaket ineq

# **Beispiel**

Wir betrachten vereinfachend die Einkommensverteilungen der folgenden drei sehr kleinen Länder.

```
A <- c(1000, 3000, 4000, 4000, 8000)
B <- c(2000, 2000, 4000, 8000)
C <- c(1000, 2000, 5000, 8000)
```

# **Beispiel**

	j	\$a_j\$	\$k_j\$	\$l_j\$
1	0		0	0
1000	1	1000	0.2	0.05
3000	2	3000	0.4	0.2
4000	3	4000	0.8	0.6
8000	4	8000	1	1

#### Gini Koeffizient

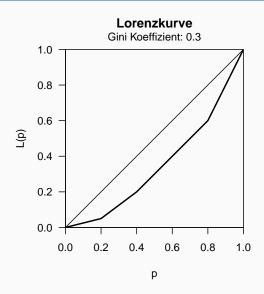
#### **Definition: Gini Koeffizient**

Das Doppelte der Fläche zwischen der Lorenzkurve und der Winkelhalbierenden heißt **Gini-Koeffizient** G und wird als Konzentrationsmaß einer Häufigkeitsverteilung verwendet.

$$G = \sum_{i=1}^{n} (k_i + k_{i-1})(l_i - l_{i-1}) - 1$$

- Um den Gini-Koeffizienten zu berechnen, sind alle Stützpunkte der Lorenzkurve erforderlich. Es gilt  $0 \le G \le \frac{n-1}{n} < 1$ .
- Wenn die Lorenzkurve winkelhalbierend ist, gilt *G* = 0. In diesem Fall gibt es keine Einkommensunterschiede.
- Werden *alle* Ausgangswerte  $x_i$  mit einem Faktor a multipliziert, sodass  $y_i = a \cdot x_i$ , dann gilt  $G_y = G_x$ .
- R-Funktion: Gini() aus dem Zusatzpaket ineq

### Lorenzkurve mit Gini-Koeffizient



# Verständnisfragen

- Welche Lage- und Streuungsparameter eignen sich für ordinalskalierte Merkmale? Welche sind für nominalskalierte Merkmale geeignet?
- Welche Streuungsmaße berücksichtigen nur einzelne Beobachtungswerte der Häufigkeitsverteilung?
- Wie macht sich eine vollkommene Gleichheit in der Einkommensverteilung eines Landes in der Lorenzkurve bemerkbar? Wie groß ist dann der GINI-Koeffizient?

# Verständnisfragen (Antworten)

- Welche Lage- und Streuungsparameter eignen sich für ordinalskalierte Merkmale? Welche sind für nominalskalierte Merkmale geeignet?
  - Ordinal: Median, Quantile, Modus, Quartilsabstände.
  - ▶ Nominal: Modus.
- Welche Streuungsmaße berücksichtigen nur einzelne Beobachtungswerte der Häufigkeitsverteilung?
  - ► Einzelne Beobachtungswerte: Spannweite
  - ▶ Alle Beobachtungswerte: alle weiteren, die vorgestellt wurden.
- Wie macht sich eine vollkommene Gleichheit in der Einkommensverteilung eines Landes in der Lorenzkurve bemerkbar? Wie groß ist dann der GINI-Koeffizient?
  - ▶ Winkelhalbierende, G = 0