

Statistik

CH.8 - Wahrscheinlichkeitsverteilungen

2024 || Prof. Dr. Buchwitz, Sommer, Henke

Wir geben Impulse

- Verstehen des Konzeptes der Verteilung von Zufallsvariablen.
- Unterscheidung von diskreten und stetigen Dichten
- Zusammenhang von Dichte- und Verteilungsfunktion

Definition: Zufallsvariablen

Unter einer Zufallsvariablen X versteht man eine Funktion, die aufgrund eines Zufallsexperiments den Ergebnissen des Zufallsexperiments numerische Werte zuordnet. Jedes mögliche Ergebnis eines Zufallsexperiments führt dabei zu einem anderen numerischen Wert.

- Kennzeichnend sind die Merkmalsausprägungen x_i und die damit assoziierten Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$.
- Zufallsvariablen werden in der Regel mit Großbuchstaben (X, Y, X_i) bezeichnet.

- Das Zufallsexperiment „Werfen einer Münze“ mit den Ergebnissen **Kopf** und **Zahl** kann als Zufallsvariable X modelliert werden:

$$X(x = \text{Kopf}) = X(\text{Kopf}) = 0$$

$$X(x = \text{Zahl}) = X(\text{Zahl}) = 1$$

- Bei der gewählten Zuordnung kann man die Zufallsvariable X auch als *Anzahl des Auftretens von Zahl beim Werfen einer Münze* auffassen.
- Bei einer fairen Münze gilt $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$.

Definition: Diskrete Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable heißt diskret, wenn sie **nur diskrete Werte**, also endlich viele oder abzählbar unendlich viele, Werte annimmt.

- **Beispiel:** Anzahl defekter Glühbirnen in einer Stichprobe von 10 Stück
- **Beispiel:** Anzahl der Kinder unter 18 Jahre in einem Haushalt

Definition: Stetige Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable heißt stetig, wenn sie mit zwei Werten definiert, auch **alle Werte im Intervall** zwischen diesen beiden Werten annehmen kann.

- **Beispiel:** Zeitaufwand für die Produktion eines Werkstücks
- **Beispiel:** Gewicht einer aus einer Abfüllanlage entnommenen Flasche

Definition: Wahrscheinlichkeitsfunktion

Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Dann heißt die Funktion f Wahrscheinlichkeitsfunktion von X .

$$f(x) = P(X = x)$$

- **Beispiel:** Als Zufallsexperiment wird eine faire Münze zweimal geworfen. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl des Auftretens des Ereignisses „Zahl“. Definieren Sie die Zufallsvariable und skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion!

Wahrscheinlichkeitsfunktion



Definition: Verteilungsfunktion

Sei X eine diskrete oder stetige Zufallsvariable. Dann heißt die Funktion F Verteilungsfunktion von X .

$$F(x) = P(X \leq x)$$

- **Beispiel:** Als Zufallsexperiment wird eine faire Münze zweimal geworfen. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl des Auftretens des Ereignisses „Zahl“. Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion!

Verteilungsfunktion



Für Verteilungsfunktionen gilt:

- $F(x)$ ist monoton steigend
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(X) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(X) = 1$
- $F(x)$ ist in jedem Punkt (zumindest rechtsseitig) stetig

Ist X eine diskrete Zufallsvariable, dann gilt

$$F(x) = \sum_{x_i < x} f(x_i)$$

Ist X eine stetige Zufallsvariable, dann gilt

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x_i) dx$$



Definition: Wahrscheinlichkeitsdichte bzw. Dichtefunktion

Die Funktion $f(x)$ heißt bei **stetigen** Zufallsvariablen Wahrscheinlichkeitsdichte bzw. Dichtefunktion. TODO: Beziehung zur Verteilungsfunktion



Für Wahrscheinlichkeits- und Dichtefunktionen gilt:

- Für alle x_i gilt, dass $f(x_i) \geq 0$.
- Für diskrete Verteilungen mit Wahrscheinlichkeitsfunktion gilt

$$\sum_{\text{alle } x_i} f(x_i) = 1$$

- Für stetige Verteilungen mit Dichtefunktion gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Definition: Erwartungswert

Sei X eine Zufallsvariable und f die dazugehörige Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion. Der Erwartungswert μ ist definiert als

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{\text{alle } x_i} x_i \cdot f(x_i), & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx, & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

- **Beispiel:** Definieren Sie die Zufallsvariable X für das Werfen eines Würfels und berechnen Sie dessen Erwartungswert.



Definition: Varianz

Sei X eine Zufallsvariable und f die dazugehörige Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion. Die Varianz σ^2 (Standardabweichung: σ) ist definiert als

$$\text{Var}(X) = \begin{cases} \sum_{\text{alle } x_i} (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i), & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) \, dx, & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

- **Beispiel:** Definieren Sie die Zufallsvariable X für das Werfen eines Würfels und berechnen Sie dessen Varianz.



- 1 Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine diskrete und eine stetige Zufallsvariable.
- 2 Erläutern Sie, was man unter einer Verteilungsfunktion versteht.
- 3 Welches ist der maximale Wert, den eine Verteilungsfunktion annehmen kann?