Series de Tiempo Univariadas

Lección 4:
Procesos AR, MA y ARMA estacionarios

Manuel Dario Hernandez

Universidad Nacional de Colombia

Presentación basada en las notas de clase del profesor Sergio Calderon (2023) y curso CAEP BR 2024.

Ecuaciones en diferencias

Ecuaciones en diferencias

Notación:

- X_t representa la observación de la variable de estudio X al tiempo t.
- $t \in \mathbb{Z}$, de tal manera que tenemos observaciones en tiempo discreto.
- Si la variable y al tiempo t depende de su pasado en el periodo $t-1$ y de una segunda variable w_t se tiene:

$$X_t = \phi X_{t-1} + w_t \tag{1}$$

La expresión en (1) se conoce como una ecuación lineal en diferencias de primer orden. Para poder solucionar este tipo de ecuaciones es necesario una(s) condicione(s) iniciales.

Ecuaciones en diferencias

Ejemplo 1: Hamilton (1994), donde construye un modelo para la demanda por dinero m_t. El modelo está dado como sigue

$$m_t = 0.27 + 0.72 m_{t-1} + 0.19 I_t - 0.045 r_{bt} - 0.019 r_{ct}, \tag{2}$$

donde,

- I_t es el logarítmo del agregado de ingresos reales,
- r_{bt} es el logarítmo de la tasa de interés de cuentas bancarias, y
- r_{ct} es el logarítmo de la tasa de interés de documentos comerciales.

De esta manera (2) es un caso especial de (1) con $X_t = m_t$, $\phi = 0.72$ y $w_t = 0.27 + 0.19 I_t - 0.045 r_{bt} - 0.019 r_{ct}$.

Solución de la ecuación en diferencias usando substitución recursiva

Tiempo	Ecuación
0	$X_0 = \phi X_{-1} + w_0$
1	$X_1 = \phi X_0 + w_1$
2	$X_2 = \phi X_1 + w_2$
$\vdots$	$\vdots$
t	$X_t = \phi X_{t-1} + w_t$

Ecuaciones en diferencias

Substituyendo X_0 en X_1, se tiene

$$X_1 = \phi^2 X_{-1} + \phi w_0 + w_1.$$

Recursivamente en t se obtiene

$$X_t = \phi^{t+1} X_{-1} + \phi^t w_0 + \phi^{t-1} w_1 + \phi^{t-2} w_2 + \cdots + \phi w_{t-1} + w_t. \tag{3}$$

De (3) es fácil ver o calcular el efecto de w_0 sobre X_t esto es

$$\frac{\partial X_t}{\partial w_0} = \phi^t$$

Ecuaciones en diferencias: Multiplicadores dinámicos

Los resultados en (3) son exactamente los mismos si la simulación dinámica comienza en t así

Tiempo	Ecuación
t	$X_t = \phi X_{t-1} + w_t$
t+1	$X_{t+1} = \phi X_t + w_{t+1}$
t+2	$X_{t+2} = \phi X_{t+1} + w_{t+2}$
$\vdots$	$\vdots$
t+j	$X_{t+j} = \phi X_{t+j-1} + w_{t+j}$

Repitiendo el proceso de substituciones secuenciales X_t en X_{t+1}, luego X_{t+1} en X_{t+2},... obtenemos (4).

$$X_{t+j} = \phi^{j+1} X_{t-1} + \phi^j w_t + \phi^{j-1} w_{t-1} + \phi^{j-2} w_{t-2} + \cdots + \phi w_{t+j-1} + w_{t+j}. \tag{4}$$

Ecuaciones en diferencias: Multiplicadores dinámicos

Luego el efecto de w_t sobre X_{t+j} esta dado por

$$\frac{\partial X_{t+j}}{\partial w_t} = \phi^j$$

Note que el multiplicador dinámico no depende de t. Esto es no depende de las observaciones.

En general, esto se cumple para cualquier ecuación lineal en diferencias.

Ecuaciones en diferencias: Multiplicadores dinámicos

Ejemplo 2. De nuevo del ejemplo de demanda por dinero. Suponga que se quiere medir el efecto del incremento en una unidad de I_t sobre la demanda por dinero dos trimestres adelante sin efectos futuros sobre el ingreso en I_{t+1} y I_{t+2}.

$$\frac{\partial m_{t+2}}{\partial I_t} = \frac{\partial m_{t+2}}{\partial w_t} \frac{\partial w_t}{\partial I_t}$$

Ecuaciones en diferencias: Multiplicadores dinámicos

Del ejemplo 1,

$$m_t = 0.27 + 0.72m_{t-1} + 0.19l_t - 0.045r_{bt} - 0.019r_{ct},$$

$$w_t = 0.27 + 0.19l_t - 0.045r_{bt} - 0.019r_{ct}.$$

Luego,

$$m_{t+1} = 0.72m_t + w_{t+1},$$

y

$$m_{t+2} = 0.72m_{t+1} + w_{t+2}.$$

Substituyendo m_t en m_{t+1} e igualando $\phi = 0.72$,

$$m_{t+1} = \phi^2 m_{t-1} + \phi w_t + w_{t+1}.$$

Substituyendo m_{t+1} en m_{t+2}

$$m_{t+2} = \phi^3 m_{t-1} + \phi^2 w_t + \phi w_{t+1} + w_{t+2}.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial m_{t+2}}{\partial w_t} = \phi^2 = 0.72^2,$$

y

$$\frac{\partial w_t}{\partial I_t} = 0.19.$$

Finalmente,

$$\frac{\partial m_{t+2}}{\partial I_t} = (0.72)^2(0.19) = 0.098,$$

Ecuaciones en diferencias: Multiplicadores dinámicos

Dado que I_t es el log de los ingresos, un incremento de 0.01 unidades de I_t equivale a un aumento del 1% de los ingresos por tanto un incremento en m_t de $(0.01)(0.098) \cong 0.001$ que corresponde a un incremento del 0.1% de la tenencia de dinero.

Así la gente esperará un incremento en sus ahorros del 0.1% dos trimestres adelante si sus ingresos aumentan un 1%.

Nota: Diferentes valores de ϕ en (4) puede producir una variedad de respuestas dinámicas hacia y_t desde w_t.

Ecuaciones en diferencias: Multiplicadores dinámicos

$$X_t = \phi X_{t-1} + w_t, \quad \{w_t\} \sim \text{ iid } \mathrm{N}(0, \sigma^2 = 1)$$

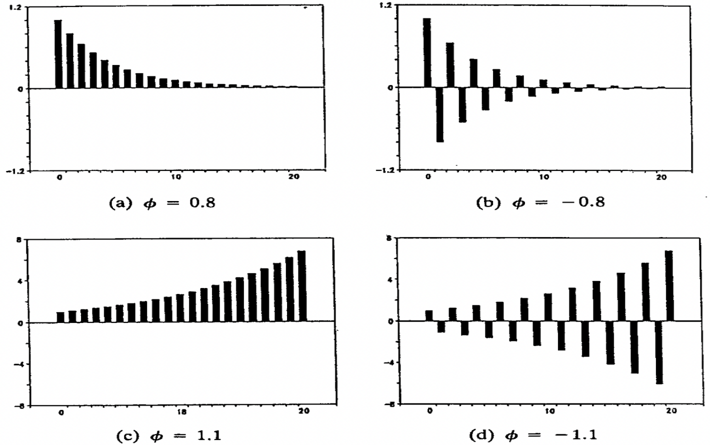


FIGURE 1.1 Dynamic multiplier for first-order difference equation for different values of ϕ (plot of $\partial y_{t+j}/\partial w_t = \phi^j$ as a function of the lag j).

Si $|\phi| < 1$ el sistema es estable.
Si $|\phi| > 1$ el sistema es explosivo.
Si $|\phi| = 1$?

Ecuaciones en diferencias: Ejemplo para ACF de un AR(1)

Recordemos que para un AR(1) tenemos

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \phi^h, \quad h \geq 0,$$

y $\rho(h)$ satisface la recursión

$$\rho(h) = \phi\rho(h-1), \quad h = 1, 2, \ldots.$$

Modelos ARMA, AR y MA

Modelos ARMA

En los modelos de descomposición $X_t = T_t + S_t + \varepsilon_t, t = 1, 2, \ldots$ se estima $\hat{\varepsilon}_t$ y se determina si es o nó ruido blanco mediante el ACF, las pruebas Ljung-Box y Durbin-Watson.

En caso de encontrar que $\hat{\varepsilon}_t$ no es ruido blanco o si la serie X_t no tiene componente de tendencia y/o estacionalidad, el siguiente paso es modelar esta componente (serie) mediante tres posibles modelos

- Medias Móviles de orden q, $MA(q)$.
- Autoregresivos de orden q, $AR(p)$.
- Medias Móviles Autoregresivos, $ARMA(p, q)$.

Modelos ARMA (autoregressive moving-average)

El proceso lineal será el proceso base sobre el cual girará la familia de procesos ARMA, es decir, un proceso ARMA se puede escribir como un proceso lineal.

Los procesos ARMA de su nombre en inglés **Autoregressive-Moving Average**, fueron popularizados por Box y Jenkins en su trabajo del año 1970, y han sido utilizados en múltiples campos.

Modelos ARMA (autoregressive moving-average)

En esta lección presentamos una clase extremadamente importante de series temporales $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ definidas en términos de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. La imposición de esta estructura adicional define una familia paramétrica de procesos estacionarios, los procesos ARMA.

- Para una amplia clase de funciones de autocovarianza $\gamma(\cdot)$ es posible encontrar un proceso ARMA $\{X_t\}$ con FACV $\gamma_X(\cdot)$ tal que $\gamma(\cdot)$ se aproxime bien mediante $\gamma_X(\cdot)$.
- En particular, para cualquier entero positivo K, existe un proceso ARMA $\{X_t\}$ tal que $\gamma_X(h) = \gamma(h)$ para $h = 0, 1, \ldots, K$.
- Por esta (y otras) razones, la familia de procesos ARMA desempeña un papel clave en el modelado de datos de series temporales.

Modelos ARMA

Definición 4.10. *Un proceso estocástico* $\{X_t\}$ *es* $ARMA(p,q)$ *si es estacionario y es la solución de la ecuación en diferencias estocástica*

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q} \quad (4.4)$$

con $\phi_p \neq 0$ *y* $\theta_q \neq 0$, *y* $\{Z_t\} \sim RB(0, \sigma_z^2)$. *Los parámetros* p, q *son los órdenes autoregresivos y de promedios móviles respectivamente.*

Nota 4.11. *La ecuación* $\boxed{4.4}$ *se puede escribir en forma compacta introduciendo el operador de retardo* B. *El operador* B *se define como sigue:*

$$BX_t = X_{t-1}$$

$$B^2X_t = X_{t-2}$$

$$B^3X_t = X_{t-3}$$

$$\vdots$$

$$B^kX_t = X_{t-k}$$

y por definición $B^0X_t = 1 \cdot X_t = X_t$, *es decir, es el operador identidad. De esta manera, entonces la ecuación* $\boxed{4.4}$ *se puede escribir como:*

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

Modelos ARMA

y así, con base en el operador de retardo tenemos:

$$1 \cdot X_t - \phi_1 B X_t - \cdots - \phi_p B^p X_t = 1 \cdot Z_t + \theta_1 B Z_t + \cdots + \theta_q B^q Z_t$$

factorizando, tenemos

$$(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p) X_t = (1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q) Z_t.$$

Así, si definimos los polinomios $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$ *y* $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$*, entonces*

$$\phi(B) X_t = \theta(B) Z_t.$$

A $\phi(B)$ *se le conoce como el polinomio autoregresivo y a* $\theta(B)$ *el polinomio de promedios móviles.*

Modelos ARMA

Nota: En la representación del modelo ARMA de la diapositiva 21, se necesita adicionalmente que los polinomios $\phi(z) = (1 - \phi_1 z - \ldots - \phi_p z^p)$ y $\theta(z) = (1 + \theta_1 z + \ldots + \theta_q z^q)$ no tengan factores en común. Donde z es un número complejo.

Nota. Los procesos *ARMA* son una familia de procesos que sirven para modelar series de tiempo cuya función de autocorrelación o de autocovarianza muestral tienden a cero rápidamente.

Nota: En la representación del modelo ARMA de la diapositiva 21, se necesita adicionalmente que los polinomios $\phi(z) = (1 - \phi_1 z - \ldots - \phi_p z^p)$ y $\theta(z) = (1 + \theta_1 z + \ldots + \theta_q z^q)$ no tengan factores en común. Donde z es un número complejo.

Nota. Los procesos *ARMA* son una familia de procesos que sirven para modelar series de tiempo cuya función de autocorrelación o de autocovarianza muestral tienden a cero rápidamente.

Hay dos subfamilias de los modelos ARMA que son interesantes estudiarlas por separado, que son las familias de modelos autoregresivos puros y de promedios móviles puros.

- Si $\theta(B) \equiv 1$, se dice que la serie temporal $\{X_t\}$ es un proceso autorregresivo de orden $\boldsymbol{p}$(o AR(p)),
- Si $\phi(B) \equiv 1$, se dice que es un proceso de promedio móvil de orden $\boldsymbol{q}$(o MA (q))

Modelos MA

Definición 4.13. *Si en la definición* $\boxed{4.4}$ *establecemos que* $\phi(B) = 1$, *entonces obtenemos*

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q} \tag{4.5}$$

el cual es llamado el proceso MA(q) o de promedios móviles de orden q.

donde $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ ($\theta_q \neq 0$) son los parámetros.

El operador de media móvil es:

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q$$

A diferencia del proceso AR, el proceso MA es estacionario para cualquier valor de los parámetros, puesto que es una combinación finita de una secuencia ruido blanco, por lo cual los dos primeros momentos son invariantes en el tiempo.

Modelos MA

Un MA(q) también se puede escribir como ($\theta_0 = 1$)

$$X_t = \sum_{j=0}^{q} \theta_j Z_{t-j},$$

cuando $q \to \infty$ se obtiene un $MA(\infty)$

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} = \mu + \psi_0 \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots$$

Ejemplo 4.14. Como caso particular consideremos el proceso MA(1), es decir,

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}.$$

Note que le proceso MA(1) es estacionario en el sentido débil.
$E[X_t] = E[Z_t + \theta Z_{t-1}] = E[Z_t] + \theta E[Z_{t-1}] = 0.$
Ahora computemos la función de autocovarianza $Cov(X_{t+h}, X_t)$. Para $h = 0$, tenemos que
$Cov(X_t, X_t) = E[X_t^2] = E[(Z_t + \theta Z_{t-1})^2] = E[Z_t^2 + 2\theta Z_t Z_{t-1} + \theta^2 Z_{t-1}^2]$,
así, $Cov(X_t, X_t) = \sigma_z^2 + \theta^2\sigma_z^2 = (1 + \theta^2)\sigma_z^2$.
Ahora para $h = 1$, $Cov(X_{t+1}, X_t) = E[(Z_{t+1} + \theta Z_t)(Z_t + \theta Z_{t-1})] = \sigma_z^2\theta$..
Note que para $h = 2$, tenemos que
$Cov(X_{t+2}, X_t) = E[(Z_{t+2} + \theta Z_{t+1})(Z_t + \theta Z_{t-1})] = 0.$
Note que para $h \geq 2$ se tiene $Cov(X_{t+h}, X_t) = 0$, entonces resumiendo tenemos que

$$\gamma(h) = \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma_z^2, & \text{si } h = 0, \\ \sigma_z^2\theta, & \text{si } h = 1, \\ 0, & \text{si } h \geq 2. \end{cases}$$

Modelos MA(1)

Así para el modelo MA(1): $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$, tenemos que $E[X_t] = 0$,

$$\gamma(h) = \begin{cases} (1+\theta^2)\,\sigma_Z^2 & h = 0 \\ \theta\sigma_Z^2 & h = 1 \\ 0 & h > 1 \end{cases}$$

y el ACF es

$$\rho(h) = \begin{cases} \frac{\theta}{(1+\theta^2)} & h = 1, \\ 0 & h > 1. \end{cases}$$

Note que $|\rho(1)| \leq 1/2$ para todos los valores de θ. Además, X_t está correlacionado con X_{t-1}, pero no con $X_{t-2}, X_{t-3}, \ldots$.

En contraste, para el caso del modelo AR(1) la correlación entre X_t y X_{t-k} nunca es cero.

En general, como ya se mencionó, para procesos $MA(q)$ tenemos también que es estacionario con $E[X_t] = 0$ y función de autocovarianza dada por:

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma_z^2 \sum_{j=0}^{q-|h|} \theta_j \theta_{j+|h|}, & \text{si } |h| \leq q, \\ 0, & \text{si } |h| > q. \end{cases}$$

Ejercicio 4.15. *Hacer una simulaciones de los proceso MA(1) y MA(2) para diferentes tamaños de muestra* $T = 100, 300, 500$ *y computar la función de autocorrelación muestral para cada caso. Compare la función de autocorrelación muestral con la teórica.*

Modelos MA

Recordemos que $\gamma(h) = \gamma(-h)$, por lo que solo mostraremos los valores para $h \geq 0$.

Nótese que $\gamma(q)$ no puede ser cero porque $\theta_q \neq 0$.

El corte de $\gamma(h)$ después de q rezagos es la firma del modelo MA (q).

Dividiendo $\gamma(h)$ de la dispositiva anterior por $\gamma(0)$ se obtiene la *ACF* de un $MA(q)$:

$$\rho(h) = \begin{cases} \frac{\sum_{j=0}^{q-h} \theta_j \theta_{j+h}}{1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2} & 1 \leq h \leq q \\ 0 & h > q. \end{cases}$$

Definición 4.16. *Consideremos ahora que en la definición* $\boxed{4.4}$ *establecemos que* $\theta(B) = 1$*, entonces tenemos*

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t,$$

que se conoce como el proceso $AR(p)$ *o autoregresivo puro de orden* p*.*

donde $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ ($\phi_p \neq 0$) son los parámetros.

El operador autorregresivo es:

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

Ejemplo 4.17. Como ejemplo consideremos de la definición anterior que $p = 1$, es decir, que establecemos el proceso AR(1)

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t.$$

Establezcamos que $|\phi| < 1$ y que Z_t es no correlacionado con X_s para cada $s < t$, entonces no es difícil verificar que

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z_{t-j}$$

es una solución de la ecuación en diferencias $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$.

Esta representación como filtro lineal de X_t es llamada solución estacionaria del modelo AR(1).

Modelos AR(1)

Para ver que $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z_{t-j}$ es la solución de $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$:

En efecto, dado que la sucesión $\{\phi^j\}$ es absolutamente sumable $\sum_{j=0}^{\infty} \left|\phi^j\right| = \frac{1}{1-|\phi|}$, entonces $\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z_{t-j}$ está bien definido, además es una solución de $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$ la cual es equivalente a $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t$.

Note que al reemplazar en la ecuación anterior a X_t por $\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z_{t-j}$ que es la solución propuesta, tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z_{t-j} - \phi \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z_{t-1-j} \\
&= Z_t + \phi Z_{t-1} + \phi^2 Z_{t-2} + \cdots - \phi(Z_{t-1} + \phi Z_{t-2} + \phi^2 Z_{t-3} + \dots) \\
&= Z_t + \cancel{\phi Z_{t-1}} + \cancel{\phi^2 Z_{t-2}} + \cdots - \cancel{\phi Z_{t-1}} - \cancel{\phi^2 Z_{t-2}} - \phi^3 Z_{t-3} - \dots \\
&= Z_t
\end{aligned}
$$

Lo cual confirma que es la solución.

Note que $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z_{t-j}$ es estacionario con media

$$\mathrm{E}\left(X_t\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \mathrm{E}\left(Z_{t-j}\right) = 0,$$

y función de autocovarianza

$$\begin{aligned}
\gamma(h) = \operatorname{cov}\left(X_{t+h}, X_t\right) &= \mathrm{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z_{t+h-j}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \phi^k Z_{t-k}\right)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\left(Z_{t+h} + \cdots + \phi^h Z_t + \phi^{h+1} Z_{t-1} + \cdots\right)\left(Z_t + \phi Z_{t-1} + \cdots\right)\right] \\
&= \sigma_Z^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{h+j} \phi^j = \sigma_Z^2 \phi^h \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} = \sigma_Z^2 \phi^h \sum_{j=0}^{\infty} \left(\phi^2\right)^j \\
&= \frac{\sigma_Z^2 \phi^h}{1 - \phi^2}, h \geq 0.
\end{aligned}$$

Modelos AR(1)

Recordemos que $\gamma(h) = \gamma(-h)$, por lo que solo exhibiremos la función de autocovarianza para $h \geq 0$.

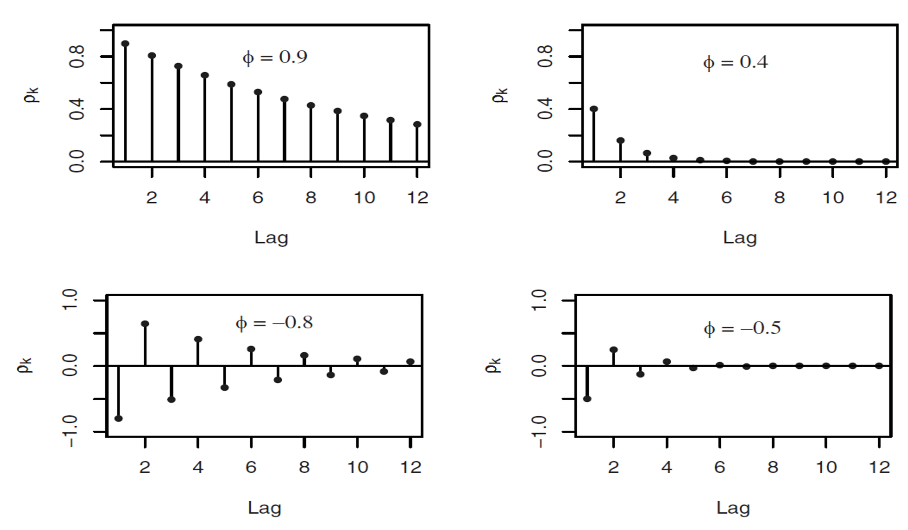
De la función de Autocovarianza anterior $\gamma(h)$, la ACF de un AR(1) es

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \phi^h, \quad h \geq 0$$

y $\rho(h)$ satisface la recursión

$$\rho(h) = \phi\rho(h-1), \quad h = 1, 2, \ldots .$$

ACF teórico para varios modelos AR(1)



Modelos AR(1): ¿Qué sucede si $|\phi| > 1$?

Estos procesos se denominan explosivos porque los valores de la serie temporal se vuelven rápidamente grandes en magnitud.

Claramente, debido a que $|\phi|^j$ aumenta sin límite a medida que $j \to \infty$, $\sum_{j=0}^{k-1} \phi^j Z_{t-j}$ no convergerá (en el cuadrado medio) a medida que $k \to \infty$, por lo que la intuición utilizada para obtener $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z_{t-j}$ (diapositiva 28) no funcionará directamente.

Modelos AR(1): ¿Qué sucede si $|\phi| > 1$?

Estos procesos se denominan explosivos porque los valores de la serie temporal se vuelven rápidamente grandes en magnitud.

Claramente, debido a que $|\phi|^j$ aumenta sin límite a medida que $j \to \infty$, $\sum_{j=0}^{k-1} \phi^j Z_{t-j}$ no convergerá (en el cuadrado medio) a medida que $k \to \infty$, por lo que la intuición utilizada para obtener $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z_{t-j}$ (diapositiva 28) no funcionará directamente.

Sin embargo, podemos modificar ese argumento para obtener un modelo estacionario de la siguiente manera.

Escribimos $X_{t+1} = \phi X_t + Z_{t+1}$, en cuyo caso,

$$X_t = \phi^{-1} X_{t+1} - \phi^{-1} Z_{t+1} = \phi^{-1}\left(\phi^{-1} X_{t+2} - \phi^{-1} Z_{t+2}\right) - \phi^{-1} Z_{t+1}$$

$$\vdots$$

$$= \phi^{-k} X_{t+k} - \sum_{j=1}^{k-1} \phi^{-j} Z_{t+j}$$

Modelos AR(1): ¿Qué sucede si $|\phi| > 1$?

Iterando hacia adelante k pasos. Debido a que $|\phi|^{-1} < 1$, este resultado sugiere el modelo $\mathrm{AR}(1)$ estacionario y dependiente del futuro

$$X_t = -\sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-j} Z_{t+j}$$

Lamentablemente, este modelo es inútil porque requiere que conozcamos el futuro para poder predecirlo.

Cuando un proceso no depende del futuro, como el AR(1) cuando $|\phi| < 1$, diremos que el proceso es causal. En el caso explosivo de este ejemplo, el proceso es estacionario, pero también depende del futuro y no es causal.

Nota . *Si* $|\phi| = \pm 1$ *la ecuación*

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$$

no tiene solución estacionaria. Cuando $\phi = 1$ *el proceso tiene tendencia estocástica como la de una caminata aleatoria, lo cual también se entiende que tiene una raíz unitaria, es decir, la ecuación anterior se reduce a*

$$(1 - B)X_t = Z_t,$$

con lo cual el polinomio autoregresivo $\phi(B) = 1 - B$, *que puede verse como un polinomio en la indeterminada* $z \in \mathbb{C}$, $\phi(z)$, *tiene una raíz en* $z = 1$. *Si* $\phi = -1$, *el proceso producido es explosivo.*

Modelos AR(2)

Supongamos que $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t$ es un proceso causal AR(2). Multiplicamos cada lado del modelo por X_{t-h} para $h > 0$ y tomamos el valor esperado:

$$\mathrm{E}\left(X_t X_{t-h}\right) = \phi_1 \mathrm{E}\left(X_{t-1} X_{t-h}\right) + \phi_2 \mathrm{E}\left(X_{t-2} X_{t-h}\right) + \mathrm{E}\left(Z_t X_{t-h}\right).$$

El resultado es

$$\gamma(h) = \phi_1 \gamma(h-1) + \phi_2 \gamma(h-2), \quad h = 1, 2, \ldots.$$

En la ecuación anterior, usamos el hecho de que $\mathrm{E}\left(X_t\right) = 0$ y para $h > 0$,

$$\mathrm{E}\left(Z_t X_{t-h}\right) = \mathrm{E}\left(Z_t \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-h-j}\right) = 0.$$

Modelos AR(2)

Divida la ecuación de la autocovarianza (Diap. anterior) por $\gamma(0)$ para obtener la ecuación en diferencias para la ACF del proceso:

$$\rho(h) - \phi_1\rho(h-1) - \phi_2\rho(h-2) = 0, \quad h = 1, 2, \ldots .$$

Las condiciones iniciales son $\rho(0) = 1$ y $\rho(-1) = \phi_1/\left(1-\phi_2\right)$, que se obtiene evaluando la ecuación anterior para $h = 1$ y observando que $\rho(1) = \rho(-1)$.

Ver libro de Shumway y Stoffer (2016), página 93, para la solución de esta ecuación en diferencias de segundo orden.

Nota *Para el caso de modelos ARMA generales, el estudio de la estacionariedad recae sobre la función racional*

$$\frac{\theta(z)}{\phi(z)},$$

en el sentido si esta se puede expandir como una serie de potencias en z. Esta expansión recae sobre raíces del polinomio autorregresivo $\theta(z)$

Lectura sugerida: Sección 4.3 (Expansión de funciones Racionales) de las notas de clase del profesor Sergio Calderon (2023).

Expansión de funciones Racionales

Como veremos en los capítulos subsecuentes, muchos de los modelos de series de tiempo contienen funciones de transferencia de la forma $Y_t = \frac{\delta(B)}{\gamma(B)} X_t$. Para que ésta expresión tenga sentido es necesario que el operador $\frac{\delta(B)}{\gamma(B)}$ cumpla una condición de estabilidad.

Es decir, Y_t deberá ser "acotado" siempre que X_t se acotado, lo cual se traduce en que la expansión de la serie(de potencia) $\{\omega_0 + \omega_1 z + \omega_2 z^2 + \cdots\}$ de $\omega(z) = \frac{\delta(z)}{\gamma(z)}$ es que sea convergente siempre que $|z| \leq 1$.

Entonces, será necesario verificar si la serie es o no convergente. La convergencia o no de la serie puede ser verificada expresando el cociente $\frac{\delta(z)}{\gamma(z)}$ como suma de fracciones parciales.

Proposición.

La expansión $\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 z + \omega_2 z^2 + \cdots$ de la función racional $\delta(z)/\gamma(z)$ converge para todo $|z| \leq 1$ si y sólo si cada raíz (son en general funciones de la variable compleja) λ de $\gamma(z) = 0$ cae por fuera del círculo unitario tal que $|\lambda| > 1$, es decir si están por fuera del círculo unitario complejo.

Usando la función *UnitCircle::uc.check* de R, podemos obtener una salida para chequear si las raíces de un polinomio está por fuera del círculo unitario complejo. Un ejemplo está dado en la gráfica 4.1.

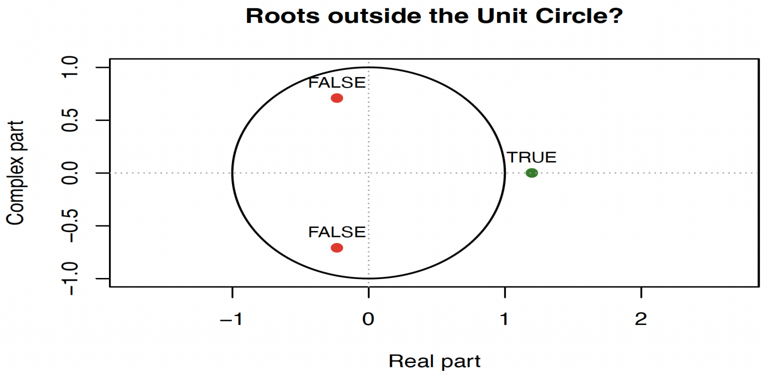


Figura 4.1: Gráfica de las raíces del polinomio $-3x^3 + 2.2x^2 + 2$

Las diapositivas anteriores (Expansión de funciones Racionales) nos establecen que si z no es una raíz de $\alpha(z)$, entonces $\frac{\beta(z)}{\alpha(z)}$ tiene una expansión en potencias en z, donde $\alpha()$ y $\beta()$ son polinomios de grado p y k respectivamente, como sigue:

$$\frac{\beta(z)}{\alpha(z)} = \omega(z) = \{\omega_0 + \omega_1 z + \omega_2 z^2 + \cdots\}$$

Pero los valores de los coeficientes de la expansión son desconocidos. Sin embargo, se puede obtener una relación de recurrencia debido a la igualdad de los polinomios infinitos convergentes. Es decir, si tenemos la relación

$$\frac{\beta(z)}{\alpha(z)} = \omega_0 + \omega_1 z + \omega_2 z^2 + \cdots$$

esta es equivalente a

$$\beta(z) = \alpha(z)(\omega_0 + \omega_1 z + \omega_2 z^2 + \cdots)$$

Relaciones de Recurrencia

la cual haciendo el producto al lado derecho, y utilizando la igualdad de polinomios, tenemos la siguientes relaciones de recurrencia:

$$\begin{aligned} \beta_j &= \sum_{i=0}^{r} \alpha_i \omega_{j-i}; \quad 0 \leq j \leq k, \\ 0 &= \sum_{i=0}^{r} \alpha_i \omega_{j-i}; \quad j > k, \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde $r = \min(p, j)$. Las últimas ecuaciones se puede resolver para ω_j, lo cual se obtiene que los coeficientes de las expansión son:

$$\begin{aligned} \omega_j &= (\beta_j - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \omega_{j-i})/\alpha_0; \quad 0 \leq j \leq k, \\ \omega_j &= -\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \omega_{j-i}/\alpha_0; \qquad j > k. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Las primeras $k+1$ recurrencias son las condiciones iniciales, de ahí en adelante, todos los valores de ω_j se obtiene de forma recurrente.

Modelo ARMA(1,1)

Antes de entrar con unos resultados más generales para los modelos $ARMA(p,q)$, nos enfocaremos en un primer modelo introductorio que es el modelo ARMA(1,1).

Sea $\{X_t\}$ un proceso estocástico que sigue un modelo $ARMA(1,1)$, es decir, es solución estacionaria de la ecuación en diferencias estocástica

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1},$$

donde $\{Z_t\} \sim RB(0, \sigma^2)$ y $\phi + \theta \neq 0$.
En términos del operador de retardo B, el proceso $ARMA(1,1)$ puede escribirse como

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t,$$

donde $\phi(B) = 1 - \phi B$ y $\theta(B) = 1 + \theta B$.

Veamos bajo que condiciones podemos obtener una solución estacionaria. Si $|\phi| < 1$ entonces la función racional $\theta(z)/\phi(z)$ tiene expansión en potencias crecientes para z, es decir:

$$\frac{\theta(z)}{\phi(z)} = \omega(z) = (\omega_0 + \omega_1 z + \omega_2 z^2 + \cdots)$$

cuya recurrencia puede ser encontrada usando 4.7, ya que la raíz de $\phi(z) = 1 - \phi z = 0$, que es $z = 1/\phi$; su valor absoluto $|z| = |1/\phi| > 1$, luego está por fuera del círculo unitario. Entonces:

$$\omega_0 = 1, \quad \text{ya que } r = \min(1, 0) = 0,$$

es decir, $\omega_0 = 1$.

$$\omega_1 = \theta - (-\phi)\omega_0 = \theta + \phi, \quad \text{ya que } r = \min(1, 1) = 1.$$

Note ahora que

$$\omega_2 = -(-\phi\omega_1) = \phi(\theta + \phi), \quad \text{ya que } r = \min(1, 2) = 1.$$

En general se puede ver que

$$\omega_j = \phi^{j-1}(\phi + \theta), \text{ y } \omega_0 = 1.$$

Modelo ARMA(1,1)

Note que la serie $\{\omega_j\}$ es absolutamente convergente, y así el operador $\frac{\theta(B)}{\phi(B)}$ está bien definido y se puede escribir como

$$\frac{\theta(B)}{\phi(B)} = \omega_0 + \omega_1 B + \omega_2 B^2 + \cdots = \omega(B).$$

Entonces, la serie

$$X_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} Z_t = \omega(B) Z_t = Z_t + (\phi + \theta) \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{j-1} Z_{t-j}. \tag{4.8}$$

En otras palabras, lo que hemos hecho es encontrar una solución de la ecuación en diferencias, y además esa solución es estacionaria.

Modelo ARMA(1,1)

- Si $|\phi| > 1$, entonces la única solución estacionaria de $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t + \theta Z_{t-1}$ se puede escribir como

$$X_t = -\theta\phi^{-1}Z_t - (\phi + \theta)\sum_{j=1}^{\infty}\phi^{-j-1}Z_{t+j}, \tag{4.9}$$

  la cual depende de ruidos presentes y futuros (Leer página 143, Sergio Calderon (2023), para los detalles).

- Si $\phi = \pm 1$, entonces no hay solución estacionaria de $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t + \theta Z_{t-1}$. Por lo tanto, no hay un proceso ARMA$(1, 1)$ con $\phi = \pm 1$ ya que debe ser estacionario.

En resumen:

- ✓ Existen soluciones estacionarias y no estacionarias de las ecuaciones del proceso ARMA(1,1) dependiendo del valor de ϕ.
- ✓ Si $|\phi| < 1$ la única solución estacionaria está dada en $\boxed{4.8}$ y es llamada una *solución causable o función causable* de $\{Z_t\}$, ya que X_t puede ser expresado en términos de de valores pasados y presentes de $Z_s, s \leq t$.
- ✓ Si $|\phi| > 1$, la única solución estacionaria es $\boxed{4.9}$, la cual es la solución no causable puesto que X_t es una función de $Z_s, s \geq t$.
- ✓ Si $\phi = \pm 1$, entonces no se tiene solución estacionaria.

Características de los Procesos ARMA(p,q) Generales

- Empezaremos hablando del concepto de causalidad de los procesos $\mathrm{ARMA}(\mathrm{p}, \mathrm{q})$. La idea de causalidad es que el proceso X_t depende únicamente de variables del proceso de ruido $\{Z_t\}$ del pasado y del presente.

- Esto es porque tiene más sentido desde el punto de vista práctico, que se dependa de variables de ruido en el pasado y presente, que se dependa también del futuro de las variables de ruido.

Características de los Procesos ARMA(p,q) Generales

Definición:

Un proceso ARMA(p, q) definido por las ecuaciones

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$$

es llamado causable o función causable de $\{Z_t\}$ si existe una sucesión de constantes $\{\psi_j\}$ tal que $\sum|\psi_j| < \infty$ y

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$$

para cada $t \in \mathbb{Z}$.

Características de los Procesos ARMA(p,q) Generales

En seguida tenemos un resultado que nos permite comprobar de manera fácil si un proceso ARMA es o no causable.

Teorema *Sea X_t un proceso ARMA(p,q) para el cual los polinomios $\phi(\cdot)$ y $\theta(\cdot)$ no tienen ceros en común. Entonces X_t es causable si y solo si $\phi(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \leq 1$, los coeficientes $\{\psi_j\}$ en $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$ son determinados por la relación:*

$$\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \frac{\theta(z)}{\phi(z)}, \ |z| \leq 1.$$

Ver demostración en Brokwell y Davis (2006), página 85.

Note que chequear la causalidad consiste únicamente en ver si las raíces del polinomio $\phi(z)$ están por fuera del círculo unitario complejo.

Características de los Procesos ARMA(p,q) Generales

La secuencia $\{\psi_j\}$ en la diapositiva anterior está determinada por la relación $\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \theta(z)/\phi(z)$, o equivalentemente por la identidad

$$\left(1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p\right)\left(\psi_0 + \psi_1 z + \cdots\right) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q.$$

Igualando los coeficientes de $z^j, j = 0, 1, \ldots$, encontramos que

$$\begin{aligned}
1 &= \psi_0, \\
\theta_1 &= \psi_1 - \psi_0\phi_1, \\
\theta_2 &= \psi_2 - \psi_1\phi_1 - \psi_0\phi_2, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\psi_j - \sum_{k=1}^{p} \phi_k \psi_{j-k} = \theta_j, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

donde $\theta_0 := 1, \theta_j := 0$ para $j > q$, y $\psi_j := 0$ para $j < 0$.

Características de los Procesos ARMA(p,q) Generales

Ejercicio: Cuál de los siguientes procesos son causables?

a. $X_t - 0.2X_{t-1} - 0.48X_{t-2} = Z_t$
b. $X_t + 1.8X_{t-1} + 0.81X_{t-2} = Z_t + 0.8Z_{t-1}$

Características de los Procesos ARMA(p,q) Generales

Teorema . *Si $\phi(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$ entonces las ecuaciones ARMA*

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$$

tiene la única solución estacionaria

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$$

donde los coeficientes ψ_j son determinados por

$$\frac{\theta(z)}{\phi(z)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j, \quad r^{-1} < |z| < r$$

para $r > 1$ (Expansión en series de Laurent). La región $r^{-1} < |z| < r$ es conocido como anillo.

Características de los Procesos ARMA(p,q) Generales

Nota

Si los polinomios $\phi(z)$ y $\theta(z)$ no tienen ceros comunes entonces tenemos lo siguiente:

- Si las raíces de $\phi(z)$ están por fuera del círculo unitario, entonces la solución de la ecuación del modelo ARMA (Diap. 19) es estacionaria y causable.
- Si algunas de las raíces de $\phi(z)$ están por fuera y otras por dentro del circulo unitario, entonces la solución de la ecuación del modelo ARMA (Diap. 19) es estacionaria, pero no es causable.
- Si las raíces de $\phi(z)$ están sobre del círculo unitario, entonces la solución de la ecuación del modelo ARMA (Diap. 19) es no estacionaria.

Características de los Procesos ARMA(p,q) Generales

Existe una definición análoga a la causalidad que es la invertibilidad.

La invertibilidad permite expresar Z_t en términos de $X_s, s \leq t$ y tiene una caracterización similar en términos del polinomio de media móvil.

Definición . *Un proceso ARMA(p,q) definido por las ecuaciones* $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$ *se llama invertible si existe una sucesión de constantes* $\{\pi_j\}$ *tal que* $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$ *y*

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j},$$

para cada $t \in \mathbb{Z}$.

Características de los Procesos ARMA(p,q) Generales

Teorema . *Sea $\{X_t\}$ un proceso ARMA(p,q) para el cual los polinomios $\phi(\cdot)$ y $\theta(\cdot)$ no tiene ceros comunes. Entonces $\{X_t\}$ es invertible si y sólo si $\theta(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \leq 1$, y los coeficientes son determinados por la relación*

$$\pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j = \frac{\phi(z)}{\theta(z)}$$

Ejercicio . *Cuál de los siguientes procesos son invertibles?*

- $X_t + 1.9X_{t-1} + 0.88X_{t-2} = Z_t + 0.2Z_{t-1} + 0.7Z_{t-2}$
- $X_t + 1.8X_{t-1} + 0.81X_{t-2} = Z_t + 0.8Z_{t-1}$

Del teorema anterior, si las raíces del polinomio $\theta(z)$ están por fuera del círculo unitario, el proceso arma se llama **invertible**.

Características de los Procesos ARMA(p,q) Generales

Intercambiando los roles de los polinomios AR y MA, encontramos de la ecuación en diapositiva 54 ($\psi_j - \sum_{k=1}^{p} \phi_k \psi_{j-k} = \theta_j, \quad j = 0, 1, \ldots,$) que la secuencia $\{\pi_j\}$ está determinada por las ecuaciones

$$\pi_j + \sum_{k=1}^{q} \theta_k \pi_{j-k} = -\phi_j, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

donde $\phi_0 := -1$, $\phi_j := 0$ para $j > p$, y $\pi_j := 0$ para $j < 0$.

Características de los Procesos ARMA(p,q) Generales

Ejemplo: Considere el proceso ARMA$(1, 1)$ $\{X_t\}$ que satisface las ecuaciones

$$X_t - 0.5X_{t-1} = Z_t + 0.4Z_{t-1}, \quad \{Z_t\} \sim \mathrm{WN}\left(0, \sigma^2\right).$$

Dado que el polinomio autorregresivo $\phi(z) = 1 - 0.5z$ tiene un cero en $z = 2$, que se encuentra fuera del círculo unitario, concluimos que existe un proceso ARMA único que satisface la ecuación de este ARMA(1,1) y que también es causal.

Los coeficientes $\{\psi_j\}$ en la representación MA (∞) de $\{X_t\}$ se encuentran directamente a partir de la ecuación de la diapositiva 54:

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= 1,\\
\psi_1 &= 0.4 + 0.5,\\
\psi_2 &= 0.5(0.4 + 0.5),\\
\psi_j &= 0.5^{j-1}(0.4 + 0.5), \quad j = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}$$

El polinomio MA $\theta(z) = 1 + 0.4z$ tiene un cero en $z = -1/0.4 = -2.5$, que también se encuentra fuera del círculo unitario.

Esto implica que $\{X_t\}$ es invertible con coeficientes $\{\pi_j\}$ dados por [ver diapositiva 60]

$$\pi_0 = 1,$$

$$\pi_1 = -(0.4 + 0.5),$$

$$\pi_2 = -(0.4 + 0.5)(-0.4),$$

$$\pi_j = -(0.4 + 0.5)(-0.4)^{j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Características de los Procesos ARMA(p,q) Generales

Nosotros fijaremos nuestra atención a procesos ARMA que son causables e invertibles; sin embargo, los procesos ARMA no tiene por qué serlo. Para esto, entonces de resultados de la variable compleja sobre funciones analíticas racionales son necesarios para obtener el siguiente resultado.

Nota: El proceso definido en ecuación (4.4) (diapositiva 19) tiene media cero; sin embargo, no siempre tiene que ser así. Un modelo ARMA con media diferente de cero se define de la siguiente manera:

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q},$$

donde $c \neq 0$, es decir, un modelo ARMA con intercepto. Entonces el valor esperado de éste proceso se puede verificar que es

$$E\left[X_t\right] = \frac{c}{1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p}.$$

Sin embargo, ninguna de las propiedades anteriores se ven modificadas.

Forma de Computar la Función de Autocovarianza de un proceso ARMA (Brockwell and Davis (2016), section 3.2)

En esta sección analizamos tres métodos para calcular la función de autocovarianza $\gamma(\cdot)$ de un proceso ARMA causal $\{X_t\}$.

La función de autocorrelación se encuentra fácilmente desde la función de autocovarianza al dividor por $\gamma(0)$.

La función de autocorrelación parcial (PACF) también se obtiene a partir de la función $\gamma(\cdot)$.

Forma de Computar la Función de Autocovarianza de un proceso ARMA (Brockwell and Davis (2016), section 3.2)

First we determine the ACVF $\gamma(\cdot)$ of the causal ARMA(p, q) process defined by

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t, \quad \{Z_t\} \sim \mathrm{WN}\left(0, \sigma^2\right), \tag{3.2.1}$$

where $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p$ and $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$. The causality assumption implies that

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \tag{3.2.2}$$

where $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \theta(z)/\phi(z), \ |z| \le 1$.

El cálculo de la secuencia $\{\psi_j\}$ fue discutido en la diapositiva 54 ($\psi_j - \sum_{k=1}^{p} \phi_k \psi_{j-k} = \theta_j, \quad j = 0, 1, \ldots,$).

Forma de Computar la Función de Autocovarianza de un proceso ARMA (Brockwell and Davis (2016), section 3.2)

Método 1: La función de autocovarianza γ de un proceso ARMA(p,q) causable $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$ es

$$\gamma(h) = E(X_{t+h}X_t) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+|h|}. \tag{3.2.3}$$

Forma de Computar la Función de Autocovarianza de un proceso ARMA (Brockwell and Davis (2016), section 3.2)

Ejemplo Método 1: The ARMA(1,1) Process

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}, \quad \{Z_t\} \sim \mathrm{WN}\left(0, \sigma^2\right),$$

con $|\phi| < 1$. Teniendo en cuenta la representacion como un MA(∞) visto en la diapositiva 48, dada por

$$X_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} Z_t = \omega(B) Z_t = Z_t + (\phi + \theta) \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{j-1} Z_{t-j}.$$

Al reemplazar en la ecuación (3.2.3) ($\gamma(h) = E\left(X_{t+h} X_t\right)$) (Diapositiva anterior), encontramos que la función de autocovarianza del modelo ARMA(1,1) es

Ejemplo Método 1 (Cont.):

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \\ &= \sigma^2 \left[1 + (\theta + \phi)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} \right] \\ &= \sigma^2 \left[1 + \frac{(\theta + \phi)^2}{1 - \phi^2} \right], \\ \gamma(1) &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{j+1} \psi_j \\ &= \sigma^2 \left[\theta + \phi + (\theta + \phi)^2 \phi \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} \right] \\ &= \sigma^2 \left[\theta + \phi + \frac{(\theta + \phi)^2 \phi}{1 - \phi^2} \right],\end{aligned}$$

and

$$\gamma(h) = \phi^{h-1} \gamma(1), \quad h \geq 2.$$

Forma de Computar la Función de Autocovarianza de un proceso ARMA (Brockwell and Davis (2016), section 3.2)

Método 2:

If we multiply each side of the equations

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q},$$

by X_{t-k}, $k = 0, 1, 2, \ldots$, and take expectations on each side, we find that

$$\gamma(k) - \phi_1 \gamma(k-1) - \cdots - \phi_p \gamma(k-p) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \theta_{k+j} \psi_j, \quad 0 \le k < m, \tag{3.2.5}$$

and

$$\gamma(k) - \phi_1 \gamma(k-1) - \cdots - \phi_p \gamma(k-p) = 0, \quad k \ge m, \tag{3.2.6}$$

where $m = \max(p, q+1)$, $\psi_j := 0$ for $j < 0$, $\theta_0 := 1$, and $\theta_j := 0$ for $j \notin \{0, \ldots, q\}$.

Forma de Computar la Función de Autocovarianza de un proceso ARMA (Brockwell and Davis (2016), section 3.2)

Método 2 (Cont.):

In calculating the right-hand side of (3.2.5) we have made use of the expansion (3.2.2). Equations (3.2.6) are a set of homogeneous linear difference equations with constant coefficients, for which the solution is well known (see, e.g., Brockwell and Davis (1991), Section 3.6) to be of the form

$$\gamma(h) = \alpha_1 \xi_1^{-h} + \alpha_2 \xi_2^{-h} + \cdots + \alpha_p \xi_p^{-h}, \quad h \geq m - p, \tag{3.2.7}$$

where $\xi_1, \ldots, \xi_p$ are the roots (assumed to be distinct) of the equation $\phi(z) = 0$, and $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ are arbitrary constants. (For further details, and for the treatment of the case where the roots are not distinct, see Brockwell and Davis (1991), Section 3.6.) Of course, we are looking for the solution of (3.2.6) that also satisfies (3.2.5). We therefore substitute the solution (3.2.7) into (3.2.5) to obtain a set of m linear equations that then uniquely determine the constants $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ and the $m - p$ autocovariances $\gamma(h), 0 \leq h < m - p$.

Ejemplo Método 2: Para el proceso ARMA(1,1) visto en el ejemplo del método 1, las ecuaciones (3.2.5) son:

$$\gamma(0) - \phi\gamma(1) = \sigma^2(1 + \theta(\theta + \phi)) \tag{3.2.8}$$

and

$$\gamma(1) - \phi\gamma(0) = \sigma^2\theta. \tag{3.2.9}$$

Equation (3.2.6) takes the form

$$\gamma(k) - \phi\gamma(k-1) = 0, \quad k \geq 2. \tag{3.2.10}$$

The solution of (3.2.10) is

$$\gamma(h) = \alpha\phi^h, \quad h \geq 1.$$

Substituting this expression for $\gamma(h)$ into the two preceding equations (3.2.8) and (3.2.9) gives two linear equations for α and the unknown autocovariance $\gamma(0)$.

Estas ecuaciones se resuelven fácilmente, obteniéndose las autocovarianzas ya encontradas para este proceso en el Ejemplo del método 1 (Diap. 68).

Forma de Computar la Función de Autocovarianza de un proceso ARMA (Brockwell and Davis (2016), section 3.2)

Método 3:

The autocovariances can also be found by solving the first $p+1$ equations of (3.2.5) and (3.2.6) for $\gamma(0)\ldots,\gamma(p)$ and then using the subsequent equations given by

$$\gamma(k)-\phi_1\gamma(k-1)-\cdots-\phi_p\gamma(k-p)=0,\quad k\geq m,$$

to solve successively for $\gamma(p+1),\gamma(p+2),\ldots$

This is an especially convenient method for numerical determination of the autocovariances $\gamma(h)$.

Forma de computar la ACF de un proceso ARMA (Brockwell and Davis (2016), section 3.2)

Recall that the ACF of an ARMA process $\{X_t\}$ is the function $\rho(\cdot)$ found immediately from the ACVF $\gamma(\cdot)$ as

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}.$$

Likewise, for any set of observations $\{x_1, \ldots, x_n\}$, the sample ACF $\hat{\rho}(\cdot)$ is computed as

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}.$$

Forma de computar la PACF de un proceso ARMA

The **partial autocorrelation function (PACF)** of an ARMA process $\{X_t\}$ is the function $\alpha(\cdot)$ defined by the equations

$$\alpha(0) = 1$$

and

$$\alpha(h) = \phi_{hh}, \quad h \geq 1,$$

where ϕ_{hh} is the last component of

$$\boldsymbol{\phi}_h = \Gamma_h^{-1} \boldsymbol{\gamma}_h, \tag{3.2.14}$$

$\Gamma_h = [\gamma(i-j)]_{i,j=1}^{h}$, and $\boldsymbol{\gamma}_h = [\gamma(1), \gamma(2), \ldots, \gamma(h)]'$.

For any set of observations $\{x_1, \ldots, x_n\}$ with $x_i \neq x_j$ for some i and j, the **sample PACF** $\hat{\alpha}(h)$ is given by

$$\hat{\alpha}(0) = 1$$

and

$$\hat{\alpha}(h) = \hat{\phi}_{hh}, \quad h \geq 1,$$

where $\hat{\phi}_{hh}$ is the last component of

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_h = \hat{\Gamma}_h^{-1} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_h. \tag{3.2.15}$$

Forma de computar la PACF de un proceso ARMA

Note:

It can be shown (Brockwell and Davis (1991), p. 171) that ϕ_{hh} is the correlation between the prediction errors $X_{t+h} - \hat{X}_{t+h}$ and $X_t - \hat{X}_t$. This is:

$$\phi_{hh} = \operatorname{corr}\left(x_{t+h} - \hat{x}_{t+h}, x_t - \hat{x}_t\right),$$

In general, we have:

Table 3.1. *Behavior of the ACF and PACF for ARMA Models*

	AR(p)	MA(q)	ARMA(p, q)
ACF	Tails off	Cuts off after lag q	Tails off
PACF	Cuts off after lag p	Tails off	Tails off

Metodología Box-Jenkins

Metodología Box-Jenkins.

La metodología Box-Jenkins (1970) refiere a un conjunto de procedimientos para identificar, ajustar y chequear modelos *ARIMA* a datos temporales. El enfoque dado por Box-Jenkins considera tres fases:

1. Identificación
2. Estimación y diagnóstico
3. Aplicaciones

Metodología Box-Jenkins.

1. **Identificación**

- Preparación de datos

  a) Transformación de datos para estabilizar varianza

  b) Diferenciar las series para obtener estacionariedad

- Selección del modelo

  a) Examinar los datos, construir ACF y PACF para identificar potenciales modelos.

En Selección del modelo, se sugiere usar también criterios de información como Akaike (1974) (AIC), criterio de información Bayesiano de Schwarz (1978) (SBIC) o el criterio de Hannan-Quinn (HQIC).

Metodología Box-Jenkins.

2. Estimación y diagnóstico

- Estimación

  a) Estimación de parámetros en modelos potenciales

  b) Selección de modelo a partir de algún criterio

- Diagnóstico

  a) Chequear los ACF y PACF de los residuales.

  b) Realizar la prueba de Portmanteau (o Ljung-Box) para los residuales.

  c) Son los residuales ruido blanco?

En Diagnóstico parte b): Otra alternativa es usar las estadísticas CUSUM y CUSUMQ, para ver que tal adecuado es el modelo ajustado y si se tienen problemas de heterocedasticidad.

3. **Aplicaciones**

- Pronósticos: uso del modelo para pronosticar

- Otras aplicaciones.

Algunas sugerencias para el Diagnóstico del modelo

Si el modelo estimado es adecuado entonces los residuos, $\left(\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{X}_t\right)$, serán ruido blanco (no auto-correlados).

Recomendaciones:

i) Analizar la grafica de los residuos en el tiempo.

ii) verificar $E(\varepsilon_t)=0$, de lo contrario puede faltar constante o diferenciar.

iii) Verificar la estabilidad de la varianza (si no se cumple ese supuesto intentar transformaciones tipo Box-Cox).

iv) Verificar la no auto-correlación:

Si el modelo es adecuado la ACF y la PACF de los residuos deben ser (estadísticamente) iguales a cero luego del retardo cero.

Si no se cumple este supuesto, se debe retornar a la fase de identificación del modelo.

Criterios de Información para Selección de Modelos

- El criterio de información varia de acuerdo a que tan rígido es el termino de penalidad.
- Los tres criterios mas populares son: criterio de información Akaike (1974) (AIC), criterio de información Bayesiano de Schwarz (1978) (SBIC), y el criterio Hannan-Quinn (HQIC).

$$AIC = \ln(\hat{\sigma}^2) + 2k/T$$

$$SBIC = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{k}{T}\ln T$$

$$HQIC = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{2k}{T}\ln(\ln(T))$$

donde $k = p + q + 1$, T = tamaño muestral.

Prueba CUSUM

Definición 4.3.4 (CUSUM). *La suma acumulada CUSUM, se define como*

$$CUSUM_t = \sum_{j=1}^{t} \frac{W_{i+1,i}}{\sigma_W}, \quad t = k, k+1, \ldots, T-1,$$

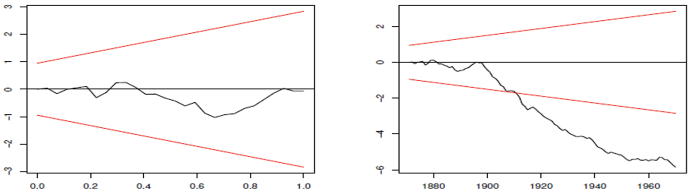
donde

$$\sigma_W = \sqrt{\frac{\sum_{i=k}^{T-1} \left(W_{i+1,i} - \bar{W}\right)^2}{T-k}}, \qquad \bar{W} = \frac{1}{T-k} \sum_{i=k}^{T-1} W_{i+1,i}.$$

Uso: El estadístico $CUSUM_t$ se utiliza para chequear la *estabilidad estructural del modelo.*

Prueba CUSUM

La región de aceptación de la prueba es una banda formada por 2 líneas rectas.



(a) No se rechaza H_0

(b) Se rechaza H_0

Figura 4.4: Región de Rechazo de la Prueba $CUSUM$.

La expresión para las rectas es

$$\pm\, a\left(\sqrt{T-k} + 2\frac{t-k}{\sqrt{T-k}}\right)$$

con $a = 0.948$ para un nivel $\alpha = 0.05$. En las Figuras 4.4 se muestra gráficamente los dos casos posibles.

Prueba CUSUMQ

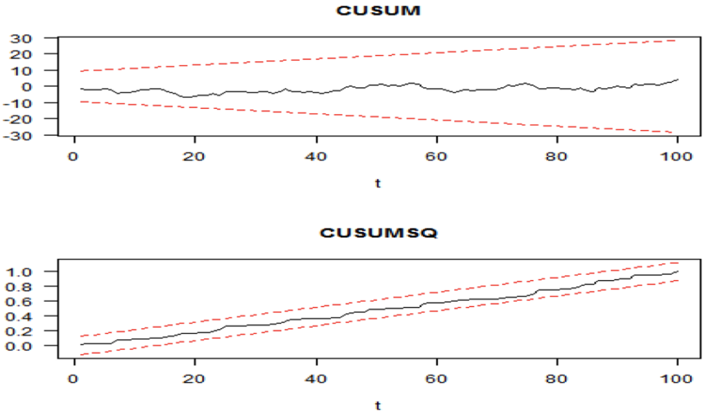
Se define igual que el caso anterior pero con los residuales al cuadrado.

Si existe estabilidad estructural la gráfica de CUSUMSQ_t versus t es una línea recta. Períodos en los cuales aumente la inestabilidad se notarán apartados de esta línea.

Introducido por Brown et al. [1975], es una herramienta estándar en el análisis de series económicas.

Prueba CUSUM y CUSUMQ

Ejemplo: Esto indica que no hay evidencia de la especificación errónea o heteroscedasticidad del modelo estimado.



Lecturas sugeridas:

- Shumway and Stoffer (2016): Secciones 3.1, 3.3 y 3.4.
- Brockwell and Davis (2016): Sección 3.2.
- Sergio Calderon (2023): Capítulo 4: Secciones 4.2 a 4.6.