Lista 4 ~ Processos Estocásticos

Bernardo Maia Coelho, 12542481

Questão 01

Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com distribuições de Poisson de parâmetros α e β. Mostre que a variável X + Y tem uma distribuição de Poisson de parâmetro α + β.

(Método 1) Tenho dúvidas sobre esse método, mas, seja $$ X \sim Poisson(\alpha) \hspace{5em} Y \sim Poisson(\beta)$$ Seja $$ Z(t) = X(t) + Y(t) $$

$$ E[Z(t)] = E[X(t) + Y(t)]$$

Dado X e Y independentes, vale $$ E[Z(t)] = E[X(t) + Y(t)] = E[X(t)] + E[Y(t)]$$ $$ E[Z(t)] = \mu t = E[X(t)] + E[Y(t)] = \alpha t + \beta t $$ $$ \mu t = \alpha t + \beta t $$ $$ \mu = \alpha + \beta $$

(Método 2) Alternativamente, podemos analisar o caso $$ Z(t) = 0 \iff X(t) = 0, Y(t) = 0 $$ $$ Pr { Z(t) = 0 } = Pr { X(t) = 0 } \cdot Pr { Y(t) = 0 } $$ $$ \frac{e^{-\mu t} * (\mu t)^0}{0!} = \frac{e^{-\alpha t} * (\alpha t)^0}{0!} \cdot \frac{e^{-\beta t} * (\beta t)^0}{0!} $$ $$ e^{-\mu t} = e^{-\alpha t} \cdot e^{-\beta t} $$

$$ e^{-\mu t} = e^{-\alpha t} \cdot e^{-\beta t} $$

$$ e^{-\mu t} = e^{(-\alpha t) + (-\beta t)} $$ $$ e^{-\mu t} = e^{-(\alpha + \beta) t} $$

E, assim, concluímos que Z segue uma distribuição de poisson de taxa $\mu = \alpha + \beta$.

Questão 02

Defeitos ocorrem ao longo de um cabo de fibra óptica de acordo com um processo de Poisson com taxa λ = 0.1 defeitos por Km.

(a) Qual é a probabilidade de que não ocorra nenhum defeito nos primeiros 2 Km?

Bom, podemos considerar $t > 0$ sendo t um intervalo medido em km. $$ Pr { N(2) = 0 } = \frac { e^{-0.1 \cdot 2}(0.1 \cdot 2)^0 } { 0! } = e^{-0.2} $$

$$ Pr { N(2) = 0 } = e^{-0.2} \approx 0.8187307530779818 \approx 0.819 $$

(b) Sabendo que não ocorreu nenhum defeito nos primeiros 2 Km, calcule a probabilidade de que nenhum defeito ocorra entre o segundo e terceiro Km.

$$ Pr { N(3) - N(2) = 0 | N(2) = 0 } = Pr { N(3 - 2) = 0 | N(2) = 0 } = Pr { N(1) = 0 | N(2) = 0 } $$

$$ Pr { N(1) = 0 | N(2) = 0 } = \frac { Pr { N(1) = 0 | N(2) = 0 } \cdot Pr {N(2) = 0 } } { Pr {N(2) = 0 } } $$

$$ Pr { N(1) = 0 } = e^{-0.1} $$ $$ Pr { N(2) = 0 } = e^{-0.2} $$

$$ Pr { N(1) = 0 | N(2) = 0 } = \frac{ e^{-0.1} e^{-0.2} } {e^{-0.2}} = \frac{e^{-0.3}} {e^{-0.2}} = e^{-0.1} \approx 0.9048374180359595 \approx 0.905 $$

Questão 03

Clientes chegam a uma certa loja de acordo com um processo de Poisson com taxa λ = 4 clientes por hora. Sabendo que a loja abre às 9:00h, qual é a probabilidade de que exatamente um cliente chegue até às 9:30h e um total de cinco chegue até às 11:30h?

Queremos calcular $$ Pr{ N(0.5) = 1, N(2.5) = 5} $$

Note que não se trata de intervalos disjuntos, então, é preciso aplicar a propriedade de incrementos independentes.

$$ Pr{ N(0.5) = 1, N(2.5) = 5} = Pr{ N(0.5) = 1, N(2.5) - N(0.5) = 5 - 1} = Pr{ N(0.5) = 1 } \cdot Pr { N(2) = 4 } $$

$$ Pr{ N(0.5) = 1 } = \frac{e^{-4 \cdot 0.5} (4 \cdot 0.5)^1}{1!} = 2 e^{-2} $$

$$ Pr{ N(2) = 4 } = \frac{e^{-4 \cdot 2} (4 \cdot 2)^4}{4!} = \frac{8^4e^{-8} }{24} $$

$$ Pr{ N(0.5) = 1, N(2.5) = 5} = 2 e^{-2} \cdot \frac{8^4e^{-8} }{24} = \frac{8^4e^{-10} }{12} \approx 0.01549650935892817 \approx 0.015 $$

> . $$ Pr{ N(0.5) = 1, N(2.5) = 5} \approx 0.015 $$.

Questão 04

Mostre que o número de eventos que ocorrem num intervalo de tempo $(0, t]$ para um processo de Poisson é consequência da lei dos eventos raros. Em outras palavras, mostre que a distribuição binomial com parâmetros n e p converge para a distribuição de Poisson com parâmetro λ conforme $n \to \infty$ e $p \to \infty$, de forma que np permaneça constante.

A lei dos eventos raros estipula que o limite de um Processo de Bernoulli com baixa probabilidade e grande quantidade de ocorrências (quando n tende ao infinito) tende a um processo de poisson. Podemos provar isso da seguinte maneira:

Dado uma discretização do tempo em intervalos de extensão $h = \frac 1 n$. Partimos da definição da probabilidade p como $$ p = Pr{N(h) = 1} = \lambda h \cdot O(h)$$

De acordo com a distribuição binomial, vale que $$ Pr { N = k } = \binom {n} {k} p^k (1 - p)^{n-k} $$

Sendo que N aqui representa o número de sucessos. Substituindo o valor de p, chegamos em $$ Pr{ N = k } = \frac {n!} {(n-k)!k!} ,, (\lambda h \cdot O(h))^k ,, (1 - \lambda h \cdot O(h)) ^ {n-k} $$

$$ \lim _{n \to \infty} Pr{ N = k } = \lim _{n \to \infty} \frac {n!} {(n-k)!k!} ,, (\lambda h \cdot O(h))^k ,, (1 - \lambda h \cdot O(h)) ^ {n-k} $$

$$ \lim _{n \to \infty} Pr{ N = k } = \lim _{h \to 0} \frac{ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots \cancel{(n-k)!} }{ \cancel{(n-k)!} \cdot k! } [\lambda h + O(h)]^k \cdot [1 - \lambda h + O(h)]^{n - k} $$

$$ n(n - 1)(n-2) \dots (n - k - 1) $$ $$ \lim _{h \to 0} \frac{ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots \cancel{(n-k)!} }{ \cancel{(n-k)!} \cdot k! } = \lim _{h \to 0} n \cdot n(1 - \frac{1}{n}) \cdot n(1 - \frac{2}{n}) \dots n(1 - \frac{k - 1}{n}) = n^k $$

Termos como $ 1 / n $ e t/n tendem a zero quando n tende a infinito, logo $$ \lim _{n \to \infty} Pr{ N = k } = \frac{n^k}{k!} \cdot [\frac{(\lambda t)^k}{n^k}] \cdot [1 - \frac{\lambda t}{n}] \cdot \frac{1}{(1- \frac{\lambda t}{n})^k} $$

Simplificando e removendo termos que tendem a zero: $$ \lim _{n \to \infty} Pr{ N = k } = \frac{\cancel{n^k}}{k!} \cdot \left[\frac{(\lambda t)^k}{\cancel{n^k}} \right] \cdot \left(1 - \frac{\lambda t}{n} \right) \cdot \frac{1}{(1- \cancel{\frac{\lambda t}{n}})^k} $$

Dado que $$ \lim_{x \to \infty} 1 + \frac x n = e^x$$

Logo, $$ \lim _{n \to \infty} Pr{ N = k } = \frac{1}{k!} \cdot \left[\frac{(\lambda t)^k}{1} \right] \cdot \left(1 - \frac{\lambda t}{n} \right) = \frac{e^{-\lambda y} (\lambda t)^k}{k!} $$

Questão 05

Considere um processo de Poisson de taxa λ eventos por unidade de tempo. Seja N(t) o número de eventos que ocorrem até no intervalo (0, t]. Considere o intervalo de tempo fixo (s, t], onde s < t. Determine a probabilidade condicional P{N(t) = n + k|N(s) = n} e o valor esperado E[N(t)N(s)].

$$ Pr{ N(t) = n + k | N(s) = n } = Pr{ N(t) - N(s) = n + k - n | N(s) = n } = Pr{ N(t-s) = k| N(s) = n } $$

$$ Pr{ N(t) = n + k | N(s) = n } = \frac { Pr{ N(t-s) = k} \cdot \cancel{Pr{ N(s) = n}} } { \cancel{Pr{ N(s) = n}} } $$

$$ Pr{ N(t-s) = k} = \frac { e^{-\lambda (t-s)} [\lambda (t-s)]^k } { k! } $$

Assim, chegamos a

> . $$ Pr{ N(t) = n + k | N(s) = n } = \frac { e^{-\lambda (t-s)} [\lambda (t-s)]^k } { k! } $$.

Para calcular o valor esperado $E[N(t)N(s)]$, podemos usar a fórmula $$ E[N(t)] = \lambda t $$

Como $s < t$ e $N(t) = N(s) + N(t) - N(s)$, vale $$ E[N(t)N(s)] = E{ N(s) [N(s) + N(t) - N(s)]} $$ $$ E[N(t)N(s)] = E[N(s)]E[N(t) - N(s)] + E^2[N(s)]$$ $$ E[N(s)^2] = \lambda s (t - s)\lambda + \lambda s + (\lambda s)^2 $$

Simplificando $$ E[N(s)^2] = ts\lambda^2 -s^2\lambda^2 + \lambda s + \lambda^2 s^2 $$

> . $$ E[N(s)^2] = ts\lambda^2 + \lambda s $$.

Questão 06

Suponha que pacotes SMTP chegam a um servidor de e-mails de acordo com um processo de Poisson com intensidade λ = 2. Seja N(t) o número de mensagens que chegam até o tempo t. Determine as seguintes probabilidades:

(a) P{N(1) = 2}

$$ Pr { N(1) = 2 } = \frac{e^{-2 \cdot 1} (2 \cdot 1)^2}{2!} $$ $$ Pr { N(1) = 2 } = \frac{e^{-2} 2^2}{2} = 2e^{-2} \approx 0.2706705664732254 $$ $$ Pr { N(1) = 2 } \approx 0.271 $$

(b) P{N(1) = 2 e N(3) = 6}

$$ Pr { N(1) = 2, N(3) = 6 } = Pr { N(1) = 2, N(3) - N(1) = 6 - 2 } $$

$$ Pr { N(1) = 2, N(3) = 6 } = Pr { N(1) = 2 } Pr { N(2) = 4 } $$

$$ Pr { N(2) = 4 } = \frac{e^{-2 \cdot 2} (2 \cdot 2)^4}{4!} = \frac{e^{-4} 4^4}{24} = e^{-4} \cdot \frac{4^4}{24} $$

$$ Pr { N(1) = 2, N(3) = 6 } = 2e^{-2} \cdot e^{-4} \cdot \frac{16}{24} \approx 0.052880046435549 $$

$$ Pr { N(1) = 2, N(3) = 6 } \approx 0.053 $$

(c) P{N(1) = 2|N(3) = 6}

$$ Pr{N(1) = 2|N(3) = 6} = Pr{N(1) = 2| N(3) - N(1) = 6 - 2 } $$

$$ Pr{N(1) = 2| N(2) = 4 } = \frac{ Pr{N(1) = 2} \cdot Pr{N(2) = 4} } { Pr{N(3) = 6 } } $$

$$ Pr{N(3) = 6 } = \frac {e^{-2 \cdot 3} (2 \cdot 3)^6} {6!} = \frac {e^{-6} 6^6} {6!} $$

$$ Pr{N(1) = 2| N(2) = 4 } = \frac{ 2e^{-2} \cdot e^{-4} \cdot \frac{4^4}{24} } {

```
}
= 2e^{-2} \cdot e^{-4} \cdot \frac{4^4}{24} \cdot \frac {6!} {e^{-6} 6^6}
```

$$

$$ Pr{N(1) = 2|N(3) = 6} \approx 0.3292181069958848 $$ $$ Pr{N(1) = 2|N(3) = 6} \approx 0.329 $$

(d) P{N(3) = 6|N(1) = 2}

$$ Pr{N(3) = 6|N(1) = 2} = Pr{N(3-1) = 6-2} = Pr{N(2) = 4} $$

$$ Pr{N(3) = 6|N(1) = 2} = \frac {e^{-4}(4)^4} {4!} \approx 0.19536681481316465 $$

$$ Pr{N(3) = 6|N(1) = 2} \approx 0.195 $$

Questão 07

Uma certa teoria científica sugere que erros na divisão celular ocorrem de acordo comum processo de Poisson com taxa 2.5 erros por dia. Uma célula morre quando 196 erros ocorrem. Assumindo que essa teoria está correta, encontre:

(a) O tempo médio de vida de uma célula

Seja $\lambda = 2.5$

O tempo médio até que certa quantidade de eventos ocorre de um processo de poisson segue uma distribuição exponencial. Assim sendo,

Podemos calcular o tempo médio de vida de uma célula por

> . $$ \frac {196} {\lambda} = \frac {196} {2.5} = 78.4 \hspace{.5em} dias$$.

(b) A variância do tempo de vida

A variância dessa distribuição exponencial é dada por

> . $$ 196 \cdot \frac 1 {\lambda^2} = \frac{196}{(2.5)^2} = 31.36 \hspace{.5em} dias ^2 $$.

Questão 08

DERROTA

Questão 09

Para um processo de Poisson $N(t)$ de intensidade λ e dois tempos fixos t_1 e t_2 , $t_1 < t_2$, encontre a função probabilidade conjunta para duas variáveis aleatórias $N(t_1)$ e $N(t_2)$.

$$ Pr{N(t_1)=n_1, N(t_2)=n_2} = Pr{N(t_1)=n_1, N(t_2) - N(t_1) =n_2-n_1} $$ $$ Pr{N(t_1)=n_1, N(t_2)=n_2} = Pr{N(t_1)=n_1} \cdot Pr{N(t_2-t_1)=n_2-n_1} $$ $$ Pr{N(t_1)=n_1, N(t_2)=n_2} = \frac{e^{-\lambda t_1}(\lambda t_1)^{n_1}}{n!} \cdot \frac{ e^{-\lambda (t_1 - t_2)}(\lambda (t_1 - t_2))^{(n_2 - n_1)} }{ (n_2 - n_1)! } $$

Questão 10

Partículas radioativas são emitidas de uma fonte de acordo com um processo de Poisson de intensidade $\lambda = 1$ partiícula por minuto.

Tópico A

Suponha que cinco partículas são emitidas no primeiro minuto. Qual é a probabilidade que exatamente duas dessas partículas foram emitidas nos primeiros 30 segundos? (Resp.: 0.312).

Usando minutos como nossa unidade de tempo, o que queremos calcular pode ser expresso por: $$ Pr { N(0.5) = 2 | N(1) = 5} $$

Aplicando a fórmula de probabilidade condicional: $$ Pr { A | B } = \frac {Pr { A, B }} {Pr { B }} $$ $$ Pr { N(0.5) = 2 | N(1) = 5} = \frac { Pr { N(0.5) = 2, N(1) = 5} } { Pr { N(1) = 5 } } $$

Para tornar os eventos independentes, vale: $$ Pr { N(0.5) = 2 | N(1) = 5} = \frac { Pr { N(0.5) = 2, N(1 - 0.5) = 5 - 2} } { Pr { N(1) = 5 } } $$

Dessa forma, $$ Pr { N(0.5) = 2 | N(1) = 5} = \frac { { Pr { N(0.5) = 2 } \cdot Pr{ N(1 - 0.5) = 5 - 2 } } } { Pr { N(1) = 5 } } $$

$$ Pr { N(0.5) = 2 | N(1) = 5} = \frac { { Pr { N(0.5) = 2 } \cdot Pr{ N(0.5) = 3 } } } { Pr { N(1) = 5 } } $$

Aplicando a fórmula do Processo de Poisson: $$ Pr { N(t) = n} = \frac { e^{-\lambda t} (\lambda t)^n } { n! } $$

Para $n = 2$: $$ Pr{ N(0.5) = 2 } = \frac { e^{-1 \cdot \frac 1 2} (1 \cdot \frac 1 2)^2 } { 2! } = \frac { e^{-0.5} (0.5)^2 } { 2 } = \frac {\frac 1 4 \sqrt{\frac 1 e}} {2} = \frac {\sqrt{\frac 1 e}} {8} \approx 0.07581633246407918 $$

Para $n = 3$: $$ Pr{ N(0.5) = 3 } = \frac { e^{-1 \cdot \frac 1 2} (1 \cdot \frac 1 2)^3 } { 3! } = \frac { \frac 1 8 \sqrt{\frac 1 e} } { 6 } = \frac { \sqrt{\frac 1 e} } { 48 } \approx 0.012636055410679864 $$

Para calcular $Pr { N(1) = 5 }$: $$ Pr{ N(1) = 5 } = \frac { e^{-1 \cdot 1} (1 \cdot 1)^5 } { 5! } = \frac { e^{-1} \cdot 1^{5} } { 5! } = \frac { 1 } { 120 e } \approx 0.0030656620097620196 $$

Então $$ Pr { N(0.5) = 2 | N(1) = 5} = \frac { \frac {\sqrt{\frac 1 e}} {8} \cdot \frac { \sqrt{\frac 1 e} } { 48 } } { \frac { 1 } { 120 e } } = \frac {\sqrt{\frac 1 e} \cdot \sqrt{\frac 1 e}} {8 \cdot 48 } \cdot \frac { 120 e } { 1 } = \frac {{\cancel e^{-1}} \cdot 120 \cancel e} {8 \cdot 48} $$ $$ Pr { N(0.5) = 2 | N(1) = 5} = \frac {120} {8 * 48} = \frac {120} {384} = \frac {5} {16} $$

> . $$ Pr { N(0.5) = 2 | N(1) = 5} = \frac {5} {16} = 0.3125 $$.

Tópico B

Seja S_n o tempo de emissão da n−ésima partícula. Expresse S_n em termos do tempo de permanência no estado n, isto é T_n , e então encontre $E[S_n]$. (Resp.: E[Sn] = n)

O tempo de emissão da n−ésima partícula (S_n) depende do tempo de permanência no estado T_n e do tempo de permanência nos estados anteriores, ou seja: $$ S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_{n-1} + T_n $$ $$ S_n = \sum _{i = 1} ^{n} T_i $$

Em uma distribuição de poisson, o tempo de emissão da n-ésima partícula segue uma distribuição exponencial. $$ T_n \sim Exp(\lambda) $$

Em uma distribuição exponencial $Exp(\lambda)$, podemos calcular a média esperada (a esperança) por: $$ E[T_n] = \frac 1 \lambda $$

Dado $\lambda = 1$, tem-se que:

$$ E[T_n] = 1 $$

Sabemos que se trata de um **processo de poisson homogêneo** , então podemos inferir que: $$ E[T_i] = 1 \hspace{1em} \forall , i$$

Assim, obtemos: $$ E[S_n] = E \left[\sum _{i = 1} ^{n} T_i
\right] $$ $$ E[S_n] = E \left[\sum _{i = 1} ^{n} 1 \right] $$

Usando a propriedade de soma de constantes: $$ \sum _{i = 1} ^{n} C = C \cdot n $$

Temos então: $$ E[S_n] = 1 \cdot n $$

Portanto, concluímos que:

> . $$ E[S_n] = n $$.

Tópico C

Suponha que cada partícula sobreviva durante 10 segundos. Qual é a probabilidade de k partıículas existirem em um minuto? (Resp.: ≈ 0.84648/(6k k!))

Dado que uma partícula sobrevive por 10 segundos, a probabilidade de, após 1 min desde o início do experimento, existirem exatamante k partículas depende tão somente do ocorrido nos

$$ Pr { N(60/60) - N(50/60) = k } = Pr { N(10/60) = k } $$ $$ Pr { N(t) = n} = \frac { e^{-\lambda t} (\lambda t)^n } { n! } $$ $$ Pr { N(1/6) = k } = \frac { e^{-1 \cdot \frac 1 6} (1 \cdot \frac 1 6)^k } { k! } = \frac { e^{-\frac 1 6} (\frac 1 6)^k } { k! } = \frac { \frac {1} {\sqrt[6]{e}} (\frac 1 6)^k } { k! } $$

$$ e ^ {- \frac 1 6} = \frac 1 { \sqrt [6] e } \approx 0.8464817248906141 \approx 0.84648 $$

$$ Pr { N(1/6) = k } = \frac { \frac {1} {\sqrt[6]{e}} } { k! } \cdot \frac {1} {6^k} \approx \frac { 0.8464817248906141 } { k! \hspace{0.5em} 6^k } $$

> . $$ Pr { N(1/6) = k } \approx \frac { 0.84648 } { 6^k \hspace{0.25em} k!} $$.

Questão 11

Seja ${N(t), t \neq 0}$ um processo de Poisson de taxa λ. Para $s < t$ encontre:

(a) $P(N(t) > N(s))$. (Resp: 1 − e−λ(t−s))

Observe que $P(N(t) > N(s))$ é equivalente a $P(N(t) - N(s) > 0)$. Assim, Podemos calcular essa probabilidade da seguinte forma:

$$ Pr {N(t) - N(s) < 0 } = 0 $$ $$ \therefore Pr {N(t) - N(s) > 0 } = 1 - Pr {N(t) - N(s) \le 0 } $$

Considerando que $s < t$, chegamos a $$ Pr { N(s) > N(t) } = 0 $$

Portanto $$ Pr {N(t) - N(s) > 0 } = 1 - Pr {N(t) - N(s) = 0 } $$

Sabendo que $$ Pr { N(t) = k } = Pr { N(t + s) - N(s) = k } $$

Então podemos afirmar que $N(t) - N(s)$ descreve a quantidade de eventos que ocorrem no intervalo $(, t - s, \hspace{0.333em} t ,]$, assim sendo: $$ Pr {N(t) - N(s) = 0 } = Pr {N(t - s) = 0 } $$

$$ Pr {N(t - s) = 0 } = \frac { e^{-\lambda (t - s)} \cdot [\lambda (t - s)]^0 } { 0! } $$

$$ Pr {N(t - s) = 0 } = \frac {e^{-\lambda (t - s)} \cdot 1} {1} $$ $$ Pr {N(t - s) = 0 } = e^{-\lambda (t - s)} $$

Substituindo o valor de Pr {N(t) - N(s) = 0 }, obtemos o resultado:

> . $$ Pr {N(t) > N(s) } = 1 - e^{-\lambda (t - s)} $$.

(b) $P(N(s) = 0, N(t) = 3)$ (Resp.: e−λs e−λ(t−s) [λ(t − s)]3 /3!)

A priori, precisamos tornar os eventos independentes: $$ Pr { N(s) = 0, N(t) = 3} = Pr { N(s) = 0, N(t - s) = 3 - 0} $$

Assim, chegamos a: $$ Pr { N(s) = 0, N(t) = 3} = Pr { N(s) = 0 } \cdot Pr { N(t - s) = 3} $$

$$ Pr { N(s) = 0 } = \frac {e^{-\lambda s} (\lambda s)^0} {0!} = e^{-\lambda s} $$

$$ Pr { N(t - s) = 3} = \frac {e^{-\lambda (t - s)} \cdot [\lambda (t - s)]^3} {3!} $$

Logo $$ Pr { N(s) = 0, N(t) = 3 } = e^{-\lambda s} \cdot {e^{-\lambda (t - s)} \cdot [\lambda (t - s)]^3} \cdot \frac{1}{3!} $$

Conclui-se, então,

> . $$ Pr { N(s) = 0, N(t) = 3} = e^{-\lambda (t - 2s)} \cdot [\lambda (t - s)]^3 \cdot \frac{1}{6} $$.

(c) $E[N(t)|N(s) = 4]$ (Resp.: 4 + λ(t − s))

Usando a propriedade dos incrementos independentes do processo de Poisson, temos: $$ E[N(t)|N(s) = 4] = 4 + E[N(t) - N(s)] $$

Dado que $N(t) - N(s)$ é igual a $N(t - s)$, podemos escrever: $$ E[N(t)|N(s) = 4] = 4 + E[N(t - s)] $$

A esperança do processo de Poisson é dada por: $$ E[N(t)] = \lambda t $$

Portanto, chegamos à conclusão de que: $$ E[N(t)|N(s) = 4] = 4 + \lambda * (t-s) $$

(d) $E[N(s)|N(t) = 4]$ (Resp.: 4s/t)

Aplicando o somatório para calcular a esperança = \sum _{x} , x \cdot Pr{X = x} $$

Obtém-se $$ E[N(s) | N(t) = 4] = \sum _{i = 0} ^ {4} i \cdot Pr{ N(s) = i | N(t) = 4 } $$

$$ Pr{ N(s) = i | N(t) = 4 } = \frac { Pr{ N(s) = i, N(t) = 4 } } { Pr{ N(t) = 4 } } $$

Note que s e t não configuram intervalos disjuntos, por esse motivo, aplicamos $$ Pr{ N(s) = i, N(t) = 4 } = Pr{ N(s) = i, N(t - s) = 4 - i } = Pr{ N(s) = i} \cdot Pr{ N(t - s) = 4 - i } $$

$$ Pr{ N(s) = i | N(t) = 4 } = \frac { Pr{ N(s) = i} \cdot Pr{ N(t - s) = 4 - i } } { Pr{ N(t) = 4 } } $$

$$ Pr{ N(s) = i | N(t) = 4 } = \frac {e^{-\lambda s}(\lambda s)^i} {i!} \cdot \frac {e^{-\lambda (t - s)}[\lambda (t - s)]^{4-i}} {(4-i)!} \cdot \frac {4!} {e^{-\lambda t}(\lambda t)^4} $$

$$ Pr{ N(s) = i | N(t) = 4 } = \frac {\cancel{e^{-\lambda s}}(\lambda s)^i} {i!} \cdot \frac { \cancel{e^{-\lambda t}} \cancel{e^{\lambda s}} [\lambda t - \lambda s]^{4-i} } {(4-i)!} \cdot \frac {4!} {\cancel{e^{-\lambda t}} (\lambda t)^4} $$

$$ Pr{ N(s) = i | N(t) = 4 } = \frac { 4! (\lambda s)^i [\lambda(t-s)]^{4-i} } { \lambda^4 t^4 (4-i)! i! } $$

Como λ, i, s e t são positivos (ignorando o caso i = 0, pois ele não afetará a esperança) $$ Pr{ N(s) = i | N(t) = 4 } = \frac { 4! \lambda^i s^i \lambda^{4-i} (t-s)^{4-i} } { \lambda^4 t^4 (4-i)! i! } = \frac { 4! \cancel{\lambda^{i+4-i}} s^i (t-s)^{4-i} } { \cancel{\lambda^4} t^4 (4-i)! i! } $$

$$ Pr{ N(s) = i | N(t) = 4 } = \frac { 4! s^i (t-s)^{4-i} } { t^4 (4-i)! i! } $$

$$ Pr{ N(s) = i | N(t) = 4 } = \frac { s^i (t-s)^{4-i} } { t^4 } \cdot \frac {4!} {(4-i)! i!} $$

$$ Pr{ N(s) = i | N(t) = 4 } = \frac { s^i (t-s)^{4-i} } { t^4 } \cdot \binom{4}{i} $$

$$ Pr{ N(s) = i | N(t) = 4 } = \frac{1}{t^4} [s^i , (t - s)^{4-i} , \binom{4}{i}] $$

$$ E[N(s) | N(t) = 4] = \sum _{i = 0} ^ {4} i \cdot \frac{1}{t^4} [s^i , (t - s)^{4-i} , \binom{4}{i}] $$

$$ E[N(s) | N(t) = 4] = \frac{1}{t^4} \sum _{i = 0} ^ {4} i \cdot [s^i , (t - s)^{4-i} , \binom{4}{i}] $$

Expandindo o somatório

$$ \sum _{i = 0} ^ {4} i \cdot [s^i , (t - s)^{4-i} , \binom{4}{i}] = 4s^4 + 12s^3(t-s) + 12s^2(t-s)^2 + 4s(t-s)^3 $$

Expandindo novamente $$ = 4s^4 + (12s^3t-12s^4) + (12s^2t^2 - 24s^3t + 12s^4) + (- 4s^4 + 12s^3t - 12s^2t^2 + 4st^3) $$

Reorganizando os termos $$ = (4s^4 - 4s^4 -12s^4 + 12s^4) + (12s^3t - 24s^3t + 12s^3t) + (12s^2t^2 - 12s^2t^2) + 4st^3 $$

$$ = \cancel{(4s^4 - 4s^4 -12s^4 + 12s^4)} + \cancel{(12s^3t - 24s^3t + 12s^3t)} + \cancel{(12s^2t^2 - 12s^2t^2)} + 4st^3 $$

$$ \sum _{i = 0} ^ {4} i \cdot [s^i , (t - s)^{4-i} , \binom{4}{i}] = 4st^3 $$

Substituindo o resultado do somatório na equação da esperança obtem-se: $$ E[N(s) | N(t) = 4] = \frac{1}{t^4} \cdot 4st^3 $$

Portanto,

> . $$ E[N(s) | N(t) = 4] = \frac{4s}{t} $$.

Questão 12

Um médico tem duas consultas a fazer, umas às 13h e outra às 13:30h. O tempo gasto em cada consulta tem distribuição exponencial com média de 30 minutos. Assumindo que ambos os pacientes chegaram no horário marcado, encontre o tempo médio gasto pelo paciente marcado às 13:30h no consultório.

Seja T_n a duração da n-ésima consulta

$$ E[T_n] = \frac 1 {\lambda} = 30 ,,, \iff \lambda = \frac 1 {30}$$ $$ T_n \sim Exp \left(\frac 1 {30} \right) $$ $$ Pr{T_n = t} = \lambda e^{-\lambda t} = \dfrac {e^{-t , / , 30}} {30} $$

Sendo T_1 o tempo de duração da primeira consulta. Como o segundo paciente chega exatamente às 13:30, o tempo de espera será zero se a duração da primeira consulta for menor ou igual a 30 min. Portanto, o tempo médio gasto pelo segundo paciente (X) é dado por = E[T_2] + E[A] $$

Sendo A uma igual ao atraso, o tempo extra tomado durante a primeira consulta. Assim, é fácil notar que a A pode ser definida em termos de T_1

$$ A = f_a(T_1) $$

$$ f_a(x) = \begin{cases} 0 ,, , \hspace{1em} \text{se } ,, x \le \lambda \ x - \lambda ,, , \hspace{1em} \text{se } ,, x > \lambda \end{cases} $$

Dessa forma,

$$ E[A] = \int _0 ^{\infty} f_a(t) \cdot Pr { f_a(x) = t} dt$$

Aplicando a propriedade: $$ \int _a ^c f(x) dx = \int _a ^b f(x) dx + \int _b ^c f(x) dx \ a < c < c $$

Chegamos a $$ E[A] = \int _{0} ^{\lambda} 0 \cdot Pr { T_1 = t } dt + \int _{\lambda} ^{\infty} (t - \lambda) \cdot (Pr { T_1 = t }) dt $$

$$ E[A] = \int _{30} ^{\infty} t \cdot \dfrac {e^{-t/30}dt} {30} $$ $$ E[A] = \frac{1}{30} \cdot \left. \left[-30te^{-t/30} + C \right]\right| _{30} ^{\infty} $$

$$ E[A] = \frac{30}{30} \cdot \lim_{x \to \infty} \left[\left(- \frac x {e^{x/30}} \right) - \left(- \frac {30} e \right) \right] $$

$$ E[A] = 0 - \left(- \frac {30} e \right) = \frac{30}{e}$$ $$ E[A] \approx 11.03638323514327 $$

Voltando ao cálculo da média do tempo esperado no consultório = E[T_2] + E[A] = \frac{1}{\lambda} + \frac {30} e \approx 30 + 11.03638323514327 $$

Conclui-se, então,

> . \approx 41.036 $$.

Questão 13

Imagine que pessoas entram numa sala de aula seguindo um processo de Poisson com taxa λ = 1 pessoa por minuto.

(a) Qual é o tempo esperado até que a décima pessoa entre?

O tempo esperado até a décima pessoa é dado pela integral $$ E[w_{10}] = \int *0 ^\infty t f*{w_{10}} (t) dt $$

Dada a função densidade de probabilidade: $$ f_{w_{n}} (t) = \frac {\lambda^n t^{n-1}} {(n-1)!} e^{-\lambda t} $$ $$ f_{w_{10}} (t) = \frac {\lambda^{10} t^{10-1}} {(10-1)!} e^{-\lambda t} $$ $$ f_{w_{10}} (t) = \frac {\lambda^{10} t^9} {9!} e^{-\lambda t} $$

Chegamos a $$ E[w_{10}] = \int _0 ^\infty t \frac {\lambda^{10} t^9} {9!} e^{-\lambda t}dt $$

$$ E[w_{10}] = \frac{\lambda^{10}}{9!} \int _0 ^\infty t^{10} e^{-\lambda t}dt $$

$$ E[w_{10}] = \frac{1^{10}}{9!} \int _0 ^\infty e^{-1t} t^{10} dt $$

$$ E[w_{10}] = \frac{1}{362880} \int _0 ^\infty t^{10} e^{-t}dt $$

Podemos aplicar $$ \int f d g = fg - \int g d f $$

com
$$ f = t^{10} \hspace{5em} dg = e^{-t}dt \ df = 10 t^{9} dt \hspace{5em} g = -e^{-t} $$

Para obter: $$ E[w_{10}] = \left. -\frac{e^{-t}t^{10}}{362880} \right| _0 ^{\infty} + \frac {10} {362880} \int _0 ^\infty t^{9} e^{-t}dt $$

$$ \lim _{x \to 0} - \frac{e^{-x}x^{10}}{362880} = 0 $$

$$ E[w_{10}] = \frac {1} {36288} \int _0 ^\infty t^{9} e^{-t}dt $$

Essa etapa é repetida múltiplas vezes até obtermos:

$$ E[w_{10}] = 10 \int _0 ^\infty t e^{-t}dt = \left. -10 e^{-t} t \right| _0 ^{\infty} + 10 \int _0 ^{\infty} e^{-t}dt $$

$$ E[w_{10}] = 10 \int _0 ^{\infty} e^{-t}dt = \left. -10 e^{-t} \right| _0 ^{\infty} = (-10 e^{-\infty} - (-10 e^{-0})) $$

quando t tende ao infinito, e^{-t} tende a zero, portanto $e^{-\infty} = 0$. Portanto

> . $$ E[w_{10}] = 10 $$.

(b) Qual é a probabilidade de que o tempo entre a entrada da décima e décima primeira pessoa seja maior do que dois minutos? (Resp.: ≈ 0.133)

$$ T_n ~ Exp(\lambda) $$

$$ T_{11} = w_{11} - w_{10} $$

$$ Pr{T_{11} > t} = e ^ (- \lambda t) $$

$$ Pr{T_{11} > 2} = e ^ (-1 \cdot 2) = e^{-2} \approx 0.1353352832366127 $$

> . $$ Pr{T_{11} > 2} \approx 0.135 $$.

Questão 14

Passageiros chegam a um terminal rodoviário de acordo com um processo de Poisson de taxa $\lambda = 8$ passageiros por hora. O número de horas entre a chegada de ônibus sucessivos nesse terminal é distribuído uniformemente entre 0 e 1. Imagine que um ônibus tenha acabado de partir. Seja X o número de pessoas que entrarão no próximo ônibus. Calcule E[X]. (Resp.: 4).

Podemos calcular o tempo esperado para a chegada do próximo ônibus como $$E[O(t)]= 0 + 12 = \frac 1 2 $$

$$ E[Passageiros(t)]= t\lambda $$

$$ E[P(t)/O(t)] = E[Passageiros(E[O(t)])] = \frac 8 2 =4 $$

Questão 15

Os tempos de vida de um cachorro (T_c) e de um gato (T_g) são variáveis aleatórias independentes, distribuídas de acordo com distribuições exponenciais de parâmetros λ_c e λ_g, respectivamente. Suponha que um dos pets tenha acabado de morrer. Calcule o valor esperado do tempo de vida adicional do outro pet. Dica: Veja na seção 5.2.3 do livro do Sheldon Ross como calcular a probabilidade $Pr\{X_1 < X_2\}$

Sendo $$ t_c \sim Exp(\lambda_c) \hspace{5em} t_g \sim Exp(\lambda_g) $$

Então, o Tempo de vida esperado é dado por $$ t_c = \frac{1}{\lambda_c} \hspace{5em} t_g = \frac{1}{\lambda_g} $$

Sabendo se tratar de uma distribuição exponencial, aplicamos a propriedade da ausência de memória: ou seja, a morte de um não afeta o tempo esperado da vida do outro.

Assim, podemos aplicar a fórmula $$ Pr\{S_a < S_b \} = \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} $$

Para calcular o tempo de vida adicional (V):

$$ V = E[T_g|T_g>T_c]\cdot P\{T_c < T_g\}+E[T_c |T_c > T_g] \cdot P\{T_g < T_c\} $$

$$ V = \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_c+\lambda_g} \cdot \frac{1}{\lambda_c} \right) + \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_c+\lambda_g} \cdot \frac{1}{\lambda_g} \right) $$

Resposta:

> . $$ V = \frac{\lambda_g}{\lambda_c+\lambda_g} \cdot \frac{1}{\lambda_c} + \frac{\lambda_c}{\lambda_c+\lambda_g} \cdot \frac{1}{\lambda_g} $$.