

大气飞行力学

飞机基本飞行性能

Instructor 龚正

BX2201913 包晨宇

2022 年 10 月 31 日

目录

| | |
|---|-----------|
| 1 作业要求及实现方式 | 1 |
| 1.1 作业要求 | 1 |
| 1.2 实现方式 | 1 |
| 2 准备工作 | 3 |
| 2.1 国际标准大气模型 | 3 |
| 2.1.1 大气性质 | 3 |
| 2.1.2 海平面大气数据 | 3 |
| 2.1.3 标准大气模型 | 4 |
| 2.2 拟合原理及方法 | 5 |
| 2.2.1 最小二乘法拟合多项式函数 | 6 |
| 2.2.2 拟合方法 | 7 |
| 2.3 插值原理及方法 | 7 |
| 2.3.1 三次样条插值原理 | 7 |
| 2.3.2 样条插值方法 | 8 |
| 3 升力阻力性能 | 9 |
| 3.1 升力阻力特性概述 | 9 |
| 3.1.1 升力特性概述 | 9 |
| 3.1.2 阻力特性概述 | 10 |
| 3.2 不同马赫数下的全机升力系数斜率 $C_{l\alpha}$ | 10 |
| 3.3 不同马赫数下的零升阻力系数 C_{D0} | 11 |
| 3.4 不同马赫数下的升致阻力因子 A | 11 |
| 3.5 极曲线 | 12 |
| 4 推力性质 | 13 |
| 4.1 需用推力 T_R | 13 |
| 4.2 可用推力 T_a | 13 |
| 5 速度特性 | 15 |
| 5.1 飞行包线与几个特征速度 | 15 |
| 5.1.1 飞行包线的确定 | 15 |
| 5.1.2 有利飞行马赫数 M_{opt} 的确定 | 15 |
| 5.1.3 陡升飞行马赫数 M_γ 的确定 | 15 |
| 5.1.4 飞行包线的绘制 | 16 |
| 5.2 上升率 V_v 特性 | 17 |
| 5.2.1 上升率 V_v 的推导 | 17 |
| 5.2.2 不同高度的上升率曲线 | 17 |
| 5.2.3 单位重量剩余功率 SEP 云图与最快上升路径 | 18 |
| 5.3 上升率所确定的升限 | 19 |

| | | |
|----------|---------------------------|-----------|
| 5.4 | 飞行包线中的快升速度 | 20 |
| 6 | 续航性能 | 21 |
| 6.1 | 小时耗油量与千米耗油量 | 21 |
| 6.2 | 飞行包线中的久航速度与远航速度 | 21 |

1 作业要求及实现方式

1.1 作业要求

在已知某飞行器飞行数据的情况下，计算其基本飞行性能，并对数据做可视化处理。
已知的飞行器飞行数据如下：

- 飞机质量 $m = 263\text{kg}$;
- 不同迎角 α 与飞行马赫数 Ma 下的升力系数 C_L ;
- 不同迎角 α 与飞行马赫数 Ma 下的阻力系数 C_D ;
- 不同海拔高度 h 与飞行马赫数 Ma 下的加力推力大小 T_{AB} ;
- 不同海拔高度 h 与飞行马赫数 Ma 下的发动机推力大小 T 。

需要求取与绘制的飞行性能数据如下：

1. 跨音速马赫数下的极曲线 $C_D - C_L$;
2. 不同迎角 α 下, $C_{D0}(Ma)$ 、 $A(Ma)$ 与 $C_{l\alpha}(Ma)$ 的曲线图象;
3. 加力与非加力状态下的推力曲线（即需用推力 T_R 的求取, T_a 是已有数据);
4. 加力与非加力状态下的理论飞行包线;
5. 理论静升限的求取;
6. SEP 图像。

1.2 实现方式

本次作业涉及数据的读取、处理、绘制，以及方程求解、插值等，因此本次作业选择的实现方式如下：

- 编程语言选取 `julia`，其兼具解释型语言的灵活与编译型语言的速度，适合做科学计算；
- 原始数据为 XML 格式，本次作业采用 `XMLDict.jl` 进行数据读取，并在程序内用 `struct` 管理飞行数据；
- 原始数据为离散点，在实际处理过程中需要插值处理，而简单的线性插值不能满足精度要求，因此本次作业采用 `Dierckx.jl` 包进行二次或三次的数据插值处理；
- 在计算过程中，会涉及到方程的求解问题，本次作业采用 `Roots.jl` 包求解非线性方程；

- 在计算 SEP 的 $V_{v.\max}$ 时, 需要进行极大值的求取, 本次作业再用 Optim.jl 包进行处理;
- 因为涉及到函数拟合过程, 自行推导并实现最小二乘拟合;
- 本次作业涉及到曲线绘图, 采用 Plots.jl 包进行示意; 部分图片采用 tikz 进行绘制;
- 为方便索引与公式书写, 本次作业报告用 LaTeX 撰写。

2 准备工作

2.1 国际标准大气模型

因为在计算飞行器飞行性能时，往往需要大气参数（在各个高度上的温度、密度压强等）值，才能得到计算结果，比如升力与阻力的计算中需要用到大气高度上的密度 ρ 与声速 a 。因此在计算飞行性能前，需要构建一个可用的大气模型。

为了满足飞机的设计与计算，处理和分析飞机的飞行试验数据，进行飞行性能参数计算等方面的需求，国际民航组织（ICAO）制定了国际标准大气（ISA）作为为衡量、比较飞机性能的公共的标准。本文也拟采用该大气模型作为估算飞行性能的标准。

2.1.1 大气性质

大气的基本基本状态参量温度 T 、压强 p 和密度 ρ 满足大气状态方程：

$$p = \rho RT \quad (2.1)$$

上式中 p 单位为 $Pa(N/m^2)$ ， ρ 单位为 kg/m^3 ， T 单位为开尔文 K 。 R 为大气的气体常数，通常取为：

$$R = 287.06(N \cdot m)/(kg \cdot K) \quad (2.2)$$

在计算过程中，大气中的声速也是一个常用的参数指标。声波是一种微弱的扰动波，在传递过程中只有压力波（压强）的变化而引起传递介质疏密程度的变化产生的振动，并没有物质的交换。在飞机的飞行性能分析中大气的声速是用来表征空气压缩性的参量或尺度。大气中声速取决于大气的温度，声速 $c(m/s)$ 的计算公式为：

$$c = \sqrt{\gamma RT} \quad (2.3)$$

其中 γ 比热比，对于空气而言取为 1.4。为带入式 2.1 可得另一个声速计算公式如下：

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \quad (2.4)$$

另外，平静大气的压强 p 随高度 h 的变化规律满足如下流体静力学方程：

$$dp = -\rho g dh \quad (2.5)$$

上式中 g 表示重力加速度，单位 m/s^2 ，高度为 h ，单位为 m 。

2.1.2 海平面大气数据

在各个高度上的大气数据需要选取一个海拔基准，ISA 一般采用海平面参数作为基准。在海拔为 0 的海平面上，规定大气参数如下：

$$\begin{cases} T_0 = 15^\circ\text{C} = 288.15\text{K} \\ p_0 = 1013.25\text{hPa} \\ \rho_0 = 1.225\text{kg/m}^3 \\ c_0 = 340.294\text{m/s} \\ g_0 = 9.80665\text{m/s}^2 \end{cases} \quad (2.6)$$

需要注意的是，因为飞行器的飞行高度往往在海拔 30km 以内，在此范围内，温度、密度、压强和声速参数有较剧烈变化，而因为 30km 高度相较于地球半径而言是一个小量，因此在此范围内不考虑重力加速度 g_0 值的变化。

2.1.3 标准大气模型

在考虑飞行高度时，往往将大气划分为两个部分：对流层 (troposphere) 和平流层 (stratosphere)。一般而言将海拔 $0 \sim 11\text{km}$ 的高度定义为对流层，该范围内大气参数变化明显，而平流层定义为 $11\text{km} \sim 20\text{km}$ 部分，该范围内大气参数变化较为平缓。

其中温度在对流层内的计算公式为：

$$T(h) = T_0 - \lambda h \quad h \leq 11\text{km} \quad (2.7)$$

上式中 λ 为 $6.5^\circ\text{C}/\text{km}$ ，表明海拔每上升 1km ，气温下降 6.5 摄氏度。而在平流层内温度近似不变为：

$$T(h) \approx T(11\text{km}) = 216.65\text{K} \quad (2.8)$$

带入 2.5 得到：

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{R} \frac{dh}{T(h)} \quad (2.9)$$

于是可以推导得到大气压强 p 的取值：

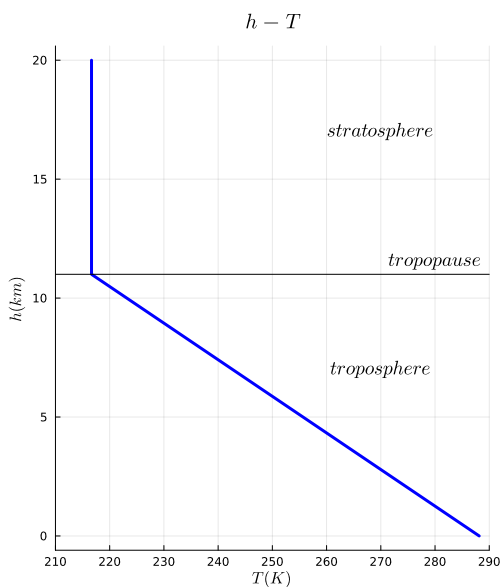
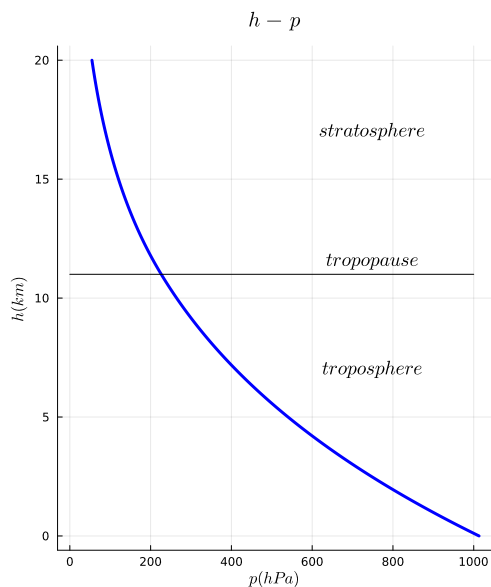
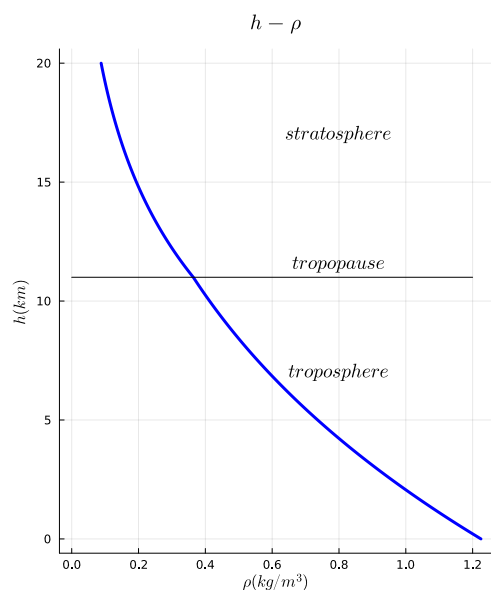
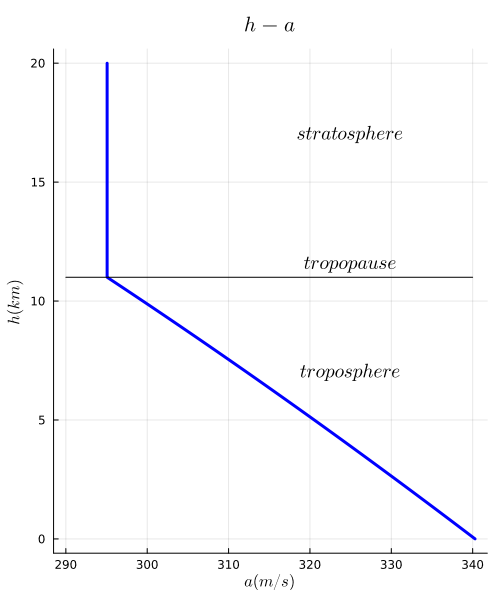
$$p(h) = \begin{cases} p_0 \left(\frac{T_h}{T_0} \right)^{\frac{g_0}{R\lambda}} & h \leq 11\text{km} \\ p_{11} e^{-\frac{g(h-h_{11})}{RT_{11}}} & 11\text{km} < h \leq 20\text{km} \end{cases} \quad (2.10)$$

上式中，脚标 0 表示海平面参数，脚标 11 表示参数在对流层顶部 11km 处的取值。

类似地，运用式 2.1 可以计算得到密度的高度分布：

$$\rho(h) = \begin{cases} \rho_0 \left(\frac{T_h}{T_0} \right)^{\frac{g}{R\lambda} - 1} & h \leq 11\text{km} \\ \rho_{11} e^{-\frac{g(h-h_{11})}{RT_{11}}} & 11\text{km} < h \leq 20\text{km} \end{cases} \quad (2.11)$$

而在高度 h 上的声速则可以用式 2.3 计算得到，上述大气参数分布如下图所示。

(a) $h - T$ 温度高度分布(b) $h - p$ 压强高度分布(c) $h - \rho$ 密度高度分布(d) $h - c$ 声速高度分布

2.2 拟合原理及方法

因为在本次作业中，往往需要涉及到曲线值的拟合，如参数 $C_L - C_D$ 之间极曲线关系，其极曲线参数 A 与 C_{D0} 是由拟合得到的，因此在准备工作中有必要说明本文采取的方法。

2.2.1 最小二乘法拟合多项式函数

现考虑有 M 个离散的采样点 $(x_j, y_j) (j = 1 \sim M)$ ，其关系为 $f(x)$ 为一 N 次多项式函数，则可以表达为：

$$y = f(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k \quad (2.12)$$

考虑每一个采样点上的残差：

$$r_j = y_j - f(x)_j = y_j - \sum_{k=0}^N a_k x_j^k \quad (2.13)$$

最小二乘法要让上述每个点上残差的平方和最小，为此要求：

$$R = \sum_{j=1}^M r_j^2 = \sum_{j=1}^M \left(y_j - \sum_{k=0}^N a_k x_j^k \right)^2 \quad (2.14)$$

中 R 取为最小值。

在 R 取最小值时，可以给出如下 N 个方程：

$$\frac{\partial R}{\partial a_k} = 0 \quad k = 0 \sim N \quad (2.15)$$

即：

$$\sum_{j=1}^M x_j^k y_j = \sum_{j=1}^M x_j^k \sum_{k=0}^N a_k x_j^k \quad k = 0 \sim N \quad (2.16)$$

上式可以改写成矩阵乘法的形式：

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^M y_j \\ \sum_{j=1}^M x_j^1 y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^M x_j^N y_j \end{bmatrix}_{N+1} = \begin{bmatrix} M & \sum_{j=1}^M x_j^1 & \cdots & \sum_{j=1}^M x_j^N \\ \sum_{j=1}^M x_j^1 & \sum_{j=1}^M x_j^2 & \cdots & \sum_{j=1}^M x_j^{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^M x_j^N & \sum_{j=1}^M x_j^{N+1} & \cdots & \sum_{j=1}^M x_j^{2N} \end{bmatrix}_{N+1 \times N+1} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}_{N+1} \quad (2.17)$$

记符号 $Y = [y_1, y_2, \dots, y_M]^T$ ， $A = [a_0, a_1, \dots, a_N]^T$ 和符号 X 如下有：

$$X^T Y = X^T X A \quad \leftarrow X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^N \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_M & \cdots & x_M^N \end{bmatrix}_{M \times N+1} \quad (2.18)$$

根据上式，可以计算得到最小二乘法拟合下的参数估计值：

$$A = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (2.19)$$

2.2.2 拟合方法

在 julia 语言中, Curve_Fit.jl 库是采用最小二乘法进行曲线拟合的一个外部库, 其可以用简短的语言进行曲线参数拟合。但因本次作业的 $C_L - C_D$ 极曲线参数拟合以及 $C_{l,\alpha} - C_L$ 线性回归拟合均属于比较简单的最小二乘法拟合, 因此本次作业不再依赖外部库实现。

2.3 插值原理及方法

因为在本次作业中, 往往需要根据离散点进行插值, 而线性插值因为难以表现离散点的变化趋势, 因此本文采用样条插值 (spline) 进行内部插值。

2.3.1 三次样条插值原理

同样考虑一系列离散的采样点 $(x_j, y_j) (j = 1 \sim N)$, 记区间长度 $h_j = x_{j+1} - x_j$, x_j 节点上的二阶导数值为 M_j , 于是可以得到区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上的样条插值函数 $S(x)$ 的二阶导数:

$$S''(x) = M_j + \frac{1}{h_j}(M_{j+1} - M_j)(x - x_j) \quad x \in [x_j, x_{j+1}] \quad (2.20)$$

对上式积分两次, 利用 $S(x_j) = y_j$ 和 $S(x_{j+1}) = y_{j+1}$ 可以计算得到:

$$\begin{aligned} S(x) = & M_j \frac{(x_j + 1 - x)^3}{6h_j} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_j} \\ & + \left(y_j - \frac{1}{6}M_j h_j^2 \right) \frac{x_j + 1 - x}{h_j} + \left(y_{j+1} - \frac{1}{6}M_{j+1} h_j^2 \right) \frac{x - x_j}{h_j} \end{aligned} \quad (2.21)$$

为使得样条插值函数 $S(x)$ 在整个插值区域上二阶连续, 因为原函数连续已经保证, 二阶导连续也已经保证, 只需要满足 $S'(x_j^+) = S'(x_j^-)$:

$$f[x_j, x_{j+1}] + \left(\frac{1}{6}M_j + \frac{1}{3}M_{j+1} \right) h_j = f[x_{j-1}, x_j] + \left(\frac{1}{6}M_{j-1} + \frac{1}{3}M_j \right) h_{j-1} \quad (2.22)$$

引入如下记号:

$$\mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j} \quad \lambda_j = 1 - \mu_j \quad d_j = 6f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}] \quad (2.23)$$

可以得到矩阵形式 (这往往需要给定边界条件):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \mu_{N-1} & 2 & \lambda_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{N-1} \\ M_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

因为对于一系列散点, 其边界条件无法给定, 所以在实际操作中, 往往会对 $1 \sim 2$ 点用局部线性插值, $N - 1 \sim N$ 点也用局部线性插值, 再对剩余的内部节点利用上式进行三次样条插值。

2.3.2 样条插值方法

因为本次作业的原始数据均为离散点，所以在计算性能过程中为了得到连续变化的趋势需要进行样条插值。因样条插值的过程较为复杂，且没必要特地去实现一个这样功能的函数，因此本文直接使用 `julia` 语言中的 `Dierckx.jl` 库进行数据插值处理。

3 升力阻力性能

3.1 升力阻力特性概述

在给定巡航高度 h 的和飞行马赫数 Ma 的情况下，全机所受的飞行升力与阻力可以用飞行器的动压、机翼参考面积和一个比例系数进行表示：

$$\begin{cases} L = \frac{1}{2} C_L \rho M a^2 c^2 S \\ D = \frac{1}{2} C_D \rho M a^2 c^2 S \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 $\rho = \rho_\infty$, $c = c_\infty$ 为巡航高度上的密度和声速, S 为参考面积, C_L 和 C_D 是升力系数与阻力系数。

3.1.1 升力特性概述

在给定的飞行状态下，全机的升力系数小迎角范围内（取 $-4 \sim 8^\circ$ ），是迎角的一次函数：

$$C_L = C_{l\alpha}(\alpha - \alpha_0) \quad (3.2)$$

其中 $C_{l\alpha}$ 是全机升力系数斜率，是表征升力特性的一个重要气动参数：

$$C_{l\alpha} = C_{l\alpha}(Ma) = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \quad (3.3)$$

在该飞机的外形参数确定时， $C_{l\alpha}$ 仅是飞行马赫数 Ma 的参数。其中 α_0 为零升迎角，表征没有升力时的迎角。

在给定的原始数据中，可以绘制出离散点上不同马赫数 Ma 下的升力系数 C_L 如 3.1。

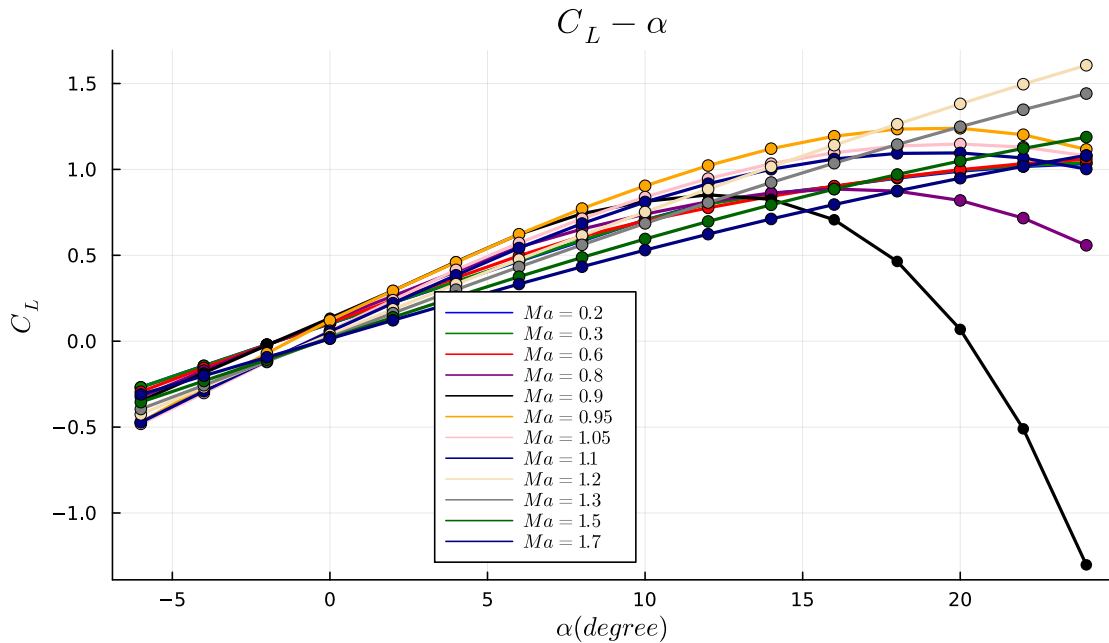


图 3.1: 升力系数 $C_L - \alpha$ 原始数据

可以发现在角度较小的范围内, 基本呈线性关系。

3.1.2 阻力特性概述

在给定的飞行状态下, 升力系数 C_L 和阻力系数 C_D 呈二次关系, 在飞行计算中将 C_D 分成两部分: 为零升阻力部分 C_{D0} 和升至阻力部分 A :

$$C_D = C_{D0} + AC_L^2 \quad (3.4)$$

其中 C_{D0} 和 A 的参数受飞行马赫数 Ma 和雷诺数 Re 的影响。通常来讲只认为零升阻力系数 C_{D0} 和 A 为马赫数 Ma 的函数。如图 3.2 中所示为原始数据。

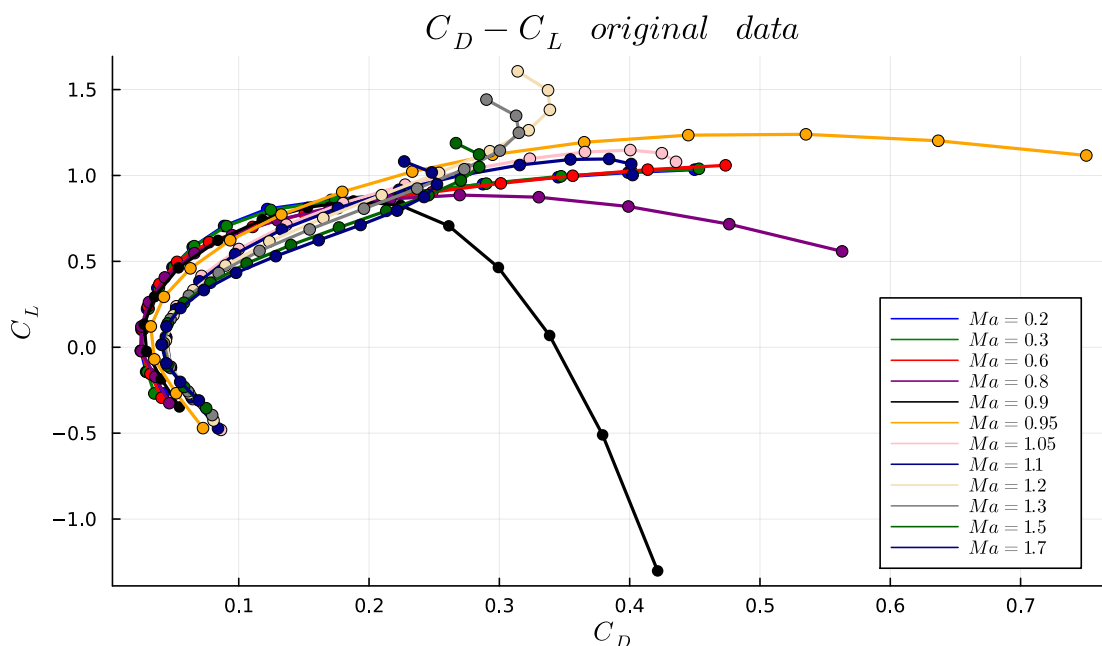


图 3.2: 升力阻力系数 $C_L - C_D$ 原始数据

可以发现, 当 C_L 一定范围内(也即小迎角范围内), C_L 和 C_D 基本呈抛物线型, 也就是升力阻力特性的极曲线(drag polar)关系。

3.2 不同马赫数下的全机升力系数斜率 $C_{l\alpha}$

如方程 3.2 中, 参数 $C_{l\alpha}$ 在小迎角范围内可以视作一次函数关系方程的斜率。

利用最小二乘法如式 2.19 中的方法, 可以拟合不同马赫数 Ma 下的 $C_{l\alpha}$ 的值。在图 3.1 中选定某一个马赫数, 然后根据离散点上的值进行最小二乘拟合得到下述不同离散马赫数 $C_{l\alpha}$ 值。

因为离散点上的值较为分散, 所以可以利用式 2.21 中的样条插值方法, 将离散数据点拟合成光滑而连续的分段曲线。如图 3.3 中, 蓝色点为最小二乘法得到不同马赫数下的的升力线斜率系数离散值, 红色为样条插值函数。

容易发现升力线斜率系数在 $Ma \approx 1.0$ 时达到最大值。需要注意的是这里的 $C_{l\alpha}$ 为角度取弧度制 rad 情况下对应的值。

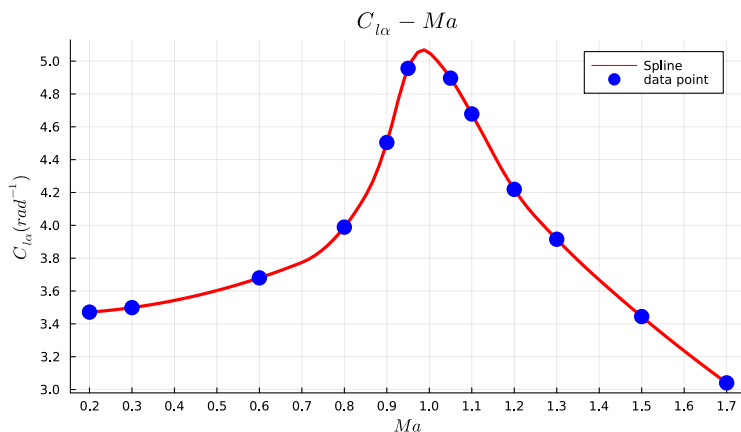


图 3.3: 不同马赫数下的升力线斜率系数 $C_{l\alpha} - Ma$ 关系

3.3 不同马赫数下的零升阻力系数 C_{D0}

在方程 3.4 中，升力系数和阻力系数近似为一个 $y = ax^2 + b$ 的二次关系。同样可以利用方程 2.19 最小二乘法中计算参数 C_{D0} 和 A 的值。

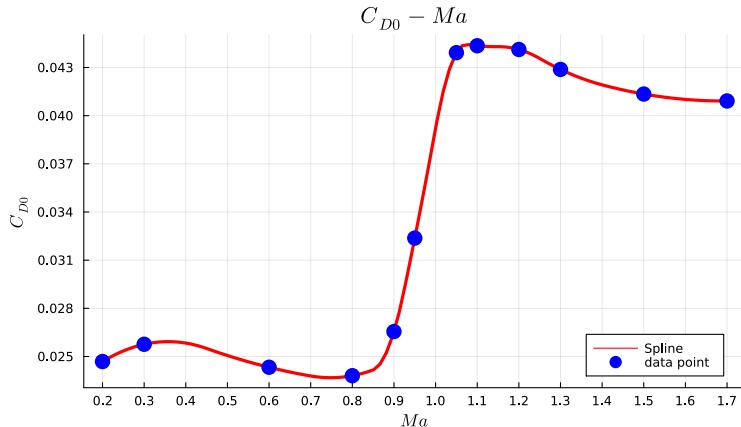


图 3.4: 不同马赫数下的零升阻力因子 $C_{D0} - Ma$ 关系

如图 3.4 中为不同马赫数下的零升阻力因子 C_{D0} 。蓝色的为离散点，红色的为样条插值曲线。容易发现在 $Ma = 1.0$ 附近， C_{D0} 的值有急剧的上升，这就是音障现象，在飞机飞行速度至音速时，零升阻力部分会有急剧的增加。

3.4 不同马赫数下的升致阻力因子 A

类似的，在拟合得到 C_{D0} 时，可以同时得到升致阻力因子系数 A 。如下图所示

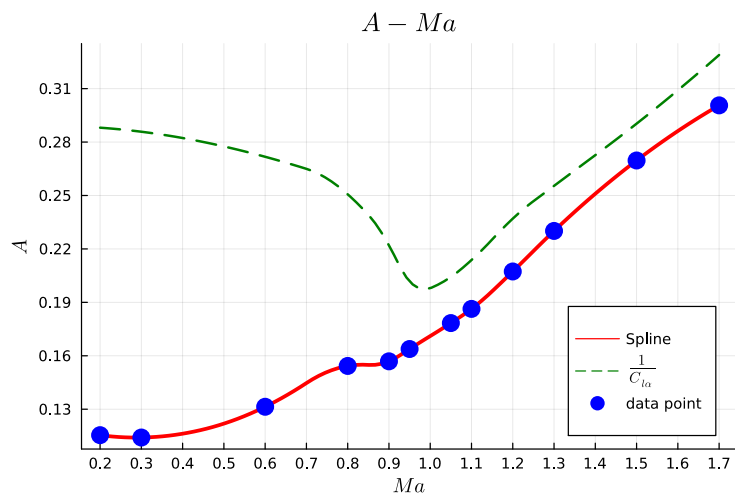


图 3.5: 不同马赫数下的升至阻力因子系数 $A - Ma$ 关系

A 随着马赫数 Ma 的增加较为平稳地缓慢增加, 在马赫数 Ma 在 $0.8 \sim 1.0$ 时, 反而有一个稍微平稳的“台阶”。另外值得注意的是, 在马赫数较大时, A 的发展趋势基本与 $1/C_{D\alpha}$ 的趋势一致, 如图中绿色虚线部分。

3.5 极曲线

在前述不同马赫数 Ma 下的 C_{D0} 与 A 计算得到后, 可以将理论上的极曲线进行绘制、比较。如式 3.4 中所示, 绘制不同飞行马赫数 Ma 下的升力系数 C_L 和阻力系数 C_D 关系为极曲线 (polar curve) 如图 3.6。实线 (拟合极曲线) 与离散点 (原始数据) 吻合得较好。

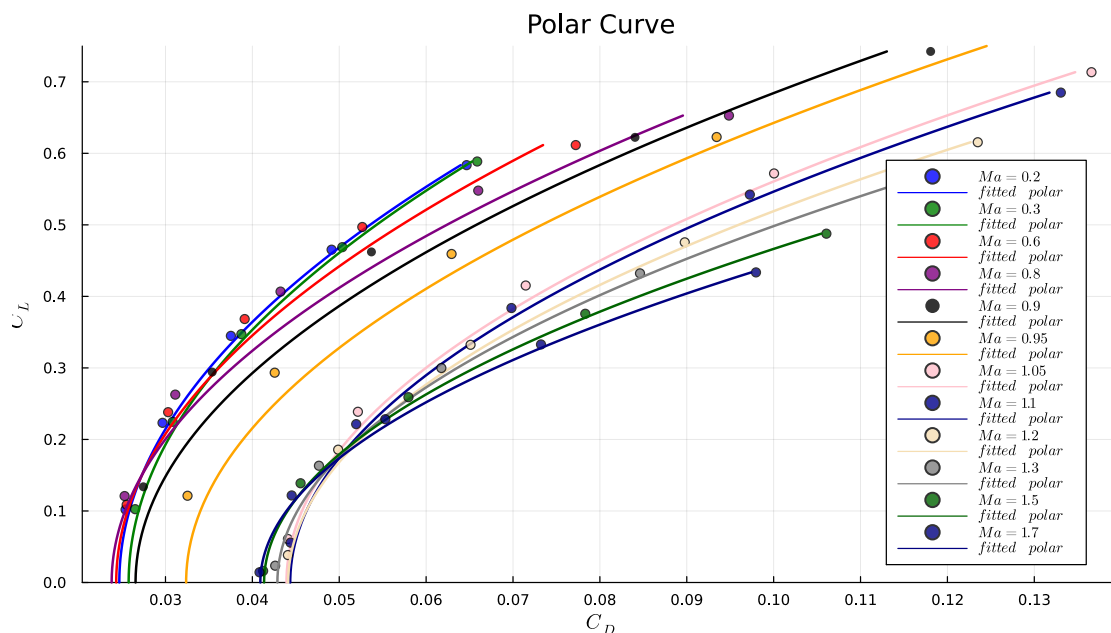


图 3.6: 不同飞行马赫数 Ma 下的升力系数阻力系数极曲线

4 推力性质

4.1 需用推力 T_R

在计算需用推力的 T_R 时, 可以采用如下步骤. 首先给定巡航高度 h 的时候, 可以通过前述的大气模型计算当地大气密度 ρ 和声速 c 。

在巡航时假设飞行器质量为 m 不变, 不考虑巡航高度对重力加速度 g 的影响, 可以认为正常巡航时升力等于重力 $L = W = mg$ 。

在飞行马赫数 Ma 给定时, 可以通过升力计算公式计算得到升力系数 C_L :

$$C_L = \frac{2W}{\rho Ma^2 c^2 S} \quad (4.1)$$

通过前节中图 3.4 和图 3.5 中, 通过样条插值的方式, 可以计算得到在该马赫数 Ma 下的 C_{D0} 和 A , 进而得到阻力系数:

$$C_D = C_{D0}(Ma) + A(Ma)C_L^2 \quad (4.2)$$

则在此高度 h 下以马赫数 Ma 飞行状况下的需用推力可以计算得到需用推力 T_R :

$$T_R = D = \frac{W \cdot C_D}{C_L} \quad (4.3)$$

按上述方法可以绘制不同高度以及飞行马赫数下的需用推力 T_R 如图 4.1 所示。随高度增加, 整个曲线向右下侧“弯腰”。

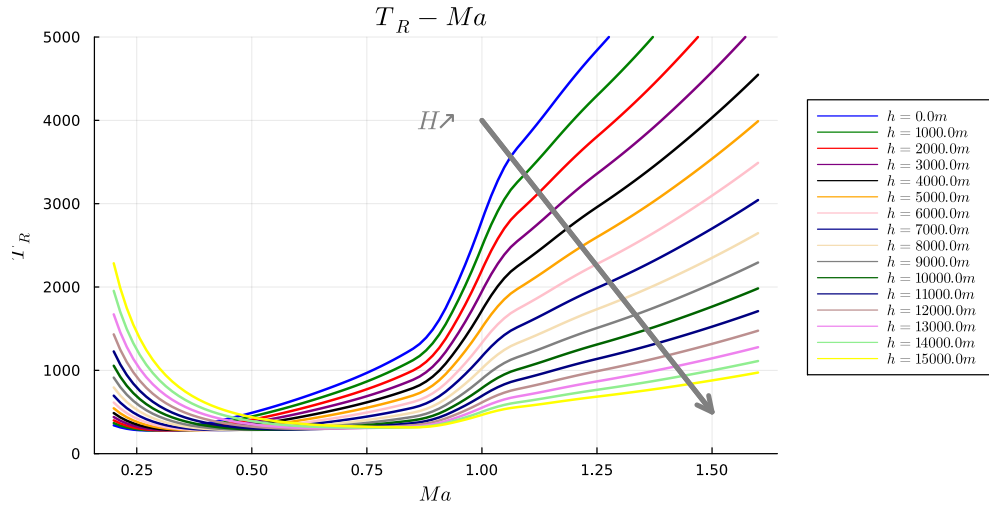


图 4.1: 不同高度及飞行马赫数下的需用推力 T_R

4.2 可用推力 T_a

可用推力 T_a 总体上取决于发动机本身的性质, 但随着海拔升高, 空气密度降低, 可用推力整体呈下降趋势。另外, 随着飞行马赫数变化, 可用推力曲线也会发生变化。

在给定的数据点中，仅有部分马赫数下的可用推力值，且有加力（AB）与不加力两个状态，因此运用样条插值进行外插操作，在不同巡航高度上，绘制不同马赫数下的可用推力曲线。

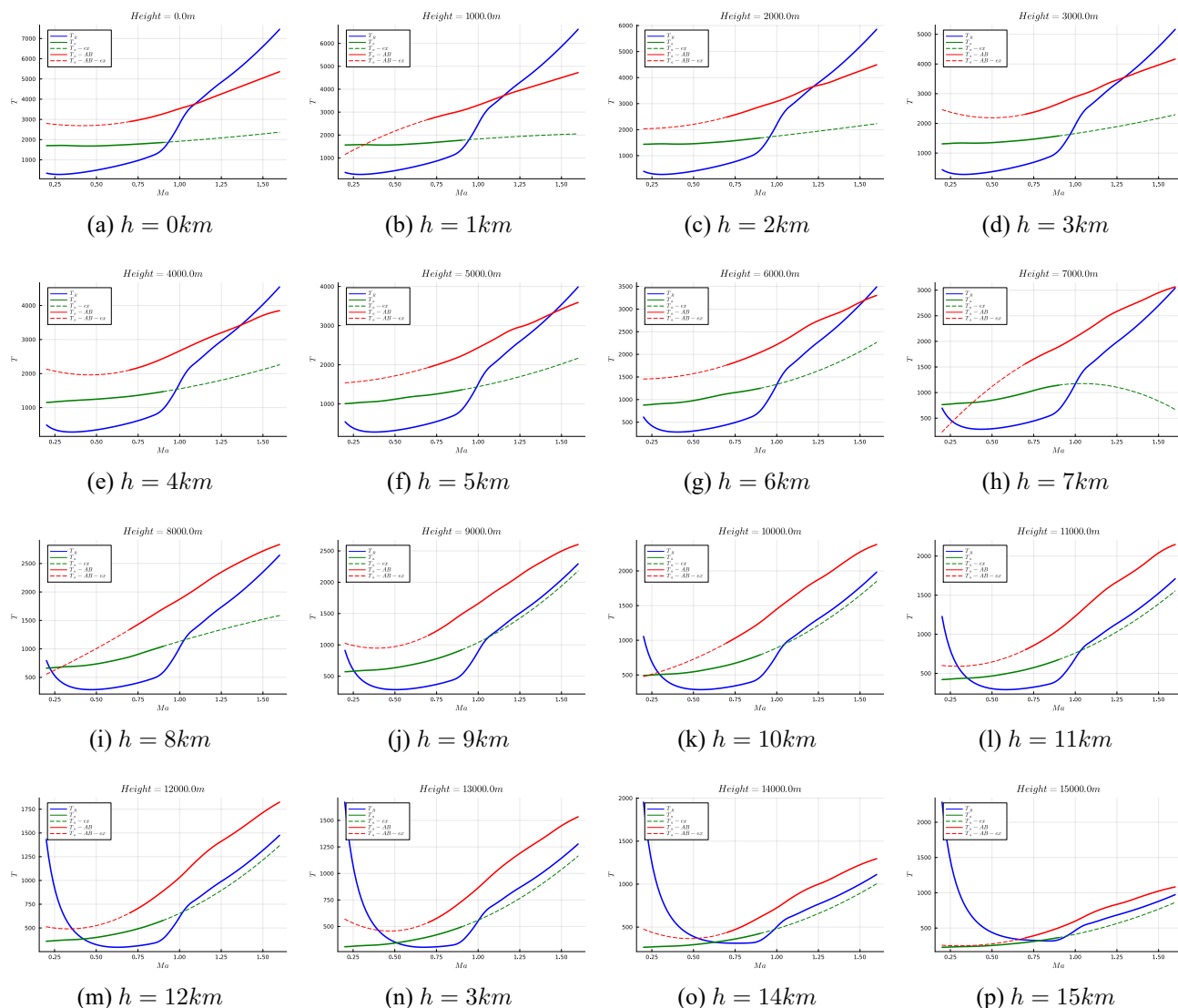


图 4.2: 不同高度下可用推力 T_a 与需用推力 T_R 与飞行马赫数 Ma 的关系

图 4.2 中，展示了在不同高度情况下，可用推力 T_a （加力与不加力），与需用推力 T_R 随着飞行马赫数 Ma 变化的关系。其中蓝色实线表示需用推力 T_R ，绿色实线表示不加力情况下的可用推力 T_a ，绿色虚线表示不加力情况下的可用推力 T_a 外插；红色实线表示加力情况下的可用推力 T_a ，红色虚线表示加力情况下的可用推力 T_a 外插。

可以发现随着高度增加，整体而言可用推力曲线随着高度增加不断在往蓝色的需用推力曲线逼近，这也是该飞机（飞行器）逼近升限（即可用推力逐渐不足以满足需用推力）的趋势。

5 速度特性

5.1 飞行包线与几个特征速度

5.1.1 飞行包线的确定

在前节中, 已经在一些简化情形下, 将可用推力 T_a (分为加力和不加力) 运用样条插值方法、以及对需用推力 T_R 运用 $C_L - C_D$ 极曲线拟合关系, 将 T_a 和 T_R 归结为巡航高度 h 和飞行马赫数 Ma 的函数:

$$\begin{cases} T_a = T_a(h, Ma) \\ T_R = T_R(h, Ma) \end{cases} \quad (5.1)$$

于是在给定的巡航高度 $h = h^*$ 的情况下, 在某飞行马赫数下会有:

$$T_a(h^*, Ma) = T_R(h^*, Ma) \quad (5.2)$$

根据前节图 4.2 中, 一般 T_a 和 T_R 会有两个交点 (在 T_a 外插的情况下), 因此在巡航高度 h^* 上, 可以根据交点求出两个飞行马赫数 Ma 。其中较小的为 Ma_{\min} , 较大的为 Ma_{\max} , 这表示在高度 h^* 时的巡航马赫数范围。如图 5.1 所示为该巡航马赫数范围确定的方法。

5.1.2 有利飞行马赫数 M_{opt} 的确定

在给定高度上存在一个有利飞行马赫数 Ma_{opt} , 此飞行马赫数下会使得需用推力 T_R 取得最小值, 即需用推力最小。

$$T_{R.\min}(h^*) = T_R(h^*, Ma_{opt}) \quad (5.3)$$

如图 5.1 中 M_{opt} 对应于需用推力最小值 $T_{R.\min}$ 。

5.1.3 陡升飞行马赫数 M_γ 的确定

在上升飞行的计算中, 假定可用推力全部使用, 可以得到上升角:

$$T_a = T_R + W \sin \gamma \rightarrow \gamma = \arcsin \frac{T_a - T_R}{W} \quad (5.4)$$

假设飞行中飞行器质量不变 (即极短的一个任务剖面), 在飞行马赫数范围 $[Ma_{\min}, Ma_{\max}]$ 之间, 必然存在一个使得剩余推力 ΔT 使得 T_a 与 T_R 差值最大, 其中剩余推力定义为:

$$\Delta T = T_a(h^*, Ma) - T_R(h^*, Ma) \quad (5.5)$$

在此高度上, 使得剩余推力 ΔT 取最大值的飞行马赫数称为 Ma 陡升飞行马赫数, 记作 Ma_γ , 此时上升角 γ 能取得最大值, 对于特定高度上, 该陡升飞行马赫数是唯一确定的。

$$\Delta T_{\min}(h^*) = \Delta T(h^*, Ma_\gamma) \quad (5.6)$$

如图 5.1 中 M_γ 中所示对应于 ΔT_{\max} 。

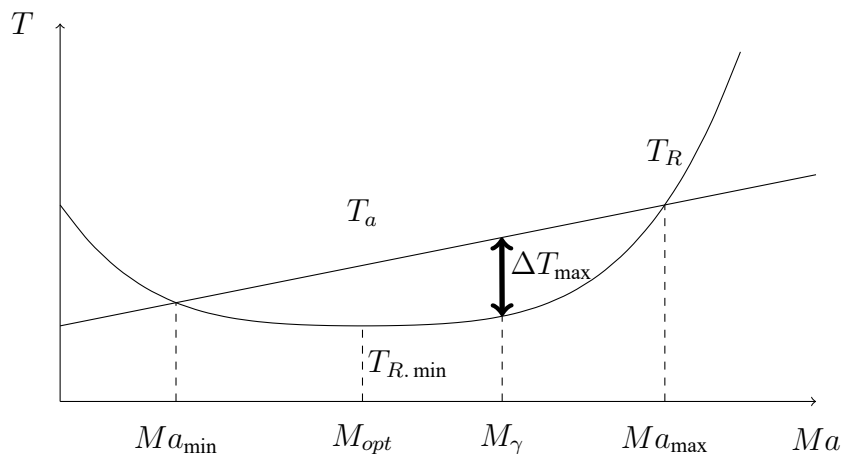


图 5.1: 某高度巡航下飞行马赫数范围及特征马赫数的确定

5.1.4 飞行包线的绘制

在前述流程明确后，对于飞行马赫数范围需要在各个高度上求两个隐式函数相减 $T_a - T_R = 0$ 的零点（求根问题）。对于有利飞行马赫数与陡升飞行马赫数，则需要求取某个隐式函数的极值点（优化问题）。对于求根问题可以用二分法求解，优化问题也可以遍历区域搜索，得到工程可用的数值解。本次作业对于求根问题采用 `Roots.jl` 包，优化问题采用 `Optim.jl` 包进行处理。

通过样条插值、函数定义、接口调用后，可以求得不同高度 h 上对应的飞行马赫数范围、有利飞行马赫数和陡升飞行马赫数，再次用样条插值，将其绘制在一张图中，得到飞行包线图如 5.2 所示。

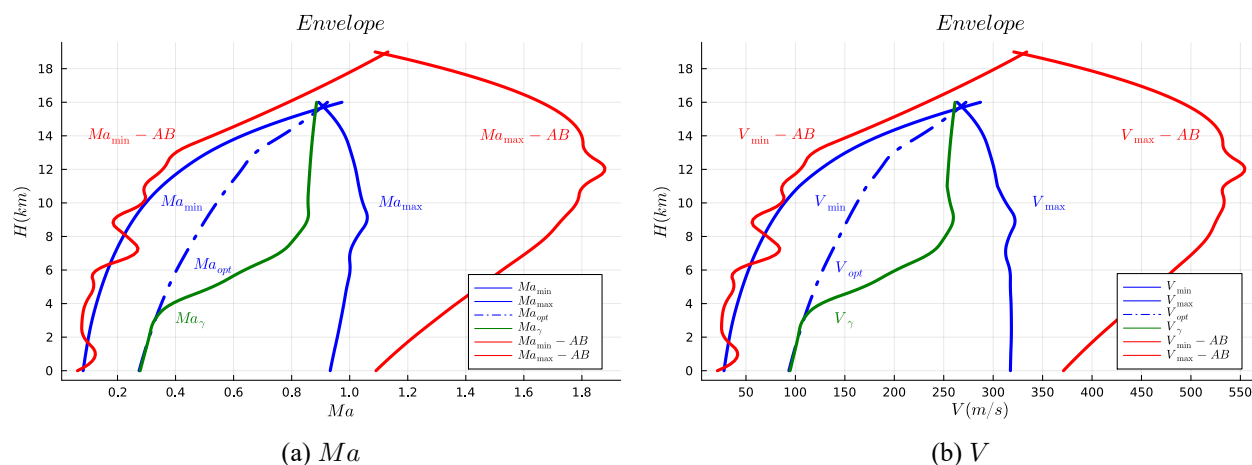


图 5.2: 飞行包线图

其中图 5.2a 为马赫数表示，5.2b 为真实速度表示 ($V = Ma \cdot c$)。横坐标为速度（马赫数或者速度），纵坐标为巡航高度，其中蓝色实线表示不加力情形下的飞行马赫数范围 Ma_{min}

与 Ma_{\max} ，蓝色点划线表示有利飞行马赫数 Ma_{opt} ；红色实线表示加力情形下的飞行马赫数范围 $Ma_{\min} - AB$ 与 $Ma_{\max} - AB$ ；绿色实线表示陡升马赫数 M_γ ，左侧为第二平飞范围，右侧为第一平飞范围。

在图中可以发现在高度大概为 $15km$ 的时候，蓝色实线相交，这表示不加力情况下的升限；红色实线在约 $19km$ 处相交，这表示加力情况下的升限；绿色实线与蓝色虚线在高空处一致，即 $Ma_\gamma \approx Ma_{opt}$ ，这可以理解为不加力情形下的可用推力 T_a 在高空时，对巡航高度变化更为敏感。

5.2 上升率 V_v 特性

5.2.1 上升率 V_v 的推导

上升率是指飞机以特定的重量和给定发动机工作状态进行定常上升时在单位时间内上升的高度，也称上升垂直速度，如图 5.3 中，可以表示为：

$$V_v = \frac{dH}{dt} = V \sin \gamma \quad (5.7)$$

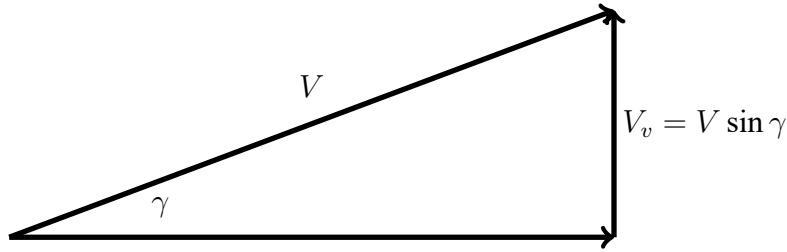


图 5.3: 上升率 V_v 图示

代入上升角 γ 的公式，并且认为 γ 角极小，有 $\gamma \approx \sin \gamma$ 。于是可以计算得到飞行器的上升率 V_v ：

$$V_v = \frac{\Delta TV}{W} = SEP = \left(\frac{T_a}{W} - \frac{1}{K} \right) V \quad (5.8)$$

因为 ΔT 是巡航高度和飞行马赫数的函数，而 $V = Mac$ 也为巡航高度和飞行马赫数的函数，因此在给定高度 h^* 上飞行时，组合参数 $\Delta T \cdot V$ 可以在某一马赫数 Ma 下取得最大值，假定飞行器质量不变，则此时能获得 $V_{v, \max}$ ，则此时对应的飞行马赫数称作快升马赫数 Ma_{qc} ，一般来讲快升速度 V_{qc} 略大于陡升速度 V_γ 。快升马赫数满足：

$$\begin{aligned} [\Delta TV(h^*, Ma)]_{\max} &= \Delta TV(h^*, Ma_{qc}) \\ V_{v, \max}(h^*) &= V_v(h^*, Ma_{qc}) \end{aligned} \quad (5.9)$$

5.2.2 不同高度的上升率曲线

在上述 V_v 的推导下，给定巡航高度和飞行马赫数下的 V_v 可以用 $(T_a - T_R)/W$ 表示，在给定高度上，可以绘制 $V_v - Ma$ 的函数曲线。因为线条较多较杂，本次作业每隔 $2km$ 为高度作出 $V_v - Ma$ 在不同高度上的曲线关系族。

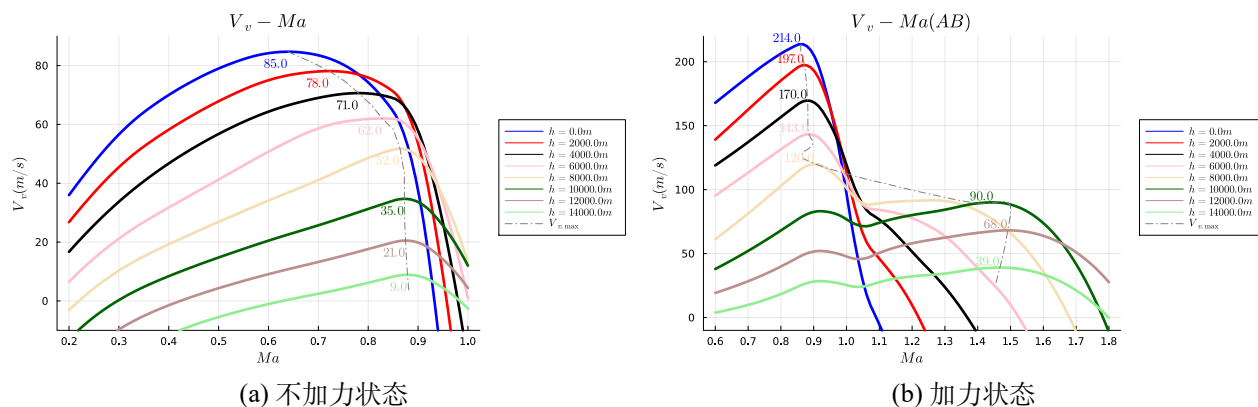
图 5.4: 不同高度下飞行马赫数 Ma 与上升率 V_v 曲线族

图 5.4 分别为加力与不加力状态下的马赫数与上升率曲线关系，很显然随着高度升高，整个曲线趋于“垮塌”向 Ma 轴的趋势，这表明巡航高度越高，剩余推力越小。同时灰色虚线标明了各个高度上 $V_{v,max}$ 的值，该曲线族的“凸起”部位逐渐向 Ma 正方向移动，这表明高空的陡升马赫数 Ma_{qc} 逐渐增加，即需要更大的速度来维持上升率。

需要指出的是，因为原始数据个数有限且不多，在加力状态下的 $V_{v,max}$ 灰色虚线有一些“棱角”。但定性来看，加力状态下会有两个“突起”，即两个局部最大值 $V_{v,max}$ ，需要指出的是在高空，应当取较大 Ma_{qc} 对应下的 $V_{v,max}$ 更为合理。

5.2.3 单位重量剩余功率 SEP 云图与最快上升路径

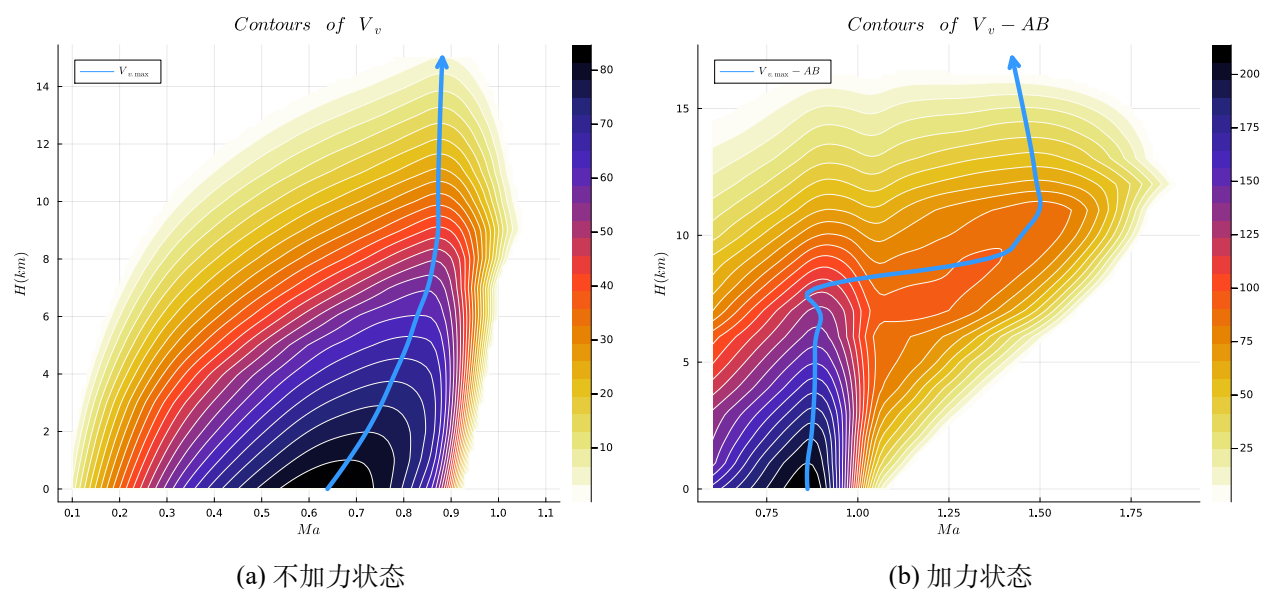


图 5.5: 单位重量剩余功率 SEP 云图与最快上升路径示意图

在 SEP 也即 V_v 随高度 h 和马赫数 Ma 的关系确定后，这是一个二元函数关系。因此在 (h, Ma) 坐标系下，可以将 SEP 或 V_v 以云图（等值线）的可视化形式表现出来。如图 5.5 中，左图为不加力状态，右图为加力状态。横坐标为飞行马赫数 Ma ，纵坐标为巡航高度 h ，云图黑色部分表示最大值，白色表示最小值（如右侧 colorbar 中所示）。

容易发现 (h, Ma) 的白色边界其实就是飞行包线 ($\Delta T = 0$ 的边界)，而等值线族的最高点即高度上取得的 $V_{v, \max}$ 。因此可以将一条“最快上升路径”在该 SEP 云图中标注出来。以横坐标 Ma_{qc} 和纵坐标 h^* 为纵坐标，用蓝色曲线绘制一条最快上升路径。

值得注意的是，右侧加力状态下，因为高空中 $V_{v, \max}$ 应当取为较快马赫数的 Ma_{qc} 的值，因此整个曲线会在高空（大致 $8km$ 处）向更快马赫数处“弯折”。

5.3 上升率所确定的升限

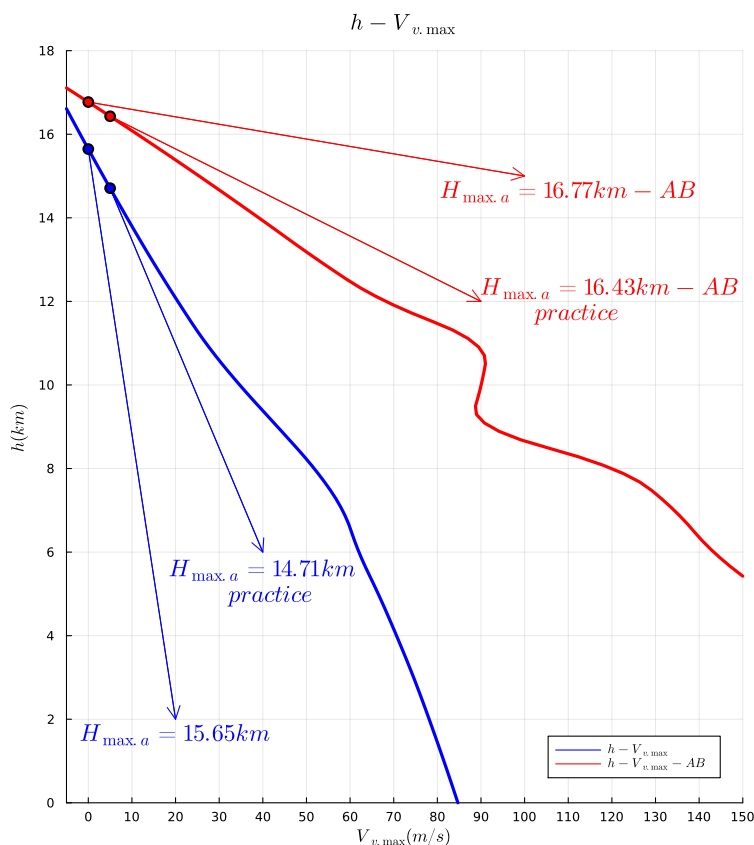


图 5.6: 上升率所确定的升限

一般而言认为 $V_{v, \max} = 0$ 时的高度就是升限，因为在此高度上有剩余推力 $\Delta T = 0$ ，没有可以在用于上升的推力，全部推力用于克服阻力 D 以在此高度上巡航。

将各个高度 h 上的最大上升率 $V_{v, \max}$ 进行绘制曲线，取 $V_{v, \max} = 0m/s$ 的点（即 y 轴交

点) 可以得到升限, 如图 5.6 所示。据此思路计算得到的升限为:

$$\begin{cases} H_{\max.a} = 15.65km \\ H_{\max.a} = 16.77km \quad (AB) \end{cases} \quad (5.10)$$

但因为这个升限需要无穷的时间到达, 因此一般取最大上升率为 $V_{v.\max} = 5m/s$ 时的高度 h 为实用 (practice) 升限。如图 5.6 中为:

$$\begin{cases} H_{\max.a} = 14.71km \\ H_{\max.a} = 16.43km \quad (AB) \end{cases} \quad (5.11)$$

5.4 飞行包线中的快升速度

在计算得到快升马赫数 Ma_{qc} 后, 可以将其加入飞行包线图, 在一张图中观察各种特征马赫数。

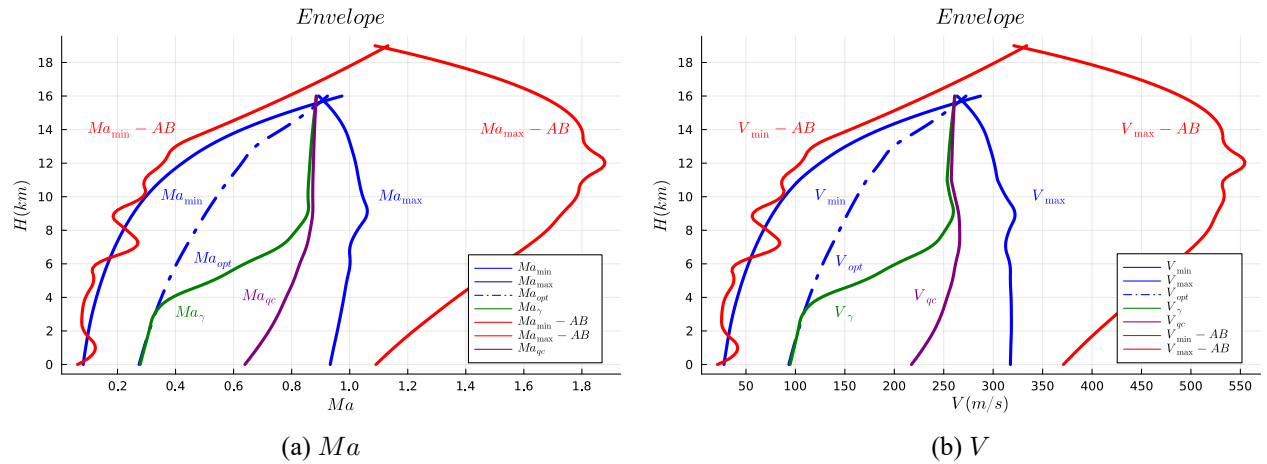


图 5.7: 加入快升马赫数后的飞行包线

容易发现, 在高空中绿色曲线 Ma_{γ} 和紫色曲线 Ma_{qc} 在高空中基本重合, 在高空中的陡升马赫数和快升马赫数相一致。

6 续航性能

6.1 小时耗油量与千米耗油量

小时耗油量公式为：

$$c_{f,t} = c_f i T_i \quad (6.1)$$

其中 T_i 为每台发动机， i 为发动机数量， c_f 为发动机耗油率。而千米耗油量为：

$$c_{f,R} = \frac{c_{f,t}}{V} = \frac{c_f i T_i}{V} \quad (6.2)$$

6.2 飞行包线中的久航速度与远航速度

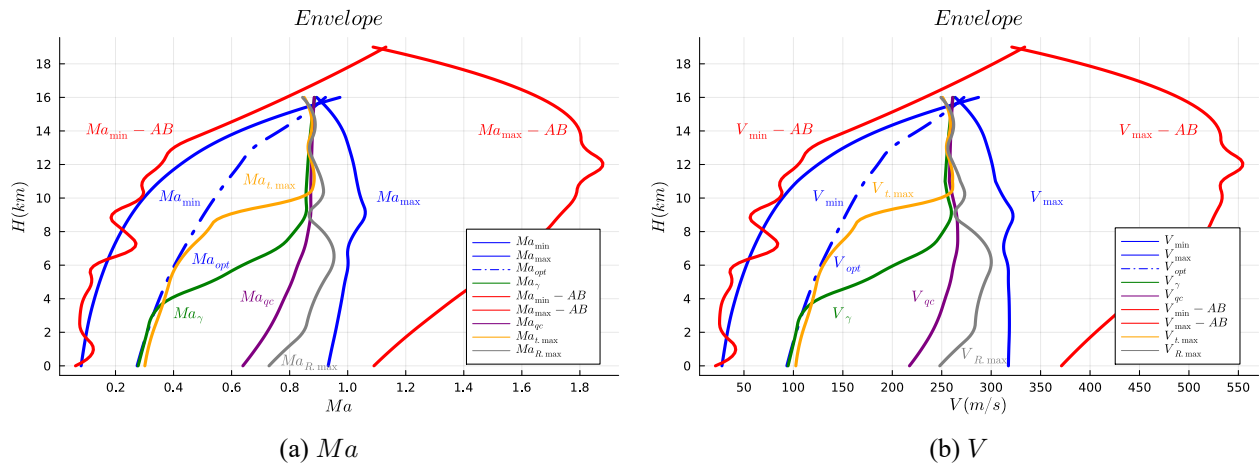


图 6.1: 飞行包线中的久航速度与远航速度