

Statistik

CH.5 - Kombinatorik

SS 2023 | | Prof. Dr. Buchwitz, Sommer, Henke

Wirgeben Impulse

Kombinatorik

Die Kombinatorik ist das Teilgebiet der Mathematik, das sich mit dem Zählen von **Zusammenstellungen** von Elementen aus einer vorgegebenen endlichen Menge beschäftigt.

- In diesem Kapitel werden wir folgende Fragen beantworten, um sie dann im nächsten Kapitel als Hilfsmittel zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten einzusetzen:
 - ▶ Wie viele Möglichkeiten gibt es n Elemente anzuordnen?
 - ▶ Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus *n* Elementen *k* auszuwählen?

Fakultäten

Definition: Fakultät

n! bezeichnet das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen. Es gilt 0! = 1.

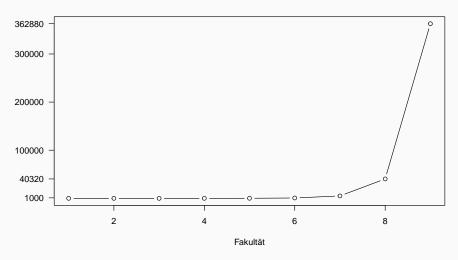
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

- Fakultäten wachsen mit steigendem n sehr schnell stark an.
- Beispiel: 3! = 6 und 6! = 720
- R-Funktion: factorial()

3

Fakultäten

Wachstum der Fakultäten



Binomialkoeffizient

Definition: Binomialkoeffizient

Der Binomialkoeffizient ist für n > 0, $k \ge 0$ und $n \ge k$ definiert als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n+1-k)}{k!}$$

- Der Binomialkoeffizient gibt an, auf wie viele verschiedene Arten man k
 Elemente aus einer begrenzten Menge von n Elementen auswählen kann.
- Der Binomialkoeffizient ist symmetrisch, es gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- R-Funktion: choose()

5

Binomialkoeffizient

Formel:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Rechenregeln:

a)
$$\binom{n}{1} = n$$
 für $n \ge 0$

$$\binom{n}{n} = 1$$

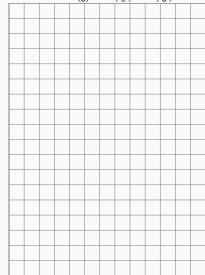
c)
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
 für $k \le n$

d)
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

e)
$$\binom{n}{0} = 1$$
 für $n \ge 0$

f)
$$\binom{n}{k} = 0$$
 für $k > n$

Aufgabe: a) $\binom{8}{3}$ b) $\binom{10}{5}$ c) $\binom{12}{8}$



Permutationen

Definition: Permutation

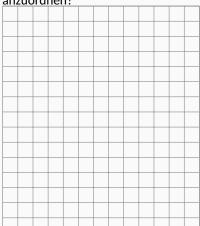
Jede Zusammenstellung aus einer Menge mit *n* Elementen, die dadurch entsteht, dass man die gegebenen Elemente in **beliebiger** Reihenfolge aufreiht, heißt eine *Permutation* dieser Elemente.

- Sind alle n Elemente verschieden, so ergibt sich die Anzahl der Permutationen $P_n = n!$
- Lassen sich die *n* Elemente in *k* Klassen einteilen, wird die Anzahl der Permutationen wie folgt berechnet $P_n^{n_1,n_2,...,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$
- R-Funktion: permutations() aus dem Zusatzpaket gtools

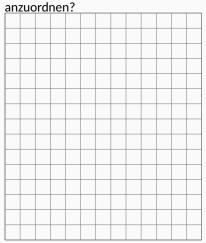
7

Permutationen

Beispiel 1: Wie viele Möglichkeiten gibt es, drei verschiedenfarbige Kugeln anzuordnen?



Beispiel 2: Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei gelbe und eine rote Kugel



Permutationen

Beispiel 1: Wie viele Möglichkeiten gibt es, drei verschiedenfarbige Kugeln anzuordnen?

```
[.1] [.2]
                       [.3]
##
  [1.] "red" "blue"
                       "green"
               "green" "blue"
## [2,] "red"
## [3,] "blue"
                       "green"
               "red"
## [4,] "blue"
               "green" "red"
## [5.] "green" "red"
                       "blue"
## [6,] "green" "blue"
                       "red"
```

Beispiel 2: Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei gelbe und eine rote Kugel anzuordnen?

```
## [,1] [,2] [,3]
## [1,] "red" "yellow" "yellow"
## [2,] "yellow" "red" "yellow"
## [3,] "yellow" "yellow" "red"
```

Kombinationen

Definition: Kombination

Jede Zusammenstellung aus k Elementen einer Menge mit n Elementen mit k < n heißt Kombination k-ter Ordnung aus den n Elementen.

Kombinationen können wie folgt unterschieden werden:

- **Reihenfolge:** Gelten zwei Kombinationen mit genau denselben *k* Elementen, aber in verschiedener Reihenfolge als verschiedenen, so spricht man von *Variationen* (Kombinationen mit Berücksichtigung der Reihenfolge).
- **Wiederholung:** Dürfen die *k* Elemente nur einmal vorkommen (keine Mehrfachauswahl des gleichen Elements), so spricht man von *Kombinationen ohne Wiederholung* (ohne Zurücklegen).
- R-Funktion: combinations() aus dem Zusatzpaket gtools und expand.grid()

Kombinationen

Vier Möglichkeiten: Wählen von 2 aus 3 verschiedenartigen Kugeln mit/ohne Wiederholung und mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

Kombinationen

```
balls <- c("red", "blue", "green")
                                                                   balls <- c("red", "blue", "green")
# Mit Wiederholung
                                                                   # Ohne Wiederholung
## und mit Reihenfolge
                                                                   ## und mit Reihenfolge
mwmr <- expand.grid(balls,balls)</pre>
                                                                   owmr <- mwmr[mwmr$Var1 != mwmr$Var2, ]
nrow(mwmr)
                                                                   nrow(owmr)
## [1] 9
                                                                   ## [1] 6
## und ohne Reihenfolge
                                                                   ## und ohne Reihenfolge
mwor <- combinations(v=balls, n=3, r=2,
                                                                   owor <- combinations(v=balls, n=3, r=2,
                     repeats = T)
                                                                                        repeats = F)
nrow(mwor)
                                                                   nrow(owor)
## [1] 6
                                                                   ## [1] 3
```

Zusammenfassung

| | Permutationen | Kombinationen | |
|-------------------|----------------------------------------------------------------|-----------------------------|--------------------------------|
| | Reihenfolge berücksichtigt | | ohne Reihenfolge |
| ohne Wiederholung | $P_n = n!$ | $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ | $C_n^k = \binom{n}{k}$ |
| mit Wiederholung | $P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ | $V_{w,n}^k = n^k$ | $C_{w,n}^k = \binom{n+k-1}{k}$ |

Verständnisfragen

- Wieso wird bei Permutationen hinsichtlich der Reihenfolge unterschieden?
- Wann wird eine Kombination Variation genannt?
- Wie hoch sind die Gewinnchancen beim Lotto?