

Bertrand Cornélusse

Circuits électriques

11 janvier 2022

Copyright © 2022 Bertrand Cornélusse

PUBLISHED BY UNIVERSITÉ DE LIÈGE

TUFTE-LATEX.GITHUB.IO/TUFTE-LATEX/

First printing, January 2022

Table des matières

<i>Nomenclature</i>	9	
1	<i>Introduction</i>	11
1.1	<i>Rappels d'électromagnétisme</i>	11
1.2	<i>Qu'est-ce qu'un circuit électrique ?</i>	12
1.3	<i>Définitions et conventions</i>	14
1.4	<i>Dipôles et sens conventionnel</i>	15
1.5	<i>Quadripôles</i>	16
1.6	<i>Classification des circuits</i>	16
1.7	<i>Organisation du cours</i>	19
1.8	<i>Liens avec d'autres cours</i>	21
2	<i>Lois fondamentales et composants fondamentaux</i>	23
2.1	<i>Rappel de théorie des graphes</i>	23
2.2	<i>Définitions</i>	26
2.3	<i>Lois de Kirchhoff</i>	26
2.4	<i>Loi d'Ohm</i>	30
2.5	<i>La résistance</i>	30
2.6	<i>L'inductance</i>	32
2.7	<i>Le condensateur</i>	34
2.8	<i>La diode</i>	35
2.9	<i>Sources indépendantes d'énergie</i>	36
2.10	<i>Les sources dépendantes de courant et de tension</i>	38
2.11	<i>Passivité des éléments R, L et C linéaires et invariants</i>	38
2.12	<i>Schéma détaillé de la radio AM</i>	39
2.13	<i>Exercices</i>	42
2.14	<i>Solution des exercices</i>	45

3	Régimes transitoires	57
3.1	<i>Propriétés des éléments L et C linéaires et invariants</i>	57
3.2	<i>Les circuits du premier ordre</i>	60
3.3	<i>Les circuits du deuxième ordre</i>	65
3.4	<i>Comment résoudre un exercice en pratique</i>	72
3.5	<i>Détection d'enveloppe de la radio AM</i>	72
3.6	<i>Exercices</i>	74
3.7	<i>Exercices non résolus</i>	77
3.8	<i>Solution des exercices</i>	78
4	Régime sinusoïdal établi	95
4.1	<i>Définition</i>	95
4.2	<i>Les phaseurs</i>	96
4.3	<i>Relation entre tension et courant de branche</i>	97
4.4	<i>Impédance et admittance</i>	99
4.5	<i>La puissance en régime sinusoïdal établi</i>	101
4.6	<i>Circuits magnétiquement couplés</i>	106
4.7	<i>Le triphasé</i>	109
4.8	<i>Exercices</i>	115
4.9	<i>Exercices non résolus</i>	118
4.10	<i>Solution des exercices</i>	120
5	Théorèmes fondamentaux	137
5.1	<i>Théorème de Tellegen</i>	137
5.2	<i>Théorème de Substitution</i>	137
5.3	<i>Théorème de superposition</i>	139
5.4	<i>Théorème de Thévenin</i>	139
5.5	<i>Théorème de Norton</i>	144
5.6	<i>Exercices</i>	147
5.7	<i>Exercices non résolus</i>	151
5.8	<i>Solution des exercices</i>	152

6	<i>Fonctions de transfert et filtres</i>	175
6.1	<i>Réponse fréquentielle</i>	175
6.2	<i>Filtres et définitions</i>	178
6.3	<i>Circuits résonants</i>	180
6.4	<i>Autres filtres du circuit de réception et amplification de la radio AM</i>	182
6.5	<i>Exercices non résolus</i>	183
7	<i>L'amplificateur opérationnel</i>	185
7.1	<i>L'élément amplificateur opérationnel</i>	185
7.2	<i>Le montage amplificateur inverseur</i>	187
7.3	<i>Sources commandées</i>	190
7.4	<i>Filtre actif</i>	191
7.5	<i>Le montage amplificateur non-inverseur</i>	191
7.6	<i>Addition et soustraction</i>	193
7.7	<i>Un AO en pratique</i>	194
7.8	<i>Étages d'amplification de la radio AM</i>	196
7.9	<i>Exercices non résolus</i>	200
8	<i>Méthodes matricielles d'analyse et de représentation des circuits</i>	201
8.1	<i>La méthode des noeuds</i>	201
8.2	<i>La méthode des mailles</i>	213
8.3	<i>Identification des paramètres d'un quadripôle</i>	224
8.4	<i>Exercices</i>	232
8.5	<i>Exercices non résolus</i>	236
8.6	<i>Solution des exercices</i>	240

*Cet ouvrage est largement inspiré des notes de cours
de mes prédecesseures à l’Institut Montefiore, Mesdames
les Professeures Mania Pavela et Patricia Rousseaux.*

Nomenclature

AO	Amplificateur opérationnel
AM	<i>Amplitude Modulation</i>
BT	Basse tension
CCT	<i>Current to current transducer</i> , source de courant commandée par un courant
CVT	<i>Current to voltage transducer</i> , source de tension commandée par un courant
d.d.p	différence de potentiel
f.e.m	force électro-motrice
HT	Haute tension
MT	Moyenne tension
PLK	Première loi de Kirchhoff, loi des nœuds
SLK	Seconde loi de Kirchhoff, loi des mailles
THT	Très haute tension
VVT	<i>Voltage to voltage transducer</i> , source de tension commandée par une tension
VCT	<i>Voltage to current transducer</i> , source de courant commandée par une tension

TABLE 1: Acronymes et abréviations.

x	Scalaire
\mathbf{x}	Vecteur
\mathbf{A}	Matrice

TABLE 2: Notation mathématique.

A	Ampère	Unité de mesure du courant électrique
C	Coulomb	Unité de mesure de la charge électrique
dB	Décibel	Unité de grandeur adimensionnelle proportionnelle au logarithme du rapport de deux grandeurs
F	Farad	Unité de mesure de la capacité électrique
H	Henry	Unité de mesure de l'inductance électrique
Hz	Hertz	Unité de mesure de la fréquence
J	Joule	Unité de mesure de l'énergie
m	Mètre	Unité de mesure de la longueur
Ω	Ohm	Unité de mesure de la résistance électrique
s	Seconde	Unité de mesure du temps
S	Siemens	Unité de mesure de la conductance électrique, inverse de la résistance
V	Volt	Unité de mesure du potentiel électrique
VA	Voltampère	Unité de mesure de la puissance apparente
var	Voltampère réactif	Unité de mesure de la puissance réactive
W	Watt	Unité de mesure de la puissance en général, plus particulièrement de la puissance active en électricité
Wh	Watt-heure	Unité de mesure de l'énergie. 1 Wh vaut 3600 J

TABLE 3: Principales unités utilisées.

1

Introduction

Avant de définir intuitivement et ensuite plus précisément ce qu'est un circuit électrique, ce chapitre introductif rappelle brièvement les notions physiques de base utiles dans ce cours. Le chapitre se termine par une description de l'organisation du cours et une discussion des domaines de l'ingénieur pour lesquels ce cours constitue une introduction.

1.1 Rappels d'électromagnétisme

1.1.1 Charge électrique, champ électrique et potentiel électrique

Une charge électrique se mesure en Coulomb (C). Deux charges électriques exercent l'une sur l'autre une force

- qui les repousse si elles sont de même signe,
- qui les attire si elles sont de signes opposés.

La loi de Coulomb exprime plus précisément la nature de cette force (ici pour la force induite par la charge 1 sur la charge 2, et dans le vide) :

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 \vec{r}_{12}}{d_{12}^2}$$

où

- ϵ_0 est la perméabilité diélectrique du vide
- q_1 et q_2 sont les quantités de charges signées des charges 1 et 2
- $d_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$
- $\vec{r}_{12} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{d_{12}}$

Considérons une charge ponctuelle. Le champ électrique qui en résulte définit à tout endroit de l'espace la force qu'exercerait la charge ponctuelle sur une charge d'un C placée à cet endroit. Un champ électrique exprime donc une force par unité de charge.

Le potentiel électrique est l'intégrale linéique du champ électrique. Il a donc les dimensions d'une énergie par unité de charge. Il s'exprime en Volt (V). Le plus souvent d'ailleurs c'est le Volt qui est utilisé pour caractériser un champ électrique, exprimé en Volt par mètre.

Dans ce cours nous utiliserons également la notion de tension, qui représente une différence de potentiel entre deux points, et s'exprime donc en Volt également. Dans un système laissé libre, une tension entre deux points d'un conducteur engendre un courant électrique au sein de ce conducteur.

1.1.2 Courant électrique et champ magnétique

Un courant électrique est un déplacement de charge à travers une section. Il se mesure en Coulomb par seconde, ou encore en Ampère (A).

Un déplacement de charge engendre un champ magnétique, qui se mesure en Ampère par mètre.

Un champ magnétique se traduit par l'existence d'une force agissant sur les charges électriques en mouvement (force de Lorentz). En régime stationnaire, il est soit dû à un courant, soit à un aimant permanent.

1.1.3 Les équations de Maxwell

Plus formellement, les phénomènes décrits plus haut sous forme intuitive sont régis par les équations de Maxwell, qui modélisent les relations entre champ électrique, champ magnétique, charge et courant.

En régime stationnaire, lorsque les champs ne varient pas avec le temps, elles s'écrivent (cf. Table 1.1) :

$$\begin{aligned}\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q}{\epsilon} \\ \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= 0 \\ \int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu I\end{aligned}$$

ou localement

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J}\end{aligned}$$

En régime non stationnaire :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

Symbole	Nom	Unité
\vec{E}	Champ électrique	V/m
$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$	Induction électrique	C/m ²
ρ	Densité de charges	C/m ³
\vec{J}	Densité de courant	A/m ²
\vec{H}	Champ magnétique	A/m
$\vec{B} = \mu \vec{H}$	Induction magnétique	Tesla

TABLE 1.1: Grandeur caractéristiques d'un champ électromagnétique.

1.2 Qu'est-ce qu'un circuit électrique ?

Un circuit électrique est un ensemble d'éléments électriques interconnectés et dotés de points accessibles à l'observation, que nous appellerons "bornes".

Le domaine d'application des circuits et l'éventail de leurs caractéristiques sont extrêmement vastes. Ainsi, leur taille varie entre quelques *mm* (circuits intégrés comportant des centaines de milliers de composants), en passant par celle des circuits radios, TV, instruments électroniques, ou circuits de télécommunications, jusqu'à la taille des grands réseaux de transport d'énergie électrique qui s'étendent sur des continents. De même, on y rencontre des tensions¹ qui varient de quelques μV (par exemple dans des études du bruit des instruments de précision) jusqu'à des centaines de kV (voire des MV) dans les grands réseaux électriques. D'autre part, les fréquences² utilisées varient de zéro (régime continu) jusqu'à des dizaines de GHz (circuits micro-ondes). Quant aux niveaux de puissance³, ils s'étendent entre quelques $10^{-14}W$ (signaux à l'entrée de récepteurs sensibles tels par exemple les signaux provenant de galaxies éloignées) et des dizaines de milliers de MW produits et transportés par les réseaux électriques haute tension. Par exemple, la puissance produite par une centrale nucléaire est de l'ordre de 500 à 1000 MW , et la puissance installée en Belgique est d'environ 12.000 MW .

A l'instar de nombreux domaines du physicien et de l'ingénieur, l'étude des circuits électriques fait appel à la modélisation : un circuit est considéré comme l'assemblage d'éléments idéalisés, c'est-à-dire de modèles établis de façon à cerner au mieux le comportement de ses éléments réels. Davantage que dans d'autres domaines, on parvient à rendre leur modélisation proche de la réalité physique, permettant la prédiction de résultats expérimentaux avec une bonne approximation. Un des attraits de la théorie des circuits réside précisément dans l'exactitude et la netteté du modèle mathématique. Il en résulte un intérêt pratique de ramener, par le truchement des analogies, l'étude d'autres phénomènes (hydrauliques, mécaniques, biologiques, etc.) en celle, bien établie, des circuits électriques.

On distingue deux sortes de circuits : les circuits (à éléments) localisés (ou condensés) et les circuits distribués. La notion d'élément localisé est liée à ses dimensions très petites par rapport à la longueur d'onde du signal utilisé. Une autre façon d'exprimer la même notion est de dire que les circuits sont sollicités par des signaux quasi-stationnaires (voir 1.3.1).

Dans le cadre de ce cours, seuls les circuits à éléments Localisés et en nombre Fini (LF) seront étudiés.

Les circuits localisés sont régis par les lois de Kirchhoff. Celles-ci sont une approximation des équations de Maxwell, seules équations régissant tous les phénomènes électromagnétiques. Les relations entre courants et tensions aux bornes des différents éléments, issues des lois de l'électromagnétisme, telle la loi de Lenz, sont des équations intégro-différentielles dans le domaine temporel (à l'exception de la résistance idéale qui, régie par la loi d'Ohm donne lieu à une équation algébrique).

La théorie des circuits électriques traite de l'analyse et de la synthèse. L'analyse étudie leurs propriétés et comportement électriques. À l'opposé, la synthèse traite de la détermination des éléments d'un circuit appelé à saisir certaines spécifications. L'objet de ce cours d'introduction est essentiellement l'analyse, mais il permettra néanmoins déjà, avec un peu d'imagination, de synthétiser quelques circuits d'intérêt pratique.

1. Une tension s'exprime en Volt (V) et représente une quantité d'énergie par unité de charge électrique. En général, plus le niveau de tension d'un circuit est élevé, plus les quantités d'énergie en jeu sont importantes.
2. En général, un dispositif électrique fonctionne dans une plage de fréquences restreinte. Cette plage est très spécifique à la fonction du dispositif et peut se réduire à une seule valeur dans les applications de transport et de distribution de l'énergie électrique.
3. La puissance d'un circuit caractérise en quelque sorte la vitesse à laquelle il est capable de convertir ou d'acheminer de l'énergie.

1.3 Définitions et conventions

1.3.1 Circuits localisés et excitations quasi-stationnaires

Un circuit localisé et fini est constitué d'un nombre fini d'éléments localisés et de sources indépendantes d'énergie, elles aussi localisées. Les éléments localisés peuvent avoir deux bornes (ce sont les dipôles), comme par exemple les résistances et les condensateurs, ou plus de deux bornes, comme par exemple les transformateurs, et les transistors. Ces éléments et sources localisés sont interconnectés par l'intermédiaire de fils électriques supposés parfaits, c'est-à-dire infiniment bons conducteurs dépourvus de toute résistance et autres éléments parasites. On utilise souvent le vocable "court-circuit" pour caractériser un fil électrique parfait. Par opposition, on appelle "circuit ouvert" un milieu parfaitement isolant qui ne laisse transiter aucune charge électrique.

La notion d'élément localisé est intimement liée à la notion de signal quasi-stationnaire, elle-même liée au temps de propagation de l'onde électrique et à la longueur d'onde λ ou à la fréquence f de celle-ci⁴. On dit qu'un signal appliqué à un circuit est quasi-stationnaire lorsque sa longueur d'onde est considérablement plus grande que les dimensions du circuit ou, en d'autres termes, que le temps de propagation de ce signal est nettement plus faible que sa période.

Pour fixer les idées, considérons quelques cas caractéristiques :

1. source de tension "secteur" : $f = 50 \text{ Hz}$ (en Europe) ; $\lambda = 6000 \text{ km}$
2. signal électroacoustique : considérant que sa fréquence la plus élevée est $f = 25 \text{ kHz}$, on a $\lambda = 12 \text{ km}$;
3. signaux utilisés en ordinateurs : par exemple, $f = 500 \text{ MHz}$ c'est-à-dire $T = 2 \text{ ns}$ ou $\lambda = 0,6 \text{ m}$;
4. fréquences radio (communications par satellite) : par exemple $f = 1 \text{ GHz}$ c'est-à-dire $\lambda = 3 \text{ cm}$.

Le signal 1 peut être considéré comme quasi-stationnaire pour des réseaux de distribution habituels. Par contre, les grands réseaux de transport d'énergie peuvent s'étendre sur plusieurs centaines de kilomètres ; il se peut alors que le signal à fréquence industrielle ne puisse plus être considéré comme "quasi-stationnaire". Le signal 2 peut certainement être considéré comme quasi-stationnaire même pour des circuits de dimensions importantes (une chaîne HI-FI s'étendant habituellement à quelques centaines de mètres au plus). Le signal 3 peut donner lieu à une mauvaise approximation de circuit localisé et les lois de Kirchhoff peuvent se trouver en défaut. Dans le cas 4, il ne peut plus être question de circuit localisé (et d'ailleurs les circuits utilisés dans ce cas ne sont plus des circuits conventionnels) : l'antenne (à l'émission ou à la réception) n'admet pas l'approximation que constituent les lois de Kirchhoff (penser par exemple au cas d'une antenne quart-d'onde : l'onde de courant est distribuée de façon à ce qu'elle soit toujours nulle à son sommet et maximum à sa base).

4. Il s'agit bien entendu de signaux temporellement variables. Lorsque ces signaux sont de forme quelconque, non sinusoïdale, la fréquence considérée dans cette discussion est la plus élevée parmi toutes les fréquences du spectre de Fourier.

1.4 Dipôles et sens conventionnel

Un dipôle (Figure 1.1) est une branche, c'est-à-dire une portion d'un circuit contenue entre deux bornes.

Par définition, le courant entrant par l'une des bornes est égal au courant sortant par l'autre. On appelle **noeud** un point du circuit auquel aboutissent plusieurs branches. La différence entre "borne" et "noeud" est que le second est le point où aboutissent plus d'une branche. En général, une branche peut comporter plus d'un élément. D'autre part, on appelle "accès" une paire de bornes telle que le courant entrant par l'une des bornes est égal au courant sortant par l'autre.

Sens conventionnel, convention moteur. Soient u et i les variables modélisant respectivement la tension aux bornes du dipôle et le courant qui le traverse. Le sens conventionnel de référence est défini par le choix d'orientation relative de u et i (cf. Figure 1.2). L'orientation de la tension u est indiquée soit par les signes + et -, soit par une flèche courbe. Cette orientation implique

$$u = v_A - v_B,$$

si v_A et v_B sont respectivement les potentiels des bornes A et B . Le sens du courant est indiqué par la flèche superposée au conducteur.

Pour la convention moteur, le courant pénètre par la borne + et sort par la borne -. Avec cette convention, le courant sera considéré comme "positif" lorsque les charges positives entrent par la borne + et sortent par la borne - ; la d.d.p. u sera considérée comme "positive" lorsque le potentiel du noeud + est supérieur à celui du noeud -.

L'adoption d'une convention n'est pas imposée par des raisons physiques. L'utilisation d'une convention est néanmoins importante : on sait que dans le cas de cette convention moteur, le produit $u(t)i(t)$ représente la puissance **fournie** au dipôle à l'instant t .

L'analyse d'un circuit **commence toujours par l'application d'une convention à chaque branche du circuit**. Mais ce n'est qu'à l'issue de l'analyse que le sens réel des tensions et courants est déterminé en fonction du signe que prennent les variables de modélisation. En utilisant la convention moteur, selon le type de dipôle considéré et la manière dont il est connecté au reste du circuit, la puissance fournie au dipôle est

- soit positive : le dipôle consomme de l'énergie ;
- soit négative : le dipôle fournit de l'énergie ;
- soit nulle.

1.4.1 Circuit passifié

Une notion importante, qui reviendra très fréquemment dans ce cours, est la notion de circuit *passifié*. On appelle **passifié** un circuit dont on a (par la pensée le plus souvent) enlevé les sources indépendantes d'énergie ; il dérive du circuit d'origine (complet) lorsque l'on "court-circuite" tous les générateurs de tension, c'est-à-dire lorsqu'on remplace tous ces générateurs par des conducteurs parfaits, et lorsqu'on ouvre tous les injecteurs de courant, c'est-à-dire lorsqu'on enlève les dipôles sources idéales de courant.

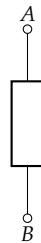


FIGURE 1.1: Représentation d'un dipôle générique et de ses bornes A et B.

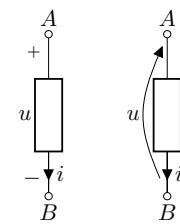


FIGURE 1.2: Sens conventionnel (convention moteur) d'un dipôle. On indique le sens de la tension soit avec un signe + et un signe -, soit avec une flèche.

1.5 Quadripôles

Un quadripôle est un (élément de) circuit comportant deux accès (deux paires de bornes), chacun étant caractérisé par deux grandeurs : d.d.p. et courant.

Plus précisément, pour chacun des accès, le courant "entrant" par une de ses bornes en "sort" par l'autre. Les sens conventionnels associés sont indiqués sur la Figure 1.3. Avec ces sens, la puissance totale fournie au quadripôle à l'instant t est exprimée par :

$$p(t) = i_1(t)u_1(t) + i_2(t)u_2(t)$$

Notons que le quadripôle est un cas particulier du tétrapôle ; ce dernier est un circuit à quatre bornes ne constituant pas deux accès (Figure 1.4), et les courants ne sont soumis qu'à la seule contrainte imposée par la première loi de Kirchhoff (Chapitre 2.3).

1.6 Classification des circuits

Les propriétés électriques d'un circuit en tant que transmetteur – ce terme étant pris dans son sens le plus large – dépendent des propriétés de ses éléments, à l'exclusion des sources indépendantes d'énergie. Pour identifier ces propriétés, nous considérerons donc des circuits *passifiés* et assimilerons ces derniers à des "boîtes" dotées d'accès. Leurs propriétés générales dépendront de la nature des réponses obtenues à certains accès à des excitations appliquées à certains (les mêmes ou non) accès.

1.6.1 Linéarité

Soient $e(t)$ l'excitation appliquée à un système⁵ supposé initialement relaxé⁶, et $w(t)$ la réponse à cette excitation. On dit que le système est linéaire s'il satisfait le principe de superposition suivant lequel la réponse due à plusieurs excitations est égale à la somme des réponses dues à chacune des excitations agissant séparément⁷. Autrement dit, si : $w_1(t)$ est la réponse à l'excitation $e_1(t)$ et si $w_2(t)$ est la réponse à l'excitation $e_2(t)$, alors le circuit sera linéaire si la réponse à l'excitation $k_1e_1(t) + k_2e_2(t)$ est $k_1w_1(t) + k_2w_2(t)$ avec k_1 et k_2 des constantes.

Cette propriété s'étend bien entendu à plus de deux signaux, et ces signaux ne sont pas nécessairement scalaires. En effet, si des excitations sont appliquées à plusieurs accès du circuit, $e(t)$ et $w(t)$ deviennent des vecteurs.

Exemple. Un déivateur est un système linéaire. En effet, la dérivée d'une combinaison linéaire de fonctions est égale à cette combinaison linéaire de leurs dérivées.

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n k_i e_i(t) \right) = \sum_{i=1}^n k_i \frac{de_i(t)}{dt}$$

1.6.2 Permanence ou invariance

Si $w(t)$ est la réponse d'un système à un signal $e(t)$ agissant à l'instant t , la réponse de ce système au même signal mais différé de r , $e(t - r)$, sera sa

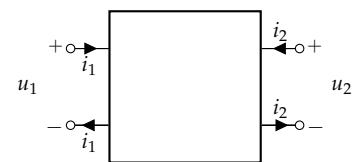


FIGURE 1.3: Représentation d'un quadripôle.

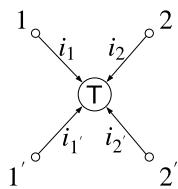


FIGURE 1.4: Tetrapôle.

5. Dans ce paragraphe, nous utilisons de façon interchangeable les termes "circuit" et "système" pour mettre l'accent sur le fait que les définitions sont générales et ne revêtent pas un caractère spécifiquement "électrique".

6. Un système est dit *initiallement relaxé* lorsqu'il est dépourvu de toute énergie initiale emmagasinée, c'est-à-dire de conditions initiales. Les éléments conventionnels introduisant des conditions initiales dans les circuits sont les inductances et les condensateurs.

7. La propriété de superposition est équivalente aux propriétés d'homogénéité et d'additivité réunies.

réponse initiale différée de r , c'est-à-dire $w(t - r)$. Les systèmes qui satisfont le principe de permanence sont dits invariants ou permanents ; sinon ils sont variants.

Contre-exemple. Le système décrit par la relation $w(t) = t \frac{de(t)}{dt}$ n'est pas invariant.

1.6.3 Passivité

Les circuits qui ne restituent jamais plus d'énergie qu'ils n'en reçoivent sont appelés passifs. Dans le cas contraire, ils sont appelés actifs. Dans le cas d'un dipôle, en désignant par $p(t) = u(t)i(t)$ la puissance qui lui est fournie en t (attention au sens de référence associés) et par $W(t)$ l'énergie qui lui est fournie jusqu'à cet instant t , la condition de passivité s'exprime par :

$$W(t) = \int_{-\infty}^t u(x)i(x)dx \geq 0.$$

Ceci doit être valable pour n'importe quelle d.d.p. et le courant en résultant pour tout t . Plus généralement, la puissance instantanée fournie à un circuit comportant plusieurs accès vaut : $p(t) = \mathbf{u}^T(t)\mathbf{i}(t)$. Ce circuit sera passif si pour tout t :

$$W(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{u}^T(x)\mathbf{i}(x)dx \geq 0.$$

Remarque. Les circuits actifs sont définis à partir de l'inégalité stricte $W(t) < 0$, les passifs par l'inégalité simple $W(t) \geq 0$; ils incluent de la sorte certains éléments idéalisés, comme par exemple le transformateur idéal (Chapitre 4) qui est effectivement passif.

1.6.4 Réciprocité

Un circuit (par exemple un quadripôle, Figure 1.3) est dit réciproque s'il a la propriété suivant laquelle la réponse à un de ses accès produite par une excitation agissant à un autre accès reste inchangée lorsque l'on permute ces deux accès (pour autant que l'on définisse de façon consistante réponse et excitation). Un circuit qui ne satisfait pas cette propriété est dit non-réciproque. Plus spécifiquement, la propriété de réciprocité requiert la satisfaction d'une des trois conditions énoncées ci-dessous, appliquées à un circuit relaxé, non dégénéré et pourvu de deux accès, 11' et 22'.

Ampèremètre et voltmètre Un ampèremètre (Figure 1.5) mesure le courant. Il se place dans la branche du courant mesuré. Il présente une résistance très **faible**, pour ne pas influencer la mesure.

Un voltmètre (Figure 1.6) mesure la tension. Il se place entre les points dont on veut mesurer la différence de potentiel. Il présente une résistance très **grande**, pour ne pas influencer la mesure.

Condition des réciprocité 1 : échange de l'ampèremètre et de la source de tension. Connectons pour commencer une source de tension v_{s1} à l'accès 11' ; soit i_2^a le courant apparaissant à l'accès 22' court-circuité (Figure 1.7).



FIGURE 1.5: Symbole de l'ampèremètre.



FIGURE 1.6: Symbole du voltmètre.

Ensuite, connectons une source de tension v_{s2} en $22'$ et mesurons le courant i_1^b apparaissant aux bornes $11'$ court-circuitées. Le théorème de réciprocité affirme que quelle que soit la topologie du circuit, la valeur de ses éléments et la nature des générateurs, on doit avoir, si $v_{s1}(t) = v_{s2}(t) \forall t$,

$$i_1^b(t) = i_2^a(t) \quad \forall t.$$

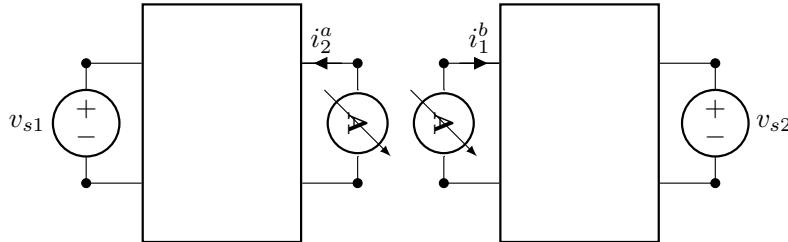


FIGURE 1.7: Échange de l'ampèremètre et de la source de tension.

Condition des réciprocité 2 : échange du voltmètre et de la source de courant. Connectons pour commencer une source de courant i_{s1} à l'accès $11'$ et mesurons la d.d.p. u_2^a apparaissant en $22'$ (Figure 1.8). Ensuite, connectons une source de courant i_{s2} en $22'$ et mesurons la d.d.p. u_1^b apparaissant en $11'$. Le théorème de réciprocité affirme que quelle que soit la topologie du circuit, la valeur de ses éléments et la nature des injecteurs de courant, on doit avoir, si $i_{s1}(t) = i_{s2}(t) \forall t$,

$$u_1^b(t) = u_2^a(t) \quad \forall t$$

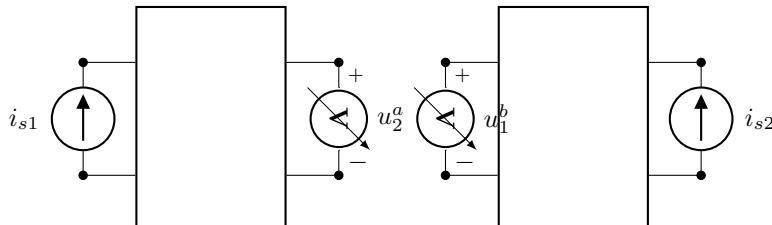


FIGURE 1.8: Échange du voltmètre et de la source de courant.

Condition des réciprocité 3 Connectons une source de courant i_{s1} à l'accès $11'$ et mesurons la valeur du courant parcourant l'accès $22'$ court-circuité (Figure 1.9). Ensuite, connectons une source de tension u_{s2} en $22'$ et mesurons la d.d.p. aux bornes $11'$. Le théorème de réciprocité affirme que, quelle que soit la topologie du circuit, la valeur de ses éléments et la nature des sources, on doit avoir pour autant que $i_{s1}(t) = u_{s2}(t) \forall t$,

$$u_1^b(t) = i_2^a(t) \quad \forall t$$

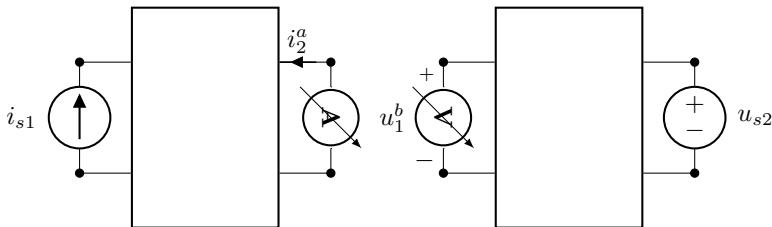


FIGURE 1.9: Troisième condition de réciprocité.

1.7 Organisation du cours

Dans la suite du cours nous introduirons d'abord les lois fondamentales (Ohm, Kirchhoff) et les composants de base des circuits (résistance, condensateur, bobine, sources d'énergie). Nous commencerons par un fonctionnement en courant continu, puis analyserons les conséquences de changement brutaux de fonctionnement du système, les régimes transitoires, et enfin nous verrons comment fonctionnent les circuits à courant alternatif, essentiellement utilisés pour le transport et la distribution de l'électricité. Les chapitres suivant se focaliseront sur les filtres et les différentes utilisations de l'amplificateur opérationnel. Ensuite nous énoncerons les théorèmes fondamentaux, dans le but de pouvoir simplifier des circuits complexes (Thévenin et Norton). La dernière partie du cours étudiera les méthodes générales d'analyse qui permettent de systématiser l'étude des circuits, d'en obtenir des équivalents à plusieurs accès, et sont à la base des méthodes d'analyse numérique modernes.

Deux approches transversales seront utilisées pour illustrer et enrichir les concepts étudiés tout au long de ce texte.

1.7.1 Réalisations pratiques

Des exemples de réalisations pratiques de circuits relativement complexes seront présentées et analysés au fil des chapitres.

Radio AM. C'est en réalité un poste de radio appelé récepteur à cristal, où l'on a ajouté des amplificateurs. Le but d'un tel circuit est de produire un son grâce à un signal radio capté de l'extérieur, typiquement en provenance d'une source d'émission d'un groupe de médias. Il existe encore quelques émetteurs pour ce type de radio, mais cette technologie a depuis longtemps été remplacée par d'autres méthodes analogiques d'abord, et maintenant numériques (par exemple le *Digital Audio Broadcasting*). Elle présente cependant l'avantage d'être simple et illustre une grande partie des concepts de ce cours. Le circuit électrique correspondant est schématisé à la Figure 1.10. La radio cristal est une radio AM (*amplitude modulation*), ce qui signifie qu'elle reçoit des signaux modulés en amplitude (Figure 1.11). La modulation peut se voir comme la manière de "coder" un signal sonore. La modulation d'amplitude désigne la variation en amplitude d'un signal de fréquence élevée (signal porteur, Figure 1.12) en fonction d'un signal de plus basse fréquence (signal modulant, Figure 1.13). Ce dernier contient l'information audio à transmettre.

Les fréquences audibles sont comprises entre 16Hz et 16kHz (signal modulant BF). Typiquement, les fréquences AM s'étendent de 500 kHz à 1600

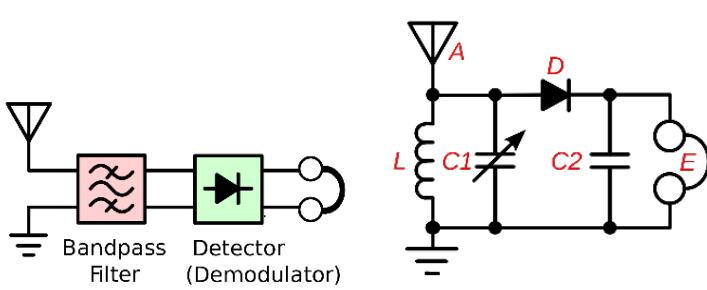


FIGURE 1.10: Schéma d'une radio cristal.
Le signal est capté par une antenne, filtré, démodulé pour finalement être écouté via des écouteurs.

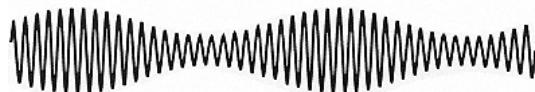


FIGURE 1.11: signal modulé



FIGURE 1.12: signal porteur (fréquence radio)



FIGURE 1.13: signal modulant (fréquence audio)

kHz (signal porteur basse fréquence). Cependant, l'antenne radio capte tout ce qu'elle peut capter dans l'environnement, y compris du bruit. Pour capter uniquement la bande de fréquences désirée et se débarrasser du reste, il faut un filtre *passe-bande* (cf. Chapitre 6).

Un autre élément crucial du circuit est le détecteur à cristal (d'où le nom radio "cristal")⁸. Il s'agit d'une diode (Section 2.8) qui va contribuer à la démodulation du signal radio pour en extraire le signal audio. Ce type de récepteur a été introduit au début du vingtième siècle et est le moyen le plus simple de construire une radio.

Dans un récepteur de base le son peut finalement être entendu grâce à des écouteurs. Ceux-ci ne fonctionnent que grâce à l'énergie de l'onde radio elle-même, et doivent donc être très sensibles. Dans notre circuit, nous avons donc remplacé les écouteurs par un haut-parleur. En conséquence, il a également fallu ajouter des amplificateurs opérationnels (Chapitre 7) pour amplifier le signal. Ce sont des composants actifs qui ont donc besoin d'une alimentation.

8. Également connu sous les noms de poste à galène, ou poste à diode.

1.7.2 Méthodes numériques

Des exemples en Python permettent d'automatiser et passer d'analyses de petits systèmes à des systèmes plus complexes, inaccessibles par calcul manuel, comme par exemple :

- associer des impédances en série, en parallèle
- convertir une association en étoile en une association en triangle
- manipuler les nombres complexes, calculer des puissances
- manipuler des graphes

- résoudre des systèmes d'équations différentielles pour analyser les ré-gimes transitoires
- implémenter les méthodes générales d'analyse.

Le code source des exemples est disponible à l'adresse

<https://github.com/bcornelusse/ELEC0053-circuits-electriques>.

1.8 Liens avec d'autres cours

Ce cours ouvre la voie à une série importante d'autres cours tels que les cours sur la conception des capteurs, sur les systèmes de mesure, l'élec-tronique analogique, l'électronique de puissance, l'analyse et le contrôle de grands systèmes électriques, les micro-systèmes, l'électro-acoustique, les micro-réseaux, pour ne citer qu'eux.

2

Lois fondamentales et composants fondamentaux

Ce chapitre énonce les lois fondamentales et les modèles de composants qui permettent l'étude de circuits localisés. Avant d'énoncer ces lois et modèles, un bref rappel de théorie des graphes s'impose. Il sera utile pour l'ensemble du cours.

2.1 Rappel de théorie des graphes

La théorie des graphes est une discipline de l'algèbre linéaire qui reçoit de nos jours de nombreuses applications. En théorie des circuits électriques, notamment, elle rend des services précieux. Ainsi, dans le domaine de l'analyse, elle procure un éventail de méthodes systématiques, se distinguant par la nature des variables et par le nombre d'équations y afférentes. L'existence de telles méthodes est essentielle surtout quand il s'agit de grands systèmes - et les circuits électriques constituent souvent de très grands systèmes ; pour ne citer qu'un exemple, les réseaux de transport d'énergie électrique à haute tension comportent couramment des centaines, voire des milliers de noeuds et bien davantage de branches et de mailles. Une systématique rigoureuse est alors indispensable pour identifier et traiter les variables électriques appropriées. Ceci explique a posteriori le fait que la théorie des graphes fut originièrement ébauchée par le fondateur même de la théorie des circuits¹ pour les besoins de ceux-ci.

2.1.1 Définitions générales

*Branche*² C'est un segment de ligne dont les deux extrémités sont distinctes.

Noeud ou sommet.³ C'est l'extrémité d'une branche. En fait, on admettra également qu'un noeud peut être un point isolé.

Graphe. Un graphe G (Figure 2.1) est un ensemble de noeuds dont certains sont reliés par des branches. On désigne par n le nombre de noeuds et par b le nombre de branches.

Branche orientée. C'est une branche possédant une orientation fixée par l'ordre des noeuds. Cette orientation est indiquée par une flèche pointant vers le second noeud de la paire orientée. Par exemple, la Figure 2.2 désigne la branche orientée ab . Il est quelquefois utile de considérer seul le segment

1. G. KIRCHHOFF, "Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchungen der Linearen Verteilung Galvanischer Ströme geführt wird". Poggendorf Ann. Physik, 72, 1847.

2. "Branch" ou "edge" en anglais.

3. "Node" ou "vertex" en anglais.

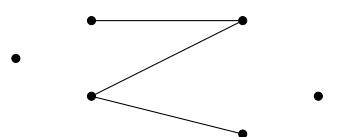


FIGURE 2.1: Un graphe G avec $n = 6$ et $b = 4$.

de ligne (branche sans ses extrémités), on parle alors d'**arc** si la branche à laquelle appartient le segment de ligne est orientée et d'**arête** si cette branche n'est pas orientée.

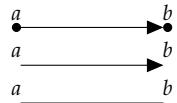


FIGURE 2.2: Branche orientée entre les noeuds a et b , arc et arrête.

Graphe orienté. Un graphe est orienté lorsque toutes ses branches le sont. Dans la théorie des circuits, seuls les graphes orientés nous intéressent, même si certaines définitions de ce chapitre s'appliquent indistinctement aux graphes orientés ou non.

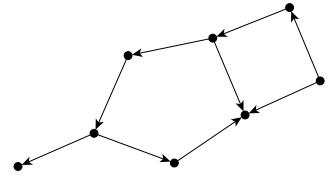


FIGURE 2.3: Graphe orienté.

Sous-graphe. Un sous-graphe d'un graphe est un sous-ensemble des branches du graphe ; c'est lui-même un graphe. Il est dit "propre" s'il ne contient pas toutes les branches du graphe dont il est issu.

Incidence. On dit qu'une branche b est incidente à un noeud n si n est une extrémité de b .

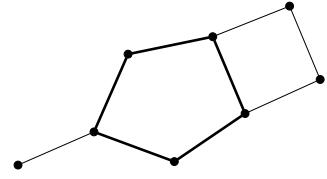


FIGURE 2.4: Sous graphe (arrêtes en trait épais et noeuds incidents.)

Isomorphisme. On dit que les graphes G et G' sont isomorphes s'il existe une correspondance biunivoque entre d'une part les noeuds, d'autre part les branches de G et de G' qui préserve les relations d'incidence.

Parcours ou chemin.⁴ C'est un sous-graphe d'un graphe composé d'une suite ordonnée de branches dont chacune a un noeud commun avec la branche précédente et l'autre noeud commun avec la branche suivante et où chaque noeud n'apparaît qu'une fois au plus.

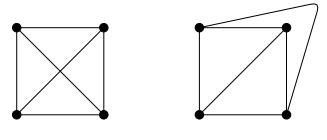


FIGURE 2.5: Deux graphes isomorphes.

4. Path en anglais.

Noeuds initial et final. Le noeud de la première branche d'un parcours qui n'appartient pas à la seconde branche est le noeud initial ; le noeud de la dernière branche du parcours qui n'appartient pas à l'avant-dernière branche est le noeud final. Les noeuds initial et final forment les extrémités d'un chemin.

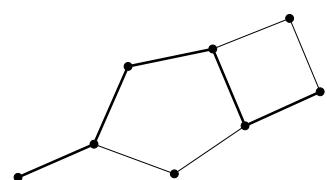


FIGURE 2.6: Chemin (trait épais).

Degré d'un noeud. C'est le nombre de branches incidentes à ce noeud. Dans le graphe de la Figure 2.6, il y a 1 noeud de degré 1, 4 noeuds de degré 2 et 3 noeuds de degré 3.

Graphe connexe. Un graphe est dit connexe (ou simplement connexe) s'il existe toujours un parcours entre deux quelconques de ses noeuds. Intuitivement un graphe est connexe s'il est d'une pièce. Sinon, il est appelé non-connexe ou multiplemement connexe. Dans ce dernier cas, il est constitué d'un certain nombre p de parties connexes ; on dit alors que le graphe est p -connexe. Le graphe de la Figure 2.1 est 3-connexe.

Rang d'un graphe. C'est par définition la différence $n - p$, où n est le nombre total de noeuds du graphe.

Maille.⁵ Une maille d'un graphe est un sous-graphe connexe dont tous les noeuds sont de degré 2.

5. Loop en anglais.

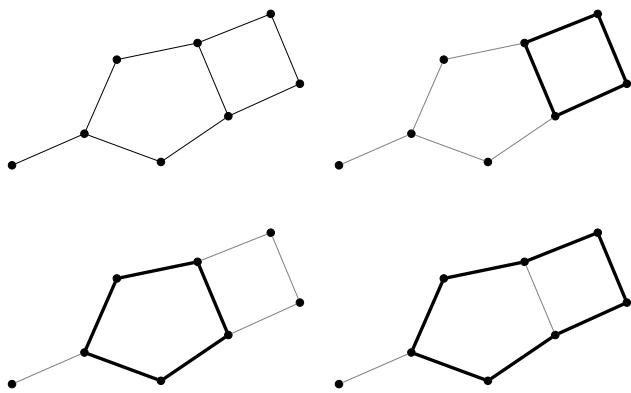


FIGURE 2.7: Un graphes et trois mailles.

*Coupe.*⁶ Une coupe d'un graphe est un ensemble de branches dont la suppression augmente d'une unité le nombre de connexité et tel que la suppression de toutes ces branches moins une n'altère pas le degré de connexité du graphe. Autrement dit, une coupe est un ensemble minimal de branches dont la suppression augmente d'une unité la connexité du graphe.

En particulier, on appelle *coupe nodale* l'ensemble de branches incidentes à un noeud.

Ainsi, une coupe divise les noeuds d'un graphe connexe en deux groupes. Chaque branche de la coupe a une des extrémités confondue avec un noeud appartenant à l'un des groupes, l'autre de ses extrémités étant un noeud de l'autre.

*Arbre (de recouvrement).*⁷ Sous-graphe connexe qui contient tous les noeuds du graphe initial et qui ne comporte aucune maille. Nombre de branches de l'arbre pour réseau connexe : $n - 1$

Maillon. Les branches restantes non incluses dans l'arbre de recouvrement. Nombre de maillons : $b - (n - 1)$

Maille fondamentale. Pour un arbre donné, c'est une maille formée à partir d'un seul maillon et de branches de l'arbre.

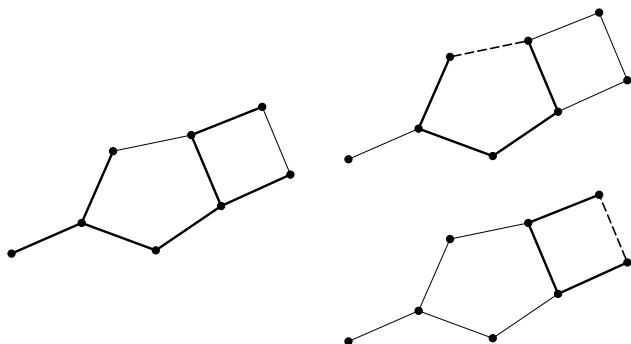


FIGURE 2.8: Gauche : Un graphe et un arbre de recouvrement (en trait épais). Droite : Maillons (trait interrompu) et mailles fondamentales correspondantes.

6. Cut-set en anglais.

7. Spanning-tree en anglais.

2.1.2 Circuit et graphe

Toutes ces définitions sont utiles car on associe à un circuit électrique un graphe orienté (Figure 2.9), dont l'orientation des branches est donnée par le sens du courant. Un graphe "mathématique" est en quelques sorte la représentation la plus simple possible de la topologie d'un circuit. On se limite aux seuls graphes connexes, et on définit :

- n : le nombre de noeuds du graphe ou du circuit
- b : le nombre de branches
- le nombre de branches d'un arbre : $N = n - 1$
- le nombre de mailles fondamentales : $M = b - (n - 1)$

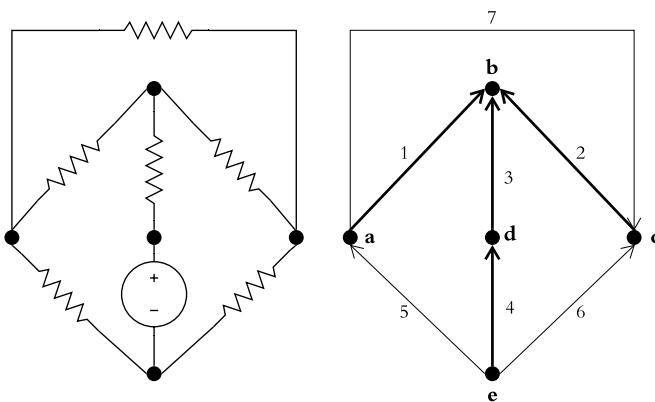


FIGURE 2.9: Un circuit et sa représentation sous forme de graphe. Il contient $n = 5$ noeuds, $b = 7$ branches, et $M = 3$ maillons. Un arbre est constitué par les branches 1, 2, 3 et 4.

2.2 Définitions

Etat. L'état électrique, ou plus simplement état, d'un réseau donné par sa topologie et ses éléments est l'ensemble des valeurs que prennent les courants et les tensions de branches, ($\mathbf{i}_B(t)$ et $\mathbf{u}_B(t)$), à un instant donné. L'état électrique dépend évidemment des signaux délivrés par les sources indépendantes d'énergie (excitations).

Solution. Dans un sens large, une solution est l'ensemble des valeurs des courants et tensions de branches ; dans un sens plus restreint, elle est constituée des valeurs que prennent les variables linéairement indépendantes, à partir desquelles l'état électrique complet peut être déterminé.

Réponse. Une réponse d'un réseau à un ensemble d'excitations est constituée d'une partie de la solution du réseau relative à ces excitations.

2.3 Lois de Kirchhoff

Nous présentons maintenant les lois fondamentales qui permettent de déduire l'état d'un circuit.

La théorie des circuits localisés postule la localisation des champs exclusivement à l'intérieur de leurs éléments. Ceci se traduit par les deux hypothèses :

1. pas d'accumulation de charges aux noeuds d'un circuit pas plus que dans les conducteurs connectant ses éléments ;
2. l'intégrale de ligne de l'intensité du champ électrique total le long d'un contour associé à une paire de noeuds dépend exclusivement de ces noeuds :

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

est indépendant du chemin suivi entre 1 et 2.

Les lois de Kirchhoff reposent sur ces hypothèses. Elles sont indépendantes de la nature des éléments constituant le circuit et expriment les contraintes imposées par la manière dont les éléments sont interconnectés, i.e. par la *tologie* ou le graphe du circuit.

2.3.1 Première loi de Kirchhoff (PLK) ou loi des noeuds

La PLK exprime le principe de la conservation de la charge dans le cadre des circuits localisés. La Table 2.1 énonce la première loi, illustrée à la Figure 2.10.

Pour tout circuit localisé, la somme algébrique des courants de toutes les branches partant d'un noeud est nulle à tout instant.

$$\sum_{b \in \mathcal{N}} i_b(t) = 0$$

Démonstration. Pour démontrer cette première loi, appliquons à l'équation de Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

l'identité

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{X}) = 0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) &= 0 \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned}$$

Intégrant sur une surface fermée S (Figure 2.11) :

$$\begin{aligned} \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} &= \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV \\ &= - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \\ &= \sum_{b \in \mathcal{N}} i_b(t) \end{aligned}$$

TABLE 2.1: Première loi de Kirchhoff.

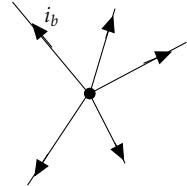


FIGURE 2.10: Première loi de Kirchhoff.

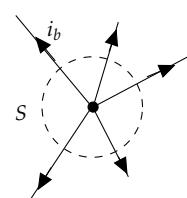


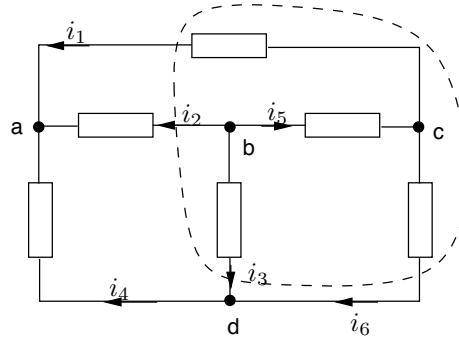
FIGURE 2.11: Intégrale sur une surface fermée S .

Car si l'on est dans le cas d'un circuit à courant continu alors $\frac{d\rho}{dt} = 0$, et sinon avec l'hypothèse du circuit localisé, $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \simeq 0$ en dehors des éléments

La PLK est donc applicable aux circuits localisés pour toute surface fermée S , incluant plus d'un noeud : la somme algébrique des courants de toutes les branches d'une coupe est nulle à tout instant.

Exemple : PLK dans une coupe.

Pour le circuit suivant



on a

$$\text{noeud a : } -i_1 - i_2 - i_4 = 0 \quad (1)$$

$$\text{noeud b : } i_2 + i_3 + i_5 = 0 \quad (2)$$

$$\text{noeud c : } i_1 - i_5 + i_6 = 0 \quad (3)$$

$$\text{noeud d : } i_4 - i_3 - i_6 = 0 \quad (4)$$

Et donc

$$(2) + (3) \implies i_1 + i_2 + i_3 + i_6 = 0$$

Tout est comme si on avait considéré uniquement les courants traversant la coupe en trait interrompu.

2.3.2 Seconde loi de Kirchhoff (SLK) ou loi des mailles

La Table 2.2 énonce la seconde loi, illustrée à la Figure 2.12.

Pour tout circuit localisé, la somme algébrique des tensions aux bornes de toutes les branches constituant une maille est nulle à tout instant.

$$\sum_{b \in \mathcal{M}} u_b(t) = 0 \quad (2.1)$$

Exemple : SLK.

Par exemple, dans la figure ci-dessous

TABLE 2.2: Seconde loi de Kirchhoff.

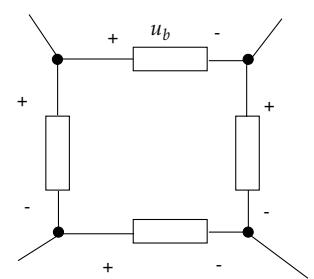
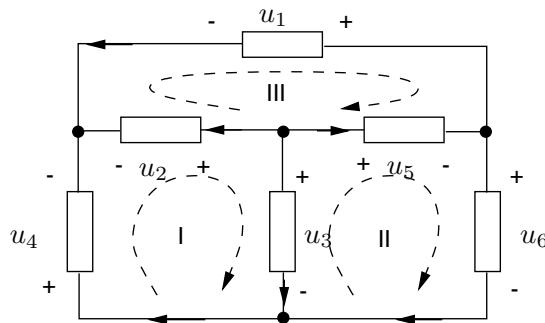


FIGURE 2.12: Seconde loi de Kirchhoff.



on a

$$\begin{aligned} \text{maille I : } & -u_4 + u_2 - u_3 = 0 \\ \text{maille II : } & u_3 - u_5 - u_6 = 0 \\ \text{maille III : } & -u_2 + u_1 + u_5 = 0 \end{aligned}$$

Démonstration. La SLK est basée sur l'hypothèse 2 ci-dessus, l'identité entre d.d.p. et tension dans le cadre des circuits localisés. Ce qui suit permet de clarifier son interprétation. En toute généralité, le champ électrique s'exprime par

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Donc, en définissant $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ (\vec{A} est appelé "potentiel vecteur"),

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

L'intégrale de ligne de ce champ fournit par définition la tension. Ainsi, par exemple, dans le cas de la Figure 2.13, la tension u_{12} entre les noeuds 1 et 2 s'exprime par :

$$u_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\ell = v_1 - v_2 - \frac{\partial}{\partial t} \int_1^2 \vec{A} \cdot d\ell$$

FIGURE 2.13: Tension et d.d.p.

Dans le cas général, tension et différence de potentiel ne coïncident pas. Une des conséquences pratiques de la prise en considération du terme $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ réside dans le fait que la mesure à l'aide d'un voltmètre de la tension entre deux noeuds n'est pas univoquement évaluée mais dépend de la longueur et de la forme des fils électriques reliant ces noeuds au voltmètre.

Sur un parcours fermé 123 (Figure 2.14), on dérive :

$$\begin{aligned} u_{12} + u_{23} + u_{31} &= \oint_C \vec{E} \cdot d\ell = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot dS \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \end{aligned}$$

Or si on est en régime à courant continu, $\frac{d}{dt} = 0$, et sinon sous l'hypothèse des circuits localisés, $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \simeq 0$ en dehors des éléments.

Règle d'application de la SLK à une maille.

- Fixer un sens de référence pour les d.d.p. aux bornes des éléments des branches de la maille.

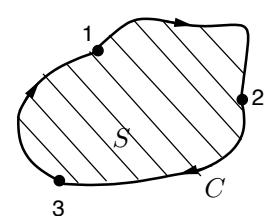
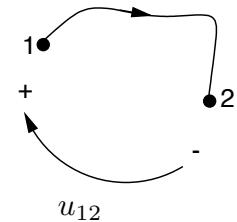


FIGURE 2.14: Contour fermé.

2. Fixer arbitrairement un sens de circulation de la maille.
3. Appliquer la relation (2.1) en partant d'un point "neutre" du circuit (c'est-à-dire situé à l'extérieur de ses éléments localisés), en parcourant la maille dans le sens de circulation choisi et en comptant positivement la d.d.p. aux bornes des éléments chaque fois que l'on rencontre d'abord la borne "-", négativement dans le cas contraire.

2.4 Loi d'Ohm

Démontrée dans le cas du régime stationnaire à partir de la théorie cinétique des gaz d'abord, validée par la mécanique quantique ensuite, la loi d'Ohm locale s'écrit (en régime stationnaire) :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E},$$

où σ est la conductivité électrique du conducteur. C'est un scalaire dans le cas des conducteurs métalliques homogènes) :

$$\sigma = \frac{ne^2\lambda}{mv}$$

avec

- n le nombre d'électrons par unité de volume
- e la charge de l'électron
- λ le libre parcours moyen des électrons
- v la vitesse moyenne des électrons
- m la masse de l'électron.

La loi d'Ohm globale s'en déduit aisément : pour un conducteur de longueur ℓ , de section (constante) S et de conductivité σ , parcouru par un courant continu I , on trouve (voir Figure 2.15) :

$$U = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = RI$$

où

$$R = \frac{\ell}{\sigma S}$$

est la résistance de l'élément.⁸

2.5 La résistance

Une résistance de résistance R ⁹ est un dipôle qui, parcouru par un courant, fait naître à ses bornes une d.d.p. fonction de ce courant.

$$u(t) = R i(t)$$

R s'exprime en Ohm (Ω). Une résistance peut être linéaire ou non, variable ou invariante (quatre combinaisons possibles).

En toute généralité on a $R = f(u, i, t)$, et les cas particuliers suivants :

- $R = f(u, i)$: résistance *autonome* ou *invariante* les caractéristiques de l'élément ne dépendent pas du temps
- $R = f(t)$: résistance *linéaire*

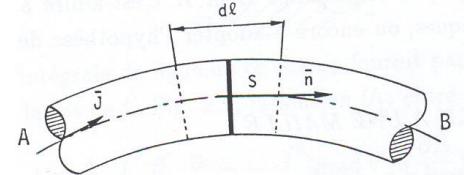


FIGURE 2.15: Loi d'Ohm globale.

8. Par extension, la loi d'Ohm est utilisée en régime quasi-stationnaire, où cependant l'effet pelliculaire peut introduire des modifications non-négligeables. Notons également qu'appliquée au cas d'un semi-conducteur ou d'un plasma plongé dans une induction magnétique, la loi d'Ohm doit être corrigée pour tenir compte de l'effet Hall.

9. À noter la pauvreté du français à cet égard : résistance désigne tout aussi bien l'élément physique (en anglais "resistor") que la valeur électrique le caractérisant (en anglais "resistance").

— $R = \text{constante}$: résistance linéaire et invariante.

L'hypothèse de linéarité est vraie dans une plage de fonctionnement seulement. Avec l'accroissement de la fréquence de fonctionnement d'un circuit, l'effet pelliculaire impacte la résistance des conducteurs.

Conductance. On appelle *conductance* l'inverse de la résistance

$$i = \frac{1}{R}u = Gu$$

G s'exprime en Siemens (S).

Association en série. Deux résistances en série s'additionnent. Considérons le circuit de la Figure 2.18.

Le courant i traverse les deux résistances. La résistance équivalente R_{eq} doit provoquer la même chute de tension que la mise en série des deux résistances. On a $v_{R_1} = R_1 i$ et $v_{R_2} = R_2 i$. La chute de tension aux bornes de la résistance équivalente est

$$v_{R_{eq}} = R_{eq}i = v_{R_1} + v_{R_2} = (R_1 + R_2)i.$$

Donc

$$R_{eq} = R_1 + R_2.$$

Plus généralement, la résistance équivalente R_{eq} à n résistances en série R_1, R_2, \dots, R_n est égale à

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i.$$

Si on utilise la conductance des (éléments) résistances, on a alors

$$G_{eq} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{G_i} \right)^{-1} = R_{eq}^{-1}$$

Association en parallèle. Deux conductances en parallèle s'additionnent. Considérons le circuit de la Figure 2.18. Soit $G_1 = R_1^{-1}$ et $G_2 = R_2^{-1}$. Par définition de la mise en parallèle, la différence de potentiel v est la même aux bornes des deux éléments. La résistance équivalente R_{eq} doit être traversée par le même courant que la mise en parallèle des deux résistances.

On a $i_1 = G_1 v$ et $i_2 = G_2 v$. Le courant dans la résistance équivalente est

$$i = G_{eq}v = i_1 + i_2 = (G_1 + G_2)v.$$

Donc

$$G_{eq} = G_1 + G_2,$$

ou

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Plus généralement, la conductance équivalente G_{eq} à n conductances en parallèle G_1, G_2, \dots, G_n est égale à

$$G_{eq} = \sum_{i=1}^n G_i.$$

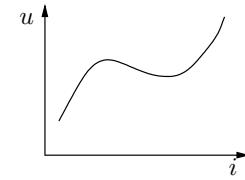


FIGURE 2.16: Résistance non linéaire

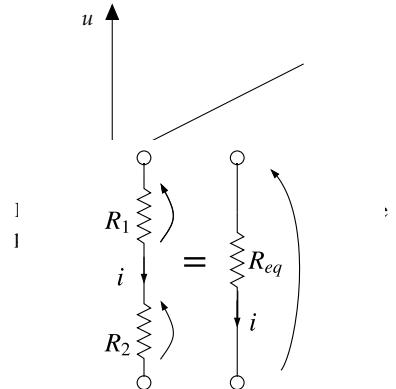


FIGURE 2.18: Association en série.

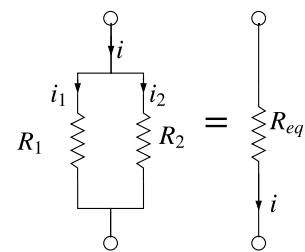


FIGURE 2.19: Association en parallèle.



FIGURE 2.20: Exemples de résistances marquées selon la norme CEI 60757. Source : Wikipedia [https://fr.wikipedia.org/wiki/Resistance_\(composant\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Resistance_(composant)).

En pratique. La Figure 2.20 illustre quelques résistances marquées en utilisant un système de repérage normalisé qui permet de déduire la valeur des composants et leur degré de précision. Les résistances se déclinent en pratique selon de nombreuses formes, comme par exemple

- les résistances au carbone,
- les résistances à film métallique,
- le potentiomètre : résistance variable,
- les photorésistances : R dépend de l'éclairage (capteur),
- les thermistances : R dépend de la température (capteur).

2.6 L'inductance

Un noyau magnétique entouré d'une bobine de N spires parcourue par un courant continu I fait naître dans la bobine un flux ϕ (flux total embrassé par toutes les spires).

Une inductance est un dipôle électrique caractérisé par le fait qu'à tout instant le courant le parcourant et le flux magnétique associé sont reliés par une courbe dans le plan (ϕ, i) , c'est précisément la courbe caractéristique de l'inductance à l'instant t :

$$\phi(t) = f[i(t)].$$

Le coefficient de self-induction d'une bobine de (ou simplement d'un) fil électrique parcouru par un courant est défini à un instant donné comme étant le rapport entre les valeurs du flux induit par le courant et de ce courant lui-même :

$$\phi(t) = L(t)i(t).$$

En fait, cette relation est une relation linéaire du point de vue électrique et $L(t)$ représente une inductance linéaire ; sa courbe caractéristique est une droite passant par l'origine mais dont le coefficient angulaire peut être temporellement variable.

En pratique dans ce cours nous allons toujours considérer l'inductance L linéaire et invariante, c'est-à-dire constante. La tension $u(t)$ s'exprime par

$$u(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}$$

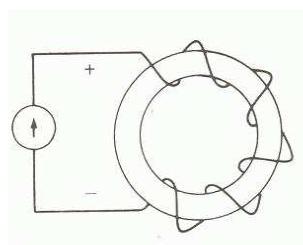


FIGURE 2.21: Bobine.

Donc

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

ou encore

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$$

Ces relations sont établies selon le sens conventionnel (Figure 2.22).

Il existe cependant plusieurs causes de non-linéarité telles que l'hystérésis ou la saturation. En toute généralité on aura donc $L = f(u, i, t)$. Cas particuliers :

- $L = f(u, i)$: inductance *autonome* ou *invariante*

$$u(t) = L(u, i) \frac{di(t)}{dt},$$

relation non-linéaire.

- $L = f(t)$: inductance *linéaire*

$$u(t) = \frac{dL(t)}{dt} i(t) + L(t) \frac{di(t)}{dt}$$

Le coefficient de self-induction s'exprime, en fonction des paramètres physiques de la bobine par

$$L = \mu \frac{N^2 S}{\ell}$$

où μ est la perméabilité magnétique du noyau, S est la surface d'une spire et ℓ est la longueur de la bobine. Le coefficient de self-induction s'exprime en Henry (H).

2.6.1 En régime non stationnaire

Une variation du courant et donc du flux implique l'apparition d'une force contre-électromotrice aux bornes de la bobine (loi de Lenz). Au niveau de la bobine :

- le flux qui traverse les spires est variable
- selon la loi de Lenz, une *force contre-électromotrice* $\frac{d\phi}{dt}$ apparaît
- l'induction magnétique est variable à l'intérieur de la bobine

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ce flux et cette induction magnétique variables sont "confinés" à l'intérieur de l'élément car on a fait l'hypothèse des circuits localisés.

Comme illustré à la Figure 2.23, il existe beaucoup d'implémentations physiques d'inductances, tels que le solénoïde, un enroulement en Cu sur matériau ferromagnétique. Des composants normalisés existent mais en moins grand nombre que pour les résistances et les condensateurs, et de moins bonne précision.

Remarques. Les inductances à noyau ferromagnétique sont en général tributaires du phénomène d'hystérésis (Figure 2.24). La caractéristique d'un tel élément n'est pas une courbe à proprement parler et la définition même du dipôle "inductance" n'est plus valable. Une technique consiste à modéliser l'inductance avec noyau par un circuit RL série, où R modélise les pertes par hystérésis (qui sont proportionnelles à l'aire de la courbe d'hystérésis) et où L représente une courbe caractéristique "moyenne" de l'inductance réelle.

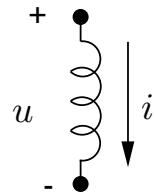


FIGURE 2.22: Symbole et sens conventionnel d'une bobine.



FIGURE 2.23: Exemples d'inductances.
Source : Wikipedia <https://en.wikipedia.org/wiki/Inductor>.

Les inductances souffrent également de problèmes de pertes par effet Joule dans le conducteur et de l'effet pelliculaire aux hautes fréquences. Dans un circuit, on tentera donc au maximum d'éviter les bobines si possible.

2.7 Le condensateur

Un condensateur est constitué de deux plaques parallèles conductrices de surface S séparées d'une distance d et portant des charges égales et opposées $\pm q$. Les charges font naître une différence de potentiel V entre les plaques. Il est caractérisé par une relation entre la charge électrique (q_+, q_-) sur ses plaques et la d.d.p. entre celles-ci (Figure 2.25). On définit le dipôle condensateur de façon analogue à celle de l'inductance. Ainsi, si le condensateur est linéaire, la courbe caractéristique $q(t) = f[u(t)]$ est une droite passant par l'origine et on écrit :

$$q(t) = C(t)u(t).$$

$C(t)$, coefficient de proportionnalité entre q et u , est appelé *capacité du condensateur*.

En pratique dans ce cours nous allons toujours considérer la capacité C linéaire et invariante, c'est-à-dire constante. Comme le courant $i(t)$ est défini par

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

on a

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

ou encore

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

Ces relations sont établies selon le sens conventionnel (Figure 2.26).

La propriété de linéarité dépend des caractéristiques du diélectrique.

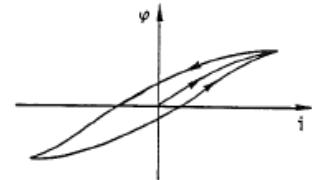


FIGURE 2.24: Courbe d'hystérésis d'une bobine.

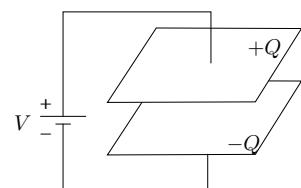


FIGURE 2.25: Condensateur plan.

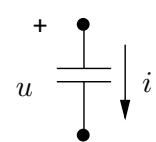


FIGURE 2.26: Symbole et sens conventionnel d'un condensateur

En toute généralité, C est fonction de la tension à ses bornes, du courant et peut varier avec le temps :

$$C = f(u, i, t)$$

Si on considère le condensateur linéaire mais temps variant, on a

$$i(t) = C(t) \frac{du(t)}{dt} + \frac{dC(t)}{dt} u(t)$$

S'il est invariant mais fonction de la tension à ses bornes et du courant, on a $C = f(u, i)$ et

$$i(t) = C(u, i) \frac{du(t)}{dt}$$

La relation entre $i(t)$ et $u(t)$ devient donc non-linéaire.

La capacité s'exprime, en fonction des paramètres physiques du condensateur par

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

où ϵ est la permittivité diélectrique du matériau placé entre les plaques, S la surface des plaques, et d la distance entre les plaques. La capacité s'exprime en Farad (F).

En régime non stationnaire. Une variation du potentiel V implique une modification de la charge portée par les plaques conductrices. Cette variation est apportée par un circuit extérieur débitant un courant. Au niveau du condensateur :

- la différence de potentiel à ses bornes varie
- le champ électrique \vec{E} dans le matériau diélectrique placé entre les plaques est variable
- il existe un *courant de déplacement*

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Ce courant de déplacement et ce champ électrique variable sont “confinés” à l’intérieur de l’élément car on fait l’hypothèse des circuits localisés.

Comme illustré à la Figure 2.27, il existe beaucoup d’implémentations physiques et chimiques de condensateur à diélectrique à film plastique (polypropylène, polyester, ...), céramique, au mica, électrolytique, à papier paraffiné, variable à lame d’air (une plaque mobile), etc. Habituellement on indique la capacité d’un condensateur en pF , nF ou μF .

2.8 La diode

Contrairement aux autres éléments passifs présentés, les résistances, condensateurs et bobines, une diode (Figure 2.28) est par essence un composant non-linéaire. Une diode laisse passer le courant selon sa polarisation, i.e. le sens et l’amplitude de la tension à ses bornes. Lorsqu’une tension positive est appliquée entre l’anode et la cathode de la diode, le courant circule (de l’anode à la cathode). Si une tension négative est appliquée entre l’anode et la cathode, aucun courant ne circule¹⁰.

10. Sauf si cette tension inverse est d’amplitude assez importante, i.e. supérieure à la tension de claquage. Mais nous n’étudierons pas ce cas d’utilisation dans ce cours.



FIGURE 2.27: Exemples des condensateurs. Source : Wikipedia <https://fr.wikipedia.org/wiki/Condensateur>.

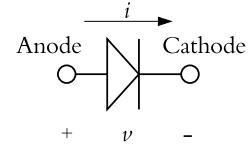


FIGURE 2.28: Symbole d'une diode.

La caractéristique d'une diode idéale est représentée à la Figure 2.29. En pratique, selon les matériaux utilisés, la tension de polarisation est supérieure à 0V, et la courbe $i-u$ suit une exponentielle et est dépendante de la température.

2.9 Sources indépendantes d'énergie

Une source indépendante d'énergie est un composant capable de réaliser une conversion d'énergie de nature non électrique vers de l'énergie électrique. Par exemple, une batterie convertit de l'énergie chimique, une dynamo de l'énergie mécanique. Une centrale électrique convertit, selon sa source d'énergie primaire, de l'énergie nucléaire, thermique ou solaire en énergie mécanique puis en énergie électrique.

Les sources indépendantes d'énergie sont en théorie des circuits ce que les forces extérieures sont en mécanique. Deux sortes de sources indépendantes d'énergie seront considérées par la suite : sources de tension et sources de courant.

Source idéale de tension. Une source idéale de tension (Figure 2.30) est un dipôle constitué par un générateur de tension de force électromotrice $e(t)$. Elle a la propriété de présenter à ses bornes une d.d.p. indépendante du courant qui la parcourt.

Les sens de référence associés sont indiqués sur la Figure 2.30 ; leur utilisation permet d'exprimer la puissance instantanée fournie par la source quand elle est connectée à un dipôle "charge" par le produit $e(t)i(t)$. Il s'agit ici d'une convention générateur, opposée à la convention moteur définie précédemment.

Une source réelle de tension possède rarement cette caractéristique d'indépendance entre d.d.p. à ses bornes et courant, à cause de ses propres pertes. On peut rendre compte de ces pertes à l'aide d'une résistance interne R_i et modéliser la source réelle de tension par une f.e.m. en série avec R_i . La Figure 2.31 représente une source réelle de tension continue ; elle indique que

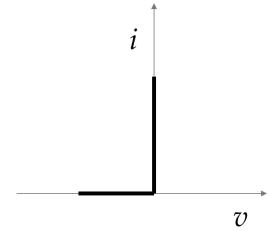


FIGURE 2.29: Caractéristique d'une diode idéale.

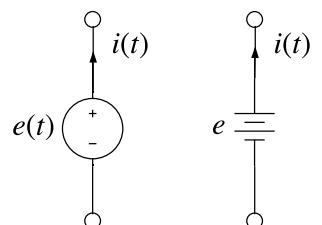


FIGURE 2.30: Représentations d'une source indépendante de tension : générique (gauche) et continue (droite).

lorsque ce dipôle est fermé sur une résistance extérieure de charge¹¹ R_L , il présente une d.d.p. fonction du courant :

$$U = E - R_i I.$$

La condition sous laquelle cette source réelle se rapproche de la source idéale se déduit à partir de :

$$U = R_L I = R_L \frac{E}{R_L + R_i} = \frac{E}{1 + R_i/R_L}.$$

Donc $U \approx E$ si $R_L \gg R_i$.

Notons que la puissance fournie par la source de tension à R_L vaut

$$UI = R_L \frac{E^2}{(R_L + R_i)^2}.$$

La Figure 2.31 met en évidence un formule d'utilité pratique très fréquente lorsqu'on souhaite calculer la tension aux bornes d'une résistance en série avec une autre. Ce circuit agit comme un *diviseur de tension* :

$$U = E \frac{R_L}{R_L + R_i}.$$

11. On utilise souvent l'indice L pour nommer la résistance qui *charge* le circuit, car le terme *charge* se traduit par *load* en anglais.

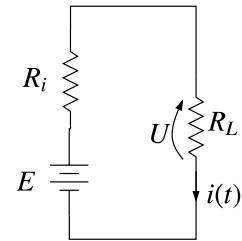


FIGURE 2.31: Représentation d'une source indépendante de tension réelle.

TABLE 2.3: Formule du diviseur de tension.

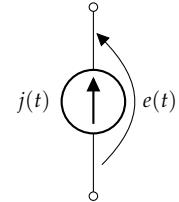


FIGURE 2.32: Représentations d'une source indépendante de courant.

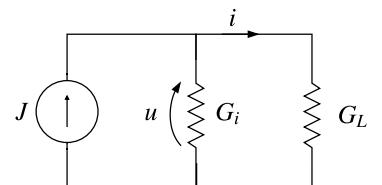


FIGURE 2.33: Source réelle de courant.

TABLE 2.4: Formule du diviseur de courant.

$$i = J \frac{G_L}{G_L + G_i}.$$

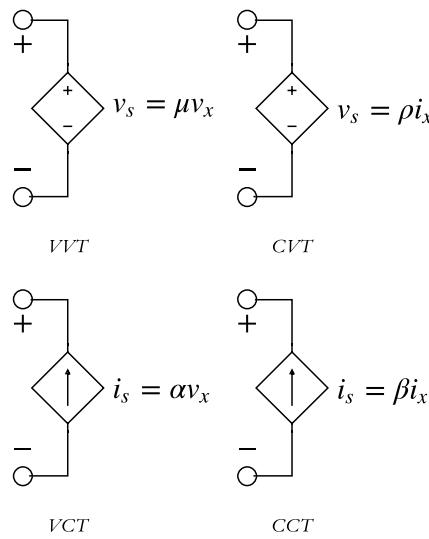


FIGURE 2.34: Source commandées : tension-tension, courant-tension
 $[\rho] = \frac{[V]}{[I]} = [\Omega]$, tension-courant
 $[\alpha] = \frac{[I]}{[V]} = [S]$, courant-courant.

2.10 Les sources dépendantes de courant et de tension

Une source commandée est un quadripôle unidirectionnel, non-autonome et actif ; un de ses accès est celui qui exerce la commande (accès de commande), l'autre est l'accès commandé. Autrement dit, la tension ou le courant délivré par la source dépend de la valeur d'une d.d.p ou d'un courant à un autre endroit du circuit.

On distingue les quatre types de sources commandées idéales illustrées à la Figure 2.34. Pour une source commandée tension-tension (VVT : voltage to voltage transducer), v_s n'est déterminé à l'instant t que si la valeur $v_x(t)$ est connue. v_x est la tension de commande et v_s la tension commandée. Le coefficient multiplicatif $\mu (\neq 0)$ est sans dimension. De manière similaire, les trois autres combinaisons sont courant-tension (CVT), tension-courant (VCT) et courant-courant (CCT).

Puisque les relations de dépendance introduites ci-dessus sont linéaires, ces sources commandées sont des éléments linéaires. Les sources dépendantes ne sont pas des excitations. Elles sont analogues à des éléments résistifs et introduisent un couplage entre différentes branches du circuit. Comme nous le verrons au Chapitre 7, les sources commandées sont utiles pour la modélisation de circuits électroniques.

2.11 Passivité des éléments R , L et C linéaires et invariants

La puissance **absorbée** par une résistance linéaire est, en utilisant la **convention moteur** (Figure 2.35) :

$$\begin{aligned} p_R(t) &= u(t)i(t) \\ &= Ri(t)i(t) = R i^2(t) \geq 0, \end{aligned}$$

et en utilisant la **convention générateur** :

$$\begin{aligned} p_R(t) &= -u(t)i(t) \\ &= Ri(t)i(t) = Ri^2(t) \geq 0. \end{aligned}$$

L'énergie dissipée vaut

$$w_R(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau > 0.$$

Une **résistance** R est donc un élément **passif** car $w_R(t) > 0$, et **dissipatif** car $p_R(t) \geq 0$.

Pour des bobines (L) et des condensateurs (C) linéaires on a (avec la convention moteur) :



$$p_C(t) = Cu(t) \frac{du(t)}{dt} \geq 0 \quad p_L(t) = Li(t) \frac{di(t)}{dt} \geq 0$$

$$w_C(t) = \int_{-\infty}^t Cu(t) \frac{du(t)}{dt} dt \quad w_L(t) = \int_{-\infty}^t Li(t) \frac{di(t)}{dt} dt$$

$$= \frac{1}{2} C u^2(t) \geq 0 \quad = \frac{1}{2} L i^2(t) \geq 0$$

L et C sont donc des éléments **passifs** ($w(t) \geq 0$), mais **non dissipatifs**, ils restituent de la puissance quand $p(t) < 0$.

On peut donc au final classer les éléments comme indiqué à la Figure 2.36.

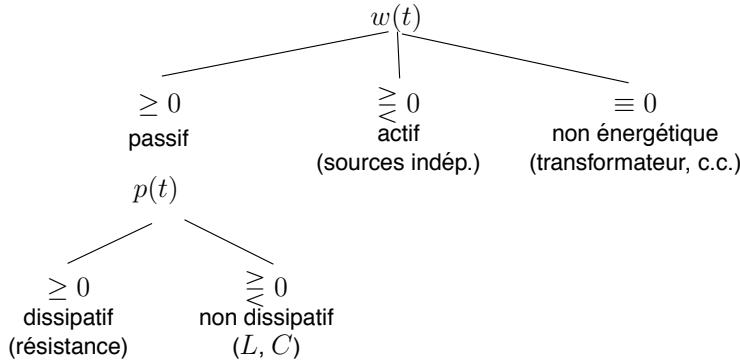


FIGURE 2.36: Classification énergétique des éléments.

2.12 Schéma détaillé de la radio AM

La Figure 2.37 représente un schéma détaillé de la radio AM introduite dans la Section 1.7.1. Il est important de remarquer que si deux arrêtes se croisent à l'extérieur des éléments sans qu'il n'y ait de • à leur intersection, alors il n'y a aucun contact électrique entre les "fils" correspondants. On

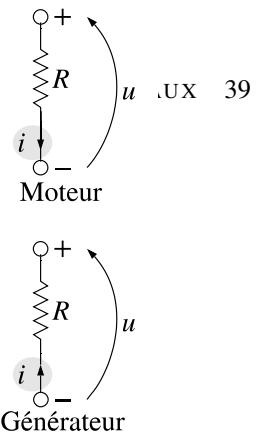


FIGURE 2.35: Conventions moteur et générateur pour un dipôle résistif.

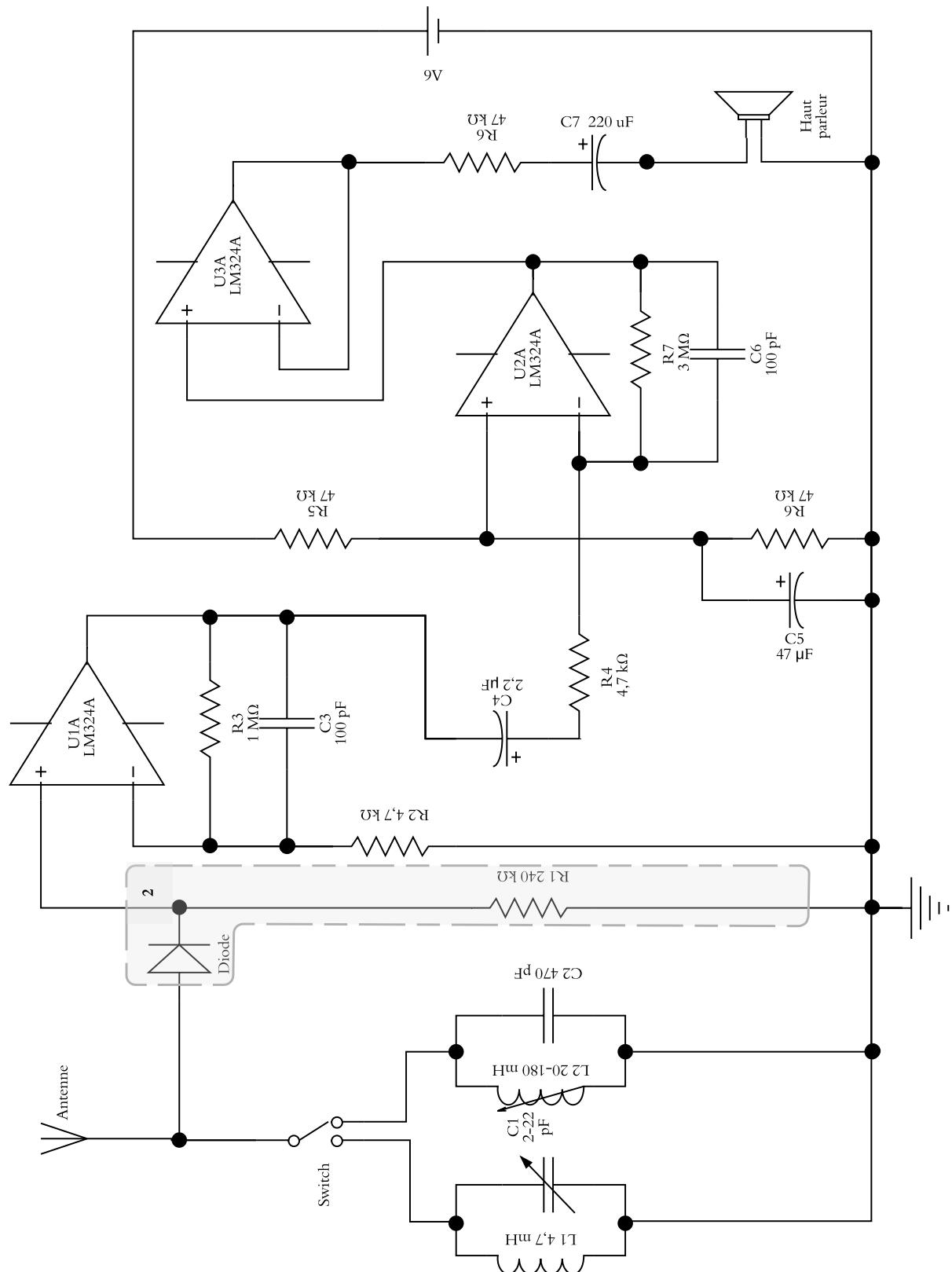


FIGURE 2.37: Coupe 2 : première partie du circuit redresseur.

omet cependant parfois le ● lorsque deux arrêtes forment un T. Le graphe comporte $n = 12$ noeuds, plusieurs résistances, plusieurs condensateurs (simples et électrolytiques) et deux bobines. Le switch permet de sélectionner soit le circuit LC où C est variable (L_1, C_1), soit le circuit LC où L est variable (L_2, C_2).

En pratique, l'analyse de ce circuit ne se fait pas d'un bloc. Le circuit est décomposé en plusieurs étages, qui sont analysés dans les chapitres suivants.

2.12.1 Démodulation de la radio AM

À ce stade, un seul étage peut être analysé : la première partie de la démodulation illustrée par la coupe 2 de la Figure 2.37. En supposant que le signal désiré est reçu (ce qui sera expliqué dans le Chapitre 6), il faut le démoduler pour l'utiliser. Bien que le récepteur à cristal soit extrêmement simple, il est l'élément le plus important du circuit. C'est la diode qui va extraire la modulation, c'est-à-dire le signal audio (signal modulant, voir illustration 1.12), du signal radio. La démodulation consiste à détecter l'enveloppe du signal modulé. La Figure 2.38 nous montre que la démodulation s'effectue en deux

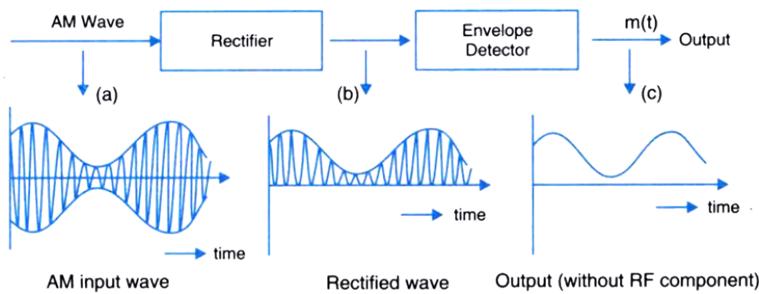


FIGURE 2.38: Principe de la démodulation d'un signal radio

étapes :

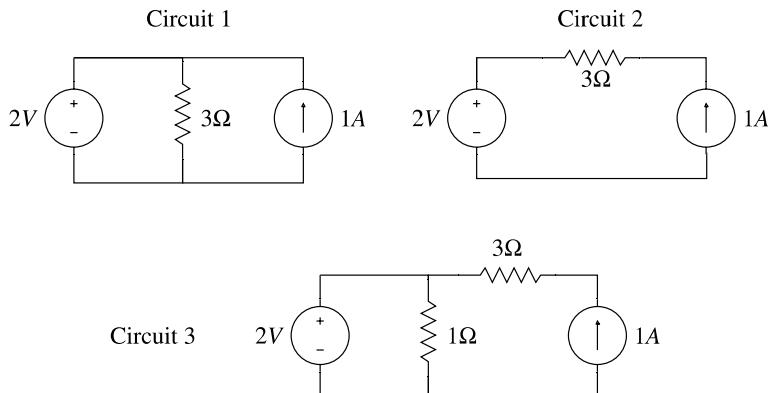
1. le redressement du signal (*Rectifier*).
2. la détection de l'enveloppe (*Envelope Detector*).

La diode s'occupe par définition de l'étape 1 (Figure 2.37). Les alternances positives d'un signal sont transmises, tandis que les négatives sont bloquées. Le signal est donc *redressé*. La résistance R_1 , bien que de valeur relativement élevée, offre un chemin pour le courant. En effet nous verrons que la résistance d'entrée de l'amplificateur opérationnel $U1A$ est très grande (Chapitre 7).

2.13 Exercices

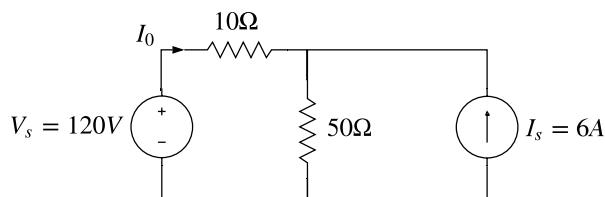
Exercice 2.1 Bilan de puissance *Solution à la page 45.*

Déterminer le bilan de puissance pour chacun des 3 circuits ci-dessous.



Exercice 2.2 Lois de Kirchhoff et loi d'Ohm. *Solution à la page 48.*

Déterminer le courant I_0 débité par la source V_s du circuit ci-dessous à l'aide des lois de Kirchhoff et de la loi d'Ohm.

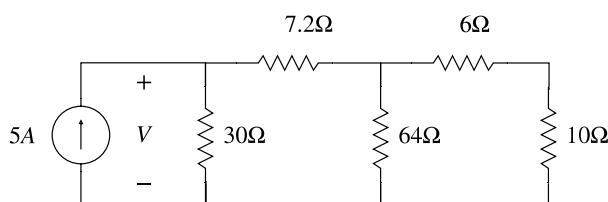


Réponse :
 Circuit 1 : $p_R = \frac{4}{3}$ W, $p_J = 2$ W, $p_E = -\frac{2}{3}$ W
 circuit 2 : $p_R = 3$ W, $p_J = 5$ W, $p_E = -2$ W
 circuit 3 : $p_{1\Omega} = 4$ W, $p_{3\Omega} = 3$ W, $p_E = 2$ W,
 $p_J = 5$ W.

Exercice 2.3 Association de résistances. *Solution à la page 48.*

Déterminer la résistance équivalente

1. à l'association en série des n résistances R_1, R_2, \dots, R_n .
2. à l'association en parallèle des n résistances R_1, R_2, \dots, R_n .
3. du dipôle de la figure ci-dessous à l'aide de réductions successives d'associations d'éléments en série ou en parallèle.



Réponse :
 $I_0 = -3A$

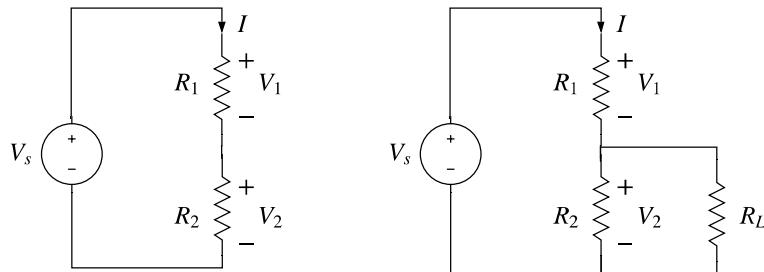
Réponse :

- 1) $R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$
- 2) $G_{eq} = G_1 + G_2 + \dots + G_n$
- 3) $R_{eq} = 12 \Omega$

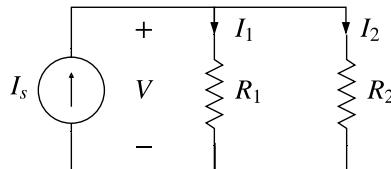
Exercice 2.4 Le diviseur potentiométrique. *Solution à la page 51.*

1. Déterminer l'expression des tensions V_1 et V_2 aux bornes des résistances R_1 et R_2 du diviseur potentiométrique de la figure ci-dessous.
2. On alimente une résistance de charge R_L par le tension V_2 . Déterminer sous quelle condition la valeur de V_2 est peu influencée par la résistance de charge R_L .

[h]

**Exercice 2.5 Le diviseur de courant.** *Solution à la page 52.*

Déterminer l'expression des courants I_1 et I_2 parcourant les résistances R_1 et R_2 de la figure ci-dessous.

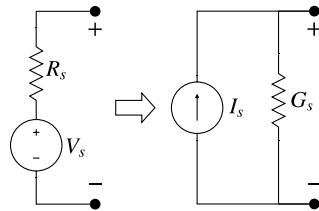
**Exercice 2.6 Sources réelles de tension et de courant.** *Solution à la page 52.*

1. Montrer qu'une source réelle de tension alimentant une résistance de charge R_L se comporte comme une source idéale si $R_i \ll R_L$, cf. Figure 2.31.
2. Montrer qu'une source réelle de courant alimentant une résistance de charge R_L se comporte comme une source idéale si $G_i \ll G_L$, cf. Figure 2.33.

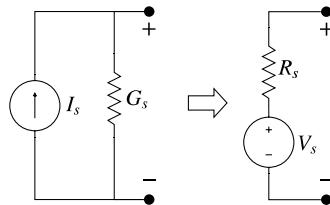
Réponse :
Voir Section 2.9

Exercice 2.7 Équivalence de sources. *Solution à la page 52.*

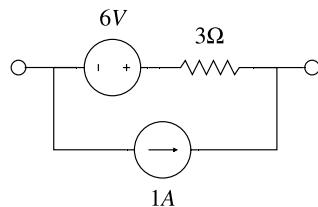
1. Montrer, comme indiqué à la figure suivante, qu'un dipôle "source de tension" peut être remplacé par un dipôle équivalent "source de courant" si $I_s = \frac{V_s}{R_s}$ et $G_s = \frac{1}{R_s}$.



2. Montrer, comme indiqué à la figure suivante, qu'en inversement, un dipôle "source de courant" peut être remplacé par un dipôle équivalent "source de tension" si $V_s = \frac{I_s}{G_s}$ et $R_s = \frac{1}{G_s}$.

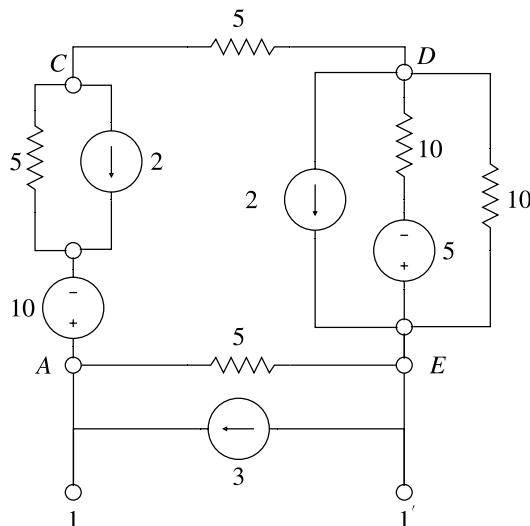


3. Appliquer ces transformations pour réduire le dipôle ci-dessous à un dipôle équivalent "source de tension" ou "source de courant".



Exercice 2.8 Équivalence de sources et réduction. Solution à la page 53.

1. Réduire le circuit de la figure ci-dessous à un dipôle équivalent comprenant une source de tension V_{eq} en série avec une résistance R_{eq} (dipôle "source de tension équivalente").
2. Si on connecte à l'accès 11' une résistance de charge $R_L = 10\Omega$, calculer la puissance absorbée par R_L ainsi que l'état électrique complet du circuit.



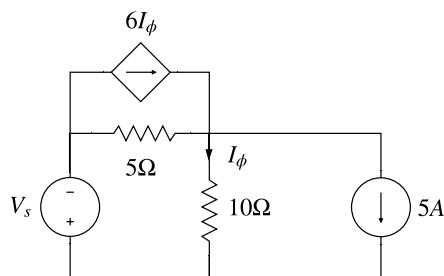
$[V, A, \Omega]$

Réponse :

- 1) $V_{eq} = 13.125 \text{ V}$, $R_{eq} = 3.75 \Omega$
- 2) $p_{R_L} = 9.112 \text{ W}$

Exercice 2.9 Source commandée. Solution à la page 55.

Calculer la valeur de la source de tension V_s de la figure ci-dessous si le courant I_ϕ est égal à 5 A.

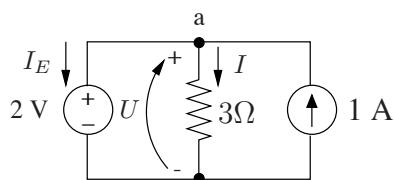


Réponse :
 $V_s = 50 \text{ V}$

2.14 Solution des exercices

Solution de l'exercice 2.1

Circuit 1. Choisissons le sens des courants I , I_E et de la tension U comme indiqué ci-dessous.



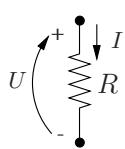
Vu la présence de la source de tension, on a directement $U = 2 \text{ V}$. La loi d'Ohm aux bornes d'une résistance s'écrit :

avec les sens conventionnels de

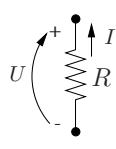
référence

avec les sens non conventionnels de

référence



$$U = R.I$$



$$U = -R.I$$

L'application de cette loi à la résistance $R = 3 \Omega$ donne directement :

$$I = \frac{U}{3} = \frac{2}{3} \text{ A}$$

La première loi de Kirchhoff (PLK) au noeud a s'écrit :

$$I + I_E - 1 = 0 \quad \text{on déduit} \quad I_E = 1 - I = \frac{1}{3} \text{ A}$$

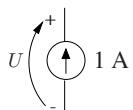
L'état électrique complet du circuit est connu. On en déduit les puissances consommées ou fournies par les différents éléments.

1. Résistance $R = 3 \Omega$: les sens adoptés pour U et I sont les sens conventionnels de référence

$$p_R = UI = RI^2 = \frac{4}{3} \text{ W}$$

est la puissance consommée par cette résistance.

2. Source $J = 1 \text{ A}$:

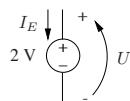


le courant et la tension aux bornes de cet élément sont orientés selon les sens de référence non conventionnels,

$$p_J = U.1 = 2 \text{ W}$$

est la puissance fournie par la source J .

3. Source $E = 2 \text{ V}$:

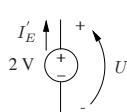


le courant et la tension aux bornes de cet élément sont orientés selon les sens de référence conventionnels,

$$p_E = U.I_E = \frac{2}{3} \text{ W}$$

est la puissance consommée par la source. La valeur trouvée est positive, cette source consomme effectivement de la puissance.

Si l'on avait adopté les sens non conventionnels de référence, on aurait :



$I'_E = -I_E$ et $p'_E = U.I'_E = -\frac{2}{3} \text{ W}$ est la puissance fournie par la source. Elle est négative indiquant que E consomme de la puissance. Quels que soient les sens adoptés pour U et I , on constate que les résultats sont cohérents.

Le bilan de puissance s'établit comme suit :

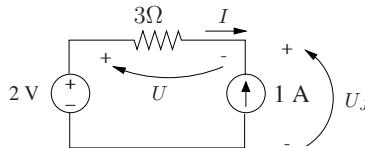
$$\Sigma p \text{ consommées} = 0 \quad p_E + p_R - p_J = 0$$

ou

$$\Sigma p \text{ consommées} = \Sigma p \text{ fournies} \quad p_E + p_R = p_J$$

Circuit 2.

Choisissons le sens des courants I , I_E et des tensions U et U_J comme indiqué ci-contre.



Vu la présence de la source de courant, on a directement $I = -1$ A. On Par application de la loi d'Ohm : $U = 3.I = -3$ V.

La seconde loi de Kirchhoff (SLK) s'écrit :

$$U + U_J - 2 = 0 \Rightarrow U_J = 5 \text{ V.}$$

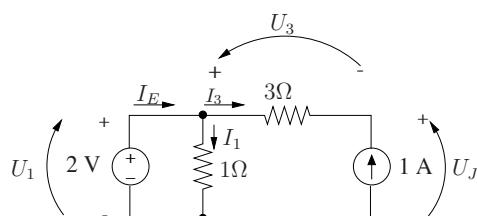
calcule les puissances relatives aux différents éléments :

1. $p_R = RI^2 = 3 \text{ W}$, est la puissance consommée par la résistance de 3Ω .
2. $p_J = 1.U_J = 5 \text{ W}$ est la puissance fournie par la source J .
3. $p_E = 2.I = -2 \text{ W}$ est la puissance fournie par E . Puisque la valeur est négative, E est en fait consommatrice de puissance.

Le bilan de puissance s'écrit :

$$p_R = p_J + p_E$$

Circuit 3.



On trouve :

$$U_1 = 2 \text{ V} \quad U_3 = -3 \text{ V}, \quad U_J = 5 \text{ V}$$

$$I_1 = 2 \text{ A} \quad I_3 = -1 \text{ A} \quad I_E = 1 \text{ A}$$

Puissances consommées par les résistances :

$$p_{1\Omega} = R_1 I_1^2 = 4 \text{ W}, \quad p_{3\Omega} = R_3 I_3^2 = 3 \text{ W}$$

Puissances fournies par les sources :

$$p_E = U_1 \cdot I_E = 2 \text{ W}, \quad p_J = U_J \cdot 1 = 5 \text{ W}$$

Bilan de puissance :

$$p_{1\Omega} + p_{3\Omega} = p_E + p_J$$

Solution de l'exercice 2.2

Adoptant les sens des courants et tensions de la Fig. 2.39, on trouve successivement :

1. par application de la PLK au noeud b ou c :

$$I_1 - I_0 - 6 = 0$$

2. par application de la SLK à la maille abca :

$$120 - V_0 - V_1 = 0$$

3. ou en appliquant la loi d'Ohm :

$$120 - 10I_0 - 50I_1 = 0$$

On trouve finalement : $I_0 = -3 \text{ A}$ et $I_1 = 3 \text{ A}$. On vérifie le bilan de

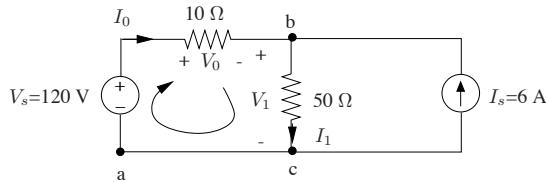


FIGURE 2.39: Lois de Kirchhoff et loi d'Ohm.

puissance :

1. puissance consommée par la résistance de 10Ω :

$$p_{10\Omega} = 10I_0^2 = 90 \text{ W}$$

2. puissance consommée par la résistance de 50Ω :

$$p_{50\Omega} = 50I_1^2 = 450 \text{ W}$$

3. puissance produite par la source de tension 120 V :

$$p_{120V} = 120I_0 = -360 \text{ W}$$

cette source absorbe de la puissance !

4. puissance produite par la source de courant de 6 A :

$$p_{6A} = 6V_1 = 6.50.I_1 = 900 \text{ W}$$

On vérifie bien que la puissance totale produite par les deux sources = puissance totale consommée par les résistances :

$$p_{10\Omega} + p_{50\Omega} = p_{120V} + p_{6A}.$$

Solution de l'exercice 2.3

Équivalence entre deux dipôles : deux dipôles sont équivalents si pour une même d.d.p aux bornes v , ces dipôles sont parcourus par un même courant

i et inversement si, pour un même courant injecté i, il apparaît une même d.d.p. v aux bornes des deux dipôles.

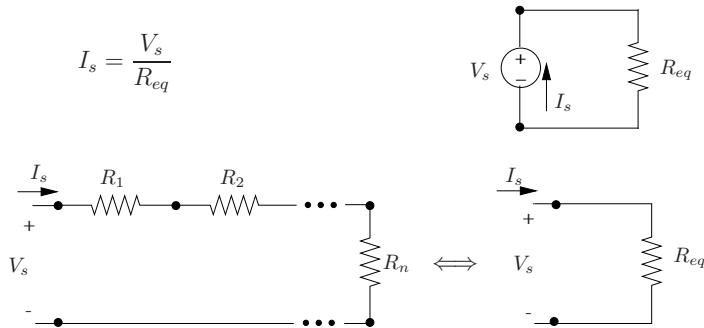
On ne change rien à l'état électrique d'un circuit si l'on remplace un des dipôles le constituant par un dipôle équivalent.

Nous appliquons ici ce principe au cas particulier de dipôles résistifs.

1. Association en série

Alimentées par une source de tension V_s , les résistances R_1, R_2, \dots, R_n connectées en série sont parcourues par le même courant I_s .

Nous recherchons une résistance équivalente R_{eq} telle que



La SLK et la loi d'Ohm appliquées dans la maille fournissent :

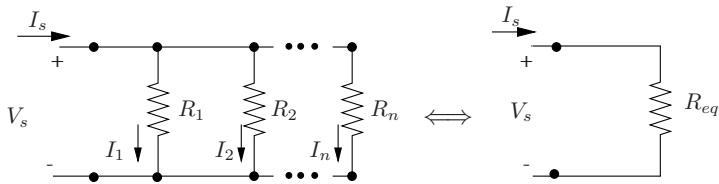
$$V_s = R_1 I_s + R_2 I_s + \dots + R_n I_s \quad \text{et} \quad I_s = \frac{V_s}{R_1 + R_2 + \dots + R_n} = \frac{V_s}{R_{eq}}$$

Finalement la résistance équivalente est donnée par la somme des n résistances

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

2. Association en parallèle

Il existe une même d.d.p. aux bornes de tous les éléments.



On écrit :

$$V_s = R_1 I_1 = R_2 I_2 = \dots = R_n I_n$$

$$I_s = I_1 + I_2 + \dots + I_n = V_s \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)$$

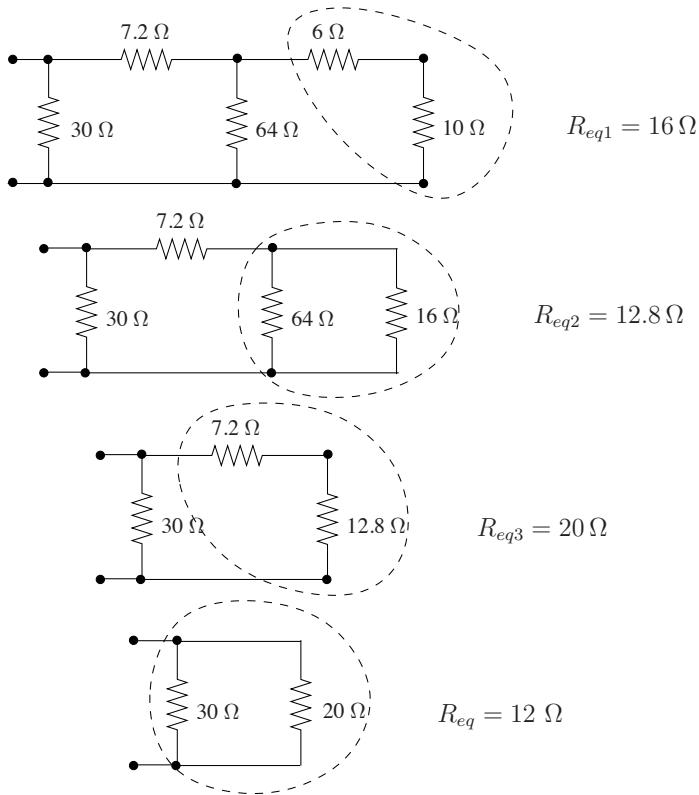
On peut représenter ce dipôle par une résistance équivalente qui vérifie :

$$\frac{I_s}{V_s} = \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

ou en termes de conductances :

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \dots + G_n$$

3. On calcule successivement :



Solution de l'exercice 2.4

1. Expression de V_1 et V_2 On dérive successivement :

$$\begin{aligned} I &= \frac{V_s}{R_1 + R_2} \\ V_1 &= R_1 I = V_s \frac{R_1}{R_1 + R_2} \\ V_2 &= R_2 I = V_s \frac{R_2}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

Le choix de R_1 et R_2 permet de fixer la manière dont V_s est répartie entre V_1 et V_2 . Il existe une infinité de couples de valeurs (R_1, R_2) donnant lieu à la même répartition. Le choix des valeurs de ces deux résistances est aussi guidé par :

1. la puissance qui peut être dissipée par chaque élément ;
2. la résistance de charge éventuelle que doit alimenter V_1 ou V_2 comme montré au point 2.

2. Influence de R_L On dérive successivement :

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_1} V_s \quad \text{avec} \quad R_{eq} = \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} \\ V_2 &= \frac{R_2}{R_1 [1 + (R_2/R_L)] + R_2} V_s \end{aligned}$$

Nous aurons donc

$$\frac{V_2}{V_s} \simeq \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{si} \quad R_L \gg R_2.$$

Solution de l'exercice 2.5

La tension aux bornes des deux résistances est donnée par

$$V = I_s \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Le courant I_s se divise donc comme suit :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V}{R_1} = I_s \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{ou} \quad I_s \frac{G_1}{G_1 + G_2} \\ I_2 &= \frac{V}{R_2} = I_s \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{ou} \quad I_s \frac{G_2}{G_1 + G_2} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2.6

Voir Exercice précédent et /ou la Section 2.9.

Solution de l'exercice 2.7

1. Equivalence source de tension → source de courant. Les deux dipôles sont équivalents si ils délivrent un même courant I sous une même tension V . Le courant débité par le dipôle “source de tension” s’écrit :

$$I = \frac{V_s}{R_s} - \frac{V}{R_s}$$

Le courant débité par le dipôle “source de courant” s’écrit :

$$I = I_s - G_s V$$

La condition d’équivalence s’écrit donc :

$$\frac{V_s}{R_s} - \frac{V}{R_s} = I_s - G_s V$$

Les paramètres du dipôle “source de courant” équivalent sont :

$$\begin{aligned} I_s &= \frac{V_s}{R_s} \\ G_s &= \frac{1}{R_s} \end{aligned}$$

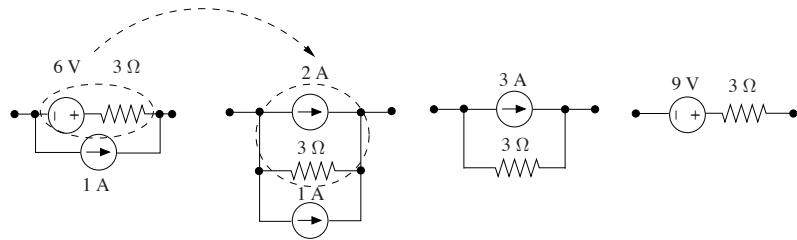
2. Equivalence source de courant → source de tension. Les deux dipôles sont équivalents si ils présentent une même tension V sous un même courant I . La condition d’équivalence s’écrit donc :

$$\frac{I_s}{G_s} - \frac{I}{G_s} = V_s - R_s I$$

Les paramètres du dipôle “source de tension” équivalent sont :

$$\begin{aligned} V_s &= \frac{I_s}{G_s} \\ R_s &= \frac{1}{G_s} \end{aligned}$$

3. Exemple On transforme successivement le circuit comme suit.

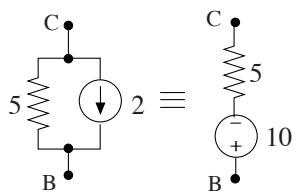


Solution de l'exercice 2.8

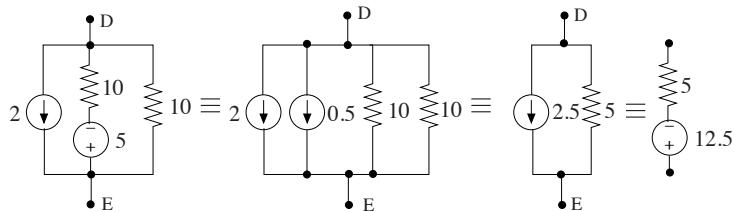
1. Source de tension équivalente.

On transforme successivement :

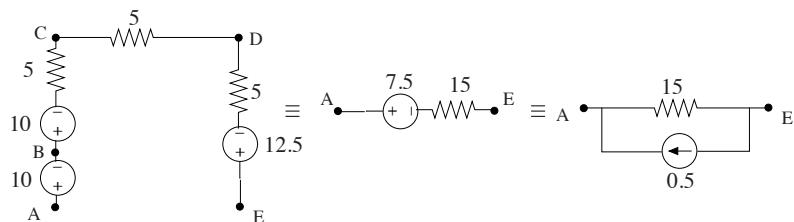
1. la branche CB



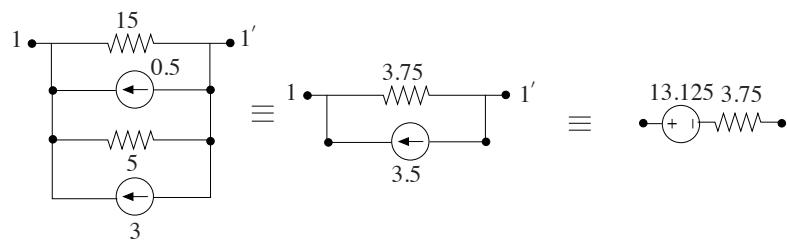
2. la branche DE



La partie du circuit située au-dessus de AE se réduit ainsi en la forme



Connectant au reste du circuit, on a



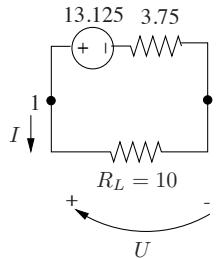
Finalement

$$V_{eq} = 13.125 \text{ V}, \quad R_{eq} = 3.75 \Omega$$

2. Accès 11' fermé sur $R_L = 10 \Omega$.

Le circuit étant remplacé par son dipôle équivalent “source de tension”, on connecte la résistance de charge à l'accès 11'.

On déduit le courant débité dans la résistance de charge :



$$I = \frac{V_{eq}}{R_{eq} + R_L} = 0.9545 \text{ A}$$

La tension aux bornes de cette charge vaut :

$$U = RI = 10I = 9.545 \text{ V}$$

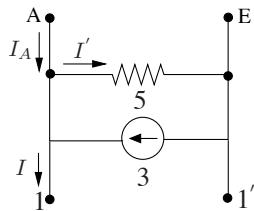
La puissance consommée par la charge vaut :

$$p_{R_L} = R_L I^2 = 9.112 \text{ W}$$

3. Etat électrique complet du circuit

Dans ce qui suit, les puissances calculées relatives aux résistances sont les puissances consommées par ces résistances. Les puissances calculées relatives aux sources de tension et de courant sont les puissances fournies par ces sources au reste du circuit.

1. branche AE :



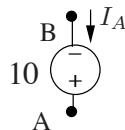
$$I' = \frac{U}{5} = 1.909 \text{ A}$$

$$I_A = I + I' - 3 = -0.1365 \text{ A}$$

$$p_{J=3} = 3U = 28.635 \text{ W}$$

$$p_{R=5} = 5I'^2 = 18.22 \text{ W}$$

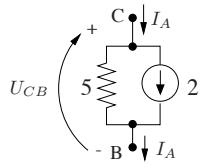
2. dipôle AB :



$$p_{E=10} = 10I_A = -1.365 \text{ W}$$

Cette source consomme de la puissance.

3. dipôle BC :

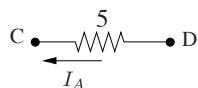


$$U_{CB} = 5(I_A - 2) = -10.682 \text{ V}$$

$$p_{R=5} = \frac{U_{CB}^2}{5} = 22.823 \text{ W}$$

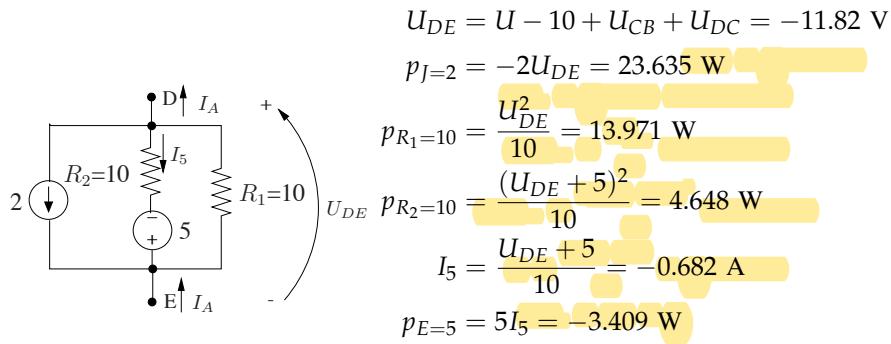
$$p_{J=2} = -2U_{CB} = 21.365 \text{ W}$$

4. dipôle CD :



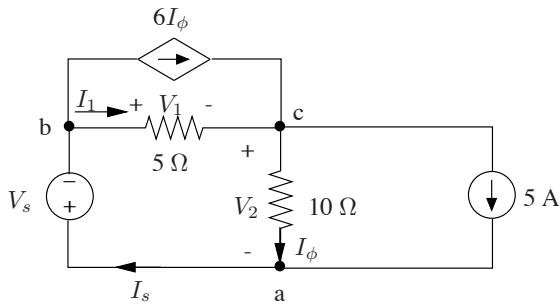
$$p_{R=5} = 5I_A^2 = 0.093 \text{ W}$$

5. dipôle DE :



Cette source consomme de la puissance.

Solution de l'exercice 2.9



La PLK appliquée au noeud a et b fournit :

$$\begin{aligned} I_s &= I_\phi + 5 = 10 \\ I_s &= 6I_\phi + I_1 \quad \rightarrow \quad I_1 = I_s - 6I_\phi = -20 \end{aligned}$$

La SLK appliquée à la maille abca s'écrit :

$$\begin{aligned} V_s + V_1 + V_2 &= 0 \quad \text{avec} \quad V_2 = 10I_\phi = 50 \\ V_1 &= 5I_1 = -100 \end{aligned}$$

Finalement : $V_s = 50 \text{ V}$.

3

Régimes transitoires

Ce chapitre s'intéresse à l'analyse de circuits comportant des éléments linéaires et invariants R, L, C et des sources indépendantes d'énergie. Nous traitons quelques problèmes simples, relatifs à des circuits localisés, linéaires et invariants du premier et du deuxième ordre, soumis à une excitation. Nous avons délibérément opté pour la résolution directe des équations intégro-différentielles¹ régissant ces circuits, la détermination des constantes d'intégration s'obtenant à partir des conditions aux limites dictées par la physique des phénomènes.

Les phénomènes transitoires sont des variations de courant et/ou de tension dues à des variations brusques des tensions ou des courants des sources d'alimentation (réponse forcée), ou dues au fait que l'énergie emmagasinée dans les inductances (sous forme magnétostatique) et condensateurs (sous forme électrostatique) est subitement relâchée et dissipée dans un circuit résistif (réponse libre).

3.1 Propriétés des éléments L et C linéaires et invariants

Mémoire. C et L ont une mémoire. Soit un condensateur excité par un courant $i(t)$. On a

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(x) dx$$

$u(t)$ dépend non seulement de i à l'instant t mais aussi de $i(x)$ pour $x < t$, soit de toute l'"histoire" du système.

On a aussi :

$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(x) dx$$

$u(t_0)$ résume tout le passé du système de $[-\infty, t_0]$. De même pour une inductance excitée par une tension $u(t)$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(x) dx, \quad i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(x) dx.$$

Continuité de la tension aux bornes d'un condensateur. Si le courant $i(t)$ induit par un condensateur est borné $\forall t$, alors la tension aux bornes de ce condensateur est une grandeur continue. Ceci découle de la relation

$$u = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(x) dx.$$

1. Une autre approche consiste à utiliser la transformée de Laplace, qui offre certains avantages, dont notamment la détermination des conditions initiales qui devient automatique.

u ne peut varier de manière instantanée aux bornes d'un condensateur. Sinon, cela donne lieu à un courant infini (cas de l'impulsion de Dirac !). Il faut donc éviter de mettre sous tension brusquement un condensateur, ou de le court-circuiter.

On suppose ici les **éléments idéaux**, c'est-à-dire **sans pertes** (voir point suivant). En tenant compte des pertes, le courant lors d'une mise sous tension brusque est très important mais reste borné !

Continuité du courant dans une bobine. Si la tension $u(t)$ aux bornes d'une inductance est bornée $\forall t$, alors le courant dans cette inductance est une grandeur continue. Ceci découle de la relation

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(x)dx,$$

i ne peut varier de manière instantanée aux bornes d'une inductance. Sinon, il apparaît en théorie une tension infinie (cas de l'impulsion de Dirac !), et en pratique un arc de courant si on tente d'ouvrir le circuit. Il faut donc en général prendre des mesures spéciales pour couper le courant dans un circuit inductif.

C et L sont des éléments non-dissipatifs. La puissance consommée par un condensateur est

$$p_C(t) = u(t)i(t) = Cu \frac{du}{dt}.$$

L'énergie fournie au condensateur dans l'intervalle t_1, t_2 est donc

$$w_C(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(x)dx = \frac{1}{2}C(u^2(t_2) - u^2(t_1))$$

et est indépendante de la forme du signal $u(t)$ dans l'intervalle $[t_1, t_2]$; $w_C(t_1, t_2)$ dépend seulement de la valeur de u aux instants t_1 et t_2 .

Si considère un signal u périodique de période T , alors

$$w_C(t_1, t_1 + T) = 0$$

Ceci implique que l'élément ne dissipe pas d'énergie :

- durant une partie de la période, $p(t) > 0$, le condensateur stocke l'énergie qui lui est fournie,
- durant le reste de la période, $p(t) < 0$, le condensateur restitue l'énergie qu'il a stockée.

Pour une inductance, on observe les mêmes propriétés :

$$\begin{aligned} p_L(t) &= Li \frac{di}{dt} \\ w_L(t_1, t_2) &= \frac{1}{2}L(i^2(t_2) - i^2(t_1)) \end{aligned}$$

Et pour un signal périodique on a donc également

$$w_L(t_1, t_1 + T) = 0.$$

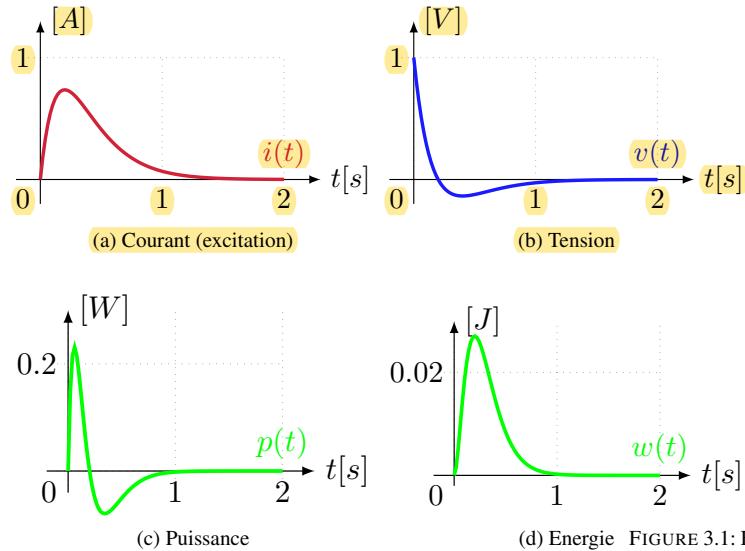


FIGURE 3.1: Evolution des différentes grandeurs à travers ou aux bornes de la bobine en fonction du temps.

Exemple : Bobine soumise à une excitation en courant.

Une inductance de 100 mH est alimentée par une source de courant délivrant un signal de courant de la forme (cf. Figure 3.1) :

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 10te^{-5t} & t > 0 \end{cases}$$

L'évolution de la tension est donnée par

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-5t}(1 - 5t) & t > 0 \end{cases}$$

celle de la puissance par

$$p(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 10t(1 - 5t)e^{-10t} & t > 0 \end{cases}$$

et celle de l'énergie par

$$w(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 5t^2e^{-10t} & t > 0 \end{cases}$$

Dans l'intervalle $[0 - 0.2]$ s, l'inductance stocke une certaine énergie ; dans l'intervalle $[0.2 - \infty]$ s, cette énergie est restituée. On a :

- $w(t) \geq 0 \quad \forall t$: élément passif
- $w(\infty) = 0$: finalement aucune énergie n'est dissipée

Énergie emmagasinée. Soit un condensateur C porté initialement (en $t = 0$) au potentiel V . On le connecte à un circuit extérieur \mathcal{R} et il reçoit durant l'intervalle $[0, t_2]$, une quantité d'énergie :

$$w_C(0, t_2) = \frac{1}{2}C(u^2(t_2) - V^2)$$

Si $u(t_2) < V$, $w_C(0, t_2) < 0$, cela signifie que l'énergie emmagasinée initialement dans le condensateur est rendue au circuit extérieur \mathcal{R} . L'énergie

L'énergie emmagasinée dans

- un condensateur initialement porté au potentiel V est $\frac{1}{2}CV^2$.
- une inductance initialement parcourue par un courant I est $\frac{1}{2}LI^2$.

maximale qui peut être extraite du condensateur est

$$\max|w_C(0, t_2)| = \frac{1}{2}CV^2.$$

Il est donc essentiel de retenir les constatations de la Table 3.1

3.2 Les circuits du premier ordre

3.2.1 Circuit RC

Soit le circuit de la Figure 3.2.

1. Si l'interrupteur bascule en position 1 : *réponse forcée*, le condensateur se charge. Porté finalement au potentiel V_s , il emmagasine une énergie

$$w_C = \frac{1}{2}CV_s^2$$

2. Si maintenant l'interrupteur bascule en position 2 : *réponse libre*, le condensateur se décharge, l'énergie emmagasinée dans C est progressivement relâchée et dissipée dans la résistance.

Charge du condensateur : réponse forcée. On suppose le condensateur initialement relaxé (il ne porte aucune énergie). En $t = 0$, l'interrupteur bascule en position 1 (cf. Figure 3.2). Pour $t < 0$, $u(t) = 0$. Ensuite, en appliquant la PLK au noeud 1, on a

$$C \frac{du}{dt} + \frac{u - V_s}{R_s} = 0,$$

ou encore

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{CR_s} = \frac{V_s}{CR_s}.$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants, qui accepte une solution du type

$$u(t) = Ke^{-t/\tau_s} + V_s.$$

Reste à déterminer la constante K . Or, $u(0-) = 0$, donc $u(0+) = 0$ par continuité de u et finalement

$$K = -V_s$$

Il vient finalement (cf. Figure 3.4)

$$u(t) = V_s(1 - e^{-t/\tau_s}), \quad t > 0$$

On peut également réécrire l'évolution de $u(t)$ pour mettre en évidence le régime permanent, et le régime transitoire :

$$\begin{aligned} u(t) &= V_s - V_s e^{-t/\tau_s} \\ &= \text{régime permanent (DC)} + \text{régime transitoire}. \end{aligned}$$

TABLE 3.1: Energie emmagasinée dans un condensateur ou dans une bobine.

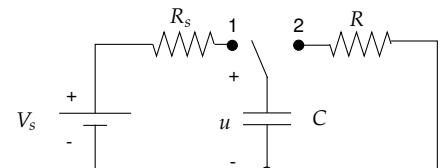


FIGURE 3.2: Circuit illustrant les réponses forcées et libres d'un circuit RC

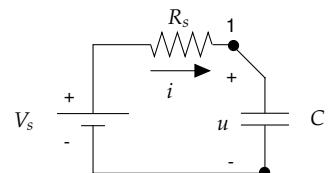


FIGURE 3.3: Partie gauche de la figure 3.2

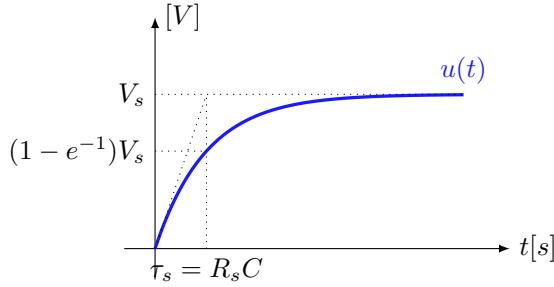


FIGURE 3.4: Réponse forcée d'un circuit RC : tension.

La *constante de temps* $\tau_s = R_s C$ caractérise la vitesse de la charge. Au-delà de $5\tau_s$, le régime transitoire est négligeable et $u(t) \simeq V_s$. Quant au courant de charge, on déduit simplement (cf. Figure 3.5)

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = \frac{V_s}{R_s} e^{-t/\tau_s}$$

$$i(0-) = 0, \quad i(0+) = \frac{V_s}{R_s} = i_0.$$

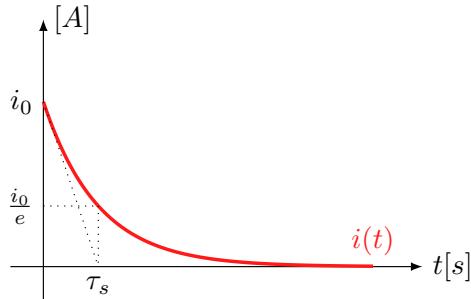


FIGURE 3.5: Réponse forcée d'un circuit RC : courant.

Bilan énergétique. Il est intéressant de s'intéresser au bilan énergétique de l'opération de charge avec ce circuit :

1. Énergie dissipée dans la résistance R_s :

$$p_R(t) = \frac{V_s^2}{R_s} e^{-2t/R_s C}, \quad w_R(\infty) = \int_0^\infty p_R(t) dt = \frac{V_s^2 C}{2}$$

Cette quantité est indépendante de R_s !

2. Énergie emmagasinée dans le condensateur :

$$p_C(t) = \frac{V_s^2}{R_s} e^{-t/R_s C} (1 - e^{-t/R_s C}), \quad w_C(\infty) = \int_0^\infty p_C(t) dt = \frac{V_s^2 C}{2} = w_R !!$$

3. Énergie fournie par la pile :

$$w_V = w_R + w_C = V_s \int_0^\infty i(t) dt = V_s^2 C$$

4. Le *rendement* de l'opération de charge est $\eta = \frac{w_C}{w_V} = 0.5$, indépendant de R_s et de C !

Décharge du condensateur, réponse libre. Après un temps suffisamment long (supposé infini, donc $u(t) = V_s$), l'interrupteur bascule en position 2. Soit $t = 0$ cet instant. On a alors

$$C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} = 0,$$

ou encore

$$\frac{du}{u} = -\frac{dt}{RC}$$

et donc

$$u(t) = K e^{-t/RC} = K e^{-t/\tau}.$$

On détermine la constante K en utilisant le fait que $u(0-) = V_s$, donc $u(0+) = V_s$ par continuité de u , et $K = V_s$. On a donc finalement

$$u(t) = V_s e^{-t/RC}, \quad i(t) = \frac{V_s}{R} e^{-t/RC}, \quad t > 0$$

On peut à nouveau définir la constante de temps comme

$$\tau = RC$$

- après τ s, la tension est réduite d'un facteur e ($\simeq 0.368V_s$)
- après 5τ s, la tension est réduite à moins de 1% de sa valeur initiale
- $\frac{V_s}{\tau}$ = la pente de la tangente en $t = 0$ de la courbe $u(t)$
- $-\frac{1}{\tau}$, la racine du polynôme caractéristique, est appelée la *fréquence naturelle* du circuit.

La puissance absorbée par la résistance est

$$p(t) = R i^2(t) = \frac{V_s^2}{R} e^{-2t/\tau} > 0 \quad \forall t$$

L'énergie dissipée dans l'intervalle $[0, t]$ est

$$w(t) = \int_0^t p(x) dx = \int_0^t \frac{V_s^2}{R} e^{-2x/\tau} dx = \frac{1}{2} C V_s^2 (1 - e^{-2t/\tau}),$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \frac{1}{2} C V_s^2.$$

L'énergie initialement emmagasinée dans le condensateur est finalement entièrement dissipée dans la résistance à une vitesse fixée par la constante de temps τ .

Intéressons-nous maintenant au cas où le condensateur est mis sous tension brusque alors qu'il est initialement chargé. En $t = 0$, le condensateur porte une charge initiale q_0 , c'est-à-dire présente une d.d.p. $u_0 = q_0/C$, et

$$\begin{aligned} V_s &= R_s i + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt \\ &= R_s i + u_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i dt \end{aligned}$$

Le condensateur initialement chargé peut être remplacé par un condensateur initialement relaxé en série avec une source de tension constante u_0 . On peut vérifier que la tension aux bornes du condensateur est donnée par :

$$\begin{aligned} u(t) &= V_s (1 - e^{-t/\tau_s}) + u_0 e^{-t/\tau_s} \\ &= \text{réponse forcée} + \text{réponse libre}. \end{aligned}$$

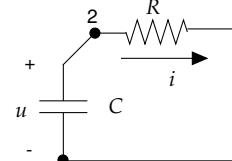


FIGURE 3.6: Partie droite de la figure 3.2.

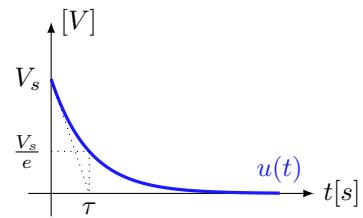


FIGURE 3.7: Réponse libre d'un circuit RC : tension.

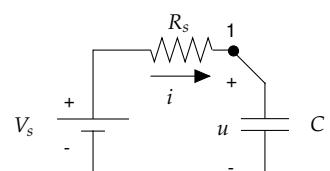


FIGURE 3.8: Partie gauche de la figure 3.2.

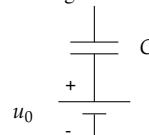


FIGURE 3.9: Modélisation d'un condensateur initialement chargé.

3.2.2 Circuit RL

Soit le circuit de la Figure 3.10.

- Si l'interrupteur bascule en position 1 : *réponse forcée*, un courant dans l'inductance s'établit : $i_{\infty} = \frac{V_s}{R_s}$. L'énergie magnétique emmagasinée vaut :

$$w_L = \frac{1}{2} L i_{\infty}^2$$

- Si maintenant l'interrupteur bascule en position 2 : *réponse libre*, l'énergie emmagasinée dans L est progressivement relâchée et dissipée dans la résistance.

Établissement du courant : réponse forcée. On suppose l'inductance initialement relaxée. En $t = 0$, l'interrupteur bascule en position 1. Le système répond donc à un échelon de tension.

Pour $t < 0$, $i(t) = 0$. Ensuite par la SLK dans la maille d'intérêt,

$$L \frac{di}{dt} + R_s i = V_s,$$

ou encore

$$i(t) = K e^{-t/\tau_s} + \frac{V_s}{R_s}.$$

Pour déterminer la constante K , on sait que $i(0-) = 0$, donc $i(0+) = 0$ par continuité de i , et

$$\boxed{i(t) = \frac{V_s}{R_s} (1 - e^{-t/\tau_s}) = i_{\infty} (1 - e^{-t/\tau_s}) \quad t > 0}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \frac{V_s}{R_s} = i_{\infty}$$

L'inductance "freine" l'établissement du courant. La rapidité de cet établissement est dictée par la constante de temps $\tau_s = \frac{L}{R_s}$.

$$\begin{aligned} i(t) &= i_{\infty} (1 - e^{-t/\tau_s}) \\ &= i_{\infty} - i_{\infty} e^{-t/\tau_s} \\ &= \text{régime permanent (DC)} + \text{régime transitoire} \end{aligned}$$

La tension aux bornes de l'inductance est

$$u(t) = L \frac{di}{dt} = V_s e^{-t/\tau_s},$$

avec

$$u(0-) = 0 \quad u(0+) = V_s.$$

Réponse libre.

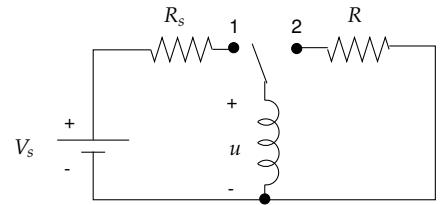
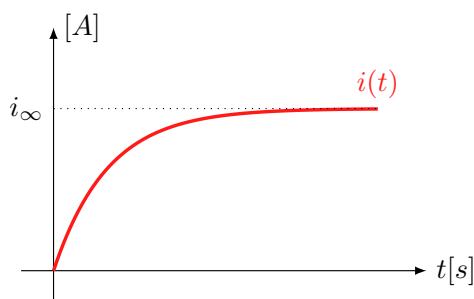


FIGURE 3.10: Circuit illustrant les réponses forcées et libres d'un circuit RL.

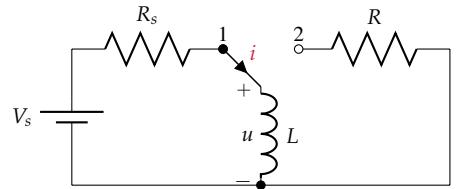


FIGURE 3.11: Réponse forcée d'un circuit RL.

FIGURE 3.12: Réponse forcée d'un circuit RL, courant.

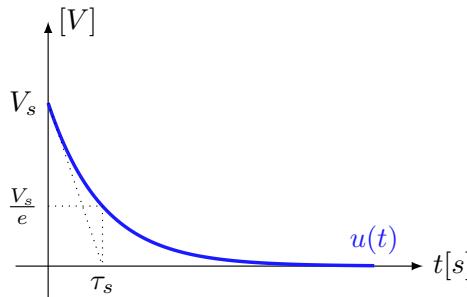


FIGURE 3.13: Réponse forcée d'un circuit RL, tension.

Après un temps suffisamment long (supposé infini, $i(t) = \frac{V_s}{R_s} = i_\infty$), l'interrupteur bascule en position 2. Soit $t = 0$ cet instant. On a

$$L \frac{di}{dt} + R i = 0$$

$$\frac{di}{i} = -\frac{R dt}{L}$$

$$i(t) = K e^{-(R/L)t} = K e^{-t/\tau}$$

Détermination de la constante K :

— $i(0-) = i_\infty \rightarrow i(0+) = i_\infty$ (continuité de i)

— $u(0-) = 0, u(0+) = R i_\infty$

$$i(t) = i_\infty e^{-(R/L)t}, \quad u(t) = -R i_\infty e^{-(R/L)t} \quad t > 0$$

La constante de temps est

$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$i(t) = i_\infty e^{-t/\tau}$$

$$u(t) = i_\infty R e^{-t/\tau}$$

La fréquence naturelle du circuit est $-\frac{1}{\tau} = -\frac{R}{L}$

En ce qui concerne l'énergie dissipée dans la résistance, la puissance absorbée par la résistance vaut

$$p(t) = R i^2(t) = R i_\infty^2 e^{-2t/\tau} > 0 \quad \forall t.$$

Donc l'énergie dissipée dans l'intervalle $[0, t]$ est

$$w(t) = \int_0^t p(x) dx = \frac{1}{2} L i_\infty^2 (1 - e^{-2t/\tau})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \frac{1}{2} L i_\infty^2$$

L'énergie initialement emmagasinée dans l'inductance est finalement entièrement dissipée dans la résistance à une vitesse fixée par la constante de temps τ .

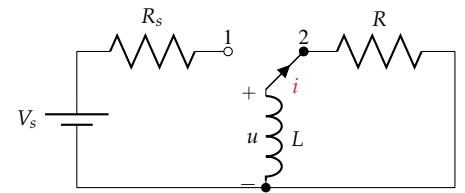


FIGURE 3.14: Réponse libre d'un circuit RL.

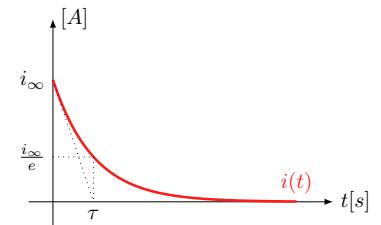


FIGURE 3.15: Réponse libre d'un circuit RL : courant.

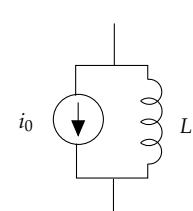


FIGURE 3.16: Modélisation d'une inductance initialement parcourue par un courant.

Si on s'intéresse à l'établissement du courant dans une inductance parcourue par un courant initial i_0 , on a

$$\begin{aligned}\frac{V_s}{R_s} &= \frac{u}{R_s} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u dt \\ &= \frac{u}{R_s} + i_0 + \frac{1}{L} \int_0^t u dt\end{aligned}$$

L'inductance initialement parcourue par un courant peut être remplacée par une inductance initialement relaxée en parallèle avec une source de courant constant i_0 . On peut vérifier que le courant parcourant l'inductance est donné par

$$i(t) = \frac{V_s}{R_s}(1 - e^{-t/\tau_s}) + i_0 e^{-t/\tau_s} = \text{réponse forcée} + \text{réponse libre.}$$

3.3 Les circuits du deuxième ordre

3.3.1 Réponse libre

Soit le circuit de la Figure 3.17 avec comme condition initiales le condensateur C chargé à $u_{C0} V$ et l'inductance relaxée ($i_0 = 0$). Par la SLK, on a à tout instant

$$L \frac{di}{dt} + R i - u_{C0} + \frac{1}{C} \int_0^t i dx = 0.$$

En dérivant,

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$

et en divisant par L , on obtient

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

A priori, le système a une solution du type

$$K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

où s_1 et s_2 sont les racines de l'équation caractéristique

$$s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0.$$

Si on pose

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

alors

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

s_1 et s_2 sont les fréquences naturelles du circuit. Il existe trois formes de solutions selon que $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$, $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$, ou $\alpha^2 - \omega_0^2 = 0$.

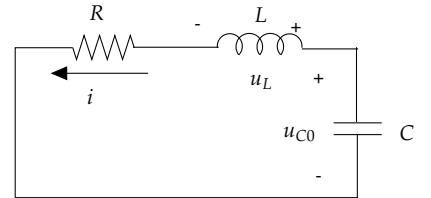


FIGURE 3.17: Circuit RLC série.

Régime apériodique.

$$\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$$

s_1 et s_2 sont deux nombres réels *strictement négatifs* :

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm \alpha_1 < 0$$

Forme générale de la solution :

$$i(t) = K_1 e^{-\alpha t} e^{\alpha_1 t} + K_2 e^{-\alpha t} e^{-\alpha_1 t}$$

Les constantes K_1 et K_2 sont fixées par les conditions initiales :

— $i(0-) = 0 \rightarrow i(0+) = 0$ (i continu dans L)

$$K_1 + K_2 = 0, \quad K_2 = -K_1$$

— $u_R(0+) = 0$ puisque $i(0+) = 0 \rightarrow u_L(0+) = u_C(0+) = u_{C0}$

$$u_L(0+) = L \frac{di}{dt} \Big|_{t=0} = L(K_1 s_1 e^{s_1 t} - K_1 s_2 e^{s_2 t}) \Big|_{t=0} = 2\alpha_1 K_1 L = u_{C0}$$

Il vient finalement

$$i(t) = \frac{u_{C0}}{\alpha_1 L} e^{-\alpha t} \sinh(\alpha_1 t) \quad t \geq 0$$

Régime oscillatoire amorti.

$$\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$$

s_1 et s_2 sont deux nombres complexes conjugués à partie réelle négative :

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

Forme générale de la solution :

$$i(t) = K_1 e^{-\alpha t} e^{j\omega_d t} + K_2 e^{-\alpha t} e^{-j\omega_d t} = e^{-\alpha t} (K'_1 \cos \omega_d t + K'_2 \sin \omega_d t)$$

En appliquant les conditions initiales,

$$i(0+) = 0 \rightarrow K'_1 = 0 \quad u_L(0+) = u_{C0} \rightarrow K'_2 = \frac{u_{C0}}{L\omega_d}$$

il vient finalement

$$i(t) = \frac{u_{C0}}{\omega_d L} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t) \quad t \geq 0$$

Remarque :

$$\text{Si } R \rightarrow 0, \text{ alors} \quad \begin{cases} \alpha \rightarrow 0 \\ \omega_d \rightarrow \omega_0 \end{cases}$$

On a alors un circuit LC, et un régime oscillatoire non amorti, ω_0 est la fréquence de résonance du circuit.

Régime apériodique critique.

$$\alpha^2 - \omega_0^2 = 0$$

L'équation caractéristique possède une seule racine de multiplicité 2 :

$$s_1 = s_2 = -\alpha < 0$$

On doit donc plutôt chercher une solution de la forme

$$i(t) = K_1 t e^{-\alpha t} + K_2 e^{-\alpha t}$$

En appliquant les conditions initiales,

$$i(0+) = 0 \rightarrow K_2 = 0 \quad u_L(0+) = u_{C0} \rightarrow K_1 = \frac{u_{C0}}{L}$$

il vient finalement

$$i(t) = \frac{u_{C0}}{L} t e^{-\alpha t} \quad t \geq 0$$

Exemple : Régime oscillatoire amorti.

Soit un circuit RLC série avec

$$\left. \begin{array}{l} L = 100 \text{ mH} \\ C = 0.1 \mu\text{F} \\ R = 560 \Omega \end{array} \right\} \rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 10^8 \quad \alpha = \frac{R}{2L} = 2800$$

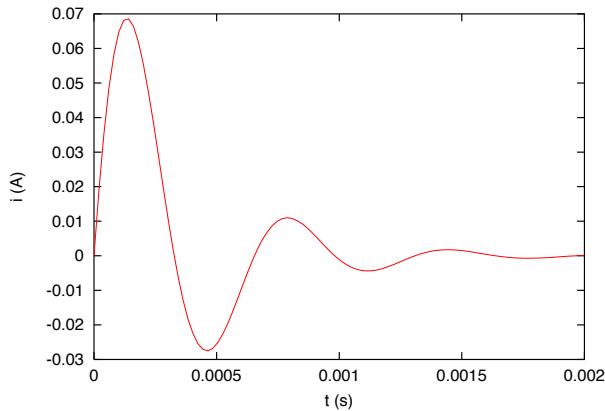
$$\alpha^2 < \omega_0^2 \rightarrow \text{Régime oscillatoire amorti}$$

$$\text{Fréquence d'oscillation : } \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 9600 \text{ rad/s.}$$

$$\text{Amortissement : } \alpha = 2800 \text{ rad/s.}$$

$$\text{Charge initiale du condensateur : } u_{C0} = 100 \text{ V.}$$

$$i(t) = \frac{u_{C0}}{L\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t = 0.1042 e^{-2800t} \sin 9600t \quad t \geq 0$$



Calcul des tensions aux bornes des différents éléments :

$$\begin{aligned} u_R(t) &= Ri(t) \\ u_L(t) &= L \frac{di}{dt} \\ &= -\frac{\alpha u_{C0}}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t + u_{C0} e^{-\alpha t} \cos \omega_d t \\ &= -29.17 e^{-2800t} \sin 9600t + 100 e^{-2800t} \cos 9600t \quad t > 0 \end{aligned}$$

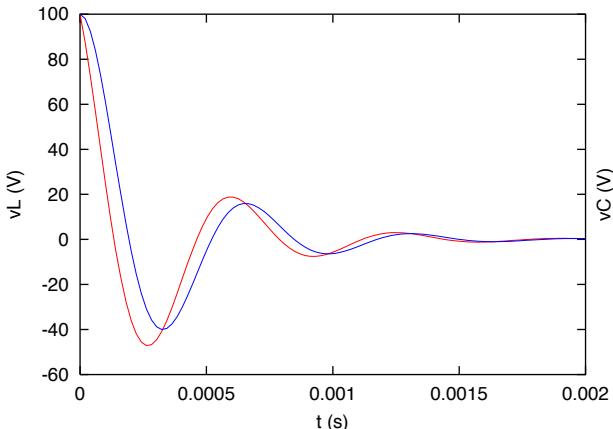
On vérifie que $u_L(0+) = u_{C0} = 100$:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_R(t) + u_L(t) \\ &= \frac{\alpha u_{C0}}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t + u_{C0} e^{-\alpha t} \cos \omega_d t \\ &= 29.17 e^{-2800t} \sin 9600t + 100 e^{-2800t} \cos 9600t \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

On vérifie que $u_C(0+) = u_{C0} = 100$:

$$u_L(t) = -29.17 e^{-2800t} \sin 9600t + 100 e^{-2800t} \cos 9600t \quad t \geq 0 \quad (\text{rouge})$$

$$u_C(t) = 29.17 e^{-2800t} \sin 9600t + 100 e^{-2800t} \cos 9600t \quad t \geq 0 \quad (\text{bleu})$$

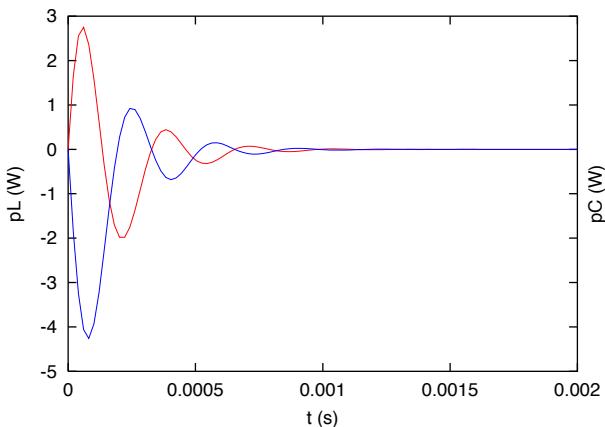


Calcul des puissances consommées par les différents éléments :

$$p_R(t) = R i^2(t) = 6.08 e^{-5600t} \sin^2 9600t > 0 !$$

$$\begin{aligned} p_L(t) &= u_L(t)i(t) \\ &= -3.04 e^{-5600t} \sin^2 9600t + 10.41 e^{-5600t} \cos 9600t \sin 9600t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_C(t) &= -u_C(t)i(t) \\ &= -3.04 e^{-5600t} \sin^2 9600t - 10.41 e^{-5600t} \cos 9600t \sin 9600t. \end{aligned}$$



Cycles d'échanges d'énergie entre L et C

Exemple : Régime apériodique.

Soit un circuit RLC série avec

$$\left. \begin{array}{l} L = 100 \text{ mH} \\ C = 0.1 \mu\text{F} \\ R = 5600 \Omega \end{array} \right\} \rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 10^8 \quad \alpha = \frac{R}{2L} = 28000$$

$$\alpha^2 > \omega_0^2 \rightarrow \text{régime apériodique}$$

Il y a deux fréquences naturelles réelles négatives :

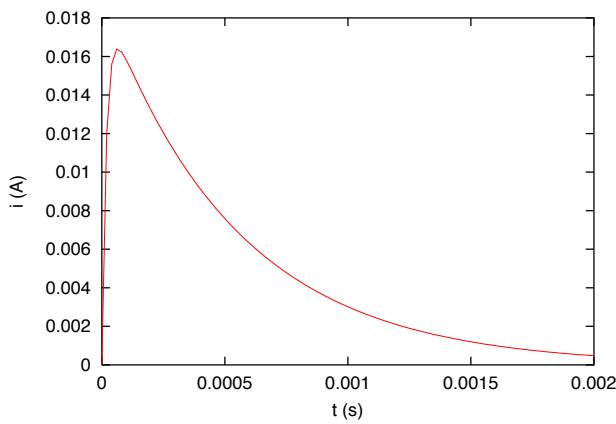
$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -1846.6$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -54153.3$$

Charge initiale du condensateur : $u_{C0} = 100 \text{ V}$.

$$i(t) = \frac{u_{C0}}{2L\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} e^{s_1 t} - \frac{u_{C0}}{2L\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} e^{s_2 t}$$

$$= 0.01912e^{-1846.6t} - 0.01912e^{-54153.3t}$$



Calcul des tensions aux bornes des différents éléments :

$$u_R(t) = Ri(t)$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt}$$

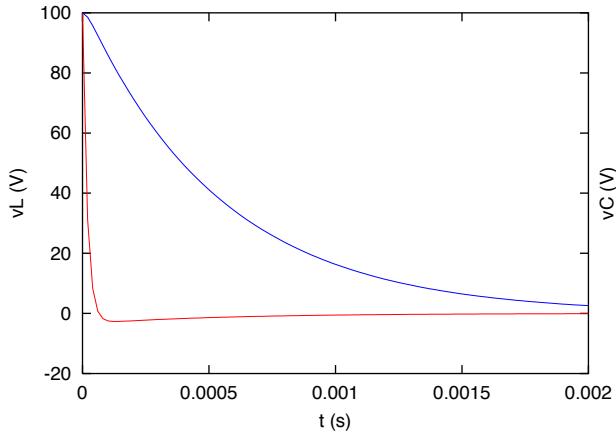
$$= -3.53e^{-1846.6t} + 103.53e^{-54153.3t} \quad t > 0$$

On vérifie que $u_L(0+) = u_{C0} = 100$:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_R(t) + u_L(t) \\ &= 103.53e^{-1846.6t} - 3.53e^{-54153.3t} \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

On vérifie que $u_C(0+) = u_{C0} = 100$:

$$\begin{aligned} u_L(t) &= -3.53e^{-1846.6t} + 103.53e^{-54153.3t} \quad t > 0 \quad (\text{rouge}) \\ u_C(t) &= 103.53e^{-1846.6t} - 3.53e^{-54153.3t} \quad t \geq 0 \quad (\text{bleu}) \end{aligned}$$

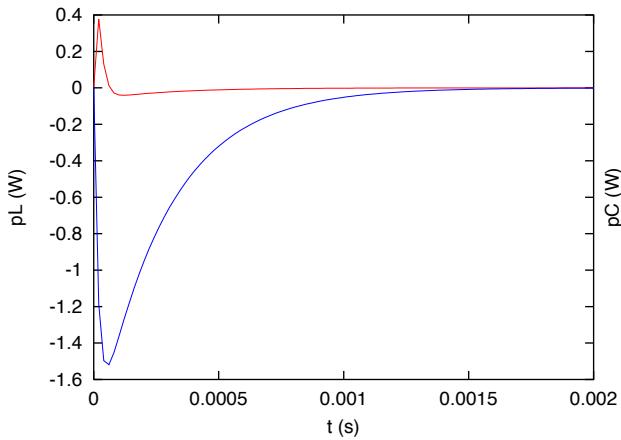


Calcul des puissances consommées par les différents éléments :

$$p_R(t) = R i^2(t) > 0 !$$

$$\begin{aligned} p_L(t) &= u_L(t)i(t) \\ &= -0.067e^{-3693.2t} - 1.98e^{-1.083 \cdot 10^5 t} + 2.05e^{-56000t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_C(t) &= -u_C(t)i(t) \\ &= -1.97e^{-3693.2t} - 0.067e^{-1.083 \cdot 10^5 t} + 2.05e^{-56000t} \end{aligned}$$



Pas de cycles d'échanges d'énergie entre L et C

Exemple : Régime apériodique critique.

On obtient une racine double à l'équation caractéristique si :

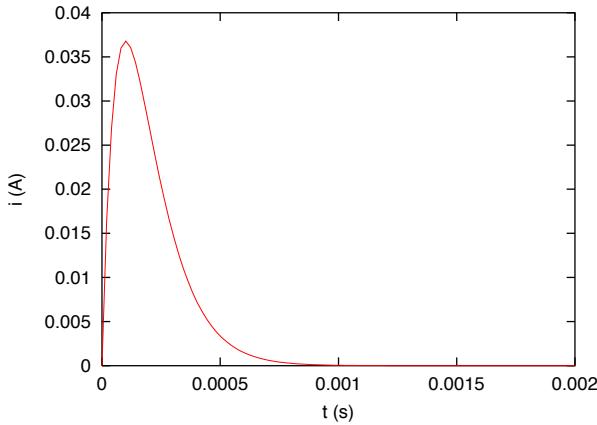
$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{2L}$$

Pour une même valeur de L et C que dans l'exemple précédent, il faut :

$$R = 2000 \Omega.$$

Dans ce cas :

$$\begin{aligned} i(t) &= 1000te^{-10000t} \\ u_R(t) &= 2 \cdot 10^6 te^{-10000t} \\ u_L(t) &= 100e^{-10000t} - 10^6 te^{-10000t} \\ u_C(t) &= 100e^{-10000t} + 10^6 te^{-10000t} \\ i(t) &= 1000te^{-10000t} \end{aligned}$$

**3.3.2 Réponse forcée**

Les deux éléments accumulateurs d'énergie (L et C) sont initialement relaxés.

$$L \frac{di}{dt} + R i + \frac{1}{C} \int_0^t i dx = V_s$$

En dérivant :

$$\begin{aligned} L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i &= 0 \\ \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i &= 0 \end{aligned}$$

On obtient la même forme de solution pour le courant i que dans le cas de la réponse libre. Dans les différentes expressions, il faut remplacer u_{C0} par V_s .

$$u_R(t) = Ri(t) \quad \text{idem réponse libre avec } u_{C0} \text{ remplacé par } V_s$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} \quad \text{idem réponse libre avec } u_{C0} \text{ remplacé par } V_s$$

$$u_C(t) = V_s - u_R(t) - u_L(t)$$

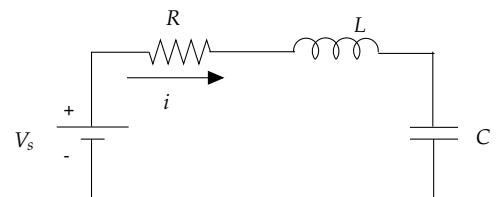


FIGURE 3.18: Circuit RLC série : réponse forcée.

Dans le cas du régime oscillatoire amorti, on trouve :

$$u_C(t) = V_s - \frac{\alpha V_s}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t - V_s e^{-\alpha t} \cos \omega_d t$$

3.4 Comment résoudre un exercice en pratique

- En fonction de la position d'un ou plusieurs **interrupteur(s)**, de **variations définies des sources** alimentant le circuit, identifier les différentes **périodes** et les circuits associés.
- Pour chaque période,
 1. déterminer les **conditions initiales**
 2. obtenir l'**équation différentielle** de la tension (condensateur) ou du courant (inductance) en utilisant les PLK, SLK et les relations $u - i$ aux bornes des éléments
 3. résoudre cette équation différentielle

Conseils

- Utiliser des expressions littérales le plus loin possible, remplacer les valeurs numériques à la fin
- Vérifier la continuité temporelle
- Pour un condensateur : recherche de la tension et puis du courant par dérivation
- Pour une inductance : recherche du courant et puis de la tension par dérivation
- Vérifier les valeurs en fin et début de période par un raisonnement physique

3.5 Détection d'enveloppe de la radio AM

Comme illustré à la Figure 6.3, le premier étage d'amplification (que nous analyserons au Chapitre 7) est suivi d'un dipôle RC série (coupe 5). Ce dipôle est utilisé pour lisser le signal et ainsi terminer la démodulation du signal d'entrée. En effet, sa constante de temps vaut $\tau = R_4 C_4 = 0,0134s$. Or, notre signal porteur a une fréquence comprise entre environ 500 et 1600 kHz, c'est-à-dire une période $T \in [2 \times 10^{-6}; 6.25 \times 10^{-7}]s$. Comme $\tau \gg T$, le condensateur n'a jamais le temps de se décharger, et va toujours suivre le signal. Il va donc "lisser" le signal modulé qui est capté et ainsi fournir le signal modulant, l'enveloppe. De manière générale, cette étape de la démodulation s'effectue à chaque fois que l'on rencontre un condensateur (ce qui explique leur présence abondante dans le circuit).

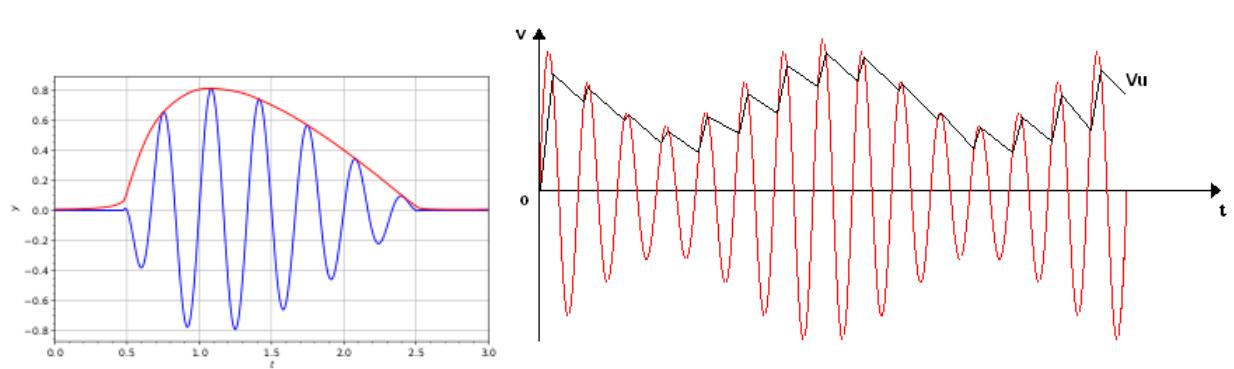
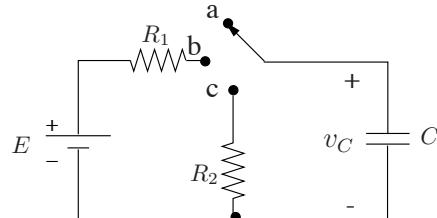


FIGURE 3.19: Lissage parfait vs lissage imparfait d'un signal par un condensateur.

3.6 Exercices

Exercice 3.1 Solution à la page 78.

On considère le circuit suivant



$$R_1 = 100 \text{ k}\Omega, R_2 = 50 \text{ k}\Omega, C = 0.1 \mu\text{F}, E = 400 \text{ V}$$

et les conditions de fonctionnement suivantes :

1. l'interrupteur est initialement en position a, le condensateur étant initialement relaxé ;
2. à l'instant $t = 0$, l'interrupteur bascule en position b et y reste pendant 15 ms ;
3. à l'instant $t = 15 \text{ ms}$, l'interrupteur bascule en position c et y reste indéfiniment.

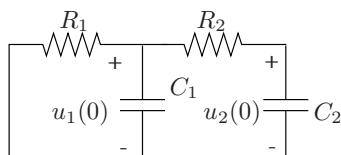
Dans ces conditions :

1. dériver l'expression numérique de la tension v_C aux bornes du condensateur ;
2. tracer le graphe de $v_C(t)$;
3. déterminer le ou les instant(s) auxquels la tension $v_C(t)$ est égale à 200 V.

Exercice 3.2 Solution à la page 80.

Réponse :
 1. $v_C(t) = 400(1 - e^{-100t}) \text{ V}, 0 \leq t < 15 \text{ ms}$
 $v_C(t) = 310.75e^{-200(t-0.015)} \text{ V}, t \geq 15 \text{ ms}$
 3. $t_1 = 6.93 \text{ ms}, t_2 = 17.2 \text{ ms}$

Déterminer la réponse libre du circuit suivant



$$\begin{aligned} R_1 &= 200 \text{ k}\Omega \\ R_2 &= 100 \text{ k}\Omega \\ C_1 &= 5 \mu\text{F} \\ C_2 &= 2.5 \mu\text{F} \end{aligned}$$

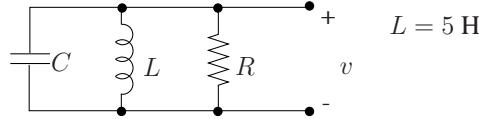
en fonction des conditions initiales :

$$\begin{aligned} u_1(0) &= 2V \\ u_2(0) &= 5V \end{aligned}$$

Réponse :
 $u_1(t) = 2.9e^{-0.63t} - 0.91e^{-6.37t} \text{ V}$
 $u_2(t) = 3.46e^{-0.63t} + 1.54e^{-6.37t} \text{ V}$

Exercice 3.3 Solution à la page 81.

On considère le circuit ci-dessous.



Si la tension aux bornes de ce circuit s'écrit :

$$v(t) = D_1 t e^{-4000t} + D_2 e^{-4000t} \text{ V}, t \geq 0$$

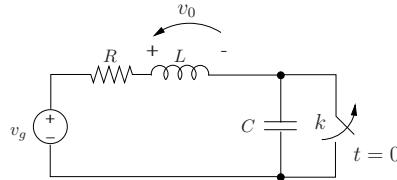
déterminer la valeur des deux éléments R et C ainsi que des deux coefficients D_1 et D_2 sachant que :

1. le courant initial i_0 parcourant l'inductance est égal à 5 mA ;
2. la tension initiale v_0 aux bornes du condensateur est égale à 25 V .

Exercice 3.4 Solution à la page 83.

Réponse :
 $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 12.5 \text{ nF}$, $D_1 = -5 \cdot 10^5$,
 $D_2 = 25$.

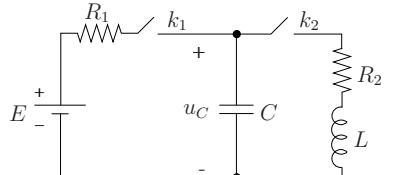
On considère le circuit ci-dessous.



L'interrupteur k est supposé fermé depuis un temps infini. A l'instant $t = 0$ il s'ouvre. On suppose que les valeurs des éléments du circuit sont telles que la réponse est de type oscillatoire amorti. Dériver l'expression de $v_0(t)$ pour $t \geq 0$ en fonction des paramètres v_g , α et ω_d .

Réponse :
 $v_0(t) = -v_g \left(\frac{\omega_d}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2\omega_d} \right) e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \text{ V}, t \geq 0$.

Exercice 3.5 Solution à la page 85.



$$R_1 = 100 \text{ k}\Omega \quad ; \quad R_2 = 500 \Omega \quad ; \quad C = 20 \text{ nF} \quad ; \quad L = 2 \text{ mH} \quad ; \quad E = 100 \text{ V}$$

Le circuit ci-dessus est initialement relaxé, les deux interrupteurs k_1 et k_2 ouverts.

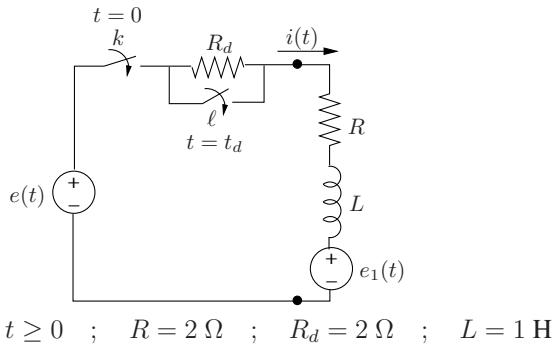
1. A l'instant $t = 0$, l'interrupteur k_1 se ferme, k_2 reste ouvert.
2. A l'instant où la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur atteint 90% de la valeur finale qu'elle atteindrait si on laissait le régime s'établir, l'interrupteur k_1 s'ouvre et k_2 se ferme.

On demande de déterminer l'évolution de la tension $u_C(t)$ pour $t > 0$.

Exercice 3.6 Solution à la page 86.

Réponse :
 $u_C(t) = 100(1 - e^{-500t}) \text{ V}, 0 \leq t < 4.6 \cdot 10^{-3} \text{ s}$
 $u_C(t) = 147e^{-1.25 \cdot 10^5(t - 4.6 \cdot 10^{-3})} \sin(9.68 \cdot 10^4(t - 4.6 \cdot 10^{-3}) + 0.66) \text{ V}, t \geq 4.6 \cdot 10^{-3}$.

On désire procéder au lancement d'un moteur à courant continu en insérant une résistance de démarrage R_d . Cette résistance est mise hors-circuit lorsque le courant délivré par la source devient inférieur à 15 A. On supposera un temps mort de 0.05 s pour la mise hors circuit de la résistance. Le moteur est modélisé par un schéma équivalent simplifié constitué d'une force contre-électromotrice, d'une résistance et d'une inductance comme indiqué dans la figure suivante.



La force contre-électromotrice est supposée avoir la forme suivante :

$$e_1(t) = 100(1 - e^{-t/1.5}) \text{ V}$$

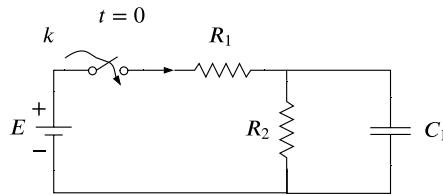
Déterminer l'évolution du courant $i(t)$ pour $t > 0$.

Exercice 3.7 *Solution à la page 89.*

Réponse :

$$i(t) = 3.75 - 33.75e^{-4t} + 30e^{-\frac{2}{3}t} \text{ A}, 0 \leq t < 1.51 \text{ s}$$

$$i(t) = 7.5 - 414.2e^{-2t} + 75e^{-\frac{2}{3}t} \text{ A}, t \geq 1.51 \text{ s}$$



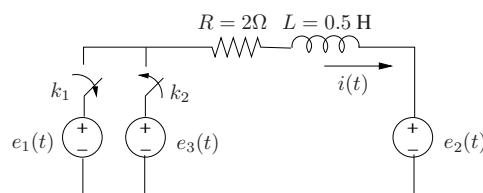
On considère le circuit de la figure ci-dessus et on demande de déterminer l'évolution de la tension $v_{C_1}(t)$ aux bornes du condensateur C_1 si :

- le condensateur est initialement porté au potentiel v_0
- l'interrupteur k est fermé en $t = 0$.

Exercice 3.8 *Solution à la page 92.*

Réponse :

$$v_{C_1}(t) = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau}) + v_0 e^{-t/\tau} \text{ V}, t \geq 0$$



On considère le circuit ci-dessus et les conditions de fonctionnement suivantes :

1. depuis un temps supposé infini, le régime est établi avec l'interrupteur k_1 fermé et l'interrupteur k_2 ouvert

$$e_1 = 120 \text{ V} ; e_2 = 100 \text{ V}$$

2. à l'instant $t = 0$, la f.e.m. e_1 commence à décroître selon

$$e_1(t) = 120e^{-10t}$$

3. soit t_0 l'instant où le courant $i(t)$ s'annule ;
4. après un temps mort de 0.05s, soit à l'instant $t_d = t_0 + 0.05$, l'interrupteur k_1 s'ouvre et l'interrupteur k_2 se ferme, et

$$e_3 = 120 \text{ V}$$

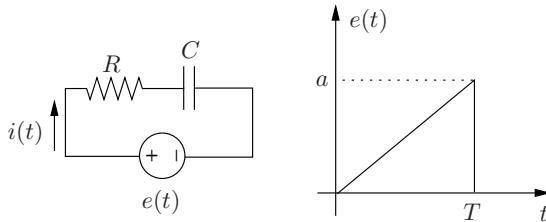
Déterminer dans ces conditions l'évolution du courant $i(t)$.

Réponse :

$$\begin{aligned} i(t) &= 100e^{-4t} - 50 - 40e^{-10t} \text{ A}, 0 \leq t < 0.17 \text{ s} \\ i(t) &= 10 - 32.48e^{-4t} \text{ A}, t \geq 0.17 \text{ s} \end{aligned}$$

3.7 Exercices non résolus

Exercice 3.9

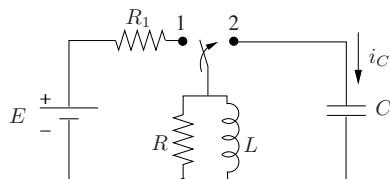


Déterminer l'évolution du courant dans le circuit ci-dessus lorsque la source $e(t)$ délivre le signal représenté sur la partie droite de la figure.

Réponse :

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{a\pi}{RT}(1 - e^{-t/\tau}) \text{ A}, 0 \leq t < T \\ i(t) &= e^{-t/\tau} \left(\frac{a\pi}{RT}(e^{T/\tau} - 1) - \frac{a}{R} e^{T/\tau} \right) \text{ A}, t \geq T \end{aligned}$$

Exercice 3.10



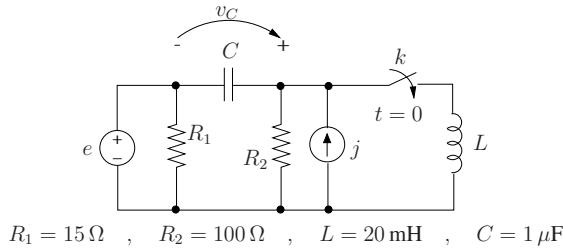
$$R_1 = 100 \text{ k}\Omega ; R = 10 \text{ k}\Omega ; L = 10 \text{ H} ; C = 0.5 \mu\text{F} ; E = 100 \text{ V}$$

On considère le circuit ci-dessus. Durant l'intervalle $t < 0$, l'interrupteur est en position 1 et la source continue E est établie depuis $t = -\infty$. A l'instant

$t = 0$, l'interrupteur bascule instantanément en position 2. Déterminer l'évolution du courant i_C parcourant le condensateur dans l'intervalle $t > 0$. Le condensateur C est supposé initialement relaxé.

Réponse :
 $i_C(t) = 1.026 \cdot 10^{-3} e^{-100t} \sin(436t - 77.1^\circ)$ V,
 $t \geq 0$

Exercice 3.11



On considère le circuit ci-dessus et les conditions de fonctionnement suivantes :

1. depuis un temps supposé infini, le régime est établi avec l'interrupteur k ouvert

$$e = 60 \text{ V} , \quad j = 5 \text{ A}$$

2. à l'instant $t = 0$, l'interrupteur k se ferme et la f.e.m e commence à décroître selon

$$e(t) = 60e^{-5t},$$

j reste constant. L'inductance L est supposée initialement relaxée.

Questions :

1. Déterminer l'évolution de la tension $v_C(t)$ aux bornes du condensateur C pour $t \in [-\infty, +\infty]$.
2. Vérifier les valeurs initiale ($t = 0$) et finale ($t = \infty$) de v_C et justifier par un raisonnement physique.
3. Quelles sont les fréquences naturelles du circuit ?

Réponse :
 $v_C(t) = 440 \text{ V}, t < 0$
 $v_C(t) = -60e^{-5t} + 707.06 e^{-5000t} \sin(5000t + \frac{\pi}{4}) \text{ V}, t \geq 0$

3.8 Solution des exercices

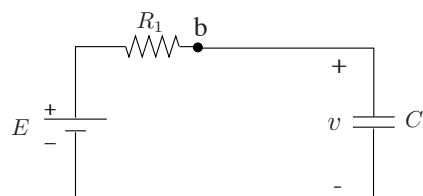
Solution de l'exercice 3.1

1. Période $0 \leq t \leq 15 \text{ ms}$

L'interrupteur bascule en position b . Le condensateur est initialement non chargé :

$$v(0) = 0 \text{ V}.$$

Le circuit se réduit à un simple circuit RC série :



Si on laissait l'interrupteur en position b indéfiniment, le condensateur se chargerait à la valeur de $E = 400 \text{ V}$. La constante de temps du circuit vaut :

$$\tau_1 = R_1 C = 10^5 \cdot 10^{-7} = 0.01 \text{ s} = 10 \text{ ms}.$$

L'expression de $v(t)$ est donc :

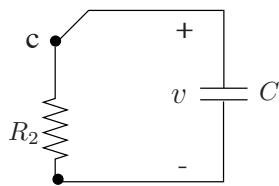
$$v(t) = E \left(1 - e^{-t/\tau_1}\right) = 400 \left(1 - e^{-100t}\right) \text{ V}, \quad 0 \leq t \leq 15 \text{ ms}.$$

La valeur de la tension en $t = 15 \text{ ms}$ est :

$$v(t = 15 \cdot 10^{-3}) = 400 \left(1 - e^{-1.5}\right) = 310.75 \text{ V}.$$

Période $t \geq 15 \text{ ms}$

L'interrupteur bascule en position c . Le circuit devient celui de la figure ci-dessous avec le condensateur C initialement chargé à la tension $v_0 = 310.75 \text{ V}$.



Le condensateur se décharge dans la résistance R_2 . La constante de temps caractérisant cette décharge est :

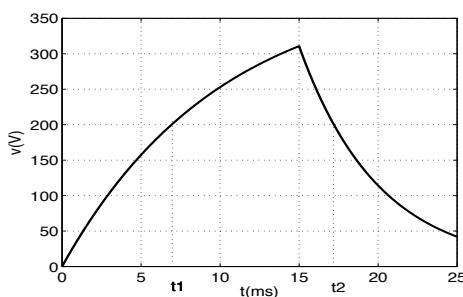
$$\tau_2 = R_2 C = 50 \cdot 10^3 \cdot 10^{-7} = 0.005 \text{ s} = 5 \text{ ms}.$$

La tension v aux bornes de C s'écrit alors :

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 e^{-(t-0.015)/\tau_2} \\ &= 310.75 e^{-200(t-0.015)}, \quad t \geq 15 \text{ ms}. \end{aligned}$$

Remarquons qu'il importe de changer l'origine des temps dans l'expression de v ; la valeur initiale $v_0 = 310.75$ se produisant à l'instant $t = 15 \text{ ms}$. On remplace donc dans l'expression générale de la tension de décharge du condensateur t par $t' = t - 0.015$.

2. Tracé de $v(t)$



3. Instants auxquels $v = 200 \text{ V}$

D'après le tracé de $v(t)$, on remarque que v atteint 200 V à la fois dans la période de charge ($0 \leq t \leq 0.015$) et dans la période de décharge ($t \geq 0.015$).

1. période de charge : il faut

$$\begin{aligned} 400 - 400 e^{-100t_1} &= 200 \\ e^{-100t_1} &= 0.5 \\ t_1 &= \frac{\ln 0.5}{-100} = 6.93 \text{ ms} \end{aligned}$$

2. période de décharge : il faut

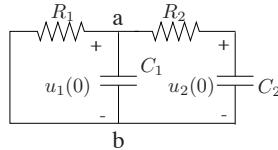
$$\begin{aligned} 310.75 e^{-200(t_2-0.015)} &= 200 \\ e^{-200t_2} &= \frac{200}{310.75 e^3} = 0.03204 \\ t_2 &= 17.2 \text{ ms}. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3.2

On recherche la réponse libre avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} u_1(0) &= u_{10} = 2 \text{ V} \\ u_2(0) &= u_{20} = 5 \text{ V} \end{aligned}$$

comme indiqué à la figure suivante :



La PLK écrite aux noeuds a et b fournit :

$$C_1 \frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_1 - u_2}{R_2} = 0 \quad (3.1)$$

$$C_2 \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2 - u_1}{R_2} = 0 \quad (3.2)$$

Il faut résoudre cet ensemble de 2 équations différentielles à 2 inconnues u_1 et u_2 . De (3.2), on tire :

$$u_1 = R_2 C_2 \frac{du_2}{dt} + u_2. \quad (3.3)$$

Remplaçant dans (3.1), on déduit l'équation différentielle pour u_2 :

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_1 C_1} \right) \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{R_1 R_2 C_1 C_2} = 0.$$

La solution générale de cette équation différentielle à coefficients constants s'écrit :

$$u_2(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

avec s_1, s_2 les solutions de l'équation caractéristique :

$$s^2 + \left(\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_1 C_1} \right) s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} = 0.$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = \left(\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_1 C_1} \right)^2 - \frac{4}{R_1 R_2 C_1 C_2}.$$

Il peut aussi s'écrire :

$$\Delta = \left(\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} - \frac{1}{R_1 C_1} \right)^2 + \frac{4}{R_1 R_2 C_1^2} > 0.$$

On remarque que ce discriminant ne peut être négatif. Les solutions de l'équation caractéristique sont donc 2 nombres réels quelles que soient les valeurs des éléments R_1, R_2, C_1, C_2 . La réponse libre de tout circuit RC est donc toujours de type apériodique ; elle ne peut être de forme oscillante.

Les racines de l'équation caractéristique, ou fréquences naturelles du circuit, sont donc :

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_1} \right) \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}.$$

On remarque que lorsque les éléments sont passifs ($R_1, R_2, C_1, C_2 > 0$), ces racines sont 2 nombres négatifs, la réponse libre s'atténue donc avec le temps (circuit stable).

Remplaçant par les valeurs numériques, on trouve :

$$s_1 = -0.63 \quad \text{et} \quad s_2 = -6.37.$$

De (3.3), on déduit l'expression de la tension u_1 :

$$\begin{aligned} u_1 &= (R_2 C_2 s_1 + 1) K_1 e^{-0.63t} + (R_2 C_2 s_2 + 1) K_2 e^{s_2 t} \\ &= 0.84 K_1 e^{-0.63t} - 0.59 K_2 e^{-6.37t}. \end{aligned}$$

Les constantes K_1 et K_2 se déduisent des conditions initiales pour u_1 et u_2 . On a :

$$\begin{aligned} u_1(0) &= u_{10} = 2 = 0.84 K_1 - 0.59 K_2 \\ u_2(0) &= u_{20} = 5 = K_1 + K_2. \end{aligned}$$

On trouve :

$$K_1 = 3.46 \quad \text{et} \quad K_2 = 1.54.$$

Finalement, les expressions de u_1 et u_2 sont :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 2.9 e^{-0.63t} - 0.91 e^{-6.37t} \text{ V} \\ u_2(t) &= 3.46 e^{-0.63t} - 1.54 e^{-6.37t} \text{ V}. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3.3

De l'expression de $v(t)$:

$$v(t) = D_1 t e^{-4000t} + D_2 e^{-4000t}, \quad t \geq 0,$$

on déduit que :

1. le régime est un régime apériodique critique

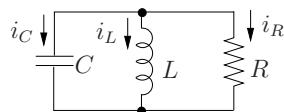
2. L'équation caractéristique relative à l'équation différentielle qui caractérise v admet une racine double :

$$s_1 = -4000.$$

Recherchons cette équation différentielle. La PLK écrite pour le circuit de la ci-dessous fournit :

$$i_R + i_L + i_C = 0$$

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v(x) dx + i_0 + C \frac{dv}{dt} = 0$$



Dérivant cette relation, on trouve :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v = 0.$$

L'équation caractéristique correspondante est :

$$s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC} = 0.$$

Ses racines peuvent se mettre sous la forme :

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

avec

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2RC}, \text{ le coefficient d'amortissement} \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ la fréquence de résonance du circuit.}\end{aligned}$$

Dans le cas considéré ici, nous avons :

$$s_1 = s_2 = -\alpha.$$

soit

$$4000 = \frac{1}{2RC}.$$

Nous savons que le discriminant de l'équation caractéristique est nul et donc que :

$$\alpha^2 - \omega_0^2 = \left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC} = 0$$

ou en remplaçant les valeurs numériques connues :

$$(4000)^2 - \frac{1}{5C} = 0.$$

On déduit la valeur de la capacité :

$$C = \frac{1}{5 \cdot (4000)^2} = 12.5 \text{ nF}$$

et comme

$$\frac{1}{2RC} = 4000,$$

on déduit la valeur de la résistance

$$R = \frac{1}{2 \cdot 12.5 \cdot 10^9 \cdot 4000} = 10 \text{ k}\Omega.$$

Les conditions initiales fournissent :

$$v(0) = v_0 = v(t)|_{t=0} = D_2.$$

Dès lors,

$$D_2 = 25 \text{ V}.$$

D'autre part, la continuité du courant dans l'inductance impose :

$$i_L(+) = i_L(0^-) = i_0 = 5 \text{ mA}.$$

Or

$$i_C(0^+) = -i_R(0^+) - i_L(0^+)$$

avec

$$\begin{aligned} i_C(0^+) &= C \frac{dv}{dt} \Big|_{t=0} = C(D_1 - 4000 D_2) \\ i_R(0^+) &= \frac{v_0}{R} \\ i_L(0^+) &= i_0 \\ D_1 &= -\frac{v_0}{RC} - \frac{i_0}{C} + 4000 v_0 \\ &= -5 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

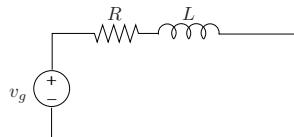
et finalement

$$v(t) = -3.2 \cdot 10^5 t e^{-4000t} + 25 e^{-4000t}.$$

Solution de l'exercice 3.4

1. Période $t < 0$

Le circuit considéré se réduit à



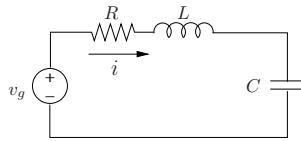
Le régime est établi et l'inductance est parcourue par un courant :

$$i_{L0} = \frac{v_g}{R}.$$

La tension à ses bornes est nulle.

2. Période $t \geq 0$

Le circuit devient



Les conditions initiales sont :

$$\begin{aligned}v_{C0} &= 0 \\i_{L0} &= \frac{v_g}{R}.\end{aligned}$$

La réponse du circuit est oscillatoire amortie. Le courant i parcourant le circuit peut donc s'écrire :

$$i(t) = A e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \text{ A}, \quad t \geq 0$$

avec α , l'amortissement, égal à $R/2L$ et ω_d , la fréquence d'oscillation.

Les constantes A et B sont fixées par les conditions initiales :

$$\begin{aligned}i(t=0) &= i_{L0} = \frac{v_g}{R} = A \\v_C(t=0) &= 0.\end{aligned}$$

Par application de la SLK, on écrit :

$$v_C(t) = v_g - Ri - L \frac{di}{dt}.$$

En $t = 0$, on a :

$$v_g = Ri + L \frac{di}{dt}$$

soit

$$\begin{aligned}v_g &= RA - A\alpha L + BL\omega_d \\&= v_g - \frac{v_g}{R} \alpha L + BL\omega_d.\end{aligned}$$

On déduit :

$$B = \frac{v_g}{R} \cdot \frac{R}{2L} \cdot L \cdot \frac{1}{L\omega_d} = \frac{v_g}{2L\omega_d}$$

et

$$i(t) = \frac{v_g}{R} e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + \frac{v_g}{2L\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \text{ A}, \quad t \geq 0.$$

On déduit finalement l'expression de $v_0(t)$:

$$\begin{aligned}v_0(t) &= L \frac{di}{dt} \\&= -\frac{v_g}{R} \cdot \frac{R}{2L} \cdot L e^{-\alpha t} \cos \omega_d t - \frac{v_g}{R} L \omega_d e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \\&\quad - \frac{v_g}{2L\omega_d} L \alpha e^{-\alpha t} \sin \omega_d t + \frac{v_g L}{2L\omega_d} \omega_d e^{-\alpha t} \cos \omega_d t \\&= -v_g \left(\frac{L\omega_d}{R} + \frac{\alpha}{2\omega_d} \right) e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \\&= -v_g \left(\frac{\omega_d}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2\omega_d} \right) e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \text{ V}, \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3.5

Il faut considérer les deux périodes temporelles suivantes :

1. $0 \leq t < t_s$, avec t_s l'instant auquel la tension $u_C(t)$ atteint 90% de la valeur finale qu'elle atteindrait si on laissait le régime s'établir, interrupteurs k_1 fermé et k_2 ouvert ;
2. $t_s \leq t < \infty$, interrupteurs k_1 ouvert et k_2 fermé.

1ère période : $0 \leq t < t_s$

Le circuit étant initialement relaxé, on a $u_C(0) = 0$. Le condensateur se charge et la tension à ses bornes s'écrit (réponse forcée, circuit RC série) :

$$u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau}) = 100(1 - e^{-500t})$$

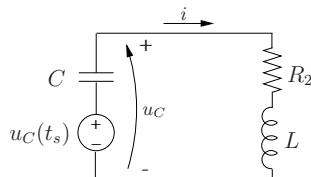
avec la constante de temps $\tau = R_1 C = 2 \cdot 10^{-3}$ s. Si on laissait le régime s'établir, la valeur finale atteinte par u_C serait bien entendu E . En t_s on doit donc avoir :

$$(1 - e^{-t_s/\tau}) = 0.9 \Leftrightarrow t_s = -\tau \ln 0.1 = 4.6 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

2ème période : $t_s \leq t < \infty$

Appliquons le changement de variable $t' = t - t_s$.

La condition initiale du condensateur est donnée par : $u_C(t' = 0) = u_C(t_s) = 90$ V. La forme du circuit durant cette période est



Le condensateur initialement chargé est remplacé par son schéma équivalent constitué du condensateur C initialement relaxé connecté en série avec la source de tension $u_C(t_s)$, tension initiale du condensateur.

Le circuit est un circuit RLC série dont on recherche la réponse libre. Les paramètres α , amortissement, et ω_0 , fréquence de résonance sont donnés par :

$$\alpha = \frac{R_2}{2L} = 1.25 \cdot 10^5 \quad , \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1.5811 \cdot 10^5$$

On calcule :

$$\alpha^2 - \omega_0^2 = -9.375 \cdot 10^9 < 0$$

Le régime est de type oscillatoire amorti ; les fréquences naturelles du circuit sont :

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_d = -1.25 \cdot 10^5 \pm j9.68 \cdot 10^4$$

Le courant circulant dans le circuit s'écrit :

$$\begin{aligned} i(t') &= \frac{u_C(t_s)}{\omega_d L} e^{-\alpha t'} \sin(\omega_d t') \\ &= 0.4648 e^{-1.25 \cdot 10^5 t'} \sin(9.68 \cdot 10^4 t') \end{aligned}$$

La tension aux bornes du condensateur se déduit comme suit :

$$\begin{aligned} u_C(t') &= R_2 i(t') + L \frac{di}{dt} \\ &= 116.19 e^{-1.25 \cdot 10^5 t'} \sin(9.68 \cdot 10^4 t') + 90 e^{-1.25 \cdot 10^5 t'} \cos(9.68 \cdot 10^4 t') \end{aligned}$$

Cette expression peut aisément se mettre sous la forme générale :

$$A \sin(\omega_d t + \phi)$$

En effet :

$$A \sin(\omega_d t + \phi) = A \cos \phi \sin \omega_d t + A \sin \phi \cos \omega_d t$$

On identifie :

$$\begin{aligned} A \sin \phi &= 90 \quad , \quad A \cos \phi = 116.19 \\ \text{et } A &= \sqrt{90^2 + 116.19^2} = 147 \quad , \quad \phi = \arctan \frac{90}{116.19} = 0.66 \text{ rad} \end{aligned}$$

Finalement :

$$u_C(t') = 147 e^{-1.25 \cdot 10^5 t'} \sin(9.68 \cdot 10^4 t' + 0.66)$$

Remplaçant t' par $t - t_s$:

$$u_C(t) = 147 e^{-1.25 \cdot 10^5 (t - 4.6 \cdot 10^{-3})} \sin(9.68 \cdot 10^4 (t - 4.6 \cdot 10^{-3}) + 0.66)$$

Solution de l'exercice 3.6

Il faut distinguer les deux périodes temporelles suivantes.

- Période de lancement du moteur $0 \leq t \leq t_d$.

Durant cette période, la résistance de démarrage R_d est insérée dans le circuit, l'interrupteur ℓ est ouvert. On observe l'évolution du courant jusqu'à ce que celui-ci tombe sous 15 A. Soit t_a cet instant. On attend 0.05 s avant de mettre la résistance R_d hors circuit et de fermer l'interrupteur ℓ . On a

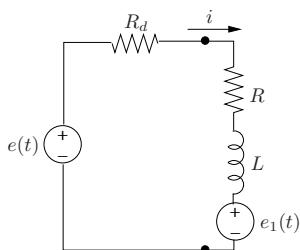
$$t_d = t_a + 0.05$$

- Résistance de démarrage hors service : $t > t_d$.

1ère période : $0 \leq t < t_d$

Durant cette période, le circuit est celui représenté ci-dessous, avec :

$$\begin{aligned} e(t) &= E = 115 \\ e_1(t) &= 100(1 - e^{-\frac{2}{3}t}) \end{aligned}$$



L'équation différentielle relative au courant $i(t)$ circulant dans le circuit s'écrit :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_{eq}}{L} i = \frac{e(t) - e_1(t)}{L}$$

avec $R_{eq} = R + R_d$

La solution générale de cette équation comprend d'une part la solution générale de l'équation homogène

$$i_h = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} \quad \text{avec la constante de temps } \tau_1 = \frac{L}{R_{eq}} = 0.25$$

et d'autre part la solution particulière de l'équation non homogène qui peut s'écrire

$$i_p = B + Ce^{-\frac{2}{3}t}.$$

On identifie :

$$\begin{aligned} \frac{115 - 100 + 100e^{-\frac{2}{3}t}}{L} &= \frac{R_{eq}}{L}(B + Ce^{-\frac{2}{3}t}) - \frac{2}{3L}Ce^{-\frac{2}{3}t} \\ B &= \frac{15}{R_{eq}} = 3.75 \quad , \quad C = \frac{100}{R_{eq} - \frac{2}{3}} = 30 \end{aligned}$$

Finalement :

$$i(t) = i_h + i_p = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + 3.75 + 30e^{-\frac{2}{3}t}.$$

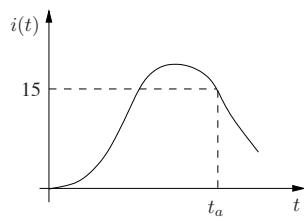
La continuité du courant dans l'inductance en $t = 0$ impose

$$i_L(0) = i(0) = A + 3.75 + 30 = 0 \Rightarrow A = -33.75.$$

On déduit :

$$i(t) = 3.75 - 33.75e^{-4t} + 30e^{-\frac{2}{3}t}, \quad 0 \leq t < t_d.$$

Cherchons maintenant l'instant t_a tel que $i(t_a) = 15$ A. L'allure du courant $i(t)$ est représentée par



Il faut résoudre l'équation non linéaire :

$$3.75 - 33.75e^{-4t} + 30e^{-\frac{2}{3}t} - 15 = 0 \equiv f(t) = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned} i(0) &= 0 \\ i(1) &= 18.53 \\ i(2) &= 11.65 \end{aligned}$$

La solution cherchée se trouve entre 1 et 2. On peut soit procéder par recherche dichotomique en divisant à chaque pas l'intervalle encadrant la solution par 2, soit appliquer la méthode de Newton. Celle-ci consiste à calculer la suite de points

$$t^{(k+1)} = t^{(k)} - \frac{f(t^{(k)})}{f'(t^{(k)})} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

jusqu'à ce que $|f(t^{(k)})| < \epsilon$, où ϵ est une tolérance.

Soit $t^{(0)} = 1$, on a :

$$f'(t) = 135 e^{-4t} - 20 e^{-\frac{2}{3}t}.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} t^{(1)} &= t^{(0)} - \frac{f(t^{(0)})}{f'(t^{(0)})} = 1.453 \\ t^{(2)} &= t^{(1)} - \frac{f(t^{(1)})}{f'(t^{(1)})} = 1.458 \end{aligned}$$

On a $f(t^{(2)}) = 8 \cdot 10^{-4}$. On juge la précision suffisante et $t_d = t^{(2)} = 1.458$ s. Dès lors :

$$t_d = 1.458 + 0.05 = 1.508 \text{ s}$$

A cet instant, le courant parcourant le circuit vaut $i(1.508) = 14.647 \text{ A}$.

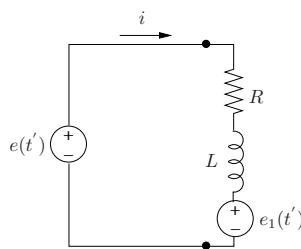
2ème période : $t \geq t_d$

Fixons une nouvelle origine des temps en $t = t_d$. Pour cela, on introduit le changement de variable

$$t' = t - t_d.$$

A l'instant de basculement t_d , l'inductance est parcourue par le courant $i(t_d)$.

Durant cette période, le circuit prend la forme de



Les excitations e et e_1 s'écrivent pour la période $t > t_d$:

$$\begin{aligned} e(t') &= E = 115 \\ e_1(t') &= 100 \left(1 - e^{-\frac{2}{3}(t'+t_d)} \right) \end{aligned}$$

L'équation différentielle relative au courant $i(t')$ circulant dans le circuit s'écrit :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{e(t') - e_1(t')}{L}$$

On calcule pour cette période temporelle :

$$i(t') = Ae^{-\frac{t'}{2}} + B + Ce^{-\frac{2}{3}t'}$$

avec la constante de temps $\tau_2 = \frac{L}{R} = 0.5$. On identifie :

$$\begin{aligned}\frac{115 - 100}{L} &= \frac{R}{L}B \Rightarrow B = 7.5 \\ \frac{100e^{-\frac{2}{3}t_d}}{L} &= \frac{R}{L}B - \frac{2}{3}C \Rightarrow C = 27.44 \\ i(t' = 0) = i_L(t_d) &= 14.647 \Rightarrow A = -20.3\end{aligned}$$

Le courant, exprimé selon la nouvelle variable temporelle t' , s'écrit :

$$i(t') = 7.5 - 20.3e^{-2t'} + 27.44e^{-\frac{2}{3}t'}, \quad t' > 0$$

où, en fonction de t , en remplaçant t' par $t - t_d$:

$$\begin{aligned}i(t) &= 7.5 - 20.3e^{-2(t-t_d)} + 27.44e^{-\frac{2}{3}(t-t_d)}, \quad t > t_d \\ &= 7.5 - 414.2e^{-2t} + 75e^{-\frac{2}{3}t}, \quad t > t_d.\end{aligned}$$

Si la résistance de démarrage n'était pas insérée dans le circuit, le courant, pour toute la période temporelle $t \geq 0$, s'obtiendrait comme suit :

$$i'(t) = Ae^{-\frac{t}{2}} + B + Ce^{-\frac{2}{3}t}$$

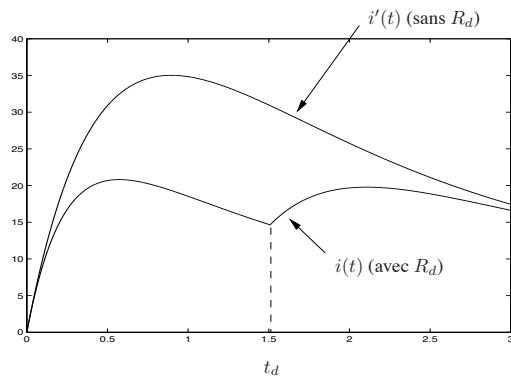
On identifie :

$$B = 7.5, \quad C = 75, \quad A = -82.5$$

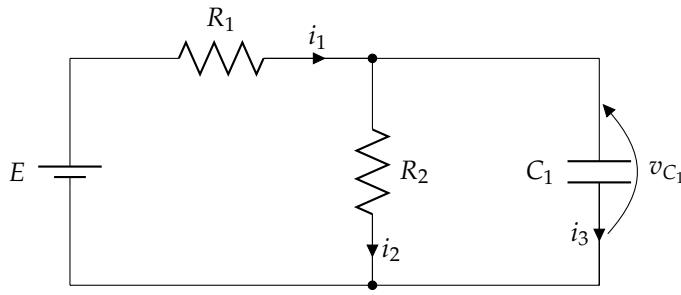
et

$$i'(t) = 7.5 - 82.5e^{-2t} + 75e^{-\frac{2}{3}t}, \quad t \geq 0$$

La figure ci-dessous compare les 2 courants $i(t)$ et $i'(t)$ et montre l'influence de la résistance R_d qui permet de limiter l'amplitude du courant dans les premiers instants qui suivent le démarrage du moteur.



Solution de l'exercice 3.7



Conditions initiales :

- $v_{C_1}(0-) = v_0$
- $i_1(0-) = i_2(0-) = i_3(0-) = 0$

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad \text{PLK} \quad (3.4)$$

$$R_2 i_2 = v_{C_1} \quad \text{SLK} \quad (3.5)$$

$$R_1 i_1 = E - v_{C_1} \quad \text{SLK} \quad (3.6)$$

$$i_3 = C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} \quad (3.7)$$

Donc

$$C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{E - v_{C_1}}{R_1} - \frac{v_{C_1}}{R_2} \quad (3.8)$$

$$C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} + v_{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{E}{R_1} \quad (3.9)$$

$$\frac{dv_{C_1}}{dt} + \frac{1}{\tau_1} v_{C_1} = \frac{E}{\tau_2} \quad (3.10)$$

Avec

$$\tau_1 = \frac{C_1 R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.11)$$

$$\tau_2 = C_1 R_1 \quad (3.12)$$

L'équation homogène

$$\frac{dv_{C_1}}{dt} + \frac{1}{\tau_1} v_{C_1} = 0$$

a pour solution

$$v_{C_1}^h(t) = K_1 e^{s_1 t}$$

avec $s_1 = \tau_1^{-1}$. Une solution particulière de

$$\frac{dv_{C_1}}{dt} + \frac{1}{\tau_1} v_{C_1} = \frac{E}{\tau_2}$$

est

$$v_{C_1}^p(t) = K_2$$

avec

$$K_2 = \frac{\tau_1 E}{\tau_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E.$$

Donc

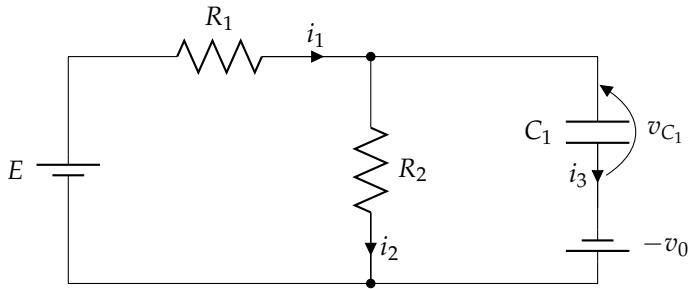
$$v_{C_1}(t) = K_1 e^{-t/\tau_1} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

Tenant compte de $v_{C_1}(0-) = v_0$ et par continuité de la tension aux bornes du condensateur, on obtient $K_1 = v_0 - \frac{R_2}{R_1+R_2}E$. Et donc finalement

$$v_{C_1}(t) = \left(v_0 - \frac{R_2}{R_1+R_2}E \right) e^{-t/\tau_1} + \frac{R_2}{R_1+R_2}E$$

En régime établi, c'est simplement la formule du diviseur de tension qui s'applique, car aucun courant ne passe plus par la branche du condensateur.

Alternativement, on aurait pu remplacer le condensateur initialement chargé par un condensateur relaxé en série avec une source (indépendante) de tension de valeur v_0 .



Conditions initiales :

- $v_{C_1}(0-) = 0$
- $i_1(0-) = i_2(0-) = i_3(0-) = 0$

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad \text{PLK} \quad (3.13)$$

$$R_2 i_2 = v_{C_1} + v_0 \quad \text{SLK} \quad (3.14)$$

$$R_1 i_1 = E - v_{C_1} - v_0 \quad \text{SLK} \quad (3.15)$$

$$i_3 = C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} \quad (3.16)$$

Donc

$$C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{E - v_{C_1} - v_0}{R_1} - \frac{v_{C_1} + v_0}{R_2} \quad (3.17)$$

$$C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} + v_{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{E}{R_1} - \frac{v_0}{R_1} - \frac{v_0}{R_2} \quad (3.18)$$

$$\frac{dv_{C_1}}{dt} + \frac{1}{\tau_1} v_{C_1} = \frac{E}{\tau_2} - \frac{v_0}{\tau_1} \quad (3.19)$$

Avec

$$\tau_1 = \frac{C_1 R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.20)$$

$$\tau_2 = C_1 R_1 \quad (3.21)$$

L'équation homogène

$$\frac{dv_{C_1}}{dt} + \frac{1}{\tau_1} v_{C_1} = 0$$

a pour solution

$$v_{C_1}^h(t) = K_1 e^{s_1 t}$$

avec $s_1 = \tau_1^{-1}$. Une solution particulière de

$$\frac{dv_{C_1}}{dt} + \frac{1}{\tau_1} v_{C_1} = \frac{E}{\tau_2} - \frac{v_0}{\tau_1}$$

est

$$v_{C_1}^p(t) = K_2$$

avec

$$K_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E - v_0.$$

Donc

$$v_{C_1}(t) = K_1 e^{-t/\tau_1} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} E - v_0.$$

Tenant compte de $v_{C_1}(0^-) = 0$ et par continuité de la tension aux bornes du condensateur, on obtient

$$K_1 = v_0 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} E.$$

Finalement

$$v_{C_1}(t) = \left(v_0 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} E \right) e^{-t/\tau_1} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} E - v_0$$

Le terme additionnel $-v_0$ compense la source de tension introduite.

Solution de l'exercice 3.8

1. Le point 1 nous dit que nous sommes en régime établi, la bobine se comporte comme un court-circuit et ne présente aucune ddp. Le courant i est dicté par

$$i(t) = \frac{120 - 100}{2} = 10 A, \quad t < 0.$$

2. Ensuite, nous avons

$$e_1(t) - Ri(t) - L \frac{di(t)}{dt} - 100 = 0,$$

avec $i(0^-) = 10A$. Donc

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{1}{L} (e_1(t) - 100).$$

Cette équation admet comme solution particulière $i_p(t) = K_1 + K_2 e^{-10t}$.

Identifions les paramètres :

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} (e_1(t) - 100) &= -10K_2 e^{-10t} + \frac{R}{L} (K_1 + K_2 e^{-10t}) \\ &= K_2 e^{-10t} \left(\frac{R}{L} - 10 \right) + \frac{R}{L} K_1. \end{aligned}$$

En identifiant la partie constante et la partie en e^{-10t} , on obtient

$$i_p(t) = -50 - 40e^{-10t}.$$

Une solution de l'équation homogène est

$$i_h(t) = K_3 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

avec $\tau = 0.25s$. Comme par continuité $i(0^+) = 10A$, on a

$$K_3 e^{-4t} - 50 - 40e^{-10t} = 10$$

en $t = 0^+$, donc $K_3 = 100$.

3. Le courant s'annule à t_0 tel que

$$100e^{-4t} - 50 - 40e^{-10t_0} = 0,$$

ce qui donne $t_0 \approx 0.12s$.

4. En $t_1 \approx 0.17s$, le courant vaut $-6.65A$. C'est la condition initiale de cette dernière phase. Si on translate l'origine du temps en t_1 , on a maintenant une solution de type réponse libre

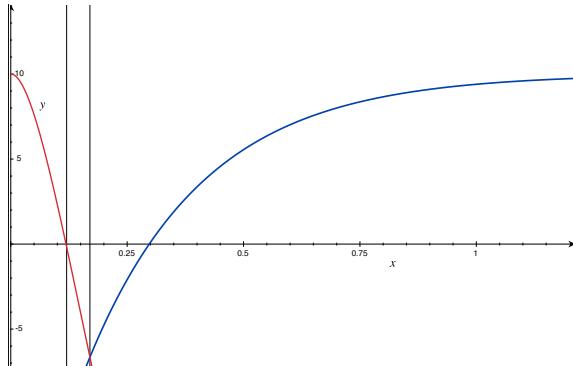
$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{20}{L},$$

et donc $i(t) = \frac{20}{R} + Ke^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{L}{R}$, et donc

$$K = -6.65 - \frac{20}{R} = -16.65.$$

Finalement, et en re-translatant l'origine des temps, $i(t) = 10 - 16.65e^{-4(t-t_1)}$.

La dynamique est illustrée à la figure ci-dessous.



4

Régime sinusoïdal établi

4.1 Définition

Une *source sinusoïdale* est une source indépendante qui délivre une tension (ou un courant) de forme sinusoïdale (Figure 4.1) ou cosinusoïdale¹ (un sinus étant un cosinus déphasé) :

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

1. On désigne aussi parfois ce signal par si-gnal cisoïdal pour englober les deux cas.

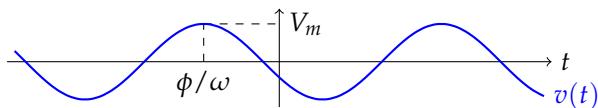


FIGURE 4.1: Source sinusoïdale.

Ce signal périodique est caractérisé par :

- son **amplitude** sous forme de la valeur maximale V_m (aussi dénommée valeur de crête),
- sa phase : ϕ rad,
- sa période : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ s
- ou sa fréquence : $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ Hz
- ou sa pulsation : ω rad/s.

Valeur efficace. Plutôt que par sa valeur de crête, on caractérise souvent un signal par sa *valeur efficace*.

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt} \\ &= \frac{V_m}{\sqrt{2}} \simeq 0.707V_m \end{aligned}$$

C'est la valeur que devrait présenter une tension continue pour dissiper dans une résistance une puissance égale à la puissance *moyenne* dissipée par la tension sinusoïdale. Par la suite, on désignera V_{eff} par V .

4.2 Les phaseurs

Un *phaseur* est un nombre complexe associé à une grandeur sinusoïdale $A_m \cos(\omega t + \phi) = \sqrt{2}A \cos(\omega t + \phi)$

$$\bar{A} = Ae^{j\phi} = A\angle\phi$$

À un phaseur, on associe aussi un vecteur tournant :

$$\bar{A}e^{j\omega t}$$

Il peut être représenté (Figure 4.2) dans le plan complexe par un vecteur tournant à la vitesse angulaire ω . Le phaseur correspond à la position de ce vecteur en $t = 0$.

Il y a une correspondance biunivoque entre signal sinusoïdal et phaseur.

Sinusoïde	Phaseur
$A_m \cos(\omega t + \phi)$	$\bar{A} = Ae^{j\phi}$
$= (A_m \cos \phi) \cos \omega t$	$= (A \cos \phi)$
$+ (-A_m \sin \phi) \sin \omega t$	$+ j(A \sin \phi)$

Pour passer d'un phaseur à une représentation temporelle, on applique donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\sqrt{2}\bar{A}e^{j\omega t}] &= \operatorname{Re}[\sqrt{2}Ae^{j(\omega t+\phi)}] \\ &= A_m \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Un phaseur contient donc deux des trois éléments qui caractérisent un signal sinusoïdal : son amplitude et sa phase.

4.2.1 Propriétés des phaseurs

Linéarité. Soient deux signaux sinusoïdaux :

$$v_1(t) = \operatorname{Re}[\sqrt{2}\bar{V}_1e^{j\omega t}] \quad \text{et} \quad v_2(t) = \operatorname{Re}[\sqrt{2}\bar{V}_2e^{j\omega t}]$$

Une combinaison linéaire :

$$a_1v_1(t) + a_2v_2(t) = a_1\operatorname{Re}[\sqrt{2}\bar{V}_1e^{j\omega t}] + a_2\operatorname{Re}[\sqrt{2}\bar{V}_2e^{j\omega t}]$$

avec a_1 et a_2 , 2 nombres réels.

$$a_1\operatorname{Re}[\sqrt{2}\bar{V}_1e^{j\omega t}] + a_2\operatorname{Re}[\sqrt{2}\bar{V}_2e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\sqrt{2}(a_1\bar{V}_1 + a_2\bar{V}_2)e^{j\omega t}]$$

La combinaison linéaire des signaux est représentée par le phaseur :

$$a_1\bar{V}_1 + a_2\bar{V}_2$$

Le phaseur correspondant à une combinaison linéaire de signaux sinusoïdaux est égal à la combinaison linéaire des phaseurs des différents signaux.

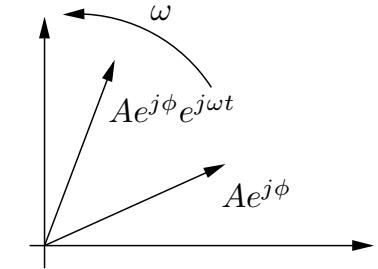


FIGURE 4.2: Vecteur tournant.

TABLE 4.1: Linéarité.

Dérivation.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (V_m \cos(\omega t + \phi)) &= -\omega V_m \sin(\omega t + \phi) \\ &= \operatorname{Re}[j\omega V_m e^{j(\omega t+\phi)}] \\ &= \operatorname{Re}[j\omega V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[j\omega \sqrt{2}\bar{V} e^{j\omega t}] \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} (\operatorname{Re}[\bar{V} e^{j\omega t}]) = \operatorname{Re}[\frac{d}{dt} (\bar{V} e^{j\omega t})] = \operatorname{Re}[j\omega \bar{V} e^{j\omega t}]$$

Dériver un signal revient, dans le monde des phaseurs, à le multiplier par $j\omega$:

$$\frac{d}{dt} (V_m \cos(\omega t + \phi)) \Leftrightarrow j\omega \bar{V}$$

TABLE 4.2: Déivation.

Intégration.

$$\begin{aligned} \int V_m \cos(\omega t + \phi) dt &= \frac{V_m}{\omega} \sin(\omega t + \phi) \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}}{j\omega} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{\sqrt{2}\bar{V}}{j\omega} e^{j\omega t} \right] \end{aligned}$$

$$\int \operatorname{Re}[\bar{V} e^{j\omega t}] dt = \operatorname{Re} \left[\int \bar{V} e^{j\omega t} dt \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{\bar{V}}{j\omega} e^{j\omega t} \right]$$

Intégrer un signal revient, dans le monde des phaseurs, à le diviser par $j\omega$:

$$\int V_m \cos(\omega t + \phi) dt \Leftrightarrow \frac{\bar{V}}{j\omega}$$

TABLE 4.3: Intégration.

4.2.2 Lois de la théorie des circuits et phaseurs

L'intérêt d'utiliser les phaseurs réside dans le fait que toutes les relations linéaires du domaine temporel se transforment en relations algébriques équivalentes entre les phaseurs du domaine fréquentiel. Tous les éléments constituant le circuit doivent être linéaires et invariants. Attention, cette propriété ne s'applique donc pas au calcul des puissances.

En ce qui concerne les lois de Kirchhoff :

1. PLK :

$$i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_k(t) = 0 \Leftrightarrow \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \dots + \bar{I}_k = 0$$

Sous forme matricielle :

$$\mathbf{A} \bar{\mathbf{I}}_B = \mathbf{0}$$

avec **A** la matrice d'incidence aux noeuds définie au Chapitre 8.

2. SLK :

$$u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_k(t) = 0 \Leftrightarrow \bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \dots + \bar{U}_k = 0$$

Sous forme matricielle :

$$\mathbf{B} \bar{\mathbf{U}}_B = \mathbf{0}$$

avec **B** la matrice des mailles définie au Chapitre 8.

4.3 Relation entre tension et courant de branche

4.3.1 Résistance

On a

$$u(t) = Ri(t) \Leftrightarrow \bar{U} = R \bar{I}$$

En effet si

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

alors

$$u(t) = R I_m \cos(\omega t + \phi)$$

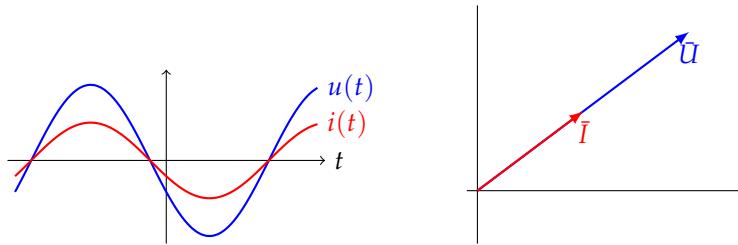


FIGURE 4.3: Tension et courant dans un élément résistif.

La tension u et le courant i sont en phase.

4.3.2 Inductance

On a

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \Leftrightarrow \bar{U} = j\omega L \bar{I}$$

En effet, si

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

alors

$$u(t) = \omega L I_m \cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}) = -\omega L I_m \sin(\omega t + \phi)$$

Le courant i est en **retard** de 90° par rapport à la tension u .

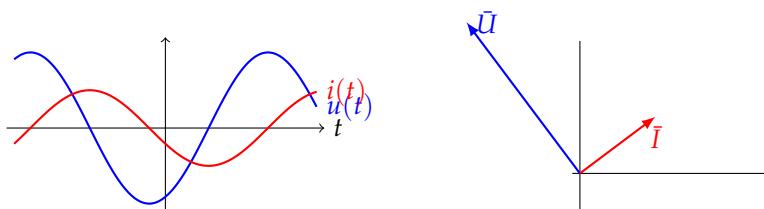


FIGURE 4.4: Tension et courant dans un élément inductif.

4.3.3 Condensateur

On a

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(x) dx \Leftrightarrow \bar{U} = \frac{1}{j\omega C} \bar{I}$$

En effet, si

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

alors

$$u(t) = \frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}) = \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t + \phi)$$

Le courant i est en **avance** de phase de 90° par rapport à la tension u .

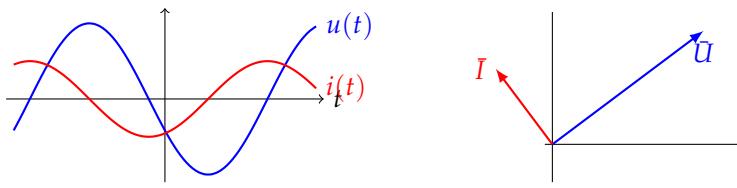


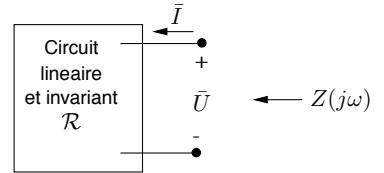
FIGURE 4.5: Tension et courant dans un élément capacitif.

4.4 Impédance et admittance

Soit \mathcal{R} un dipôle passifé comportant un certain nombre d'éléments linéaires et invariants interconnectés et fonctionnant en régime sinusoïdal établi. $u(t)$ et $i(t)$ sont les tension et courant sinusoïdaux aux bornes de ce dipôle, avec \bar{U} et \bar{I} les phaseurs correspondants.

On appelle *impédance* du dipôle, le rapport des phaseurs

$$Z(j\omega) = \frac{\bar{U}}{\bar{I}}, \quad \bar{U} = Z \bar{I}.$$



L'inverse de l'impédance est appelée *admittance*

$$Y(j\omega) = \frac{\bar{I}}{\bar{U}}, \quad \bar{I} = Y \bar{U}.$$

Z et Y sont deux nombres complexes, ce ne sont pas des phaseurs ! Ils n'ont pas de vecteur tournant ni de signal sinusoïdal associés.

Quelques définitions :

$$Z = R + jX = |Z|e^{j\theta} \quad \left\{ \begin{array}{ll} R = \operatorname{Re}[Z] = |Z| \cos \theta & \text{est la } \mathbf{résistance} \\ X = \operatorname{Im}[Z] = |Z| \sin \theta & \text{est la } \mathbf{réactance} \\ |Z| = \sqrt{R^2 + X^2} & \text{est le } \mathbf{module} \\ \theta = \arctan \frac{X}{R} & \text{est l'} \mathbf{argument} \end{array} \right.$$

$$Y = G + jB = |Y|e^{j\zeta} \quad \left\{ \begin{array}{ll} G = \operatorname{Re}[Y] = |Y| \cos \zeta & \text{est la } \mathbf{conductance} \\ B = \operatorname{Im}[Y] = |Y| \sin \zeta & \text{est la } \mathbf{susceptance} \\ |Y| = \sqrt{G^2 + B^2} & \text{est le } \mathbf{module} \\ \zeta = \arctan \frac{B}{G} & \text{est l'} \mathbf{argument} \end{array} \right.$$

La Table 4.4 décrit l'impédance et l'admittance des composants de base.

Composant	impédance	résistance	réactance	admittance	conductance	susceptance
Résistance	R	R	—	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{R}$	$-\frac{1}{\omega L}$
Inductance	$j\omega L$	—	ωL	$\frac{1}{j\omega L}$	—	$\frac{-1}{\omega C}$
Condensateur	$\frac{1}{j\omega C}$	—	$\frac{-1}{\omega C}$	$j\omega C$	—	ωC

TABLE 4.4: Impédance et admittance des composants de base.

4.4.1 Associations en série et en parallèle

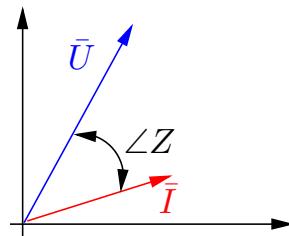
Des **impédances** s'associent de la même manière que des **résistances**. Des **admittances** s'associent de la même manière que des **conductances**.

Exemple : impédance d'un circuit RLC série.

L'impédance équivalente vaut

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}.$$

L'amplitude et l'argument de cette impédance permettent d'établir la représentation de la figure ci-dessous

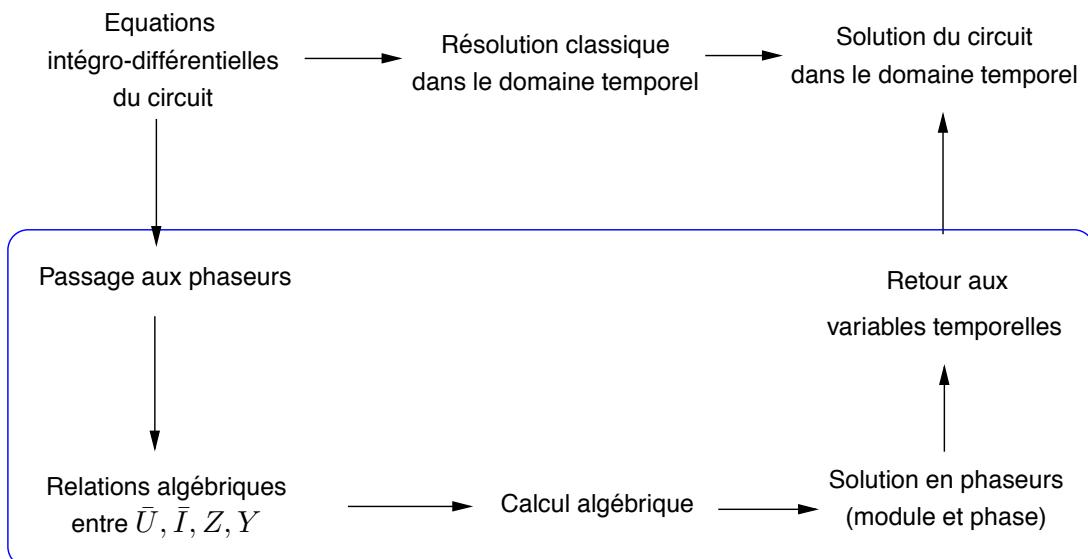


$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$\angle Z = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

La résistance vaut R et la réactance $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$.

Formulation de l'approche fréquentielle. En résumé, l'utilisation des phaseurs permet l'emploi de l'approche fréquentielle représentée à la Figure 4.6.

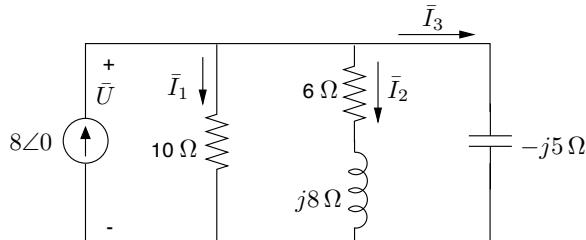


APPROCHE FREQUENTIELLE

FIGURE 4.6: De l'approche temporelle à l'approche fréquentielle.

Exemple : Approche fréquentielle.

La source de courant de la figure ci-dessous



délivre un courant

$$i(t) = \sqrt{2} 8 \cos 200000 t \text{ A.}$$

On souhaite construire le schéma équivalent du circuit dans le domaine fréquentiel et ensuite trouver les expressions temporelles de u , i_1 , i_2 et i_3 en régime établi. On a

$$\bar{I} = 8\angle 0, \quad \omega L = 8 \Omega, \quad \frac{-1}{\omega C} = -5 \Omega$$

Donc

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{10} = 0.1 \text{ S} \\ Y_2 &= \frac{1}{6+j8} = 0.06 - j0.08 \text{ S} \\ Y_3 &= j0.2 \text{ S} \end{aligned}$$

L'admittance vue de la source vaut

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0.16 + j0.12 = 0.2\angle 36.87^\circ$$

donc

$$Z = \frac{1}{Y} = 5\angle -36.87^\circ.$$

Dans le domaine temporel :

$$\begin{aligned} \bar{U} &= Z\bar{I} = 40\angle -36.87^\circ \rightarrow u(t) = \sqrt{2} 40 \cos(200000t - 36.87^\circ) \text{ V} \\ \bar{I}_1 &= Y_1 \bar{U} = 4\angle -36.87^\circ \rightarrow i_1(t) = \sqrt{2} 4 \cos(200000t - 36.87^\circ) \text{ A} \\ \bar{I}_2 &= Y_2 \bar{U} = 4\angle -90^\circ \rightarrow i_2(t) = \sqrt{2} 4 \cos(200000t - 90^\circ) \text{ A} \\ \bar{I}_3 &= Y_3 \bar{U} = 8\angle 53.13^\circ \rightarrow i_3(t) = \sqrt{2} 8 \cos(200000t + 53.13^\circ) \text{ A} \end{aligned}$$

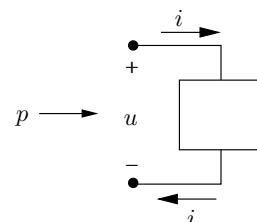
4.5 La puissance en régime sinusoïdal établi

4.5.1 Domaine temporel

Puissance instantanée. Soient les signaux

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cos(\omega t + \phi_u) \\ i(t) &= I_m \cos(\omega t + \phi_i) \end{aligned}$$

La puissance *instantanée* fournie au dipôle de la Figure 4.5.1 vaut :



$$\begin{aligned}
p(t) &= u(t)i(t) \\
&= U_m I_m \cos(\omega t + \phi_u) \cos(\omega t + \phi_i) \\
&= \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(\phi_u - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i)]
\end{aligned}$$

Pour rappel, les formules de Simpson sont

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\
\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\
\cos(a)\cos(b) &= \cos(a-b) + \cos(a+b)
\end{aligned}$$

En utilisant les valeurs efficaces :

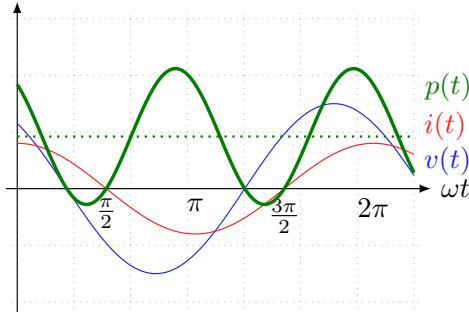
$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

On obtient l'expression de la puissance instantanée $p(t)$

$$p(t) = UI[\cos(\phi_u - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i)]$$

qui

- oscille à une fréquence double de celle de u et i
- est alternativement positive et négative ce qui implique des échanges d'énergie



On peut réécrire la puissance instantanée comme la somme de deux fonctions :

$$p(t) = P + p_f(t) \quad (4.1)$$

Puissance active. Le terme constant $P = UI \cos(\phi_u - \phi_i)$ est appelé *puissance active*. Il représente la puissance moyenne fournie au dipôle par période, et donc la puissance réellement utilisable

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt.$$

La puissance active dépend de l'**amplitude** de u et i **et** de leur **déphasage** $\phi_u - \phi_i$.

Puissance fluctuante. Le terme oscillant $p_f = UI \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i)$ est appelé puissance fluctuante. Il est de moyenne nulle.

Puissance réactive. En réécrivant $p_f(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} p_f(t) &= U I \cos(2(\omega t + \phi_u) - (\phi_u - \phi_i)) \\ &= P \cos 2(\omega t + \phi_u) + Q \sin 2(\omega t + \phi_u) \end{aligned}$$

La puissance réactive est définie comme

$$Q = U I \sin(\phi_u - \phi_i).$$

Elle est due au déphasage existant entre u et i et est liée aux échanges d'énergie magnétique et électrostatique survenant dans le circuit suite à la présence d'inductances et de condensateurs.

Puissance apparente. Le produit $U I$ est appelé *puissance apparente*².

Unités. Pour distinguer ces différents types de puissance, on les exprime dans des unités spécifiques :

- $p(t)$, $p_f(t)$, P en W
- Q en var (Voltampère réactif)
- la puissance apparente en VA (Voltampère)

2. Wikipedia : "Electrical engineers take apparent power into account when designing and operating power systems, because though the current associated with reactive power does no work at the load, it heats the conductors and wastes energy. Conductors, transformers and generators must be sized to carry the total current, not just the current that does useful work."

4.5.2 Calculs dans le domaine fréquentiel.

On peut calculer les puissances active, réactive et apparente à partir des phaseurs.

Puissance complexe. La puissance complexe est obtenue en formant le produit hermitique :

$$\begin{aligned} S &= \bar{U}\bar{I}^* \\ &= U e^{j\phi_u} I e^{-j\phi_i} = U I e^{j(\phi_u - \phi_i)} \\ &= U I (\cos(\phi_u - \phi_i) + j \sin(\phi_u - \phi_i)) \\ &= P + jQ \end{aligned}$$

La puissance apparente est le module de la puissance complexe :

$$|S| = U I = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

4.5.3 Propriétés des impédances de dipôles RLC passifs

Dipôle purement résistif. u et i sont en phase : $\phi_u - \phi_i = 0$

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = RI_m^2 \cos^2(\omega t + \phi_u) \\ &= RI^2(1 + \cos 2(\omega t + \phi_u)) \\ &= P + P \cos 2(\omega t + \phi_u) \end{aligned}$$

- $p(t)$ est toujours positive !
- de moyenne $P = RI^2$
- $p_f(t) = P \cos 2(\omega t + \phi_u)$
- $Q = 0$!

Dipôle purement inductif. Le courant i étant en retard de 90° par rapport à u : $\phi_u - \phi_i = 90^\circ$

$$\begin{aligned} p(t) &= \omega L I_m^2 \cos(\omega t + \phi_u) \cos(\omega t + \phi_u - 90^\circ) \\ &= \omega L I^2 \sin(2(\omega t + \phi_u)) \\ &= Q \sin(2(\omega t + \phi_u)) \end{aligned}$$

- p de moyenne nulle $\rightarrow P = 0$!
- $p_f = Q \sin 2(\omega t + \phi_u)$
- $Q = \omega L I^2$
- Échanges périodiques d'énergie entre les inductances et le reste du circuit.
- Une inductance consomme de la puissance réactive

Dans un circuit purement inductif, la puissance instantanée oscille deux fois par période entre $-\omega L I^2$ et $\omega L I^2$. L'énergie magnétique stockée à l'instant t dans l'inductance est :

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L I^2(t) = \frac{1}{2} L I^2(1 + \cos(2(\omega t + \phi_i))) \geq 0!$$

L'énergie magnétique moyenne par période est

$$\langle W_m \rangle = \frac{1}{2} L I^2$$

On a la relation entre la puissance réactive consommée par l'inductance et l'énergie magnétique moyenne :

$$Q = 2\omega \langle W_m \rangle$$

Dipôle purement capacitif. Le courant i étant en avance de 90° par rapport à u , on a $\phi_u - \phi_i = -90^\circ$

$$\begin{aligned} p(t) &= \omega C U_m^2 \cos(\omega t + \phi_u) \cos(\omega t + \phi_u + 90^\circ) \\ &= -\omega C U^2 \sin(2(\omega t + \phi_u)) \\ &= Q \sin(2(\omega t + \phi_u)) \end{aligned}$$

- $p(t)$ est de moyenne nulle $\rightarrow P = 0$!
- $p_f(t) = Q \sin 2(\omega t + \phi_u)$
- $Q = -\omega C U^2$
- Échanges périodiques d'énergie entre les condensateurs et le reste du circuit.
- Un condensateur produit de la puissance réactive.

Dans un circuit purement capacitif, la puissance instantanée oscille deux fois par période entre $-\omega C U^2$ et $\omega C U^2$. L'énergie électrostatique stockée à l'instant t dans le condensateur est :

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C U^2(t) = \frac{1}{2} C U^2(1 + \cos(2(\omega t + \phi_u))) \geq 0!$$

L'énergie électrostatique moyenne par période est

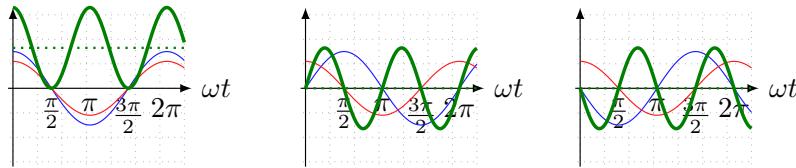
$$\langle W_e \rangle = \frac{1}{2} C U^2$$

On a la relation entre la puissance réactive fournie par le condensateur et l'énergie électrostatique moyenne :

$$Q = -2\omega \langle W_e \rangle$$

Résumé. Si $\phi_u = 0$,

Circuit résistif	Circuit capacitif	Circuit inductif
$p(t) = P + P \cos(2\omega t)$	$p(t) = Q \sin(2\omega t)$	$p(t) = -Q \sin(2\omega t)$



4.5.4 Le facteur de puissance

Définition. Soit

$$P = U I \cos(\phi_u - \phi_i) = U I \cos \Phi \quad (4.2)$$

$\cos \Phi$ est appelé *facteur de puissance* du circuit. Pour un circuit résistif, $\cos \Phi = 1$, pour un circuit purement inductif ou capacitif, $\cos \Phi = 0$. Le facteur de puissance dépend donc directement du déphasage entre le courant et la tension aux bornes du dipôle, causé par l'impédance du dipôle :

$$Z = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{U e^{j\phi_u}}{I e^{\phi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\phi_u - \phi_i)}$$

et

$$\Phi = \arg Z.$$

Lien entre facteur de puissance et amplitude du courant. On peut réécrire (4.2) comme

$$I = \frac{P}{U \cos \Phi}$$

Un faible facteur de puissance implique donc un grand courant. Si le dipôle est alimenté par une **tension constante** en amplitude U , pour délivrer au dipôle **une même puissance** P , le courant doit être d'autant plus important que le $\cos \Phi$ du dipôle est petit. Le facteur de puissance renseigne sur la qualité de la transmission de l'énergie³. Facteur de puissance et puissance réactive sont liés :

- $\cos \Phi$ proche de 1 : $Q = U I \sin \Phi$ faible
- $\cos \Phi$ proche de 0 : $Q = U I \sin \Phi$ proche de sa valeur max. $U I$

On peut aussi écrire

$$\cos \phi = \frac{P}{|S|}$$

Idéalement, le facteur de puissance est donc *compensé*, habituellement en connectant des condensateurs en parallèle sur les charges inductives (Figure 4.7).

Expression de P et Q à partir de l'impédance (admittance) du dipôle. Soit une Impédance $Z = R + jX$:

$$S = \bar{U} \bar{I}^* = Z I I^* = Z I^2 = R I^2 + jX I^2$$

3. Wikipedia : "For two systems transmitting the same amount of active power, the system with the lower power factor will have higher circulating currents due to energy that returns to the source from energy storage in the load. These higher currents produce higher losses and reduce overall transmission efficiency. A **lower power factor** circuit will have a higher apparent power and **higher losses** for the same amount of active power."

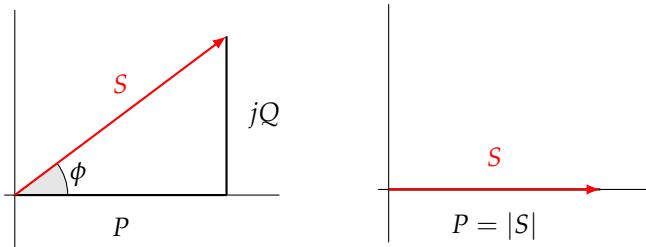


FIGURE 4.7: Compensation (parfaite) du facteur de puissance.

On peut écrire, en fonction du courant,

$$P = R I^2 \quad Q = X I^2$$

Si on considère plutôt l'admittance $Y = G + jB$:

$$S = \bar{U} \bar{I}^* = Y^* \bar{U} \bar{U}^* = Y^* U^2 = G U^2 - jB U^2$$

On peut écrire, en fonction de la tension,

$$P = G U^2 \quad Q = -B U^2$$

Conservation de la puissance complexe. Dans un circuit linéaire et invariant alimenté par des sources indépendantes sinusoïdales fonctionnant toutes à la même fréquence, la somme des puissances **complexes** fournies par les sources est égale à la somme des puissances complexes consommées par les éléments des autres branches du circuit.

Dans chaque branche, u_i et i_i sont choisis dans le même sens

- \mathbf{i}_B obéit à la PLK $\rightarrow \bar{\mathbf{I}}_B^*$ obéit aussi à la PLK
- \mathbf{u}_B obéit à la SLK $\rightarrow \bar{\mathbf{U}}_B$ obéit aussi à la SLK
- $\bar{\mathbf{I}}_B^*, \bar{\mathbf{U}}_B$ satisfont le théorème de Tellegen (cf. Chapitre 5) et

$$\bar{\mathbf{I}}_B^* \bar{\mathbf{U}}_B = 0$$

$$\bar{\mathbf{I}}_B^* \bar{\mathbf{U}}_B = \sum_{i=1}^b \bar{U}_i \bar{I}_i^* = S \text{ est la puissance complexe totale fournie au circuit.}$$

Synthèse. Soient P et Q sont les puissances consommées par le dipôle. La Table 4.5 synthétise les paragraphes précédents.

Dipôle	$\arg[Z]$	$\cos \Phi$	P	Q
R	0	1	$P > 0$	$Q = 0$
L	90°	0	$P = 0$	$Q = \omega L I^2 > 0$
C	-90°	0	$P = 0$	$Q = -\omega C U^2 < 0$
LC	$\pm 90^\circ$	0	$P = 0$	$Q >< 0$
RL	$0 < \Phi < 90^\circ$	$0 < \cos \Phi < 1$	$P > 0$	$Q > 0$
RC	$-90^\circ < \Phi < 0$	$0 < \cos \Phi < 1$	$P > 0$	$Q < 0$

TABLE 4.5: Synthèse des valeurs admissibles du déphasage, du facteur de puissance, de la puissance active, et de la puissance réactive pour les dipôles les plus communs.

4.6 Circuits magnétiquement couplés

4.6.1 Inductances couplées

Soient deux circuits magnétiquement couplés comme indiqué à la Figure 4.8. Le flux produit par i_1 embrasse la bobine 2 et inversement. Le

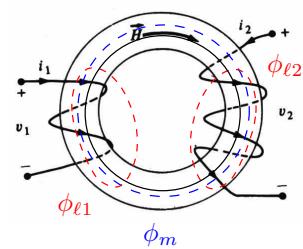


FIGURE 4.8: Circuits magnétiquement couplés.

courant variable i_1 induit donc une f.e.m aux bornes de la bobine 2. Soient N_1 et N_2 le nombre de tours de la bobine 1 et 2, respectivement.

Relations entre courants et tensions. Si i_1 agit seul et que le circuit 2 est ouvert, le flux généré par i_1 se décompose en

$$\phi_1^{(1)} = \phi_{l1} + \phi_m^{(1)}$$

ϕ_{l1} est la partie du flux qui traverse uniquement la bobine 1 (flux de fuite), $\phi_m^{(1)}$ est la partie du flux qui traverse à la fois la bobine 1 et la bobine 2. Les tensions induites sont :

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= N_1 \frac{d\phi_1^{(1)}}{dt} = N_1 \frac{d(\phi_{l1} + \phi_m^{(1)})}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \\ u_2^{(1)} &= N_2 \frac{d\phi_m^{(1)}}{dt} = L_{21} \frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

Si i_2 agit seul et que le circuit 1 est ouvert, le flux généré par i_2 se décompose en

$$\phi_2^{(2)} = \phi_{l2} + \phi_m^{(2)}.$$

Les tensions induites sont :

$$\begin{aligned} u_1^{(2)} &= N_1 \frac{d\phi_m^{(2)}}{dt} = L_{12} \frac{di_2}{dt} \\ u_2^{(2)} &= N_2 \frac{d\phi_2^{(2)}}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

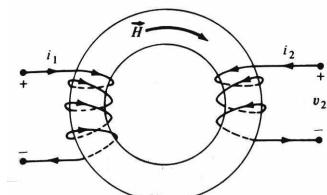
Inductance mutuelle M . On a $L_{12} = L_{21} = M$, l'inductance mutuelle. M dépend de la géométrie du système, de la distance et de l'orientation relative entre les deux bobines. Par superposition (Chapitre 5), si i_1 et i_2 agissent simultanément

$$\begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

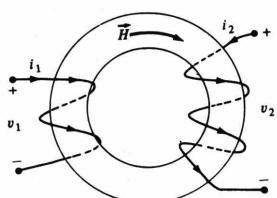
Modèle de deux inductances couplées.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Signe de M . Selon l'arrangement des bobines, M est positif ou négatif.



$M > 0$
 $\phi_m^{(1)}$ et $\phi_m^{(2)}$ dans le même sens
ils s'ajoutent



$M < 0$
 $\phi_m^{(1)}$ et $\phi_m^{(2)}$ en sens opposés
ils se soustraient

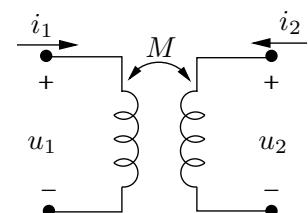
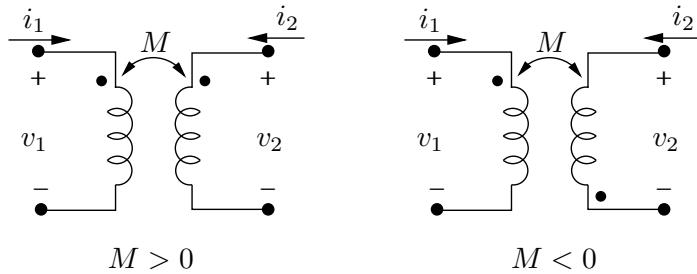


FIGURE 4.9: Quadripôle représentant deux inductances couplées.

Indication du signe de M . Sur le schéma, on repère le signe de M par des points : $M > 0$ si i_1 et i_2 entrent ou sortent tous les deux par la borne dotée d'un point.



Coefficient de couplage k . Le coefficient de couplage k permet de définir la valeur de M à partir de L_1 et L_2 .

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

$$-1 \leq k \leq 1.$$

Cas extrêmes :

- $k = 0$: aucun couplage entre les deux bobines ; le flux créé par chaque bobine ne traverse que cette bobine.
- $|k| = 1$: couplage parfait ; tout le flux créé par chaque bobine traverse l'autre bobine.

4.6.2 Le transformateur

Un transformateur est composé de deux enroulements magnétiquement couplés, équivalents à une paire d'inductances couplées. Il est utile pour

- adapter le niveau de tension en transport et distribution de l'énergie électrique
- adapter l'impédance d'un circuit à une impédance de charge dans les circuits électroniques, pour les télécommunications notamment
- réaliser des mesures de courant et de tension (voir cours de mesures électriques).

Un modèle "réaliste" se compose d'une paire d'inductances couplées et d'une résistance pour chaque enroulement, pour modéliser les pertes (Figure 4.10).

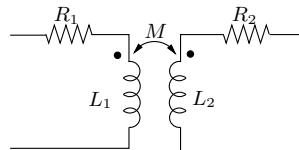


FIGURE 4.10: Modèle "réel" d'un transformateur.

Le transformateur idéal. Idéalisations :

- $R_1 = R_2 = 0$
- couplage parfait : $k = 1$, pas de flux de fuite

- matériau ferromagnétique idéal : $\mu = \infty \rightarrow L_1 \rightarrow \infty, L_2 \rightarrow \infty, M \rightarrow \infty$

On peut écrire :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{di_1}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{M} & M - \frac{L_1 L_2}{M} \\ \frac{1}{M} & -\frac{L_2}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix}$$

Tenant compte des idéalisations

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{di_1}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix}$$

Le rapport de transformation n est défini comme

$$n = \frac{L_2}{M} = \frac{M}{L_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1}$$

et on obtient les relations qui caractérisent l'élément "transformateur idéal" (Table 4.6), illustrées à la Figure 4.11.

$$u_2 = n u_1$$

$$i_1 = -n i_2$$

TABLE 4.6: Relation $u - i$ du transformateur idéal.

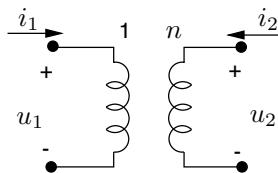


FIGURE 4.11: Représentation du quadripôle "transformateur idéal".

4.7 Le triphasé

Le transport à grande distance de l'énergie électrique s'effectue usuellement en régime alternatif triphasé (à la fréquence de 50 Hz, comme par exemple en Europe, où de 60 Hz comme par exemple aux USA), à très haute tension (THT) : 700, 400, 220, 150 kV.

La THT sert notamment à réduire les pertes par effet Joule dans les conducteurs (ces pertes sont approximativement fonction inverse du carré de la tension). Le régime alternatif permet l'utilisation de transformateurs, fournissant un moyen commode d'élèver la tension à partir des centrales de production (11 à 30 kV) et d'abaisser la tension à l'autre extrémité du réseau de transport : noeuds "BT" du réseau de distribution (par exemple 60 à 6 kV). Le régime triphasé, enfin possède des avantages multiples : création aisée d'un champ tournant exploité dans les moteurs, tels les moteurs à induction ; économie substantielle en matériaux conducteurs et en frais fixes d'installation ; puissance instantanée fournie à la charge triphasée constante.

Dans cette section nous esquissons très brièvement certaines caractéristiques saillantes des systèmes triphasés équilibrés. Les représentations schématiques montrées ci-dessous sont non conformes à la réalité, car les charges

d'utilisation ainsi que les centrales de production apparaissent connectées directement au réseau de transport ; le réseau lui-même est représenté par des fils électriques, alors qu'une modélisation même simplifiée impliquerait l'utilisation de quadripôles équivalents en π .

4.7.1 Systèmes triphasés équilibrés

Un réseau triphasé est un réseau comportant des "générateurs triphasés", des "charges triphasées" et des circuits de transmission reliant les générateurs aux charges. Un réseau triphasé est dit "équilibré" lorsque tous ses éléments le sont. Explicitons brièvement ces termes.

Un générateur triphasé est un générateur à trois enroulements distincts, symétriquement distribués dans l'espace à 120° les uns des autres. Dans ces enroulements se développent des forces électromotrices qui, lorsque le générateur est équilibré, sont égales en module et temporellement déphasées entre elles d'un tiers de période. Une charge triphasée est un circuit d'utilisation comportant trois accès. La charge triphasée est équilibrée lorsque les impédances vues des trois accès sont identiques. Le réseau de transmission triphasé est un ensemble de trois "lignes électriques" reliant le générateur à la charge. Ce circuit est équilibré lorsque les trois lignes présentent des impédances identiques. Les connexions entre les enroulements des générateurs et les impédances d'utilisation peuvent se faire en étoile ou en triangle. Ceci est illustré à la Figure 4.12.

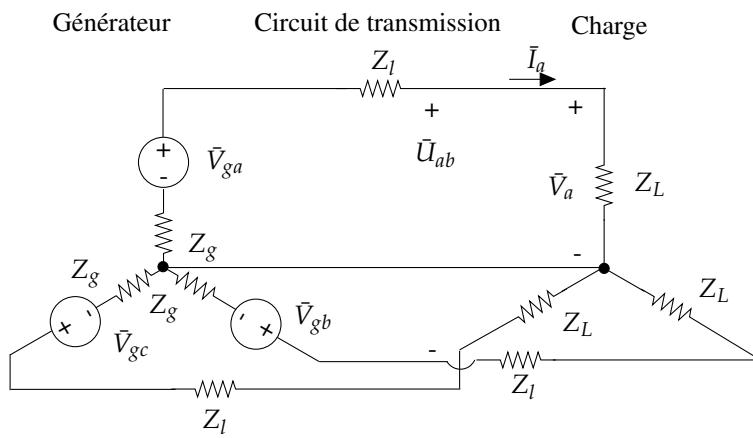


FIGURE 4.12: Représentation schématique d'un circuit triphasé.

4.7.2 Montage en étoile

Considérons le générateur représenté sur la Figure 4.13. Il possède trois enroulements, supposés équilibrés, délivrant dès lors les forces électromotrices :

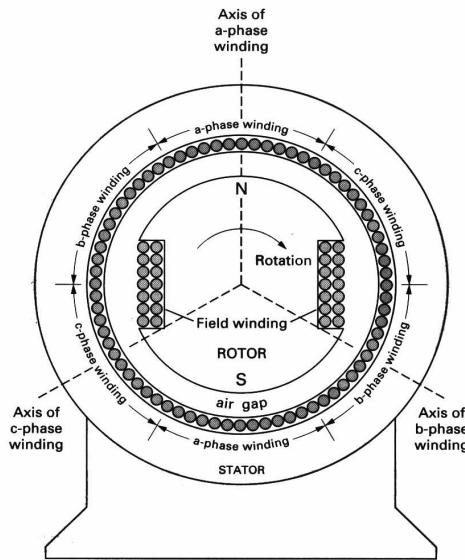


FIGURE 4.13: Générateur triphasé.

$$\begin{aligned}
 \bar{V}_a &= V e^{j\phi_u} & v_a(t) &= \sqrt{2}V \cos(\omega t + \phi_u) \\
 \bar{V}_b &= V e^{j(\phi_u - \frac{2\pi}{3})} & v_b(t) &= \sqrt{2}V \cos(\omega t + \phi_u - \frac{2\pi}{3}) \\
 &= \bar{V}_a e^{-j\frac{2\pi}{3}} & &= \sqrt{2}V \cos(\omega(t - \frac{T}{3}) + \phi_u) \\
 \bar{V}_c &= V e^{j(\phi_u - \frac{4\pi}{3})} & v_c(t) &= \sqrt{2}V \cos(\omega t + \phi_u - \frac{4\pi}{3}) \\
 &= \bar{V}_a e^{-j\frac{4\pi}{3}} & &= \sqrt{2}V \cos(\omega(t - \frac{2T}{3}) + \phi_u)
 \end{aligned}$$

On parle de *séquence directe* des 3 phases *a*, *b*, et *c* si (cf. Figure 4.14) un observateur placé en *O* voit passer les vecteurs tournants dans l'ordre *a*, *b*, *c*.

Le système étant par hypothèse équilibré, les trois courants sont également temporellement déphasés de $2\pi/3$. En adoptant \bar{I}_a comme origine des phases, on écrit :

$$\begin{aligned}
 \bar{I}_a &= I e^{j\phi_i} & i_a(t) &= \sqrt{2}I \cos(\omega t + \phi_i) \\
 \bar{I}_b &= I e^{j(\phi_i - \frac{2\pi}{3})} & i_b(t) &= \sqrt{2}I \cos(\omega t + \phi_i - \frac{2\pi}{3}) \\
 &= \bar{I}_a e^{-j\frac{2\pi}{3}} & &= \sqrt{2}I \cos(\omega(t - \frac{T}{3}) + \phi_i) \\
 \bar{I}_c &= I e^{j(\phi_i - \frac{4\pi}{3})} & i_c(t) &= \sqrt{2}I \cos(\omega t + \phi_i - \frac{4\pi}{3}) \\
 &= \bar{I}_a e^{-j\frac{4\pi}{3}} & &= \sqrt{2}I \cos(\omega(t - \frac{2T}{3}) + \phi_i)
 \end{aligned}$$

Les trois phases sont connectées en un noeud commun, tant du côté générateur que du côté récepteur. On obtient un réseau de transmission à quatre fils, dont le fil de retour, fil *neutre*, n'est parcouru par aucun courant car :

$$\bar{V}_a + \bar{V}_b + \bar{V}_c = 0,$$

$$\bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = 0.$$

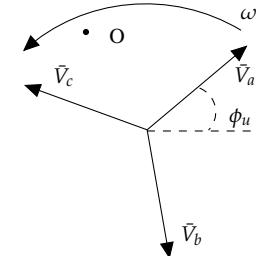


FIGURE 4.14: Phasors de tension des trois phases.

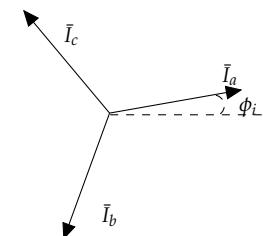


FIGURE 4.15: Phasors de COURANT des trois phases.

Dans ce qui suit et sauf spécification contraire, on suppose que le réseau est équilibré.

Courants de phase et de ligne. D'après la Figure 4.12, on voit que les courants parcourant les trois "phases" (générateurs et charges) sont les mêmes que ceux parcourant les trois fils de lignes.

Tensions simple et composée. \bar{V}_a est une *tension de phase* (ou tension simple) : c'est la différence de potentiel aux bornes d'une charge monophasée, ou la différence de potentiel entre une ligne et le neutre.

\bar{U}_{ab} est une *tension de ligne* (ou tension composée ou tension entre phases) : c'est la différence de potentiel entre deux phases. Les trois tensions de ligne

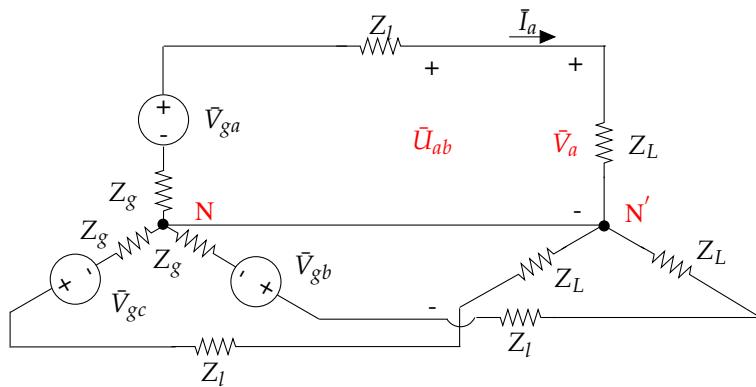


FIGURE 4.16: Tension de ligne et tension composée.

sont :

$$\begin{aligned}\bar{U}_{ab} &= \bar{V}_a - \bar{V}_b = \sqrt{3}\bar{V}_a e^{j\frac{\pi}{6}} \\ \bar{U}_{bc} &= \bar{V}_b - \bar{V}_c = \sqrt{3}\bar{V}_b e^{j\frac{\pi}{6}} \\ \bar{U}_{ca} &= \bar{V}_c - \bar{V}_a = \sqrt{3}\bar{V}_c e^{j\frac{\pi}{6}}\end{aligned}$$

\bar{U}_{ab} , \bar{U}_{bc} , \bar{U}_{ca} forment aussi une séquence directe et $U = \sqrt{3}V$.

On voit ainsi que l'existence du fil neutre présente l'avantage d'offrir deux tensions distinctes, la tension simple et la tension composée, les modules de ces deux tensions étant dans le rapport $1/\sqrt{3}$. Dans un circuit de distribution domestique la tension de phase vaut 230 V (tension phase-neutre) et la tension de ligne vaut 400 V.

Le neutre à la terre. Il serait en principe possible de supprimer le fil neutre et d'obtenir un réseau en étoile à trois fils. En réalité cependant, un réseau n'est jamais parfaitement équilibré. Si on souhaite se passer du fil de neutre, on doit alors connecter les neutres à la terre. Le (faible) courant de déséquilibre circule donc via la terre. Ce montage présente un avantage en cas de court-circuit entre une phase et la terre, car il évite les surtensions. Soit $\bar{V}_c = 0$,

- si N et N' ne sont pas mis à la terre, il existe une différences de potentiel entre les deux autres phases et la terre égale à la tension composée, $\sqrt{3}V$, tension supérieure à la tension normale ;

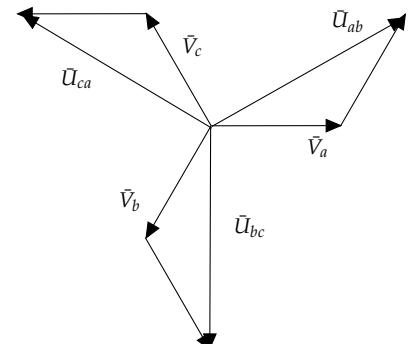


FIGURE 4.17: Phaseurs des tensions de ligne et tensions composées.

- si N et N' sont mis à la terre, les d.d.p. entre les deux autres phases et la terre conservent des valeurs normales, un courant de “fuite” $i_a + i_b + i_c$ non négligeable circule via la terre entre le point de court-circuit et le neutre, ce courant peut être détecté par une protection (disjoncteur différentiel !)

Ce type de raccordement à la terre (réseau dit "IT") est utilisé par exemple dans les hôpitaux car il offre plus de robustesse à des défauts (pas d'interruption totale de service, pas de surtension). Cependant dès qu'un défaut est identifié il importe de le corriger rapidement afin de restaurer le mode de fonctionnement nominal du système. Il requiert donc un monitoring et des protections plus avancées qu'un système où le neutre est distribué.

4.7.3 Montage en triangle

Un équipement triphasé peut être connecté en étoile comme plus haut ou en triangle (Figure 4.18). Dans ce cas, il y a un seul type de tension, la tension

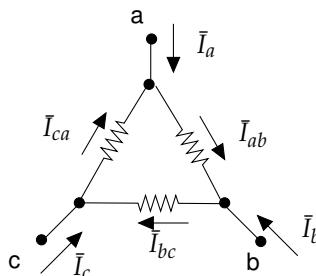


FIGURE 4.18: Connection en triangle.

de ligne, mais deux courants : \bar{I}_a , \bar{I}_b , \bar{I}_c sont les courants de ligne, \bar{I}_{ab} , \bar{I}_{bc} , \bar{I}_{ca} sont les courants de phase. Il n'y a pas de point neutre. Chaque conducteur de ligne est traversé par un courant égal à la différence des courants de deux phases.

$$\begin{aligned}\bar{I}_a &= \bar{I}_{ab} - \bar{I}_{ca} = \sqrt{3}\bar{I}_{ab}e^{-j\frac{\pi}{6}} \\ \bar{I}_b &= \bar{I}_{bc} - \bar{I}_{ab} = \sqrt{3}\bar{I}_{bc}e^{-j\frac{\pi}{6}} \\ \bar{I}_c &= \bar{I}_{ca} - \bar{I}_{bc} = \sqrt{3}\bar{I}_{ca}e^{-j\frac{\pi}{6}}\end{aligned}$$

4.7.4 Puissance

Montage en étoile. La Puissance instantanée fournie à une charge triphasée connectée en étoile est

$$\begin{aligned}p_{3\phi}(t) &= v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c \\ &= 2VI [\cos(\omega t + \phi_u) \cos(\omega t + \phi_i) + \\ &\quad + \cos(\omega t + \phi_u - \frac{2\pi}{3}) \cos(\omega t + \phi_i - \frac{2\pi}{3}) + \\ &\quad + \cos(\omega t + \phi_u - \frac{4\pi}{3}) \cos(\omega t + \phi_i - \frac{4\pi}{3})] \\ &= 3VI \cos(\phi_u - \phi_i) + VI [\cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i) + \\ &\quad + \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i - \frac{2\pi}{3}) + \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i - \frac{4\pi}{3})] \\ &= 3VI \cos(\phi_u - \phi_i) = 3P\end{aligned}$$

La puissance triphasée instantanée, $p_{3\phi}(t)$ est constante ! Elle vaut 3 fois la puissance active consommée par l'impédance Z_L d'une des phases.

La puissance complexe triphasée fournie à une charge triphasée connectée en étoile est

$$\begin{aligned} S_{3\phi} &= \bar{V}_a \bar{I}_a^* + \bar{V}_b \bar{I}_b^* + \bar{V}_c \bar{I}_c^* \\ &= \bar{V}_a \bar{I}_a^* (1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}} e^{j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\frac{4\pi}{3}} e^{j\frac{4\pi}{3}}) \\ &= 3\bar{V}_a \bar{I}_a^* \\ &= 3VI(\cos(\phi_u - \phi_i) + j \sin(\phi_u - \phi_i)) \end{aligned}$$

La puissance active triphasée est

$$P_{3\phi} = 3VI \cos(\phi_u - \phi_i)$$

La puissance réactive triphasée est

$$Q_{3\phi} = 3VI \sin(\phi_u - \phi_i)$$

C'est une notion artificielle puisque la puissance instantanée est constante. Seule la puissance réactive par phase a une signification physique.

Montage en triangle. La puissance instantanée fournie à une charge triphasée connectée en triangle vaut

$$\begin{aligned} p_{3\phi}(t) &= u_{ab}i_{ab} + u_{bc}i_{bc} + u_{ca}i_{ca} \\ &= 3UI_{ph} \cos(\phi_u - \phi_i) = 3P \end{aligned}$$

Pour ce qui est de la puissance complexe fournie à une charge triphasée connectée en triangle :

$$\begin{aligned} S_{3\phi} &= \bar{U}_{ab} \bar{I}_{ab}^* + \bar{U}_{bc} \bar{I}_{bc}^* + \bar{U}_{ca} \bar{I}_{ca}^* \\ &= 3UI_{ph}(\cos(\phi_u - \phi_i) + j \sin(\phi_u - \phi_i)) \\ &= P_{3\phi} + jQ_{3\phi} \end{aligned}$$

Résumé. Pour un montage en étoile :

$$\begin{aligned} P_{3\phi} &= 3VI \cos(\phi_u - \phi_i) = \sqrt{3}UI \cos(\phi_u - \phi_i) \\ Q_{3\phi} &= 3VI \sin(\phi_u - \phi_i) = \sqrt{3}UI \sin(\phi_u - \phi_i) \end{aligned}$$

pour un montage en triangle :

$$\begin{aligned} P_{3\phi} &= 3UI_{ph} \cos(\phi_u - \phi_i) = \sqrt{3}UI_l \cos(\phi_u - \phi_i) \\ Q_{3\phi} &= 3UI_{ph} \sin(\phi_u - \phi_i) = \sqrt{3}UI_l \sin(\phi_u - \phi_i) \end{aligned}$$

Pour les deux montages :

$$\begin{aligned} P_{3\phi} &= \sqrt{3}UI \cos(\phi_u - \phi_i) \\ Q_{3\phi} &= \sqrt{3}UI \sin(\phi_u - \phi_i) \\ p_{3\phi}(t) &= P_{3\phi} = 3P \end{aligned}$$

où

- U est l'amplitude de la tension de ligne
- I est l'amplitude du courant de ligne
- $\phi_u - \phi_i$ est le déphasage entre la tension de phase et le courant de phase.

4.8 Exercices

Exercice 4.1 Phaseurs Solution à la page 120.

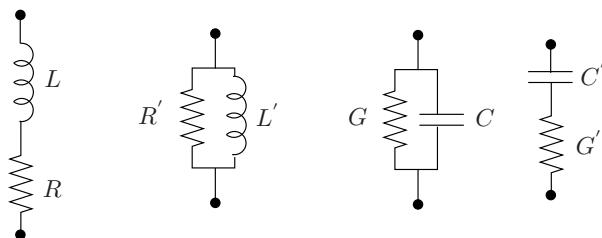
Soient les nombres j , j^2 , j^3 et j^4 .

1. Écrire les phaseurs correspondants.
2. Placer les sur un diagramme de phaseurs.
3. Quelle conclusion ce diagramme permet-il de tirer ?

Exercice 4.2 Impédance et admittance d'un dipôle. Solution à la page 120.

Une bobine est généralement représentée par une inductance en série avec une faible résistance, représentative des pertes inévitables de l'élément. Montrer, comme indiqué à la figure ci-dessous, que l'on peut aussi représenter cet élément par la mise en parallèle d'une résistance et d'une inductance. Déterminer l'expression des coefficients L' et R' en fonction de L et R .

De même, un condensateur est généralement représenté par la mise en parallèle d'un condensateur idéal et d'une faible conductance, représentative des pertes inévitables de l'élément. Montrer que l'on peut aussi représenter cet élément par la mise en série d'une conductance et d'un condensateur idéal. Déterminer l'expression des coefficients C' et G' en fonction de C et G .

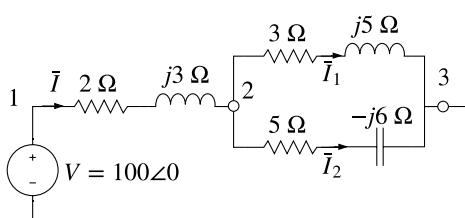


Exercice 4.3 Solution à la page 121.

Réponse :

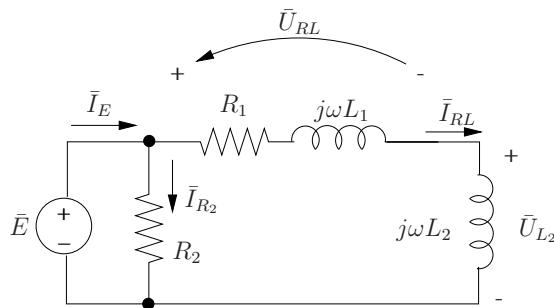
$$\begin{aligned} R' &= R\left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}\right), L' = L\left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right) \\ G' &= G\left(1 + \frac{\omega^2 C^2}{G^2}\right), C' = C\left(1 + \frac{G^2}{\omega^2 C^2}\right) \end{aligned}$$

Déterminer les courants \bar{I} , \bar{I}_1 et \bar{I}_2 dans le circuit ci-dessous. Tracer le diagramme de phaseur et illustrer également \bar{V}_{12} et \bar{V}_{23} .



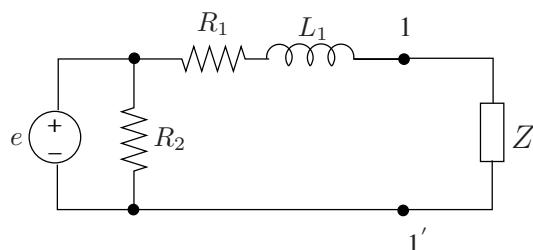
Exercice 4.4 Diagramme de phaseurs. *Solution à la page 122.*

Dessiner un diagramme de phaseurs plausible représentant les grandeurs indiquées sur le circuit ci-dessous. Justifier la construction étape par étape.
On prendra l'origine des phases pour la source $\bar{E} = E\angle 0$.

**Exercice 4.5** *Solution à la page 123.*

Une résistance de $5 \text{ k}\Omega$ est connectée en série avec la combinaison en parallèle d'un condensateur de capacité C et d'une inductance de 20 mH . Ce dipôle d'impédance Z est inséré dans un circuit fonctionnant en régime sinusoïdal établi à la pulsation de 1000 rad/s . On demande :

1. de calculer la valeur de la capacité C du condensateur pour que le courant parcourant le dipôle soit en retard de 45° par rapport à la d.d.p. à ses bornes ;
2. si on connecte ce dipôle aux bornes $11'$ du circuit de la figure ci-dessous, dessiner le diagramme de phaseurs reprenant les tensions aux bornes des éléments du circuit.

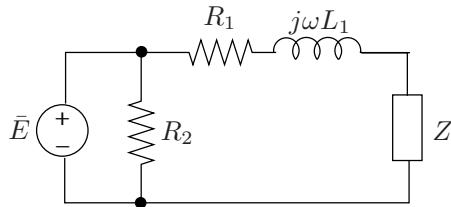


$$R_1 = 2\text{k}\Omega; R_2 = 4\text{k}\Omega; L_1 = 10\text{mH}; \bar{E} = 120\angle 0\text{V}, \text{ valeur efficace}$$

Réponse :
 $C = 49.8 \mu\text{F}, \bar{U}_Z = 97.25 + j16.11 \text{ V.}$

Exercice 4.6 Puissances. *Solution à la page 125.*

Calculer les puissances actives et réactives consommées ou produites par les divers éléments du circuit ci-dessous. Établir les bilans de puissances correspondants. Donner les expressions des puissances instantanées et fluctuantes dans les divers éléments du circuit.



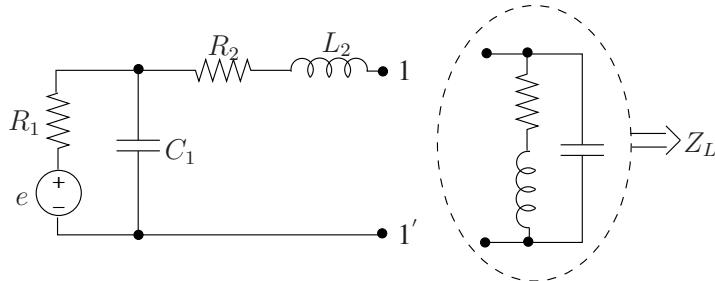
$$R_1 = 2k\Omega; R_2 = 4k\Omega; L_1 = 10mH; \bar{E} = 120\angle 0V, \text{ valeur efficace}; \\ Z = 5 + j5k\Omega$$

Exercice 4.7 Solution à la page 127.

Réponse :
 $S_{R_2} = 3.6 + j0 \text{ VA}, S_{Z_1} = 0.386 + j0.002 \text{ VA}$
 $S_Z = 0.966 + j0.966 \text{ VA}, S_E = 4.956 + j0.973 \text{ VA}.$

Le circuit ci-dessous fonctionne en régime sinusoïdal établi à la pulsation ω . On demande :

1. de déterminer la pulsation ω pour laquelle la puissance fournie par le circuit à la charge Z_L connectée en 1' est purement active ;
2. à cette pulsation, de calculer la puissance active fournie à la charge ainsi que les puissances active, réactive, instantanée et fluctuante fournies par la source de tension à l'instant $t = 10^{-3} \text{ s}$.

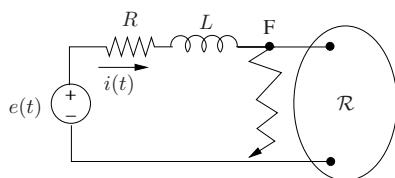


$$R_1 = 10 \Omega; R_2 = 20 \Omega; C_1 = 0.5 \mu\text{F}; L_2 = 0.1 \text{ mH} \\ R_L = 5 \Omega; C_L = 0.2 \mu\text{F}; L_L = 0.5 \text{ mH}; \bar{E} = 20\angle 0 \text{ V (valeur efficace)}$$

Exercice 4.8 Solution à la page 129.

Réponse :
 $\omega = 9.95 \cdot 10^4 \text{ rad/s}, Z_L = 500 \Omega; P_Z = 0.575 \text{ W}, S_E = 8.3 - 15.5 \text{ VA}$

Un générateur délivrant une f.e.m $e(t) = E \cos \omega t$ est connecté, depuis en temps supposé infini, à un circuit \mathcal{R} linéaire et invariant par l'intermédiaire d'une ligne, comme représenté à la figure suivante.

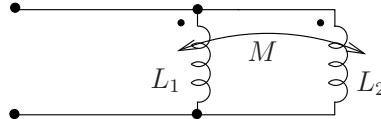


Cette ligne est modélisée par la mise en série d'une résistance R et d'une inductance L . A l'instant $t = 0$, un court-circuit se produit au point de connexion F. Déterminer l'évolution du courant $i(t)$ dans l'intervalle $t > 0$.

Réponse :
 $i(t) = i_0 e^{-t/\tau} - \frac{ER}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-t/\tau} + \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R}) \text{ A}, t \geq 0$

Exercice 4.9 Solution à la page 130.

Déterminer l'expression de l'inductance équivalente résultant de la mise en parallèle de la paire d'inductances couplées de la figure ci-dessous. Que devient cette inductance si la polarité magnétique de la bobine 2 est inversée ?



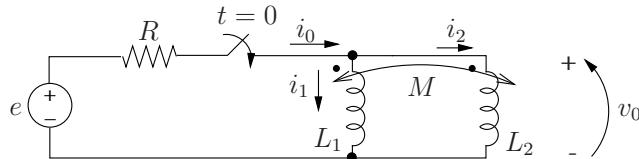
Réponse :

$$L_{eq1} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

$$L_{eq2} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

Exercice 4.10 Solution à la page 132.

On considère le circuit de la figure ci-dessous. Déterminer l'évolution des courants i_0 , i_1 , i_2 et de la tension v_0 pour $t \geq 0$ sachant que les deux inductances sont initialement relaxées. Vérifier la plausibilité des résultats trou-



$$L_1 = 3 \text{ H}, \quad L_2 = 15 \text{ H}, \quad |M| = 6 \text{ H}$$

$$R = 7.5 \Omega, \quad e = 120 \text{ V}$$

vés :

1. vérifier les valeurs initiales et finales des différentes grandeurs ;
2. vérifier les lois de Kirchhoff.

4.9 Exercices non résolus

Réponse :

$$i_0(t) = 16 - 16e^{-5t} \text{ A}, \quad t \geq 0$$

$$v_0(t) = 120e^{-5t} \text{ V}, \quad t \geq 0$$

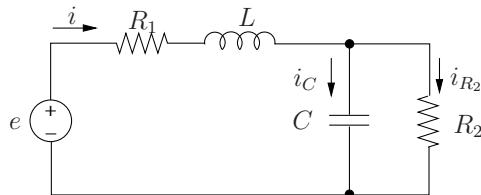
$$i_1(t) = 24 - 24e^{-5t} \text{ A}, \quad t \geq 0$$

$$i_2(t) = -8 + 8e^{-5t} \text{ A}, \quad t \geq 0.$$

Exercice 4.11

Étant donné le circuit de la figure ci-dessous fonctionnant en régime sinusoïdal établi à la pulsation $\omega = 1000 \text{ rad/s}$, on demande :

1. de déterminer l'expression des courants $i(t)$, $i_C(t)$ et $i_{R_2}(t)$;
2. d'établir les bilans de puissances active et réactive ;
3. à l'instant $t = 0.001\text{s}$, de calculer les puissances instantanées et fluctuantes consommées par la résistance R_2 et le condensateur C et fournies par la source e .



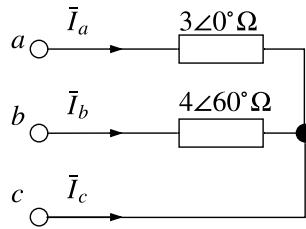
$$R_1 = 100 \Omega, R_2 = 1 \text{ k}\Omega, C = 5 \mu\text{F}, L = 2 \text{ mH}, \\ \bar{E} = 10\angle 0^\circ \text{ V (valeur efficace)}$$

Exercice 4.12

On désire modifier le circuit de l'exercice 4.11 de manière à ce que la puissance réactive fournie par la source e soit nulle. Pour cela, on place une impédance soit en série, soit en parallèle avec la source e . Déterminer, dans chaque cas, la nature et la valeur du ou des éléments à placer ainsi que la nouvelle répartition des puissances actives.

Exercice 4.13 Triphasé déséquilibré étoile

Le circuit suivant fonctionne en 240 V triphasé. Calculez le courant \bar{I}_c .

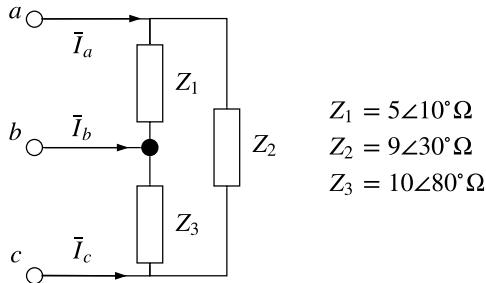


Réponse :
 $i(t) = 0.06 \cos(1000t + 0.94)$,
 $i_C(t) = 0.0589 \cos(1000t + 1.14)$,
 $i_{R_2}(t) = 0.0118 \cos(1000t - 0.43)$
 $S_{Z_1} = 0.18 + j0.004 \text{ VA}, S_{Z_2} = 0.07 - j0.347 \text{ VA}$
 $p_{R_2} = 0.098 \text{ W}, p_{fR_2} = 0.029 \text{ W}$
 $p_C = -0.315 \text{ W}, p_{fC} = -0.315 \text{ W}$
 $p_E = -0.166 \text{ W}, p_{fE} = -0.416 \text{ W}$

Réponse :
 $L_s = 190.3 \text{ mH}, P_{R_1} = 0.522 \text{ W}, P_{R_2} = 0.2 \text{ W},$
 $P_E = 0.722 \text{ W}$
 $L_{ff} = 291 \text{ mH}, P_{R_1} = 0.18 \text{ W}, P_{R_2} = 0.07 \text{ W},$
 $P_E = 0.25 \text{ W}$

Exercice 4.14 Triphasé déséquilibré triangle

Le circuit suivant fonctionne en 450 V triphasé. Calculez le courant \bar{I}_a .



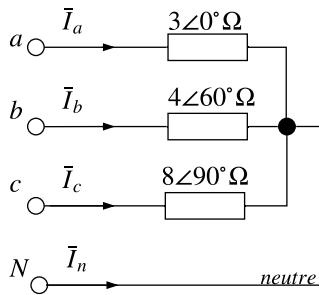
$$Z_1 = 5\angle 10^\circ \Omega \\ Z_2 = 9\angle 30^\circ \Omega \\ Z_3 = 10\angle 80^\circ \Omega$$

Réponse :
 $\bar{I}_c = -72.11\angle 106^\circ \text{ A}$

Exercice 4.15 Triphasé déséquilibré avec neutre

Le circuit suivant fonctionne sous une tension de ligne efficace de 240 V. Calculez les courants de ligne et le courant de neutre.

Réponse :
 $\bar{I}_a = 110.29\angle -36.52^\circ \text{ A}$



4.10 Solution des exercices

Solution de l'exercice 4.1

On a les correspondances

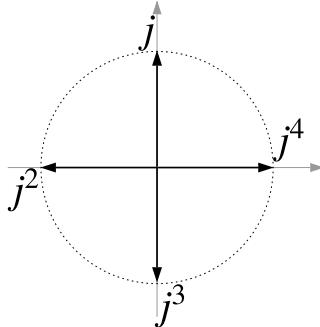
$$j \quad 1e^{j\pi/2}$$

$$j^2 \quad 1e^{j\pi}$$

$$j^3 \quad 1e^{j3\pi/2}$$

$$j^4 \quad 1e^0$$

ce qui se traduit sur le diagramme de phaseurs par :



Multiplier par j revient à ajouter un déphasage de $\pi/2$.

Solution de l'exercice 4.2

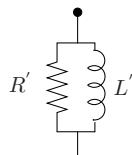
1. Schémas équivalents d'une bobine

Les deux dipôles sont équivalents s'ils présentent la même impédance Z ou la même admittance Y .

L'impédance et l'admittance du circuit série sont données par :

$$Z(j\omega) = R + j\omega L \Rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

L'admittance du circuit parallèle est :



$$Y'(j\omega) = \frac{1}{R'} - \frac{j}{\omega L'}$$

On déduit :

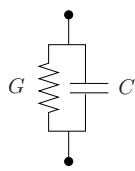
$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= Y'(j\omega) \Rightarrow \frac{1}{R'} &= \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \\ R' &= R + \frac{\omega^2 L^2}{R} \\ &= R \left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2} \right) = R (1 + Q^2) \end{aligned}$$

où $Q = \frac{\omega L}{R}$ est le facteur de qualité de la bobine.

$$\begin{aligned} R' &= R (1 + Q^2) \simeq Q^2 R \text{ si } Q \gg \\ L' &= L \left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2} \right) = L \left(1 + \frac{1}{Q^2} \right) \\ &\simeq L \text{ si } Q \gg \end{aligned}$$

2. Schémas équivalents d'un condensateur

Pour le circuit parallèle, on écrit :



$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= G + j\omega C \\ Z(j\omega) &= \frac{1}{G + j\omega C} \\ &= \frac{G - j\omega C}{G^2 + \omega^2 C^2} \end{aligned}$$

L'impédance du circuit série est :



$$Z'(j\omega) = \frac{1}{G'} - \frac{j}{\omega C'}$$

On déduit :

$$\begin{aligned} Z(j\omega) = Z'(j\omega) \Rightarrow \frac{1}{G'} &= \frac{G}{G^2 + \omega^2 C^2} \\ G' &= G \left(1 + \frac{\omega^2 C^2}{G^2} \right) = G (1 + Q^2) \\ &= G \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \delta} \right) \end{aligned}$$

avec Q le facteur de qualité du condensateur et δ son angle de pertes.

$$\begin{aligned} G' &= G (1 + Q^2) \simeq Q^2 G \text{ si } Q \gg \\ C' &= C \left(1 + \frac{G^2}{\omega^2 C^2} \right) = C \left(1 + \frac{1}{Q^2} \right) \simeq C \text{ si } Q \gg \end{aligned}$$

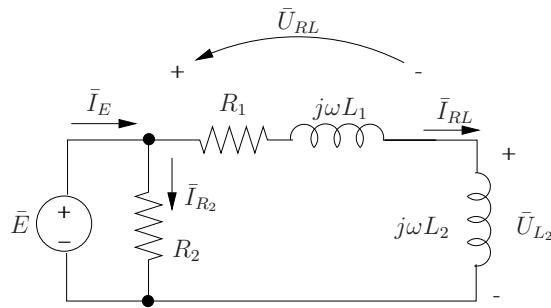
Solution de l'exercice 4.3

L'impédance équivalente vaut

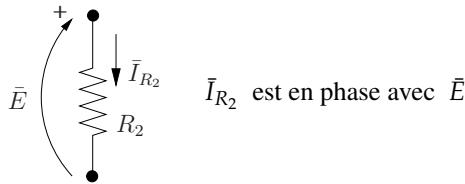
$$\begin{aligned}
 Z_i &= 2 + j3 + \frac{(3 + j5)(5 - j6)}{3 + j5 + 5 - j6} \\
 &= 2 + j3 + \frac{(3 + j5)(5 - j6)}{8 - j} \\
 &= 2 + j3 + \frac{(5.83\angle 59.04^\circ)(7.81\angle -50.19^\circ)}{8.06\angle -7.13^\circ} \\
 &= 2 + j3 + 5.65\angle 15.98 & = 7.43 + j4.55 \\
 &= 8.71\angle 31.48^\circ \Omega.
 \end{aligned}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{Z_i} = 11.48\angle -31.48^\circ$$

Solution de l'exercice 4.4



- Le courant et la tension aux bornes de la résistance R_2 sont en phase.



- Le circuit aux bornes de \bar{E} est de type RL :

- (a) $R_2 // (R_1 + j\omega L_1 + j\omega L_2)$ = circuit RL
→ \bar{I}_E est en retard par rapport à \bar{E} d'un angle $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$;
- (b) $R_1 + j\omega L_1 + j\omega L_2$ = circuit RL
→ \bar{I}_{RL} est en retard par rapport à \bar{E} d'un angle $0 < \varphi' < \frac{\pi}{2}$.

- De la PLK au noeud A on déduit \bar{I}_E :

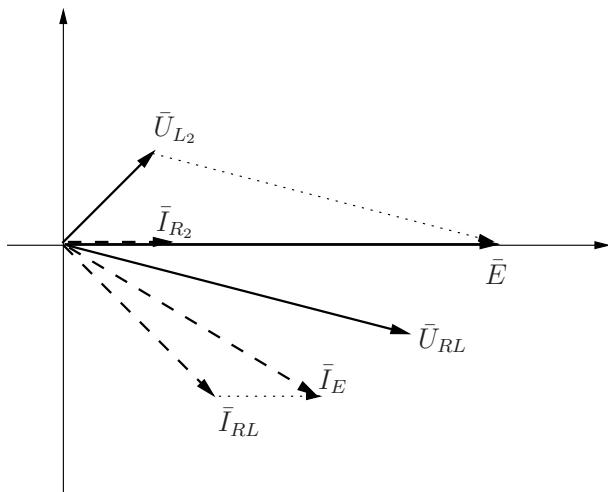
$$\bar{I}_E = \bar{I}_{RL} + \bar{I}_{R2}$$

- \bar{U}_{L2} est la tension aux bornes d'une inductance pure ; elle est en avance de $\frac{\pi}{2}$ par rapport au courant qui la parcourt, c'est-à-dire \bar{I}_{RL}

- La SLK fournit \bar{U}_{RL} :

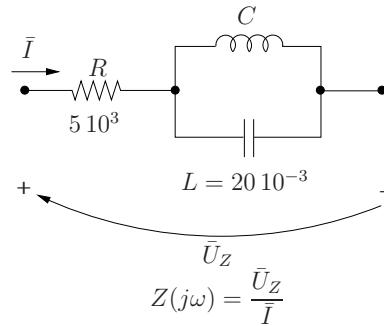
$$\bar{U}_{RL} + \bar{U}_{L2} = \bar{E}$$

Le diagramme de phaseurs correspondant est



Solution de l'exercice 4.5

1. Calcul de l'impédance du dipôle



Pour que le courant \bar{I} parcourant le dipôle présente un retard de 45° par rapport à la tension \bar{U}_Z il faut que l'argument de l'impédance Z soit égal à 45° .

$$\angle Z(j\omega) = 45^\circ$$

On a :

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= R + \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} \\ &= R + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \angle Z &= \arctg \frac{\omega L}{\frac{1 - \omega^2 LC}{R}} \\ &= 45^\circ \end{aligned}$$

Dès lors :

$$\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} = R .$$

On déduit :

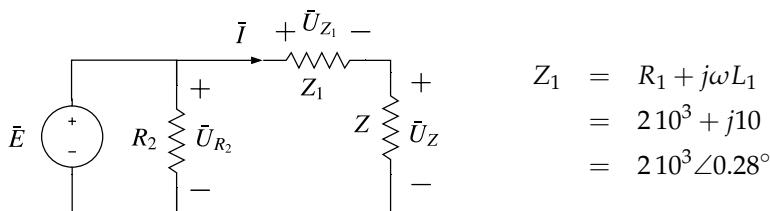
$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\omega^2 L} \left(1 - \frac{\omega L}{R} \right) \\ &= \frac{1}{10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-3}} \left(1 - \frac{10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^3} \right) \\ &= 4.98 \cdot 10^{-5} = 49.8 \mu\text{F} \end{aligned}$$

et

$$Z = (5 + j5) \cdot 10^3 = 7.071 \cdot 10^3 \angle 45^\circ \Omega.$$

2. Diagramme de phaseurs

On connecte le dipôle Z aux bornes du circuit comme indiqué ci-dessous.



Le courant \bar{I} est donné par :

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{\bar{E}}{Z_1 + Z} = \frac{120 \angle 0}{2 \cdot 10^3 + j10 + 5 \cdot 10^3 + j5 \cdot 10^3} \\ &= 11.3 \cdot 10^{-3} - j8.11 \cdot 10^{-3} \\ &= 13.9 \cdot 10^{-3} \angle -35.6^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

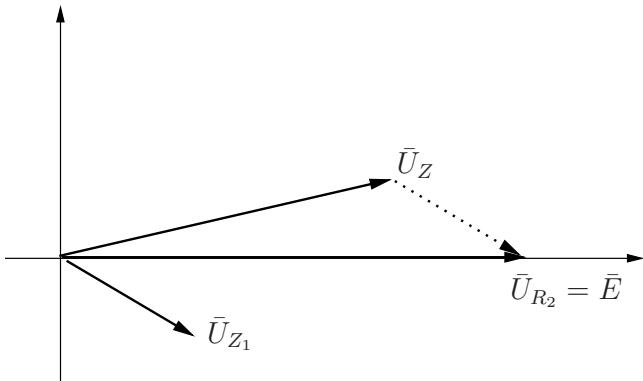
et

$$\begin{aligned} \bar{U}_{R_2} &= \bar{E} = 120 \angle 0 \text{ V} \\ \bar{U}_Z &= Z \bar{I} = 97.25 + j16.11 = 98.57 \angle 9.4^\circ \text{ V} \\ \bar{U}_{Z_1} &= Z_1 \bar{I} = 22.8 - j16.1 = 27.9 \angle -35.3^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

On remarque qu'il existe bien un déphasage de 45° entre la tension \bar{U}_Z et le courant \bar{I} :

$$\angle \bar{U}_Z - \angle \bar{I} = 9.40^\circ - (-35.6^\circ) = 45^\circ.$$

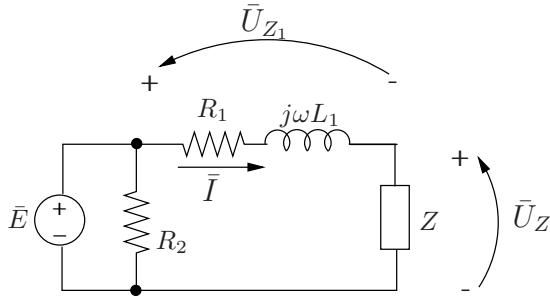
Le diagramme de phaseurs correspondant est



On vérifie :

$$\bar{U}_{R_2} = \bar{E} = \bar{U}_{Z_1} + \bar{U}_Z.$$

Solution de l'exercice 4.6



L'état du circuit est celui déterminé à l'exercice 4.5 :

$$\begin{aligned}\bar{I} &= 11.3 \cdot 10^{-3} - j8.11 \cdot 10^{-3} = 13.9 \cdot 10^{-3} \angle -35.6^\circ \text{ A} \\ \bar{U}_Z &= 98.57 \angle -9.40^\circ = 97.25 + j16.11 \text{ V} \\ \bar{U}_{Z_1} &= 22.8 - j16.1 = 27.9 \angle -35.3^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

1. Calcul des puissances consommées par les éléments R, L, C .

A. Résistance R_2 :

1. puissance complexe :

$$S_{R_2} = \bar{U}_{R_2} \bar{I}_{R_2}^* = \bar{E} \cdot \frac{\bar{E}^*}{R_2} = \frac{\bar{E}^2}{R_2} = 3.6 \text{ VA}.$$

On déduit :

- (a) la puissance active $P_{R_2} = \Re(S) = 3.6 \text{ W}$
- (b) et on vérifie $Q = 0$, une résistance ne consomme pas de puissance réactive ;

2. puissances instantanée et fluctuante :

$$\begin{aligned}p(t) &= P + |S| \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i) \\ &= 3.6 + 3.6 \cos 2\omega t \\ p_f(t) &= 3.6 \cos 2\omega t\end{aligned}$$

B. Impédance $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$

1. puissance complexe :

$$\begin{aligned}S_{Z_1} = \bar{U}_{Z_1} \bar{I}^* &= Z_1 \bar{I} \bar{I}^* \\ &= Z_1 I^2 \\ &= R_1 I^2 + j\omega L_1 I^2 \\ &= 0.386 + j0.002 \text{ VA}\end{aligned}$$

2. puissance active :

$$P_{R_1} = R_1 I^2 = 0.386 \text{ W}.$$

dissipée uniquement dans R_1

3. puissance réactive :

$$Q_{L_1} = \omega L_1 I^2 = 0.002 \text{ Var}$$

consommée par l'inductance L_1

4. puissances instantanée et fluctuante :

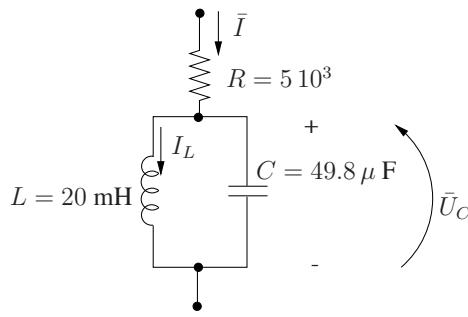
$$\begin{aligned} p(t) &= 0.386 + 0.386 \cos(2\omega t - 35.3^\circ - 35.6^\circ) \\ p_f(t) &= 0.386 \cos(2\omega t - 35.3^\circ - 35.6^\circ). \end{aligned}$$

C. Impédance Z

A l'exercice 2.3, nous avons déduit la composition de cette impédance :

$$Z = (5 + j5) 10^3 \Omega$$

représentée par



1. puissances complexe, active et réactive :

$$\begin{aligned} S_Z &= \bar{U}_Z \bar{I}^* \\ &= 0.966 + j0.966 \text{ VA} \\ P_R &= 0.966 \text{ W} \\ &\quad \text{consommée par la résistance } R \\ Q_{LC} &= 0.966 \text{ Var} \\ &\quad \text{consommée par le dipôle } LC. \end{aligned}$$

Dans ce dipôle, L consomme de la puissance réactive et C en produit.

Déterminons ces puissances réactives. On a pour L :

$$Q_L = \omega L I_L^2$$

avec \bar{I}_L le courant parcourant l'inductance ;

et pour C :

$$Q_C = -\omega C U_C^2$$

avec \bar{U}_C la tension aux bornes du condensateur C .

On calcule :

$$\begin{aligned} \bar{U}_C &= \bar{U}_{LC} = j5 10^3 \bar{I} \\ \text{et } \bar{I}_L &= \frac{\bar{U}_{LC}}{j\omega L} = \frac{5 \cdot 10^3}{\omega L} \bar{I} = 250 \bar{I}. \end{aligned}$$

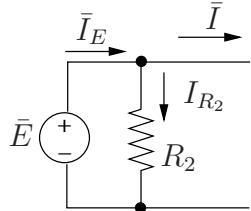
Dès lors :

$$\begin{aligned} Q_L &= \omega L I_L^2 = \omega L (250)^2 I^2 = 241.513 \text{ Var} \\ Q_C &= -\omega C U_C^2 = -\omega C 25 10^6 I^2 = -240.546 \text{ Var}. \end{aligned}$$

L consomme 241.513 Var et C produit 240.546 Var. On vérifie :

$$Q_L + Q_C = Q_{LC}.$$

2. Puissances fournies par la source \bar{E}



$$\begin{aligned} \bar{I}_E &= \bar{I} + \bar{I}_{R_2} = \bar{I} + \frac{\bar{E}}{R_2} \\ &= 41.3 10^{-3} - j 8.11 10^{-3} \\ &= 42.1 10^{-3} \angle -11.1^\circ \end{aligned}$$

1. puissances complexe, active et réactive :

$$\begin{aligned} S_E &= \bar{E} \bar{I}_E^* = 4.956 + j 0.973 \text{ VA} \\ P_E &= 4.956 \text{ W} \\ Q_E &= 0.973 \text{ Var} \end{aligned}$$

E produit 0.973 Var et 4.956 W

2. puissances instantanée et fluctuante :

$$\begin{aligned} p(t) &= 4.956 + 5.05 \cos(2\omega t - 11.1^\circ) \\ p_f(t) &= 5.05 \cos(2\omega t - 11.1^\circ). \end{aligned}$$

3. Bilans de puissances

1. Puissance active :

$$P_E = P_{R_1} + P_{R_2} + P_R$$

2. Puissance réactive :

$$Q_E = Q_{L_1} + Q_L + Q_C.$$

Solution de l'exercice 4.7

1. Détermination de la pulsation ω

La puissance fournie à la charge Z_L sera purement active si l'impédance Z_L (et donc aussi son inverse Y_L) est purement réelle. On a :

$$\begin{aligned} Z_L &= \frac{1}{j\omega C_L + \frac{1}{R_L + j\omega L_L}} \\ Y_L &= j\omega C_L + \frac{1}{R_L + j\omega L_L} \\ &= j\omega C_L + \frac{R_L - j\omega L_L}{R_L^2 + \omega^2 L_L^2} \end{aligned}$$

Il faut :

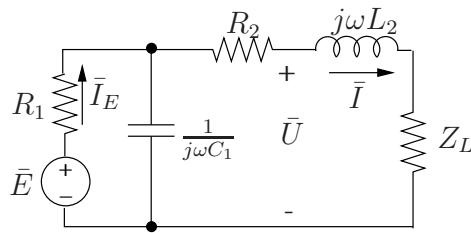
$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(Y_L) = 0 &\Leftrightarrow \omega C_L - \frac{\omega L_L}{R_L^2 + \omega^2 L_L^2} = 0 \\ \omega &= \sqrt{\frac{1}{L_L C_L} - \frac{R_L^2}{L_L^2}} = 9.95 \cdot 10^4 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

A cette pulsation, l'impédance Z_L se réduit à la résistance :

$$Z_L = \frac{R_L^2 + \omega^2 L_L^2}{R_L} = 500 \Omega$$

2. Puissances consommées par Z_L

Dans le domaine fréquentiel à la pulsation ω , le circuit est représenté par le schéma suivant

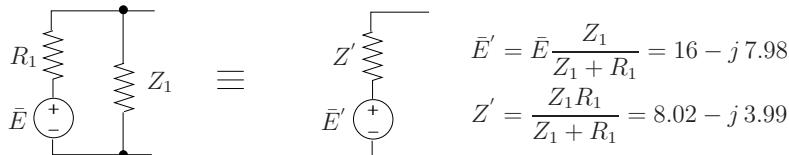


Posons :

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C_1} = -j20.1$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega L_2 = 20 + j9.95$$

Transformant la partie gauche du circuit comme suit (e.g. par équivalences de source et association en parallèle) :



on dérive :

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}'}{Z' + Z_2 + Z_L} = (30.2 - j15.4) \cdot 10^{-3}$$

La puissance complexe consommée par la charge Z_L est purement active et est donnée par :

$$S_L = P_L = Z_L \bar{I}^2 = 0.575 \text{ W}$$

Détermination du courant débité par la source de tension \bar{E} :

$$\bar{U} = (Z_L + Z_2) \bar{I} = 15.9 - j7.73$$

$$\bar{I}_E = \frac{\bar{E} - \bar{U}}{R_1} = 0.415 + j0.773$$

Les puissances complexes, active et réactive fournies par \bar{E} sont données par :

$$\text{puissance complexe : } S_E = \bar{E} \bar{I}_E^* = 8.3 - j15.5 \text{ VA}$$

$$\text{puissance active : } P_E = \operatorname{Re}(S_E) = 8.3 \text{ W}$$

$$\text{puissance réactive : } Q_E = \operatorname{Im}(S_E) = -15.5 \text{ var}$$

La puissance fluctuante en $t = 10^{-3}$ s s'exprime par :

$$\begin{aligned} p_f &= |S_E| \cos(2\omega t + \angle \bar{E} + \angle \bar{I}_E) \text{ avec } \angle \bar{E} = 0 \quad \angle \bar{I}_E = 1.078 \text{ rad} \\ &= 17.55 \cos(2 \times 9.95 \times 10^4 \times 10^{-3} + 1.078) \\ &= 9.72 \text{ W} \end{aligned}$$

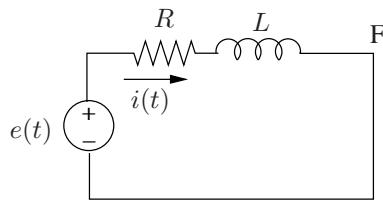
On déduit la puissance instantanée en $t = 10^{-3}$ s :

$$p_E = p_f + P_E = 18.02 \text{ W}$$

Solution de l'exercice 4.8

Il faut distinguer deux périodes temporelles :

1. durant la période $t < 0$, le circuit fonctionne en régime sinusoïdal établi ;
2. durant la période de court-circuit, $t \geq 0$, le régime est transitoire et le circuit se transforme en celui de la figure ci-dessous. Il s'agit d'un simple circuit RL série.



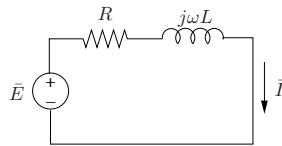
Soit i_0 , la valeur du courant circulant dans le circuit à l'instant précis du court-circuit ($t = 0$). Nous recherchons l'expression du courant $i(t)$ durant la période $t \geq 0$ qui peut se mettre sous la forme générale

$$i(t) = i_0 e^{-t/\tau} + A e^{-t/\tau} + B \cos(\omega t + \phi)$$

avec :

1. $\tau = L/R$ la constante de temps du circuit ;
2. $i_{libre} = i_0 e^{-t/\tau}$ la réponse libre ;
3. $i_{forcee} = A e^{-t/\tau} + B \cos(\omega t + \phi)$ la réponse forcée qui comprend :
 - (a) le terme $i_{transit} = A e^{-t/\tau}$, partie transitoire de la réponse forcée, constituant avec la réponse libre la solution générale de l'équation différentielle homogène qui régit $i(t)$;
 - (b) le terme $i_{etabli} = B \cos(\omega t + \phi)$, constituant la régime permanent ou établi donné par la solution particulière de l'équation différentielle non homogène. Cette partie correspond en fait à la solution du circuit en régime sinusoïdal établi. Son expression peut être déterminée par une analyse en phaseurs.

On a, d'après la figure



$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L} = \frac{\bar{E}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-j\arctg \frac{\omega L}{R}} \quad \text{avec} \quad \bar{E} = E \angle 0$$

et

$$i_{etabli}(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R} \right).$$

La condition initiale en $t = 0$ impose :

$$i_0 = i_0 + A + \frac{E R}{R^2 + \omega^2 L^2} \Rightarrow A = \frac{-E R}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

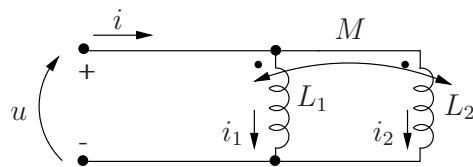
Finalement :

$$i(t) = i_0 e^{-t/\tau} - \frac{E R}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-t/\tau} + \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R} \right)$$

Notons que seul le régime établi peut être calculé à partir des phaseurs. Le régime transitoire ne peut être obtenu que par une analyse transitoire temporelle.

Solution de l'exercice 4.9

a) Soient i_1 et i_2 les deux courants parcourant les 2 inductances, comme indiqué à la figure ci-dessous. Celles-ci sont soumises à une même tension u et le dipôle est alimenté par le courant i . Etant donné les sens choisis pour



les courants i_1 , i_2 , entrant tous deux par la borne repérée par le point •, on écrit :

$$\begin{aligned} u_1 &= u = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= u = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

On déduit la relation suivante entre i_1 et i_2 :

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \\ \frac{di_1}{dt} &= \frac{L_2 - M}{L_1 - M} \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

D'autre part, la PLK écrite au noeud 1 fournit :

$$i = i_1 + i_2$$

et donc

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}.$$

On dérive successivement :

$$\begin{aligned} u &= \left(L_1 \frac{L_2 - M}{L_1 - M} + M \right) \frac{di_2}{dt} \\ \frac{di}{dt} &= \left(\frac{L_2 - M}{L_1 - M} + 1 \right) \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

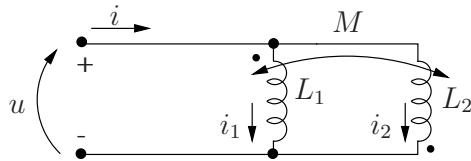
et finalement, la relation $u - i$ aux bornes du dipôle s'écrit :

$$\begin{aligned} u &= \left(L_1 \frac{L_2 - M}{L_1 - M} + M \right) \frac{1}{\frac{L_2 - M}{L_1 - M} + 1} \frac{di}{dt} \\ &= \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{di}{dt}. \end{aligned}$$

Le dipôle est donc représenté par une inductance équivalente :

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}.$$

b) Si la polarité magnétique de la bobine 2 est inversée comme indiqué à la figure suivante,



on écrit :

$$\begin{aligned} u &= L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ u &= -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}. \end{aligned}$$

On dérive successivement :

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= \frac{L_2 + M}{L_1 + M} \frac{di_2}{dt} \\ \frac{di}{dt} &= \left(\frac{L_2 + M}{L_1 + M} + 1 \right) \frac{di_2}{dt} \\ u &= \left(L_1 \frac{L_2 + M}{L_1 + M} - M \right) \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

et finalement :

$$\begin{aligned} u &= \left(L_1 \frac{L_2 + M}{L_1 + M} - M \right) \frac{1}{L_1 \frac{L_2 + M}{L_1 + M} + 1} \frac{di}{dt} \\ &= \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \frac{di}{dt}. \end{aligned}$$

L'inductance équivalente du dipôle est donc donnée par :

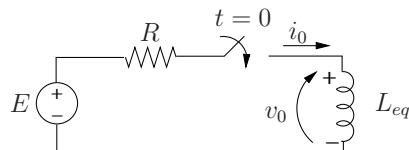
$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}.$$

Solution de l'exercice 4.10**1. Expression de i_0**

Les deux inductances couplées, connectées en parallèle, peuvent être remplacées par l'inductance équivalente (voir exercice 3.1) :

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} = \frac{45 - 36}{18 - 12} = 1.5 \text{ H}.$$

On aboutit donc au circuit RL suivant :



La constante de temps de ce circuit est :

$$\tau = \frac{L_{eq}}{R} = \frac{1.5}{7.5} = 0.2 \text{ s}.$$

La courant d'établissement de ce circuit est donné par :

$$i_0(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) = 16 - 16e^{-5t} \text{ A}, \quad t \geq 0$$

étant donné qu'il est supposé qu'aucune énergie n'est initialement stockée dans l'inductance ($i_0(0) = 0$).

2. Expression de v_0

La tension v_0 s'obtient en appliquant la SLK dans la maille. On déduit :

$$\begin{aligned} v_0 &= E - Ri_0 \\ &= 120 - 7.5 i_0 \\ &= 120 e^{-5t} \text{ V}, \quad t \geq 0^+. \end{aligned}$$

3. Expression de i_1 et i_2

Les courants i_1 et i_2 se déduisent des relations de branches relatives aux deux inductances couplées. Ainsi, on a :

$$v_0 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

soit

$$\begin{aligned} 3 \frac{di_1}{dt} + 6 \frac{di_2}{dt} &= 6 \frac{di_1}{dt} + 15 \frac{di_2}{dt} \\ \text{ou } \frac{di_1}{dt} &= -3 \frac{di_2}{dt}. \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \text{ou } \frac{i_0}{dt} &= \frac{i_1 + i_2}{dt} \\ &= \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \\ &= -2 \frac{di_2}{dt}. \end{aligned}$$

Remplaçant $\frac{di_0}{dt}$ par son expression, on dérive :

$$\begin{aligned} 80 e^{-5t} &= -2 \frac{di_2}{dt} \\ \text{soit } i_2(t) &= \int_0^t -40 e^{-5x} dx \\ &= -8 + 8 e^{-5t} \text{ A}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} i_1(t) &= i_0(t) - i_2(t) \\ &= 24 - 24 e^{-5t} \text{ A}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

4. Vérification des valeurs limites

a) i_0 :

$t = 0^+$: $i_0(0^+) = 0$
on a bien $i_0(0^+) = i_0(0^-)$, continuité du courant dans une inductance.

$t = \infty$: $\lim_{t \rightarrow \infty} i_0(t) = 16 = \frac{E}{R}$
lorsque le régime est établi, l'inductance ne joue plus aucun rôle ; elle ne s'oppose plus au passage du courant.

b) v_0, i_1, i_2 :

1. Remarquons tout d'abord que les expressions trouvées pour i_1 et i_2 sont compatibles avec celles de v_0 .

On vérifie en effet que :

$$\begin{aligned} v_0 &= 3\frac{di_1}{dt} + 6\frac{di_2}{dt} = 360e^{-5t} - 240e^{-5t} \\ &= 120e^{-5t} \text{ V}, \quad t \geq 0^+ \end{aligned}$$

ou que

$$\begin{aligned} v_0 &= 6\frac{di_1}{dt} + 15\frac{di_2}{dt} = 720e^{-5t} - 600e^{-5t} \\ &= 120e^{-5t} \text{ V}, \quad t \geq 0^+. \end{aligned}$$

2. Les valeurs finales de i_1 et i_2 peuvent être vérifiées en utilisant les flux totaux embrassés par chacune des deux bobines :

(a) pour la bobine 1 :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= L_1 i_1 + M i_2 \\ &= 3i_1 + 6i_2 \end{aligned}$$

(b) pour la bobine 2 :

$$\begin{aligned} \phi_2 &= M i_1 + L_2 i_2 \\ &= 6i_1 + 15i_2. \end{aligned}$$

On trouve :

$$\phi_1 = \phi_2 = 24 - 24e^{-5t} \text{ Wb}.$$

On remarque que l'on a bien :

$$v_0 = \frac{d\phi_1}{dt} = \frac{d\phi_2}{dt} = 120e^{-5t} \text{ V}, \quad t \geq 0^+.$$

Les valeurs finales des flux sont :

$$\phi_1(\infty) = \phi_2(\infty) = 24 \text{ Wb}.$$

Ces valeurs sont compatibles avec les valeurs finales des courants. On vérifie en effet :

$$\begin{aligned} i_1(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (24 - 24e^{-5t}) = 24 \text{ A} \\ i_2(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (-8 + 8e^{-5t}) = -8 \text{ A} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\phi_1(\infty) &= L_1 i_1(\infty) + M i_2(\infty) = 3 \times 24 + 6 \times (-8) = 24 \text{ Wb} \\ \phi_2(\infty) &= M i_1(\infty) + L_2 i_2(\infty) = 6 \times 24 + 15 \times (-8) = 24 \text{ Wb}\end{aligned}$$

Il faut remarquer qu'il n'était pas possible de vérifier directement les valeurs finales de i_1 et i_2 sans recourir au calcul des flux. En effet, pour $t \rightarrow \infty$, les 2 bobines se comportent comme des court-circuits, et il n'est pas possible de déterminer comment le courant total de c.c, i_0 , se divise entre les deux bobines.

5

Théorèmes fondamentaux

Ce chapitre est consacré aux principaux théorèmes régissant l'ensemble ou certaines classes des circuits électriques localisés. L'analyse présentée dans ce chapitre se limite à une représentation en courant continu, hormis pour la section relative à l'adaptation et le transfert de puissance maximum. Les méthodes sont cependant directement extensibles au cas du régime sinusoïdal avec l'emploi des phaseurs.

5.1 Théorème de Tellegen

Le théorème de Tellegen indique que la puissance totale fournie par un réseau est nulle à tout instant.

On peut aussi dire que les lois de Kirchhoff impliquent la conservation de l'énergie.

Ce théorème est général et s'applique à des circuits linéaires ou non linéaires, variants ou invariants, passifs ou actifs, réciproques ou non. La seule contrainte est celle imposée par les lois de Kirchhoff, à savoir le caractère localisé des circuits.

Ce théorème peut être démontré de manière assez élégante en utilisant les représentations matricielles décrites au Chapitre 8.

5.2 Théorème de Substitution

5.2.1 Enoncé

Le théorème est énoncé dans la Table 5.1 et illustré à la Figure 5.1.

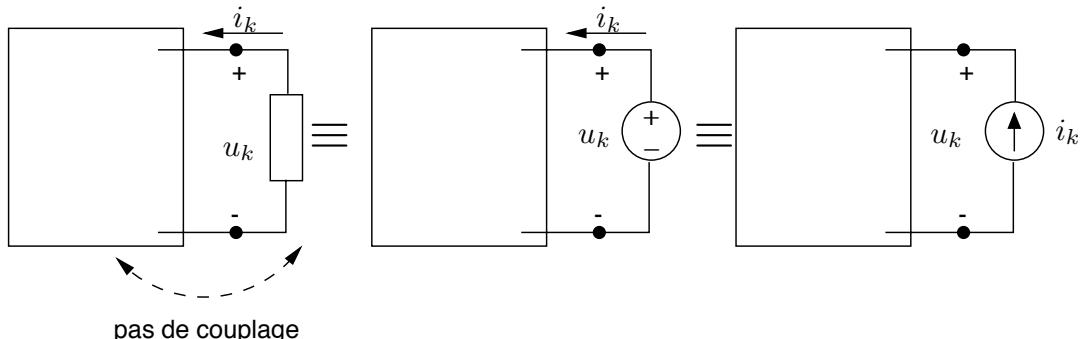


FIGURE 5.1: Illustration du théorème de substitution.

Soit un réseau comportant un certain nombre de sources indépendantes d'énergie et soumis à des conditions initiales déterminées. Supposons que ce réseau possède une solution unique, fonction des signaux délivrés par ces sources et conditions initiales. Remplaçons une de ses branches, supposée non couplée avec les autres,

- soit par un injecteur idéal de courant dont le courant est égal à celui parcourant la branche préexistante
- soit par un générateur idéal de tension dont la f.e.m. est égale à la tension de la branche préexistante.

Le théorème de substitution affirme que la solution du réseau ainsi modifié sera identique à celle du réseau initial.

TABLE 5.1: Théorème de substitution.

5.2.2 *Démonstration*

Soit un réseau constitué de b branches et soit

$$(u_1, u_2, \dots, u_b), \quad (i_1, i_2, \dots, i_b)$$

sa solution. Celle-ci obéit aux contraintes imposées par les lois de Kirchhoff, et est fonction des conditions initiales et des signaux délivrés par les sources indépendantes d'énergie. Cette solution est unique par hypothèse. Supposons que l'on modifie le réseau en remplaçant sa branche k par une source idéale de tension de force électromotrice $e_k(\cdot) = u_k(\cdot)$: par hypothèse, la solution du réseau modifié $(u_1, u_2, \dots, e_k, \dots, u_b), (i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_b)$ sera identique à la solution du réseau initial. En effet, le réseau modifié possède les mêmes sources indépendantes d'énergie que le réseau initial (à l'exception de $e_k(\cdot)$), les mêmes conditions initiales et la même topologie, donc les mêmes contraintes imposées par les lois de Kirchhoff.

Une démonstration tout à fait analogue peut être faite si l'on remplace $i_k(\cdot)$ par $j_k(\cdot)$.

5.2.3 *Validité*

Ce théorème est valable pour tout réseau localisé possédant une solution unique. Certainement valable pour tout réseau linéaire (à l'exception peut-être de certains cas dégénérés), il peut également s'appliquer aux réseaux non-linéaires remplissant ces conditions.

5.2.4 *Applications*

Le théorème de substitution a de nombreuses applications tant pratiques que théoriques. Par exemple, il permet de transformer un circuit comportant un seul élément variant (ou quelquefois non linéaire) en un circuit invariant (respectivement linéaire), en remplaçant l'élément "indésirable" par une source indépendante d'énergie. D'autre part, il est utilisé pour la démonstration d'autres théorèmes.

5.3 Théorème de superposition

5.3.1 Énoncé

Le théorème est énoncé dans la Table 5.2. On entend par "élimination

Soit un réseau linéaire, initialement relaxé et possédant un certain nombre de sources indépendantes d'énergie. La réponse de ce réseau à toutes les excitations agissant simultanément est égale à la somme des réponses obtenues lorsque chacune d'elles agit seule (les autres excitations ayant été éliminées).

TABLE 5.2: Théorème de superposition.

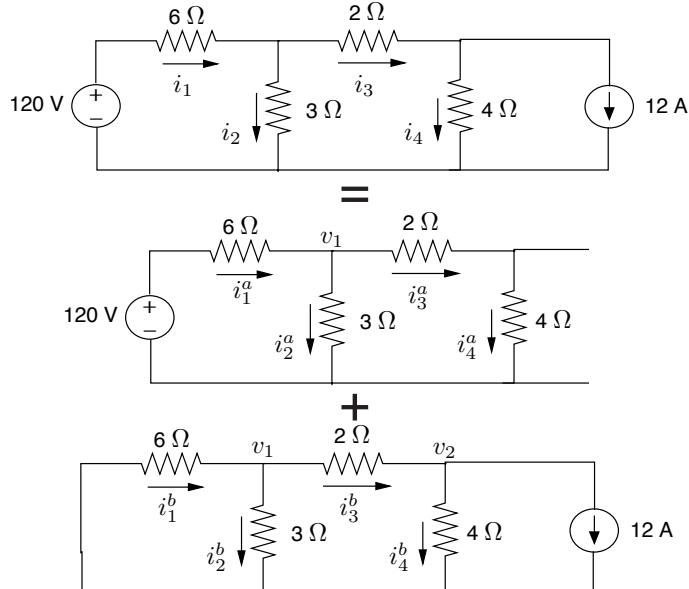
d'une excitation"

- la mise en court-circuit de ses bornes s'il s'agit d'une source de tension ($e_s = 0$),
- l'ouverture de ses bornes s'il s'agit d'une source de courant ($j_s = 0$).

5.3.2 Validité

Le théorème de superposition est valable pour tout circuit à éléments localisés, linéaires et initialement relaxés, puisqu'il est basé sur le caractère linéaire et homogène des relations fournies par les lois de Kirchhoff et des relations $u - i$ de ses branches.

Exemple : Illustration du théorème de superposition



5.4 Théorème de Thévenin

Le théorème de Thévenin a de nombreuses applications aussi bien pratiques que théoriques. Par exemple on peut citer le problème de l'adaptation (cf. Section 5.4.4) et les analyses de sensibilités.

5.4.1 Énoncé

Le théorème est énoncé dans la Table 5.3 et illustré à la Figure 5.2.

Tout réseau \mathcal{R} linéaire, initialement relaxé et vu d'un accès peut être remplacé par une source équivalente de tension constituée d'une force électromotrice, v_{Th} , en série avec le dipôle R_{Th} où :

- v_{Th} est numériquement égale à la différence de potentiel aux bornes de l'accès à vide ;
- R_{Th} est le réseau \mathcal{R} passifié : dipôle vu de l'accès considéré, obtenu à partir de \mathcal{R} lorsque l'on élimine toutes les sources indépendantes d'énergie.

La charge connectée aux bornes de la "source équivalente de Thévenin" ainsi définie est supposée dépourvue de couplages avec \mathcal{R} .

TABLE 5.3: Théorème de Thévenin.

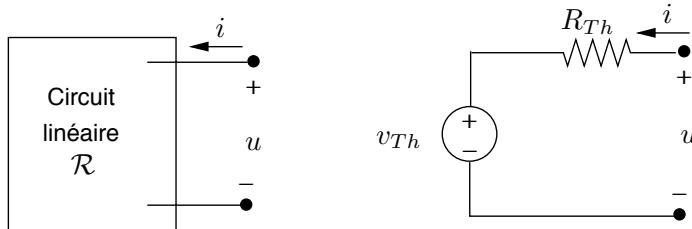


FIGURE 5.2: Illustration du théorème de Thévenin.

5.4.2 Démonstration

La démonstration est constructive et se divise en trois étapes.

Etape 1. Par application du théorème de substitution, on remplace la charge par une source de courant (Figure 5.3). Cela est possible si le réseau \mathcal{R} a une solution unique – ce qui est le cas si le réseau est linéaire – la charge a une solution unique, et il n'y a pas de couplage entre la charge et \mathcal{R} .

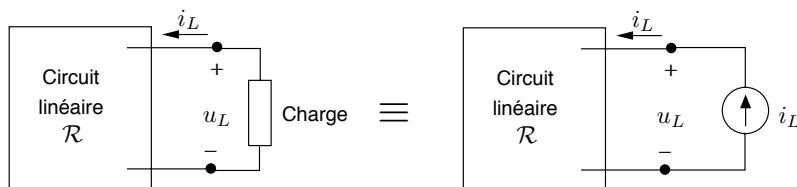


FIGURE 5.3: Etape 1 : substitution.

Etape 2. On applique le théorème de superposition (Figure 5.4) :

1. la source i_L agit seule, les sources indépendantes de \mathcal{R} sont passifiées,
2. la source i_L est passifiée, les sources indépendantes de \mathcal{R} sont actives.

On a

$$\begin{aligned} u_L &= u_1 + u_{co} \\ i_L &= i_L + 0 \end{aligned}$$

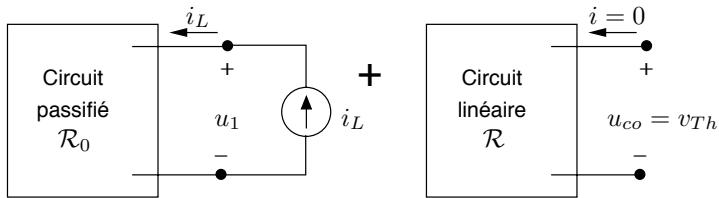


FIGURE 5.4: Etape 2 : superposition.

Etape 3. On dérive le schéma équivalent de Thévenin (Figure 5.5). On a

$$u_L = u_1 + v_{Th}$$

Donc

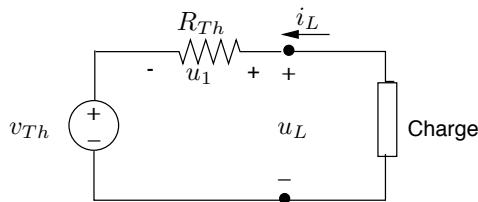


FIGURE 5.5: Etape 3 : dérivation du schéma équivalent.

- $v_{Th} = u_{co}$ est la tension apparaissant aux bornes du circuit à vide, c-à-d lorsque l'accès est laissé ouvert
- $u_1 = R_{Th}i_L$, où R_{Th} est la résistance équivalente du circuit \mathcal{R} passifié, égale à la résistance d'entrée du circuit passifié, égale à la résistance mesurée aux bornes de l'accès, c-à-d le rapport u/i mesuré lorsque toutes les sources indépendantes de \mathcal{R} ont été rendues inactives.

$$u_L = v_{Th} + R_{Th}i_L.$$

5.4.3 Détermination des paramètres v_{Th} et R_{Th}

Pour déterminer v_{Th} , il suffit de déterminer la d.d.p aux bornes du circuit à vide, i.e. lorsqu'aucune charge n'y est connectée.

Pour R_{Th} , on peut utiliser une des trois méthodes suivantes :

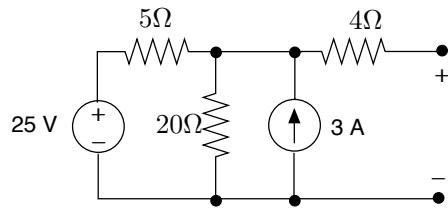
1. considérer le circuit passifié, injecter un courant de 1 A à l'accès et calculer la d.d.p. u apparaissant à cet accès. On a alors $R_{Th} = u$ (en valeur).
2. par un essai en court-circuit :

$$u_L = 0 \implies v_{Th} = R_{Th}i_{cc} \implies R_{Th} = \frac{v_{Th}}{i_{cc}}$$

3. quand c'est possible, par réduction successive des associations séries et parallèles de dipôles.

Exemple : Résistances linéaires et sources indépendantes

Déterminons le schéma équivalent de Thévenin du circuit :



v_{Th} est la tension à vide à l'accès, donc, comme le courant dans la résistance de 4Ω est nul,

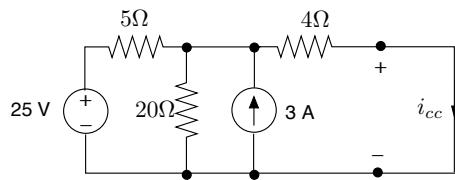
$$v_{Th} = v_{3A}$$

Par application de la PLK, on a

$$\frac{v_{Th} - 25}{5} + \frac{v_{Th}}{20} - 3 = 0$$

et donc $v_{Th} = 32 \text{ V}$

On détermine ensuite R_{Th} par essai en court-circuit et donc le calcul de i_{cc} :



Par la PLK,

$$\frac{v_{3A} - 25}{5} + \frac{v_{3A}}{20} - 3 + \frac{v_{3A}}{4} = 0$$

Donc

$$v_{3A} = 16 \text{ V}$$

et

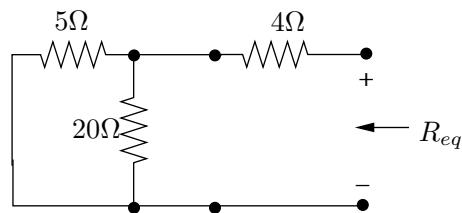
$$i_{cc} = \frac{16}{4} = 4 \text{ A.}$$

Finalement,

$$R_{Th} = \frac{v_{Th}}{i_{cc}} = 8 \Omega.$$

Exemple : Détermination de R_{Th} par passification et réduction

Le circuit de l'exemple précédent ne comporte que des résistances et aucune source commandée. Dans ce cas, il est plus simple de rechercher la résistance équivalente du circuit passifié

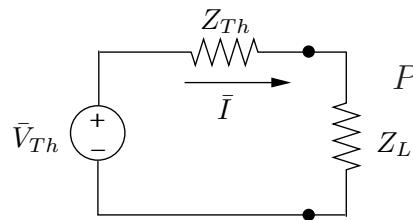


Vue de l'accès, la résistance de 4Ω est en série avec la mise en parallèle des deux autres résistances :

$$R_{eq} = 4 + \frac{20.5}{20+5} = 8\Omega$$

5.4.4 Adaptation et transfert de puissance maximum

Soit le circuit quelconque mais linéaire et invariant de la Figure 5.6. On désire déterminer la valeur de l'impédance de charge Z_L qui permet de soustraire à ce circuit le maximum de puissance (active). Deux cas peuvent se présenter : (1) soit on a une connaissance précise de la composition du circuit, (2) soit on n'a accès au circuit que depuis l'accès où est connecté Z_L sans connaître sa composition. Dans les deux cas, l'utilisation du théorème de Thévenin est intéressante. Dans le cas (1), il permet de simplifier la condition de transfert maximum de puissance. Dans le cas (2) son utilisation est obligatoire car il permet, par expérimentation (mesure), d'identifier les paramètres du système inconnu. Supposons donc que l'équivalent de Thévenin est établi, décrit par une source de tension \bar{V}_{Th} et une impédance Z_{Th} :



La puissance P_L est maximale si

$$Z_L = R_{Th} - jX_{Th} = Z_{Th}^*$$

En effet

$$Z_L = R_L + jX_L$$

$$Z_{Th} = R_{Th} + jX_{Th}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_{Th}}{Z_L + Z_{Th}}$$

$$P_L = R_L \bar{I}^2 = \frac{R_L V_{Th}^2}{(R_L + R_{Th})^2 + (X_L + X_{Th})^2}$$

Z_L maximise P_L si $\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0$ et $\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0$:

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = \frac{-V_{Th}^2 2R_L (X_L + X_{Th})}{((R_L + R_{Th})^2 + (X_L + X_{Th})^2)^2}$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0 \rightarrow \begin{cases} X_L = -X_{Th} \\ P_L = \frac{R_L V_{Th}^2}{(R_L + R_{Th})^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = \frac{V_{Th}^2 (R_{Th} - R_L)}{(R_L + R_{Th})^3}$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0 \rightarrow R_L = R_{Th}$$

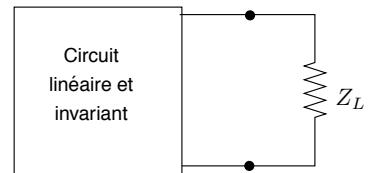


FIGURE 5.6: Circuit auquel on veut adapter l'impédance Z_L pour réaliser un transfert de puissance maximum.

Caractéristiques de l'adaptation.

1. Le courant délivré est en phase avec la source de Thévenin

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_{Th}}{2R_L}$$

2. La source de Thévenin ne fournit pas de puissance réactive

$$S_s = \bar{V}_{Th}\bar{I}^* = \frac{V_{Th}^2}{2R_L} = P_s$$

3. 50% de la puissance est délivrée à la charge Z_L

$$P_{max} = R_L I^2 = \frac{V_{Th}^2}{4R_L} = 0.5P_s$$

4. La charge consomme (ou produit) de la puissance réactive : $Q_L = X_L I^2$.

5. Il y a une possibilité de surtension

$$U_L = |Z_L|I = |Z_L|\frac{V_{Th}}{2R_L} = \frac{V_{Th}}{2} \sqrt{1 + \frac{X_L^2}{R_L^2}} > V_{Th} \text{ si } X_L > 1.73R_L$$

Autres formes d'adaptation. Si seul $|Z_L|$ peut varier, alors le transfert maximum de puissance se réalise si

$$|Z_L| = |Z_{Th}|.$$

Si Z_L est imposée, on peut insérer un transformateur idéal de rapport n entre le circuit et la charge, avec n qui réalise le transfert maximum de puissance si

$$n = \frac{|Z_L|}{|Z_{Th}|}.$$

5.5 Théorème de Norton

5.5.1 Énoncé

Le théorème de Norton est le dual de celui de Thévenin. Il est présenté dans la Table 5.4 et illustré à la Figure 5.7.

Soit un circuit \mathcal{R} résistif linéaire comportant un certain nombre de sources indépendantes de tension et de sources indépendantes de courant vu d'un accès. Ce circuit peut être remplacé par un circuit équivalent constitué d'une source équivalente de courant i_{No} en parallèle avec une conductance équivalente G_{No} où (Figure 5.7) :

- i_{No} est le courant parcourant l'accès court-circuité
- G_{No} est la conductance équivalente du réseau \mathcal{R} passifié.

TABLE 5.4: Théorème de Norton.

$$i = -i_{No} + G_{No}u$$

Le théorème de Norton se démontre selon le même schéma que celui du théorème de Thévenin.

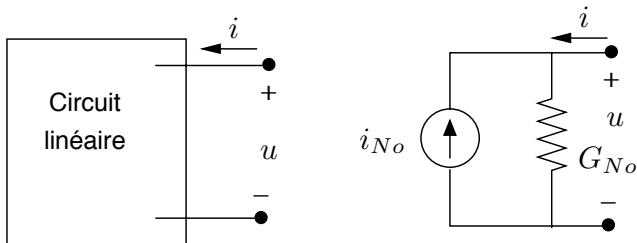


FIGURE 5.7: Équivalent de Norton.

5.5.2 Détermination des paramètres i_{No} et G_{No}

Pour i_{No} , il faut court-circuiter l'accès et déterminer le courant de court-circuit i_{cc} .

Pour G_{No} , il y a trois possibilités :

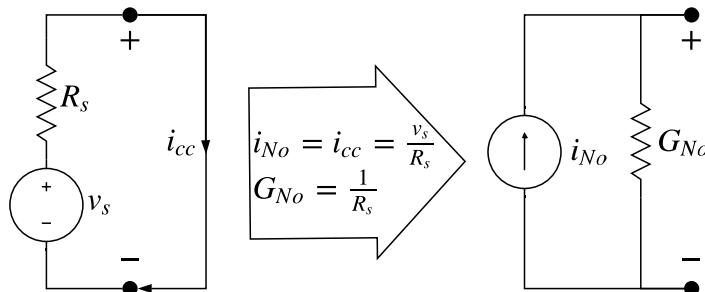
1. considérer le circuit passifié, imposer une d.d.p. de 1 V à l'accès et calculer le courant i parcourant cet accès : $i = G_{No}$
2. par un essai à vide :

$$i = 0 \implies i_{No} = G_{No}u_{co} \implies G_{No} = \frac{i_{No}}{u_{co}}$$

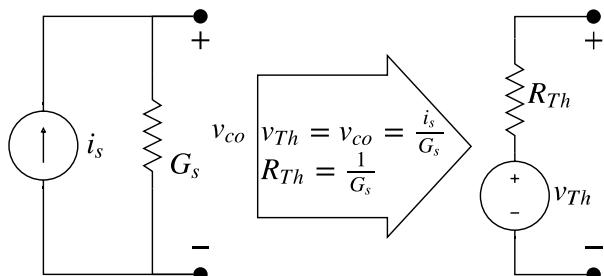
3. quand c'est possible, par réduction successive des associations séries et parallèles de dipôles.

5.5.3 Equivalence d'une source de tension et d'une source de courant

En appliquant le théorème de Thévenin à une source de courant en parallèle avec une résistance, on peut établir la relation d'équivalence suivante :



De manière similaire, en appliquant le théorème de Norton à une source de tension en série avec une résistance, on peut établir la relation d'équivalence suivante :

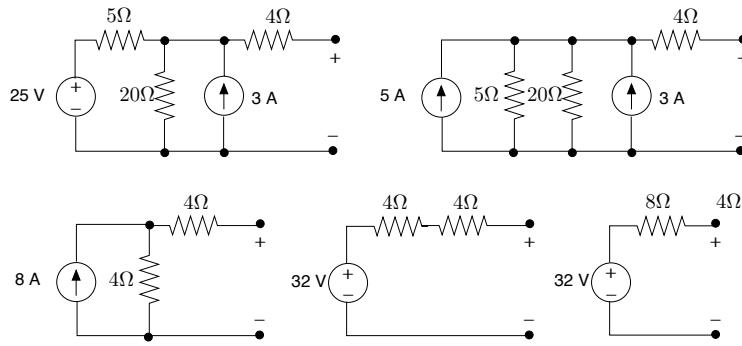


En résumé, il est important de retenir qu'on peut passer d'une représentation à l'autre si et seulement si

$$\begin{aligned} G_{No} &= \frac{1}{R_{Th}} \\ i_{No} &= \frac{v_{Th}}{R_{Th}}. \end{aligned}$$

Exemple : Equivalent de Thévenin par équivalence de source.

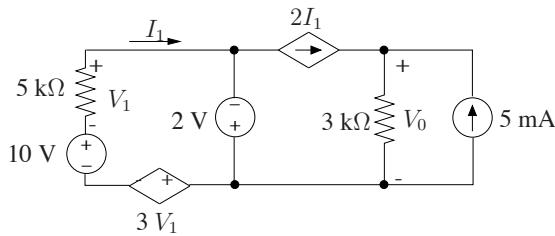
En revenant à notre exemple, on voit qu'il est possible dans ce cas simple d'obtenir l'équivalent de Thévenin par équivalences de source successives :



5.6 Exercices

Exercice 5.1 Théorème de superposition *Solution à la page 152.*

Déterminer la tension V_0 aux bornes de la résistance de $3 \text{ k}\Omega$ du circuit ci-dessous. Réaliser ce calcul en utilisant le théorème de superposition. Montrer ensuite que ce théorème ne peut s'appliquer au calcul des puissances consommées par les différents éléments du circuit.

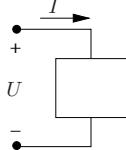


Réponse :
 $V_0 = 7.8 \text{ V}$

Exercice 5.2 Théorème de Norton *Solution à la page 154.*

La tension et le courant aux bornes d'un dipôle sont mesurés dans différentes situations. On relève les résultats suivants :

U (V)	I (A)
35	-3
50	0
65	3
80	6
95	9
110	12
125	15



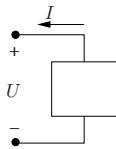
- Construire, pour ce dipôle, un circuit équivalent constitué d'une source idéale de courant et d'une résistance.
- Utiliser cet équivalent pour prédire la valeur du courant délivré à une résistance de 20Ω connectée aux bornes du dipôle.

Réponse :
1) $I_{No} = 10 \text{ A}$, $R_{No} = 5 \Omega$
2) $I = -2 \text{ A}$

Exercice 5.3 Théorème de Thévenin *Solution à la page 155.*

La tension et le courant aux bornes d'un dipôle sont mesurés dans différentes situations. On relève les résultats suivants :

U (V)	I (A)
24	0
22	8
20	16
18	24
15	32
10	40
0	48

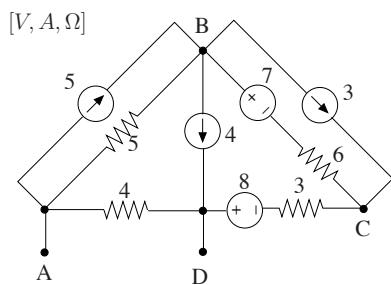


1. Est-il possible de construire un circuit équivalent, composé d'une source idéale de tension et d'une résistance, traduisant le fonctionnement de ce dipôle ?
2. Construire un tel équivalent valable dans la plage $0 < I < 24$ A.
3. Utiliser cet équivalent pour prédire la valeur du courant délivré à une résistance de $1\ \Omega$ connectée aux bornes du dipôle. Le résultat trouvé est-il valide ?
4. Faire de même pour prédire le courant de court-circuit de ce dipôle. Le résultat trouvé est-il valide ?

Réponse :
 2) $V_{Th} = 24$ V, $R_{Th} = \frac{1}{4}\ \Omega$, 3) $I = 19.2$ A

Exercice 5.4 Adaptation des impédances *Solution à la page 156.*

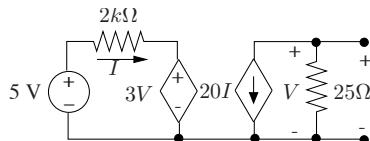
Déterminer la résistance de charge R_L à connecter aux bornes AD du circuit ci-dessous pour soutirer au circuit le maximum de puissance.



Réponse :
 $R_L = 3.11\ \Omega$, $p_{RL} = 25.47$ W

Exercice 5.5 Théorème de Thévenin *Solution à la page 157.*

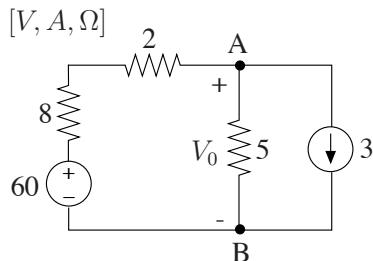
Déterminer le schéma équivalent de Thévenin du circuit ci-dessous.



Réponse :
 $V_{Th} = -5$ V, $R_{Th} = 100\ \Omega$

Exercice 5.6 Théorème de Norton *Solution à la page 159.*

Étant donné le circuit suivant :



1. Déterminer la valeur de la tension V_0 aux bornes de la résistance de $5\ \Omega$. Déterminer tout d'abord pour cela le schéma équivalent de Norton du circuit vu de l'accès AB.

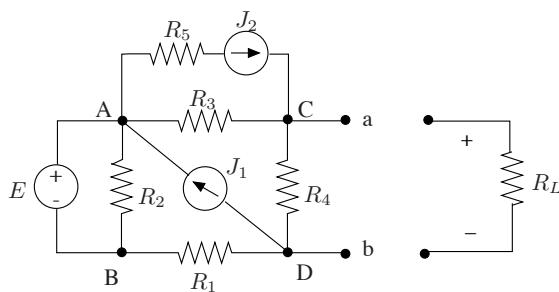
2. Calculer les puissances fournies par les deux sources indépendantes.
3. Si on connecte une résistance de 100Ω en série avec la source de courant de $3 A$,
 - (a) que devient le schéma équivalent de Norton vu de l'accès AB ?
 - (b) Calculer dans ce cas, les puissances produites par les deux sources indépendantes.

Réponse :
 1) $V_0 = 10 V$
 2) $p_J = -30 W, p_E = 300 W$
 3) $p_J = 870 W, p_E = 300 W$

Exercice 5.7 Théorème de Thévenin *Solution à la page 160.*

Etant donné le circuit ci-dessous, on demande :

1. de déterminer la valeur de la résistance R_L à connecter à l'accès ab de manière à soutirer au circuit une puissance maximale ;
2. de calculer cette puissance ;
3. de déterminer dans ces conditions, les puissances consommées par les différentes résistances ainsi que les puissances fournies par les différentes sources indépendantes d'énergie.



$$R_1 = 40 \text{ k}\Omega ; R_2 = 60 \text{ k}\Omega ; R_3 = 25 \text{ k}\Omega$$

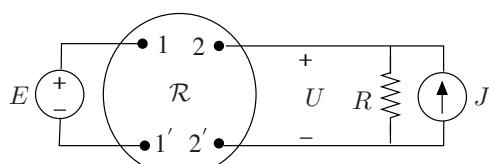
$$R_4 = 100 \text{ k}\Omega ; R_5 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$E = 20 \text{ V} ; J_1 = 5 \text{ mA} ; J_2 = 2 \text{ mA}$$

Réponse :
 1) $R_L = 39.4 \text{ k}\Omega$
 2) $p_{R_L} = 0.17 \text{ W}$

Exercice 5.8 Théorème de Thévenin *Solution à la page 164.*

Le réseau \mathcal{R} de la figure ci-dessous est constitué d'éléments linéaires, invariants et passifs et ne comporte pas de sources indépendantes d'énergie. La tension U est égale à 10 V lorsque la f.e.m E est égale à 0 . Elle atteint 15 V lorsque la f.e.m E est égale à 10 V .



$$R = 20 \Omega ; J = 2 \text{ A}$$

On demande :

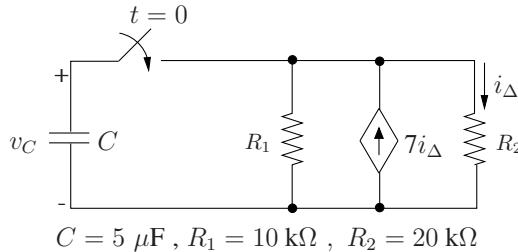
1. de déterminer le schéma équivalent de Thévenin du circuit à gauche de $22'$ lorsque E est égale à 30 V ;
2. dans ces conditions, de calculer les puissances consommées ou fournies par les divers éléments du circuit qu'il est possible de déterminer.

Réponse :

- 1) $V_{Th} = 20 \text{ V}$, $R_{Th} = 6.67 \Omega$
 2) $p_R = 31.25 \text{ W}$, $p_I = 50 \text{ W}$, $p_{R,E} = 18.75 \text{ W}$

Exercice 5.9 Simplification pour l'étude des transitoires *Solution à la page 165.*

On considère le circuit suivant :

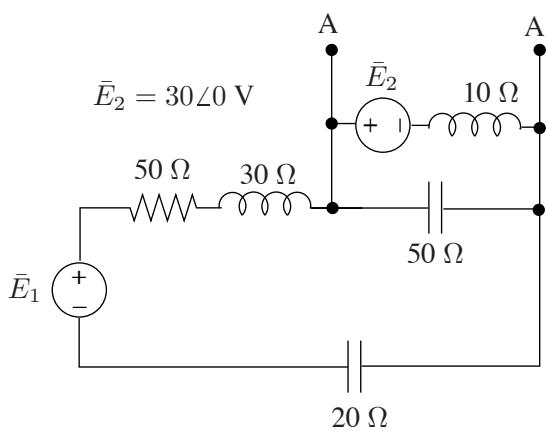


Le condensateur C est initialement porté au potentiel de 10 V.

1. Déterminer l'expression de la tension v_C aux bornes du condensateur.
2. Comment se manifeste l'influence de la source commandée ?
3. On suppose que le condensateur claque (se court-circuite) lorsque la tension à ses bornes atteint 150 V. Déterminer l'instant auquel ce claquage se produit.

Exercice 5.10 Schéma équivalent de Thévenin en régime sinusoïdal établi *Solution à la page 167.*

Etant donné le circuit ci-dessous fonctionnant en régime sinusoïdal établi, déterminer la valeur de \bar{E}_1 pour que le circuit vu des bornes AA' se réduise à un schéma équivalent de Thévenin avec $\bar{V}_{Th} = 50\angle 45^\circ$.

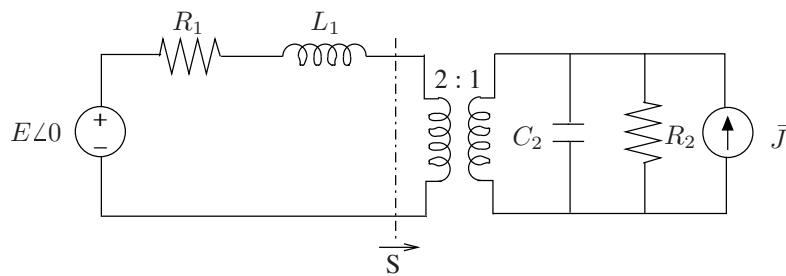


Réponse :
 1. $v_C = 10e^{40t} \text{ V}$, $t \geq 0$
 3. $t_{cc} = 67.7 \text{ ms}$

Exercice 5.11 Schéma équivalent de Thévenin en régime sinusoïdal établi *Solution à la page 169.*

Le circuit ci-dessous fonctionne en régime sinusoïdal établi à la fréquence de 100 Hz. On demande de déterminer la valeur de la f.e.m. E telle que le transfert de puissance à travers le transformateur idéal se réalise de la gauche vers la droite avec un facteur de puissance $\cos \Phi = 1$.

Réponse :
 $\bar{E}_1 = 175.06 + j72.12 \text{ V}$



$$R_1 = 10 \Omega ; R_2 = 100 \Omega ; L_1 = 20 \text{ mH} ; C_2 = 10 \mu\text{F}$$

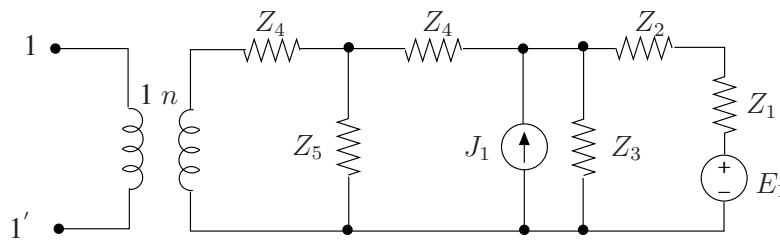
$$\bar{J} = 1\angle 60^\circ \text{ A, valeur efficace}$$

Réponse :
 $E = 283.5 \text{ V}$

Exercice 5.12 Schéma équivalent de Thévenin en régime sinusoïdal établi Solution à la page 170.

Le circuit ci-dessous est vu de l'accès 11' et fonctionne en régime sinusoïdal établi. On demande de déterminer la valeur du rapport de transformation n de façon à ce que la réactance de Thévenin X_{Th} soit de 20Ω .

On connecte ensuite à l'accès 11' un dipôle constitué de deux éléments (de type R et/ou C et/ou L). Déterminer la nature et la valeur de ces éléments de manière à soutirer au circuit une puissance maximale. Calculer dans ce cas les puissances actives et réactives consommées par ce dipôle et par l'impédance Z_5 . Donner l'expression (en fonction de t) de la puissance instantanée $p(t)$ consommée par ces éléments ainsi que de la tension aux bornes $u(t)$ et du courant $i(t)$ traversant ces éléments.



$$Z_1 = 30 - j80, Z_2 = 30 + j20, Z_3 = 40 + j65, Z_4 = 30 + j40, Z_5 = 30 + j80$$

$$\bar{E}_1 = 30\angle 0, \bar{J}_1 = 2\angle 20 [V, A, \Omega, {}^\circ], \omega = 10000 \text{ rad/s}$$

Les grandeurs sinusoïdales sont exprimées en valeur efficace.

Réponse :
 $n = 1.995, R_L = 15.44 \Omega, C_L = 5 \mu\text{F}; S_L = 20.6 - j26.7 \text{ VA}, S_{Z_5} = 13.67 + j36.45 \text{ VA}$

5.7 Exercices non résolus

Exercice 5.13

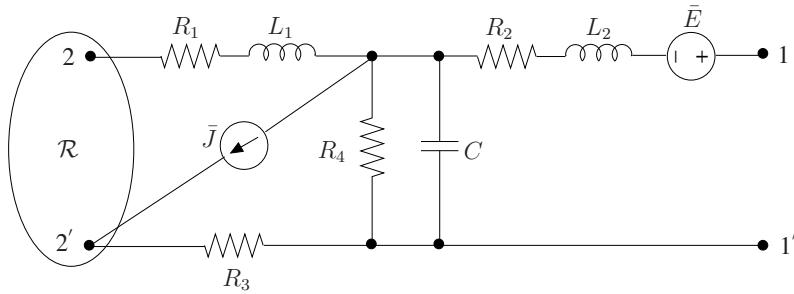
Le schéma équivalent de Thévenin du circuit ci-dessous, vu de l'accès 11', est composé d'une f.e.m. $\bar{V}_{Th} = 100\angle 0 \text{ V}$ en série avec l'impédance $Z_{Th} = 500 + j500 \Omega$. Le réseau \mathcal{R} est composé d'éléments linéaires et invariants.

- Déterminer les puissances complexes, actives et réactives, ainsi que les puissances instantanées et fluctuantes à l'instant $t = 1 \text{ s}$, fournies par

la source de courant \bar{J} et le réseau \mathcal{R} lorsque l'on ferme l'accès $11'$ sur une résistance de charge $R_L = 100 \Omega$.

- Les données fournies permettent-elles de déterminer le schéma équivalent de Thévenin du réseau \mathcal{R} vu des bornes $22'$?

Si oui, expliciter, sans aucun calcul numérique, la procédure permettant de déterminer les paramètres de cet équivalent. Si non, justifier.



$$R_1 = 30 \Omega, R_2 = 40 \Omega, R_3 = 10 \Omega, R_4 = 100 \Omega$$

$$L_1 = 2 \text{ mH}, L_2 = 4 \text{ mH}, C = 80 \text{ nF}$$

$$\bar{E} = 60 \angle 0 \text{ V}, \bar{J} = 3 \angle 0 \text{ mA}, \omega = 1000 \text{ rad.s}^{-1}$$

Réponse :

$$S_J = 0.148 + j0.039 \text{ VA}, p_{fJ} = -0.091 \text{ W}, p_J = 0.057 \text{ W}$$

$$S_{\mathcal{R}} = 25.2 - j4.75 \text{ VA}, p_{f\mathcal{R}} = -23.87 \text{ W}, p_{\mathcal{R}} = 1.33 \text{ W}$$

5.8 Solution des exercices

Solution de l'exercice 5.1

D'après le théorème de superposition, pour tout circuit linéaire, toute tension ou courant dans le circuit (réponse) est égale à la somme des réponses obtenues lorsque chaque source indépendante de courant ou de tension (excitation) agit seule, les autres sources ayant été rendues inactives, c'est-à-dire :

- les sources de tension court-circuitées ($v = 0$)
- les sources de courant ouvertes ($i = 0$)

La tension cherchée V_0 peut donc s'écrire :

$$V_0 = V_0^{(1)} + V_0^{(2)} + V_0^{(3)}$$

avec

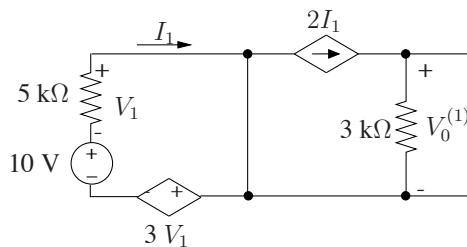
- $V_0^{(1)} = \alpha E_1$, la tension V_0 si la source $E_1 = 10 \text{ V}$ agit seule ;
- $V_0^{(2)} = \beta E_2$, la tension V_0 si la source $E_2 = 2 \text{ V}$ agit seule ;
- $V_0^{(3)} = \gamma J$, la tension V_0 si la source $J = 5 \text{ mA}$ agit seule.

Chaque réponse partielle est proportionnelle à la source correspondante et la réponse totale s'exprime donc comme une combinaison linéaire des sources indépendantes.

Remarquons que seules les sources indépendantes constituent des excitations pour le théorème de superposition et non les sources commandées.

1. La source $E = 10 \text{ V}$ agit seule

La source de tension $E_2 = 2 \text{ V}$ est court-circuitée et la source de courant $J = 5 \text{ mA}$ est remplacée par un circuit ouvert.



La SLK dans la maille gauche du circuit s'écrit :

$$10 + V_1 - 3V_1 = 0 \implies V_1 = 5 \text{ V}$$

On déduit :

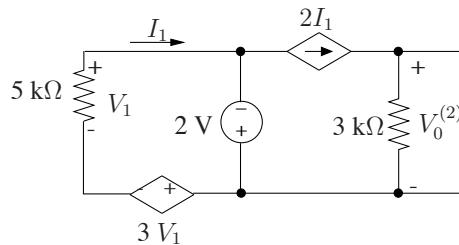
$$I_1 = -\frac{V_1}{5 \cdot 10^3} = -1 \text{ mA}$$

et :

$$V_0^{(1)} = 3 \cdot 10^3 \cdot 2I_1 = -6 \text{ V}$$

2. La source $E = 2 \text{ V}$ agit seule

La source de tension $E_1 = 10 \text{ V}$ est court-circuitée et la source de courant $J = 5 \text{ mA}$ est remplacée par un circuit ouvert.

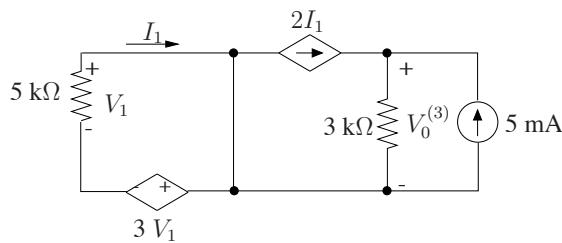


La topologie de ce circuit est identique à celle du circuit du point 1 : dans la maille gauche, on trouve une seule source indépendante de tension ; la tension imposée de 10 V du point 1 est maintenant de 2 V. On déduit directement :

$$V_0^{(2)} = \frac{2}{10} V_0^{(1)} = -1.2 \text{ V}$$

3. La source $J = 5 \text{ mA}$ agit seule

Les sources de tension $E_1 = 10 \text{ V}$ et $E_2 = 2 \text{ V}$ sont court-circuitées.



La SLK dans la maille gauche du circuit montre que $I_1 = 0$:

$$V_1 - 3V_1 = 0 \implies V_1 = 0, I_1 = 0$$

Le courant dans la résistance de $3 \text{ k}\Omega$ est donc égal à celui fourni par source de courant et

$$V_0^{(3)} = 3 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 15 \text{ V}$$

4. Application du théorème de superposition

Finalement pour le circuit complet :

$$V_0 = V_0^{(1)} + V_0^{(2)} + V_0^{(3)} = 7.8 \text{ V}$$

5. Calcul de la puissance

Le théorème de superposition s'applique au calcul de courants et tensions dans le circuit mais ne peut être utilisé pour dériver des puissances. En effet, alors que tensions et courants dérivent de relations linéaires (lois de Kirchhoff et loi d'Ohm), les puissances s'expriment sous une forme non linéaire, le produit d'une tension et d'un courant, forme à laquelle le principe de superposition ne peut évidemment s'appliquer.

Ainsi, la puissance consommée par la résistance de charge $R_L = 3 \text{ k}\Omega$ est donnée par :

$$p_{R_L} = \frac{V_0^2}{R_L} = 20.3 \text{ mW}$$

Les puissances consommées par cette même résistance dans les trois situations intermédiaires sont respectivement :

$$p_{R_L}^{(1)} = \frac{V_0^{(1)2}}{R_L} = 12 \text{ mW}, \quad p_{R_L}^{(2)} = \frac{V_0^{(2)2}}{R_L} = 0.5 \text{ mW}, \quad p_{R_L}^{(3)} = \frac{V_0^{(3)2}}{R_L} = 75 \text{ mW}$$

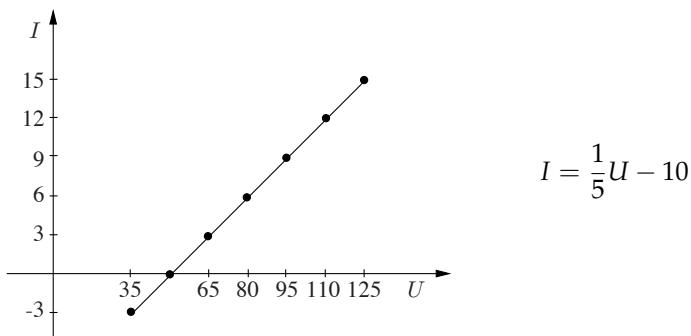
Et l'on a évidemment :

$$\begin{aligned} p_{R_L} &\neq p_{R_L}^{(1)} + p_{R_L}^{(2)} + p_{R_L}^{(3)} \\ \frac{V_0^2}{R_L} &= \frac{(V_0^{(1)} + V_0^{(2)} + V_0^{(3)})^2}{R_L} \neq \frac{V_0^{(1)2}}{R_L} + \frac{V_0^{(2)2}}{R_L} + \frac{V_0^{(3)2}}{R_L} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5.2

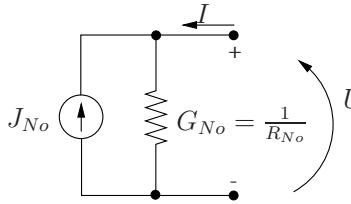
1. Circuit équivalent

Dans la plage de fonctionnement considérée, la relation $I - U$ liant le courant à la tension aux bornes du circuit s'écrit sous la forme de l'équation d'une droite comme représenté ci-dessous.



Dans la plage de fonctionnement considérée, le circuit se comporte comme un circuit linéaire.

La structure du circuit équivalent demandé correspond à celle d'un schéma équivalent de Norton.



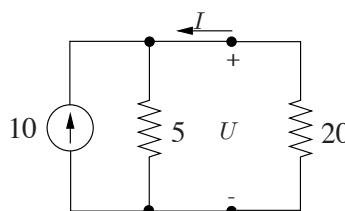
Pour cet équivalent, la relation $I - U$ aux bornes s'écrit :

$$I = -I_{No} + G_{No}U$$

On déduit :

1. la source de courant : $I_{No} = 10 \text{ A}$
2. la résistance : $R_{No} = \frac{1}{G_{No}} = 5 \Omega$

2. Circuit fermé sur une résistance de 20Ω



On déduit du schéma équivalent :

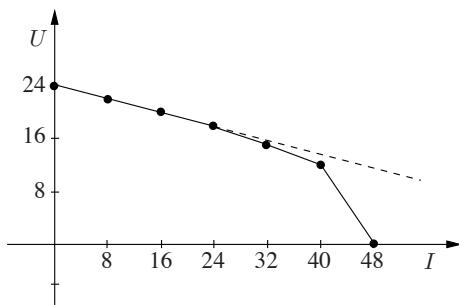
$$U = 10 \cdot (5 // 20) = 10 \cdot \frac{5 \cdot 20}{25} = 40 \text{ V}$$

$$I = -\frac{40}{20} = -2 \text{ A}$$

On vérifie que le résultat trouvé se situe dans la plage de fonctionnement considérée pour laquelle le schéma équivalent est valide.

Solution de l'exercice 5.3

1. Relation $U - I$



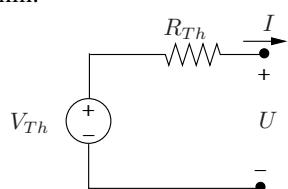
Dans toute la plage de fonctionnement considérée, la relation $U - I$ n'est pas linéaire. Le circuit ne se comporte pas comme un circuit linéaire et ne peut donc pas être remplacé par un schéma équivalent de Norton ou de Thévenin.

2. Limitation de la plage de fonctionnement

Dans la plage $0 < I < 24 \text{ A}$, la relation $U - I$ est linéaire. Elle s'écrit :

$$U = 24 - \frac{1}{4}I$$

Dans cette plage, le circuit peut être remplacé par un schéma équivalent de Thévenin.

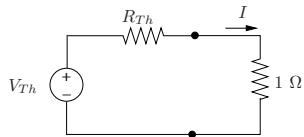


$$U = V_{Th} - R_{Th}I$$

On déduit :

$$V_{Th} = 24 \text{ V}, \quad R_{Th} = \frac{1}{4} \Omega$$

3. Circuit fermé sur une résistance de $1\ \Omega$

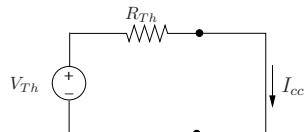


On déduit du schéma équivalent :

$$I = \frac{V_{Th}}{1 + R_{Th}} = 19.2\text{ A}$$

Le courant obtenu se trouve dans la plage de fonctionnement linéaire du circuit ($0 < I < 24\text{ A}$), le schéma équivalent et le résultat déduit sont valides.

4. Courant de court-circuit



On déduit du schéma équivalent :

$$I_{cc} = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} = 96\text{ A}$$

Ce résultat est différent du courant de court-circuit mentionné dans la table de mesures (48 A) car on se trouve en dehors du domaine de fonctionnement linéaire du dipôle et le schéma équivalent de Thévenin n'est plus valide.

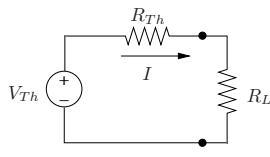
Solution de l'exercice 5.4

1. Le problème de l'adaptation des impédances en régime continu

Le problème consiste à déterminer la valeur de la résistance de charge R_L à connecter aux bornes d'un circuit linéaire comportant nécessairement des sources d'énergie pour que la charge soutire à ce circuit le maximum de puissance.

Puisqu'on s'intéresse à l'action du circuit sur une charge connectée à ses bornes, on peut le remplacer par son schéma équivalent de Thévenin.

Calculons la puissance transmise à la charge :



$$I = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L}$$

$$p_{R_L} = R_L I^2 = \frac{R_L}{(R_{Th} + R_L)^2} V_{Th}^2$$

La puissance sera maximale si :

$$\frac{d p_{R_L}}{d R_L} = 0$$

On dérive

$$\frac{d p_{R_L}}{d R_L} = \frac{R_{Th} - R_L}{(R_{Th} + R_L)^3} V_{Th}^2$$

La valeur cherchée pour R_L est par conséquent :

$$R_L = R_{Th}$$

On vérifiera que l'on a bien $\frac{d^2 p_{R_L}}{d R_L^2} < 0$ pour $R_L = R_{Th}$.

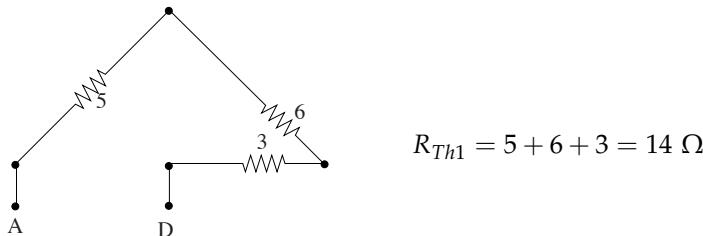
La puissance fournie par le circuit à l'adaptation vaut :

$$p_{R_L} = R_L \frac{V_{Th}^2}{4R_L^2} = \frac{V_{Th}^2}{4R_L}$$

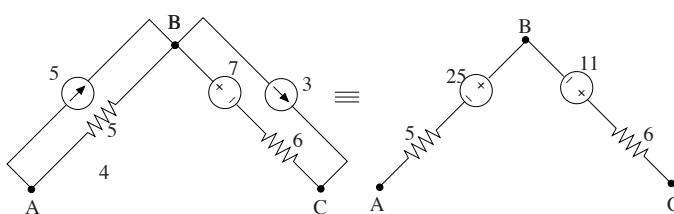
2. Schéma équivalent de Thévenin du circuit vu des bornes AD

Dérivons tout d'abord le schéma équivalent de Thévenin du circuit en parallèle sur la résistance de $4\ \Omega$.

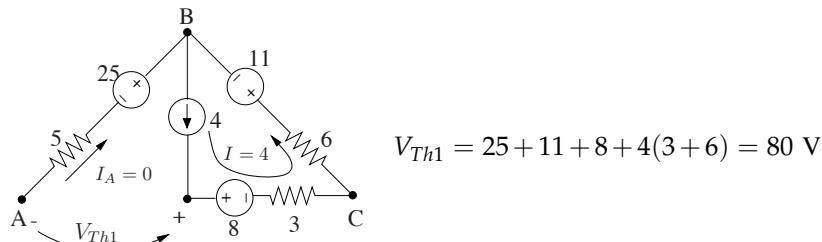
La résistance de Thévenin est donnée par la résistance équivalente vue de l'accès du circuit passifié. On dérive :



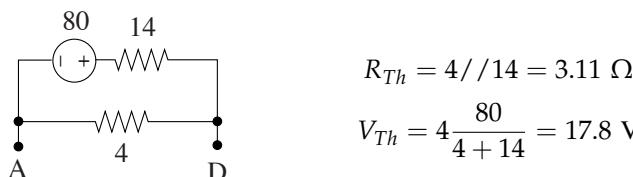
La f.e.m. de Thévenin est la tension apparaissant aux bornes du circuit à vide. Transformons tout d'abord les branches AB et BC comme suit :



On a :

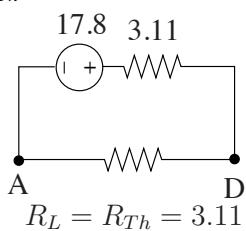


Finalement :



3. Réalisation de l'adaptation

Pour réaliser l'adaptation, on ferme le circuit sur la résistance de charge $R_L = R_{Th} = 3.11\ \Omega$.

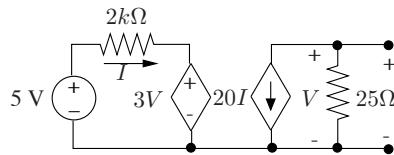


La puissance maximale qui peut être soutirée au circuit vaut :

$$P_{RL} = R_{Th} \frac{V_{Th}^2}{4R_{Th}^2} = 25.47\text{ W}$$

Solution de l'exercice 5.5

La f.e.m. de Thévenin est la tension qui apparaît à vide aux bornes du circuit.



La résistance de $25\ \Omega$ étant parcourue par le courant de la source commandée $20I$, on écrit :

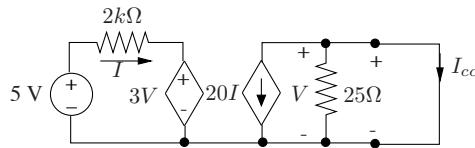
$$V_{Th} = V = (-20I) \cdot (25) = -500I$$

La SLK écrite dans la maille de la partie gauche du circuit fournit :

$$I = \frac{5 - 3V_{Th}}{2000}$$

On déduit $V_{Th} = -5\text{ V}$.

La résistance de Thévenin peut être déduite d'un essai en court-circuit.



On dérive successivement :

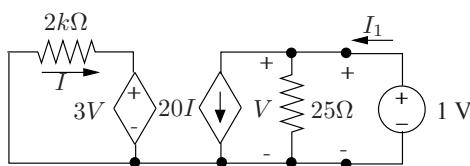
$$V = 0 \rightarrow I_{cc} = -20I \quad I = 2.5\text{ mA} \rightarrow I_{cc} = -50\text{ mA}$$

Et finalement :

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_{cc}} = 100\ \Omega$$

Pour rechercher R_{Th} , on peut aussi rechercher la résistance d'entrée du circuit vue de l'accès mais étant donné la présence de sources commandées, on ne peut procéder par de simples réductions série/parallèle.

Il faut alors passifier le circuit, injecter 1 A à l'accès et déterminer V , la tension à l'accès, ou appliquer une tension de 1 V à l'accès et déterminer I , le courant circulant dans cet accès. Vu la présence de la source commandée de type VVT dans la partie gauche du circuit, il est ici plus simple d'appliquer 1 V à l'accès et de déterminer le courant correspondant comme indiqué à la Fig. 5.5



On écrit pour la partie gauche du circuit :

$$V = 1\text{ V} \rightarrow I_1 = \frac{-3}{2000} = -1.5\text{ mA}$$

La PLK appliquée à la partie droite du circuit fournit :

$$I = 20I_1 + \frac{1}{25} = 10\text{ mA}$$

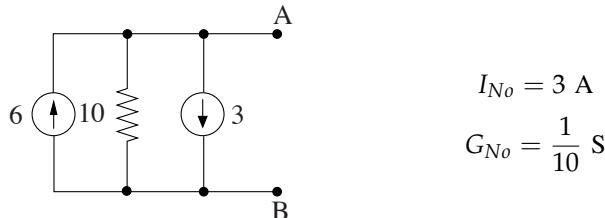
Et finalement :

$$R_{Th} = \frac{1}{i} = 100 \Omega$$

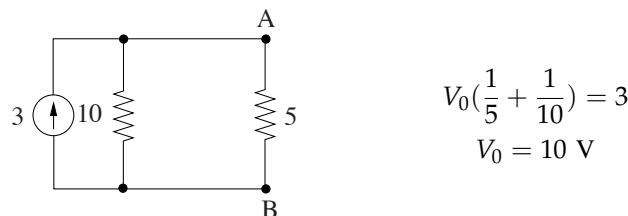
Solution de l'exercice 5.6

1. Schéma équivalent de Norton vu de AB et calcul de V_0

Par transformations de sources successives, on obtient :

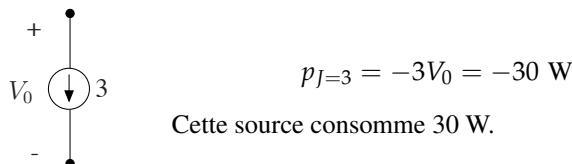


Connectant la résistance de 5Ω aux bornes AB, on dérive :

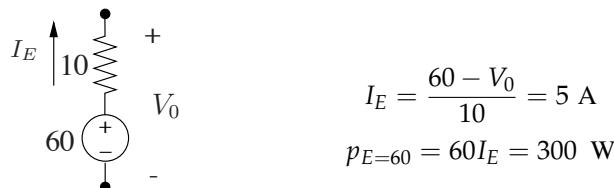


2. Puissances fournies par les sources indépendantes

1. source $J = 3 \text{ A}$:

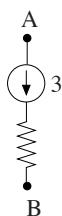


2. source $E = 60 \text{ V}$:

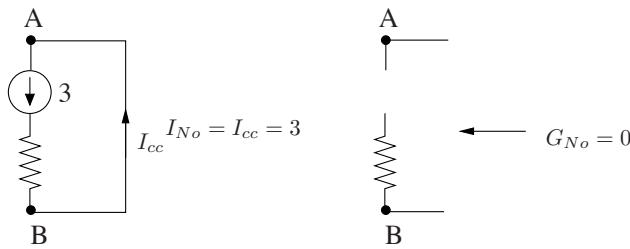


3. Ajout d'une résistance en série avec la source de courant

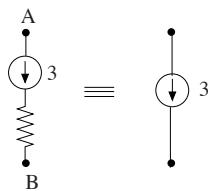
Le dipôle constitué d'une source de courant en série avec une résistance est équivalent à une source de courant pure. En effet, recherchons le schéma équivalent de Norton du dipôle :



Le courant de Norton est donné par le courant traversant l'accès court-circuité, soit 3 A , le courant injecté par la source de courant quel que soit R . La conductance de Norton est donnée par la conductance du dipôle passifié, c'est-à-dire la conductance d'un circuit ouvert, soit $G_{No} = 0$.



On a donc :



Il s'ensuit que le schéma équivalent de Norton ainsi que la valeur de la tension V_0 sont inchangés par rapport à la situation du point 1.

L'état électrique du circuit connecté aux bornes de la source de courant est inchangé. La puissance fournie par la source E est donc inchangée. Par contre, l'état électrique de la branche contenant la source de courant est modifié. Ainsi, la tension aux bornes de la source de courant vaut pour le circuit modifié :

$$U_J = 100 \cdot 3 - V_0 = 290 \text{ V}$$

et la puissance fournie par cette source est égale à :

$$p_J = 3 U_J = 870 \text{ W}$$

La résistance de 100Ω consomme :

$$p_{R=100} = 100(3)^2 = 900 \text{ W}$$

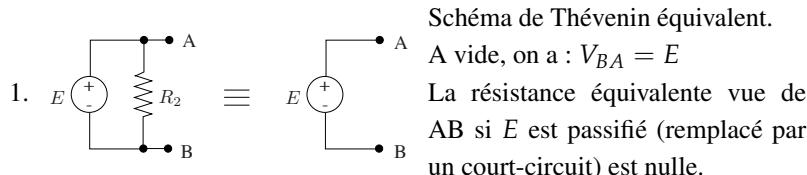
On remarque que globalement, la branche $R - J$ consomme une puissance de $900 - 870 = 30 \text{ W}$, égale à la puissance consommée par la source J dans la situation initiale.

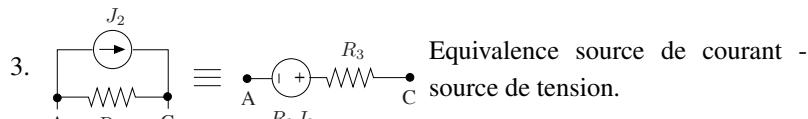
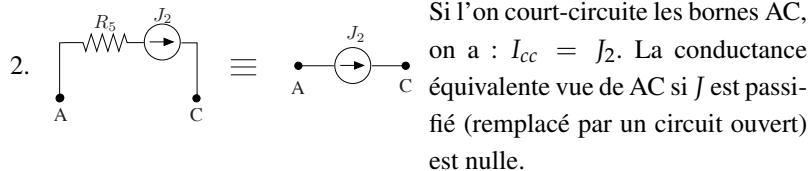
Solution de l'exercice 5.7

1. Résistance équivalente de Thévenin R_{Th} vue des bornes ab et adaptation

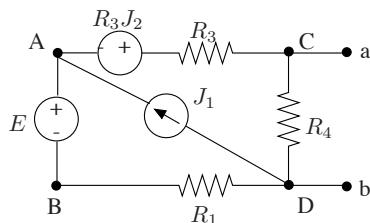
Pour obtenir l'adaptation, il faut choisir une résistance de charge $R_L = R_{Th}$.

On détermine le schéma équivalent de Thévenin du circuit vu des bornes ab par transformations successives (équivalences de sources, schémas équivalents de Thévenin ou de Norton successifs).

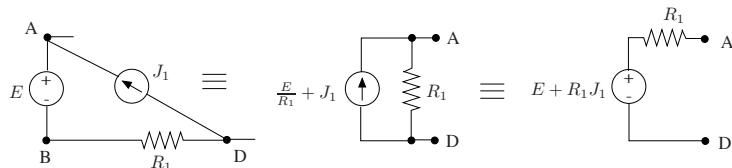




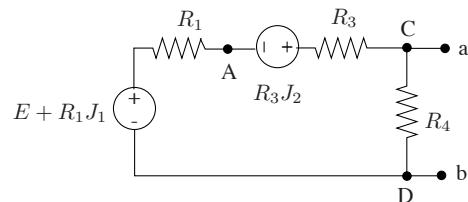
Le circuit se transforme en le circuit équivalent :



4.



5. Finalement, le circuit devient :



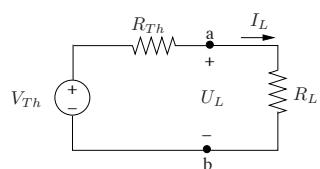
et vu de ab :

$$V_{Th} = R_4 \frac{E + R_1 J_1 + R_3 J_2}{R_1 + R_3 + R_4} = 163.6 \text{ V}$$

$$R_{Th} = R_4 // (R_1 + R_3) = \frac{R_4(R_1 + R_3)}{R_4 + R_1 + R_3} = 39.4 \text{ } 10^3 \Omega$$

Pour soutirer au circuit une puissance maximale, il faut donc connecter une résistance de charge :

$$R_L = R_{Th} = 39.4 \text{ k}\Omega$$



$$I_L = \frac{V_{Th}}{2R_{Th}} = 2.08 \text{ mA}$$

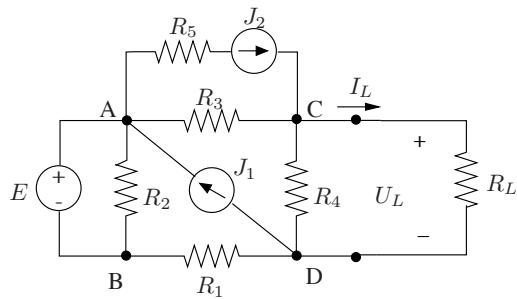
Puissance consommée par la charge : $P_L = R_L I_L^2 = 0.17 \text{ W}$.

2. Etat électrique complet du circuit

La d.d.p. aux bornes de la charge est donnée par :

$$U_L = R_L I_L = 81.8 \text{ V}$$

A partir de la connaissance de I_L et U_L , on détermine successivement, en “remontant” dans le circuit, l’état électrique des différentes branches.



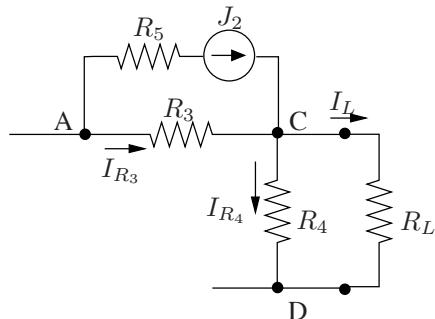
1. branche R_4

$$U_{R4} = U_L, \quad I_{R4} = \frac{U_{R4}}{R_4} = 0.82 \text{ mA}$$

Puissance consommée par la résistance R_4 :

$$p_{R4} = \frac{U_{R4}^2}{R_4} = R_4 I_{R4}^2 = 0.067 \text{ W}$$

2. branche R_3



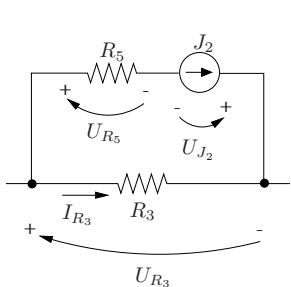
PLK au noeud C : $I_{R3} = I_{R4} + I_L - J_2 = 0.9 \text{ mA}$ et $U_{R3} = R_3 I_{R3} = 22.5 \text{ V}$

Puissance consommée par R_3 :

$$p_{R3} = \frac{U_{R3}^2}{R_3} = R_3 I_{R3}^2 = 0.02 \text{ W}$$

3. branche $R_5 - J_2$

Puissance consommée par R_5 :



$$p_{R_5} = R_5 J_2^2 = 0.04 \text{ W}$$

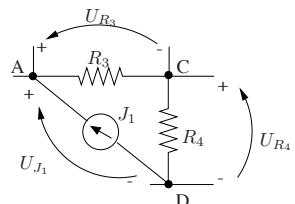
On a : $U_{R_5} = R_5 J_2 = 20 \text{ V}$

Par la SLK : $U_{J_2} = U_{R_5} - R_3 I_{R_3} = -2.5 \text{ V}$ Puissance délivrée par la source J_2 :

$$p_{J_2} = J_2 U_{J_2} = -0.005 \text{ W}$$

La source J_2 consomme de la puissance !

4. branche J_1 :



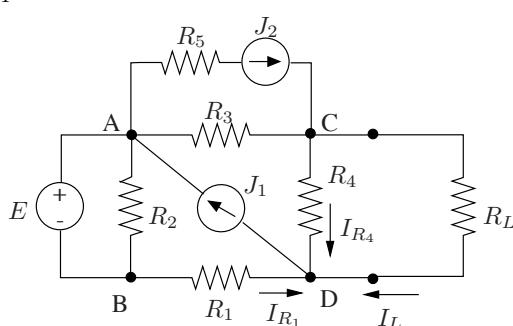
SLK dans la maille DCA :

$$U_{J_1} = U_{R_4} + U_{R_3} = 104.3 \text{ V}$$

Puissance délivrée par la source J_1 :

$$p_{J_1} = J_1 U_{J_1} = 0.52 \text{ W}$$

5. branche R_1 :

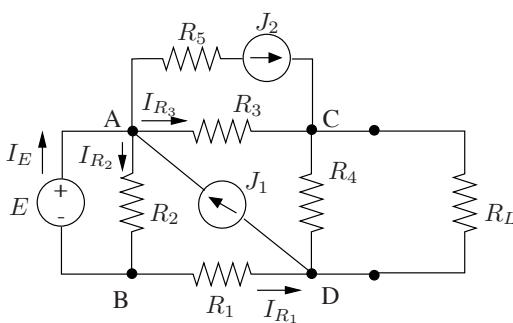


PLK au noeud D : $I_{R_1} = J_1 - I_{R_4} - I_L = 2.1 \text{ mA}$ et $U_{R_1} = R_1 I_{R_1} = 84 \text{ V}$

Puissance consommée par R_1 :

$$p_{R_1} = \frac{U_{R_1}^2}{R_1} = R_1 I_{R_1}^2 = 0.176 \text{ W}$$

6. branches E et R_2 :



On a : $I_{R_2} = \frac{E}{R_2} = 0.33 \text{ mA}$ ($U_{R_2} = E$!)

Puissance consommée par R_2 :

$$p_{R_2} = R_2 I_{R_2}^2 = 0.007 \text{ W}$$

PLK au noeud B : $I_E = I_{R_2} - I_{R_1} = -1.77 \text{ mA}$

Vérification : PLK au noeud A : $I_E + J_1 = I_{R_2} + J_2 + I_{R_3}$

Puissance délivrée par la source E :

$$p_E = EI_E = -0.035 \text{ W}$$

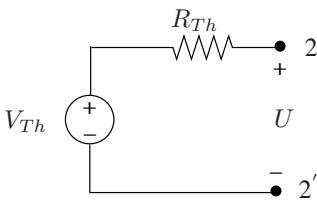
On vérifie le bilan de puissance :

$$p_{R_L} + p_{R_4} + p_{R_3} + p_{R_5} + p_{R_1} + p_{R_2} = p_{J_2} + p_{J_1} + p_E$$

Solution de l'exercice 5.8

1. Schéma équivalent de Thévenin

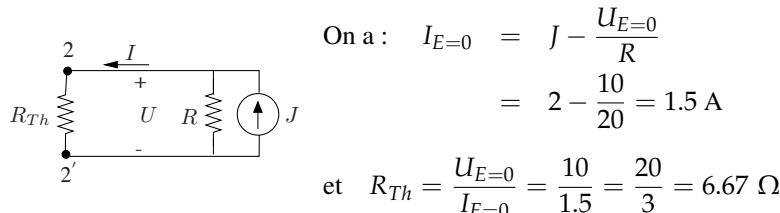
Le circuit à gauche de 22' est linéaire et résistif, il peut donc être remplacé par un schéma équivalent de Thévenin comprenant une source de tension V_{Th} en série avec une résistance R_{Th} .



De plus, puisque E est la seule source indépendante d'énergie présente dans le circuit à gauche de 22', V_{Th} est directement proportionnelle à E :

$$V_{Th} = \alpha E$$

- (a) Détermination de R_{Th} : lorsque $E = 0$, l'équivalent de Thévenin se simplifie en la seule résistance R_{Th} . Le circuit complet prend ainsi la forme :

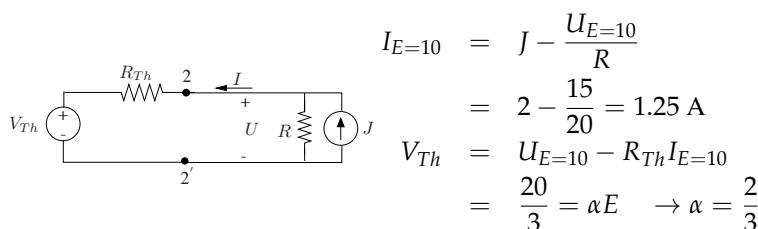


- (b) Détermination de V_{Th} pour $E = 30 \text{ V}$.

Deux procédures équivalentes sont possibles.

- Déterminer le coefficient α sur base de la valeur de U lorsque $E = 10 \text{ V}$ et en déduire V_{Th} correspondant à $E = 30 \text{ V}$.

Si $E = 10 \text{ V}$, on a $U_{E=10} = 15 \text{ V}$



Finalement, pour $E = 30 \text{ V}$, $V_{Th} = \alpha E = 20 \text{ V}$

- ii. Déterminer la valeur de U correspondant à $E = 30$ V et en déduire directement la valeur de V_{Th} pour cette valeur de E .

Le circuit étant linéaire, d'après le théorème de superposition, U peut s'écrire

$$U = \alpha'E + \beta'J = \alpha'E + \beta \quad \text{puisque } J \text{ est fixé}$$

Des deux conditions

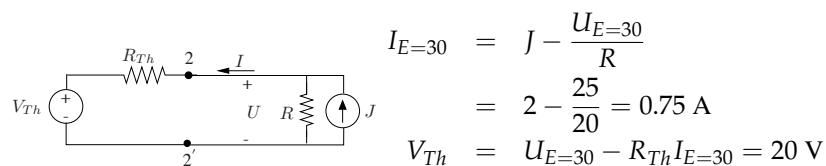
$$E = 0 \leftrightarrow U = 10 \text{ V}$$

$$E = 10 \text{ V} \leftrightarrow U = 15 \text{ V}$$

On déduit

$$U = 0.5E + 10 \quad \text{et donc pour } E = 30 \text{ V, } U = 25 \text{ V}$$

On a :



2. Calcul des puissances.

Il est possible de déterminer :

- la puissance consommée par la résistance R :

$$p_R = \frac{U_{E=30}^2}{R} = \frac{25^2}{20} = 31.25 \text{ W}$$

- la puissance fournie par la source J :

$$p_J = J \cdot U_{E=30} = 2.25 = 50 \text{ W}$$

- il n'est pas possible de déterminer la puissance fournie par la source E : la constitution du circuit résistif compris entre les accès 11' et 22' étant inconnue, le courant débité par E ne peut être déterminé ;
- la bilan de puissance pour le circuit complet permet seulement de déduire que la puissance consommée par le circuit à gauche de 22' est égale à :

$$p = p_J - p_R = 50 - 31.25 = 18.75 \text{ W}$$

- c'est également la puissance consommée par le schéma équivalent de Thévenin. Par contre, la puissance fournie par la source de Thévenin V_{Th} et la puissance consommée par la résistance de Thévenin R_{Th} considérées isolément n'ont pas de signification physique.

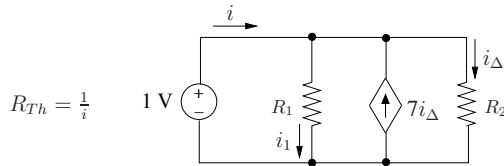
Solution de l'exercice 5.9

1. Schéma équivalent de Thévenin vu des bornes de la capacité

Réduisons tout d'abord le circuit à droite de la capacité à son schéma équivalent de Thévenin. Ce circuit ne comporte pas de source indépendante

et donc le schéma équivalent de Thévenin se réduit à la seule résistance de Thévenin.

On impose une tension de 1V à l'accès comme indiqué à la figure ci-dessous,



et on dérive successivement :

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{R_1} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4} \text{ A} \\ i_\Delta &= \frac{1}{2.10^4} = 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ A} \end{aligned}$$

et par application de la PLK :

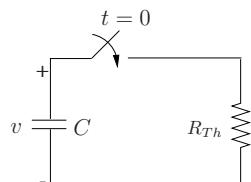
$$\begin{aligned} i &= 10^{-4} + 0.5 \cdot 10^{-4} - 7 \cdot (0.5) \cdot 10^{-4} \\ &= -2 \cdot 10^{-4} \text{ A.} \end{aligned}$$

On déduit :

$$R_{Th} = \frac{1}{-2 \cdot 10^{-4}} = -5 \text{ k}\Omega.$$

2. Expression de $v(t)$ aux bornes de condensateur

Le circuit se réduit au circuit ci-dessous avec $v(0) = v_0 = 10 \text{ V}$.



La résistance équivalente de Thévenin présente une valeur négative suite à la présence de la source commandée. Le circuit est un circuit actif qui n'est pas nécessairement stable. En conséquence, la constante de temps du circuit sera elle aussi négative, ce qui implique que la tension v aux bornes de C sera croissante.

Écrivons l'équation différentielle qui gouverne la tension v , dérivée de l'expression de la PLK. :

$$\begin{aligned} C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R_{Th}} &= 0 \\ (5 \cdot 10^{-6}) \frac{dv}{dt} - \frac{v}{5 \cdot 10^3} &= 0 \\ \frac{dv}{dt} - 40v &= 0. \end{aligned}$$

La solution de cette équation s'écrit :

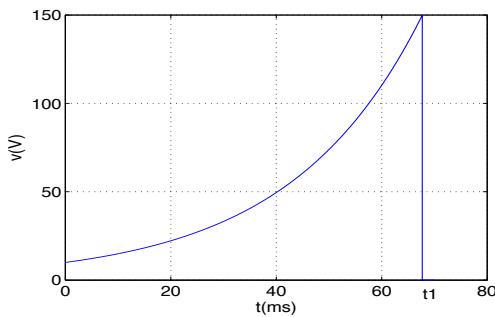
$$\begin{aligned} v &= v_0 e^{40t} \quad \text{avec } v_0 = v(0) = 10 \text{ V} \\ &= 10 e^{40t} \text{ V}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

3. Instant où l'on court-circuite C

La capacité court-circuite lorsque v atteint 150 V soit pour $t = t_1$ tel que :

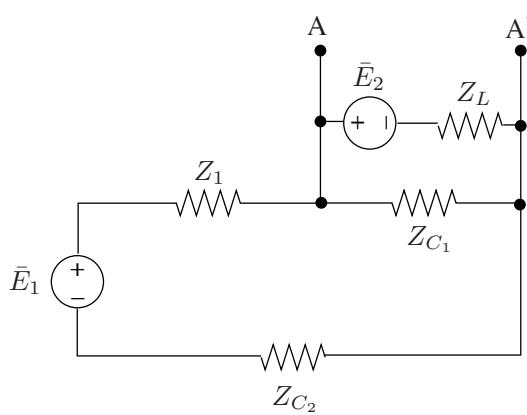
$$\begin{aligned} 10 e^{40t_1} &= 150 \\ t_1 &= \frac{\ln 15}{40} = 67.7 \text{ ms} \end{aligned}$$

4. Tracé de $v(t)$



Solution de l'exercice 5.10

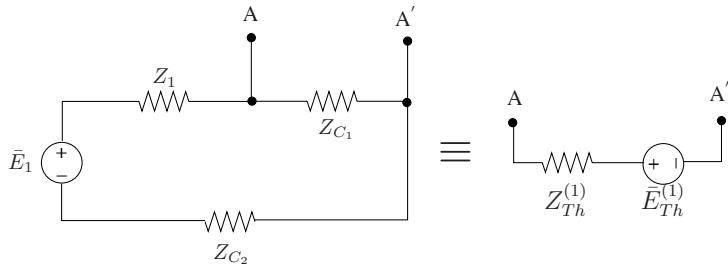
Dans le domaine fréquentiel, le circuit est représenté par le schéma suivant :



Les impédances du circuit sont données par :

$$\begin{aligned} Z_1 &= 50 + j30 \Omega \\ Z_{C_1} &= -j50 \Omega \\ Z_{C_2} &= -j20 \Omega \\ Z_L &= j10 \Omega \end{aligned}$$

- a) Recherchons tout d'abord le schéma équivalent de Thévenin de la partie de circuit ci-dessous



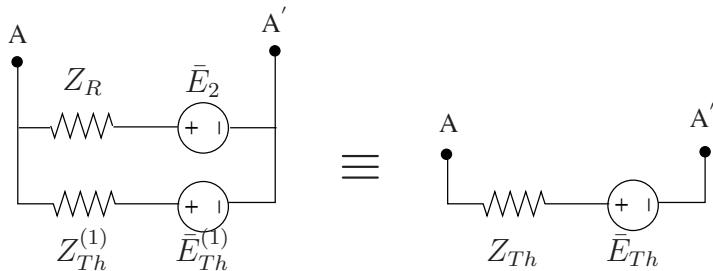
On a :

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \frac{\bar{E}_1}{Z_1 + Z_{C_1} + Z_{C_2}} \\ \bar{V}_{Th}^{(1)} &= \frac{Z_{C_1}}{Z_1 + Z_{C_1} + Z_{C_2}} \bar{E}_1 = \frac{-150}{50 - j40} \bar{E}_1 \\ &= (0.488 - j0.61) \bar{E}_1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}Z_{Th}^{(1)} &= Z_{C_1} // (Z_1 + Z_{C_2}) \\ &= \frac{Z_{C_1}(Z_1 + Z_{C_2})}{Z_{C_1} + Z_1 + Z_{C_2}} \\ &= \frac{-j50(50 + j10)}{50 - j40} \\ &= 30.5 - j25.6 \Omega\end{aligned}$$

- b) Le circuit complet se réduit alors à celui de la figure suivante et son schéma équivalent vu de l'accès AA' est donné par :



$$\begin{aligned}\bar{I}_0 &= \frac{\bar{V}_{Th}^{(1)} - \bar{E}_2}{Z_{Th}^{(1)} + Z_L} = \frac{(0.488 - j0.61) \bar{E}_1 - 30}{30.5 - j15.6} \\ \text{et } \bar{V}_{Th} &= \bar{E}_2 + j10 \bar{I}_0 \\ &= 30 + \frac{j10}{30.5 - j15.6} ((0.488 - j0.61) \bar{E}_1 - 30) \quad (1)\end{aligned}$$

On demande d'avoir $\bar{V}_{Th} = 50\angle45^\circ \text{ V}$. On déduit la valeur de \bar{E}_1 de (1) :

$$\bar{E}_1 = 175.06 + j72.12 = 189.33\angle22.4^\circ \text{ V}.$$

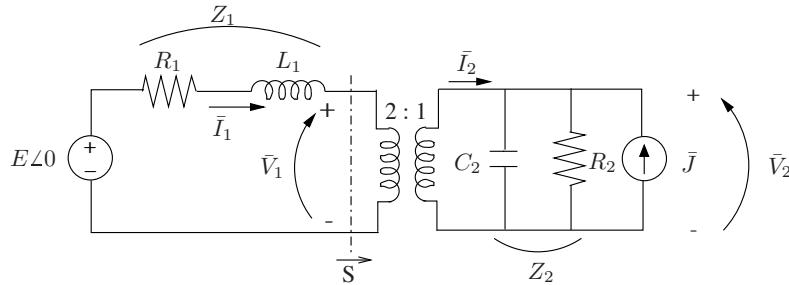
La recherche de Z_{Th} n'est pas nécessaire. Elle vaut :

$$Z_{Th} = \frac{j10 Z_{Th}^{(1)}}{Z_{Th}^{(1)} + j10} = 2.6 + j11.3 \Omega.$$

Solution de l'exercice 5.11

Le transfert de puissance à travers la section S du circuit ci-dessous est donné par

$$S = \bar{V}_1 \bar{I}_1^*.$$



On a :

$$\begin{aligned} Z_1 &= R_1 + j\omega L_1 = 10 + j12.566 \Omega \\ Z_2 &= \frac{1}{j\omega C_2 + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{10^{-2} + j6.283 \cdot 10^{-3}} \Omega. \end{aligned}$$

1. Schéma équivalent de Thévenin vu de l'accès gauche du transformateur

Pour la partie du circuit à droite du transformateur, on écrit :

$$\bar{V}_2 = \bar{J}Z_2 + Z_2\bar{I}_2.$$

Tenant compte des contraintes imposées par le transformateur idéal, on dérive :

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 &= 2\bar{V}_2 \\ \bar{I}_1 &= \frac{1}{2}\bar{I}_2 \\ \text{soit } \bar{V}_1 &= 2\bar{J}Z_2 + 4Z_2\bar{I}_1. \end{aligned}$$

1. $2\bar{J}Z_2$ représente la f.e.m. de Thévenin équivalente vue de l'accès 1 (gauche) du transformateur.

2. $4Z_2$ est l'impédance équivalente de Thévenin correspondante.

2. Puissance traversant la section S

La SLK dans la partie gauche du circuit s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{E} &= Z_1\bar{I}_1 + \bar{V}_1 \\ &= Z_1\bar{I}_1 + 2\bar{J}Z_2 + 4Z_2\bar{I}_1. \end{aligned}$$

On déduit :

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \frac{\bar{E} - 2\bar{J}Z_2}{Z_1 + 4Z_2} \\ &= \alpha\bar{E} + \beta \end{aligned}$$

avec $\alpha = (2.555 + j1.4428) \cdot 10^{-3}$
 $\beta = -(2.683 + j4.182) \cdot 10^{-1}$

et

$$\begin{aligned}\bar{V}_1 &= 2\bar{J}Z_2 + 4Z_2\bar{I}_1 \\ &= \alpha'\bar{E} + \beta' \\ \text{avec } \alpha' &= 0.993 - j0.0465 \\ \beta' &= -2.572 + j7.553.\end{aligned}$$

La puissance traversant la section S de la gauche vers la droite est égale à :

$$\begin{aligned}S &= \bar{V}_1 \bar{I}_1^* \\ &= (\alpha'\bar{E} + \beta')(\alpha\bar{E} + \beta)^* \\ &= \alpha'\alpha^*E^2 + (\beta'\alpha^* + \alpha'\beta^*)\bar{E} + \beta'\beta^* \\ &= (2.468 \cdot 10^{-3} E^2 - 0.2425 E - 2.4685) + j(-1.551 \cdot 10^{-3} E^2 + 0.4506 E - 3.1019).\end{aligned}$$

Le transfert de puissance se réalise avec un $\cos \phi = 1$ si $S = P + j0$, c'est-à-dire si la puissance complexe est réelle et se réduit à la puissance active.

Il faut donc :

$$-1.551 \cdot 10^{-3} E^2 + 0.4506 E - 3.1019 = 0$$

soit

$$E = \begin{cases} 7.055 & \text{V} \\ 283.5 & \text{V} \end{cases}$$

On détermine, pour chaque valeur de E , la puissance active qui transite de la gauche vers la droite

1. pour $E_1 = 7.055 \text{ V}$, on trouve :

$$\begin{aligned}P(E_1) &= 2.468 \cdot 10^{-3} E_1^2 - 0.2425 E_1 - 2.4685 \\ &= -4.06 < 0\end{aligned}$$

le signe négatif de cette puissance indique qu'elle transite en réalité de la droite vers la gauche. La solution $E_1 = 7.055 \text{ V}$ est donc à rejeter ;

2. pour $E_2 = 283.5 \text{ V}$, on trouve :

$$P(E_2) = 127.1 \text{ W} > 0$$

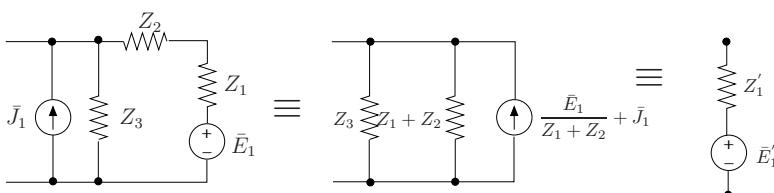
puissance qui transite effectivement de la gauche vers la droite. La solution est donc :

$$E = 283.5 \text{ V}.$$

Solution de l'exercice 5.12

1. Schéma équivalent de Thévenin vu du secondaire du transformateur

Par transformation de source successives, on dérive :

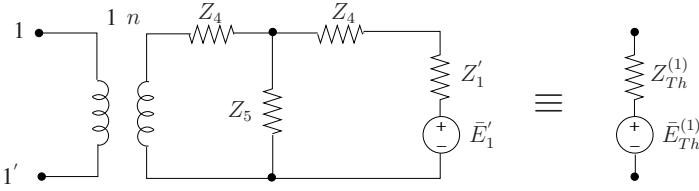


avec

$$\begin{aligned} Z'_1 &= \frac{Z_3(Z_1 + Z_2)}{Z_3 + Z_1 + Z_2} \Omega \\ \bar{E}'_1 &= \frac{Z'_1}{Z_1 + Z_2} \bar{E}_1 + Z'_1 \bar{J}_1 \text{ V.} \end{aligned}$$

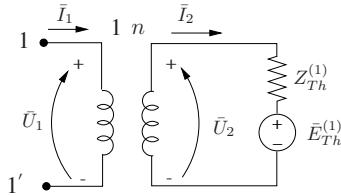
On calcule les paramètres du schéma équivalent de Thévenin :

$$\begin{aligned} Z_{Th}^{(1)} &= Z_4 + \frac{Z_5(Z_4 + Z'_1)}{Z_5 + Z_4 + Z'_1} = 61.44 + j79.63 \Omega \\ \bar{E}_{Th}^{(1)} &= Z_5 \cdot \frac{\bar{E}'_1}{Z_5 + Z_4 + Z'_1} = 38.93 + j59.51 \text{ V.} \end{aligned}$$



2. Schéma équivalent de Thévenin vu du primaire du transformateur

Le circuit se réduit au schéma ci-dessous.



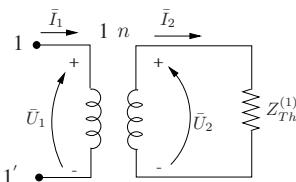
1. La f.e.m. de Thévenin est la tension qui apparaît à vide à l'accès 11' :

$$\text{accès à vide} \Rightarrow \bar{I}_1 = 0 \Rightarrow \bar{I}_2 = 0 \Rightarrow \bar{U}_2 = \bar{E}_{Th}^{(1)}.$$

Le transformateur impose la relation suivante entre les tensions \bar{U}_1 et \bar{U}_2 :

$$\bar{U}_1 = \frac{1}{n} \bar{U}_2 \Rightarrow \bar{E}_{Th} = \frac{\bar{E}_{Th}^{(1)}}{n}$$

2. L'impédance équivalente de Thévenin est l'impédance vue de l'accès 11' lorsque le circuit est passifié, c'est-à-dire lorsque $\bar{E}_{Th}^{(1)} = 0$.



Par définition, $Z_{Th} = \frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_1}$, or

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= \frac{1}{n} \bar{U}_2 \\ \text{et } \bar{I}_1 &= n \bar{I}_2 \end{aligned}$$

On déduit :

$$Z_{Th} = \frac{1}{n^2} \frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_2} = \frac{Z_{Th}^{(1)}}{n^2}$$

puisque le rapport $\frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_2}$ représente l'impédance $Z_{Th}^{(1)}$.

3. Détermination du rapport de transformation n

On impose que la réactance de Thévenin soit de 20Ω . Il faut donc

$$X_{Th} = Im(Z_{Th}) = \frac{79.63}{n^2} = 20 \Omega.$$

On déduit :

$$n = \sqrt{\frac{79.63}{20}} = 1.995.$$

L'impédance équivalente de Thévenin vaut :

$$Z_{Th} = \frac{61.44}{n^2} + j20 = 15.44 + j20 \Omega$$

et la f.e.m. de Thévenin :

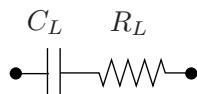
$$\bar{E}_{Th} = \frac{38.93 + j59.51}{n} = 19.51 + j29.83 \text{ V}.$$

4. Réalisation de l'adaptation

Pour soutirer au circuit une puissance maximale, on connecte une impédance de charge

$$Z_L = Z_{Th}^* = 15.44 - j20 \Omega.$$

Cette impédance peut être réalisée au moyen d'un dipôle RC série :

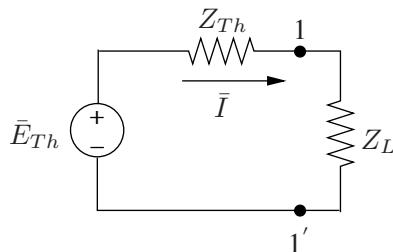


$$\text{avec } R_L = 15.44 \Omega$$

$$C_L = \frac{1}{20\omega} = 5 \mu\text{F}.$$

5. Puissances consommées par Z_L

On connecte l'impédance de charge Z_L à l'accès 11' :



1. Impédance Z_L

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}_{Th}}{Z_{Th} + Z_L} = \frac{\bar{E}_{Th}}{2R_{Th}} = 0.632 + j0.966 = 1.155 \angle 56.8^\circ \text{ A}$$

$$\bar{U}_{Z_L} = Z_L \bar{I} = 29.08 + j2.27 = 29.17 \angle 4.46^\circ \text{ V}$$

La puissance complexe consommée par Z_L vaut :

$$S_{Z_L} = Z_L I^2 = Z_{Th}^* \frac{E_{Th}^2}{4R_{Th}^2} = 20.6 - j26.7 = 33.7 \angle -52.3^\circ \text{ VA}.$$

- (a) puissance active : $P_{Z_L} = 20.6 \text{ W} = P_{R_L}$
(b) puissance réactive : $Q_{Z_L} = -26.7 \text{ Var} = Q_{C_L}$.

La puissance instantanée s'écrit :

$$\begin{aligned} p_{Z_L}(t) &= P_{Z_L} + |S_{Z_L}| \cos(2\omega t + 4.46^\circ + 56.8^\circ) \\ &= 20.6 + 33.7 \cos(2\omega t + 61.26^\circ) \text{ W}. \end{aligned}$$

Les tension et courant s'écrivent :

$$\begin{aligned} u_{Z_L}(t) &= \sqrt{2} \cdot 29.17 \cos(\omega t + 4.46^\circ) \\ &= 41.25 \cos(\omega t + 4.46^\circ) \text{ V} \\ i_{Z_L}(t) &= \sqrt{2} \cdot 1.155 \cos(\omega t + 56.8^\circ) \\ &= 1.633 \cos(\omega t + 56.8^\circ) \text{ A}. \end{aligned}$$

2. Résistance R_L

$$\begin{aligned} \bar{I}_{R_L} &= \bar{I} & S_{R_L} &= 20.6 + j0 \text{ VA} \\ i_{R_L} &= i_{Z_L} & P_{R_L} &= 20.6 \text{ W} & Q_{R_L} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_{R_L} &= R_L \bar{I} = 9.75 + j14.9 \text{ V} \\ u_{R_L} &= R_L i_{R_L} = 25.197 \cos(\omega t + 56.8^\circ) \text{ V} \end{aligned}$$

Le courant i_{R_L} et la tension u_{R_L} sont bien évidemment en phase.

$$\begin{aligned} p_{R_L} &= 20.6 + 20.6 \cos(2\omega t + 56.8^\circ + 56.8^\circ) \\ &= 20.6 + 20.6 \cos(2\omega t + 113.6^\circ) \text{ W}. \end{aligned}$$

3. Capacité C_L

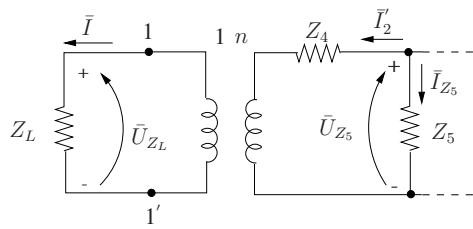
$$\begin{aligned} S_{C_L} &= 0 - j26.7 \text{ VA} \\ P_{C_L} &= 0 \\ Q_{C_L} &= -26.7 \text{ Var} \\ \bar{I}_{C_L} &= \bar{I} \\ i_{C_L} &= i_{Z_L} \\ \bar{U}_{CL} &= \frac{-j}{\omega C_L} \bar{I} = 19.37 - j12.64 \text{ V} \\ u_{C_L}(t) &= \frac{1.633}{\omega C_L} \cos(\omega t + 56.8^\circ - 90^\circ) = 32.66 \cos(\omega t - 33.2^\circ) \text{ V} \end{aligned}$$

La tension est en retard de 90° par rapport au courant.

$$\begin{aligned} p_{C_L} &= 26.7 \cos(2\omega t + 56.8^\circ - 33.2^\circ) \\ &= 26.7 \cos(2\omega t + 23.6^\circ) \text{ W} \end{aligned}$$

6. Puissances consommées par l'impédance Z_5

Il faut déterminer le courant \bar{I}_{Z_5} et la tension \bar{U}_{Z_5} comme indiqué à la figure ci-dessous :



Connaissant \bar{I} , on déduit

$$\bar{I}_2' = \frac{1}{n} \bar{I} = 0.317 + j0.484 \text{ A}$$

De \bar{U}_{Z_L} , on déduit :

$$\bar{U}_2 = n \bar{U}_{Z_L} = 58.03 + j4.53 \text{ V}$$

et

$$\bar{U}_{Z_5} = \bar{U}_2 + Z_4 \bar{I}_2' = 48.16 + j31.73 = 57.67 \angle 33.38^\circ \text{ V}$$

$$\bar{I}_{Z_5} = \frac{\bar{U}_{Z_5}}{Z_5} = 0.546 - j0.397 = 0.675 \angle -36.1^\circ \text{ A}.$$

On calcule successivement :

$$u_{Z_5}(t) = 81.56 \cos(\omega t + 33.38^\circ) \text{ V}$$

$$i_{Z_5}(t) = 0.954 \cos(\omega t - 36.1^\circ) \text{ A}$$

$$S_{Z_5} = \bar{U}_{Z_5} \bar{I}_{Z_5}^* = 13.67 + j36.45 = 38.93 \angle -69.4^\circ \text{ VA}$$

$$P_{Z_5} = 13.67 \text{ W}$$

$$Q_{Z_5} = 36.45 \text{ Var}$$

$$p_{Z_5}(t) = 13.67 + 38.93 \cos(2\omega t - 2.68^\circ) \text{ W}.$$

6

Fonctions de transfert et filtres

Ce chapitre, grâce aux notions introduites au Chapitre 4, permet de porter un regard nouveau sur l'analyse des circuits électriques en utilisant les concepts de "Signaux et Systèmes", qui sont d'abord brièvement rappelées, puis particularisées à des circuits simples et enfin illustrés sur l'exemple de la radio AM.

6.1 Réponse fréquentielle

La réponse fréquentielle d'un circuit est la fonction qui permet d'analyser l'action du circuit sur un signal sinusoïdal donné selon sa fréquence. On l'écrit (cf. Figure 6.1)

$$H(j\omega) = \frac{\bar{Y}(j\omega)}{\bar{X}}$$

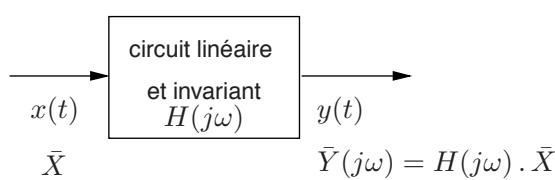


FIGURE 6.1: Réponse fréquentielle d'un circuit.

6.1.1 Définition des fonctions de transfert d'un quadripôle

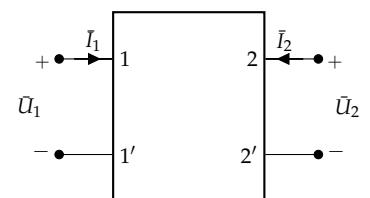
Pour un quadripôle on peut définir quatre fonctions de transfert :

$$H(j\omega) = \left. \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} \right|_{\bar{I}_2=0} \quad \text{gain en tension}$$

$$H(j\omega) = \left. \frac{\bar{I}_2}{\bar{I}_1} \right|_{\bar{U}_2=0} \quad \text{gain en courant}$$

$$H(j\omega) = \left. \frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_1} \right|_{\bar{I}_2=0} \quad \text{impédance de transfert}$$

$$H(j\omega) = \left. \frac{\bar{I}_2}{\bar{U}_1} \right|_{\bar{U}_2=0} \quad \text{admittance de transfert}$$



Exemple : Impédance d'un circuit RL série.

Soit $x(t) = i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$ ou, en notation de phaseurs,

$$\bar{X} = \bar{I} = I_m e^{j\phi_i}$$

Si on définit

$$\bar{Y}(j\omega) = \bar{U} = Z(j\omega)\bar{I} = (R + j\omega L)\bar{I}$$

la réponse fréquentielle est tout simplement égale à l'impédance du circuit :

$$H(j\omega) = \frac{\bar{Y}(j\omega)}{\bar{X}} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = Z(j\omega) = R + j\omega L$$

De retour dans le domaines temporel, on peut écrire :

$$\begin{aligned} y(t) = u(t) &= \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} I_m \cos(\omega t + \phi_i + \arctan \frac{\omega L}{R}) \\ &= |H(j\omega)| I_m \cos(\omega t + \phi_i + \angle H(j\omega)) \end{aligned}$$

avec $|H(j\omega)|$ la réponse en amplitude, qui indique la modification de l'amplitude du signal $x(t)$, et $\angle H(j\omega)$ la réponse en phase, qui indique la modification de la phase du signal $x(t)$.

6.1.2 Forme analytique, pôles et zéros

Toute réponse fréquentielle d'un circuit peut se mettre sous la forme rationnelle :

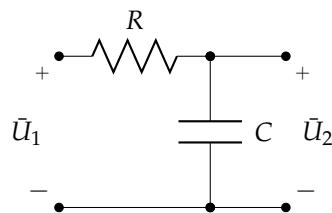
$$H(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

$N(j\omega)$ et $D(j\omega)$ sont deux polynômes en $j\omega$ à coefficients réels. Les racines de $D(j\omega) = 0$ sont les *pôles* de la fonction. Ils correspondent aux fréquences naturelles du circuit. Les racines de $N(j\omega) = 0$ sont les *zéros* de la fonction. À ces fréquences, $H(j\omega) = 0$, donc $Y(j\omega) = 0$, il y a atténuation totale. Pour éviter des calculs en nombres complexes, il est courant de remplacer la variable $j\omega$ par s . La fonction

$$H(s) = H(j\omega)|_{j\omega=s}$$

est appelée *fonction de transfert*.

Exemple : Quadripôle RC.



Par application du diviseur de tension, la réponse fréquentielle "gain

"en tension" est :

$$H(j\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

La fonction de transfert correspondante est :

$$H(s) = \frac{1}{1 + sRC}$$

- zéro : $j\omega = s \rightarrow \infty \quad |H(j\omega)| \rightarrow 0$ pour $\omega \rightarrow \infty$
- pôle : $j\omega = s = -\frac{1}{RC}$ = fréquence naturelle

On représente une réponse fréquentielle par sa réponse en amplitude et sa réponse en phase.

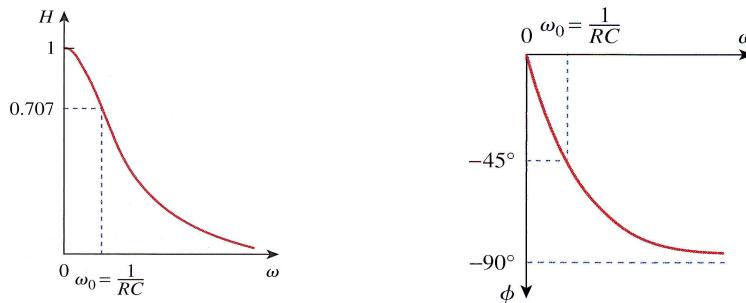
Exemple : Représentation de $H(j\omega)$.

$$H = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}$$

$$\angle H(j\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_0}$$

avec

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad |H(j\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 \quad \phi = \angle H(j\omega_0) = -\frac{\pi}{4}$$



Lorsqu'on utilise une échelle logarithmique pour les fréquences, et qu'on représente l'amplitude en décibels, on parle de *diagramme de Bode*.

6.1.3 Le décibel ou dB

Le décibel est une échelle logarithmique de mesure du rapport entre deux puissances, ou du gain en puissance

$$G_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1}$$

Si l'on exprime ce gain en fonction de U ou I , on obtient :

$$P \propto U^2, I^2 \Rightarrow G_{dB} = 20 \log_{10} \frac{U_2}{U_1} = 20 \log_{10} \frac{I_2}{I_1}$$

Valeurs caractéristiques :

		G_{dB}
$P_1 = P_2$	$U_1 = U_2$	0
$P_2 = \frac{1}{2}P_1$	$U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}U_1$	-3
$P_2 = \frac{1}{10}P_1$	$U_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}U_1$	-10

Dans l'exemple précédent, pour $\omega = \omega_0$,

$$20 \log_{10} \frac{|H(\omega_0)|}{|H(0)|} = -3 \text{ dB.}$$

6.2 Filtres et définitions

Filtre. Un filtre est un circuit qui permet d'éliminer ou atténuer fortement certaines fréquences d'un signal tout en affectant le moins possible les autres fréquences.

Un filtre de réponse fréquentielle idéale est impossible à réaliser en pratique.

Pulsion de coupure à -3 dB. On définit la pulsation de coupure à -3 dB qui limite la bande passante :

$$\omega_c \text{ telle que } |H(\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Catégories de filtres et réponses fréquentielles idéales. Ils sont illustrés à la Figure 6.2.

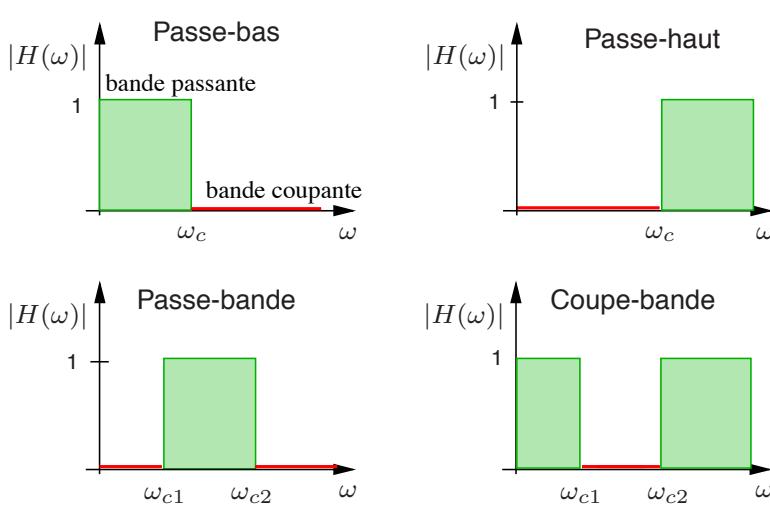
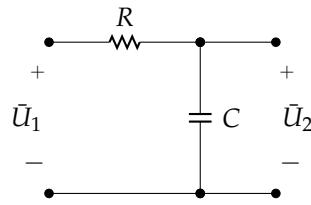


FIGURE 6.2: Catégories de filtres et réponses fréquentielles idéales.

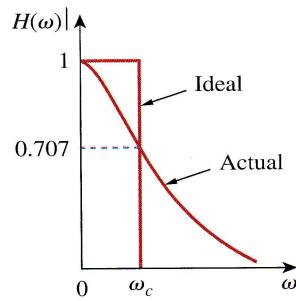
Exemple : Filtre passe-bas du premier ordre.
Pour le circuit ci-dessous



on a

$$H(j\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

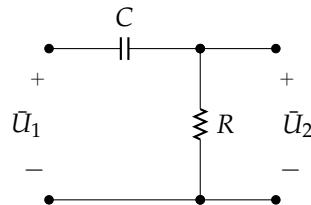
La pulsation de coupure à -3 dB est $\omega_c = \frac{1}{RC} = \omega_0$. Le filtre passe bas du premier ordre est loin du filtre idéal :



Si on change les accès de l'exemple précédent, en prenant la tension de sortie aux bornes de la résistance, on obtient tout naturellement un filtre passe haut.

Exemple : Filtre passe-haut du premier ordre

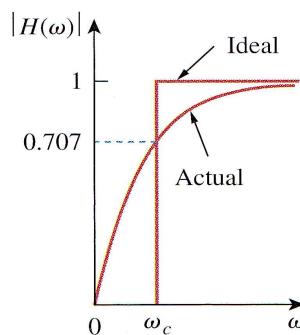
Pour le circuit ci-dessous



On a

$$H(j\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

La pulsation de coupure à -3 dB est $\omega_c = \frac{1}{RC}$. Le filtre passe haut du premier ordre est loin du filtre idéal :



6.3 Circuits résonants

Les circuits résonants sont des circuits du second ordre, constitués d'au moins une bobine et un condensateur. On peut grouper les nombreuses applications des circuits résonants en deux catégories. L'une concerne les applications ayant trait à leur qualité de "filtre", elle-même liée à la notion de sélectivité. L'autre concerne le transfert de puissance et l'utilisation du circuit oscillant en tant qu'adaptateur d'impédances¹. Ces deux fonctions peuvent être remplies par le circuit résonnant série aussi bien que parallèle. Nous abordons uniquement leur utilisation en tant que filtre dans cette section, et l'illustrons directement sur l'exemple de la radio AM. La coupe 1 de la Figure 6.3 illustre l'étage d'entrée de la radio AM.

1. Remarquons que le circuit résonnant est en fait un quadripôle.

6.3.1 Antenne

Tout d'abord, il faut capter un signal. Ce signal se trouve dans l'air ambiant et est capté par un simple fil. Celui-ci va en réalité capter des différences de potentiel dues à la présence des ondes qu'on souhaite capter. Ainsi, plus le fil est long, meilleure sera la réception.

6.3.2 Circuit résonant

Le signal capté par l'antenne doit ensuite être filtré. L'antenne capte une multitude de signaux mais seulement une partie nous intéresse. Nous cherchons à ne faire passer qu'une fréquence comprise entre 500 et 1600 kHz en AM. Pour "sélectionner" le signal porteur qui nous intéresse, nous utilisons un filtre passe-bande fait d'un dipôle LC parallèle. L'impédance équivalente du dipôle se calcule aisément :

$$Z_{eq} = \frac{Z_L Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{j\omega L \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\frac{L}{C}}{\frac{(1-\omega^2 LC)}{j\omega C}} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC} \quad (6.1)$$

On remarque que $Z \rightarrow \infty$ pour $\omega^2 LC \rightarrow 1$. La fréquence de résonance f_0 est donnée par

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

La fréquence que l'on souhaite capter peut ainsi être choisie en modifiant L et/ou C.

On peut tout d'abord choisir de changer l'inductance de la bobine en utilisant un noyau en ferrite : en la faisant coulisser dans la bobine, on change la perméabilité magnétique et donc on change L. Pour notre circuit, avec un capacité fixe $C = 470$ pF, on a $L \in [21; 184]$ μ H. On peut également faire varier C, en utilisant un condensateur à capacité variable. Par exemple, pour un L fixé à 4.7 mH, on a $C \in [2; 22]$ pF. Pour pouvoir tester ces deux possibilités, nous avons ajouté un switch dans le circuit qui permet de basculer vers un dipôle L - C variable ou vers un dipôle L variable - C.

À la fréquence de résonance, l'impédance du dipôle est (en théorie) infinie, ne laissant donc passer aucun courant vers la prise de terre. Pour des fréquences non voulues, l'impédance sera au contraire très petite et laissera passer les signaux à travers le dipôle inductif pour les envoyer vers la terre.

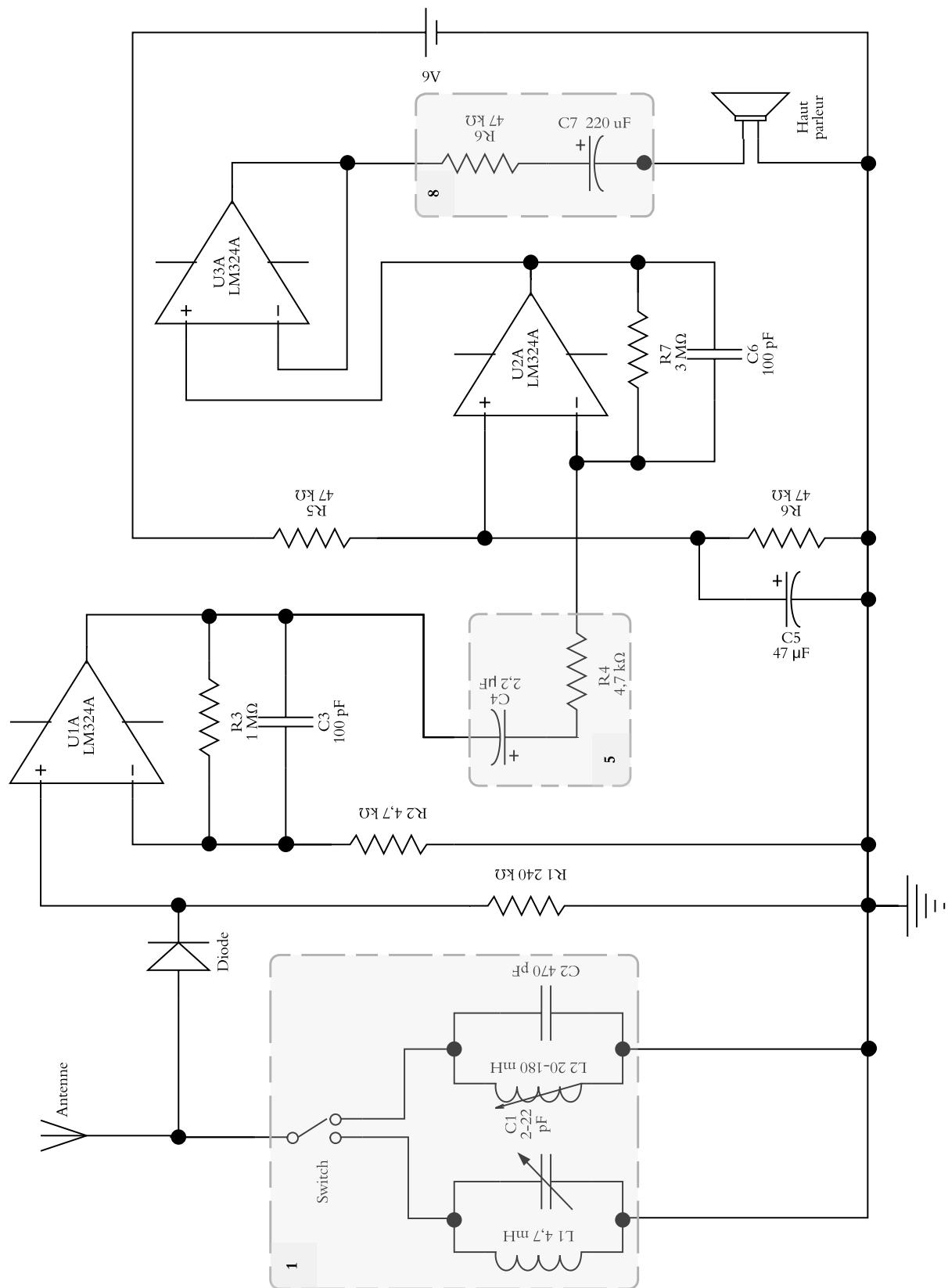


FIGURE 6.3: Circuit résonant de la radio AM.

6.3.3 Prise de Terre

Il ne faut pas oublier de définir un point de potentiel de référence pour notre système, et de relier celui-ci à la terre. Il s'agit d'un circuit de retour pour le courant. Un courant ne se créera donc dans l'antenne que si celle-ci est reliée au sol. Cette terre permettra donc de "réceptionner" les signaux non voulus qui passent à travers le filtre. Dans le cadre de cette expérience, nous relierez ce point de référence à la terre d'une prise électrique.

6.4 Autres filtres du circuit de réception et amplification de la radio AM

6.4.1 Filtre passe bas pour la démodulation

Une façon alternative de comprendre la détection d'enveloppe (cf. Section 3.5), après la rectification du signal, est de considérer le circuit de la coupe 5 de la Figure 6.3 comme un filtre passe bas.

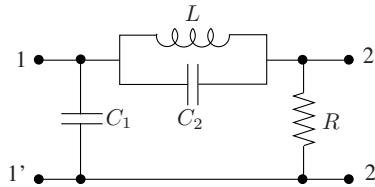
6.4.2 Filtre passe haut pour le haut-parleur

Comme on le verra au chapitre 7, le deuxième amplificateur opérationnel ajoute un *offset* de 4,5 V au signal. Cependant, un haut-parleur ne peut recevoir qu'un signal alternatif sans composante continue, qui lui serait nuisible. Il faut donc retirer cet offset (composante continue) et c'est à cela que sert le circuit RC série précédent le haut-parleur (coupe 8 de la Figure 6.3). Utilisé comme filtre passe-haut, il va éliminer l'offset qui est de fréquence nulle en théorie et de fréquence très faible en pratique.

6.5 Exercices non résolus

Exercice 6.1

On considère le quadripôle suivant.



$$C_1 = 15 \text{ nF}; C_2 = 5 \text{ nF}; L = 0.1 \text{ mH}; R = \frac{400}{3} \Omega$$

Déterminer :

1. la réponse fréquentielle

$$H(j\omega) = \left. \frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_1} \right|_{I_2=0}$$

2. ses fréquences naturelles et zéros de transmission.

Réponse :

$$H(j\omega) = \frac{-\omega^2 + 2 \cdot 10^{12}}{15 \cdot 10^{-9} (-j\omega^3 - 2 \cdot 10^6 \omega^2 + 2 \cdot 10^{12} j\omega + 10^{18})}$$

7

L'amplificateur opérationnel

L'amplificateur opérationnel (AO) fait partie de la catégorie des composants actifs. En grande majorité, ces éléments sont des quadripôles. Dans ce qui suit, nous considérerons avoir affaire à des éléments linéaires obtenus par linéarisation autour de leur point de fonctionnement. De plus, nous les supposerons invariants. Si cette modélisation facilite l'analyse des circuits, elle devient (presque) indispensable pour leur synthèse. Par contre, on ne peut en aucune façon supposer que les éléments actifs sont réciproques. Cependant, lorsqu'ils sont utilisés pour simuler des éléments passifs telle l'inductance, ils peuvent retrouver une modélisation d'éléments réciproques.

7.1 L'élément amplificateur opérationnel

l'AO est un composant électronique introduit dans les années 60 comme calculateur analogique. C'est un amplificateur de tension possédant deux entrées différentielles et une sortie unique (cf. Figure 7.1). En théorie des circuits, on ne s'intéresse pas à sa constitution interne mais à son fonctionnement, observé d'un certain nombre de ses bornes :

- entrée inverseuse (v_n)
- entrée non inverseuse (v_p)
- sortie (v_o)
- alimentation positive ($+V_{cc}$)
- alimentation négative ($-V_{cc}$)

7.1.1 Caractéristiques de fonctionnement

Un AO présente un fonctionnement linéaire dans une plage relativement restreinte $[-\epsilon, \epsilon]$, au-delà, l'AO fonctionne en saturation. Soit le circuit de la Figure 7.2. Formellement, on a

$$v_o = \begin{cases} -V_{sat} & \text{A}(v_p - v_n) < -V_{sat} \\ \text{A}(v_p - v_n) & -V_{sat} \leq \text{A}(v_p - v_n) \leq V_{sat} \\ +V_{sat} & \text{A}(v_p - v_n) > V_{sat} \end{cases}$$

En ce qui concerne les courants, la PLK s'applique mais il ne faut pas oublier de prendre en compte l'alimentation :

$$i_p + i_n + i_o + \underbrace{i_{c+} + i_{c-}}_{\text{Alimentation!}} = 0.$$

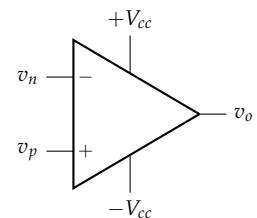


FIGURE 7.1: Représentation d'un AO.

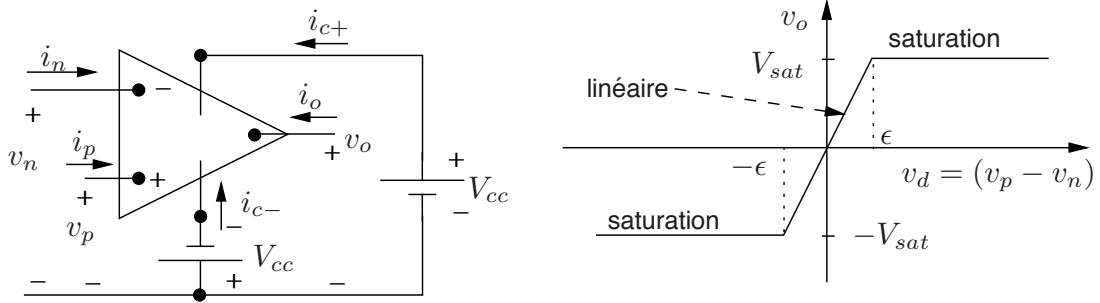


FIGURE 7.2: Fonctionnement de l'amplificateur opérationnel.

7.1.2 Modèle idéal

En pratique les valeurs typiques des paramètres d'un AO sont :

- $V_{sat} < 20 \text{ V}$
- A de l'ordre de 10^4 à 10^5
- → dans la plage de fonctionnement linéaire $|v_p - v_n| < 2 \text{ mV}$
- i_p, i_n de l'ordre de 0.1 mA

L'amplificateur opérationnel idéal est supposé avoir un gain infini. Ses caractéristiques sont les suivantes :

1. c'est un élément linéaire ;
2. le gain A est infini. Ceci a pour conséquence que la tension d'entrée doit être nulle pour que la tension de sortie soit finie. La tension de sortie est indéterminée et indépendante de la charge. Ce sont les éléments placés entre les entrées et la sortie (boucle de retour - feedback) qui permettront de fixer la tension et les courants dans le circuit comportant l'amplificateur idéal :

$$A = \infty \rightarrow \epsilon = 0, \quad v_p = v_n$$

3. l'impédance d'entrée est infinie, car les courants d'entrée sont nuls :

$$i_p = i_n = 0 \rightarrow Z_{in} = \infty$$

4. l'impédance de sortie est nulle. Ceci permet à l'amplificateur de délivrer une puissance quelconque à une charge quelconque.

Ceci est illustré à la Figure 7.3.

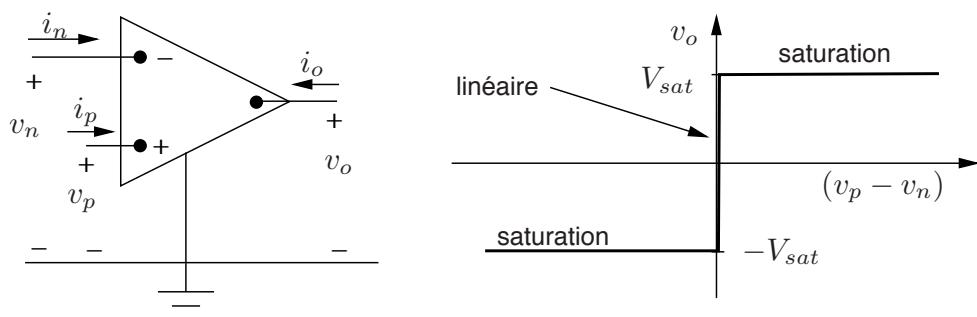


FIGURE 7.3: AO idéal.

En résumé, les conséquences de ces hypothèses sont que :

$$\begin{aligned} i_n &= 0 \\ i_p &= 0 \\ v_p - v_n &= 0 \quad \text{si } -V_{sat} < v_o < V_{sat} \\ v_o &= V_{sat} \frac{|v_p - v_n|}{v_p - v_n} \quad \text{si } (v_p - v_n) \neq 0 \end{aligned}$$

Remarques importantes :

- En mode de fonctionnement linéaire, v_o est fixé par le circuit extérieur à l'AO car il y a le plus souvent la présence d'une contre-réaction négative (cf. plus bas).
- Attention : $i_o \neq 0$ car il existe un courant débité par les sources d'alimentation

On notera que l'amplificateur peut être représenté schématiquement comme à la Figure 7.4 :

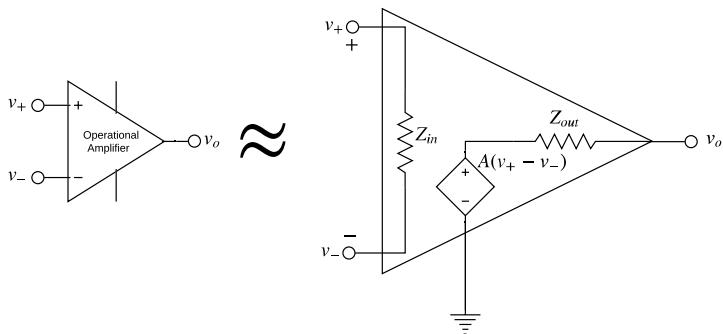


FIGURE 7.4: Schéma équivalent

7.1.3 Taux de contre-réaction

Le *taux de contre-réaction*, plus communément appelé *feedback*, provient du circuit qui ramène à l'entrée une fraction du signal de sortie. La Figure 7.5 représente cette contre-réaction sous forme de schéma-bloc.

E est le signal différentiel, A le gain de la boucle directe, H le gain de la boucle de retour ou de contre-réaction. Le gain global "en boucle fermée" du système se déduit comme suit : $E = V_i - HV_o$, $V_o = AE$, donc $V_o = AV_i - AHV_o$. Ou encore

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{A}{1 + AH} = \frac{1}{1/A + H}. \quad (7.1)$$

Pour un gain A infini (cas de l'AO idéal), l'expression (7.1) devient :

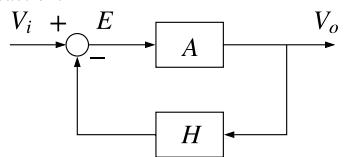
$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{H}. \quad (7.2)$$

Ceci montre comment, grâce à la contre-réaction, il est possible d'obtenir une tension de sortie finie avec un élément de gain infini.

7.2 Le montage amplificateur inverseur

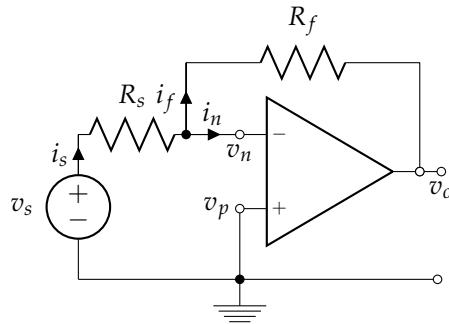
La tension à amplifier est appliquée à l'entrée inverseuse de l'AO.

FIGURE 7.5: Vue "système" de la contre-réaction.



7.2.1 Caractéristiques

Gain en tension. On cherche à déterminer le gain en tension $\frac{v_o}{v_s}$ du montage



Par hypothèse de l'AO idéal, on a

$$i_s - i_f = i_n = 0$$

On a également

$$v_p = 0 \rightarrow v_n = 0 \rightarrow i_s = i_f = \frac{v_s}{R_s}$$

Finalement

$$v_o = -R_f i_f = -\frac{R_f}{R_s} v_s$$

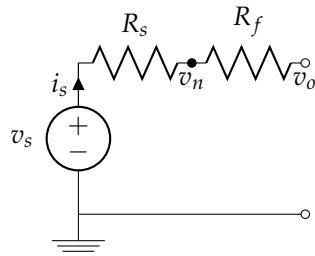
Et donc

$$\boxed{\frac{v_o}{v_s} = -\frac{R_f}{R_s}}$$

La borne "-" agît comme une masse virtuelle.

Taux de contre-réaction. Le potentiel v_o est fixé grâce à la boucle de retour introduite par la résistance R_f .

Le *Taux de contre-réaction du montage* est défini comme la fraction de la tension de sortie qui est ramenée aux bornes d'entrée de l'AO. Comme $i_n = 0$, tout se passe comme si R_s et R_f étaient connectées en série :



On a donc

$$i_s = \frac{v_s - v_o}{R_s + R_f}$$

et

$$v_n = v_s \frac{R_f}{R_f + R_s} + v_o \frac{R_s}{R_f + R_s}$$

Le taux de contre réaction vaut

$$\frac{R_s}{R_f + R_s}.$$

Résistance d'entrée. Résistance vue de la source v_s :

$$R_{in} = \frac{v_s}{i_s} = R_s$$

Choix de R_s et R_f . Les résultats précédents sont valides seulement si l'AO se trouve dans sa plage de fonctionnement linéaire. Pour cela, il faut :

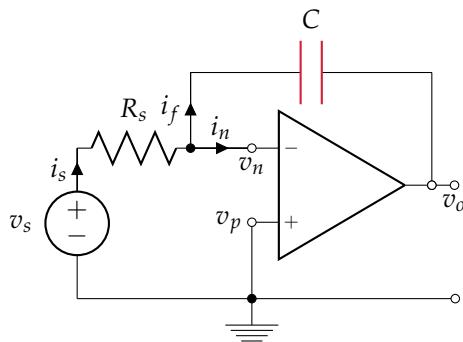
$$|v_o| < V_{sat}, \quad \left| \frac{R_f}{R_s} v_s \right| < V_{sat}, \quad \frac{R_f}{R_s} < \left| \frac{V_{sat}}{v_s} \right|$$

Exemple : Valeurs typiques pour un montage inverseur.

- $V_{sat} = 15 \text{ V}$
- $v_s = 10 \text{ mV}$
- $\rightarrow \frac{R_f}{R_s} < 1500$

7.2.2 Circuit intégrateur

Dans sa plage de fonctionnement linéaire, le circuit suivant dérivé du montage inverseur agit comme un intégrateur.

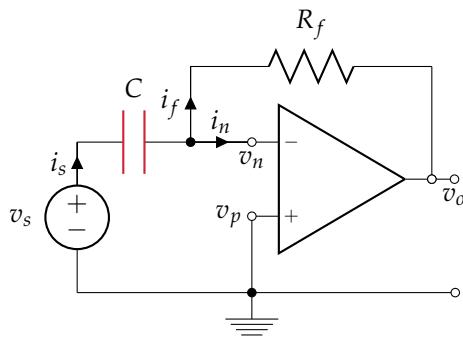


En ayant recours aux phaseurs et impédances, on voit tout de suite que

$$\frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_s} = - \frac{Z_f(j\omega)}{Z_s(j\omega)} = - \frac{1}{j\omega R_s C}$$

7.2.3 Circuit déivateur

Dans sa plage de fonctionnement linéaire, le circuit suivant dérivé du montage inverseur agit comme un déivateur.

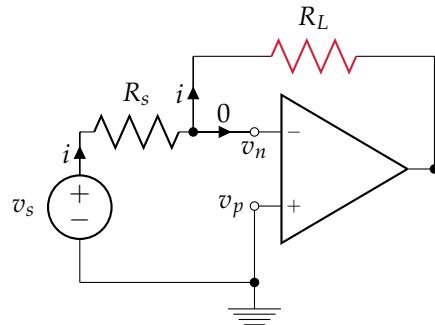


En ayant recours aux phaseurs et impédances, on voit tout de suite que

$$\frac{\bar{V}_0}{\bar{V}_s} = -\frac{Z_f(j\omega)}{Z_s(j\omega)} = -j\omega R_f C$$

7.2.4 Circuit source de courant

Dans le circuit suivant, si on place une résistance de charge R_L dans la branche de feedback,



le courant

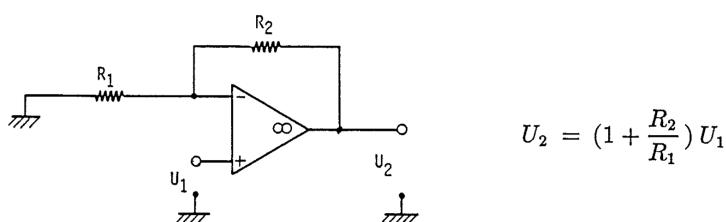
$$i = \frac{v_s}{R_s}$$

est indépendant de la charge. On peut donc utiliser ce montage comme source indépendante de courant.

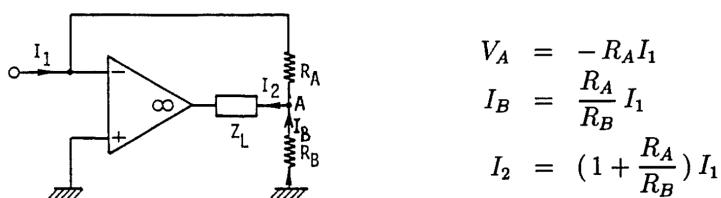
7.3 Sources commandées

Les sources commandées (cf. Figure 2.34) peuvent être réalisées au moyen d'AOs.

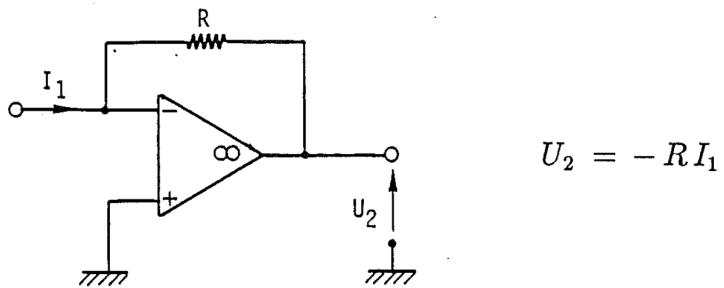
VVT.



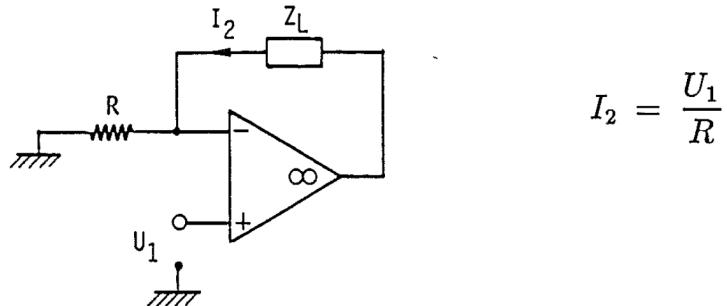
CCT.



CVT.

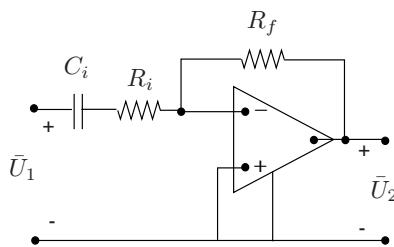


VCT.



7.4 Filtre actif

Le montage de la figure suivante



représente un filtre actif de fonction de transfert

$$H(j\omega) = -\frac{j\omega R_f C_i}{1 + j\omega R_i C_i}$$

Comme on le verra plus en détail dans les exercices et dans la Section 7.8, ce montage permet d'amplifier en sélectionnant une bande de fréquence. Sa pulsation de coupure à -3 dB vaut

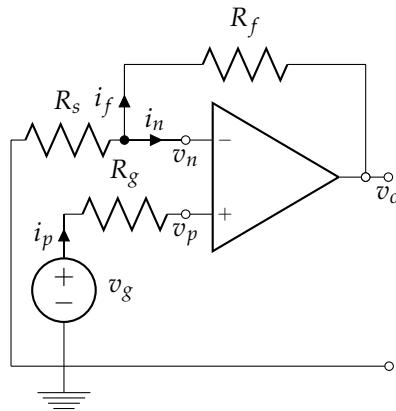
$$\omega_c = \frac{1}{R_i C_i}.$$

7.5 Le montage amplificateur non-inverseur

La tension v_g à amplifier est connectée à l'entrée non inverseuse de l'ampli.

7.5.1 Caractéristiques

Gain en tension. On fait comme d'habitude l'hypothèse de l'AO idéal et du fonctionnement dans la plage linéaire.



Comme

$$i_p = 0 \rightarrow v_p = v_g = v_n$$

et

$$i_n = 0 \rightarrow v_n = v_g = v_o \frac{R_s}{R_s + R_f}$$

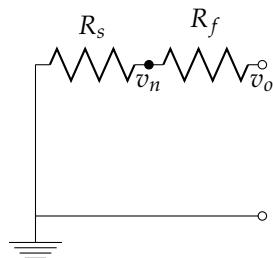
on a

$$\frac{v_o}{v_g} = \frac{R_f + R_s}{R_s}$$

Le gain en tension est

- toujours positif ;
- égal à 1 pour $R_f = 0$ ou $R_s = \infty$;
- indépendant des impédances de source et de charge. En fait, il ne dépend que des éléments du circuit de contre-réaction.

Taux de contre-réaction.



On voit de suite que

$$v_n = v_o \frac{R_s}{R_f + R_s}$$

Le taux de contre réaction est donc $\frac{R_s}{R_f + R_s}$

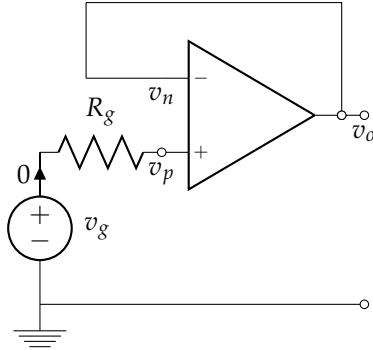
Résistance d'entrée. La résistance vue de la source v_g est infinie puisque $i_p = 0$. Donc $R_{in} = \infty$.

Choix de R_s et R_f . On conserve un fonctionnement dans la plage linéaire si :

$$\frac{R_s + R_f}{R_s} < \left| \frac{V_{sat}}{v_g} \right|$$

7.5.2 Isolateur ou suiveur (voltage follower)

Ceci est un cas particulier où le gain du montage est égal à 1. Dans le circuit ci-dessous



on a

$$v_o = v_g.$$

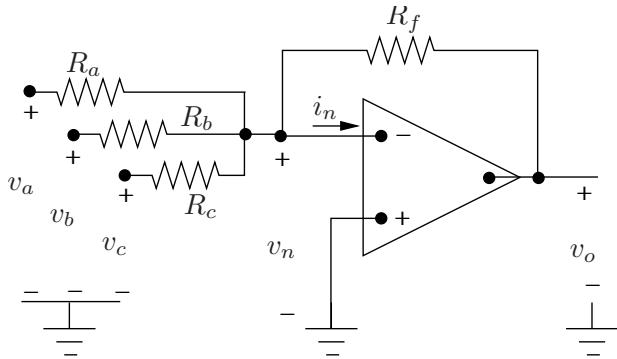
Vu de la charge, tout se passe comme si la source de tension était idéale ($v_o = v_g$ indépendamment de la résistance de charge).

Ce montage permet d'isoler deux parties de circuit, ceci grâce à l'impédance d'entrée infinie du montage.

7.6 Addition et soustraction

7.6.1 Additionneur

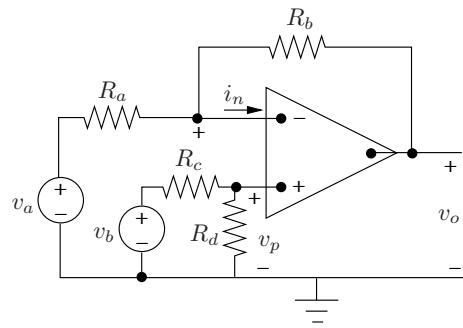
Par application du théorème de superposition (qui sera énoncé au Chapitre 5), en supposant toujours se trouver dans la plage de fonctionnement linéaire de l'AO, le circuit ci-dessous implique



$$v_o = - \left(\frac{R_f}{R_a} v_a + \frac{R_f}{R_b} v_b + \frac{R_f}{R_c} v_c \right).$$

7.6.2 Soustracteur

Par application du théorème de superposition (Chapitre 5), en supposant toujours se trouver dans la plage de fonctionnement linéaire de l'AO, le circuit ci-dessous implique



1. v_a agit seule : montage inverseur

$$v_o^a = -\frac{R_b}{R_a}v_a$$

2. v_b agit seule : montage non inverseur

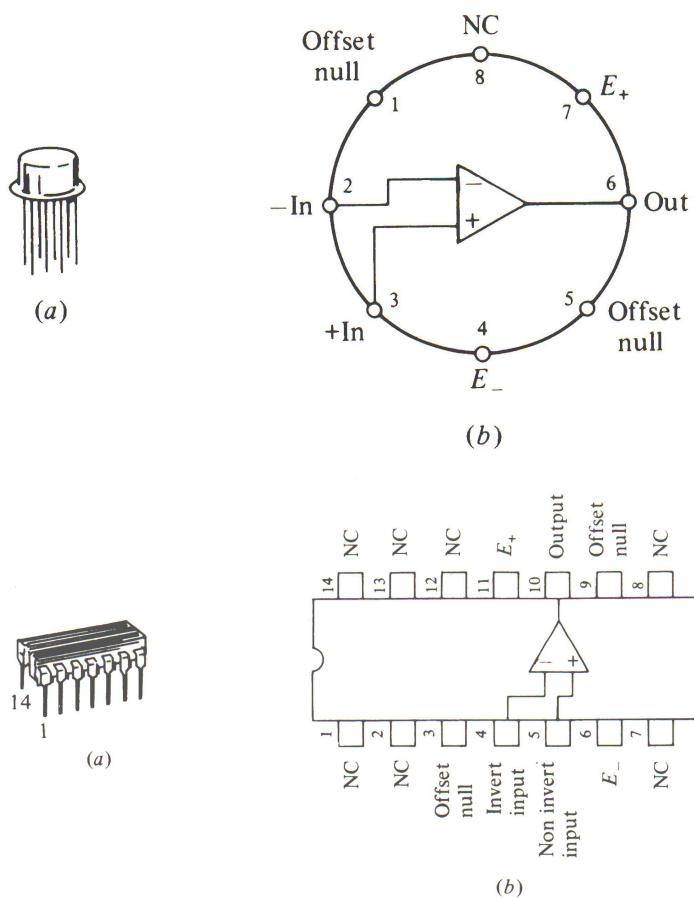
$$v_o^b = \left(\frac{R_a + R_b}{R_a}\right)\left(\frac{R_d}{R_c + R_d}\right)v_b$$

Et finalement

$$v_o = \left(\frac{R_a + R_b}{R_a}\right)\left(\frac{R_d}{R_c + R_d}\right)v_b - \frac{R_b}{R_a}v_a.$$

7.7 Un AO en pratique

Un AO peut se matérialiser sous différentes formes, comme représenté à la Figure 7.6.

FIGURE 7.6: Les AO_s en pratique.

7.8 Étages d'amplification de la radio AM

7.8.1 Étage 2

La coupe 3 de la Figure 7.8 représente le deuxième étage de la radio AM. Le premier amplificateur opérationnel est utilisé dans un montage non-inverseur (Figure 7.7). On obtient alors la fonction de transfert $H(\omega)$ qui exprime le gain en amplitude :

$$H(\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2}$$

Avec $Z_1 = \frac{R_3}{1+j\omega R_3 C_3}$ qui dépend de la fréquence du signal d'entrée, et $Z_2 = R_1$. Quand $\omega R_3 C_3 \gg 1$, on a $|Z_1| \sim 0$ et $H(\omega) \sim 1$. Par contre, si $\omega R_3 C_3 \ll 1$, on a $|Z_1| \sim R_3$ et $H(\omega) = 1 + \frac{R_3}{R_2} = 1 + \frac{1000}{4,7} = 213,76$. C'est la caractéristique d'un filtre passe-bas mais qui va, au lieu d'atténuer les fréquences non voulues comme le fait un filtre passif, amplifier les fréquences souhaitées. La fréquence de coupure est ici de $\frac{1}{2\pi R_3 C_3} = 1591\text{Hz}$ qui correspond bien à une borne supérieure d'une fréquence AM.

7.8.2 Étage 3.

La coupe 6 de la Figure 7.8 représente le troisième étage de la radio AM. Le deuxième AO est utilisé dans un montage inverseur un peu particulier. En effet, l'entrée non-inverseuse n'est pas connectée à la terre. En réalité, elle est connectée à la sortie d'un diviseur potentiométrique, illustré par la coupe 4 de la Figure 7.8. En appliquant la formule d'un diviseur potentiométrique, si $Z_1 = R_5$ et Z_2 la mise en parallèle de C_5 et R_6 , on obtient

$$\begin{aligned} V_{off} &= \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} E \\ &= \frac{R_6}{R_6 + R_5 + j\omega R_5 R_6 C_5} E \\ &= \frac{1}{1 + \frac{R_5}{R_6} + j\omega R_5 C_5} E \\ &= \frac{1}{2 + j\omega R_5 C_5} E \end{aligned}$$

La sortie dépend donc de la fréquence. En effet, si $\omega R_5 C_5 \gg 2$, $V_2 \sim 0$ et si $\omega R_5 C_5 \ll 2$, $V_s \sim \frac{E}{2}$. Ce dispositif est donc utilisé comme filtre passe-bas de fréquence de coupure égale à $f_0 = \frac{2}{2\pi R_5 C_5} = 0,14\text{ Hz}$. Il permet en réalité de filtrer toutes les composantes alternatives présentes dans le circuit et d'ainsi avoir une sortie quasi continue et égale à $\frac{E}{2}$. On supposera donc pour la suite que V_{off} est constant et égal à $\frac{E}{2} = 4,5\text{ V}$. Dans notre circuit, ce diviseur va donc fixer la référence des tensions mesurées à l'entrée du deuxième AO à $V_{off} = 4,5\text{V}$. Cela permet d'utiliser cet AO dans l'ensemble de sa plage linéaire. En effet, la diode avait supprimé toutes les composantes négatives du signal d'entrée, et donc à la sortie du premier AO, on ne retrouve que des tensions positives. En fixant la référence à $4,5\text{V}$, on permet de multiplier par 2 la plage utilisée par l'AO car les tensions inférieures à cette référence seront considérées comme négatives et celles supérieures seront positives mais diminuées de cet *offset* de $4,5\text{ V}$.

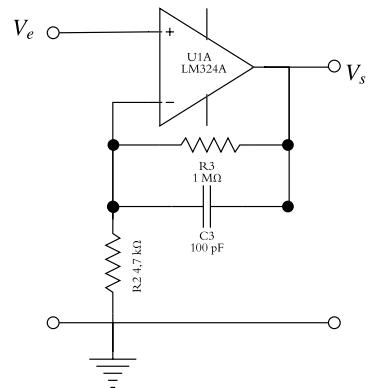


FIGURE 7.7: Schéma du premier AO du circuit, avec ses tensions d'entrée et de sortie.

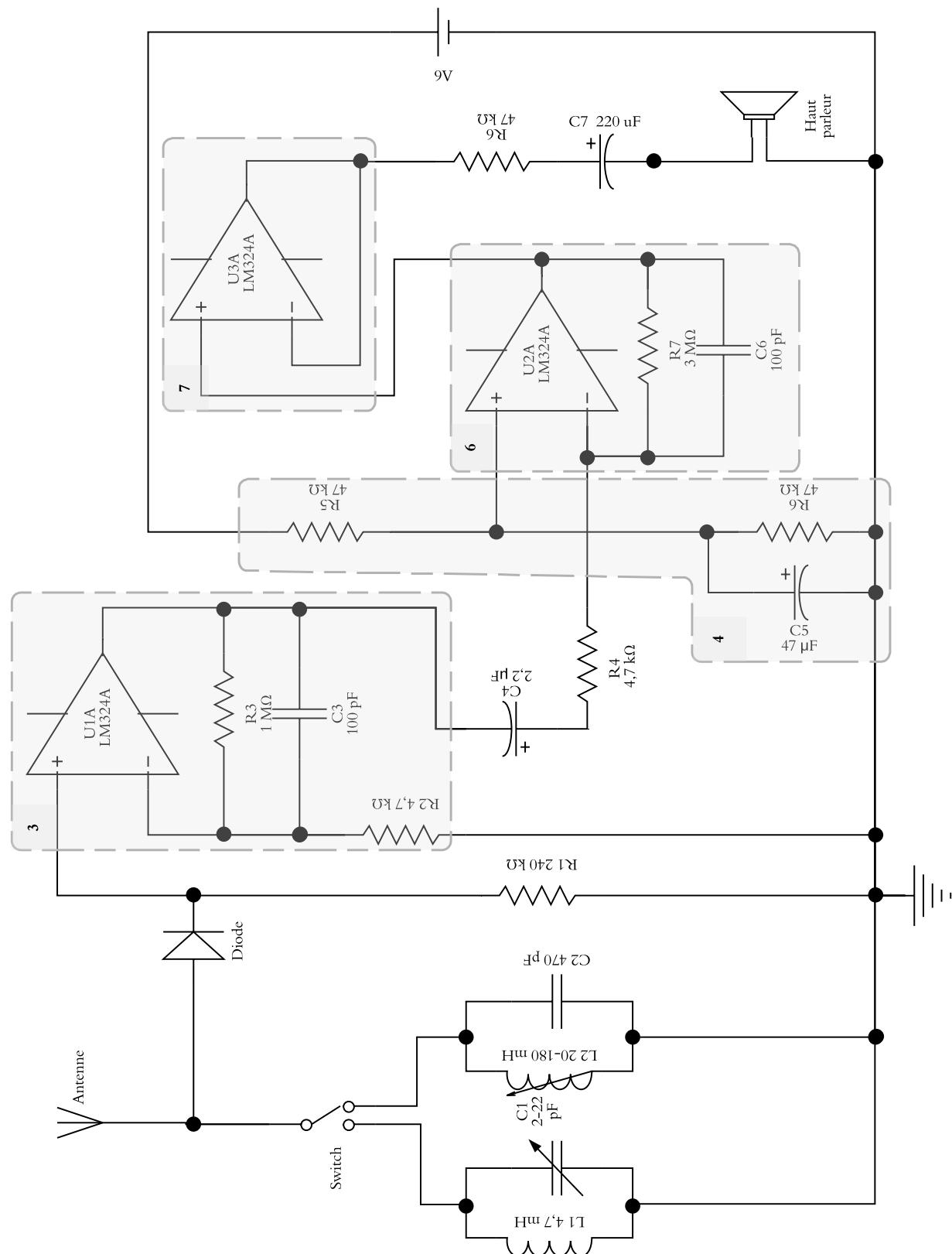
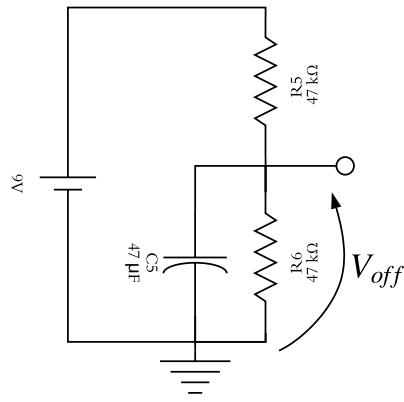


FIGURE 7.8: Deuxième étage d'amplification de la radio AM.

FIGURE 7.9: Diviseur potentiométrique et définition de V_{off} .

Le deuxième AO est donc simplement utilisé dans un montage inverseur dont on a modifié la référence. Il peut facilement être montré que, à la sortie du deuxième AO, si V_e est la tension d'entrée comme représenté à la Figure 7.10, la tension vaut

$$V_s = -\frac{Z''}{Z'}(V_e - V_{off}) + V_{off}$$

Z'' est, de manière similaire au premier AO, la mise en parallèle d'une résistance (R_7) et d'un condensateur (C_6). Ce qui nous donne

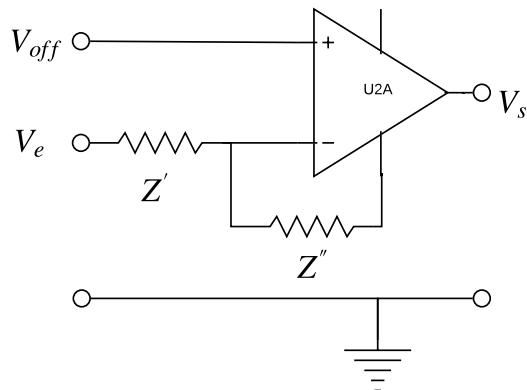


FIGURE 7.10: AO inverseur.

Cette impédance est caractéristique d'un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure égale à $\frac{1}{2\pi R_7 C_6} = 530,51\text{Hz}$. On peut donc voir cet AO comme un filtre passe-bas qui amplifie les signaux qui ont une fréquence inférieure à $\frac{1}{2\pi R_7 C_6} = 530,51\text{Hz}$ de $\frac{R_7}{R_4} = 638$. Ce deuxième AO va donc d'une part, encore faire office de filtre vis à vis des fréquences non souhaitées mais aussi d'amplificateur de signal pour qu'il soit plus facilement audible. Z' est par contre l'impédance équivalente du circuit en amont.

7.8.3 Étage 4

La coupe 7 de la Figure 7.8 représente le quatrième étage de la radio AM. Le troisième et dernier AO est utilisé en mode isolateur/suiveur. On a en effet

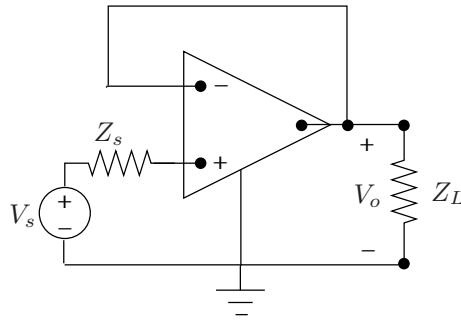
$V_s = V_e$, et $Z_{in} = \frac{V_{in}}{I_{in}} \rightarrow \infty$. On pourrait penser que ce montage est inutile puisque le gain en tension est unitaire, mais il est de grande importance. D'une part, grâce la définition d'un AO idéal, le courant d'entrée est nul. Le circuit ne prélève donc aucun courant ni puissance sur le signal auquel il est connecté et donc, ne le perturbe pas. Le courant et la puissance de sortie viennent uniquement de l'alimentation de l'amplificateur. D'autre part, ce circuit "isolateur" permet d'isoler deux parties d'un circuit, et donc ici de protéger le haut-parleur de toute la partie gauche du circuit et inversement.

7.9 Exercices non résolus

Exercice 7.1

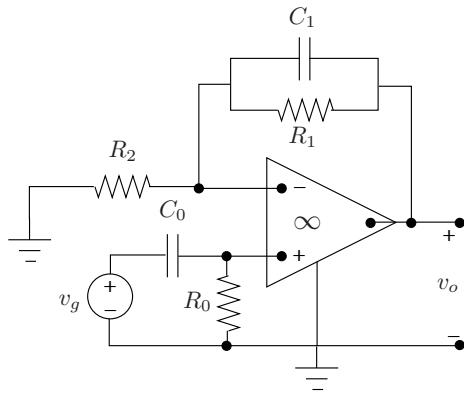
Déterminer l'expression du gain en boucle fermée, de l'impédance d'entrée et de l'impédance de sortie du montage isolateur représenté ci-dessous lorsque :

1. le gain en boucle ouverte de l'AO $A = 10^5$;
2. l'impédance d'entrée différentielle de l'AO $Z_i = R_i = 100 \text{ k}\Omega$;
3. l'impédance de sortie de l'AO $Z_o = R_o = 10 \Omega$;
4. l'impédance interne de la source $Z_s = R_s = 1 \text{ k}\Omega$;
5. l'impédance de charge $Z_L = R_L = 1 \text{ k}\Omega$.



Exercice 7.2

On considère le circuit suivant



avec

$$R_0 = 1 \text{ k}\Omega, R_1 = 100 \Omega, C_0 = 10 \mu\text{F}, C_1 = 1 \mu\text{F}, R_2 = 10 \text{ k}\Omega$$

Déterminer

1. la réponse fréquentielle gain en tension à circuit ouvert :

$$H(j\omega) = \frac{\bar{V}_0}{\bar{V}_g} \Big|_{I_2=0}$$

2. l'expression de $v_0(t)$ si $v_g(t) = 2 \cos 100t$

Réponse :

$$\begin{aligned} \frac{V_0}{V_g} &= \frac{Z_L(Z_o + AZ_i)}{(Z_i + Z_s)(Z_o + Z_L) + Z_L(AZ_i + Z_o)} \\ Z_{in} &= Z_i + Z_s + \frac{Z_o Z_L}{Z_o + Z_L} \left(1 + A \frac{Z_i}{Z_o}\right) \\ Z_{out} &= \frac{Z_o(Z_i + Z_s)}{Z_o + Z_s + (1+A)Z_i} \end{aligned}$$

Réponse :

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1}}{\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_0 C_0}} \cdot \frac{j\omega}{j\omega + \frac{1}{R_0 C_0}} \\ v_0(t) &= 1.43 \cos(100t + \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

8

Méthodes matricielles d'analyse et de représentation des circuits

La mise en équation de circuits sous forme matricielle et les méthodes de résolution correspondantes ont plusieurs utilités. Premièrement elles permettent de systématiser l'approche d'analyse d'un circuit. Deuxièmement, par des manipulations matricielles, elles permettent de représenter un circuit via un équivalent de Thévenin ou de Norton, mais à plus d'un accès. Ceci est particulièrement intéressant, par exemple, si on souhaite réduire un circuit à un quadripôle. Finalement, cela ouvre la porte à la résolution numérique de circuits. L'analyse présentée dans ce chapitre se limite à une représentation en courant continu. Les méthodes sont cependant directement extensibles au cas du régime sinusoïdal avec l'emploi des phaseurs, et même à l'analyse transitoire en utilisant la représentation dans le domaine de Laplace, mais ce dernier point est hors du cadre de ce cours.

8.1 La méthode des noeuds

Les variables considérées dans cette méthode sont les variables relatives aux noeuds du réseau : potentiel de chacun des noeuds par rapport à celui de référence, et courants de noeuds, ceux-ci étant précisés ultérieurement.

8.1.1 Vue générale de la méthode

Pour déterminer l'état électrique d'un système, la méthode des noeuds consiste à résoudre le système linéaire suivant :

$$\mathbf{G}_N \mathbf{v}_N = \mathbf{i}_{sN}.$$

où

- L'indice N signifie "Noeud".
- \mathbf{i}_{sN} est le vecteur des injections de courant aux noeuds. Déterminé par inspection, il caractérise l'impact des sources indépendantes de courant.
- \mathbf{v}_N est le vecteur des potentiels de noeuds. Il contient les $n - 1$ variables du système (tous les noeuds sauf un noeud de référence), et les courants de branches en découlent, via la loi d'Ohm.

1. Choisir un noeud de référence,
 2. déterminer la matrice \mathbf{G}_N ,
 3. déterminer le vecteur \mathbf{i}_{sN} ,
 4. résoudre le système
- $$\mathbf{G}_N \mathbf{v}_N = \mathbf{i}_{sN}$$
- pour obtenir les potentiels de noeuds,
5. déduire de \mathbf{v}_N les courants dans les branches.

— \mathbf{G}_N est la matrice de conductances aux noeuds. Déterminée par inspection ou par expérimentation, elle caractérise le graphe du circuit passifié.

Algorithmiquement, la méthode se résume aux cinq étapes principales décrites dans la Table 8.1. Cette méthode est applicable si le circuit est linéaire et s'il ne comporte que des sources indépendantes de courant¹.

8.1.2 Dérivation de la méthode des noeuds

Les trois relations suivantes, reposant sur la matrice d'incidence et la matrice de conductance, traduisent respectivement la PLK (8.1), le lien entre tension de branche et potentiel de noeud (8.2), et la loi d'Ohm (8.3) :

$$\mathbf{A}\mathbf{i}_B = \mathbf{i}_{sN} \quad (8.1)$$

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{A}^T \mathbf{v}_N \quad (8.2)$$

$$\mathbf{i}_B = \mathbf{G}_B \mathbf{u}_B \quad (8.3)$$

On établit ensuite le système résolu par la méthode des noeuds sur base de ces trois relations par simples manipulations et en définissant la *matrice de conductance aux noeuds* \mathbf{G}_N .

$$(8.3) \rightarrow (8.1) \quad \mathbf{A}\mathbf{G}_B \mathbf{u}_B = \mathbf{i}_{sN} \quad (8.4)$$

$$(8.2) \rightarrow (8.4) \quad \mathbf{A}\mathbf{G}_B \mathbf{A}^T \mathbf{v}_N = \mathbf{i}_{sN} \quad (8.5)$$

$$\mathbf{G}_N \triangleq \mathbf{A}\mathbf{G}_B \mathbf{A}^T \quad (8.6)$$

$$(8.6) \rightarrow (8.5) \quad \mathbf{G}_N \mathbf{v}_N = \mathbf{i}_{sN} \quad (8.7)$$

8.1.3 Matrice d'incidence

Les relations de base sont les expressions faisant intervenir la matrice d'incidence réduite, définie-ci dessous.

Nous considérons un graphe orienté à n noeuds et b branches et définissons des matrices décrivant les relations d'appartenance noeuds-branches². Un intérêt tout particulier est réservé à la recherche de matrices qui contiennent le nombre nécessaire et suffisant de relations, c'est-à-dire à la détermination du rang de chacune de ces matrices.

TABLE 8.1: Vue algorithmique de la méthode des noeuds.

1. Nous verrons plus tard comment gérer les sources indépendantes de tension et les source commandées de courant (VCT).

2. Dans la méthodes des mailles (Section 8.2), nous nous intéresserons à la relation branches-mailles.

Matrice d'incidence complète \mathbf{A}_a . C'est une matrice d'ordre $n \times b$ où chaque élément a_{ij} est défini comme suit :

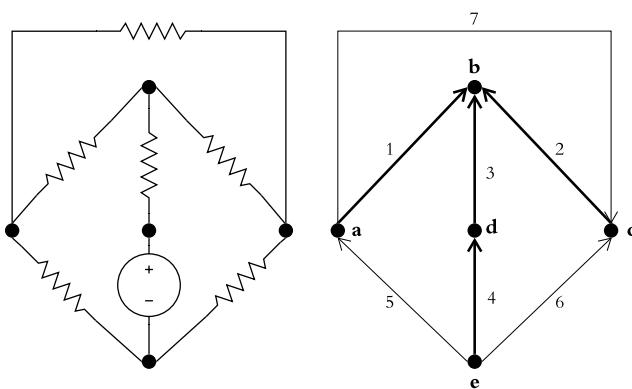
1. $a_{ij} = -1$ si la branche j est incidente au noeud i et est orientée vers lui ;

2. $a_{ij} = +1$ si la branche j est incidente au noeud i et est orientée en sens opposé;
3. $a_{ij} = 0$ si la branche j n'est pas incidente au noeud i

Par construction, chaque ligne de \mathbf{A}_a correspond ainsi à un noeud, ses éléments non nuls identifiant les branches incidentes à celui-ci. De même, chaque colonne correspond à une branche. Elle comporte donc nécessairement deux éléments non nuls, un $+1$ et un -1 , dont la somme est évidemment nulle. Cette dernière observation conduit à la conclusion que \mathbf{A}_a comporte un nombre surabondant de relations et que le rang de \mathbf{A}_a est inférieur à n .

Exemple : Matrice d'incidence

Soit le réseau ci-dessous et sa représentation sous forme de graphe orienté (à droite).



Il comporte $n = 5$ noeuds. La PLK en chacun des noeuds s'écrit

$$\begin{array}{lllllll} a & : & i_1 & & -i_5 & +i_7 & = 0 \\ b & : & -i_1 & -i_2 & -i_3 & & = 0 \\ c & : & & i_2 & & -i_6 & -i_7 = 0 \\ d & : & & i_3 & -i_4 & & = 0 \\ e & : & & i_4 & +i_5 & +i_6 & = 0 \end{array}$$

Ce qui conduit à la matrice d'incidence

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On voit directement que la dernière ligne est l'opposé de la somme des quatres premières.

Matrice d'incidence (réduite) \mathbf{A} . En choisissant un noeud de référence puis en éliminant la relation liée à ce noeud, on obtient la matrice \mathbf{A} issue de \mathbf{A}_a et d'ordre $(n-1) \times b$. On peut montrer que cette matrice est de rang $n-1$, en tous les cas si le graphe est connexe.

Exemple : Matrice d'incidence réduite

Dans l'exemple précédent, choisissons le noeud e comme noeud de référence. Cela implique que l'on supprime la relation liée à ce noeud, et que e sera considéré comme référentiel de tension, c'est-à-dire que $v_e = 0$. Le rang de cette matrice est $n - 1$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le rang de la matrice est 4.

On peut maintenant écrire

$$\mathbf{A} \mathbf{i}_B = \mathbf{0},$$

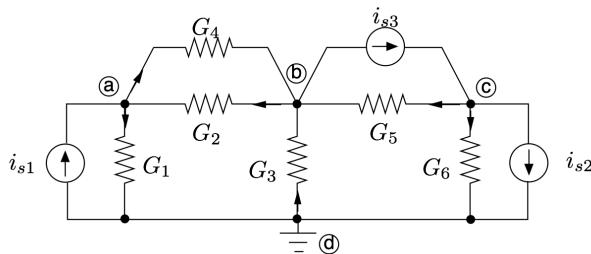
avec $n - 1$ relations linéairement indépendantes, où \mathbf{i}_B est le vecteur des courants de branches orientés selon le sens que l'on a choisi pour construire \mathbf{A} .

8.1.4 Vecteur d'injections de courant.

Nous avons jusqu'à présent considéré le graphe passifié. Considérons maintenant l'impact des sources indépendantes de courant à travers le vecteur \mathbf{i}_{sN} de taille $n - 1$ qui caractérise les courants injectés aux différents noeuds (sauf le noeud de référence) par les sources indépendantes. Une injection est prise avec le signe "+" si le courant est orienté vers le noeud, "-" sinon.

Exemple : Vecteur \mathbf{i}_{sN}

Soit le circuit suivant, où le noeud d est pris comme référence.



On a

$$\mathbf{i}_{sN} = \begin{bmatrix} i_{s1} \\ -i_{s3} \\ i_{s3} - i_{s2} \end{bmatrix}$$

Avec ces conventions, on a

$$\mathbf{A} \mathbf{i}_B = \mathbf{i}_{sN}.$$

8.1.5 Tensions de branches

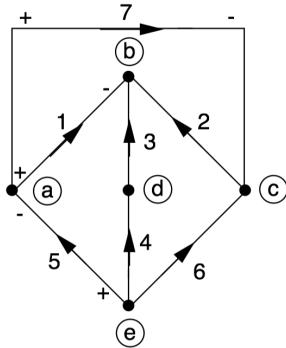
Par définition, la matrice d'incidence caractérise également la relation entre potentiels de noeuds et tension de branche (d.d.p. entre les extrémités d'une branche) :

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{A}^T \mathbf{v}_N.$$

La convention moteur est utilisée, selon le sens qui a été choisi pour orienter (le courant dans) les branches.

Exemple :

Soit le graphe suivant :



Le noeud e étant pris comme référence, on a

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \\ v_d \end{bmatrix}.$$

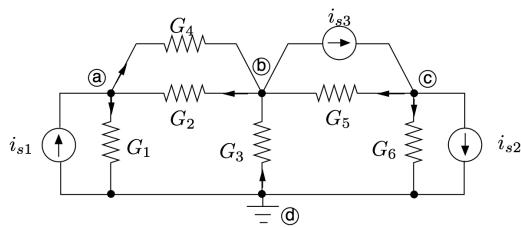
8.1.6 Matrices de conductance

Matrices de conductance de branches. Appliquer la loi d'Ohm dans chaque branche permet de remplacer les courants de branches \mathbf{i}_B par les tensions de branche \mathbf{u}_B . Si le circuit comporte uniquement des résistances linéaires, on définit la matrice de conductances de branches \mathbf{G}_B de dimension $b \times b$ comme la matrice diagonale suivante

$$\mathbf{G}_B = \begin{bmatrix} G_1 & & & \\ & G_2 & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{0} & \ddots & \\ & & & G_b \end{bmatrix}$$

Exemple :

Pour le circuit suivant qui nous a permis d'illustrer \mathbf{i}_{SN} ,



on a

$$i_1 = G_1 u_1, \quad i_2 = G_2 u_2, \quad \dots, \quad i_6 = G_6 u_6 \iff \mathbf{i}_B = \mathbf{G}_B \mathbf{u}_B$$

et donc

$$\begin{aligned} G_1 u_1 - G_2 u_2 + G_4 u_4 &= i_{s1} \\ G_2 u_2 - G_3 u_3 - G_4 u_4 - G_5 u_5 &= -i_{s3} \iff \mathbf{A} \mathbf{G}_B \mathbf{u}_B = \mathbf{i}_{sN} \\ G_5 u_5 + G_6 u_6 &= i_{s3} - i_{s2} \end{aligned}$$

Matrice de conductance aux noeuds. Comme illustré aux étapes (8.5) et (8.6) de la dérivation de la méthode des noeuds, on peut remplacer les tensions de branches \mathbf{u}_B par les potentiels de noeuds \mathbf{v}_N :

Exemple : Matrice de conductance aux noeuds

Pour le même exemple que celui qui a servi à illustrer \mathbf{G}_B , on a

$$u_1 = v_a, \quad u_2 = v_b - v_a, \quad \dots, \quad u_6 = v_c$$

ou encore

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{A}^T \mathbf{v}_N,$$

et donc

$$\begin{aligned} (G_1 + G_2 + G_4)v_a - (G_2 + G_4)v_b &= i_{s1} \\ -(G_2 + G_4)v_a + (G_2 + G_3 + G_4 + G_5)v_b - G_5 v_c &= -i_{s3} \\ -G_5 v_b + (G_5 + G_6)v_c &= i_{s3} - i_{s2} \end{aligned}$$

ce qui se traduit sous forme matricielle par

$$\underbrace{\mathbf{A} \mathbf{G}_B \mathbf{A}^T}_{\mathbf{G}_N} \mathbf{v}_N = \mathbf{i}_{sN}$$

Ceci illustre une première manière de construire la matrice de conductance aux noeuds :

1. construire \mathbf{A} ,
2. construire \mathbf{G}_B ,
3. calculer $\mathbf{G}_N = \mathbf{A} \mathbf{G}_B \mathbf{A}^T$

Il existe des méthodes parfois plus directes pour construire \mathbf{G}_N .

8.1.7 Détermination de \mathbf{G}_N par inspection

Appliquer

$$\mathbf{G}_N = \mathbf{A} \mathbf{G}_B \mathbf{A}^T$$

revient, lorsque \mathbf{G}_B est diagonale³, à appliquer la règle d'inspection de la Table 8.2 :

- G_{ii} est la somme des conductances des branches incidentes au noeud i
- G_{ik} est l'opposé de la somme des conductances des branches liant les noeuds i et k

3. Ce qui n'est pas le cas avec des sources commandées

TABLE 8.2: Règle d'inspection pour déterminer les éléments de \mathbf{G}_N .

Exemple : Détermination de \mathbf{G}_N par inspection

Pour l'exemple précédent, on a directement

$$\mathbf{G}_N = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_4 & -(G_2 + G_4) & 0 \\ -(G_2 + G_4) & G_2 + G_3 + G_4 + G_5 & -G_5 \\ 0 & -G_5 & G_5 + G_6 \end{bmatrix}.$$

8.1.8 Réseau équivalent

Lorsque le circuit est mis en équation grâce à la méthode des noeuds, il peut être remplacé par un circuit équivalent constitué du circuit passifié vu de $n - 1$ accès auxquels agissent des sources indépendantes de courant équivalentes regroupant les sources indépendantes du circuit original (Figure 8.1).

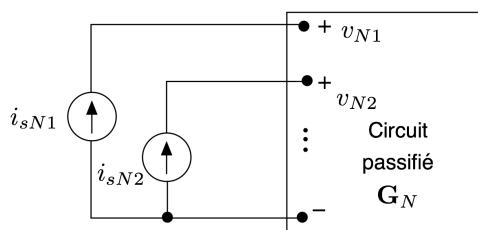
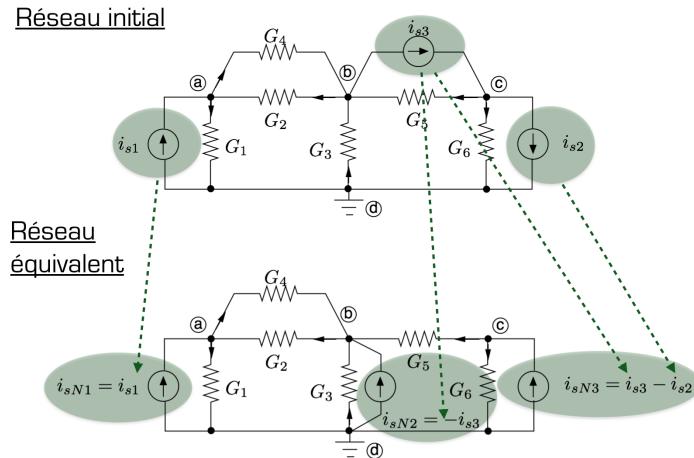


FIGURE 8.1: Réseau équivalent.

Il s'agit d'un réseau passifié avec un accès entre chaque noeud et le noeud de référence, et une source indépendante de courant agissant à chaque accès, correspondant aux composantes de \mathbf{i}_{sN} .

Exemple : Réseau équivalent.**8.1.9 Détermination de \mathbf{G}_N par expérimentation**

La dernière méthode pour déterminer \mathbf{G}_N consiste à exploiter la représentation du circuit par un réseau équivalent. En effet, \mathbf{G}_N caractérise le circuit passifié. Les relations $i - u$ aux $n - 1$ accès s'écrivent :

$$\begin{aligned} i_1 &= G_{11}v_1 + G_{12}v_2 + \dots \\ i_2 &= G_{21}v_1 + G_{22}v_2 + \dots \end{aligned}$$

où \mathbf{i} est le vecteur des courants injectés aux accès, \mathbf{v} est le vecteur des tensions aux accès.

Les éléments de \mathbf{G}_N sont alors déterminés par des essais successifs, cf. Figure 8.2 et Table 8.3. Cette méthode se révèle incontournable quand le circuit comporte des couplages entre branches ou quand, tout simplement, on n'a pas accès aux paramètres du circuit et on l'identifie par des mesures "physiques".

$$G_{ij} = i_i|_{v_j=1, v_k=0, k \neq j}$$

- Imposer une tension de 1V à l'accès j
- Court-circuiter les autres accès
- Déterminer dans ces conditions le courant à l'accès i

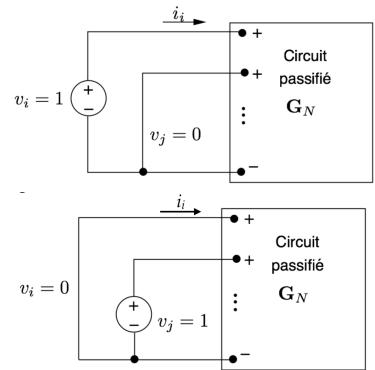
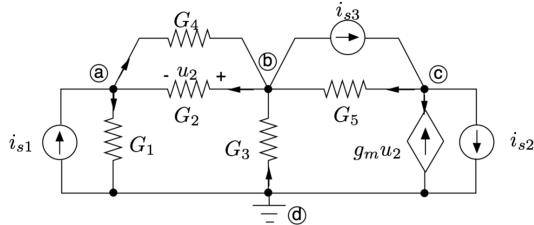


FIGURE 8.2: Illustration de la méthode d'expérience pour déterminer les éléments diagonaux de \mathbf{G}_N .

Exemple :

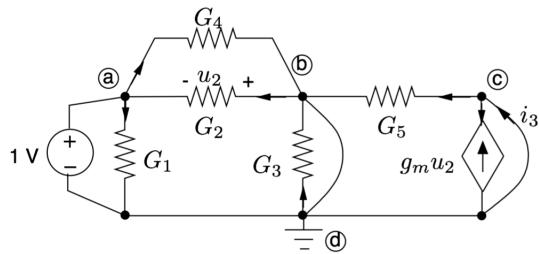
Soit le circuit de la figure suivante, comportant une source VCT :



Calculons quelques éléments de \mathbf{G}_N . Commençons par

$$G_{31} = i_3|_{v_1=1, v_2=v_3=0}$$

ce qui se traduit par l'expérience suivante :



On a successivement

$$u_5 = 0$$

$$i_5 = 0$$

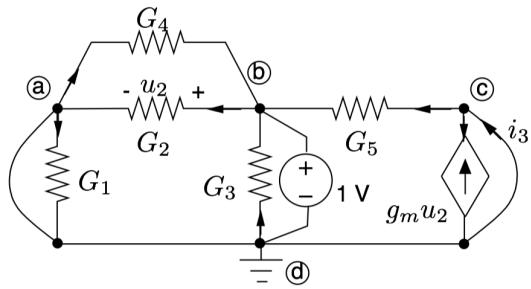
$$u_2 = -1$$

$$i_6 = -g_m u_2 = g_m$$

$$G_{31} = i_3 = i_3 + i_6 = g_m$$

De même pour

$$G_{32} = i_3|_{v_2=1, v_1=v_3=0}$$



on a

$$u_5 = -1$$

$$i_5 = -G_5$$

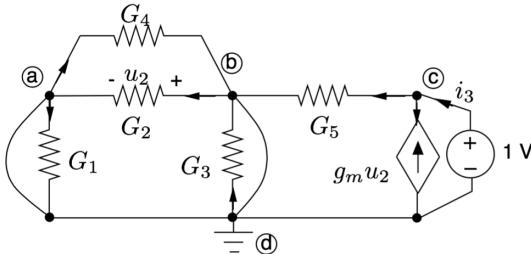
$$u_2 = 1$$

$$i_6 = -g_m u_2 = -g_m$$

$$G_{32} = i_3 = i_5 + i_6 = -(G_5 + g_m)$$

Finalement, pour

$$G_{33} = i_3|_{v_3=1, v_1=v_2=0}$$



on a

$$u_5 = 1$$

$$i_5 = G_5$$

$$u_2 = 0$$

$$i_6 = 0$$

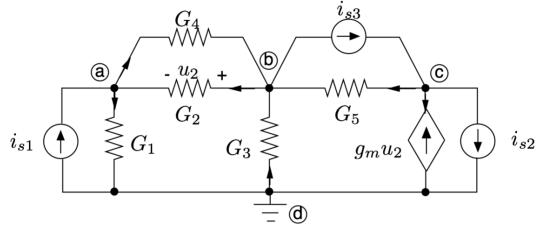
$$G_{33} = i_3 = i_5 + i_6 = G_5.$$

8.1.10 Gestion des sources dépendantes de type VCT.

L'exemple de la section précédente nous a montré comment gérer une source de type VCT. On peut également les traiter avec la méthode de base, lors de la construction de la matrice \mathbf{G}_B , la matrice \mathbf{A} étant indépendante de la nature des éléments qui constituent les branches.

Exemple :

Soit le circuit de la figure suivante, comportant une source VCT :



$$\mathbf{G}_B = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 & 0 \\ 0 & -g_m & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dès lors,

$$\mathbf{G}_N = \mathbf{A} \mathbf{G}_B \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_4 & -(G_2 + G_4) & 0 \\ -(G_2 + G_4) & G_2 + G_3 + G_4 + G_5 & -G_5 \\ g_m & -(G_5 + g_m) & G_5 \end{bmatrix}$$

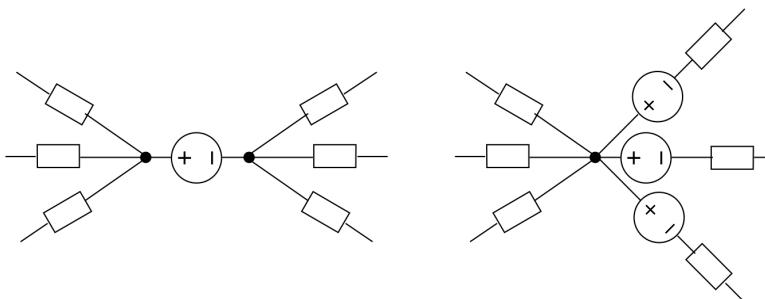
\mathbf{G}_B et \mathbf{G}_N ne sont plus des matrices symétriques.

Par contre, \mathbf{G}_N ne peut plus être déterminée par inspection, ou en tous les cas pas totalement⁴.

8.1.11 Gestion des sources indépendantes de tension

Pour gérer les sources indépendantes de tension, on peut transformer le circuit comme suit :

- si une source est en série avec une résistance, transformer la source de tension en une source de courant équivalente
- si une source est seule dans une branche, transformer le circuit comme indiqué à la Figure 8.3.



4. Dans l'exemple précédent, on peut se rendre compte que la source VCT agit sur le courant injecté au noeud *c* en fonction du potentiel des noeuds *a* et *b*, d'où le fait que seuls les éléments de la ligne 3 (*c*) et des colonnes 1 (*a*) et 2 (*b*) soient impactés.

On vérifie que dans le reste du circuit, les lois de Kirchhoff sont inchangées. La branche dans laquelle se trouve la f.e.m. ne doit pas être couplée avec le reste du circuit (par une source commandée par exemple).

8.1.12 Généralisation du Théorème de Norton à plusieurs accès

Considérons le schéma équivalent du circuit déduit de la méthode des noeuds (Figure 8.4), avec $N = n - 1$ accès ; un accès entre chaque noeud et

FIGURE 8.3: Gestion des sources indépendantes de tension dans la méthode des noeuds.

le noeud de référence, aux bornes de chaque source équivalente de courant.

Les relations $i - u$ pour les N accès sont

$$\mathbf{i} = -\mathbf{i}_{sN} + \mathbf{G}_N \mathbf{v}_N$$

ou encore

$$\mathbf{i} = -\mathbf{i}_{sN} + \mathbf{G}_N \mathbf{u}$$

On en déduit le schéma équivalent de Norton à N accès par simple identification :

$$\mathbf{i}_{No} = \mathbf{i}_{sN}, \quad \mathbf{G}_{No} = \mathbf{G}_N$$

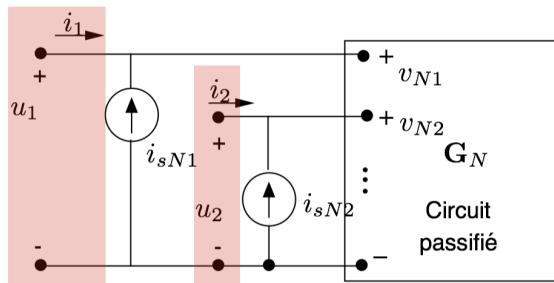


FIGURE 8.4: Généralisation du Théorème de Norton à plusieurs accès.

8.1.13 Réduction du nombre d'accès

On cherche à obtenir un schéma équivalent de Norton à a accès (intéressants), avec $a < N$. Les $N - a$ accès inintéressants sont laissés ouverts (ce qui ne dénature pas la topologie du circuit) :

$$i_{a+1}, \dots, i_N = 0$$

Utilisons les indices **a** et **b** pour partitionner les vecteurs en parties inté-

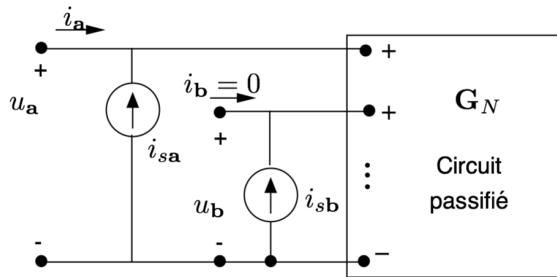


FIGURE 8.5: Illustration de la réduction du nombre d'accès.

ressantes et non-intéressantes. Les relations $i - u$ de la méthode des noeuds deviennent :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_a \\ \mathbf{i}_b \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{sa} \\ \mathbf{i}_{sb} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{a,a} & \mathbf{G}_{a,b} \\ \mathbf{G}_{b,a} & \mathbf{G}_{b,b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix}$$

Par hypothèse,

$$\mathbf{i}_b = 0 = -\mathbf{i}_{sb} + \mathbf{G}_{b,a} \mathbf{u}_a + \mathbf{G}_{b,b} \mathbf{u}_b$$

Donc

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{G}_{b,b}^{-1} (\mathbf{i}_{sb} - \mathbf{G}_{b,a} \mathbf{u}_a)$$

et

$$\mathbf{i}_a = (-\mathbf{i}_{sa} + \mathbf{G}_{a,b} \mathbf{G}_{b,b}^{-1} \mathbf{i}_{sb}) + (\mathbf{G}_{a,a} - \mathbf{G}_{a,b} \mathbf{G}_{b,b}^{-1} \mathbf{G}_{b,a}) \mathbf{u}_a$$

Finalement, comme on souhaite établir un modèle du type

$$\mathbf{i}_a = -\mathbf{i}_{No} + \mathbf{G}_{No} \mathbf{u}_a$$

on a

- le vecteur des sources équivalentes de Norton :

$$\mathbf{i}_{No} = \mathbf{i}_{sa} - \mathbf{G}_{a,b} \mathbf{G}_{b,b}^{-1} \mathbf{i}_{sb}$$

c'est le vecteur des courants parcourant les accès court-circuités ($\mathbf{u}_a = \mathbf{0}$)

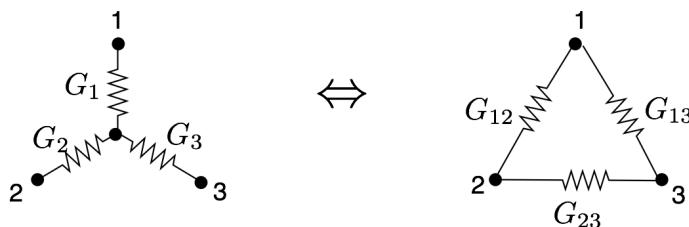
- la matrice de conductances de Norton, soit la matrice de conductances “réduite” aux accès :

$$\mathbf{G}_{No} = \mathbf{G}_{a,a} - \mathbf{G}_{a,b} \mathbf{G}_{b,b}^{-1} \mathbf{G}_{b,a}$$

qui peut être déterminée par expérimentation, mais jamais par inspection.

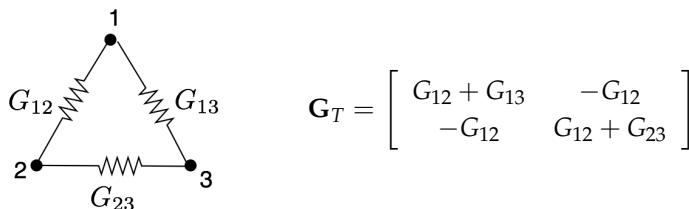
Exemple : Conversion étoile-triangle.

Un circuit en étoile à trois branches peut être remplacé par un circuit équivalent en triangle et inversement :

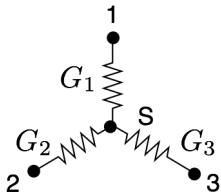


La condition d'équivalence est que les deux circuits aient la même matrice de conductances vue de deux accès (par exemple, 1 – 3 et 2 – 3)

La matrice de conductances aux accès du triangle \mathbf{G}_T est la matrice de conductances au noeuds du circuit avec 3 comme noeud de référence :



Construisons maintenant la matrice de conductances aux noeuds du triangle \mathbf{G}_{NE} avec 3 comme noeud de référence.



$$\mathbf{G}_{NE} = \frac{1}{S} \left[\begin{array}{cc|c} G_1 & 0 & -G_1 \\ 0 & G_2 & -G_2 \\ \hline -G_1 & -G_2 & G_1 + G_2 + G_3 \end{array} \right]$$

Eliminons l'accès $S - 3$ en réduisant \mathbf{G}_{NE} aux 2 accès "intéressants" :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_E &= \left[\begin{array}{cc} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} -G_1 \\ -G_2 \end{array} \right] \frac{1}{G_1 + G_2 + G_3} \left[\begin{array}{cc} -G_1 & -G_2 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} \frac{G_1 G_2 + G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} & -\frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \\ -\frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} & \frac{G_1 G_2 + G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Par identification, on a pour la transformation étoile \rightarrow triangle :

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{13} = \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

ou en utilisant les résistances des branches :

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_3}$$

$$R_{13} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_2}$$

$$R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1}$$

On peut de la même manière établir les conditions pour la transformation inverse.

8.2 La méthode des mailles

La méthode des mailles exploite la SLK et les variables principales sont les courants de maille. L'exposé de cette méthode suit la même structure que celle de la méthode des noeuds.

8.2.1 Vue générale de la méthode

Pour déterminer l'état électrique d'un système, la méthode des mailles consiste à résoudre le système linéaire suivant :

$$\mathbf{R}_M \mathbf{i}_M = \mathbf{v}_{sM}.$$

où

- L'indice M signifie "Maille".
- \mathbf{v}_{sM} est le vecteur des sources indépendantes de tension agissant dans les mailles. Déterminé par inspection, il caractérise l'impact des sources indépendantes de tension.

1. Choisir un arbre orienté dans le graphe du circuit de référence,
 2. déterminer la matrice \mathbf{R}_M ,
 3. déterminer le vecteur \mathbf{v}_{sM} ,
 4. résoudre le système
- $$\mathbf{R}_M \mathbf{i}_M = \mathbf{v}_{sM}$$
- pour obtenir les courants de branches,
5. déduire de \mathbf{i}_M l'état du circuit.

- \mathbf{i}_M est le vecteur des courants de maille. Il contient les $b - n - 1$ variables du système, et les tensions de branches en découlent, via la loi d'Ohm.
- \mathbf{R}_M est la matrice de résistances de mailles. Déterminée par inspection ou par expérimentation, elle caractérise le graphe du circuit passifié.

Algorithmiquement, la méthode se résume aux cinq étapes principales décrites dans la Table 8.4. Cette méthode est applicable si le circuit est linéaire et s'il ne comporte que des sources indépendantes de tension⁵.

8.2.2 Dérivation de la méthode des noeuds

Les trois relations suivantes, reposant sur la matrice des mailles et la matrice de résistance de branches, traduisent respectivement la SLK (8.8), le lien entre courants de branche et courants de maille (8.9), et la loi d'Ohm (8.3) :

$$\mathbf{B}\mathbf{u}_B = \mathbf{v}_{sM} \quad (8.8)$$

$$\mathbf{i}_B = \mathbf{B}^T \mathbf{i}_M \quad (8.9)$$

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{R}_B \mathbf{i}_B \quad (8.10)$$

On établit ensuite le système résolu par la méthode des mailles sur base de ces trois relations par simples manipulations et en définissant la *matrice de résistances de mailles* \mathbf{R}_M .

$$(8.10) \rightarrow (8.8) \quad \mathbf{B}\mathbf{R}_B \mathbf{i}_B = \mathbf{v}_{sM} \quad (8.11)$$

$$(8.9) \rightarrow (8.11) \quad \mathbf{B}\mathbf{R}_B \mathbf{B}^T \mathbf{i}_M = \mathbf{v}_{sM} \quad (8.12)$$

$$\mathbf{R}_M \triangleq \mathbf{B}\mathbf{R}_B \mathbf{B}^T \quad (8.13)$$

$$(8.13) \rightarrow (8.12) \quad \mathbf{R}_M \mathbf{i}_M = \mathbf{v}_{sM} \quad (8.14)$$

8.2.3 Matrice des mailles

C'est une formulation duale à celle de la matrice d'incidence réduite. Nous considérons un graphe orienté à n noeuds, m mailles et b branches et définissons des matrices décrivant les relations d'appartenance mailles-branches.

Matrice des mailles \mathbf{B}_a . C'est une matrice d'ordre $m \times b$ où chaque élément b_{ij} est défini comme suit :

1. $b_{ij} = -1$ si la branche j appartient à la maille i et est orientée dans le même sens ;

TABLE 8.4: Vue algorithmique de la méthode des mailles.

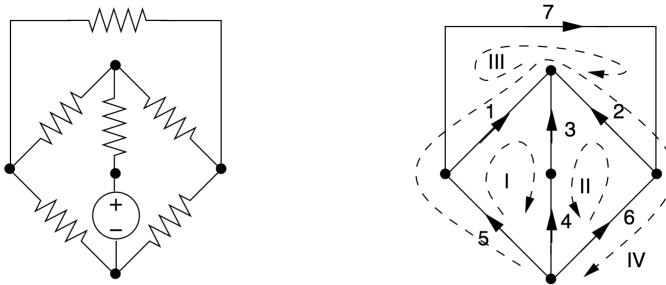
5. Nous verrons plus tard comment gérer les sources indépendantes de courant et les source commandées de courant (CVT).

2. $b_{ij} = +1$ si la branche j appartient à la maille i et est orientée en sens opposé;
3. $b_{ij} = 0$ si la branche j n'appartient pas à la maille i

Contrairement à la matrice d'incidence complète dont le nombre de lignes est égal à n (nombre de noeuds du graphe), il n'existe pas d'expression analytique simple du nombre total de lignes de \mathbf{B}_a (c'est-à-dire du nombre total de mailles) en fonction de n et b .

Exemple : Matrice des mailles.

Soit le réseau ci-dessous et sa représentation sous forme de graphe orienté (à droite).



Il comporte $n = 5$ noeuds, $b = 7$ branches, et au moins les 4 mailles représentées. La SLK dans chacune de ces 4 mailles s'écrit

$$\begin{array}{lllllll} I & : & -u_1 & +u_3 & +u_4 & -u_5 & = 0 \\ II & : & & -u_2 & +u_3 & +u_4 & -u_6 = 0 \\ III & : & +u_1 & -u_2 & & & -u_7 = 0 \\ IV & : & -u_1 & +u_2 & & -u_5 & +u_6 = 0 \end{array}$$

On voit directement que la dernière ligne est la différence des deux premières.

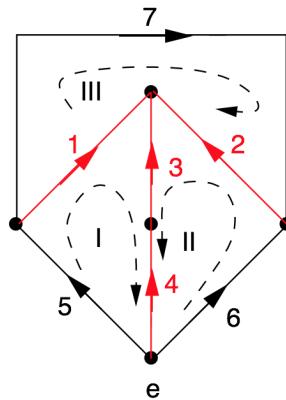
Matrice des mailles fondamentales \mathbf{B} . Des mailles sont dites indépendantes lorsque les lignes de la matrice \mathbf{B}_a qui leur sont associées sont elles-mêmes linéairement indépendantes. Il est évident que le nombre total de mailles comprises dans \mathbf{B}_a est supérieur au nombre de mailles indépendantes. Sur base des mailles fondamentales associées à un arbre ainsi que leur matrice correspondante, \mathbf{B} , en remarquant que ces mailles constituent un sous-ensemble des mailles incluses dans \mathbf{B}_a , on peut démontrer que ces mailles fondamentales sont les mailles indépendantes cherchées ; les relations qu'elles fournissent permettent dès lors de reconstituer les relations branches-mailles de toutes les mailles du graphe.

Pour définir les mailles fondamentales associées à un arbre, on procède comme indiqué dans la Table 8.5. La matrice \mathbf{B} ainsi formée a $[b - (n - 1)]$ lignes et b colonnes correspondant aux b branches du graphe connexe.

Exemple : Matrice des mailles fondamentales.

Dans l'exemple précédent, choisissons l'arbre formé des branches 1, 2, 3 et 4.

1. Identifier toutes les branches du graphe en réservant les premiers numéros (ou lettres) aux branches de l'arbre ;
2. former une maille fondamentale à partir d'un seul maillon et de branches de l'arbre ; son orientation coïncide avec celle du maillon ;
3. utiliser successivement tous les maillons, chacun une seule fois ;
4. numérotter les mailles fondamentales et disposer les lignes correspondantes en respectant le même ordre que celui utilisé pour la formation des colonnes relatives aux maillons correspondants.

TABLE 8.5: Construction de la matrice des mailles fondamentales \mathbf{B} .

On a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le rang de la matrice est $3 = 7 - (5 - 1)$.

On peut maintenant écrire

$$\mathbf{B} \mathbf{u}_B = \mathbf{0},$$

avec $b - (n - 1)$ relations linéairement indépendantes, où \mathbf{u}_B est le vecteur des tensions de branches orientées selon le sens choisi pour construire \mathbf{B} .

8.2.4 Vecteur des sources indépendantes de tension.

Nous avons jusqu'à présent considéré le graphe passifié. Considérons maintenant l'impact des sources indépendantes de tension dans les mailles à travers le vecteur \mathbf{v}_{sM} .

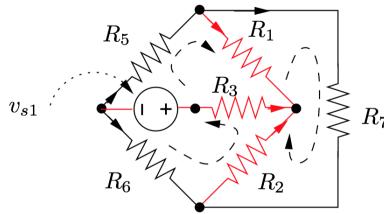
Un élément de \mathbf{v}_{sM} est la somme des tensions imposées dans chaque maille par les sources. Une source est prise avec le signe "+" si elle est orientée dans le sens de parcours de la maille, "-" sinon.

Avec ces conventions, on a

$$\mathbf{B} \mathbf{u}_B = \mathbf{v}_{sM}$$

Exemple : Vecteur \mathbf{v}_{sM} .

Reprenons le circuit précédent et l'arbre illustré en rouge.



La source de tension agit dans les mailles I et II est orientée en sens opposé au sens de ces mailles, donc

$$\mathbf{v}_{sM} = \begin{bmatrix} -v_{s1} \\ -v_{s1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

En effet, par la SLK dans les trois mailles fondamentales,

$$\begin{aligned} I : \quad u_1 - u_3 + u_5 &= -v_{s1} \\ II : \quad u_2 - u_3 + u_6 &= -v_{s1} \\ III : \quad -u_1 + u_2 + u_7 &= 0 \end{aligned}$$

est équivalent à

$$\mathbf{B} \mathbf{u}_B = \mathbf{v}_{sM}.$$

8.2.5 Courants de maille

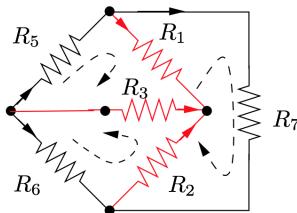
On appelle *courant de maille* le courant "virtuel" circulant à travers une maille. C'est en fait le courant qui circule dans le maillon qui définit la maille. La matrice des mailles fait le lien entre ces courants "virtuels" et les courants de branche :

$$\mathbf{i}_B = \mathbf{B}^T \mathbf{i}_M.$$

Chaque courant est considéré selon le sens de parcours de la maille ou de la branche correspondante.

Exemple :

Soit le graphe suivant est l'arbre correspondant



on a le vecteur \mathbf{i}_M des courants dans les maillons :

$$\mathbf{i}_M = [i_5, i_6, i_7]^T$$

et

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_I \\ i_{II} \\ i_{III} \end{bmatrix}$$

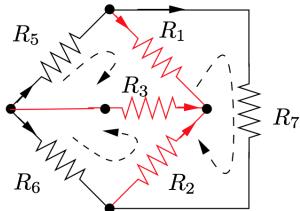
8.2.6 Matrices de résistance

Matrices de résistance de branches. L'application de la loi d'Ohm dans chaque branche permet de remplacer les tensions de branches \mathbf{u}_B par les courants de branche \mathbf{i}_B . Si le circuit comporte uniquement des résistances linéaires, on définit la matrice de résistance de branches \mathbf{R}_B de dimension $b \times b$ comme la matrice diagonale suivante

$$\mathbf{R}_B = \begin{bmatrix} R_1 & & & \\ & R_2 & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{0} & \ddots & \\ & & & R_b \end{bmatrix}$$

Exemple :

Pour le circuit suivant



on a

$$u_1 = R_1 i_1, \quad u_2 = R_2 i_2, \quad \dots, \quad u_7 = R_7 i_7 \iff \mathbf{u}_B = \mathbf{R}_B \mathbf{i}_B$$

$$\begin{aligned} R_1 i_1 - R_3 i_3 + R_5 i_5 &= -v_{s1} \\ R_2 i_2 - R_3 i_3 + R_6 i_6 &= -v_{s1} \iff \mathbf{B} \mathbf{R}_B \mathbf{i}_B = \mathbf{v}_{sM} \\ -R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_7 i_7 &= 0 \end{aligned}$$

Matrice de résistance de mailles. Comme illustré aux étapes (8.12) et (8.13) de la dérivation de la méthode des mailles, on peut remplacer les courants de branche \mathbf{i}_B par les courants de maille \mathbf{i}_M .

Exemple : Matrice de résistance de mailles.

Pour le même exemple que celui qui a servi à illustrer \mathbf{R}_B , on a

$$\mathbf{i}_B = \mathbf{B}^T \mathbf{i}_M$$

ou encore

$$i_1 = i_{M1} - i_{M3} \quad i_2 = i_{M2} + i_{M3} \quad \dots \quad i_7 = i_{M3}$$

et donc

$$\begin{aligned}(R_1 + R_3 + R_5)i_{M1} + R_3i_{M2} - R_1i_{M3} &= -v_{s1} \\ R_3i_{M1} + (R_2 + R_3 + R_6)i_{M2} + R_2i_{M3} &= -v_{s1} \\ -R_1i_{M1} + R_2i_{M2} + (R_1 + R_2 + R_7)i_{M3} &= 0\end{aligned}$$

ce qui se traduit sous forme matricielle par

$$\underbrace{\mathbf{B} \mathbf{R}_B \mathbf{B}^T}_{\mathbf{R}_M} \mathbf{i}_M = \mathbf{v}_{sM}$$

Ceci illustre une première manière de construire la matrice de résistance de maille :

1. construire \mathbf{B} ,
2. construire \mathbf{R}_B ,
3. calculer $\mathbf{R}_M = \mathbf{B} \mathbf{R}_B \mathbf{B}^T$

Il existe des méthodes parfois plus directes pour construire \mathbf{R}_M .

8.2.7 Détermination de \mathbf{R}_M par inspection

Appliquer

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{B} \mathbf{R}_B \mathbf{B}^T$$

revient, lorsque \mathbf{R}_B est diagonale⁶, à appliquer la règle d'inspection de la Table 8.6.

6. Ce qui n'est pas le cas avec des sources commandées

- R_{ii} est la somme des résistances des branches de la maille i
- R_{ik} est la somme des résistances des branches communes aux mailles i et k , prises avec le signe + si les sens de parcours des deux mailles coïncident, avec le signe - dans le cas contraire.

TABLE 8.6: Règle d'inspection pour déterminer les éléments de \mathbf{R}_M .

Exemple : Détermination de \mathbf{R}_M par inspection.

Pour l'exemple précédent, on a directement

$$\mathbf{R}_M = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 + R_5 & R_3 & -R_1 \\ R_3 & R_2 + R_3 + R_6 & R_2 \\ -R_1 & R_2 & R_1 + R_2 + R_7 \end{bmatrix}$$

8.2.8 Réseau équivalent

Lorsque le circuit est mis en équation grâce à la méthode des mailles, il peut être remplacé par un circuit équivalent constitué du circuit passifié vu de $M = b - (n - 1)$ accès auxquels agissent des sources indépendantes de tension équivalentes regroupant les sources indépendantes du circuit original (Figure 8.6). Il s'agit d'un réseau passifié avec un accès à chaque maillon (on ouvre le maillon), et une source indépendante de tension agissant à chaque accès (on ferme les maillons) correspondant aux composantes de \mathbf{v}_{sM} .

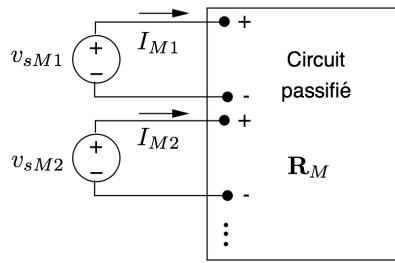


FIGURE 8.6: Réseau équivalent.

8.2.9 Détermination de \mathbf{R}_M par expérimentation

La dernière méthode pour déterminer \mathbf{R}_M consiste à exploiter la représentation du circuit par un réseau équivalent. En effet, \mathbf{R}_M caractérise le circuit passifé. Les relations $u - i$ aux $b - (n - 1)$ accès s'écrivent :

$$\begin{aligned} u_1 &= R_{11}i_1 + R_{12}i_2 + \dots \\ u_2 &= R_{21}i_1 + R_{22}i_2 + \dots \end{aligned}$$

où \mathbf{i} est le vecteur des courants injectés aux accès, \mathbf{u} est le vecteur des tensions aux accès.

Les éléments de \mathbf{R}_M sont alors déterminés par des essais successifs, cf. Figure 8.7 et Table 8.7. Cette méthode se révèle incontournable quand le circuit comporte des couplages entre branches ou quand, tout simplement, on n'a pas accès aux paramètres du circuit et on l'identifie par des mesures "physiques".

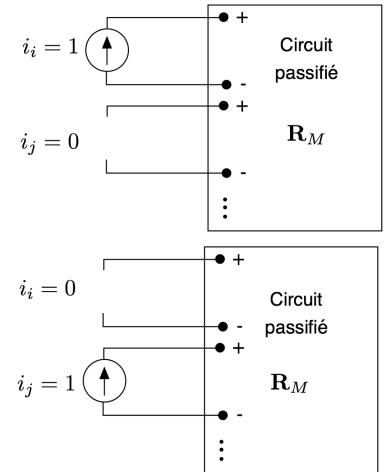


FIGURE 8.7: Illustration de la méthode d'expérimentation pour les éléments diagonaux (haut) et hors diagonale (bas).

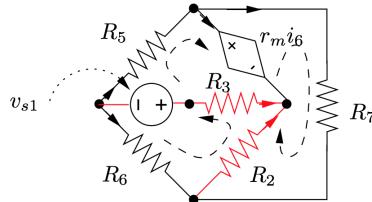
$$R_{ij} = u_i|_{i_j=1, i_k=0, k \neq j}$$

1. Imposer un courant de 1A à l'accès j
2. Laisser les autres accès ouverts ($i = 0$)
3. Déterminer dans ces conditions la tension à l'accès i

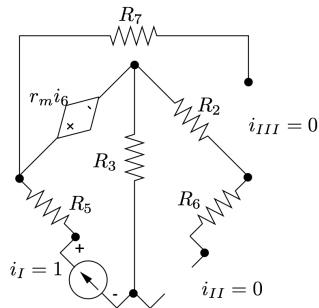
TABLE 8.7: Règle d'expérimentation pour déterminer les éléments de \mathbf{R}_M .

Exemple :

Soit le circuit de la figure suivante, comportant une source CVT :

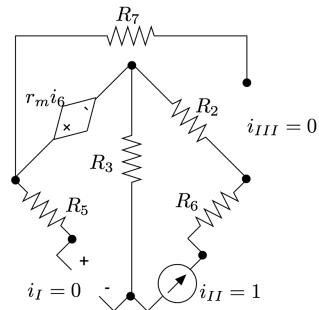


Calculons quelques éléments de \mathbf{R}_M . Commençons par $R_{11} = v_I|_{i_1=1, i_{II}=0}$ ce qui se traduit par l'expérience suivante :



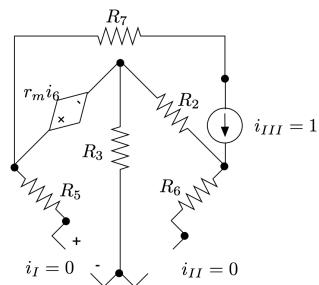
On a $i_6 = 0$ et $R_{11} = v_I = R_5 + R_3$.

De même pour $R_{12} = v_I|_{i_{II}=1, i_I=i_{III}=0}$



on a $i_5 = 0$, $i_6 = 1$, et $R_{12} = v_I = R_3 + r_m$.

Finalement, pour $R_{13} = v_I|_{i_{III}=1, i_I=i_{II}=0}$



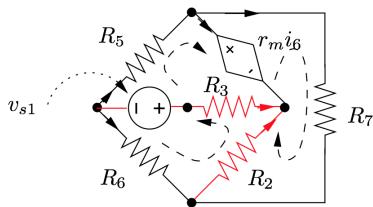
on a $i_6 = 0$, et $R_{13} = v_I = 0$.

8.2.10 Gestion des sources dépendantes de type CVT.

L'exemple de la section précédente nous a montré comment gérer une source de type CVT. On peut également les traiter avec la méthode de base, lors de la construction de la matrice \mathbf{R}_B , la matrice \mathbf{B} étant indépendante de la nature des éléments qui constituent les branches.

Exemple :

Soit le circuit de la figure suivante, comportant une source CVT :



$$\mathbf{R}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & r_m & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{B} \mathbf{R}_B \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} R_3 + R_5 & R_3 + r_m & 0 \\ R_3 & R_2 + R_3 + R_6 & R_2 \\ 0 & R_2 - r_m & R_2 + R_7 \end{bmatrix}$$

\mathbf{R}_B et \mathbf{R}_M ne sont plus des matrices symétriques.

Par contre, \mathbf{R}_M ne peut plus être déterminée par inspection, ou en tous les cas pas totalement.

8.2.11 Gestion des sources indépendantes de tension

Pour gérer les sources indépendantes de courant, on peut transformer le circuit comme suit :

- pour une source en parallèle avec une résistance : transformer la source de courant en une source de tension équivalente
- pour source seule dans une branche : transformer le circuit comme indiqué à la Figure 8.8.

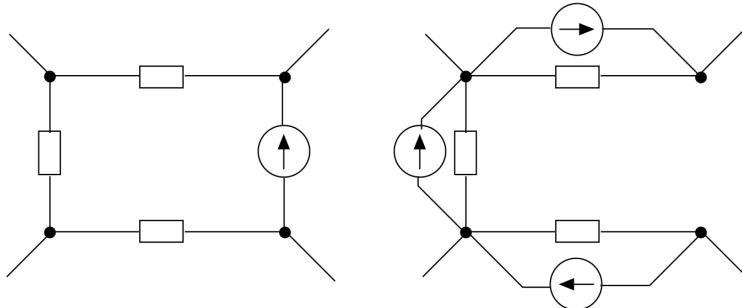


FIGURE 8.8: Gestion des sources indépendantes de courant dans la méthode des mailles.

On vérifie que dans le reste du circuit, les lois de Kirchhoff sont inchangées. La branche dans laquelle se trouve la source de courant ne doit pas être couplée avec le reste du circuit (par une source commandée par exemple).

8.2.12 Généralisation du Théorème de Norton à plusieurs accès

Considérons le schéma équivalent du circuit déduit de la méthode des mailles (Figure 8.9), avec $M = n - (n - 1)$ accès. Les relations $u - i$ pour

les M accès :

$$\mathbf{u} = -\mathbf{v}_{sM} + \mathbf{R}_M \mathbf{i}_M$$

ou encore

$$\mathbf{u} = -\mathbf{v}_{sM} + \mathbf{R}_M \mathbf{i}$$

On en déduit le schéma équivalent de Thévenin à M accès par simple identification :

$$\mathbf{v}_{th} = -\mathbf{v}_{sM}, \quad \mathbf{R}_{Th} = \mathbf{R}_M$$

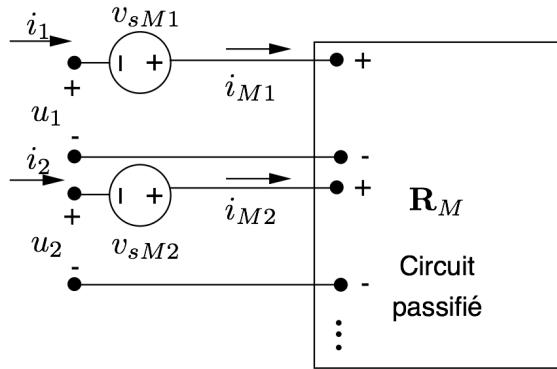


FIGURE 8.9: Généralisation du Théorème de Thévenin à plusieurs accès.

8.2.13 Réduction du nombre d'accès

On cherche à obtenir un schéma équivalent de Thévenin à a accès (intéressants), avec $a < M$. Les $M - a$ accès inintéressants sont court-circuités (ce qui ne dénature pas la topologie du circuit) :

$$v_{a+1}, \dots, v_N = 0$$

Utilisons les indices **a** et **b** pour partitionner les vecteurs en parties inté-

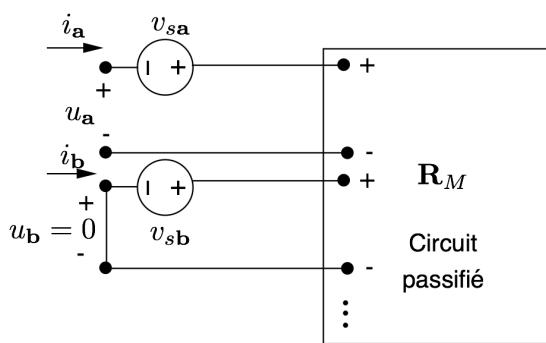


FIGURE 8.10: Illustration de la réduction du nombre d'accès.

ressantes et non-intéressantes. Les relations $u - i$ de la méthode des mailles deviennent :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{sa} \\ \mathbf{v}_{sb} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{a,a} & \mathbf{R}_{a,b} \\ \mathbf{R}_{b,a} & \mathbf{R}_{b,b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_a \\ \mathbf{i}_b \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_b = 0 = -\mathbf{v}_{sb} + \mathbf{R}_{b,a} \mathbf{i}_a + \mathbf{R}_{b,b} \mathbf{i}_b \rightarrow \mathbf{i}_b = \mathbf{R}_{b,b}^{-1} (\mathbf{v}_{sb} - \mathbf{R}_{b,a} \mathbf{i}_a)$$

$$\mathbf{u}_a = (-\mathbf{v}_{sa} + \mathbf{R}_{a,b} \mathbf{R}_{b,b}^{-1} \mathbf{v}_{sb}) + (\mathbf{R}_{a,a} - \mathbf{R}_{a,b} \mathbf{R}_{b,b}^{-1} \mathbf{R}_{b,a}) \mathbf{i}_a$$

Finalement :

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{v}_{Th} + \mathbf{R}_{Th} \mathbf{i}_a$$

on a

- le vecteur des sources équivalentes de Thévenin :

$$\mathbf{v}_{Th} = -\mathbf{v}_{sa} + \mathbf{R}_{a,b} \mathbf{R}_{b,b}^{-1} \mathbf{v}_{sb}$$

c'est le vecteur des tensions aux bornes des accès à vide ($\mathbf{i}_a = 0$)

- la matrice de résistances de Thévenin, matrice de résistances "réduite" aux accès :

$$\mathbf{R}_{Th} = \mathbf{R}_{a,a} - \mathbf{R}_{a,b} \mathbf{R}_{b,b}^{-1} \mathbf{R}_{b,a}$$

qui peut être déterminée par expérimentation, mais jamais par inspection.

8.3 Identification des paramètres d'un quadripôle

8.3.1 Objectifs de l'analyse des quadripôles

Le quadripôle occupe une place de choix en théorie des circuits. Que ce soit en télécommunications, en électroacoustique, en électronique ou en électrotechnique, il est en effet couramment utilisé comme élément de liaison ; citons par exemple le quadripôle "filtre" aux fonctions aussi multiples qu'importantes. Lors de la conception d'un circuit électrique comme par exemple celui illustré à la Figure 8.11, on utilise souvent une approche modulaire. Chaque module est conçu de manière indépendante, et est caractérisé par ses relations entrées-sorties. Moyennant certaines précautions d'implémentation des modules, on évite de devoir traiter les détails internes de chacun des modules lors de la conception du système global. Cela facilite aussi le réemploi de certains modules, le partage du travail, la réparation, l'analyse de fiabilité, etc.

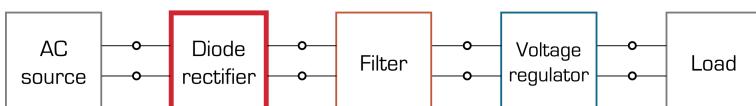


FIGURE 8.11: Exemple : vue modulaire d'une unité de conversion de puissance AC-DC.

On souhaite donc caractériser les relations "entre accès" :

$$\begin{aligned} f_1(u_1(t), u_2(t), i_1(t), i_2(t)) &= 0 \\ f_2(u_1(t), u_2(t), i_1(t), i_2(t)) &= 0 \end{aligned}$$

Par exemple, pour la source commandée de type CCT illustrée à la Figure 8.12, on a

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ i_2 &= f(i_1). \end{aligned}$$

De plus,

- Si le quadripôle est linéaire : $f(i_1) = \beta(t) i_1$
- si de plus il est invariant : $f(i_1) = \beta i_1$

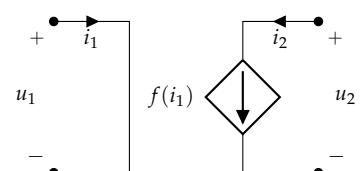


FIGURE 8.12: Exemple de quadripôle avec une source de type CCT.

Si un quadripôle n'est pas exclusivement résistif (R, L, C, \dots), sa caractérisation est parfois très difficile sauf si il est composé d'éléments linéaires et invariants, auquel cas on peut faire recours à l'approche fréquentielle. Par exemple, en régime sinusoïdal établi, on aura recours aux phaseurs, Z et Y .

8.3.2 Caractérisation

Il existe 6 manières de caractériser un quadripôle. Elles dépendent des combinaisons possibles entre variables. Chaque manière est caractérisée par une matrice 2×2 exprimant les relations entre u_1, i_1, u_2, i_2 .

Exprimer	en fonction	Matrice
les tensions	des courants	Z
les courants	des tensions	Y
les grandeurs du primaire	des grandeurs du secondaire	T
les grandeurs du secondaire	des grandeurs du primaire	T_-
(\bar{U}_1, \bar{I}_2)	de (\bar{U}_2, \bar{I}_1)	H
(\bar{U}_2, \bar{I}_1)	de (\bar{U}_1, \bar{I}_2)	G

On choisit l'une ou l'autre en fonction de l'application. L'objectif de ce chapitre est de montrer comment identifier les paramètres de ces matrices et de faire le lien avec les sections précédentes.

8.3.3 Matrice d'impédances $Z(j\omega)$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11}(j\omega) & Z_{12}(j\omega) \\ Z_{21}(j\omega) & Z_{22}(j\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Z}(j\omega)\mathbf{I}$$

$\mathbf{Z}(j\omega)$ est la matrice d'impédances du circuit réduite à ses accès 11' et 22'.

Les éléments de \mathbf{Z} sont obtenus par essais à vide :

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_1} \Big|_{\bar{I}_2=0} & Z_{22} &= \frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_2} \Big|_{\bar{I}_1=0} \\ Z_{21} &= \frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_1} \Big|_{\bar{I}_2=0} & Z_{12} &= \frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_2} \Big|_{\bar{I}_1=0} \end{aligned}$$

Cas du quadripôle réciproque. La matrice $\mathbf{Z}(j\omega)$ d'un quadripôle réciproque est symétrique :

$$Z_{12}(j\omega) = Z_{21}(j\omega)$$

Car, comme illustré à la Figure 8.13,

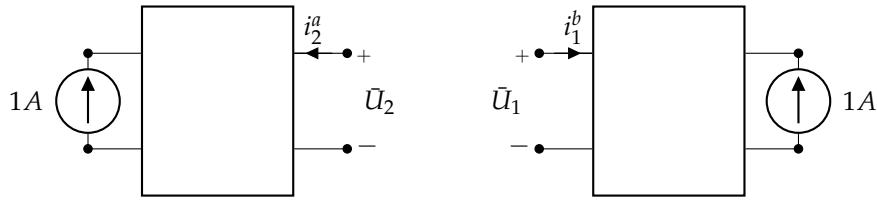
$$Z_{21} = \bar{U}_2 \Big|_{\bar{I}_1=1; \bar{I}_2=0}$$

$$Z_{12} = \bar{U}_1 \Big|_{\bar{I}_1=0; \bar{I}_2=1}$$

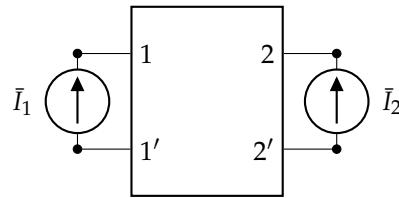
Et d'après la condition 2 de la propriété de réciprocité : $\bar{U}_1 = Z_{12} = \bar{U}_2 = Z_{21}$.

Propriété des "quadripôles RLC". Tout quadripôle ne comportant que des éléments R, L, C classiques linéaires et invariants **est réciproque**.⁷

7. Un quadripôle comportant des sources commandées ou des AO peut ne pas être réciproque.

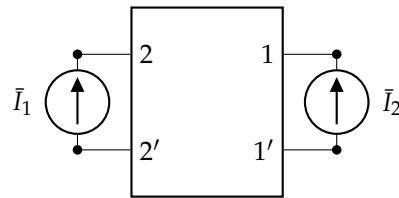
FIGURE 8.13: Identification de \mathbf{Z} .

Cas du quadripôle symétrique. Connectons aux deux accès deux sources de courant.



$$\bar{U}_1 = Z_{11}\bar{I}_1 + Z_{12}\bar{I}_2$$

Inversons les accès en retournant le quadripôle.



$$\bar{U}_2 = Z_{22}\bar{I}_1 + Z_{21}\bar{I}_2$$

Si le quadripôle est symétrique, il faut

$$\bar{U}_1 = \bar{U}_2 \quad \forall \bar{I}_1, \bar{I}_2 \quad \Rightarrow Z_{11} = Z_{22} \quad \text{et} \quad Z_{12} = Z_{21}$$

Donc $\mathbf{Z}(j\omega)$ doit être symétrique et en plus telle que $Z_{11} = Z_{22}$.

8.3.4 Matrice d'admittances

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11}(j\omega) & Y_{12}(j\omega) \\ Y_{21}(j\omega) & Y_{22}(j\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Y}(s)\mathbf{U}(s)$$

$\mathbf{Y}(s)$ = matrice d'admittances du circuit réduite à ses accès 11' et 22'. Les éléments de \mathbf{Y} sont obtenus par essais en court-circuit :

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{\bar{I}_1}{\bar{U}_1} \Big|_{\bar{U}_2=0} & Y_{22} &= \frac{\bar{I}_2}{\bar{U}_2} \Big|_{\bar{U}_1=0} \\ Y_{21} &= \frac{\bar{I}_2}{\bar{U}_1} \Big|_{\bar{U}_2=0} & Y_{12} &= \frac{\bar{I}_1}{\bar{U}_2} \Big|_{\bar{U}_1=0} \end{aligned}$$

- Quadripôle **réciproque** : $Y_{12}(j\omega) = Y_{21}(j\omega)$ (condition 1)
- Quadripôle **symétrique** : $Y_{11}(j\omega) = Y_{22}(j\omega)$ et $Y_{12}(j\omega) = Y_{21}(j\omega)$

8.3.5 Matrices de transfert directe $\mathbf{T}(j\omega)$

Elle relie les grandeurs d'un accès à celles de l'autre accès :

$$\begin{pmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(j\omega) & B(j\omega) \\ C(j\omega) & D(j\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{I}'_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}(j\omega) \begin{pmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{I}'_2 \end{pmatrix}$$

Les éléments de \mathbf{T} sont obtenus par des essais à vide et en court-circuit :

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_2} \right|_{\bar{I}'_2=0} & B &= \left. \frac{\bar{U}_1}{\bar{I}'_2} \right|_{\bar{U}_2=0} \\ C &= \left. \frac{\bar{I}_1}{\bar{U}_2} \right|_{\bar{I}'_2=0} & D &= \left. \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}'_2} \right|_{\bar{U}_2=0} \end{aligned}$$

Relations avec les éléments des matrices \mathbf{Z} et \mathbf{Y} .

$$\begin{aligned} A &= \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & C &= \frac{1}{Z_{21}} \\ B &= -\frac{1}{Y_{21}} & D &= -\frac{Y_{11}}{Y_{21}} \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}$ et $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$

$$\begin{aligned} A &= -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} & C &= -\frac{\det \mathbf{Y}}{Y_{21}} \\ B &= \frac{\det \mathbf{Z}}{Z_{21}} & D &= \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{aligned}$$

- Quadripôle **réciproque** : on vérifie $\det \mathbf{T} = AD - BC = 1$
- Quadripôle **symétrique** : en plus $A = D$

8.3.6 Matrice de transfert inverse $\mathbf{T}_-(j\omega)$

$$\begin{pmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'(j\omega) & B'(j\omega) \\ C'(j\omega) & D'(j\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}'_1 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_-(j\omega) \begin{pmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}'_1 \end{pmatrix}$$

Relation avec la matrice \mathbf{T} . De la définition de \mathbf{T}

$$\begin{pmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{I}'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{T}} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{pmatrix}$$

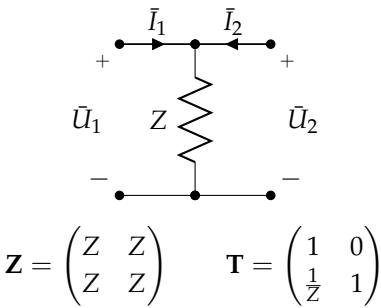
De là :

$$\begin{pmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{I}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{T}} \begin{pmatrix} D & B \\ C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}'_1 \end{pmatrix}$$

- Quadripôle **réciproque** : $\det \mathbf{T}_- = 1$
- Quadripôle **symétrique** : en plus $A' = D' \Rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{T}_-$

Remarque. La matrice de transfert \mathbf{T} est plus générale que la matrice d'impédances \mathbf{Z} ou la matrice d'admittances \mathbf{Y} .

Certains quadripôles possèdent une matrice \mathbf{Z} singulière et donc pas de matrice \mathbf{Y} :



D'autres ont une matrice \mathbf{Y} singulière et donc pas de matrice \mathbf{Z} . Certains n'ont ni matrice \mathbf{Z} ni matrice \mathbf{Y} . Ils ont tous une matrice de transfert \mathbf{T}

8.3.7 Matrices hybrides

Elles relient les grandeurs relatives à des accès différents et sont surtout utilisées pour les circuits électroniques.

$$\begin{pmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{U}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{U}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_2 \end{pmatrix}$$

on a évidemment

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}^{-1}$$

8.3.8 Quadripôles réciproques usuels

Quadripôle en T et en Π.

$$\mathbf{Z}_T = \begin{pmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_\pi = \begin{pmatrix} Y_1 + Y_3 & -Y_3 \\ -Y_3 & Y_2 + Y_3 \end{pmatrix}$$

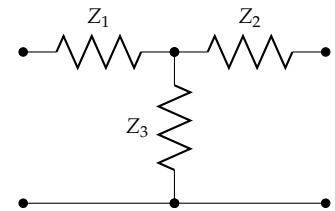


FIGURE 8.14: T

Quadripôle en treillis. C'est un quadripôle à trois mailles indépendantes. Sa matrice d'impédances réduite aux accès 1 et 2 s'écrit

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\sum Z} \begin{pmatrix} (Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4) & Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3 \\ Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3 & (Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3) \end{pmatrix} \quad (8.15)$$

Avec $\sum Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4$. Un cas particulier important est le treillis symétrique obtenu à partir du treillis général lorsque

$$Z_3 = Z_1 \quad \text{et} \quad Z_4 = Z_2$$

Sa matrice d'impédances se réduit à partir de (8.15) ou plus simplement par des essais à vide et en court-circuit.

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{2} & \frac{Z_2 - Z_1}{2} \\ \frac{Z_2 - Z_1}{2} & \frac{Z_1 + Z_2}{2} \end{pmatrix}$$

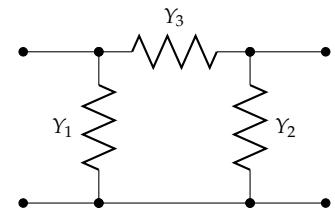


FIGURE 8.15: Π

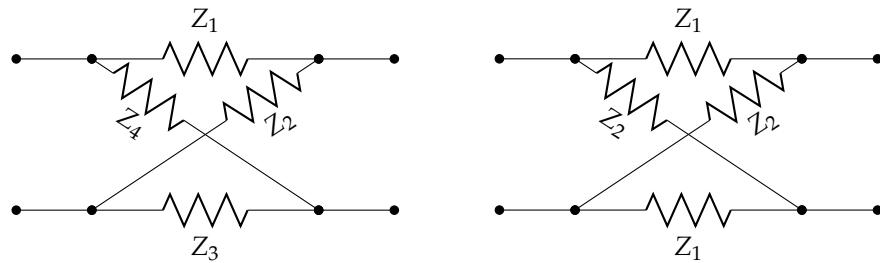


FIGURE 8.16: Treillis (gauche) et treillis symétrique (droite).

8.3.9 Sources commandées

Une source commandée est en réalité un quadripôle unidirectionnel, non autonome et actif ; un de ses accès est celui qui exerce la commande (accès de commande), l'autre est l'accès commandé. On distingue les quatre types de sources commandées idéales décrites ci-dessous. Un implémentations de chacun de ces quadripôles est explicitée à la Section 7.3.

VVT.

$$\begin{array}{c}
 \text{Circuit symbol: } \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \quad \text{with } U_1 \text{ and } I_2 \text{ indicated.} \\
 \text{Equation: } \mu U_1 = U_2 \\
 \text{Parameters: } \begin{aligned} I_1 &= 0 \\ Z_{in} &= \infty \\ Z_{out} &= 0 \end{aligned} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1/\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

CCT.

$$\begin{array}{c}
 \text{Circuit symbol: } \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \quad \text{with } I_1 \text{ and } I_2 \text{ indicated.} \\
 \text{Equation: } \alpha I_1 = I_2 \\
 \text{Parameters: } \begin{aligned} U_1 &= 0 \\ Z_{in} &= 0 \\ Z_{out} &= \infty \end{aligned} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/\alpha \end{bmatrix}
 \end{array}$$

CVT.

$$\begin{array}{c}
 \text{Circuit symbol: } \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \quad \text{with } I_1 \text{ and } U_2 \text{ indicated.} \\
 \text{Equation: } r I_1 = U_2 \\
 \text{Parameters: } \begin{aligned} U_1 &= 0 \\ Z_{in} &= 0 \\ Z_{out} &= 0 \end{aligned} \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/r & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

VCT.

$$\begin{array}{c}
 \text{Circuit symbol: } \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \quad \text{with } U_1 \text{ and } I_2 \text{ indicated.} \\
 \text{Equation: } g U_1 = I_2 \\
 \text{Parameters: } \begin{aligned} I_1 &= 0 \\ Z_{in} &= \infty \\ Z_{out} &= \infty \end{aligned} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1/g \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

8.3.10 Associations de quadripôles

Association en série. Soient deux quadripôles Q_a , Q_b et respectivement \mathbf{Z}_a , \mathbf{Z}_b leurs matrices d'impédances aux accès. Assurons-les en série et recherchons la matrice \mathbf{Z} du quadripôle résultant (Figure 8.17).

On voit ainsi que la matrice d'impédances du quadripôle résultant de l'association de deux quadripôles en série est égale à la somme des matrices

d'impédances des deux quadripôles pris séparément :

$$\begin{aligned}\mathbf{I}^a &= \mathbf{I}^b = \mathbf{I} \\ \mathbf{U} &= \mathbf{U}^a + \mathbf{U}^b = \mathbf{Z}^a \mathbf{I}^a + \mathbf{Z}^b \mathbf{I}^b = \mathbf{Z} \mathbf{I} \\ \mathbf{Z} &= \mathbf{Z}^a + \mathbf{Z}^b\end{aligned}\quad (8.16)$$

Cette relation est valable pour autant que les matrices \mathbf{Z}_a et \mathbf{Z}_b soient identiques à celles des quadripôles pris séparément ; autrement dit, la relation (8.16) n'est valable que si l'association des deux quadripôles ne modifie pas la distribution interne des courants. Or ceci n'est pas souvent réalisé, car la tension entre les bornes 1' et 2' du quadripôle Q_a peut ne pas être égale à la tension entre les bornes 1 et 2 du quadripôle Q_b ; la différence de ces tensions induira alors un courant dans la boucle constituée des bornes 1', 2' de Q_a et 1, 2 de Q_b . Dans ce cas, le courant entrant par la première borne d'entrée d'un quadripôle (par exemple 1 de Q_a) n'est plus égal au courant sortant par la seconde borne d'entrée du même quadripôle (par exemple 1' de Q_a) et il en va de même pour les courants parcourant les bornes de sortie.

Il existe deux cas où la relation (8.16) est sûrement valable :

1. celui où les branches 1'2' de Q_a et 12 de Q_b (Figure 8.17) sont des courts-circuits, car dans ce cas aucune tension parasite et par conséquent aucun courant supplémentaire n'existe dans la boucle constituée des bornes 1', 2' de Q_a et 1, 2 de Q_b .
2. celui où un transformateur idéal de rapport 1 est inséré soit à l'entrée soit à la sortie d'un des deux quadripôles.

Voici un contre-exemple. Comme illustré à la Figure 8.18,

$$\mathbf{Z}^a = \mathbf{Z}^b = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mais

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 3.5 & 2.5 \\ 2.5 & 3.5 \end{pmatrix} \neq \mathbf{Z}^a + \mathbf{Z}^b.$$

Association en parallèle. Soient deux quadripôles Q^a , Q^b et respectivement \mathbf{Y}_a , \mathbf{Y}_b leurs matrices d'admittances aux accès. Recherchons la matrice \mathbf{Y} du quadripôle résultant de leur association en parallèle. Il vient (Figure 8.19) :

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^a &= \mathbf{U}^b = \mathbf{U} \\ \mathbf{I} &= \mathbf{I}^a + \mathbf{I}^b = \mathbf{Y}^a \mathbf{U}^a + \mathbf{Y}^b \mathbf{U}^b = \mathbf{Y} \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{Y}^a + \mathbf{Y}^b\end{aligned}\quad (8.17)$$

La relation (8.17) est valable moyennant certaines conditions analogues à celles imposées à la relation (8.16). Ces conditions sont l'égalité de la tension entre 1 et 2 de Q^a avec la tension entre 1 et 2 de Q^b d'une part, l'égalité de la tension entre 1' et 2' de Q^a avec la tension entre 1' et 2' de Q^b d'autre part. Il existe deux cas où ces conditions sont automatiquement réalisées :

1. celui où un transformateur idéal de rapport 1 est interposé soit à l'entrée soit à la sortie ;

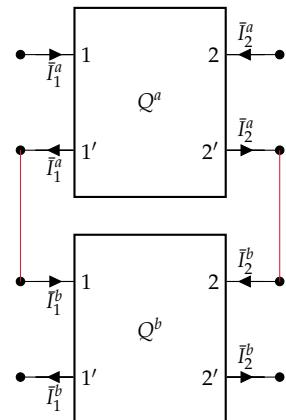


FIGURE 8.17: Association en série.

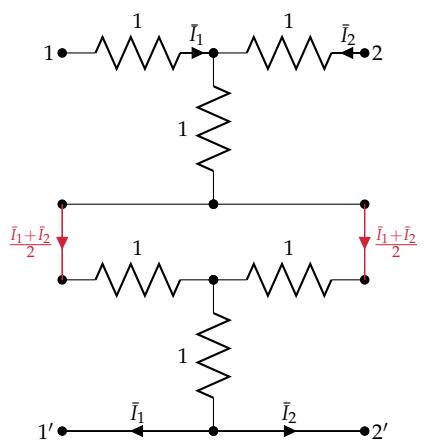


FIGURE 8.18: Association en série de quadripôle pour laquelle la relation 8.16 ne tient pas.

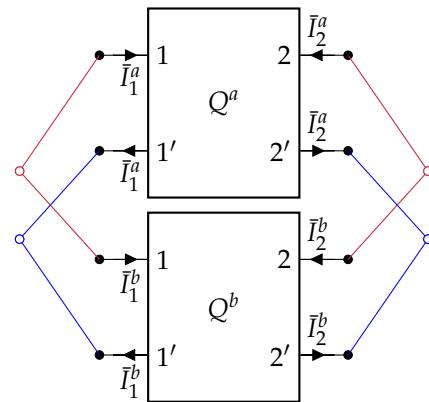


FIGURE 8.19: Association en parallèle.

2. celui où les branches $1_a 2_a$ et $1_b 2_b$ sont des courts-circuits. En effet, aucun courant parasite ne parcourt alors la boucle $1_a 1_b 2_b 2_a$; il s'ensuit qu'aucun courant parasite ne peut parcourir la boucle $1'_a 1'_b 2'_b 2'_a$ puisque les noeuds $1'_a$ et $1'_b$ sont au potentiel $-U_1$ par rapport à 1_a et 1_b et les noeuds $2'_a$ et $2'_b$ sont au potentiel $-U_2$ par rapport à 2_a et 2_b .

Les conclusions précédentes restent évidemment valables si l'on met en court-circuit les branches $1'_a 2'_a$ et $1'_b 2'_b$ au lieu des branches $1_a 2_a$ et $1_b 2_b$.

Association en cascade. Considérons deux quadripôles Q^a, Q^b ; soient respectivement \mathbf{T}^a et \mathbf{T}^b leurs matrices de transfert. Recherchons la matrice \mathbf{T} du quadripôle résultant de leur association en cascade. Il vient (Figure 8.20) :

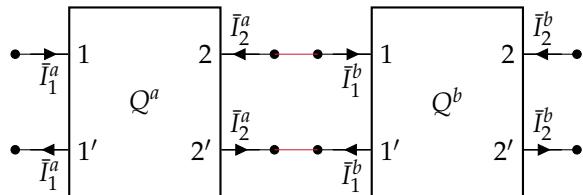


FIGURE 8.20: Association en cascade.

$$\begin{pmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{pmatrix} = \mathbf{T}^a \begin{pmatrix} \bar{U}_2^a \\ \bar{I}_2^a \end{pmatrix} = \mathbf{T}^a \begin{pmatrix} \bar{U}_1^b \\ \bar{I}_1^b \end{pmatrix} = \mathbf{T}^a \mathbf{T}^b \begin{pmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{I}_2 \end{pmatrix}$$

Et donc

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^a \mathbf{T}^b$$

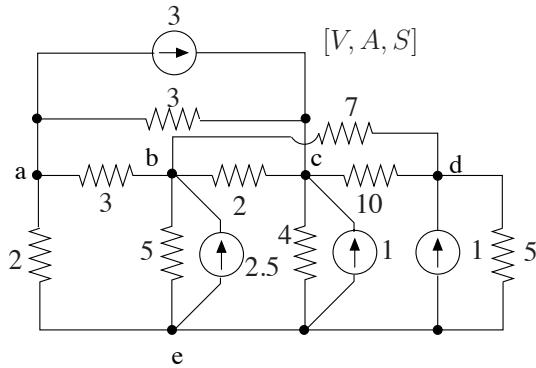
On peut généraliser : la matrice de transfert du quadripôle résultant de l'association de n quadripôles en chaîne vaut :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^1 \mathbf{T}^2 \dots \mathbf{T}^n.$$

8.4 Exercices

Exercice 8.1 Méthode des noeuds Solution à la page 240.

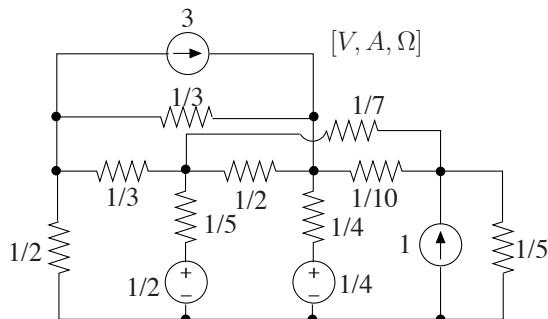
Déterminer l'état électrique complet du réseau de la figure ci-dessous au moyen de la méthode des noeuds.



Réponse :
 $\mathbf{V}_N = (-0.112, 0.306, 0.395, 0.322)^T \text{ V}$
noeud de référence : e

Exercice 8.2 Méthode des mailles Solution à la page 243.

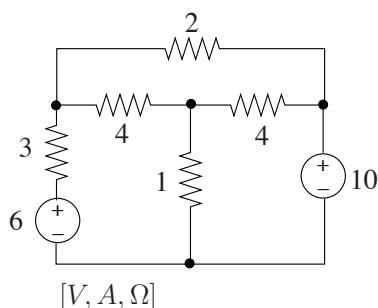
Déterminer l'état électrique complet du réseau de la figure ci-dessous au moyen de la méthode des mailles.



Réponse :
 $\mathbf{I}_M = (0.224, 0.967, -0.612, -0.111, 1.479)^T$
A
arbre : $3(R = 1/4, E = 1/4)-5(R = 1/3)-6(R = 1/2)-7(R = 1/10)$

Exercice 8.3 Méthode des mailles - réduction du nombre d'accès Solution à la page 247.

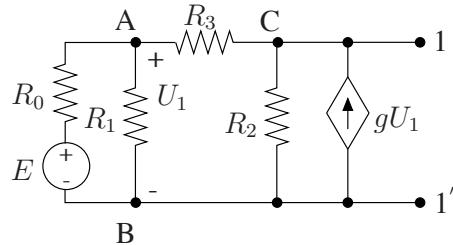
Déterminer l'état électrique complet du réseau de la figure ci-dessous. Déterminer tout d'abord la matrice de résistances réduite aux accès vue des deux sources indépendantes de tension.



Réponse :
 $(I_1, I_2) = (-0.373, 3.227)$ A

Exercice 8.4 Méthode des noeuds - Norton Solution à la page 250.

Déterminer le schéma équivalent de Norton du circuit de la figure ci-dessous vu de l'accès $11'$. Exprimer les paramètres de cet équivalent en fonction de E . En déduire le schéma équivalent de Thévenin vu de ce même accès.

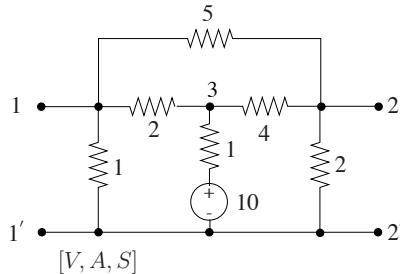


$$\begin{aligned} R_0 &= 150 \text{ k}\Omega & R_1 &= 100 \text{ k}\Omega & R_2 &= 0.1 \text{ k}\Omega \\ R_3 &= 1000 \text{ k}\Omega & g &= 0.05 \text{ S} \end{aligned}$$

Réponse :
 $I_{No} = 1.89 \cdot 10^{-2} E$, $G_{No} = 7.17 \cdot 10^{-3} \text{ S}$

Exercice 8.5 Méthode des noeuds - Norton Solution à la page 254.

Déterminer le schéma équivalent de Norton du circuit de la figure ci-dessous vu des accès $11'$ et $22'$.

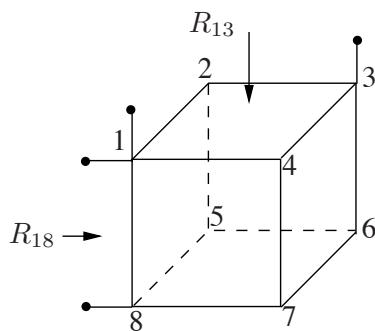


Exercice 8.6 Choix de la bonne méthode Solution à la page 256.

Réponse :
 $\mathbf{I}_{No} = \begin{pmatrix} \frac{20}{7}, \frac{40}{7} \end{pmatrix}^T \text{ A}$, $\mathbf{G}_{No} = \begin{pmatrix} 7.43 & -6.14 \\ -6.14 & 8.71 \end{pmatrix} \text{ S}$

Soit un cube dont chaque arête est occupée par une résistance de 1Ω comme indiqué à la figure ci-dessous. Déterminer :

1. la résistance équivalente R_a vue d'une arête ;
2. la résistance équivalente R_d vue d'une diagonale d'une face du cube.

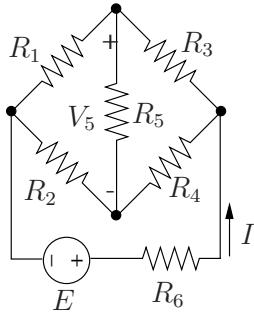


Réponse :
 $R_a = R_{18} = 0.58 \Omega$, $R_d = R_{13} = 0.75 \Omega$

Exercice 8.7 Thévenin - méthode des mailles Solution à la page 260.

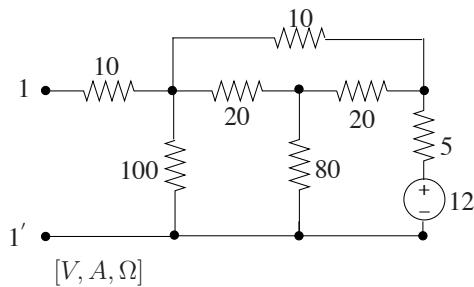
Déterminer l'expression des rapports $\frac{V_5}{E}$ et $\frac{V_5}{I}$ pour le circuit de la figure ci-dessous. Considérer le cas général et les cas particuliers :

1. de la source idéale ($R_6 = 0$),
2. du détecteur d'impédance infinie ($R_5 = \infty$).



Exercice 8.8 Méthode des mailles ou transfiguration étoile - triangle Solution à la page 264.

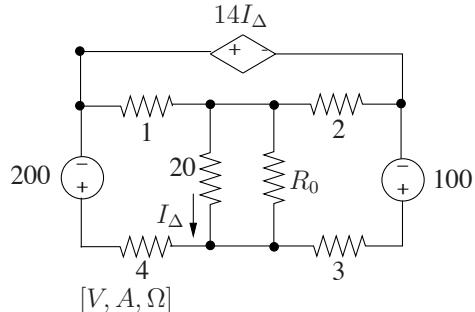
Déterminer le schéma équivalent de Thévenin du circuit de la figure ci-dessous vu de l'accès 11'. Déterminer ensuite la puissance produite par la source de 12 V si l'accès 11' est laissé ouvert.



Réponse :
 $V_{Th} = 9.71 \text{ V}$, $R_{Th} = 20.85 \Omega$, $p_{12V} = 2.54 \text{ W}$

Exercice 8.9 Thévenin - méthode des mailles Solution à la page 267.

Déterminer la valeur de la résistance R_0 du circuit de la figure ci-dessous telle que cette résistance consomme une puissance de 1000 W.

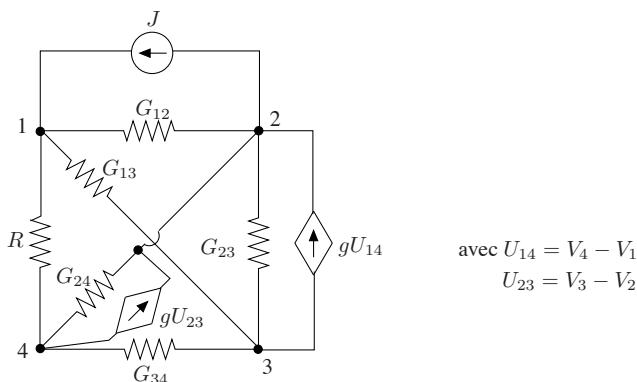


Réponse :
 $R_0^{(1)} = 17.14 \Omega$, $R_0^{(2)} = 0.37 \Omega$

Exercice 8.10 Méthode des noeuds - Norton Solution à la page 269.

Déterminer la puissance dissipée dans la résistance R connectée aux bornes 14 du circuit de la figure ci-dessous.

Suggestion : utiliser la méthode des noeuds pour rechercher le schéma équivalent de Norton vu des bornes 14.



$$G_{12} = 35 \text{ mS} ; G_{13} = 25 \text{ mS} ; G_{23} = 10 \text{ mS} ; G_{24} = 80 \text{ mS}$$

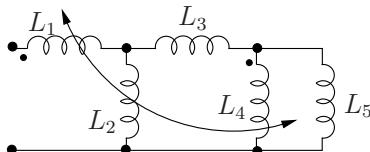
$$G_{34} = 75 \text{ mS} ; g = 20 \text{ mS} ; R = 100 \Omega ; J = 5 \text{ A}$$

$$\text{On pose } U_{14} = U_4 - U_1 \text{ et } U_{23} = U_3 - U_2$$

Réponse :
 $p_R = 49.16 \text{ W}$

Exercice 8.11 Méthodes générales, régime sinusoïdal Solution à la page 272.

Déterminer l'inductance équivalente du dipôle de la figure ci-dessous sachant que les inductances L_1 et L_4 sont couplées avec un coefficient de couplage $k = 0.7$.



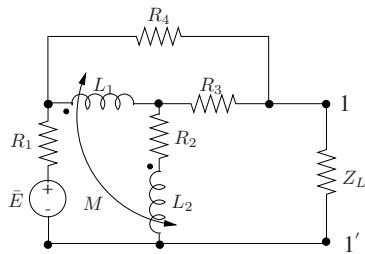
$$L_1 = 0.1 \text{ mH} ; L_2 = 0.5 \text{ mH} ; L_3 = 0.2 \text{ mH} ; L_4 = 0.4 \text{ mH} ; L_5 = 0.8 \text{ mH}$$

Réponse :
 $L_{eq} = 0.413 \text{ mH}$

Exercice 8.12 Méthodes générales, régime sinusoïdal Solution à la page 273.

Étant donné le circuit ci-dessous fonctionnant en régime sinusoïdal établi :

1. déterminer l'impédance Z_L à connecter aux bornes 11' pour soutirer au circuit le maximum de puissance ;
2. rechercher des éléments qui pourraient réaliser cette impédance ;
3. calculer la puissance complexe fournie à la charge Z_L dans ces conditions.



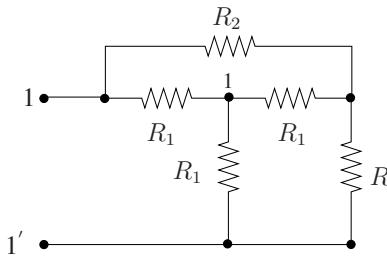
$$\begin{aligned}R_1 &= 10 \Omega & R_2 &= 25 \Omega \\R_3 &= 50 \Omega & R_4 &= 50 \Omega \\L_1 &= 20 \text{ mH} & L_2 &= 80 \text{ mH} \\M &= 10 \text{ mH} & \omega &= 1000 \text{ rad/s} \\E &= 100\angle 0^\circ \text{ V, valeur efficace}\end{aligned}$$

Réponse :
 $Z_L = 33.31 - j3.47 \Omega$, $R_L = 33.31 \Omega$, $C_L = 288 \mu\text{F}$
 $S_{Z_L} = 55.4 - j5.77 \text{ VA}$

8.5 Exercices non résolus

Exercice 8.13

Déterminer la valeur de la résistance R telle que la résistance d'entrée R_{in} du circuit de la figure ci-dessous vue de l'accès 11' soit égale à R .



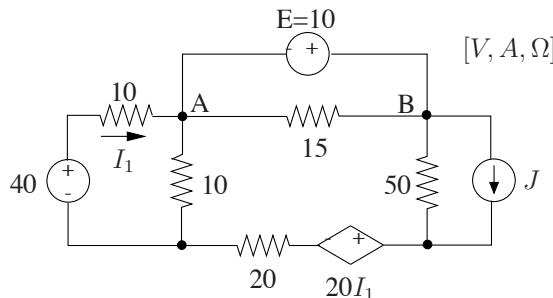
$$R_1 = 20 \Omega, R_2 = 5 \Omega$$

Réponse :
 $R = 11.55 \Omega$

Exercice 8.14

Déterminer la valeur de la source de courant J de façon à ce que la source de tension $E = 10 \text{ V}$ fournisse au reste du circuit de la figure ci-dessous une puissance de 20 W.

Établir le bilan de puissance de ce circuit.



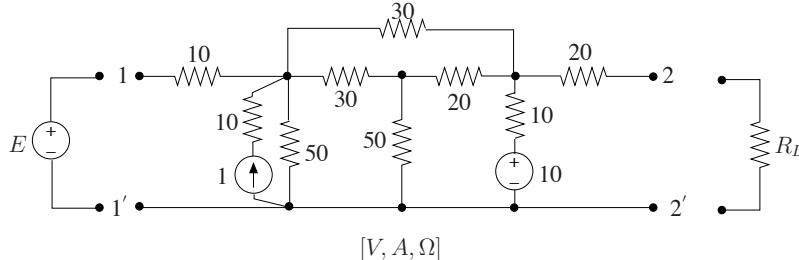
Suggestion : rechercher dans un premier temps le schéma équivalent de Thévenin du circuit vu des bornes AB

Réponse :
 $J = 2.47 \text{ A}$

Exercice 8.15

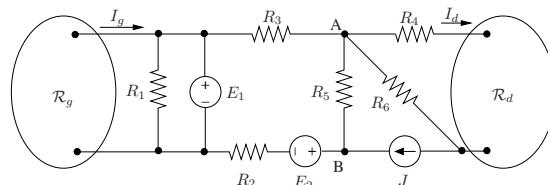
Étant donné le circuit de la figure ci-dessous on demande de déterminer son schéma équivalent de Thévenin vu des accès 11' et 22'.

On connecte ensuite une source de tension idéale $E = 20 \text{ V}$ à l'accès $11'$ et une résistance de charge $R_L = 30 \Omega$ à l'accès $22'$. Calculer dans ces conditions les puissances consommée par R_L et fournie par E (penser à utiliser le schéma équivalent de Thévenin déterminé au préalable !).



Exercice 8.16

On demande d'établir le bilan de puissance du circuit de la figure ci-dessous sachant que $I_d = 4 \text{ A}$ et $I_g = 2 \text{ A}$.



$$\begin{aligned} R_1 &= 30 \Omega; & R_2 &= 10 \Omega; & R_3 &= 40 \Omega; & R_4 &= 10 \Omega; & R_5 &= \\ & & & & & 80 \Omega; & & R_6 &= 40 \Omega \\ E_1 &= 60 \text{ V}; & E_2 &= 20 \text{ V}; & J &= 10 \text{ A} \end{aligned}$$

\mathcal{R}_g est un circuit résistif linéaire et invariant comportant un certain nombre de sources indépendantes d'énergie. \mathcal{R}_d est un circuit résistif linéaire et invariant ne comportant pas de source indépendante d'énergie.

Suggestion : en vue de calculer l'état électrique complet du circuit, remplacer dans un premier temps le circuit à droite de AB par son schéma équivalent de Norton.

Exercice 8.17

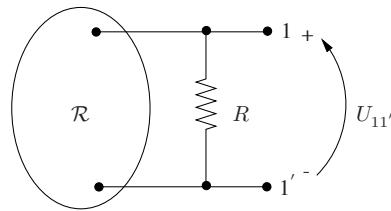
Le circuit \mathcal{R} de la figure ci-dessous est constitué d'éléments linéaires, invariants et passifs et comporte des sources indépendantes d'énergie, notamment les sources de tension E_1 et E_2 . Si $E_1 = 30 \text{ V}$ et $E_2 = 10 \text{ V}$, on relève $U_{11'} = 22 \text{ V}$. Si on double E_1 , $U_{11'}$ devient 35 V tandis que si on double E_2 , $U_{11'}$ devient 25 V.

On demande de calculer E_1 et E_2 pour que la résistance $R = 100 \Omega$ consomme une puissance de 4 W, la somme $E_1 + E_2$ devant valoir 30 V.

Réponse :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{Th} &= \begin{pmatrix} 21.65 \\ 13.01 \end{pmatrix}, \quad R_{Th} = \\ & \begin{pmatrix} 26.52 & 5.13 \\ 5.13 & 27.88 \end{pmatrix} \\ p_{R_L} &= 1.49 \text{ W}, p_E = -0.38 \text{ W} \end{aligned}$$

Réponse :
 $U_{\mathcal{R}_g} = 60 \text{ V}, U_{\mathcal{R}_d} = 200 \text{ V}, U_J = 523.2 \text{ V}$



Réponse :
 $E_1 = 37.5 \text{ V}$, $E_2 = -7.5 \text{ V}$

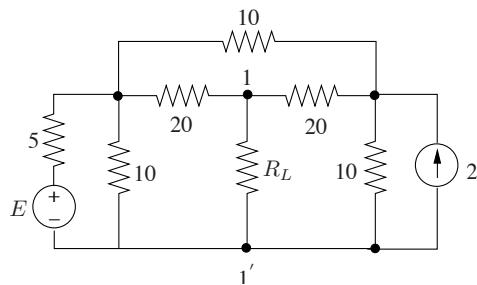
Exercice 8.18

Étant donné le circuit de la figure ci-dessous, on cherche à déterminer la valeur de E (positive) telle que le circuit fournisse une puissance égale à 20 W à la résistance de charge $R_L = 5 \Omega$ connectée à l'accès $11'$. Pour cela :

1. utiliser la méthode des mailles pour dériver le schéma équivalent de Thévenin vu de l'accès $11'$;
2. utiliser la méthode des noeuds pour dériver le schéma équivalent de Norton vu de l'accès $11'$.

Les paramètres de ces équivalents seront exprimés en fonction de E .

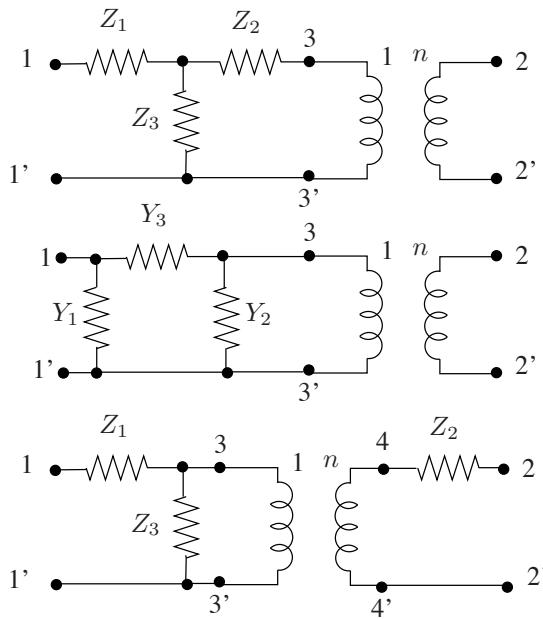
3. Montrer l'équivalence des deux approches ;
4. déduire d'un des deux équivalents la valeur de E cherchée.



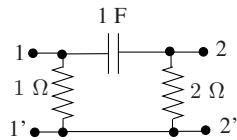
Réponse :
 $E = 65.7 \text{ V}$

Exercice 8.19 Quadripôles

Pour chacun des trois des quadripôles ci-dessous, déterminer une matrice de quadripôle qui le caractérise.

**Exercice 8.20 Quadripôles**

Déterminer la matrice d'admittances \mathbf{Y} du quadripôle suivant :



On ferme l'accès 22' sur la résistance de charge $R_L = 4 \Omega$. On demande de déterminer dans ce cas la réponse fréquentielle gain en tension

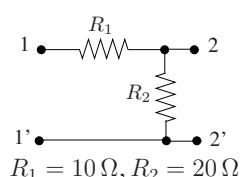
$$H(j\omega) = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1}$$

Quelles sont les fréquences naturelles du circuit ?

Exercice 8.21 Quadripôles

Réponse :
 $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1+j\omega & -j\omega \\ -j\omega & \frac{1}{2} + j\omega \end{pmatrix}$
 $H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \frac{3}{4}}$

Déterminer les valeurs des impédances images Z_{i1} , Z_{i2} et des impédances caractéristiques Z_{c1} et Z_{c2} du quadripôle suivant :



Réponse :
 $Z_{i1} = 17.3 \Omega$, $Z_{i2} = 11.5 \Omega$
 $Z_{c1} = 20 \Omega$, $Z_{c2} = 10 \Omega$

8.6 Solution des exercices

Solution de l'exercice 8.1

La méthode des noeuds consiste à écrire $n - 1$ PLK en $n - 1$ noeuds du circuit, un des noeuds étant choisi comme référence des tensions. On exprime donc ces relations en fonction des potentiels de noeuds \mathbf{V}_N :

$$\mathbf{I}_{sN} = \mathbf{G}_N \mathbf{V}_N$$

avec

1. \mathbf{G}_N : la matrice des conductances aux noeuds ;
2. \mathbf{I}_{sN} : le vecteur des courants injectés aux noeuds par les sources indépendantes de courant.

Le calcul de l'état électrique complet comporte ainsi les étapes suivantes.

1. Choisir un noeud de référence

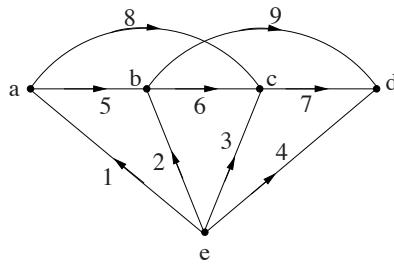
On choisit le noeud e.

2. Détermination de la matrice des conductances aux noeuds \mathbf{G}_N

Cette matrice est donnée par

$$\mathbf{G}_N = \mathbf{A} \mathbf{G}_B \mathbf{A}^T$$

avec \mathbf{A} la matrice d'incidence réduite du graphe orienté du circuit passifié représenté ci-dessous



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

\mathbf{G}_B est la matrice des conductances de branches :

$$\mathbf{G}_B = \text{diag}(2, 5, 4, 5, 3, 2, 10, 3, 7)$$

Le circuit ne comporte que des résistances linéaires et des sources indépendantes de courant. \mathbf{G}_N peut être déterminée directement par la règle d'inspection :

1. élément diagonal $G_{ii} =$ somme des conductances des branches incidentes au noeud i ;
2. élément non diagonal $ij =$ opposé de la conductance de la branche liant les noeuds i et j .

$$\mathbf{G}_N = \begin{pmatrix} 2+3+3 & -3 & -3 & 0 \\ -3 & 3+5+2+7 & -2 & -7 \\ -3 & -2 & 2+4+10+3 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & 10+7+5 \end{pmatrix} \text{ S.}$$

On remarque que \mathbf{G}_N est symétrique puisque le circuit ne comporte que des conductances linéaires et des sources indépendantes d'énergie.

3. Détermination du vecteur des courants de noeuds \mathbf{I}_{sN}

L'élément relatif au noeud i est la somme des courants injectés à ce noeud par les sources indépendantes.

$$\mathbf{I}_{sN} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2.5 \\ 1+3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Calcul des potentiels de noeuds

De la relation $\mathbf{I}_{sN} = \mathbf{G}_N \mathbf{V}_N$, on déduit :

$$\mathbf{V}_N = \mathbf{G}_N^{-1} \mathbf{I}_{sN} = \begin{pmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.112 \\ 0.306 \\ 0.395 \\ 0.322 \end{pmatrix} \text{ V.}$$

V_a, V_b, V_c, V_d sont les potentiels des différents noeuds du circuit par rapport au noeud de référence e.

5. Tensions et courants de branches

Les tensions de branches se déduisent des SLK

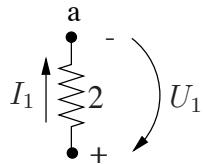
$$\mathbf{U}_B = \mathbf{A}^T \mathbf{V}_N.$$

Les courants de branches se déduisent de la loi d'Ohm écrite pour chaque branche

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{G}_B \mathbf{U}_B.$$

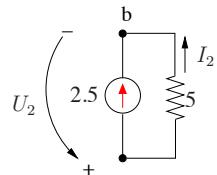
Tensions de branches

• branche 1



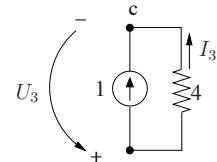
$$\begin{aligned} U_1 &= -V_a \\ &= 0.112 \text{ V} \end{aligned} \quad \begin{aligned} I_1 &= 2U_1 \\ &= 0.224 \text{ A} \end{aligned}$$

• branche 2



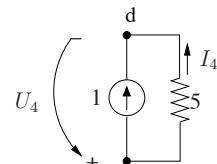
$$\begin{aligned} U_2 &= -V_b \\ &= -0.306 \text{ V} \end{aligned} \quad \begin{aligned} I_2 &= 5U_2 \\ &= -1.53 \text{ A} \end{aligned}$$

• branche 3



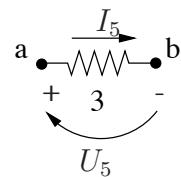
$$\begin{aligned} U_3 &= -V_c \\ &= -0.395 \text{ V} \end{aligned} \quad \begin{aligned} I_3 &= 4U_3 \\ &= -1.58 \text{ A} \end{aligned}$$

• branche 4



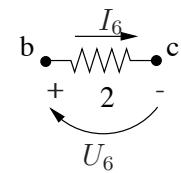
$$\begin{aligned} U_4 &= -V_d \\ &= -0.322 \text{ V} \end{aligned} \quad \begin{aligned} I_4 &= 5U_4 \\ &= -1.61 \text{ A} \end{aligned}$$

• branche 5



$$\begin{aligned} U_5 &= V_a - V_b \\ &= -0.418 \text{ V} \end{aligned} \quad \begin{aligned} I_5 &= 3U_5 \\ &= -1.254 \text{ A} \end{aligned}$$

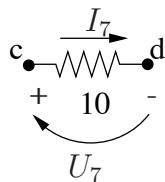
• branche 6



$$\begin{aligned} U_6 &= V_b - V_c \\ &= -0.089 \text{ V} \end{aligned} \quad \begin{aligned} I_6 &= 2U_6 \\ &= -0.178 \text{ A} \end{aligned}$$

Courants de branches

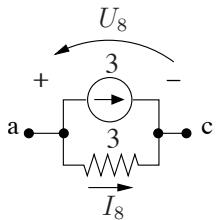
- branche 7



$$\begin{aligned} U_7 &= V_c - V_d \\ &= 0.073 \text{ V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_7 &= 10U_7 \\ &= 0.73 \text{ A} \end{aligned}$$

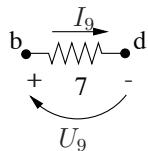
- branche 8



$$\begin{aligned} U_8 &= V_a - V_c \\ &= -0.507 \text{ V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_8 &= 3U_8 \\ &= -1.521 \text{ A} \end{aligned}$$

- branche 9



$$\begin{aligned} U_9 &= V_b - V_d \\ &= -0.016 \text{ V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_9 &= 7U_9 \\ &= -0.112 \text{ A} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 8.2

Remarquons que ce circuit est équivalent à celui de l'exercice 1.18 si toutes les branches sources de tension sont remplacées par des branches sources de courant.

La méthode des mailles consiste à écrire $b - (n - 1)$ SLK pour un ensemble de mailles fondamentales et à exprimer ces équations en fonction des courants de mailles \mathbf{I}_M . Ces relations s'écrivent :

$$\mathbf{V}_{sM} = \mathbf{R}_M \mathbf{I}_M$$

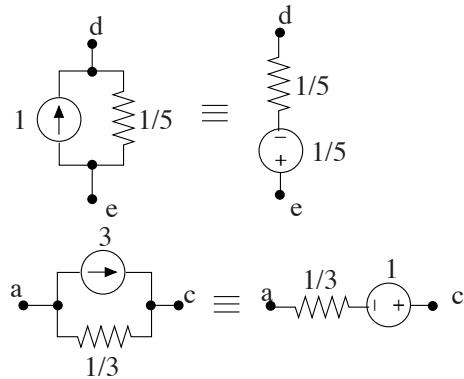
avec :

1. \mathbf{R}_M : la matrice des résistances de mailles
2. \mathbf{V}_{sM} : le vecteur des f.e.m. de mailles imposées par les sources indépendantes de tension.

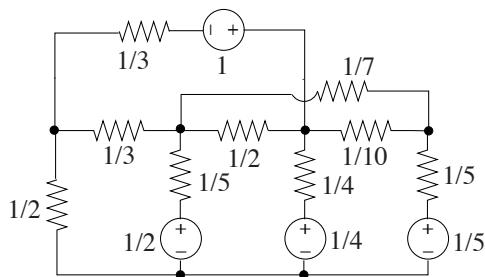
Le calcul de l'état électrique complet comporte ainsi les étapes suivantes.

1. Transformer les branches contenant une source indépendante de courant.

Par simple équivalence de source de courant - source de tension, on transforme les branches de et ac comme indiqué ci-dessous :

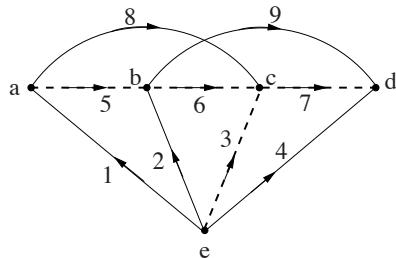


Le circuit complet se transforme en :

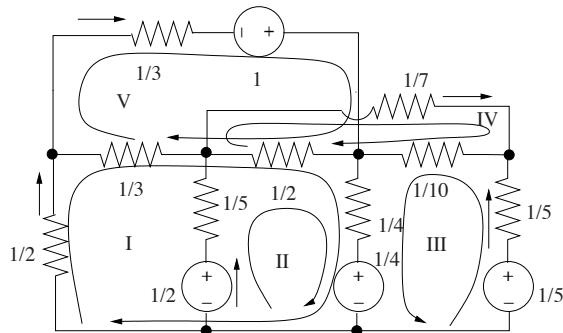


2. Choisir un arbre et définir les mailles fondamentales correspondantes.

Le graphe du circuit est représenté par :



Le graphe orienté du circuit comporte 5 noeuds et 9 branches. Il y a $b - (n - 1) = 9 - (5 - 1) = 5$ mailles fondamentales. On choisit par exemple l'arbre “3-5-6-7” représenté en traits discontinus sur la figure ci-dessous. Les maillons sont les branches 1,2,4,8 et 9. Chaque maille fondamentale, constituée d'un maillon et de branches de l'arbre, est orientée selon le sens de référence adopté dans le maillon.



3. Détermination de la matrice des résistances de mailles.

Cette matrice est donnée par

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{B} \mathbf{R}_B \mathbf{B}^T$$

avec \mathbf{B} la matrice des mailles fondamentales qui s'écrit :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

\mathbf{R}_B est la matrice des résistances de branches :

$$\mathbf{R}_B = \text{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}\right)$$

Le circuit ne comporte que des résistances linéaires et des sources indépendantes. \mathbf{R}_M peut être directement déterminée par la règle d'inspection :

1. élément diagonal R_{ii} = somme des résistances des branches de la maille i ;
2. élément non-diagonal R_{ij} = somme des résistances des branches communes aux mailles i et j , prises avec le signe + si les sens de parcours des deux mailles coïncident, avec le signe - dans le cas contraire .

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_M &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} & \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.5833 & 0.75 & 0.25 & 0.5 & -0.8333 \\ 0.75 & 0.05 & 0.25 & -0.5 & -0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0.55 & 0.1 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0.1 & 0.743 & 0.5 \\ -0.8333 & -0.5 & 0 & 0.5 & 1.1667 \end{pmatrix} \Omega. \end{aligned}$$

Remarquons que cette matrice est symétrique puisque le circuit ne comporte que des résistances linéaires et des sources indépendantes d'énergie.

4. Détermination du vecteur des f.e.m. de mailles

L'élément relatif à la maille i est donné par la somme des f.e.m. imposées dans cette maille par les sources indépendantes comptées positivement si le sens de la d.d.p. de la source coïncide avec le sens de parcours de la maille et négativement sinon.

$$\mathbf{V}_{sM} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.25 \\ 0.25 \\ -0.05 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ V.}$$

5. Calcul des courants de mailles

Les courants de mailles sont les courants dans les maillons 1,2,4,8,9.

De la relation $\mathbf{V}_{sM} = \mathbf{R}_M \mathbf{I}_M$, on déduit :

$$\mathbf{I}_M = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_4 \\ I_9 \\ I_8 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_M^{-1} \mathbf{V}_{sM} = \begin{pmatrix} 0.2239 \\ 0.9675 \\ -0.6122 \\ -0.1114 \\ 1.4794 \end{pmatrix} \text{ A.}$$

6. Courants de branches

Les courants dans les branches restantes (les branches de l'arbre) se déduisent des PLK

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{B}^T \mathbf{I}_M.$$

$$I_3 = -I_4 - I_2 - I_1 = -0.5792 \text{ A}$$

$$I_5 = I_1 - I_8 = -1.2555 \text{ A}$$

$$I_6 = I_1 + I_2 - I_8 - I_9 = -0.1766 \text{ A}$$

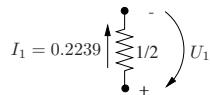
$$I_7 = -I_4 - I_9 = 0.7236 \text{ A}$$

7. Tensions de branches

Elles se déduisent de la loi d'Ohm et des lois de Kirchhoff.

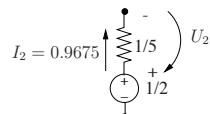
Courants de branches	Tensions de branches
----------------------	----------------------

- branche 1 :



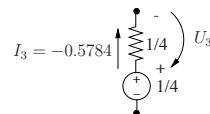
$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{0.2239}{2} \\ &= 0.112 \text{ V} \end{aligned}$$

- branche 2 :



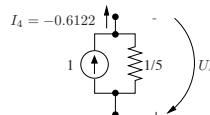
$$\begin{aligned} U_2 &= 0.2 \cdot 0.9675 \\ &= 0.1935 \text{ V} \end{aligned}$$

- branche 3 :



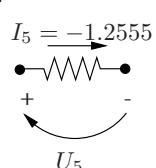
$$\begin{aligned} U_3 &= 0.25 \cdot (-0.5792) \\ &= -0.1448 \text{ V} \end{aligned}$$

- branche 4 :



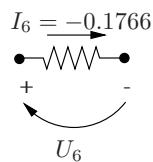
$$\begin{aligned} U_4 &= -0.2 \cdot (1 + 0.6122) \\ &= -0.3224 \text{ V} \end{aligned}$$

- branche 5 :



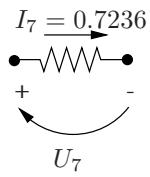
$$\begin{aligned} U_5 &= -0.3333 \cdot 1.2555 \\ &= -0.4185 \text{ V} \end{aligned}$$

- branche 6 :



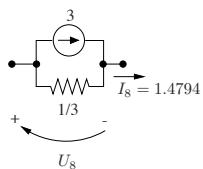
$$\begin{aligned} U_6 &= -0.5 \cdot 0.1766 \\ &= -0.0883 \text{ V} \end{aligned}$$

- branche 7 :



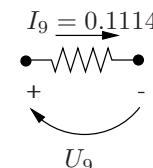
$$\begin{aligned} U_7 &= 0.1 \cdot 0.7236 \\ &= 0.0724 \text{ V} \end{aligned}$$

- branche 8 :



$$\begin{aligned} U_8 &= 0.333 \cdot (1.4794 - 3) \\ &= -0.5069 \text{ V} \end{aligned}$$

- branche 9 :

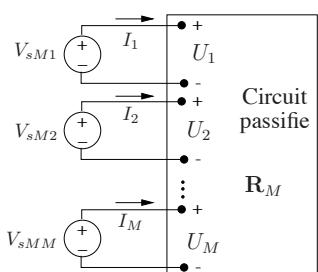


$$\begin{aligned} U_9 &= \frac{-0.1114}{7} \\ &= -0.0159 \text{ V} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 8.3

1. Réduction de la matrice de résistances de mailles \mathbf{R}_M - Elimination d'accès

Selon la méthode des mailles, un circuit est vu comme un circuit passifé à M accès auquel sont connectées les sources indépendantes de tension :



On peut écrire

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}_M \mathbf{I}$$

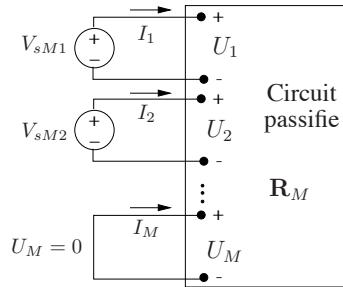
ou

$$\mathbf{V}_{sM} = \mathbf{R}_M \mathbf{I}$$

Le circuit passifé est caractérisé par la matrice de résistances des mailles \mathbf{R}_M .

Il y a un accès dans chaque maillon.

Si certains accès sont dépourvus de source indépendante :



on a, pour ces accès, $U = 0$ (accès M ici).

Si l'on élimine l'accès auquel aucune source n'agit, c'est-à-dire si l'on élimine la variable I_M , le circuit sera caractérisé par une matrice de résistances de mailles réduite \mathbf{R}_{red} . Cette matrice s'obtient de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_{sM_1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{M_{11}} & \mathbf{R}_{M_{12}} \\ \mathbf{R}_{M_{21}} & R_{M_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{M_1} \\ I_{M_2} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$(2)$$

La matrice \mathbf{R}_M est partitionnée selon quatre sous-matrices. Les accès conservés sont repérés par l'indice 1, l'accès M est l'accès éliminé repéré par l'indice 2.

La dernière relation (2) fournit

$$I_{M_2} = -R_{M_{22}}^{-1} \mathbf{R}_{M_{21}} \mathbf{I}_{M_1} \quad (3)$$

Remplaçant dans (1), on trouve :

$$\mathbf{V}_{sM_1} = \left(\mathbf{R}_{M_{11}} - \mathbf{R}_{M_{12}} R_{M_{22}}^{-1} \mathbf{R}_{M_{21}} \right) \mathbf{I}_{M_1},$$

relation cherchée et

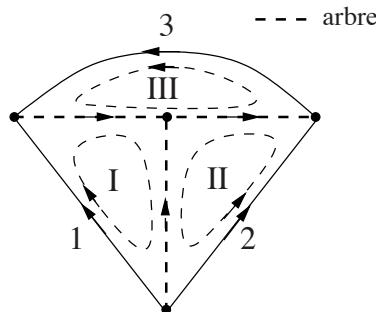
$$\mathbf{R}_{\text{red}} = \mathbf{R}_{M_{11}} - \mathbf{R}_{M_{12}} R_{M_{22}}^{-1} \mathbf{R}_{M_{21}}.$$

On a considéré ici l'élimination d'un seul accès mais la procédure peut être généralisée à plusieurs accès.

2. Mise en équation du circuit via la méthode des mailles

A. Graphe et choix de l'arbre

L'arbre est choisi de façon à ce que les maillons correspondent aux accès intéressants, en particulier les accès relatifs aux branches 1 et 2 où se trouvent les sources indépendantes d'énergie :



B. Matrice de résistances de mailles

De la règle d'inspection, on déduit la matrice de résistances des mailles :

$$\mathbf{R}_M = \left(\begin{array}{cc|c} 8 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & -4 \\ \hline 4 & -4 & 10 \end{array} \right) \Omega.$$

Le vecteur des f.e.m. de mailles est donné par :

$$\mathbf{V}_{sM} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} V.$$

3. Elimination de l'accès relatif à la maille III

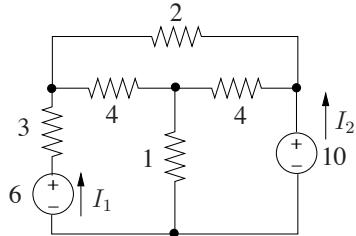
Il n'y a pas de source indépendante agissant dans la maille III. Son élimination conduit à la matrice réduite

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\text{red}} &= \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \frac{1}{10} (4 \ -4) \\ &= \begin{pmatrix} 6.4 & 2.6 \\ 2.6 & 3.4 \end{pmatrix} \Omega \end{aligned}$$

On a donc, vu des deux accès 11' et 22', la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{\text{red}} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Le schéma équivalent correspondant est représenté par



On déduit

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{\text{red}}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.373 \\ 3.227 \end{pmatrix} A.$$

Le courant de la maille III, I_3 peut être déterminé à partir de I_1, I_2 via la relation (3). On trouve :

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{1}{10} (4 \ -4) \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = -0.4 I_1 + 1.4 I_2 \\ &= 1.436 A. \end{aligned}$$

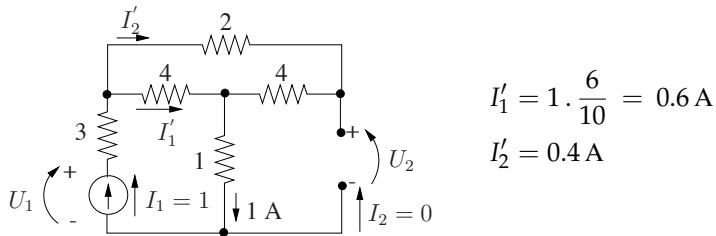
La connaissance des courants I_1, I_2, I_3 permet de déduire l'état électrique complet du réseau.

4. Détermination de \mathbf{R}_{red} par expérimentation

La matrice \mathbf{R}_{red} ne peut jamais être déterminée par inspection. Par contre, elle peut être déterminée par expérimentation :

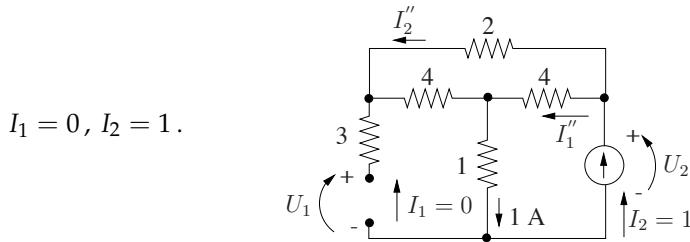
1. élément diagonal : $R_{ii} = U_i|_{I_i=1, I_j=0, j \neq i}$

2. élément non-diagonal $R_{ij} = U_i|_{I_j=1, I_k=0, k \neq j}$
 3. les éléments R_{11} et R_{21} sont déterminés selon les conditions de la figure ci-dessous : $I_1 = 1$, $I_2 = 0$.



$$\begin{aligned} R_{11} &= U_1|_{I_1=1, I_2=0} & R_{21} &= U_2|_{I_1=1, I_2=0} \\ &= 1 + 4I'_1 + 3 & &= 1 + 4I'_2 \\ &= 6.4 \Omega & &= 2.6 \Omega \end{aligned}$$

4. les éléments R_{12} et R_{22} sont déterminés selon les conditions de la figure ci-dessous :



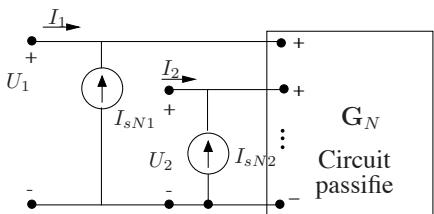
$$\begin{aligned} I''_1 &= 1 \cdot \frac{6}{10} = 0.6 \text{ A} \\ I''_2 &= 0.4 \text{ A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{12} &= U_1|_{I_2=1, I_1=0} & R_{22} &= U_2|_{I_2=1, I_1=0} \\ &= 1 + 4I''_2 & &= 1 + 4I''_1 \\ &= 2.6 \Omega & &= 3.4 \Omega \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 8.4

1. Schéma équivalent de Norton et méthode des noeuds

Selon la méthode des noeuds, comme indiqué à la figure ci-dessous, un circuit est équivalent à un circuit passif vu de $N = n - 1$ accès, représenté par la matrice de conductances aux noeuds \mathbf{G}_N ; à chaque accès agit une source indépendante de courant représentant les courants injectés à cet accès par les sources indépendantes de courant présentes dans le circuit.



$$\mathbf{I} = -\mathbf{I}_{sN} + \mathbf{G}_N \mathbf{U} \quad (1)$$

où $\mathbf{U} = \mathbf{V}_N$, les potentiels de noeuds

Chaque accès est défini entre un noeud et le noeud de référence.

Lorsque l'on ne s'intéresse qu'à un nombre réduit d'accès ($< N$), on peut éliminer les accès non intéressants. Soient :

1. a : les accès intéressants ;

2. b : les accès non intéressants.

On a : $\mathbf{I}_b = \mathbf{0}$ et en partitionnant (1), on écrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_a \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{s_a} \\ \mathbf{I}_{s_b} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{a,a} & \mathbf{G}_{a,b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_b \end{pmatrix} \quad (2)$$

De (3), on tire :

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{G}_{b,b}^{-1} \mathbf{I}_{s_b} - \mathbf{G}_{b,b}^{-1} \mathbf{G}_{b,a} \mathbf{U}_a$$

et remplaçant dans (2), on obtient :

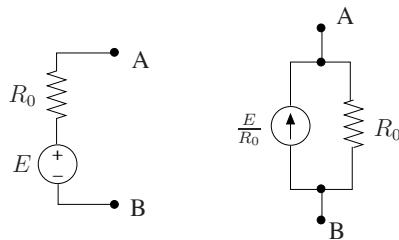
$$\mathbf{I}_a = \left(-\mathbf{I}_{s_a} + \mathbf{G}_{a,b} \mathbf{G}_{b,b}^{-1} \mathbf{I}_{s_b} \right) + \left(\mathbf{G}_{a,a} - \mathbf{G}_{a,b} \mathbf{G}_{b,b}^{-1} \mathbf{G}_{b,a} \right) \mathbf{U}_a.$$

On déduit les paramètres du schéma équivalent de Norton vu des a accès :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{No} &= \mathbf{I}_{s_a} - \mathbf{G}_{a,b} \mathbf{G}_{b,b}^{-1} \mathbf{I}_{s_b} \\ \mathbf{G}_{No} &= \mathbf{G}_{a,a} - \mathbf{G}_{a,b} \mathbf{G}_{b,b}^{-1} \mathbf{G}_{b,a} \end{aligned}$$

2. Application de la méthode des noeuds

A. Transformation de la branche contenant une source indépendante de tension



B. Choix du noeud de référence

Le circuit comporte 3 noeuds : les noeuds 1 (= C), 2 (= A) et 1' (= B). Choissons le noeud 1' comme noeud de référence.

Le circuit comporte 2 accès :

1. l'accès 11'
2. un deuxième accès entre le noeud A et le noeud 1'.

C. Détermination de la matrice \mathbf{G}_N

Le circuit comporte une source commandée de type CVT. \mathbf{G}_N ne peut être entièrement déterminée par la règle d'inspection.

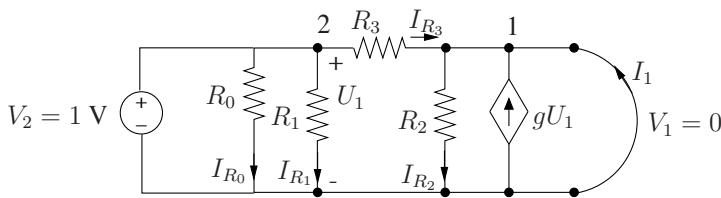
L'élément (1,2) de la matrice doit être déterminé par expérimentation. En effet, le CVT agit au noeud 1 et contribue donc uniquement à la PLK à ce noeud. Il impose un courant fonction de la tension U_1 qui, vu le choix du noeud de référence, représente le potentiel du noeud 2, c'est-à-dire la tension à l'accès 2.

La règle d'inspection fournit les éléments (1,1), (2,2) et (2,1) :

$$\mathbf{G}_N = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & x \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \end{pmatrix}$$

La règle d'expérimentation, illustrée à la figure ci-dessous, fournit :

$$G_{12} = I_1|_{V_2=1, V_1=0}$$



$$U_1 = V_2 = 1V$$

$$I_{R_2} = 0 \quad (\text{tension nulle aux bornes de } R_2)$$

$$I_{R_3} = \frac{1}{R_3}$$

$$I_1 = -R_3 - gU_1 = -\frac{1}{R_3} - g$$

$$G_{12} = -\frac{1}{R_3} - g$$

Finalement :

$$\mathbf{G}_N = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} - g \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \end{pmatrix} S.$$

D. Vecteur des courants injectés aux noeuds

$$\mathbf{I}_{sN} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E}{R_0} \end{pmatrix} A.$$

Seules les sources *indépendantes* doivent être prises en compte !

3. Elimination de l'accès 2

On cherche le schéma équivalent de Norton vu de l'accès 1'. On élimine l'accès 2 et on dérive successivement :

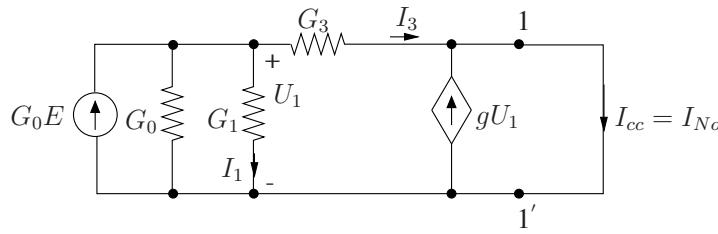
$$\left(\frac{0}{G_0 E} \right) = \left(\begin{array}{c|c} G_2 + G_3 & -g - G_3 \\ -G_3 & G_0 + G_1 + G_3 \end{array} \right) \left(\frac{V_1}{V_2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 I_{N_0} &= 0 - (-g - G_3) \cdot \frac{1}{G_0 + G_1 + G_3} \cdot G_0 E \\
 &= \frac{g + G_3}{G_0 + G_1 + G_3} \cdot G_0 E = 0.019 E \text{ A} \\
 G_{N_0} &= G_2 + G_3 - (-g - G_3) \frac{1}{G_0 + G_1 + G_3} (-G_3) \\
 &= G_2 + G_3 - \frac{(g + G_3) G_3}{G_0 + G_1 + G_2} \\
 &= \frac{G_2 G_0 + G_2 G_1 + G_2 G_3 + G_3 G_0 + G_3 G_1 - g G_3}{G_0 + G_1 + G_3} \\
 &= 7.17 10^{-3} \text{ S.}
 \end{aligned}$$

4. Détermination directe de I_{N_0} et G_{N_0}

Etant donné la présence de la source commandée, il n'est pas possible de procéder par simples réductions successives du circuit. La partie à gauche de la source commandée ne peut pas être réduite.

I_{N_0} est donné par le courant parcourant l'accès court-circuité. Le circuit court-circuité peut se mettre sous la forme de la figure ci-dessous.



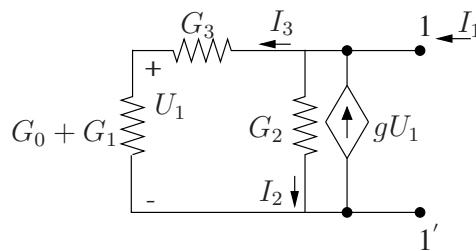
Par application de la règle du diviseur de courant, on trouve :

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \frac{G_3}{G_0 + G_1 + G_3} G_0 E \\
 I_1 &= \frac{G_1}{G_0 + G_1 + G_3} G_0 E \\
 \text{et dès lors } U_1 &= \frac{I_1}{G_1} = \frac{G_0 E}{G_0 + G_1 + G_3}
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
 I_{N_0} &= I_{cc} = I_3 + gU_1 \\
 &= \frac{G_3 + g}{G_0 + G_1 + G_3} G_0 E
 \end{aligned}$$

G_{N_0} est la conductance équivalente vue de l'accès du circuit passifié. Le circuit passifié est représenté à la figure ci-dessous.



On dérive :

$$\begin{aligned} G_{No} &= \frac{I_1}{V_1} = I_1|_{V_1=1} \text{ V} \\ I_1 &= I_2 + I_3 - gU_1 = G_2 + \frac{(G_0 + G_1)G_3}{G_0 + G_1 + G_3} - gU_1 \\ \text{avec } U_1 &= \frac{I_3}{G_0 + G_1} = \frac{G_3}{G_0 + G_1 + G_3} \end{aligned}$$

Finalement :

$$G_{No} = \frac{G_2G_0 + G_2G_1 + G_2G_3 + G_0G_3 + G_1G_3 - gG_3}{G_0 + G_1 + G_3}.$$

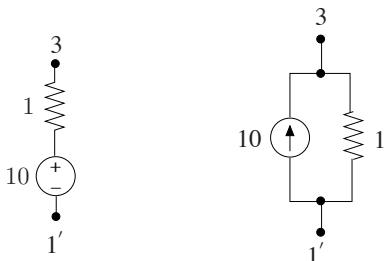
Solution de l'exercice 8.5

Procédure :

1. mettre le circuit en équations via la méthode des noeuds. Il y a 3 noeuds plus le noeud de référence et donc 3 accès ;
2. élimination de l'accès inintéressant 31' et dérivation du schéma équivalent de Norton.

1. Application de la méthode des noeuds

Transformons tout d'abord la branche contenant la source de tension :



La matrice \mathbf{G}_N , dérivée par la règle d'inspection, s'écrit :

$$\mathbf{G}_N = \left(\begin{array}{cc|c} 8 & -5 & -2 \\ -5 & 11 & -4 \\ -2 & -4 & 7 \end{array} \right) \text{ S.}$$

Le vecteur des courants de noeuds est donné par :

$$\mathbf{I}_{sN} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline 10 \end{pmatrix} \text{ A.}$$

2. Élimination de l'accès 31'

Partitionnant les matrices, on dérive directement

$$\mathbf{I}_{No} = 0 - \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7} \cdot 10 = \begin{pmatrix} \frac{20}{7} \\ \frac{40}{7} \end{pmatrix} \text{ A}$$

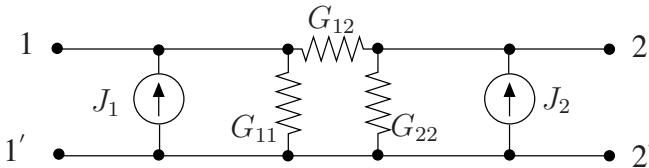
et

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{No} &= \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \frac{1}{7} (-2 \quad -4) \\ &= \begin{pmatrix} 7.43 & -6.14 \\ -6.14 & 8.71 \end{pmatrix} \text{ S}.\end{aligned}$$

3. Schéma équivalent

Le circuit peut être représenté par le schéma équivalent de la figure ci-dessous avec :

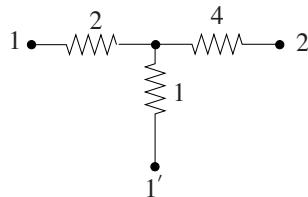
$$\begin{aligned}G_{12} &= 6.14 \text{ S} & J_1 &= \frac{20}{7} \text{ A} \\ G_{11} &= 7.43 - 6.14 = 1.29 \text{ S} & J_2 &= \frac{40}{7} \text{ A} \\ G_{22} &= 8.71 - 6.14 = 2.57 \text{ S}.\end{aligned}$$



4. Détermination de \mathbf{G}_{No} par transfiguration

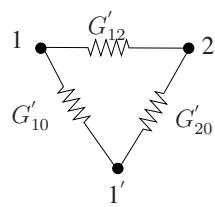
La détermination du schéma équivalent de Norton revient ici à éliminer le noeud 3. On ne peut pas directement appliquer la méthode de la transfiguration pour transformer le circuit car il y a une source indépendante d'énergie qui agit au centre de l'étoile. On peut par contre l'utiliser pour rechercher la matrice \mathbf{G}_{No} car pour cela il faut passifier le circuit.

Ainsi, l'étoile



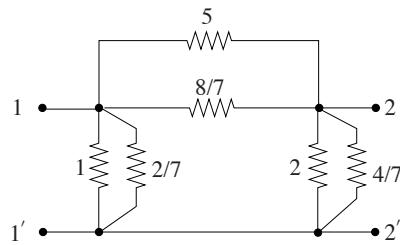
devient après transformation

avec



$$\begin{aligned}G'_{12} &= \frac{2.4}{1+2+4} = \frac{8}{7} \text{ S} \\ G'_{10} &= \frac{2.1}{1+2+4} = \frac{2}{7} \text{ S} \\ G'_{20} &= \frac{4.1}{1+2+4} = \frac{4}{7} \text{ S}.\end{aligned}$$

Le circuit passifié se simplifie comme indiqué à la figure ci-dessous.



On dérive :

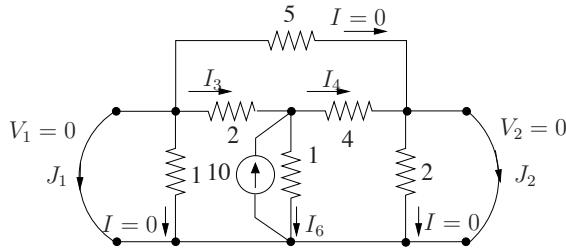
$$\mathbf{G}_{No} = \begin{pmatrix} 6 + \frac{10}{7} & -5 - \frac{8}{7} \\ -5 - \frac{8}{7} & 7 + \frac{12}{7} \end{pmatrix}$$

5. Détermination de \mathbf{I}_{No} par des essais en court-circuit

Les courants de Norton J_1 et J_2 correspondent aux courants parcourant les accès lorsque ceux-ci sont simultanément court-circuités.

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} + \mathbf{G}_{No} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

et $\mathbf{I}_{No} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \Big|_{V_1=V_2=0}$



Des courants définis à la figure ci-dessus, on déduit :

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{-2}{2+1+4} \cdot 10 = -\frac{20}{7} \text{ A} \quad \text{et} \quad J_1 = -I_3 = \frac{20}{7} \text{ A} \\ I_4 &= \frac{4}{2+1+4} \cdot 10 = -\frac{40}{7} \text{ A} \quad \text{et} \quad J_2 = -I_4 = \frac{40}{7} \text{ A} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 8.6

1. Choix de la méthode

On recherche R_{18} et R_{13} .

A. Méthode des mailles

$$b - (n - 1) = 12 - 7 + 1 = 6$$

Il faut ajouter une branche correspondant à l'accès considéré (13 ou 18).

Il faut donc construire :

1. pour la recherche de R_{18} , une matrice \mathbf{R}_M de dimension 6x6 et réduire cette matrice à l'accès 18;
2. pour la recherche de R_{13} , une nouvelle matrice \mathbf{R}_M de dimension 6x6 et réduire cette matrice à l'accès 13.

Les deux matrices \mathbf{R}_M sont différentes puisque le graphe du circuit considéré est différent :

1. pour la recherche de R_{18} , on ajoute une branche correspondant à l'accès entre les noeuds 1 et 8 ;
2. pour la recherche de R_{13} , on ajoute une branche correspondant à l'accès entre les noeuds 1 et 3.

B. Méthode des noeuds

$$n - 1 = 7$$

1. Recherche de R_{18} : choisir 8 comme noeud de référence (ou 1) et réduire la matrice \mathbf{G}_N (7×7) à l'accès formé par le noeud 1 et le noeud 8.
2. Recherche de R_{13} :

- (a) si 1 est le noeud de référence, réduire \mathbf{G}_N à l'accès formé par le noeud 1 et le noeud 3 ;

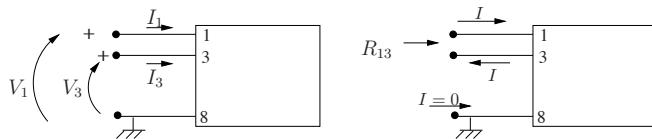
- (b) si 8 est le noeud de référence, réduire \mathbf{G}_N aux 2 accès $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

On a

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{13} \\ G_{31} & G_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

I_1 et I_3 sont les courants aux accès 1 et 3 ;

V_1 et V_3 sont les potentiels des noeuds 1 et 3 par rapport au noeud de référence.



On a

$$R_{13} = \frac{V_1 - V_3}{I} \quad \text{avec } I = I_1 = -I_3$$

Soit $I = 1$ A, alors R_{13} est donné par

$$R_{13} = V_1 - V_3$$

avec V_1, V_3 solutions de

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{13} \\ G_{31} & G_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Méthode des noeuds

On choisit la méthode des noeuds. Elle présente l'avantage de ne devoir construire qu'une seule matrice \mathbf{G}_N pour déterminer les deux résistances demandées.

Nous allons réduire la matrice \mathbf{G}_N par étapes successives en éliminant à chaque fois un seul accès à la fois.

On montre que chaque étape est équivalente à une transfiguration étoile
 \Leftrightarrow triangle qui élimine le noeud correspondant à l'accès éliminé.

A. Matrice \mathbf{G}_N complète

$$\mathbf{G}_N = \begin{array}{c|ccccccc} \text{Noeud} & 1 & 3 & 6 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ \hline 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 7 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}$$

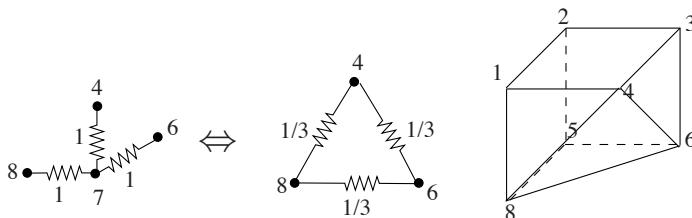
B. Elimination du noeud 7

La matrice \mathbf{G}_N réduite à 6 accès s'écrit :

$$\begin{array}{c|cccccc} \text{Noeud} & 1 & 3 & 6 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & \mathbf{2.67} & 0 & \mathbf{-0.33} & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -1 & \mathbf{-0.33} & 0 & \mathbf{2.67} & 0 \\ \hline 5 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array}$$

On remarque que seuls les éléments G_{66} , G_{64} , G_{46} et G_{44} sont modifiés.

Cette réduction correspond à la transformation étoile-triangle de la figure ci-dessous qui élimine le noeud 7.

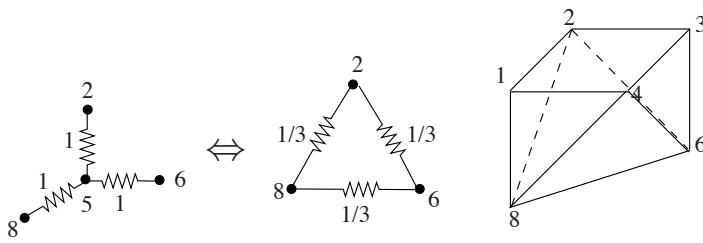


C. Elimination du noeud 5

Matrice \mathbf{G}_N réduite à 5 accès : seuls les éléments G_{22} , G_{66} , G_{26} et G_{62} sont modifiés.

$$\begin{array}{c|ccccc} \text{Noeud} & 1 & 3 & 6 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & \mathbf{2.33} & \mathbf{-0.33} & -0.33 \\ 2 & -1 & -1 & \mathbf{-0.33} & \mathbf{2.67} & 0 \\ 4 & -1 & -1 & -0.33 & 0 & 2.67 \end{array}$$

Cette réduction correspond à la transformation étoile-triangle de la figure ci-dessous qui élimine le noeud 5.



D. Elimination du noeud 4

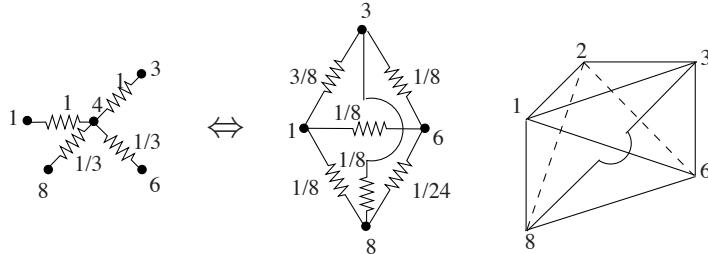
Matrice \mathbf{G}_N réduite à 4 accès : seuls les éléments $G_{11}, G_{66}, G_{33}, G_{13}, G_{16}, G_{36}, G_{31}, G_{61}$ et G_{63} sont modifiés.

$$\text{Noeud} \quad \begin{array}{cccc|c} & 1 & 3 & 6 & 2 \\ \hline 1 & \mathbf{2.63} & -0.38 & -0.13 & -1 \\ 3 & -0.38 & \mathbf{2.63} & -1.13 & -1 \\ 6 & -0.13 & -1.13 & \mathbf{2.29} & -0.33 \\ 2 & -1 & -1 & -0.33 & 2.67 \end{array}$$

L'élimination du noeud 4 résulte d'une transformation étoile \leftrightarrow triangle généralisée à une étoile à 4 branches. Chaque G_{ij} du circuit équivalent, liant les noeuds i et j , est donné par

$$G_{ij} = \frac{G_i G_j}{\sum_i G_i}$$

Cette transformation est illustrée à la figure ci-dessous.

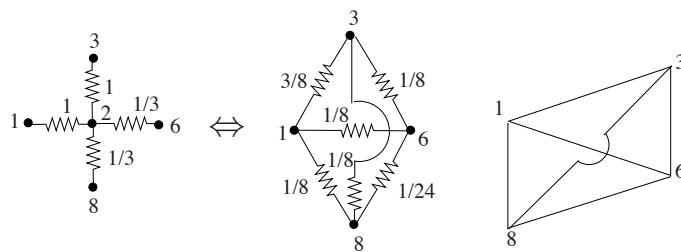


E. Elimination du noeud 2

Matrice \mathbf{G}_N réduite à 3 accès : tous les éléments sont modifiés.

$$\text{Noeud} \quad \begin{array}{ccc|c} & 1 & 3 & 6 \\ \hline 1 & \mathbf{2.25} & -0.75 & -0.25 \\ 3 & -0.75 & \mathbf{2.25} & -1.25 \\ 6 & -0.25 & -1.25 & \mathbf{2.25} \end{array}$$

L'élimination est illustrée à la figure ci-dessous.

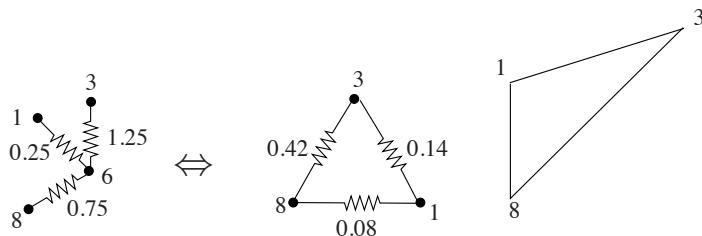


F. Elimination du noeud 6

On obtient la matrice \mathbf{G}_N réduite aux 2 accès 18 et 38.

$$\mathbf{G}_{\text{red}} = \begin{array}{c|cc} \text{Noeud} & 1 & 3 \\ \hline 1 & 2.22 & -0.89 \\ 3 & -0.89 & 1.56 \end{array}$$

L'élimination du noeud 6 est illustrée à la figure ci-dessous.



On déduit :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_3 \end{pmatrix} = \mathbf{G}_{\text{red}}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} V_1 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

et $R_{13} = V_1 - V_3 = 0.75 \Omega$.

G. Elimination du noeud 3

Il reste la résistance équivalente vue de l'accès 18 :

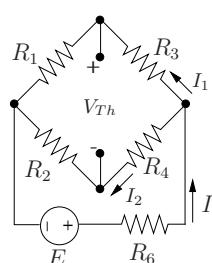
$$G_{18} = 2.22 - \frac{0.89^2}{1.56} = 1.71 \text{ S} \quad , \quad R_{18} = 0.58 \Omega$$

Solution de l'exercice 8.7

Nous allons tout d'abord déterminer le schéma équivalent de Thévenin du circuit vu du détecteur R_5 . Il faut distinguer deux cas selon que l'on recherche $\frac{V_5}{E}$ ou $\frac{V_5}{I}$

A. Recherche de $\frac{V_5}{E}$ 1. F.e.m. de Thévenin V_{Th_E}

V_{Th_E} est la tension apparaissant à vide à l'accès CD comme représenté ci-dessous :



On dérive l'expression de V_{Th_E} en fonction de I :

$$\begin{aligned} I_1 &= I \cdot \frac{R_2 + R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \\ I_2 &= I \cdot \frac{R_1 + R_3}{R_2 + R_3 + R_4 + R_1} \\ V_{Th_E} &= R_4 I_2 - R_3 I_1 \\ &= \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \cdot I \end{aligned}$$

Recherchons à présent l'expression de V_{Th_E} en fonction de E . On a :

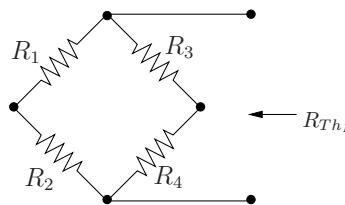
$$\begin{aligned} (R_2 + R_4) \cdot I_2 + R_6 I &= E \\ \left(\frac{R_2 + R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} + R_6 \right) \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{R_1 R_4 - R_2 R_3} V_{Th} &= E \\ V_{Th_E} &= E \cdot \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_2 + R_4)(R_1 + R_3) + \left(\sum_{i=1}^4 R_i \right) R_6} \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $R_6 = 0$, V_{Th_E} se réduit à :

$$V_{Th_E} = E \cdot \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_2 + R_4)(R_1 + R_3)}$$

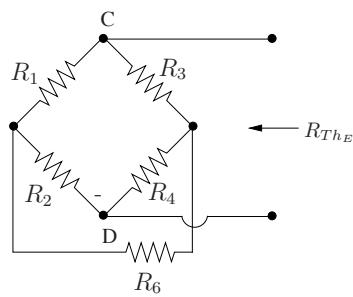
2. Résistance équivalente de Thévenin R_{Th_E}

Considérons le circuit passifié représenté ci-dessous :



Nous allons rechercher sa résistance équivalente en appliquant la méthode des mailles et réduisant la matrice \mathbf{R}_M trouvée à l'accès CD.

Ajoutant la branche relative à l'accès, le graphe du circuit est représenté ci-dessous :



L'arbre est choisi de façon à laisser la branche de l'accès dans un maillon. La règle d'inspection fournit la matrice de résistances de mailles \mathbf{R}_M :

$$\mathbf{R}_M = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & R_1 + R_2 & R_1 \\ R_1 + R_2 & R_1 + R_2 + R_3 + R_4 & R_1 + R_3 \\ R_1 & R_1 + R_3 & R_1 + R_3 + R_6 \end{pmatrix}$$

La résistance équivalente de Thévenin, résistance équivalente vue du premier accès (branche R_5), est obtenue par réduction de \mathbf{R}_M à cet accès.

Posons :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{aa} &= (R_1 + R_2) \\ \mathbf{R}_{ab} &= \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & R_1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_{ba} &= \begin{pmatrix} R_1 + R_2 \\ R_1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_{bb} &= \begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_3 + R_4 & R_1 + R_3 \\ R_1 + R_3 & R_1 + R_3 + R_6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}R_{Th_E} &= \mathbf{R}_{aa} - \mathbf{R}_{ab} \mathbf{R}_{bb}^{-1} \mathbf{R}_{ba} \\ \mathbf{R}_{bb}^{-1} &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} R_1 + R_3 + R_6 & -R_1 - R_3 \\ -R_1 - R_3 & R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\Delta &= (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)(R_1 + R_3 + R_6) - (R_1 + R_3)^2 \\ &= ((R_1 + R_3) + (R_2 + R_4))((R_1 + R_3) + R_6) - (R_1 + R_3)^2 \\ &= (R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + R_6 \sum_{i=1}^4 R_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{bb}^{-1} \mathbf{R}_{ba} &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} R_1 + R_3 + R_6 & -R_1 - R_3 \\ -R_1 - R_3 & R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 + R_2 \\ R_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} R_6(R_1 + R_2) + R_2(R_1 + R_3) \\ R_1 R_4 - R_2 R_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{ab} \mathbf{R}_{bb}^{-1} \mathbf{R}_{ba} &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_6(R_1 + R_2) + R_2(R_1 + R_3) \\ R_1 R_4 - R_2 R_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} \left((R_1 + R_2)^2 R_6 + R_1^2 (R_2 + R_4) + R_2^2 (R_1 + R_3) \right)\end{aligned}$$

$$R_{Th_E} = R_1 + R_2 - \frac{1}{\Delta} \left((R_1 + R_2)^2 R_6 + R_1^2 (R_2 + R_4) + R_2^2 (R_1 + R_3) \right) = \frac{N}{\Delta}$$

avec

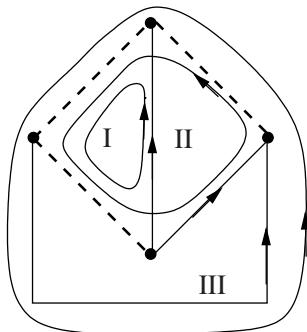
$$\begin{aligned}N &= (R_1 + R_2)(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + (R_1 + R_2)^2 R_6 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)R_6 \\ &\quad - (R_1 + R_2)^2 R_6 - R_1^2 (R_2 + R_4) - R_2^2 (R_1 + R_3) \\ &= (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)(R_2 + R_4) - R_2^2 R_1 - R_2^2 R_3 \\ &\quad + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)R_6 \\ &= R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_4 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)R_6 \\ &= R_1 R_3 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_3) + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)R_6\end{aligned}$$

Finalement :

$$R_{Th_E} = \frac{R_1 R_3 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_3) + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)R_6}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + R_6 \sum_{i=1}^4 R_i}$$

3. Expression de $\frac{V_5}{E}$

On connecte la résistance R_5 au schéma équivalent de Thévenin.



$$V_5 = R_5 \frac{V_{Th_E}}{R_5 + R_{Th_E}}$$

L'expression générale de V_5/E s'écrit :

$$\frac{V_5}{E} = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + R_6 \sum_{i=1}^4 R_i + \frac{1}{R_5} \sum_{i \neq j \neq k}^4 R_i R_j R_k + \frac{R_6}{R_5} (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

Cas particuliers :

(a) $R_6 = 0, R_5 = \infty$

$$\frac{V_5}{E} = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}$$

(b) $R_6 = 0, R_5 \neq \infty$

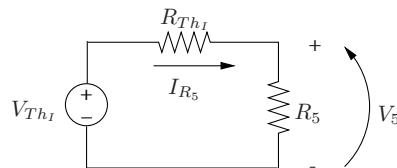
$$\frac{V_5}{E} = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + \frac{1}{R_5} \sum_{i \neq j \neq k}^4 R_i R_j R_k}$$

(c) $R_6 \neq 0, R_5 = \infty$

$$\frac{V_5}{E} = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + R_6 \sum_{i=1}^4 R_i}$$

B. Recherche de $\frac{V_5}{I}$

Contrairement à E , le courant I est dépendant de la résistance du détecteur R_5 . Le schéma équivalent de Thévenin vu de l'accès CD doit être déterminé en supposant I imposé. Pour cela, on applique le théorème de substitution : la branche $E-R_6$ est remplacée par une source de courant délivrant le courant I comme indiqué ci-dessous :

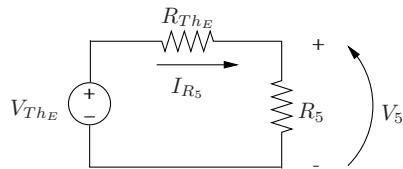
1. f.e.m. de Thévenin V_{Th_I}

On a déterminé plus haut l'expression de la tension aux bornes du circuit à vide :

$$V_{Th_I} = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \cdot I$$

2. Résistance équivalente de Thévenin R_{Th_I}

On déduit directement :



$$R_{Th_I} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{\sum_{i=1}^4 R_i}$$

3. Expression de $\frac{V_5}{I}$

On a le schéma équivalent de Thévenin auquel on connecte la résistance R_5 .

$$\begin{aligned} I_{R_5} &= \frac{V_{Th_I}}{R_5 + R_{Th_I}} \\ \text{et } V_5 &= R_5 I_{R_5} = R_5 \frac{V_{Th_I}}{R_5 + R_{Th_I}} \end{aligned}$$

Remplaçant V_{Th_I} et R_{Th_I} par leur expression trouvée plus haut, le rapport V_5/I s'écrit :

$$\frac{V_5}{I} = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{\sum_{i=1}^4 R_i + \frac{1}{R_5}(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

Dans le cas particulier où $R_5 = \infty$:

$$\frac{V_5}{I} = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{\sum_{i=1}^4 R_i}$$

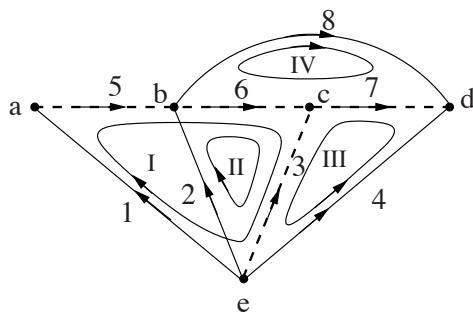
Solution de l'exercice 8.8

Nous allons résoudre cet exercice via deux approches :

1. par application de la méthode des mailles ;
2. par transfiguration étoile \leftrightarrow triangle.

1. Application de la méthode des mailles

Le graphe du circuit est donné ci-dessous. La branche 1 est relative à l'accès. L'arbre est choisi de manière à laisser cette branche dans un maillon.



Les relations U - I aux accès s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = -\mathbf{V}_{sM} + \mathbf{R}_M \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix}.$$

Seul l'accès 1 nous intéresse et $U_2 = U_3 = U_4 = 0$. Le vecteur des f.e.m. de mailles est donné :

$$\mathbf{V}_{sM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ V}.$$

La règle d'inspection fournit la matrice \mathbf{R}_M :

$$\mathbf{R}_M = \begin{pmatrix} 110 & 100 & 80 & -20 \\ 100 & 200 & 80 & -20 \\ 80 & 80 & 105 & 20 \\ -20 & -20 & 20 & 50 \end{pmatrix} \Omega.$$

On a :

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c|ccc} 110 & 100 & 80 & -20 \\ 100 & 200 & 80 & -20 \\ 80 & 80 & 105 & 20 \\ -20 & -20 & 20 & 50 \end{array} \right) \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix}.$$

La réduction à l'accès 1, c'est-à-dire l'élimination des variables I_2 , I_3 , I_4 fournit successivement :

$$\begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 200 & 80 & -20 \\ 80 & 105 & 20 \\ -20 & 20 & 50 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ -20 \end{pmatrix} I_1 \right)$$

et

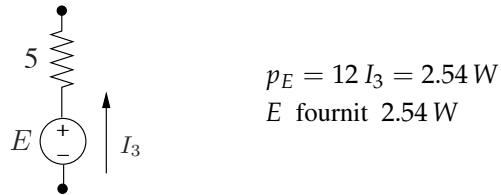
$$\begin{aligned} U_1 &= 110 I_1 + (100 \ 80 \ -20) \begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} \\ &= -(100 \ 80 \ -20) \begin{pmatrix} 200 & 80 & -20 \\ 80 & 105 & 20 \\ -20 & 20 & 50 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \left(110 - (100 \ 80 \ -20) \begin{pmatrix} 200 & 80 & -20 \\ 80 & 105 & 20 \\ -20 & 20 & 50 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ -20 \end{pmatrix} \right) I_1 \\ &= V_{Th} + R_{Th} I_1 \\ V_{Th} &= 9.706 \text{ V} \\ R_{Th} &= 20.846 \Omega \end{aligned}$$

Pour déterminer la puissance fournie par $E = 12V$ si l'accès 11' est à vide, il faut déterminer I_3 lorsque $I_1 = 0$.

On a, si $I_1 = 0$:

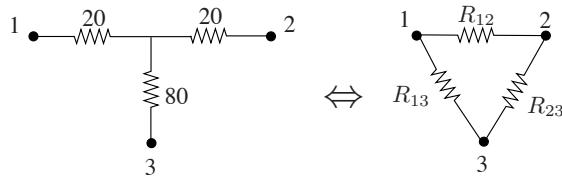
$$\begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 200 & 80 & -20 \\ 80 & 105 & 20 \\ -20 & 20 & 50 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9.705 \cdot 10^{-2} \\ 0.2118 \\ -0.1236 \end{pmatrix} \text{ A}$$

c'est-à-dire $I_3 = 0.2118 \text{ A}$ et



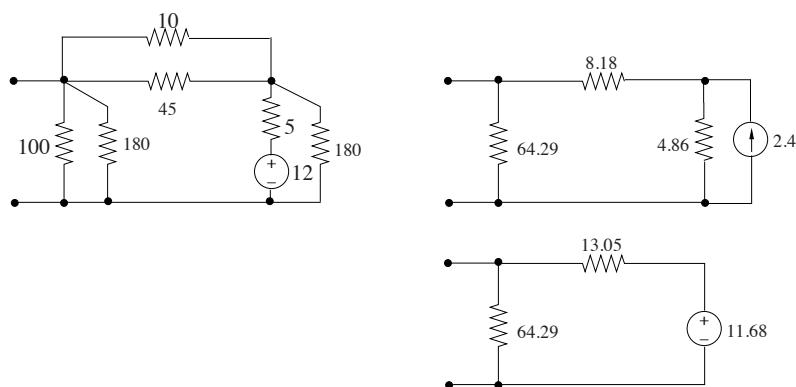
2. Transfiguration

On transforme l'étoile centrale comme suit :

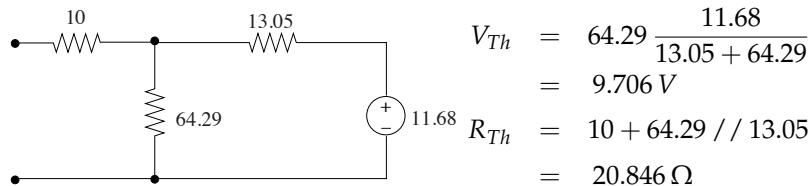


$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{12}} &= \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20}}{\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{80}} \Rightarrow R_{12} = 45 \Omega \\ \frac{1}{R_{13}} &= \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{1}{180} \Rightarrow R_{13} = 180 \Omega \\ \frac{1}{R_{23}} &= \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{1}{180} \Rightarrow R_{23} = 180 \Omega \end{aligned}$$

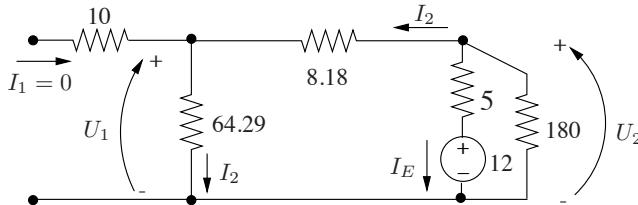
Le circuit devient :



et finalement :



Pour calculer la puissance produite par la source $E = 12V$, revenons au circuit où celle-ci apparaît, comme illustré ci-dessous :



L'accès est à vide $\Rightarrow I_1 = 0$ et $U_1 = V_{Th} = 9.706 V$.

On dérive successivement :

$$I_2 = \frac{U_1}{64.29}$$

$$U_2 = U_1 + 8.18 I_2$$

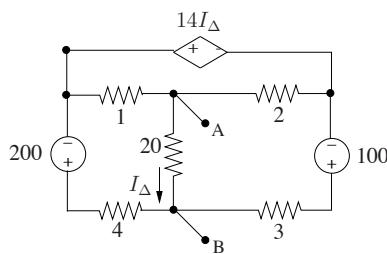
$$I_E = \frac{U_2 - 12}{5} = -0.2117 A.$$

Puissance fournie par E :

$$p_E = -12 I_E = 2.54 W.$$

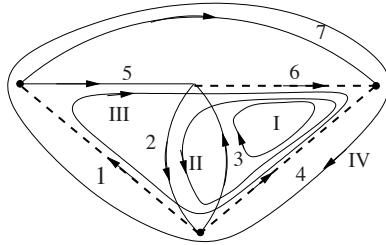
Solution de l'exercice 8.9

Il faut tout d'abord déterminer le schéma équivalent de Thévenin du circuit vu de l'accès AB :



On utilise pour cela la méthode des mailles. On réduira ensuite le système obtenu à l'accès AB.

Le graphe du circuit est donné ci-dessous. Le choix de l'arbre laisse l'accès (branche 3) dans un maillon.



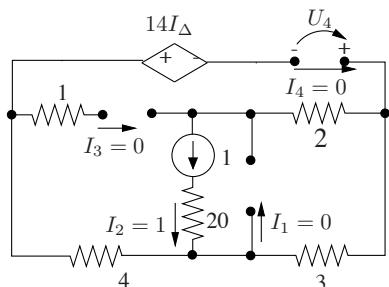
Le vecteur des f.e.m. de mailles s'écrit :

$$\mathbf{V}_{sM} = \begin{pmatrix} 100 \\ -100 \\ 100 - 200 \\ 100 - 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ -100 \\ -100 \\ -100 \end{pmatrix} \text{ V.}$$

La matrice \mathbf{R}_M ne peut être entièrement déterminée par la règle d'inspection suite à la présence de la source commandée de type CVT. La SLK dans la maille IV est affectée par cette source ; seuls les éléments de la 4ème ligne de \mathbf{R}_M doivent être déterminés par expérimentation. De plus, le CVT introduit une tension qui dépend du courant I_Δ c'est-à-dire de courant de la maille II et finalement seul l'élément 42 de \mathbf{R}_M doit être calculé par expérimentation.

On a :

$$R_{42} = U_4|_{I_2=1, I_1=I_3=I_4=0}$$



$$\begin{aligned} U_4 &= 14 I_\Delta - 3 = 14 - 3 = 11 \\ I_\Delta &= I_2 = 1 \\ \Rightarrow R_{42} &= 11 \Omega. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\mathbf{R}_M = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 & 3 \\ -5 & 25 & -5 & -3 \\ 5 & -5 & 10 & 7 \\ 3 & 11 & 7 & 7 \end{pmatrix} \Omega.$$

L'élimination des accès 2,3,4 fournit :

$$\begin{aligned} V_{Th} &= -100 - (-5 \ 5 \ 3) \begin{pmatrix} 25 & -5 & -3 \\ -5 & 10 & 7 \\ 11 & 7 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} \\ &= -150 \text{ V} \\ R_{Th} &= 5 - (-5 \ 5 \ 3) \begin{pmatrix} 25 & -5 & -3 \\ -5 & 10 & 7 \\ 11 & 7 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= 2.5 \Omega . \end{aligned}$$

On connecte R_0 à l'accès :

$$I = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_0}$$

La puissance dissipée par R_0 vaut :

$$P_{R_0} = \left(\frac{150}{R_{Th} + R_0} \right)^2 \cdot R_0 = 1000 \text{ W} .$$

On déduit l'équation définissant R_0 :

$$\begin{aligned} (150)^2 R_0 &= 1000 (2.5 + R_0)^2 \\ &= 10^3 R_0^2 + 5000 R_0 + 6250 . \end{aligned}$$

Cette équation fournit deux solutions pour R_0 :

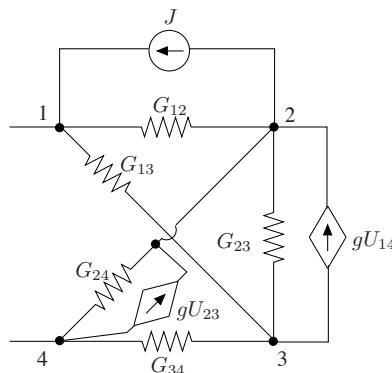
$$R_0 = \begin{cases} 17.14 \Omega \\ 0.365 \Omega \end{cases}$$

Solution de l'exercice 8.10

Procédure

1. mise en équations du circuit via la méthode des noeuds ;
2. réduction à l'accès 14 et dérivation du schéma équivalent de Norton vu de cet accès ;
3. insertion de la résistance R à l'accès 14 et calcul de la puissance dissipée par cette résistance.

1. Application de la méthode des noeuds au circuit



Le circuit devra être ultérieurement réduit à l'accès 14, on peut donc choisir soit le noeud 1 soit le noeud 4 comme noeud de référence. Choisissons le noeud 4.

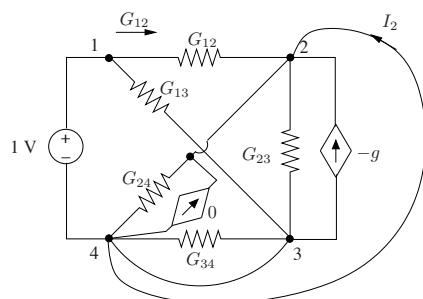
Vu la présence de sources commandées, seuls les éléments ci-dessous de la matrice de conductances aux noeuds peuvent être déterminés par la règle d'inspection.

$$\mathbf{G}_N = \begin{pmatrix} 1 & G_{12} + G_{13} & -G_{12} & -G_{13} \\ 2 & \times & \times & \times \\ 3 & \times & -G_{23} & G_{13} + G_{23} + G_{34} \end{pmatrix}$$

Les autres éléments se déduisent

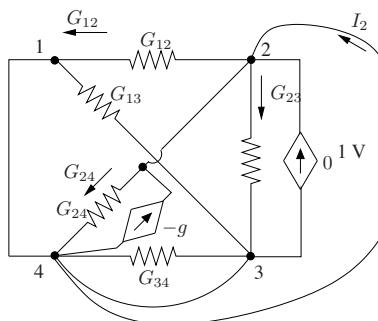
1. soit par expérimentation :

(a) élément 21 :



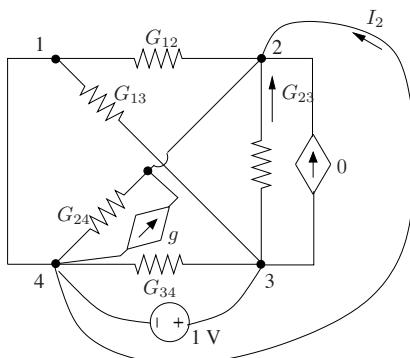
$$\mathbf{G}_{N21} = I_2|_{V_1=1; V_2=V_3=0} = -G_{12} + g$$

(b) élément 22 :



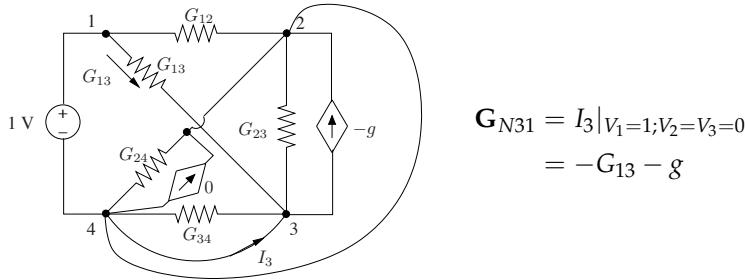
$$\mathbf{G}_{N22} = I_2|_{V_2=1; V_1=V_3=0} = G_{12} + G_{23} + G_{24} + g$$

(c) élément 23 :



$$\mathbf{G}_{N23} = I_2|_{V_3=1; V_1=V_2=0} = -G_{23} - g$$

(d) élément 31 :



$$\mathbf{G}_{N31} = I_3|_{V_1=1; V_2=V_3=0} \\ = -G_{13} - g$$

2. soit en écrivant directement les PLK aux noeuds 2 et 3 :

$$G_{12}(V_2 - V_1) + G_{23}(V_2 - V_3) + G_{24}V_2 + gV_1 - g(V_3 - V_2) = -J \\ G_{13}(V_3 - V_1) + G_{23}(V_3 - V_2) + G_{34}V_3 - gV_1 = 0$$

Finalement, la matrice de conductances aux noeuds s'écrit :

$$\mathbf{G}_N = \left(\begin{array}{c|ccc} G_{12} + G_{13} & -G_{12} & -G_{13} & \\ \hline -G_{12} + g & G_{12} + G_{23} + G_{24} + g & -G_{23} - g & \\ -G_{13} - g & -G_{23} & G_{13} + G_{23} + G_{34} & \end{array} \right) \\ = \left(\begin{array}{c|cc} 60 & -35 & -25 \\ \hline -15 & 145 & -30 \\ -45 & -10 & 110 \end{array} \right) \text{ mS}$$

Le vecteur des courants injectés aux noeuds par les sources indépendantes d'énergie est donné par :

$$\mathbf{I}_{sN} = \begin{pmatrix} J \\ -J \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ A}$$

2. Déivation du schéma équivalent de Norton vu de l'accès 14.

La conductance équivalente de Norton vue de l'accès 14 s'obtient par réduction de la matrice \mathbf{G}_N à cet accès :

$$G_{No} = 60 - (-35 \quad -25) \begin{pmatrix} 145 & -30 \\ -10 & 110 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -15 \\ -45 \end{pmatrix} = 42.63 \text{ mS}$$

La source de courant de Norton équivalente est donnée par :

$$J_{No} = 5 - (-35 \quad -25) \begin{pmatrix} 145 & -30 \\ -10 & 110 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = 3.69 \text{ A}$$

3. Calcul de la puissance consommée par R .

Connectant la résistance R à l'accès, on déduit :

$$I = J_{No} \frac{\frac{1}{G_{No}}}{R + \frac{1}{G_{No}}} = 0.7 \text{ A}$$

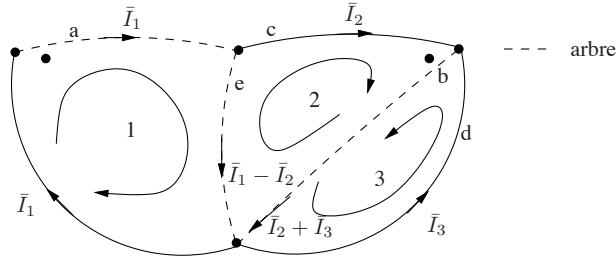
$$p = RI^2 = 49.16 \text{ W}$$

Solution de l'exercice 8.11

Le coefficient d'inductance mutuelle entre les inductances L_1 et L_4 est donné par

$$M = k\sqrt{L_1 L_4} = 0.14 \text{ mH}$$

On applique la méthode des mailles. L'arbre est choisi de manière à laisser l'accès du dipôle dans un maillon.



Les relations de branches relatives aux branches occupées par les deux inductances couplées s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \bar{U}_a \\ \bar{U}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 + \bar{I}_3 \end{pmatrix}$$

Les tensions de couplage s'ajoutent vu les sens choisis pour les courants (entrant par les points aux deux branches).

Les SLK dans chaque maille s'écrivent :

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \bar{U}_a + \bar{U}_e \\ &= j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M(\bar{I}_2 + \bar{I}_3) + j\omega L_2(\bar{I}_1 - \bar{I}_2) \\ 0 &= \bar{U}_c - \bar{U}_e + \bar{U}_b \\ &= j\omega L_3 \bar{I}_2 - j\omega L_2(\bar{I}_1 - \bar{I}_2) + j\omega L_4(\bar{I}_2 + \bar{I}_3) + j\omega M \bar{I}_1 \\ 0 &= \bar{U}_d + \bar{U}_b \\ &= j\omega L_5 \bar{I}_3 + j\omega L_4(\bar{I}_2 + \bar{I}_3) + j\omega M \bar{I}_1 \end{aligned}$$

\bar{U} est la tension à l'accès du dipôle. La matrice des impédances de mailles est donnée par :

$$\mathbf{Z}_M = j\omega \begin{pmatrix} L_1 + L_2 & -L_2 + M & M \\ -L_2 + M & L_3 + L_2 + L_4 & L_4 \\ M & L_4 & L_4 + L_5 \end{pmatrix} = j\omega \left[\begin{array}{c|cc} 0.6 & -0.36 & 0.14 \\ \hline -0.36 & 1.1 & 0.4 \\ 0.14 & 0.4 & 1.2 \end{array} \right] 10^{-3} \Omega.$$

La réduction de cette matrice à l'accès 1 fournit l'impédance équivalente du dipôle, soit :

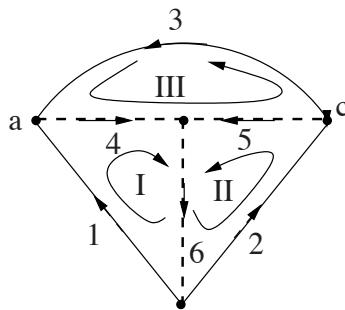
$$Z_{eq} = j\omega L_{eq}$$

$$L_{eq} = 0.6 - \begin{pmatrix} -0.36 & 0.14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.1 & 0.4 \\ 0.4 & 1.2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -0.36 \\ 0.14 \end{pmatrix} = 0.413 \text{ mH}$$

Solution de l'exercice 8.12

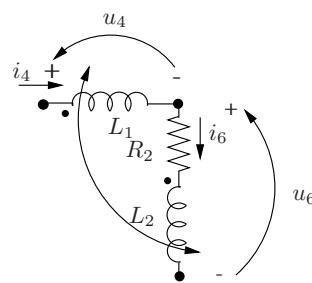
1. Application de la méthode des mailles

On utilise la méthode des mailles pour déterminer le schéma équivalent de Thévenin vu de l'accès 11'. Le graphe du circuit passifié est représenté à la Fig. 8.12.



Choisissons l'arbre représenté en pointillés en prenant soin de placer la branche 2 relative à l'accès auquel on va réduire le circuit dans un maillon. Les mailles fondamentales correspondantes sont les mailles I, II, III.

Adoptant les sens des courants et tensions de la figure ci-dessous,



les relations de branches relatives à la paire d'inductances couplées s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} u_4 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{di_4}{dt} \\ \frac{di_6}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_4 \\ i_6 \end{pmatrix}$$

ou, en termes de phaseurs :

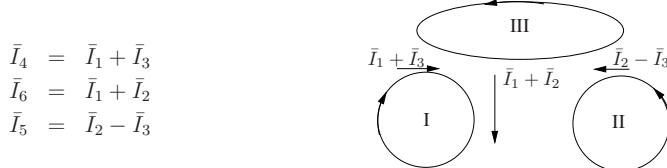
$$\begin{pmatrix} \bar{U}_4 \\ \bar{U}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & R_2 + j\omega L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_4 \\ \bar{I}_6 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient d'inductance mutuelle M est positif puisque, avec les sens choisis pour les courants, ils entrent tous les deux par la borne repérée par le point •.

Les courants de branches se déduisent à partir des courants de mailles :

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{pmatrix}$$

comme indiqué à la figure ci-dessous :



Les SLK pour les 3 mailles s'écrivent alors en fonction des courants de mailles :

1. maille I :

$$\begin{aligned} \bar{E} = & R_1 \bar{I}_1 + j\omega L_1 (\bar{I}_1 + \bar{I}_3) + j\omega M (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) + \\ & + j\omega L_2 (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) + j\omega M (\bar{I}_1 + \bar{I}_3) + R_2 (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) \end{aligned}$$

2. maille II :

$$0 = R_3 (\bar{I}_2 - \bar{I}_3) + R_2 (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) + j\omega L_2 (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) + j\omega M (\bar{I}_1 + \bar{I}_3)$$

3. maille III :

$$0 = j\omega L_1 (\bar{I}_1 + \bar{I}_3) + j\omega M (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) + R_3 (\bar{I}_3 - \bar{I}_2) + R_4 \bar{I}_3 .$$

On déduit :

1. la matrice d'impédances de mailles :

$$\mathbf{Z}_M = \left(\begin{array}{c|c|c} R_1 + j\omega L_1 + j\omega M + j\omega L_2 & j\omega M + j\omega L_2 + R_2 & j\omega L_1 + j\omega M \\ +j\omega M + R_2 & & \\ \hline \times & R_3 + R_2 + j\omega L_2 & -R_3 + j\omega M \\ \hline \times & & j\omega L_1 + R_3 + R_4 \end{array} \right)$$

matrice symétrique ;

2. le vecteur des f.e.m. de mailles :

$$\bar{\mathbf{V}}_{sM} = \begin{pmatrix} \bar{E} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut aussi déterminer \mathbf{Z}_M par calcul à partir de l'expression

$$\mathbf{Z}_M = \mathbf{B} \mathbf{Z}_B \mathbf{B}^T$$

avec

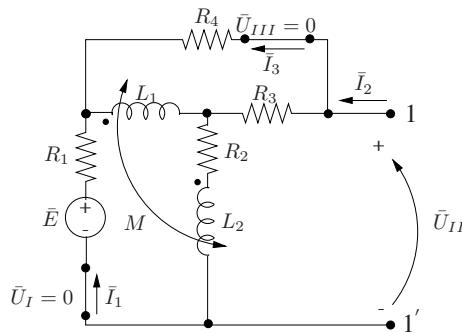
1. \mathbf{B} : la matrice des mailles fondamentales du graphe du circuit passifié ;
2. \mathbf{Z}_B : la matrice des impédances de branches.

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c|cccccc} & & \text{branche} \\ \text{maille} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \text{I} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \text{II} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \text{III} & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\mathbf{Z}_B = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega L_1 & 0 & j\omega M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega M & 0 & R_2 + j\omega L_2 \end{pmatrix}$$

2. Réduction à l'accès 11' et détermination du schéma équivalent de Thévenin

Le schéma équivalent du circuit et les accès résultant du choix de l'arbre sont donnés à la Fig. 8.12.



Les relations $U - I$ pour les 3 accès s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{U}_{11'} \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \bar{E} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{Z}_M \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

avec $\bar{U}_I = \bar{U}_{III} = 0$ pour les 2 accès à éliminer.

L'élimination des courants \bar{I}_1, \bar{I}_3 fournit la relation cherchée à l'accès 11' :

$$\bar{U}_{11'} = \bar{V}_{Th} + Z_{Th} \bar{I}_2$$

avec

$$1. \quad \bar{V}_{Th} = 0 + \mathbf{Z}_{a,b} \mathbf{Z}_{b,b}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{E} \\ 0 \end{pmatrix} :$$

$$\mathbf{Z}_{a,b} = (j\omega M + j\omega L_2 + R_2 - R_3 + j\omega M)$$

$$\mathbf{Z}_{b,b} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 + j\omega L_1 + j\omega L_2 + 2j\omega M & j\omega L_1 + j\omega M \\ j\omega L_1 + j\omega M & j\omega L_1 + R_3 + R_4 \end{pmatrix}$$

on trouve :

$$\bar{V}_{Th} = 85.73 + j5.63 = 85.91 \angle 3.76^\circ \text{ V}$$

2. $Z_{Th} = \mathbf{Z}_{a,a} - \mathbf{Z}_{a,b} \mathbf{Z}_{b,b}^{-1} \mathbf{Z}_{b,a}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_{a,a} &= R_3 + R_2 + j\omega L_2 \\ \mathbf{Z}_{b,a} &= \begin{pmatrix} j\omega M + j\omega L_2 + R_2 \\ -R_3 + j\omega M \end{pmatrix}\end{aligned}$$

on trouve :

$$Z_{Th} = 33.31 + j3.47 = 33.49 \angle 5.94^\circ \Omega.$$

3. Réalisation de l'adaptation

Pour soutirer au circuit une puissance maximale, il faut choisir une impédance de charge :

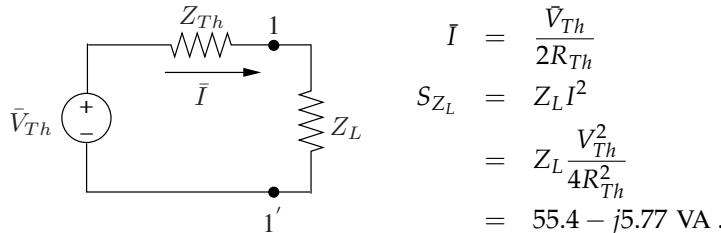
$$\begin{aligned}Z_L &= Z_{Th}^* = 33.31 - j3.47 \Omega \\ &= R_L - jX_L \\ &= R_L - \frac{j}{\omega C_L}.\end{aligned}$$

Cette impédance peut être réalisée au moyen d'un circuit RC série avec

$$\begin{aligned}R_L &= 33.31 \Omega \\ \text{et } C_L &= \frac{1}{3.47 \cdot \omega} = \frac{1}{3.47 \times 10^3} = 288 \mu\text{F}.\end{aligned}$$

4. Puissance fournie à Z_L

Connectant Z_L à l'accès 11', on dérive :



$$\begin{aligned}\bar{I} &= \frac{\bar{V}_{Th}}{2R_{Th}} \\ S_{Z_L} &= Z_L \bar{I}^2 \\ &= Z_L \frac{V_{Th}^2}{4R_{Th}^2} \\ &= 55.4 - j5.77 \text{ VA}.\end{aligned}$$

La charge Z_L consomme une puissance active

$$P = 55.4 \text{ W}$$

et fournit une puissance réactive

$$Q = 5.77 \text{ Var}.$$