homework-1（仅供参考）

---

1 ch1.1

1.1 第一问
1.2 第二问
1.3 第三问

2 ch1.2

2.1 第一问
2.2 第二问
2.3 第三问
2.4 第四问

3 ch1.3

3.1 第一问
3.2 第二问
3.3 第三问

4 ch1.5

5 ch1.6

6 ch1.7

7 ch1.8

8 ch1.9

9 ch1.10

10 ch1.11

ch1

1 ch1.1

已知圆周率 $\pi = 3.141592654\cdots$ ，问:

1. 若其近似值取5位有效数字，则该近似值是多少?其误差限是多少?
2. 若其近似值精确到小数点后面4位，则该近似值是什么?其误差限是什么?
3. 若其近似值的绝对误差限为 0.5×10^{-5}?,则该近似值是什么?

1.1 第一问

取 $x^* = 0.31416\times10^1$ ，取 $m=1$ ，因此:

$$\begin{aligned} |\pi - x^*| &< 0.7346\times10^{-5} \\ &< 0.5\times10^{-4} \\ &= 0.5\times10^{1-5} \end{aligned} \tag{1}$$

1.2 第二问

取 $x^* = 3.1416$ ，考虑其误差:

$$\begin{aligned} |e^*| &= |\pi - x^*| \\ &= |\pi - 3.1416| \\ &< 0.7346\times10^{-5} \\ &< 0.5\times10^{-4} \end{aligned} \tag{2}$$

取误差限为 $\varepsilon^* = 0.5\times10^{-4}$ 。

1.3 第三问

$|e^*| = 0.5\times10^{-5}$ ，取 $x^* = 3.14159$ 时检验其绝对误差如下:

$$\begin{aligned} |e^*| &= |\pi - x^*| \\ &< 2.654\times10^{-6} \\ &< 0.5\times10^{-5} \end{aligned} \tag{3}$$

因此近似值取 3.14159 即可。

2 ch1.2

下列各数都是经过四舍五入得到的近似值，求各数的绝对误差限、相对误差限和有效数字的位数。

1. 3580
2. 0.0746
3. 30.120
4. 0.3012×10^{-5}

2.1 第一问

$$x^* = 3580 = 0.3580 \times 10^4 \tag{4}$$

取 $m = 4$，$|e^*| \leq 0.5 \times 10^0$，有 $m - n = 0$，因此 $n = 4$，所以取 $\varepsilon^* = 0.5$，有相对误差如下：

$$\varepsilon_r^* = \frac{0.5}{3580} \times 100\% \approx 0.01397\% \tag{5}$$

有效数字位数为 4 。

2.2 第二问

$$x^* = 0.0476 = 0.476 \times 10^{-1} \tag{6}$$

取 $m = -1$，$|e^*| \leq 0.5 \times 10^{-4}$，有：$m - n = 4$，因此有 $n = 3$ 。所以取 $\varepsilon^* = 0.5 \times 10^{-4}$，相对误差如下：

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^* &= \frac{0.5 \times 10^{-4}}{0.0476} \times 100\% \\ &= 0.105\% \end{aligned} \tag{7}$$

有效数字位数为 3 。

2.3 第三问

$$x^* = 30.120 = 0.30120 \times 10^2 \tag{8}$$

取 $m = 2$，$|e^*| \leq 0.5 \times 10^{-3}$，有 $m - n = -3$，因此有 $n = 5$，所以取 $\varepsilon^* = 0.5 \times 10^{-3}$，相对误差如下：

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^* &= \frac{0.5 \times 10^{-3}}{30.120} \times 100\% \\ &\approx 0.0017 \times 100\% \end{aligned} \tag{9}$$

有效数字位数为 5 。

2.4 第四问

$$x^* = 0.3012 \times 10^{-5} \tag{10}$$

取 $m = -5$， $|e^*| \leq 0.5 \times 10^{-9}$，有：$m - n = -9$，因此有 $n = 4$，故 $\varepsilon^* = 0.5 \times 10^{-9}$，相对误差如下：

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^* &= \frac{0.5 \times 10^{-9}}{0.3012 \times 10^{-5}} \times 100\% \\ &\approx 0.017\% \end{aligned} \tag{11}$$

有效数字位数为 4 。

3 ch1.3

确定圆周率 π 如下近似值的绝对误差限、相对误差限、并求其有效数字的位数。

1. $\frac{22}{7}$
2. $\frac{223}{71}$
3. $\frac{335}{113}$

3.1 第一问

$$\begin{aligned} |e^*| &= |\pi - \frac{22}{7}| \\ &\approx 0.13 \times 10^{-2} \\ &< 0.5 \times 10^{-2} \end{aligned} \tag{12}$$

因此 $\varepsilon^* = 0.0013$ ，相对误差限：

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^* &= \frac{0.0013}{\frac{22}{7}} \times 100\% \\ &= 0.0417 \times 100\% \end{aligned} \tag{13}$$

且 $m = 1, m - n = -2 \to n = 3$ ，因此有 3 位有效数字。

3.2 第二问

$$\begin{aligned} |e^*| &= |\pi - \frac{223}{71}| \\ &\approx 0.00075 \\ &< 0.5 \times 10^{-2} \end{aligned} \tag{14}$$

因此绝对误差限 $\varepsilon^* = 0.75 \times 10^{-3}$ ，相对误差：

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^* &= \frac{0.75 \times 10^{-3}}{\frac{223}{71}} \times 100\% \\ &= 0.024\% \end{aligned} \tag{15}$$

同第一问，有效数字位数为 3 。

3.3 第三问

$$\begin{aligned} |e^*| = &\ |\pi - \frac{335}{113}| \\ &= 0.177 < 0.5 \times 10^0 \end{aligned} \tag{16}$$

因此绝对误差限 $\varepsilon^* = 0.177$ ，相对误差如下：

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^* &= \frac{0.177}{\frac{335}{113}} \times 100\% \\ &= 5.97\% \end{aligned} \tag{17}$$

此时 $m = 1, m - n = 0 \to n = 1$ ，仅有 1 位有效数字。

4 ch1.5

要使 $\sqrt{6}$ 的的近似值的相对误差限小于 0.1% 要取几位有效数字?

$$\sqrt{6} \approx 0.24494897 \times 10^1 \tag{18}$$

有 $m=1$ ， $x_1=2$ 则此时要求:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^* &= \frac{|e^*|}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{\frac{1}{2x_1} \times 10^{-(n-1)}}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{10^{1-n}}{2\sqrt{6}x_1} < 0.1\% \end{aligned} \tag{19}$$

因此要求 $n > 3.0089$ ，取 $n=4$ 即可，也即取 4 位有效数字即可。

---

5 ch1.6

已知近似数 x^* 的相对误差限为 0.3% 问 x^* 至少有几位有效数字?

$$\varepsilon_r^* = \frac{1}{2x_1} \times 10^{1-n} \geq 0.3\% \tag{20}$$

取 $x_1=9$ 时，有 $2.27 \geq n$ ，因此至少有 2 位有效数字。

---

6 ch1.7

设 $x>0$ ， x^* 的相对误差限为 δ ，求 $\ln x^*$ 的绝对误差限和相对误差限。

$$e_r^* = \frac{|x-x^*|}{|x^*|} \leq \delta \rightarrow |e^*| \leq \delta |e^*| \tag{21}$$

$$\begin{aligned} |e(\ln x^*)| &= |\ln x - \ln x^*| \\ &= \left|\ln \frac{x}{x^*}\right| \\ &= \left|\ln\left(1+\frac{x-x^*}{x^*}\right)\right| \end{aligned} \tag{22}$$

根据公式 $x > \ln(x+1)$ （这点可以用导数求得），因此:

$$|e(\ln x^*)| \leq \left|\frac{x-x^*}{x^*}\right| \leq \delta \tag{23}$$

因此 $\varepsilon(\ln x^*) = \delta$ ，因此相对误差:

$$\varepsilon_r(\ln x^*) = \frac{\delta}{\ln x^*} \tag{24}$$

或者此题也可以直接用公式导出:

$$\ln x - \ln x^* = (\ln x)'|_{x=x^*} e^* = \frac{e^*}{x^*} \tag{25}$$

7 ch1.8

$$\begin{aligned}e_r(V^*) &= \frac{V-V^*}{V^*} \\ &= \frac{r^3-r^{*3}}{r^{*3}} \\ &= \frac{\frac{dr^3}{dr}|_{r=r^*}e^*}{r^{*3}} \\ &= \frac{3e^*}{r^*} \\ &= 3e_r^*\end{aligned} \tag{26}$$

因此要求半径的相对误差应有:

$$|e_r^*| \leq 0.1\% \tag{27}$$

8 ch1.9

真空中自由落体运动距离 s 和时间 t 的关系是 $s=\frac{1}{2}gt^2$ ，设重力加速度 g 是准确的，而 t 的测量有 $\pm 0.1s$ 的误差，证明当 t 增加时，距离 s 的绝对误差增加，而相对误差减小。

$$\begin{aligned}e_r^*(s) &= \frac{s-s^*}{s^*} \\ &= \frac{t^2-t^{*2}}{t^{*2}} \\ &= \frac{2t^*e^*}{t^{*2}} \\ &= \frac{2e^*}{t^*}\end{aligned} \tag{28}$$

其中 $e^*(s)=2t^*e^*$ 。且 $|e^*| \leq 0.1s$ ，因此 $e^*(s)$ 随时间 t^* 增加而增加，$e_r^*(s)$ 随 t^* 增加而减小。

9 ch1.10

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^1 \frac{x}{x+5}x^{n-1}dx \\ &= \int_0^1 x^{n-1}dx - 5\int_0^1 \frac{x_{n-1}}{x+5}dx \\ &= \frac{1}{n} - 5I_{n-1}\end{aligned} \tag{29}$$

上述递推关系会放大误差，计算不稳定，而改写作:

$$I_{n-1} = \frac{1}{5n} - \frac{1}{5}I_n \tag{30}$$

则会缩小递推误差，计算稳定。

10 ch1.11

设 $a=1000$ ，取 4 位有效数字用如下两个等价的式子

$$x=\sqrt{a+1}-\sqrt{a} \quad x=\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}} \tag{31}$$

进行计算，求 x 的近似值 x^* 并将结果与准确值 $x=0.015807437\cdots$ 进行比较，各有多少位有效数字。

选择 1 式子:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \sqrt{1001}-\sqrt{1000} \\ &\approx 31.64-31.62 \\ &= 0.02 = 0.2\times 10^{-1} \end{aligned} \tag{32}$$

误差:

$$|x-x_1^*| \approx 0.0042 < 0.5\times 10^{-2} \tag{33}$$

所以 $m-n=-2, n=1$，仅有一位有效数字。

选择 2 式子:

$$\begin{aligned} x_2^* &\approx \frac{1}{31.64+31.62} \\ &\approx 0.01581 = 0.1581\times 10^{-1} \end{aligned} \tag{34}$$

$m=-1$，误差:

$$|x-x_2^*| \approx 0.257\times 10^{-5} < 0.5\times 10^{-5} \tag{35}$$

因此 $m-n=-5, n=4$ ，此时具有 4 位有效数字。
