Series de Tiempo Univariadas.

Brayan Stick Cubides Sarmiento.

7 Mayo 2025

TAREA 1.

1. Demuestre que la autocovarianza $\gamma_X(t+h,t)$ de una MA(1) es la siguiente: Considerando la serie definida por la ecuación:

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1} \quad , \quad t = 0, \pm 1, \dots$$

Donde $\{Z_i\} \sim RB(0,\sigma^2)$ y θ es un valor real constante.

Se puede ver que $E[X_t] = 0$ y $E[X_t^2] = \sigma^2(1+\theta^2) < \infty$

y

$$\gamma_X(t+h,t) = \begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2) & \text{si } h = 0 \\ \sigma^2\theta & \text{si } h = \pm 1 \\ 0 & \text{si } |h| > 1 \end{cases}$$

▷ Promedio movil de primer orden MA(1)
Considerando la serie definida por la ecuación:

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1} \quad , \quad t = 0, \pm 1, \dots$$

Donde $\{Z_i\} \sim RB(0,\sigma^2)$ y θ es un valor real constante.
Se puede ver que $E[X_t] = 0$ y $E[X_t^2] = \sigma^2(1+\theta^2) < \infty$

y

$$\gamma_X(t+h,t) = \begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2) & \text{si } h = 0 \\ \sigma^2\theta & \text{si } h = \pm 1 \\ 0 & \text{si } |h| > 1 \end{cases}$$

Para $h = 0$

$$\gamma(h) = \text{COV}(X_{t+h}, X_t) = \text{COV}(X_t, X_t) = V[X_t] = E[X_t^2] - \cancel{(E[X_t])^2}^{\,0} = \sigma^2(1+\theta^2)$$

Para $h = \pm 1$

$$\begin{aligned} \gamma(1) &= \text{COV}(X_{t+1}, X_t) = \text{COV}(Z_{t+1} + \theta Z_t, Z_t + \theta Z_{t-1}) \\ &= \text{COV}(Z_{t+1}, Z_t) + \text{COV}(Z_{t+1}, \theta Z_{t-1}) + \text{COV}(\theta Z_t, Z_t) + \text{COV}(\theta Z_t, Z_{t-1}) \\ &= 0 + 0 + \theta \cdot V[Z_t] + 0, \text{ por definición de ruido blanco.} \\ &= \theta\sigma^2 \end{aligned}$$

Y sin perdida de generalidad por simetría, se tiene que $\gamma(1) = \gamma(-1) = \theta\sigma^2$

Para $|h|>1$ En primer lugar, para $h>1$

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= cov(X_{t+h}, X_t)\\ &= cov(Z_{t+h}+\theta Z_{t+h-1}, Z_t+\theta Z_{t-1})\\ &= cov(Z_{t+h}, Z_t) + cov(Z_{t+h}, \theta Z_{t-1}) + cov(\theta Z_{t+h-1}, Z_t) + cov(\theta Z_{t+h-1}, Z_{t-1})\end{aligned}$$

y se puede notar que $t-1<t<t+h-1<t+h$

Por lo cual en todos casos los subíndices son diferentes. Y por definición del ruido blanco, $cov(Z_r, Z_s)=0 \quad \forall r\neq s$

Por lo cual $\gamma(h)=0$ para $h>1$

Y por simetría de la autocovarianza, se tendrá $\gamma(h)=0$ para $|h|>1$

2. Sea $\{Z_t\}$ una secuencia de variables aleatorias independientes normales, con $E[Z_t]=0$ y $V[Z_t]=\sigma^2$, y a, b, c valores constantes.
¿Cuáles de los siguientes procesos son estacionarios?
Para cada proceso estacionario, hallar media y autocovarianza.

a) $X_t = a + bZ_t + cZ_{t-2}$ → Estacionario.

- $E[X_t] = a$
- $V[X_t] = V[bZ_t + cZ_{t-2}] = b^2V[Z_t] + c^2V[Z_{t-2}] = \sigma^2(b^2+c^2) < \infty$
- $\gamma(h) = cov(X_{t+h}, X_t) = cov[a+bZ_{t+h}+cZ_{t+h-2}, a+bZ_t+cZ_{t-2}]$

$$= cov[bZ_{t+h}, bZ_t] + cov[bZ_{t+h}, cZ_{t-2}] + cov[cZ_{t+h-2}, bZ_t] + cov[cZ_{t+h-2}, cZ_{t-2}]$$

- Para $h=0$, $\gamma(h) = V[X_t] = \sigma^2(b^2+c^2)$
- Para $h=2$, $\gamma(2) = cov[bZ_{t+2}, bZ_t] + cov[bZ_{t+2}, cZ_{t-2}] + cov[cZ_t, bZ_t] + cov[cZ_t, cZ_{t-2}]$

y

$$= 0 + 0 + bc\cdot cov(Z_t, Z_t) + 0$$
$$= bc\cdot V[Z_t] = bc\cdot\sigma^2$$

Por lo cual para $h=\pm 2 \rightarrow \gamma(h) = bc\cdot\sigma^2$

Por lo cual se da

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2(b^2+c^2) & \text{si } h=0\\ bc\sigma^2 & \text{si } h=\pm 2\\ 0 & \text{e.o.c.}\end{cases}$$

No dependen de t.

b) $X_t = Z_t \cdot \cos(ct) + Z_{t-1} \cdot sen(ct)$ $\longrightarrow$ No estacionario.

- $E[X_t] = \cos(ct) \cdot E[Z_i] + sen(ct) \cdot E[Z_{t-1}] = 0$
- Sea $h = 1$, se puede ver que:

$$\gamma(h) = COV[\cos(c(t+1)) Z_{t+1}, \cos(ct) Z_t] + COV[\cos(c(t-1)) Z_{t+1}, sen(ct) Z_{t-1}]$$
$$+ COV[sen(c(t+1)) Z_t, \cos(ct) Z_t] + COV[sen(c(t-1)) Z_t, sen(ct) Z_{t-1}]$$
$$= 0 + 0 + sen(c(t+1)) \cdot \cos(ct) \cdot COV[Z_t, Z_t] + 0$$

Por lo cual se ve que $\gamma(h)$ depende de t, no es estacionario.

c) $X_t = Z_0 \cdot \cos(ct)$ $\longrightarrow$ No estacionario.

- $E[X_t] = \cos(ct) \cdot E[Z_0] = 0$
- Para $h = 0$, se observa que:

$$\gamma(h) = COV[\cos(ct) \cdot Z_0, \cos(c(t+h)) \cdot Z_0]$$
$$= \cos^2(ct) \cdot V[Z_0]$$, entonces depende de t, no es estacionario.

d) $X_t = Z_t \cdot Z_{t-1}$ $\longrightarrow$ Estacionario.

- $E[X_t] = E[Z_t] \cdot E[Z_{t-1}] = 0$ por independencia
- $V[X_t] = V[Z_t \cdot Z_{t-1}] = E[(Z_t \cdot Z_{t-1})^2] - \cancelto{0}{(E[Z_t \cdot Z_{t-1}])^2}$

$$= E[Z_t^2] \, E[Z_{t-1}^2]$$
$$= V[Z_t] \cdot V[Z_{t-1}^2]$$
$$= \sigma^2 \cdot \sigma^2 < \infty$$

- $\gamma(h) = COV(Z_t \cdot Z_{t-1}, Z_{t+h} \cdot Z_{t+h-1})$
  - Sea $h=0$, entonces $\gamma(h) = V[X_t] = \sigma^4$
  - Sea $h=1$, $\gamma(1) = COV[Z_t \cdot Z_{t-1}, Z_{t+1} \cdot Z_t]$

$$= E[Z_{t+1} \cdot Z_t^2 \cdot Z_{t-1}] - \cancelto{0}{E[X_t] \, E[X_{t+1}]}$$
$$= E[Z_{t+1}] \, E[Z_t^2] \, E[Z_{t-1}]$$
$$= 0 = \gamma(-1) \text{ por simetría.}$$

Sin pérdida de generalidad, por la independencia, $\gamma(h) = 0 \quad \forall \, |h| > 1$ por lo cual no depende de t.

3. Sea $\{X_t\}$ un proceso de media movil de orden 2, MA(2) dado por:

$$X_t = Z_t + \theta \cdot Z_{t-2}, \text{ donde } \{Z_t\} \sim RB(0,1)$$

a. Encontrar la autocovarianza y autocorrelación, cuando $\theta = 0{,}8$

▹ $\gamma(h) = COV[Z_t + 0.8Z_{t-2}, Z_{t+h} + 0.8Z_{t+h-2}]$

$= COV[Z_t, Z_{t+h}] + COV[Z_t, 0.8Z_{t+h-2}] + COV[0.8Z_{t-2}, Z_{t+h}] + COV[0.8Z_{t-2}, 0.8Z_{t+h-2}]$

- Si $h=0$, $\gamma(h) = V[Z_t] + 0.8^2 \cdot V[Z_{t-2}] = 1 + 0.8^2 = 1{,}64 = 41/25$
- Si $h = \pm 2$, $\gamma(h) = COV[Z_t, 0.8Z_t] = 0.8 \cdot \underbrace{V[Z_t]}_{1} = 0.8$
- Si $h = 1$, $\gamma(h) = 0$, por la independencia al ser rezagos distintos.

y sin perdida de generalidad, si $|h| > 2$, $\gamma(h) = 0$

Por lo cual $\gamma(h) = \begin{cases} 1.64 & \text{si } h = 0 \\ 0.8 & \text{si } h = \pm 2 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$

▹ $\rho(h) = \dfrac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$ ya que es estacionario, por lo cual $\rho(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0 \\ 20/41 & \text{si } h = \pm 2 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$

b. Calcule la varianza de la media muestral $(X_1+X_2+X_3+X_4)/4$ cuando $\theta = 0{,}8$

▹ $V[\bar{X}] = V[\frac{1}{4}(X_1+X_2+X_3+X_4)] = \frac{1}{16} V[X_1+X_2+X_3+X_4]$

$= \frac{1}{16}\left[V[X_1] + V[X_2] + V[X_3] + V[X_4] + 2\sum_{i<j} COV(X_i, X_j)\right]$

→ Ya que $V[X_t] = 1{,}64$ y además las unicas autocovarianzas diferentes son las de 2 y −2 rezagos, por lo cual:

$V[\bar{X}] = \frac{1}{16}[4\,V[X_t] + 2(2 \cdot COV[X_t, X_{t+h}])]$

$= \frac{1}{4}[1.64 + 0.8] = 0.61$

c. Repita (b.) con $\theta = -0{,}8$ y comparar la respuesta anterior.

▹ En primer lugar se observa que si $\theta = -0{,}8$, las únicas autocovarianzas que cambian su valor serán si $h = \pm 2$

$$\gamma(h) = COV[Z_t, -0.8Z_t] = -0.8 \cdot \underbrace{V[Z_t]}_{1} = -0{,}8$$

Por lo cual de forma análogo al ejercicio anterior, se tiene:

$V[\bar{X}] = \frac{1}{4}[V[X_t] + COV[X_t, X_{t+2}]]$

$= \frac{1}{4}[1{,}64 - 0{,}8] = 0{,}21$

4. Sea $\{Z_t\}$ ruido I.I.D $N(0,1)$, y definida

$$X_t = \begin{cases} Z_t & \text{si } t \text{ es par} \\ (Z_{t-1}^2 - 1)/\sqrt{2} & \text{si } t \text{ es impar.} \end{cases}$$

a. Mostrar que $\{X_t\} \sim RB(0,1)$, pero que no es ruido I.D.D

▹ Media cero:

- Si t es par, $E[X_t] = E[Z_t] = 0$, por ruido blanco.
- Si t es impar, $E[X_t] = 1/\sqrt{2}\, E[Z_{t-1}^2 - 1] = 1/\sqrt{2}\,(1^2 - 1) = 0$

▹ Varianza Constante:

- Si t es par, $V[X_t] = V[Z_t] = 1$
- Si t es impar, $V[X_t] = 1/2\, V[Z_{t-1}^2 - 1] = 1/2\, V[Z_{t-1}^2]$

$$= 1/2\,[E[Z_{t-1}^4] - (E[Z_{t-1}^2]^2)]$$

Gracias a la Normalidad

y ya que $E[Z_{t-1}^4] = V[Z_{t-1}^2] + (E[Z_{t-1}^2])^2 = 2 + 1^2 = 3$

Entonces $V[X_t] = 1/2\,[3 - 1^2] = 1$, entonces $V[X_t] = 1 \;\forall t$

▹ $\gamma(h)\ \forall_{h \neq 0}$

Se puede ver que todo par X_t, X_{t+h} distintos, involucrará operaciones de Z_t's que son independientes y media cero.

Entonces $\gamma(h) = 0 \;\forall_{h\neq 0}$, así $\gamma(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{si } h \neq 0 \end{cases}$

Por lo tanto $\{X_t\} \sim RB(0,1)$

▹ No es ruido I.I.D:

Ya que por ej con $X_3 = 1/\sqrt{2}\,[Z_2^2 - 1]$, pero $X_2 = Z_2$,

Por lo cual X_3 depende de X_2

b. Encontrar $E[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n]$ para n par y n impar, y comparar.

▹ Si n es impar, $X_{n+1} = Z_{n+1}$, no depende de sus rezagos $X_1, \dots, X_n$

entonces $E[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n] = E[Z_{n+1}] = 0$

▹ Si n es par, entonces $X_{n+1} = 1/\sqrt{2}\,[Z_n^2 - 1] = 1/\sqrt{2}\,[X_n^2 - 1]$

lo cual asumiendo el condicional que X_n es conocido,

$$E[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n] = 1/\sqrt{2}\,[X_n^2 - 1]$$