De LaTeX a HTML

Nombre español

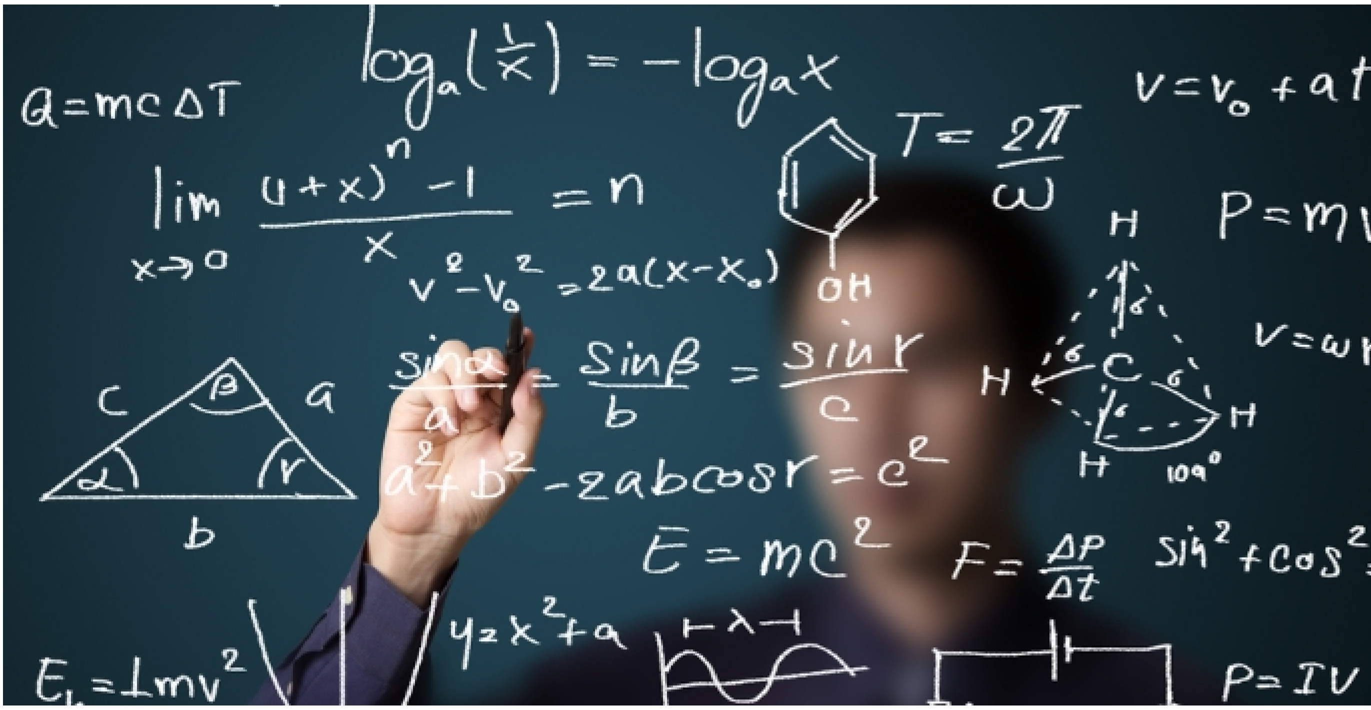
26 de junio de 2020

Índice

1 Introducción

El presente recurso pretende explicar las unidades didácticas del bloque de Análisis matemático referidas a las funciones y a la representación de las mismas. Las finalidades con las que éste ha sido creado son dos, claramente diferenciadas:

- Dada la fórmula o ecuación de una función, saber representarla gráficamente.



- Dada la fórmula o ecuación de una función, analizarla estudiando todas sus características.

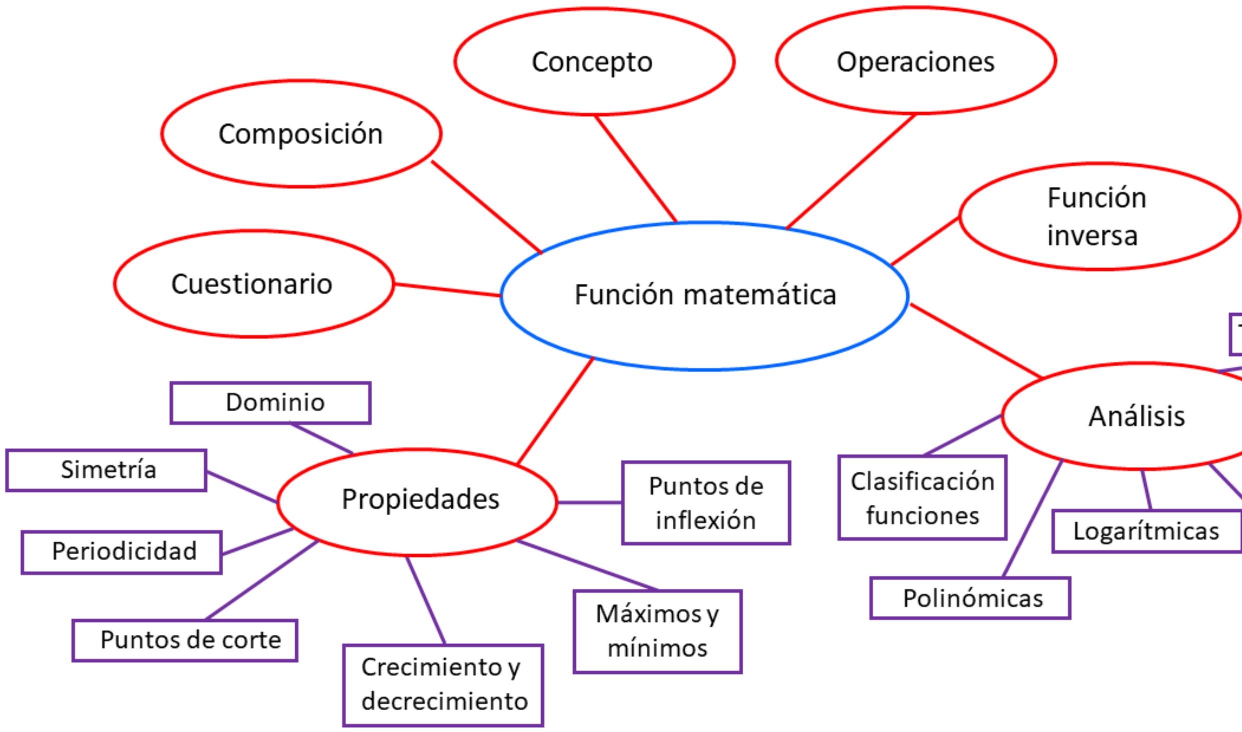
Sin embargo, antes de poder centrarnos en el análisis de funciones, haremos un breve repaso del temario dado en $1^{\underline{o}}$ de Bachillerato acerca de las mismas.

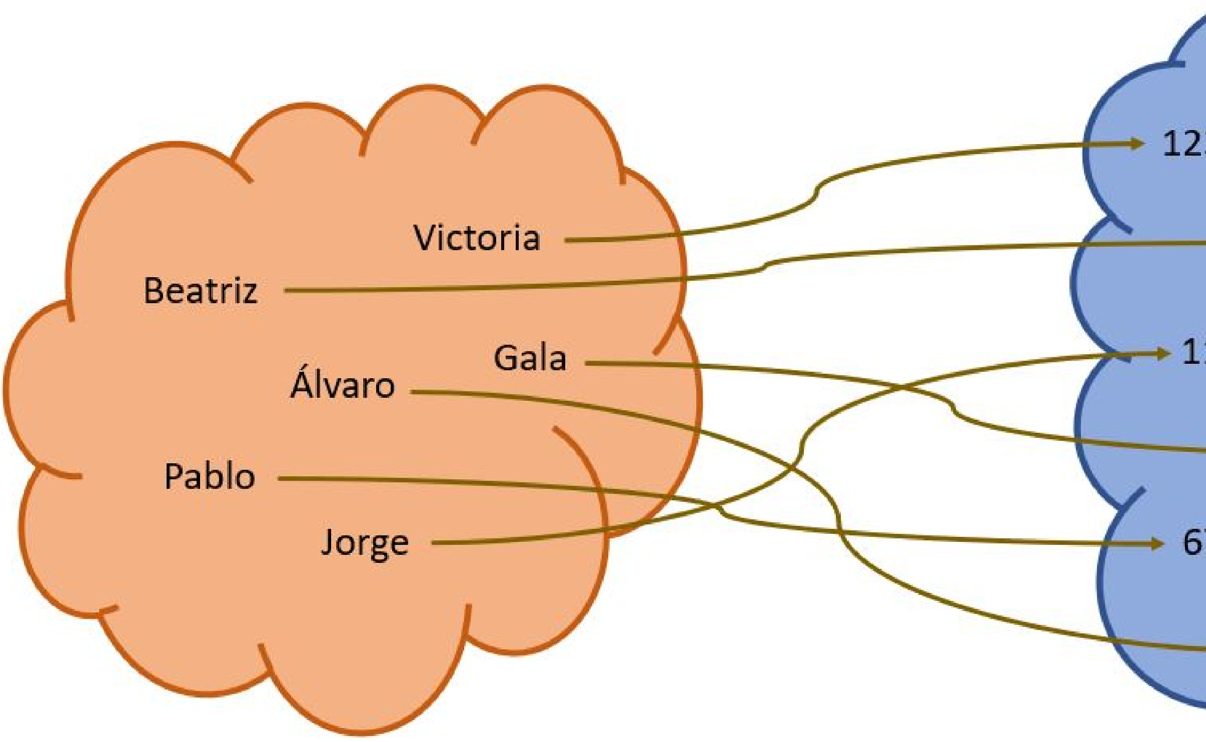
1.1 Organiza tus ideas

2 Concepto de función

Definition 1. *Una* correspondencia *es una relación entre dos conjuntos tal que a cada elemento del primer conjunto le corresponde ninguno, uno o varios elementos del segundo conjunto.*

A continuación, se muestra un ejemplo de correspondencia entre personas y sus respectivos números de DNI.


Concepto
Operaciones
Composición
Función inversa
Cuestionario
Función matemática
Dominio
Simetría
Propiedades
Puntos de inflexión
Periodicidad
Puntos de corte
Crecimiento y decrecimiento
Máximos y mínimos
Análisis
Clasificación funciones
Logarítmicas
Polinómicas



Definition 2. *Una* función *es una correspondencia tal que a cada valor del primer conjunto le corresponde un único valor del segundo conjunto.*

`https://www.geogebra.org/m/bm9zpgfh` Un ejemplo claro de función podría ser la relación existente entre un hijo y su madre, ya que cada hijo tiene una única madre.

Existen diferentes formas de expresar una función:

- *Mediante un enunciado verbal.*
- *Mediante una gráfica.*
- *Mediante una fórmula matemática.*
- *Mediante una fórmula matemática.*

2.0.1 Ejercicios.

Problema 1

Rellene las siguientes definiciones:

- Una .... es una relación entre dos conjuntos tal que a cada elemento del primer conjunto le corresponde ninguno, uno o varios elementos del segundo conjunto.

- Una *función* es una .... tal que a cada valor del .... conjunto le corresponde un .... valor del .... conjunto.

Solución:

- Una *correspondencia* es una relación entre dos conjuntos tal que a cada elemento del primer conjunto le corresponde ninguno, uno o varios elementos del segundo conjunto.

- Una función es una *correspondencia* tal que a cada valor del *primer* conjunto le corresponde un *único* valor del *segundo* conjunto.

❖

Problema 2

Introduzca en la barra de entrada las siguientes funciones, de manera similar a la indicada en el ejemplo anterior, y observa la gráfica de representación de cada una de las funciones.

- $f(x) = 3x + 2$

- $g(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x + 5}$

- $h(x) = \sqrt{x + 5}$

- $j(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{3x - 5}$

- $k(x) = \log(x^2)$

- $p(x) = 3\cos(3x)$

3 Operaciones con funciones

Sean dos funciones f y g definidas en el mismo subconjunto D de los números reales, se definen las siguientes operaciones entre ellas:

- **Adición**: la suma de f y g es la función $f + g$ que, para cualquier

$x \in D$, verifica:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

- **Sustracción**: la diferencia de f y g es la función $f - g$ que, para cualquier $x \in D$, verifica:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

- **Multiplicación**: el producto de f y g es la función $f \cdot g$ que, para cualquier $x \in D$, verifica:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

- **División**: el cociente de f y g es la función $\frac{f}{g}$ que, para cualquier $x \in D$, con $g(x) \neq 0$, verifica:

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Las operaciones con funciones verifican las mismas propiedades que las operaciones con números reales, ya que se definen utilizando las operaciones con sus imágenes, que son números reales.
El dominio de las funciones $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ y $\dfrac{f}{g}$ es la intersección de los dominios de f y g, con la salvedad de que en el caso $\dfrac{f}{g}$, los valores de x que anulan el denominador no pertenecen al dominio.

EJEMPLO `https://www.youtube.com/watch?v=jP1mSfUqpxw`

3.0.1 Ejercicios

Problema 3

Dadas las funciones $f(x) = 5x + 6$ y $g(x) = 3x^2 - 4x + 8$, calcula la suma $(f+g)(x)$ y la resta $(f-g)(x)$ de las funciones.

Problema 4

Dadas las funciones $f(x) = 12x^3 + 15x^2 - 6x$ y $g(x) = 3x$, calcula el producto $(f \cdot g)(x)$ y la división $(\dfrac{f}{g})(x)$ de las funciones.

Problema 5

Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 4$ y $h(x) = \dfrac{2}{3-x}$, calcula $(f+g)(x), (g+h)(x), (\dfrac{f}{g})(x), (\dfrac{g}{f})(x), (f \cdot g)(x)$ y $(\dfrac{g}{h})(x)$.

4 Función compuesta

Definition 3. *Dadas dos funciones f y g, la* función compuesta *de f y g, que se simboliza con $g \circ f$, es la función que transforma x en $g(f(x))$.*

$$x \to f(x) \to g(f(x))$$

El dominio de la función compuesta $g \circ f$ está formada por los valores de x pertenecientes al dominio de f tales que $f(x)$ pertenece al dominio de g.

Por ejemplo, si $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, entonces la función compuesta f y g es

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-1) = \frac{1}{(3x-1)^2+1}$$

.
También podemos considerar la función compuesta de g y f:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{1}{x^2+1}) = 3 \cdot \frac{1}{x^2+1} - 1$$

En general, la composición de funciones no es una operación conmutativa. Es decir, $g \circ f \neq f \circ g$, excepto en algunos casos particulares. Además, se puede dar el caso de que alguna de las dos funciones compuestas no exista.
`https://www.youtube.com/watch?v=v8j1qoTvDSg`

Problema 6

Sean $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = \dfrac{x+3}{2x+1}$, calcula $(g \circ f)$ y $(f \circ g)$.

Problema 7

Sean $f(x) = \dfrac{x+2}{2x+1}$ y $g(x) = \sqrt{x}$, calcula $g \circ f$ y $f \circ g$.

Problema 8

Sean $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$, $g(x) = \dfrac{2x-1}{2x+1}$ y $h(x) = \dfrac{1}{x}$, calcula $g \circ f$, $f \circ g$, $h \circ g \circ f$ y $h \circ f \circ g$.

5 Función inversa de una función

Definition 4. *Dada una función f, se denomina* función inversa *de f, si existe, y se simboliza con f^{-1}, la función que cumple:*

$$f^{-1}(y) = x \longleftrightarrow f(x) = y$$

La función inversa de f^{-1} es, a su vez, $f : (f^{-1})^{-1} = f$.Por eso decimos, simplemente, que las funciones f y f^{-1} son inversas. La composición de una función f con su inversa f^{-1} es la *función identidad*, $I(x) = x$:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = I(x)$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = I(x)$$

5.0.1 Obtención de la función inversa

Para calcular la función inversa de una función dada f debemos de seguir el siguiente procedimiento:

1. Se escribe la función con x e y.
2. Se despeja la variable x en función de la variable y.
3. Se intercambian las variables.

`https://www.youtube.com/watch?v=l6pZGhy0hHc`

5.0.2 Ejercicios

Problema 9

Halla la función inversa de $f(x) = 2x + 3$.

Solución:

1. Intercambiamos las variables x e y en la expresión $y = 2x + 3$, con lo que resulta $x = 2y + 3$.
2. Despejamos y, con lo que obtenemos $y = \dfrac{x-3}{2}$. Luego $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$.

3. Comprobamos que la composición de las dos funciones hace corresponder a cada x el mismo x:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+3) = \frac{2x+3-3}{2} = x$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\frac{x-3}{2}) = 2 \cdot \frac{x-3}{2} + 3 = x$$

Problema 10
En cada caso, calcula la función inversa de la dada:

- $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}$
- $h(x) = \log(x)$
- $j(x) = \sqrt{x^2+5}$

6 Propiedades globales de una función

6.1 Dominio

Definition 5. *El* dominio de una función real*, también llamado* ***dominio de definición*** *o* ***campo de existencia****, es el conjunto de los elementos para los cuales la función está definida. Dicho de otra manera, es el subconjunto de números reales que tienen imagen.*

$$Dom_f = \{x \in R / \exists y = f(x) \in \mathbb{R}\}$$

- Dom_f: dominio de la función. También se puede denotar por $Dom(f)$ o, simplemente, D. Puede ser todo el conjunto de los números reales, o buen un subconjunto de este: $Dom_f \subseteq R$.
- x: número real, perteneciente al dominio de la función, que recibe el nombre de variable independiente.
- y: número real, perteneciente al conjunto e la imagen de la función, recibe el nombre de variables dependiente. Para obtener su valor se debe aplicar la función f al valor de $x : f(x) = y$. Para un par de valores concretos (x, y) se dice que y es la **imagen** de x, y que x es la **antiimagen** de y.

https://www.youtube.com/watch?v=lmfDEGDpgV8

6.1.1 Cómo calcular el dominio

Para calcular el dominio .eliminaremos"de la ecuación aquellos valores que hagan imposible realizar alguna operación matemática.

- **Funciones polinómicas**
  El dominio de toda función polinómica es R, ya que al sustituir un número real cualquiera $x \in R$, siempre va a existir $f(x)$.

- **Funciones racionales**
  El **denominador** debe de ser **diferente de cero**. Suponiendo una función $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, si tanto $P(x)$ como $Q(x)$ son polinomios, entonces el dominio $Dom_f = \{x \in R/Q(x) \neq 0\}$, es decir, el conjunto de valores que **no anulan** el denominador.
  Cuando simplifiques una función racional, el dominio debe coincidir con el de la función original, y no debes caer en la tentación de recalcularlo.

- **Funciones irracionales**

  - *Función irracional de índice impar*
    En estos casos, la raíz no impone ninguna restricción adicional al dominio, por lo que coincidirá con el del radicando.
  - *Función irracional de índice par*
    En estos casos la raíz impone que los valores del radicando siempre sean mayores o iguales que cero.

- **Funciones exponenciales**
  En estos casos, la exponencial no impone ninguna restricción adicional al dominio, con lo que coincidirá con el dominio del exponente.

- **Funciones logarítmicas**
  En estos casos el logaritmo impone que el argumento debe de ser un número positivo.

6.1.2 Ejercicios

Problema 11

Calcula el dominio de las siguientes funciones a partir de la teoría explicada previamente:

- $f(x) = \dfrac{2x}{3x-2}$
- $f(x) = \dfrac{6x}{x^2-16}$
- $f(x) = \sqrt{x^2-1}$
- $f(x) = \sqrt{\dfrac{3}{-x+2}}$
- $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+5}{x-7}}$
- $f(x) = \sqrt{x^2+x}$
- $f(x) = \log(-2x^2-10x-8)$
- $f(x) = \arccos(x+5)$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = e^{-5x}$

Problema 12

Comprueba mediante la representación en la gráfica que los dominios que has calculado coinciden con lo que se observa en las gráficas.

Solución:

`https://www.geogebra.org/m/tc5pbmae` ❖

6.2 Simetría

La gráfica de representación de una función puede presentar dos tipos de simetría: simetría respecto al eje de ordenadas o simetría respecto al origen de coordenadas. Veamos qué condiciones deben verificarse para que una función tenga alguno de estos tipos de simetría. `https://www.youtube.com/watch?v=UlD9kTKo7c8`

6.2.1 Simetría respecto del eje de ordenadas

Definition 6. *La gráfica de una función f es* ***simétrica respecto del eje de ordenadas*** *si $f(x) = f(-x)$.*

Una función cuya gráfica es simétrica respecto del eje de ordenadas se denomina **función par**.
Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$, es **simétrica respecto del eje de ordenadas**, puesto que:

$$f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)$$

`https://www.geogebra.org/m/cvscmh26`

6.2.2 Simetría respecto del origen de coordenadas

Definition 7. *La gráfica de una función f es* ***simétrica respecto del origen de coordenadas*** *si $f(-x) = -f(x)$.*

Una función cuya gráfica es simétrica respecto del origen de coordenadas se denomina **función impar**.
Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$, es **simétrica respecto del origen de coordenadas** ya que:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

`https://www.geogebra.org/m/a4kksftu` `https://www.youtube.com/watch?v=kabnjBXPsWU`

6.2.3 Ejercicios

Problema 13

Estudia la simetría de las siguientes funciones indicando las operaciones que has realizado. Para ayudarte, puedes servirte de la representación gráfica de las mismas:

- $f(x) = 3x - x^3$
- $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$
- $f(x) = x^6 + x^4 - x^2$

- $f(x) = x^5 + x^3 - x$
- $f(x) = x \cdot |x|$
- $f(x) = |x| - 1$
- $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$
- $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$
- $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$
- $f(x) = \dfrac{x^2}{2 - x}$

https://www.geogebra.org/m/tc5pbmae

Problema 14
¿Qué tipo de simetría presentan las siguientes funciones?:

- $f(x) = x - 1$
- $g(x) = \dfrac{1}{x}$
- $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$

https://www.geogebra.org/m/vyvhswrk

6.3 Periodicidad

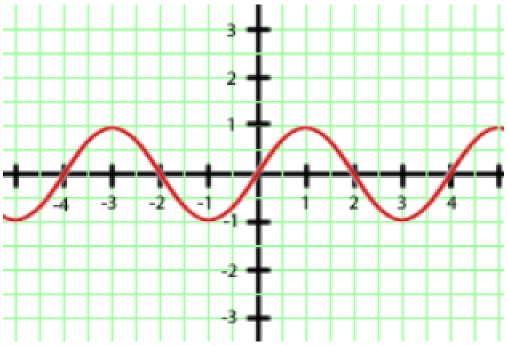
Definition 8. *Una función es* ***periódica*** *de período p si, para todo valor de x perteneciente al dominio de la función, se verifica que $f(x+p) = f(x)$.*

https://www.geogebra.org/m/bqzcquyw Si una función es periódica de período p, sus valores y, por tanto, su gráfica, se repiten en intervalos sucesivos de amplitud p.
Las funciones periódicas se estudian en un intervalo de amplitud p, y para construir el resto de la gráfica, solamente debemos de trasladar dicho estudio

al resto del dominio de la función. `https://www.youtube.com/watch?v=dTgrxlz6bMs`

6.3.1 Ejercicios

Selecciona la opción correcta:

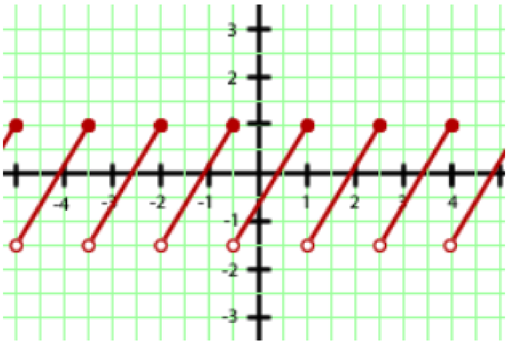


Pregunta 1

⊗ La función es periódica con periodo $T = 2$. ✗

⊗ La función es periódica con periodo $T = 4$. ✓

⊗ La función no es periódica. ✗

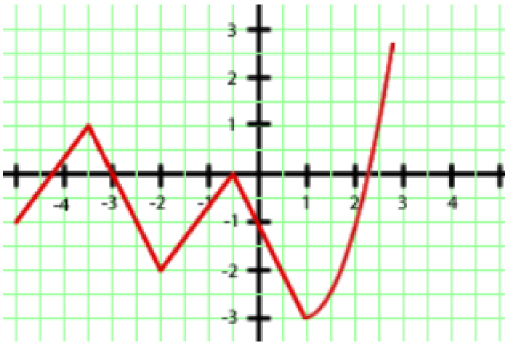


Pregunta 2

⊗ s La función es periódica con periodo $T = 2$. ✓

⊗ La función es periódica con periodo $T = 4$. ✗

⊗ Ninguna de las respuestas anteriores es correcta. ✗

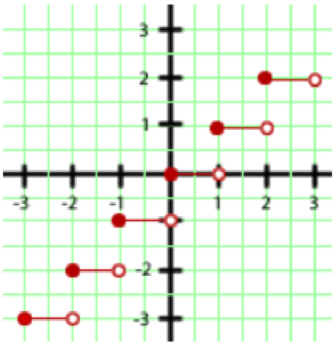


Pregunta 3

⊗ La función es periódica con periodo $T = 5$. ✗

⊗ La función es periódica con periodo $T = 6$. ✗

⊗ La función no es periódica. ✓

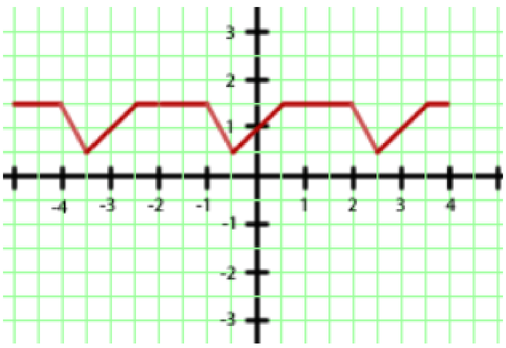


Pregunta 4

⊗ La función es periódica con periodo $T = 1$. ✗

⊗ La función es periódica con periodo $T = 2$. ✓

⊗ La función no es periódica. ✓



Pregunta 5

⊗ La función es periódica con periodo $T = -3$. ✗

⊗ La función es periódica con periodo $T = 3$. ✓

⊗ La función no es periódica. ✗

6.4 Puntos de corte con los ejes

Si una función corta el **eje de abscisas**, lo hace en los puntos $(x, 0)$, es decir, los puntos donde $f(x) = 0$.

Si una función corta el **eje de ordenadas**, lo hace en el punto $(0, f(0))$, si 0 pertenece al dominio de la función.

Una función puede cortar el eje de abscisas varias veces, una vez o ninguna, pero no puede cortar el eje de ordenadas en más de un punto, dado que en dicho caso no sería una función.

Para calcular los puntos de corte con el eje de abscisas, se debe de igualar la función a 0. Siendo el valor obtenido el valor de la x y el 0 el valor de la y. En el caso de los puntos de corte del eje de ordenadas, para calcular el valor de la y correspondiente al punto que posee $x = 0$, se debe de calcular el valor de la función en 0, $y = f(0)$.
`https://www.youtube.com/watch?v=FnauclNt3do`

6.4.1 Signo de una función

Determinar el signo de una función consiste en hallar las zonas donde la función está por encima o por debajo del eje de abscisas, es decir, los valores del dominio para los cuales $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$.

Para determinar el signo de la función debemos representar en el eje de abscisas los puntos de corte de la función con dicho eje y los puntos donde la función no está definida. Después, analizamos el signo de la función en los distintos trozos.

6.4.2 Ejercicios

Problema 15

Determina los puntos de corte con los ejes de la función $f(x) = x^2$

Problema 16

Determina los puntos de corte con los ejes de la función $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+1}$

Problema 17

Determina los puntos de corte con los ejes de la función $f(x) = x^4 - 2x^2$

Problema 18

Determina los puntos de corte con los ejes de la función $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

Problema 19

Determina los puntos de corte con los ejes de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$

Problema 20

Determina los puntos de corte con los ejes de la función que se muestra a continuación:
`https://www.geogebra.org/m/mvmuqk5u`

Problema 21

Determina los puntos de corte con los ejes de la función que se muestra a continuación:
`https://www.geogebra.org/m/d4audnb2`

Problema 22

Determina los puntos de corte con los ejes de la función que se muestra a continuación:
`https://www.geogebra.org/m/mv8baxdm`

Problema 23

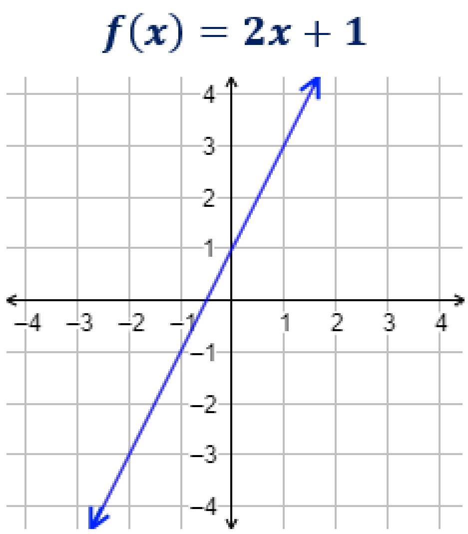
Determina los puntos de corte con los ejes de la función que se muestra a continuación:
`https://www.geogebra.org/m/kcbmtz7k`

Problema 24

Determina los puntos de corte con los ejes de la función que se muestra a continuación:
`https://www.geogebra.org/m/fw3xywww`

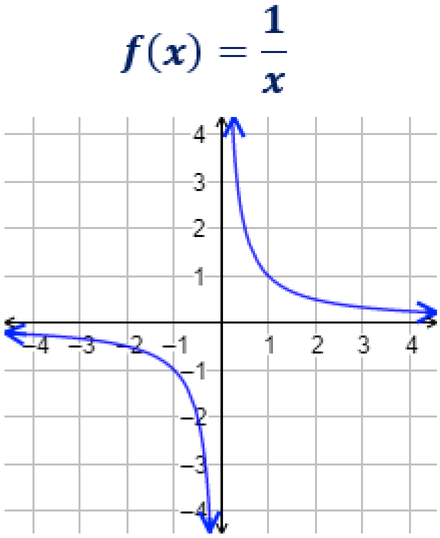
6.5 Continuidad

Intuitivamente, una función es **continua** si su gráfica se puede trazar sin levantar el lápiz del papel.



Cuendo existen puntos en los que es necesario levantar el lápiz del papel, se dice que la función es **discontinua** en estos puntos, que se denominan

puntos de discontinuidad.



6.5.1 Ejercicios

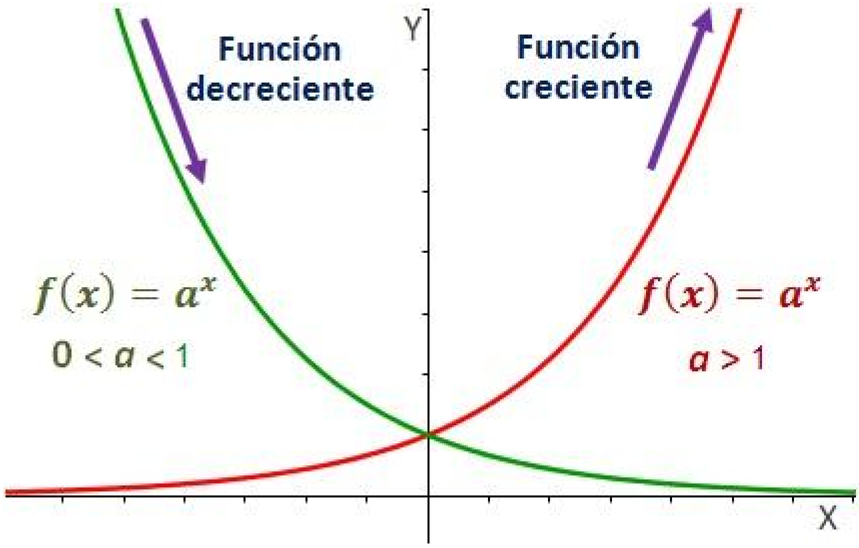
Problema 25
Estudia la continuidad de las siguientes funciones::

- $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$
- $f(x) = \dfrac{1}{3x^2-27}$
- $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{2x^2+3x-2}$
- $f(x) = \sqrt{x^2+2x+1}$
- $f(x) = \sqrt{3x^2-3x-6}$
- $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^4-x^3-x^2+x}$
- $f(x) = \dfrac{2x^2-x}{\sqrt{x^3+x^2-x-1}}$
- $f(x) = 3^{\dfrac{1}{x^2-1}}$
- $f(x) = \log(x^2-4x+4)$

6.6 Crecimiento y decrecimiento

Definition 9. *Una función f es **creciente** en un intervalo si para cualesquiera x_1 y x_2 del intervalo tales que $x_1 < x_2$, se verifica que $f(x_1) \leq f(x_2)$.*

Si la desigualdad es estricta, es decir, si para cualesquiera x_1 y x_2 tales que $x_1 < x_2$ se verifica que $f(x_1) < f(x_2)$, la función es **estrictamente creciente**.



Definition 10. *Una función f es **decreciente** en un intervalo si para cualesquiera x_1 y x_2 del intervalo tales que $x_1 < x_2$, se verifica que $f(x_1) \geq f(x_2)$.*

Como en el caso anterior, si para cualesquiera x_1 y x_2 tales que $x_1 < x_2$ se verifica que $f(x_1) > f(x_2)$, la función es **estrictamente decreciente**.
`https://www.youtube.com/watch?v=cWqJfem3GTk`

6.6.1 Ejercicios

Problema 26

Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

Problema 27

Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 3x^4 - 20x^3 - 6x^2 + 60x - 8$

Problema 28

Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x-2}$

Problema 29

Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$

Problema 30

Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

Problema 31

Trata de observar los intervalos de crecimiento y de crecimiento de las siguientes funciones ayudándote de la representación gráfica de las mismas:

- $f(x) = x + \sqrt{x}$
- $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
- $f(x) = (x-1)e^{-x}$
- $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

`https://www.geogebra.org/m/tc5pbmae`

6.7 Máximos y mínimos relativos y absolutos

Definition 11. *Una función tiene un **máximo relativo** en $x = a$ si para todo x de un entorno de a se verifica que $f(a)$ es mayor o igual que $f(x)$.*

Definition 12. *Una función tiene un **mínimo relativo** en $x = a$ si para todo x de un entorno de a se verifica que $f(a)$ es menor o igual que $f(x)$.*

Definition 13. *Una función tiene un **máximo(mínimo) absoluto** en $x = a$ si para todo x ded $Dom(f)$ se verifica que $f(a)$ es mayor(menor) o igual que $f(x)$.*

6.7.1 Procedimiento para calcular máximos y mínimos relativos

1. Se calcula la primera derivada, $f'(x)$.

2. Se resuelve la ecuación $f'(x) = 0$.

3. Se sustituyen las raíces de $f'(x) = 0$ en la función inicial $y = f(x)$ y se obtienen los posibles máximos y mínimos relativos.

4. Se calcula la segunda derivada $f''(x)$.

5. Se sustituyen las abscisas de los posibles máximos y mínimos relativos en la segunda derivada $f''(x)$.

`https://www.geogebra.org/m/dpeba4am`

6.7.2 Ejercicios

Problema 32

Clacula los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:

- `https://www.geogebra.org/m/uxmbmw2k`
- `https://www.geogebra.org/m/mubhyvzv`
- `https://www.geogebra.org/m/whfwaz4t`

Problema 33

Calcula los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:

- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$
- $f(x) = 3x^4 - 4x^3$
- $f(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$

6.8 Concavidad y puntos de inflexión

Sea $f(x)$ una función derivable en (a, b). La gráfica de $f(x)$ es convexa ($\bigcup$) en (a, b) si $f'(x)$ es creciente en (a, b), y es cóncava ($\bigcap$) si $f'(x)$ es decreciente en (a, b).

Definition 14. *Un* ***punto de inflexión*** *de una función es un punto en el que la función cambia de convexa ($\bigcup$) a cóncava ($\bigcap$), o viceversa, y la tangente atraviesa la gráfica.*

6.8.1 Procedimiento para hallar los puntos de inflexión

1. Se calcula la segunda derivada $f''(x)$.

2. Se resuelve la ecuación, $f''(x) = 0$.

3. Se sustituyen las raíces de $f''(x) = 0$ en la función inicial $y = f(x)$, y se obtienen los posibles puntos de inflexión.

4. Se halla la tercera derivada, $f'''(x)$.

5. Se sustituyen las abscisas de los posibles puntos de inflexión en la 3ª derivada, $f'''(x)$. Si $f'''(x) \neq 0$, son puntos de inflexión.

`https://www.youtube.com/watch?v=TWrj32omRRY`

6.8.2 Criterio para el estudio de la curvatura

Sea $f(x)$ una función cuya segunda derivada existe en (a, b):

- Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, la gráfica de $f(x)$ es convexa ($\bigcup$) en (a, b).

- Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, la gráfica de $f(x)$ es cóncava ($\bigcap$) en (a, b).

Definition 15. *Estudiar la* ***curvatura*** *de una función consiste en estudiar en qué intervalos es convexa ($\bigcup$) y en cuáles es cóncava ($\bigcap$). Los intervalos de curvatura están separados por los puntos de inflexión y las discontinuidades.*

6.8.3 Procedimiento para calcular la curvatura

1. Se calculan los puntos de inflexión.

2. Se hallan las discontinuidades.

3. Se representan en la recta real $\mathbb{R}$ las abscisas de los puntos de inflexión y las discontinuidades.

4. Se prueba un punto de cada intervalo en la segunda derivada; solamente se considera el signo.
   En los intervalos consecutivos, $f''(x)$ cambia de signo si la multiplicidad de la raíz de $f''(x)$ o de su discontinuidad es impar; si es par, no cambia.

5. Se escriben los intervalos de convexidad ($\bigcup$), que son los correspondientes a $f''(x) > 0$.

6. Se escriben los intervalos de concavidad ($\bigcap$), que son los correspondientes a $f''(x) < 0$.

`https://www.youtube.com/watch?v=I2T9322j-c4`

6.8.4 Ejercicios

Problema 34

Calcula los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

- $f(x) = -x^3 + 3x$
- $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$
- $f(x) = e^{-x^2}$

7 Análisis gráficos de funciones

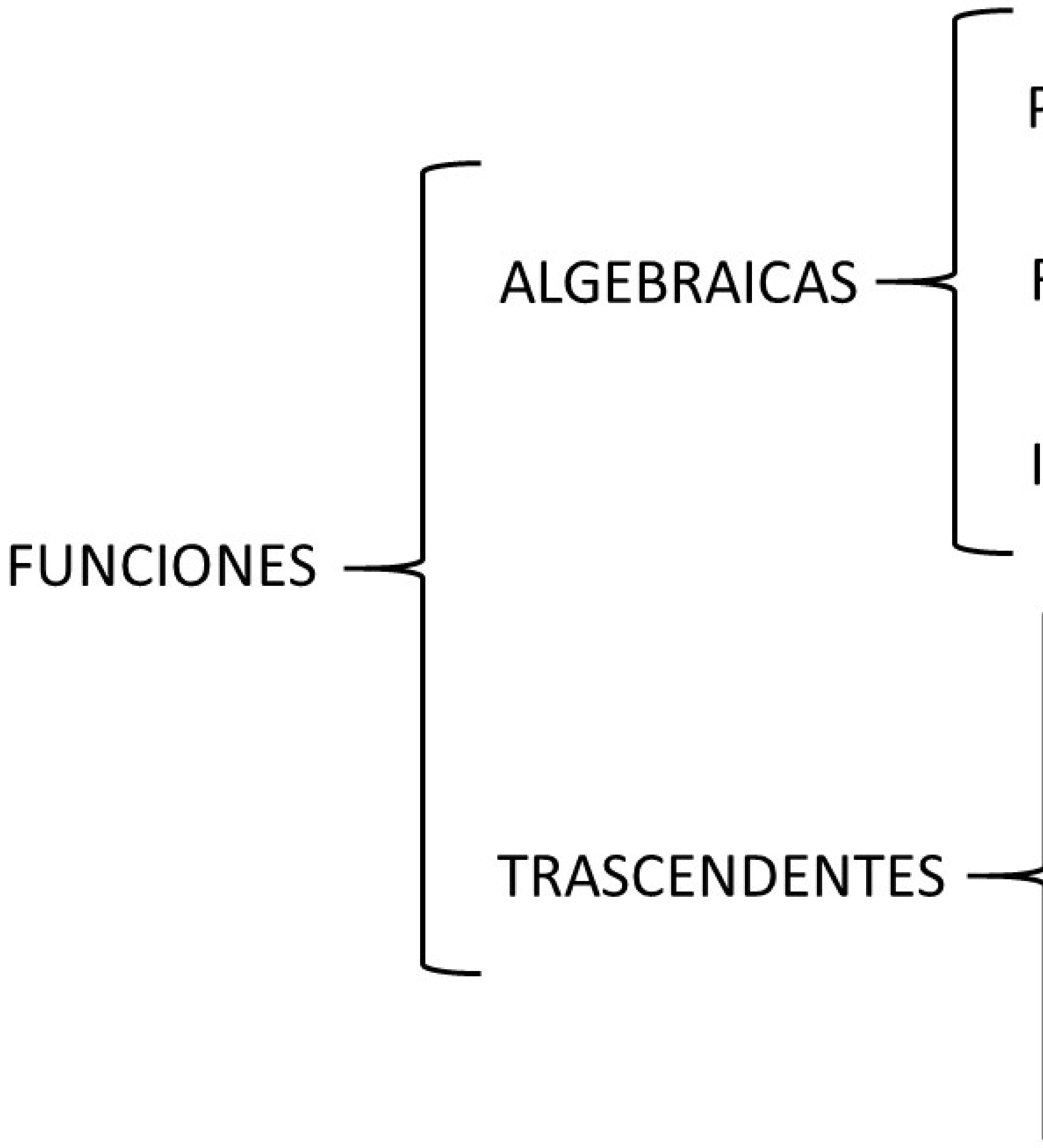
Documento basado en muestra proporcionada por Prof. Toby Roberts (disponible aquí).

7.1 Análisis de la gráfica

Hacer el estudio sobre una gráfica de una función consiste en analizar sus características a partir de lo que se observa en la gráfica. Para realizar este estudio, es necesario llevar a cabo, ordenadamente, los pasos que se indican en la siguiente tabla.

Formulario: características	**Ejemplo:** $\dfrac{x^2+1}{x}$
1. Tipo de función: consiste en clasificar la función.	1. Tipo de función: racional.
2. Dominio de una función: conjunto de valores que toma la variable inependiente **x**. Se representa por **Dom(f)**	
3. Continuidad de una función: una función es continua si se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.	
4. Periodicidad de una función: una función es periódica si se repite en intervalos iguales.	
5. Simetría de una función: se estudiarán sólo las simetrías respecto del origen O(0,0) y respecto del eje Y.	
6. Asíntotas de una función: rectas a las que se acerca la función en puntos muy alejados del origen sin llegar a tocarlas. Las asíntotas pueden ser verticales, horizontales y oblicuas.	
7. Puntos de corte de una función con los ejes: puntos en que $x = 0$ y/o $y = 0$. La gráfica puede cortar al eje X en varios puntos; al eje Y, como máximo, en uno. **Signo:** intervalos del eje X en los que la función es positiva (+) o negativa (-). Las regiones están separadas por las abscisas de los puntos de corte del eje X y por las discontinuidades.	
8. Máximos y mínimos relativos de una función: **Máximo relativo:** punto en el que el valor de la función es mayor que en los puntos que están muy cer-	

7.2 Clasificación de funciones



7.2.1 Ejemplos

- **Polinómicas.** $f(x) = x^3 - 3x$ `https://www.geogebra.org/m/cwt7r5f7`
- **Racionales.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ `https://www.geogebra.org/m/cdwjf88d`
- **Irracionales.** $f(x) = \sqrt{x + 4}$ `https://www.geogebra.org/m/xjn6vrn8`
- **Exponenciales.** $f(x) = 2^{x-3}$ `https://www.geogebra.org/m/faj4urcm`
- **Logarítmicas.** $f(x) = \ln(x - 1)$ `https://www.geogebra.org/m/apzz89ae`
- **Trigonométricas.** $f(x) = \sin(2x)$ `https://www.geogebra.org/m/yvw8jubg`

7.3 Funciones polinómicas

`https://www.youtube.com/watch?v=YXUf8a3M9vk`

7.3.1 Modelo de función polinómica

Analiza y representa la función $y = 2x^2 - \dfrac{x^4}{4}$

- **1. Tipo de función:** polinómica.
- **2. Dominio:** por ser una función polinómica, es toda la recta real $\mathbb{R}$
  Dom(f) $= \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.
- **3. Continuidad:** por ser polinómica, es toda la recta real $\mathbb{R}$.
- **4. Periodicidad:** no es periódica porque las funciones polinómicas nunca lo son.
- **5. Simetrías:** $f(-x) = 2(-x)^2 - \dfrac{(-x)^4}{4} = 2x^2 - \dfrac{x^4}{4}$
  Se observa que $f(-x) = f(x) \to$ función par $\to$ simetría respecto del eje Y.
- **6. Asíntotas:** las funciones polinómicas no tienen asíntotas.
- **7. Corte con los ejes.**

- **Eje X:** $2x^2 - \frac{x^4}{4} = 0 \to x = 0$, raíz doble; $x_1 = 2\sqrt{2}$, $x_2 = -2\sqrt{2}$, raíces simples.
  Se obtienen los puntos $O(0,0)$, $A(-2\sqrt{2},0)$, $B(2\sqrt{2},0)$
- **Eje Y:** es el punto $O(0,0)$
- **Signo:** Si $x = 1 \to f(1) = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} > 0$ (+)

- **8. Máximos y mínimos:**
  $f'(x) = 4x - x^3 \to 4x - x^3 = 0 \to x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 2$, raíces simples.
  $f(x) = 2x^2 - \frac{x^4}{4}$

  - $f(-2) = 4 \to C(-2,4)$
  - $f(0) = 0 \to O(0,0)$
  - $f(2) = 4 \to D(2,4)$

  $f''(x) = 4 - 3x^2$

  - $f''(-2) = -8 < 0 \to C(-2,4)$ **máximo relativo**.
  - $f''(0) = 4 > 0 \to O(0,0)$ **mínimo relativo**.
  - $f''(2) = -8 < 0 \to D(2,4)$ **máximo relativo**.

  Monotonía:
  $f'(x) = 4x - x^3 \to$ Si $x = 1 \to f'(x) = 4 - 1 = 3 > 0$ (+)

- **9. Puntos de inflexión:**
  $f''(x) = 4 - 3x^2 \to 4 - 3x^2 = 0 \to x_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ raíces simples.
  $f(x) = 2x^2 - \frac{x^4}{4}$

  - $f(-\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{20}{9} \to E(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9})$

- $f(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{20}{9} \to F(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9})$

$f'''(x) = -6x$

- $f'''(-\frac{2\sqrt{3}}{3}) = 4\sqrt{3} \neq 0 \to E(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9})$, **punto de inflexión**.
- $f'''(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = -4\sqrt{3} \neq 0 \to F(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9})$, **punto de inflexión**.

- **10. Curvatura:**
  $f''(x) = 4 - 3x^2 \to$ Si $x = 0 \to f''(0) = 4 > 0$ (+)

https://www.geogebra.org/m/ceu6sks6

7.4 Funciones racionales

https://www.youtube.com/watch?v=ARUEwJ_7sGc

7.4.1 Modelo de función racional

Analiza y representa la función $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

- **1. Tipo de función:** racional.

- **2. Dominio:** por ser una función racional, hay que excluir las raíces del denominador: $x^2 - 1 = 0 \to x^2 = 1 \to x_1 = -1$, $x_2 = 1$.
  $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \bigcup (-1, 1) \bigcup (1, +\infty)$

- **3. Continuidad:** es discontinua en $x = -1$, $x = 1$, donde presenta discontinuidades de 1ª especie de salto finito.

- **4. Periodicidad:** no es periódica porque las funciones racionales nunca lo son.

- **5. Simetrías:** $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1}$
  Se observa que $f(-x) = -f(x) \to$ función impar $\to$ simetría respecto al origen $O(0, 0)$

- **6. Asíntotas:**

- Verticales: son las raíces del denominador, $x = -1$, $x = 1$
  Posición de la curva respecto a las asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to -1^-}(\frac{x^3}{x^2-1}) = \frac{(-1^-)^3}{(-1^-)^2-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}(\frac{x^3}{x^2-1}) = \frac{(-1^+)^3}{(-1^+)^2-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}(\frac{x^3}{x^2-1}) = \frac{(1^-)^3}{(1^-)^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}(\frac{x^3}{x^2-1}) = \frac{(1^+)^3}{(1^+)^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

- Horizontales: no tiene.
- Oblicuas: $y = x$
  Posición de la curva respecto de la asíntota oblicua:

$$\lim_{x\to -\infty}(\frac{x}{x^2-1}) = \frac{-\infty}{(-\infty)^2-1} = 0^-$$

$$\lim_{x\to +\infty}(\frac{x}{x^2-1}) = \frac{+\infty}{(+\infty)^2-1} = 0^+$$

- **7. Corte con los ejes:**
  - **Eje X:** $x^3 = 0 \to x = 0$ raíz triple. Se obtiene el punto $O(0,0)$.
  - **Eje Y:** el punto $O(0,0)$.
  - **Signo:** Si $x = 2 \to f(2) = \dfrac{2^3}{2^2-1} = \dfrac{8}{3} > 0(+)$
- **8. Máximos y mínimos relativos:**
  $x^2(x^2-3) = 0 \to x = 0$raíz doble; $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$ raíces simples.
  $f''(-\sqrt{3}) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} < 0 \to A(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2})$, **máximo relativo**.
  $f''(\sqrt{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} > 0 \to B(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2})$, **mínimo relativo**.
  Monotonía:
  $f'(x) = \dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} \to$ Si $x = 2 \to f'(2) = \dfrac{2^4-3\cdot 2^2}{(2^2-1)^2} = \dfrac{4}{9} > 0(+)$
  Las raíces del denominador son discontinuidades dobles.

- **9. Puntos de inflexión:**
  $2x(x^2+3)=0 \rightarrow x=0$ raíz simple.
  $f'''(x) = -\dfrac{6x^4+36x^2+6}{(x^2-1)^4} \rightarrow f'''(0) = -6 \neq 0 \rightarrow O(0,0)$, **punto de inflexión**.
  Curvatura:
  $f''(x) = \dfrac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} \rightarrow$ Si $x=2 \rightarrow f''(2) = \dfrac{2\cdot 2^3+6\cdot 6}{(2^2-1)^3} = \dfrac{28}{27} > 0(+)$
  Las raíces del denominador son discontinuidades triples.

https://www.geogebra.org/m/s2j8hxtz

7.5 Funciones irracionales

https://www.youtube.com/watch?v=akSVuDk_lhw

7.5.1 Modelo de función irracional

Analiza y representa la función $y=\sqrt{x^2-4}$

- **1. Tipo de función:** irracional.

- **2. Dominio:** por ser una función irracional de índice par, el radicando tiene que ser mayor o igual que cero.
  $x^2-4 \geq 0$, se resuelve la ecuación correspondiente $x^2-4=0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x_1=-2$, $x_2=2$. Como las raíces son simples, x^2-4 cambia de signo en cada una de ellas.
  Dom(f)$=(-\infty,-2]\bigcup[2,+\infty)$

- **3. Continuidad:** es discontinua en $x=-2$, $x=2$.

  - Para $x=-2$, se tiene $f(-2)=0$:
    $$\lim_{x\to -2^-}(\sqrt{x^2-4})=0$$
    $$\lim_{x\to -2^+}(\sqrt{x^2-4})\text{no existe}$$
    Por tanto, para $x=-2$, la función tiene una discontinuidad de 2ª especie.

  - Para $x=-2$, se tiene $f(-2)=0$:
    $$\lim_{x\to 2^-}(\sqrt{x^2-4})\text{no existe}$$

$$\lim_{x\to 2^+} (\sqrt{x^2-4}) = 0$$

Por tanto, para $x = 2$, la función tiene una discontinuidad de 2ª especie.

- **4. Periodicidad:** no es periódica. Las funciones irracionales nunca lo son.

- **5. Simetrías:** $f(-x) = \sqrt{(-x)^2-4} = \sqrt{x^2-4}$
Se observa que $f(-x) = f(x)$ →función par → simétrica respecto al eje Y.

- **6. Asíntotas:**
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: presenta asíntotas oblicuas en $y = x$ y en $y = -x$.

- **7. Corte con los ejes:**
  - **Eje X:** $\sqrt{x^2-4} = 0 \to x^2-4 = 0 \to x^2 = 4 \to x_1 = -2,\ x_2 = 2$
  Se obtienen los puntos $A(-2,0)$ y $B(2,0)$
  - **Eje Y:** no lo corta.
  - **Signo:** Si $x = 3 \to f(3) = \sqrt{3^2-4} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5} > 0\ (+)$

- **8. Máximos y mínimos relativos:** $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}} \to x = 0 \notin$ Dom(f)
No tiene ni máximos ni mínimos relativos.
Monotonía: si $x = 3 \to f'(3) = \dfrac{3}{\sqrt{3^2-4}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}} > 0\ (+)$

- **9. Puntos de inflexión:**
$f''(x) = -\dfrac{4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$
$f''(x)$ nunca se hace cero, por lo tanto no ha puntos de inflexión.
Curvatura: si $x = 3 \to f''(3) = -\dfrac{4}{(3^2-4)\sqrt{3^2-4}} = -\dfrac{4}{5\sqrt{5}} < 0$ (-)

`https://www.geogebra.org/m/nxe84yaw`

7.6 Funciones exponenciales

`https://www.youtube.com/watch?v=JulYyOSOhH4`

7.6.1 Modelo de función exponencial

Analiza y representa la función $y = (2-x)e^x$

- **1. Tipo de función:** producto de polinómica por exponencial.
- **2. Dominio:** por ser el producto de una función polinómica por una función exponencial, es toda la recta real $\mathbb{R}$.
  Dom(f) $= \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- **3. Continuidad:** por ser el producto de una función polinómica por una exponencial, es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$.
- **4. Periodicidad:** no es periódica, ya que las funciones polinómicas y exponenciales nunca lo son.
- **5. Simetrías:** $f(-x) = (2+x)e^{-x}$
  Se observa que $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x) \rightarrow$ no es simétrica ni respecto al eje Y ni respecto del orien $O(0,0)$.
- **6. Asíntotas:**
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales:

    $$\lim_{x\to-\infty}((2-x)e^x) = 0$$
    $$\lim_{x\to+\infty}((2-x)e^x) = -\infty$$

    Asíntota horizontal $y = 0$, pero sólo por la izquierda.
    Posición de la curva respecto de la asíntota oblicua:

    $$\lim_{x\to-\infty}((2-x)e^x) = 0^+$$

    La curva está encima de la asíntota.
  - Oblicuas: no tiene.
- **7. Corte con los ejes:**
  - **Eje X:** $(2-x)e^x = 0 \rightarrow x = 2$, raíz simple. Se obtiene el punto $A(2,0)$.
  - **Eje Y:** es el punto $B(0,2)$.
  - **Signo:** Si $x = 0 \rightarrow f(0) = 2 > 0$ $(+)$

- **8. Máximos y mínimos relativos:**
$f'(x) = (1-x)e^x \to (1-x)e^x = 0 \to x = 1$, raíz simple.
$f(x) = (2-x)e^x \to f(1) = e \to C(1, e)$
$f''(x) = -ze^x \to f''(x) = -e < 0 \to C(1, e)$, **máximo relativo**.
Monotonía:
$f''(x) = (1-x)e^x \to$Si $x = 0 \to f'(0) = 1 > 0$ (+)

- **9. Puntos de inflexión:**
$f''(x) = -xe^x \to -xe^x = 0 \to x = 0$, raíz simple.
$f(x) = (2-x)e^x \to f(0) = 2 \to B(0, 2)$
$f'''(x) = -(x+1)e^x \to f'''(0) = -1 \neq 0 \to B(0, 2)$, **punto de inflexión**.
Curvatura:
$f''(x) = -xe^x \to$si $x = 1 \to f''(1) = -e < 0$ (-)

https://www.geogebra.org/m/cthuzvhc

7.7 Funciones logarítmicas

https://www.youtube.com/watch?v=a7mRvMyayVM

7.7.1 Modelo de función logarítmica

Analiza y representa la función $y = \ln(x^2 - 1)$

- **1. Tipo de función:** logarítmica.

- **2. Dominio:** por ser una función logarítmica, el argumento tiene que ser positivo, es decir, mayor que cero.
$x^2 - 1 > 0$, se resuelve la ecuación correspondiente $x^2 - 1 = 0 \to x^2 = 1 \to x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Como las raíces son simples, en cada una de ellas $x^2 - 1$ cambia el signo.
$x^2 - 1 \to$Si $x = 0 \to 0^2 - 1 = -1 < 0$ (-)
Dom(f)=$(-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$

- **3. Continuidad:** es discontinua en $x = -1, x = 1$

  - Para $x = -1$, se tiene $f(-1)$ no existe:

$$\lim_{x \to -1^-} (\ln(x^2 - 1)) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} (\ln(x^2 - 1)) \text{no existe}$$

  Por tanto, para $x = -1$, la función tiene una discontinuidad de 2ª especie.

- Para $x = 1$, se tiene $f(1)$ no existe:

$$\lim_{x \to 1^-} (\ln(x^2 - 1)) \text{no existe}$$

$$\lim_{x \to 1^+} (\ln(x^2 - 1)) = -\infty$$

Por tanto, para $x = 1$, la función tiene una discontinuidad de 2ª especie.

- **4. Periodicidad:** no es periódica, porque las funciones logarítmicas nunca lo son.

- **5. Simetrías:** $f(-x) = \ln[(-x)^2 - 1] = \ln(x^2 - 1)$
Se observa que $f(-x) = f(x) \to$ función par $\to$ simetría respecto del eje Y.

- **6. Asíntotas:**

  - Verticales: $x = -1, x = 1$
  Posición de la curva respecto de las asíntotas verticales:

$$\lim_{x \to -1^-} (\ln(x^2 - 1)) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} (\ln(x^2 - 1)) \text{no existe}$$

$$\lim_{x \to 1^-} (\ln(x^2 - 1)) \text{no existe}$$

$$\lim_{x \to 1^+} (\ln(x^2 - 1)) = -\infty$$

  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.

- **7. Corte con los ejes:**

  - **Eje X:** $\ln(x^2 - 1) = 0 \to x^2 - 1 = 1 \to x^2 = 2 \to x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}$, raíces simples. Se obtienen los puntos $A(-\sqrt{2}, 0); B(\sqrt{2}, 0)$
  Se obtienen los puntos $A(-2, 0)$ y $B(2, 0)$
  - **Eje Y:** no lo corta.
  - **Signo:** Si $x = 2 \to f(2) = \ln(3) > 0$ $(+)$

- **8. Máximos y mínimos relativos:**
  $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-1} \to \dfrac{2x}{x^2-1} = 0 \to x = 0 \notin \text{Dom(f)}$
  No tiene ni máximos ni mínimos relativos.
  Monotonía:
  $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$ $\to$Si $x = 2 \to f'(2) = \dfrac{2 \cdot 2}{2^2-1} = \dfrac{4}{3} > 0\ (+)$

- **9. Puntos de inflexión:**
  $f''(x) = -\dfrac{2x^2+2}{(x^2-1)^2}$
  $f''(x)$ nunca se hace cero, por lo tanto no ha puntos de inflexión.
  Curvatura:
  $f''(x) = -\dfrac{2x^2+2}{(x^2-1)^2}$ siempre es negativo $\to$ siempre es cóncava $(\bigcap)$.

https://www.geogebra.org/m/pgghxa8t

7.8 Funciones trigonométricas

https://www.youtube.com/watch?v=9YmBUGs7NMQ

7.8.1 Modelo de función trigonométrica

Analiza y representa la función $y = 3\sin 2x$

- **1. Tipo de función:** trigonométrica.

- **2. Dominio:** las funciones seno y coseno están definidas en todos los números reales $\mathbb{R}$.
  $\text{Dom(f)} = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

- **3. Continuidad:** el seno y coseno son continuas en toda la recta real $\mathbb{R}$.

- **4. Periodicidad:** es periódica en, de período $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$
  Solo la estudiaremos en el primer período positivo $[0, \pi)$

- **5. Simetrías:** $f(-x) = 3\sin(-2x) = -3\sin(2x)$
  Se observa que $f(-x) = -f(x) \to$ función impar $\to$ simétrica respecto al origen de coordenadas $O(0,0)$.

- **6. Asíntotas:**

  - Verticales: no tiene.

- Horizontales: no tiene.
- Oblicuas: no tiene.

- **7. Corte con los ejes:**
  - **Eje X:** $3\sin(2x) = 0 \rightarrow \sin(2x) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{\pi}{2}$, raíces simples; Se obtienen los puntos $O(0,0); A(\frac{\pi}{2}, 0)$.
  - **Eje Y:** es el punto $O(0,0)$
  - **Signo:** Si $x = \frac{\pi}{4} \rightarrow f(\frac{\pi}{4}) = 3 \cdot \sin(\frac{2\pi}{4}) = 3\sin(\frac{\pi}{2}) > 0\ (+)$

- **8. Máximos y mínimos:**
  $f(x) = 3\sin(2x)$
  - $f(\frac{\pi}{4}) = 3\sin(\frac{\pi}{2}) = 3 \rightarrow B(\frac{\pi}{4}, 3)$
  - $f(\frac{3\pi}{4}) = 3\sin(\frac{3\pi}{2}) = -3 \rightarrow C(\frac{3\pi}{4}, -3)$

  $f''(x) = -12\sin(2x)$
  - $f''(\frac{\pi}{4}) = -12 < 0 \rightarrow B(\frac{\pi}{4}, 3)$, **máximo relativo**.
  - $f''(\frac{3\pi}{4}) = 12 > 0 \rightarrow C(\frac{3\pi}{4}, -3)$, **mínimo relativo**.

  Monotonía:
  $f'(x) = 6\cos(2x) \rightarrow$ Si $x = \frac{\pi}{2} \rightarrow f'(\frac{\pi}{2}) = 6\cos(\pi) = -6 < 0$ (-)

- **9. Puntos de inflexión:**
  $f''(x) = -12\sin(2x) \rightarrow \sin(2x) = 0$
  - $2x = 0 \rightarrow x = 0$, raíz simple.
  - $2x = \pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$, raíz simple.

  $f(x) = 3\sin(2x)$
  - $f(0) = 3\sin(0) = 0 \rightarrow O(0,0)$
  - $f(\frac{\pi}{2}) = 3\sin(\pi) = 0 \rightarrow A(\frac{\pi}{2}, 0)$

  $f'''(x) = -24\cos(2x)$

- $f'''(0) = -24\cos(0) = -24 \neq 0 \to O(0,0)$, **punto de inflexión**.
- $f'''(\frac{\pi}{2}) = -24\cos(\pi) = 24 \neq 0 \to A(\frac{\pi}{2}, 0)$, **punto de inflexión**.

Curvatura:
$f''(x) = -12\sin(2x) \to$ Si $x = \frac{\pi}{4} \to f''(\frac{\pi}{4}) = -12\sin(\frac{\pi}{2}) = -12 < 0$ (-)

https://www.geogebra.org/m/jufgczka

8 Cuestionario final

Resuelve los siguientes ejercicios.
Problema 35
Dadas las funciones $f(x) = 9x - 5$ y $g(x) = 4x + 1$,

- $f(x) + g(x)$
- $f(x) - g(x)$
- $f(x) \circ g(x)$
- $g(x) \circ f(x)$

Problema 36
Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = x^2$,

- $f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f(x)}{g(x)}$
- $f(x) \circ g(x)$
- $g(x) \circ f(x)$

Problema 37
Calcula la función inversa de las siguientes funciones.

- $f(x) = \frac{1}{2x-1}$

- $g(x) = \dfrac{5x-3}{x}$
- $h(x) = \dfrac{1}{3x-2}$

Problema 38
Dada la función $f(x) = x(\ln(x))^2$, calcula:

- Máximos y mínimos relativos.
- Puntos de inflexión.

Problema 39
Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x+1}$

Problema 40
Determina a y b para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 - x + 2$ tenga un mínimo en $x = 2$ y un punto de inflexión en $x = 1/3$

Problema 41
Realice el estudio de las siguientes funciones y esboza sus gráficas:

- $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$
- $e^{-x}(x^2+1)$