

# 二维激波面问题

## 计算流体力学 Project2:part 2

*Professor* 陈维建

BX2201913 包晨宇

2023 年 1 月 8 日

# 目录

<b>1 作业要求及实现方式</b>	<b>1</b>
1.1 作业要求	1
1.2 实现方式	1
1.3 问题简述	1
<b>2 数值实验原理</b>	<b>2</b>
2.1 二维欧拉方程	2
2.2 方程无量纲化	3
2.3 方程的空间离散	3
2.4 通量计算	3
2.5 人工粘性	4
2.6 时间离散与龙格库塔时间推进	5
2.7 边界条件	5
2.7.1 物面边界条件	5
2.7.2 远场边界条件	5
2.8 收敛判据	8
<b>3 数值实验结果可视化</b>	<b>9</b>
3.1 $Ma = 2$	9
3.2 $Ma = 3$	10
3.3 $Ma = 4$	11
3.4 $Ma = 5$	12
3.5 $Ma = 6$	13
3.6 $Ma = 7$	14
3.7 $Ma = 8$	15
3.8 $Ma = 9$	16
3.9 $Ma = 10$	17

# 1 作业要求及实现方式

## 1.1 作业要求

实现二维激波面的计算求解。

## 1.2 实现方式

网格使用 Mathematica 程序生成三角单元网格，用 julia 语言对三角网格进行预处理，并且用 julia 语言编写程序，用 PyPlot 绘图库进行云图可视化。

## 1.3 问题简述

在超声速马赫来流的情形下，通过一个斜面激发激波面的形成。其外形如下图 1.1 所示。激波发生的局部网格放大图如下 1.2 所示，来流从左侧水平入射，斜面为壁面边界。

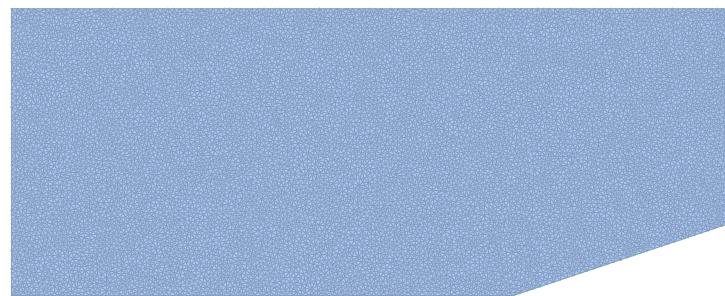


图 1.1: 计算采用的网格外形

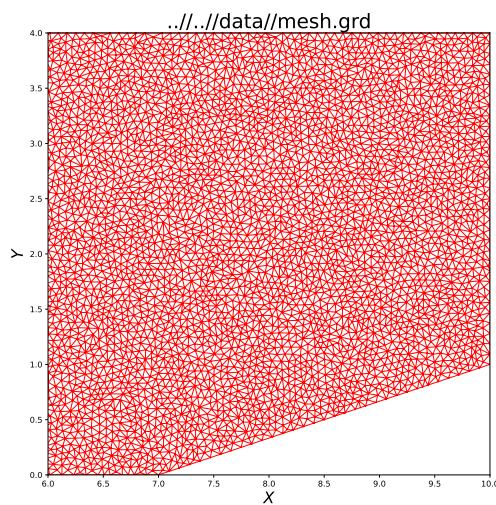


图 1.2: 计算采用的网格外形-放大

## 2 数值实验原理

### 2.1 二维欧拉方程

对于二维情况下的欧拉 Euler 方程，可以表达为如下微分形式：

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho U \\ \rho V \\ \rho E \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho Hu \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho Hv \end{bmatrix} = \vec{0} \quad (2.1)$$

为方便书写，记如下符号：

$$\vec{W} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix} \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho Hu \end{bmatrix} \quad \vec{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho Hv \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

考虑在某一二维空间  $\Omega$  范围内，将式 2.1 在该空间内进行积分，得到如下式子：

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{W} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\vec{F} dy - \vec{G} ds) = \vec{0} \quad (2.3)$$

其中各项含义表示如下：

- $\rho$ : 流体密度；
- $u, v$ : 流体速度在  $x, y$  方向上的投影分量；
- $p$ : 流体压强；
- $E$ : 单位质量总能量，为  $E = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ ，其中  $e$  表示流体单位质量内能，计算方式如下：

$$e = c_v T \quad (2.4)$$

式中  $T$  表示气体温度， $c_v$  表示气体等容比热，为封闭方程，需要给定流体状态方程：

$$p = \rho R T \quad (2.5)$$

上市中国  $R$  为理想气体常数，对于空气而言为  $R = 8.314 m^2 Pa K^{-1} mol^{-1}$ ，其中有：

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1} \quad (2.6)$$

$\gamma$  表示气体等压比热与等容比热之比  $c_p/c_v$ ，因此  $e$  也可以写作：

$$e = c_v T = \frac{RT}{\gamma - 1} = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} \quad (2.7)$$

- $H$ : 焓，值为：

$$H = E + \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (2.8)$$

## 2.2 方程无量纲化

因为在计算过程中，按照实际取值会产生数量级差异过大，导致计算结果产生问题。因此对于无量纲化的值进行计算会有更好的计算特性。按照来流性质，将压强、温度、声速三个值按照来流进行无量纲化处理，得到来流值：

$$\begin{cases} p_\infty = 1.0 \\ T_\infty = 1.0 \\ a_\infty = 1.0 \end{cases} \quad (2.9)$$

其中按照声速的定义  $a^2 = \gamma p / \rho$ ，因为  $p$  表示一个比值，无法进行无量纲化处理，因此来流密度的无量纲化应为：

$$\rho_\infty = 1.4 \quad (2.10)$$

根据 2.5 可以导出：

$$R = \frac{1}{1.4} \quad c_v = \frac{1}{1.4 \times (1.4 - 1)} \quad (2.11)$$

对于不同的算例，只需给出来流马赫数  $Ma$  和来流角度  $\alpha$  就能确定不同情况下的来流状态，其中速度按照下述给出：

$$\begin{cases} u = Ma_\infty a_\infty \cos \alpha \\ v = Ma_\infty a_\infty \sin \alpha \end{cases} \quad (2.12)$$

## 2.3 方程的空间离散

将整个计算单元  $\Omega$  划分为若干多边形小单元，将每个小单元体积  $\Omega_{e_k}$  取为很小的值，则  $\vec{W}$  可以用该单元内的平均值进行表示，同样的， $\vec{F}$  和  $\vec{G}$  可以近似用某边上的值进行表示，则对每个单元可以将偏微分方程近似写成关于时间的常微分方程：

$$\frac{d}{dt} \vec{W}_k = -\frac{1}{\Omega_k} \sum_{j=1}^{N_k} (\vec{F}_j \Delta y_j - \vec{G}_j \Delta x_j) \quad (2.13)$$

其中  $\vec{F}_j$  和  $\vec{G}_j$  表示  $\Omega_k$  单元的第  $j$  条边上的值， $N_k$  表示单元  $\Omega_k$  的多边形边数。将上式记为：

$$\frac{d}{dt} \vec{W}_k = -\frac{1}{\Omega_k} \vec{Q}_k \quad (2.14)$$

## 2.4 通量计算

$j$  号边上通量计算按照中心格式，用边界两侧单元的守恒量平均值进行表示，记守恒通量  $\vec{W}$  计算得到的  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{W})$ ， $\vec{G} = \vec{G}(\vec{W})$ ， $k$  号单元在边界  $j$  对侧的单元编号为  $p$ ，有：

$$\vec{F}_j = \vec{F} \left( \frac{\vec{W}_k + \vec{W}_p}{2} \right) \quad \vec{G}_j = \vec{G} \left( \frac{\vec{W}_k + \vec{W}_p}{2} \right) \quad (2.15)$$

为方便计算, 记单元边界上值  $\rho_j, u_j, c_j, p_j, H_j$  等, 该通量值可以记作:

$$\vec{Q}_j = \begin{bmatrix} Z_j \rho_j \\ Z_j \rho_j u_j + p_j \Delta y_j \\ Z_j \rho_j v_j - p_j \Delta x_j \\ Z_j \rho_j H_j \end{bmatrix} \quad Z_j = u_j \Delta y_j - v_j \Delta x_j \quad (2.16)$$

## 2.5 人工粘性

由于中心格式的数值通量会导致解在间断处色散, 计算会发生不稳定现象, 因此需要给定二阶四阶差分<sup>[2]</sup>二阶和四阶差分混合的 Jameson 人工粘性以稳定计算。该格式可以写成:

$$\vec{D}_k = \sum_{j=1}^{N_k} \vec{d}_j^{(2)} + \sum_{j=1}^{N_k} \vec{d}_j^{(4)} \quad (2.17)$$

其中:

$$\begin{cases} \vec{d}_j^{(2)} = \alpha_j \varepsilon_j^{(2)} (\vec{W}_p - \vec{W}_k)_j \\ \vec{d}_j^{(4)} = -\alpha_j \varepsilon_j^{(4)} (\nabla^2 \vec{W}_p - \nabla^2 \vec{W}_k)_j \end{cases} \quad (2.18)$$

其中  $\alpha_j$  表示为:

$$\alpha_j = |u_j \Delta y_j - v_j \Delta x_j| + c_j \sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2} \quad (2.19)$$

$\varepsilon_j^{(2)}$  表示为:

$$\varepsilon_j^{(2)} = k^{(2)} \nu_j \quad (2.20)$$

$\nu_j$  表示为一个间断探测器:

$$\nu_j = \left| \frac{p_p - p_k}{p_p + p_k} \right| \quad (2.21)$$

而  $\varepsilon_j^{(4)}$  表示为:

$$\varepsilon_j^{(4)} = \max(0, k^{(4)} - \varepsilon_k^{(2)}) \quad (2.22)$$

上述的  $k^{(2)}$  和  $k^{(4)}$  为经验取值, 其中  $k^{(2)}$  范围为  $[0.5, 1.0]$ , 本次计算中取 0.9,  $k^{(4)}$  范围为  $[1/256, 1/32]$ , 本次计算中取 0.255。在加入人工粘性后, 将式 2.14 调整为:

$$\frac{d}{dt} \vec{W}_k = -\frac{1}{\Omega_k} (\vec{Q}_k - \vec{D}_k) \quad (2.23)$$

记:

$$\vec{R}_k = -\frac{1}{\Omega_k} (\vec{Q}_k - \vec{D}_k) \quad (2.24)$$

对于整个场上各个单元的  $\vec{W}$ , 其各时间层的  $\vec{R}$  值可以视作  $\vec{W}$  的函数, 于是将式 2.14 写成如下形式:

$$\frac{d}{dt} \vec{W} = \vec{R}(\vec{W}) \quad (2.25)$$

## 2.6 时间离散与龙格库塔时间推进

为了提高时间推进中的计算进度，龙格库塔法是常用的手段。常用的四阶龙格库塔法如下：

$$\begin{cases} \vec{W}^{(0)} = \vec{W}^{(n)} \\ \vec{W}^{(m)} = \vec{W}^{(0)} + \alpha_m \Delta t_n \vec{R}^{(m-1)} \quad m = 1, 2, 3, 4 \\ \vec{W}^{(n+1)} = \vec{W}^{(4)} \end{cases} \quad (2.26)$$

其中  $\alpha_m = 1/(5-m)$ , ( $m = 1, 2, 3, 4$ ),  $\vec{R}^{(m-1)}$  为了方便计算，不重复计算粘性通量，而是用该时间层第一步的粘性通量确定：

$$\vec{R}_k^{(m)} = -\frac{1}{\Omega_k} (\vec{Q}_k^{(m)} - \vec{D}_k^{(0)}) \quad (2.27)$$

为了保证计算中时间离散尺度和空间离散尺度匹配，每个时间层的  $\Delta t$  取为：

$$\Delta t_k = CFL \frac{\Omega_k}{\sum_{j=1}^{N_k} \alpha_j} \quad (2.28)$$

其中  $CFL$  数取作 2.0。

## 2.7 边界条件

### 2.7.1 物面边界条件

在无粘性流动的情况下，流体在表面上滑动。但考虑到人工粘性的加入，因此速度矢量必须与表面相切， $u = 0, v = 0$ ，因此物面处的通量计算为：

$$\vec{Q}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ p_j \Delta y_j \\ -p_j \Delta x_j \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

物面边界上的压强值可以近似等效于单元上的压强值  $p_k$ 。

### 2.7.2 远场边界条件

按照特征线传播，可以将远场边界条件分成四种不同情况，用 Riemann 不变量计算远场边界值。

**2.7.2.1 超音速人流** 超音速入流情形下，来流马赫数  $Ma > 1$ ，流入单元内，其特征线全部由远场传来，如图 2.1。

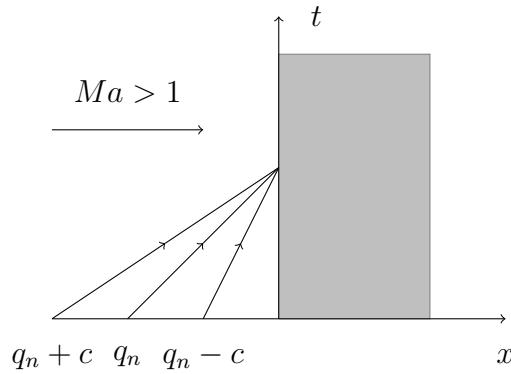


图 2.1: 超音速入流特征线传递示意图

其方程满足:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_n + \frac{2c}{\gamma - 1} = (q_n)_\infty + \frac{2c_\infty}{\gamma - 1} \\ q_n - \frac{2c}{\gamma - 1} = (q_n)_\infty - \frac{2c_\infty}{\gamma - 1} \\ q_\tau = (q_\tau)_\infty \\ s = s_\infty \end{array} \right. \quad (2.30)$$

**2.7.2.2 超音速出流** 超音速出流情形下, 出流马赫数  $Ma > 1$ , 流出单元, 其特征线全部由单元传来, 如图 2.2。

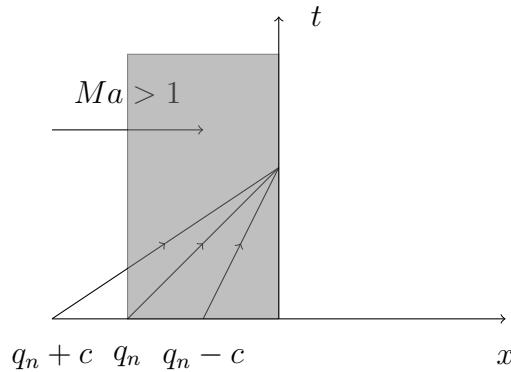


图 2.2: 超音速出流特征线传递示意图

其方程满足:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_n + \frac{2c}{\gamma - 1} = (q_n)_e + \frac{2c_e}{\gamma - 1} \\ q_n - \frac{2c}{\gamma - 1} = (q_n)_e - \frac{2c_e}{\gamma - 1} \\ q_\tau = (q_\tau)_e \\ s = s_e \end{array} \right. \quad (2.31)$$

**2.7.2.3 亚音速入流** 其中  $q_n + c$  和  $q_n$  两条特征线由远场传入,  $q_n - c$  由单元内部传入,  $s$  取为无限远来流值,  $R^+$  取为来流值,  $R^-$  取为单元内, 其特征线传递如图 2.3。

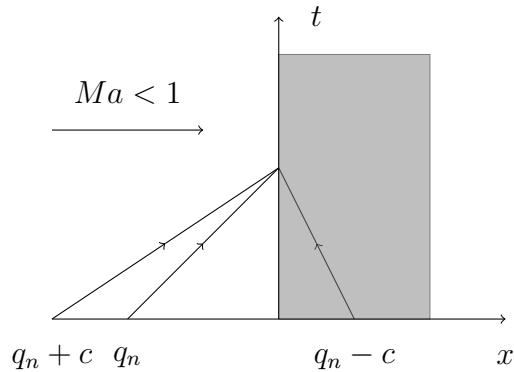


图 2.3: 亚音速入流特征线传递示意图

其方程满足:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_n + \frac{2c}{\gamma - 1} = (q_n)_\infty + \frac{2c_\infty}{\gamma - 1} \\ q_n - \frac{2c}{\gamma - 1} = (q_n)_e - \frac{2c_e}{\gamma - 1} \\ q_\tau = (q_\tau)_\infty \\ s = s_\infty \end{array} \right. \quad (2.32)$$

**2.7.2.4 亚音速出流** 其中  $q_n + c$  和  $q_n$  两条特征线由远场传入,  $q_n - c$  由单元内部传入,  $s$  取为无限远来流值,  $R^+$  取为来流值,  $R^-$  取为单元内, 其特征线传递如图 2.4。

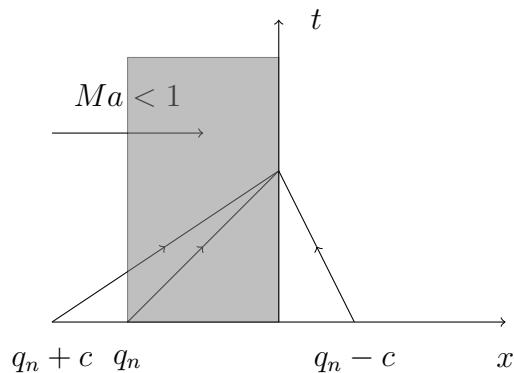


图 2.4: 亚音速出流特征线传递示意图

其方程满足：

$$\begin{cases} q_n + \frac{2c}{\gamma - 1} = (q_n)_e + \frac{2c_e}{\gamma - 1} \\ q_n - \frac{2c}{\gamma - 1} = (q_n)_\infty - \frac{2c_\infty}{\gamma - 1} \\ q_\tau = (q_\tau)_e \\ s = s_e \end{cases} \quad (2.33)$$

需要说明的是，上述  $s$  用  $p/\rho^\gamma$  表示。

## 2.8 收敛判据

用相对残差进行判断收敛与否，记第  $n$  步收敛残差为  $res_n$ ：

$$res_n = \sqrt{\sum_{k=1}^N \left( \frac{\vec{W}_k^{(n+1)} - \vec{W}_k^{(n)}}{\Delta t^{(n)}} \right)^2} \quad (2.34)$$

则相对残差  $r_n$  计算如下：

$$r_n = \frac{res_n}{res_0} \quad (2.35)$$

### 3 数值实验结果可视化

本次作业使用 PyPlot 可视化库中的三角单元可视化 API 进行云图绘制，其计算云图结果分别如下。按照来流马赫  $Ma = 2 \sim 10$  结果如下文所示。

#### 3.1 $Ma = 2$

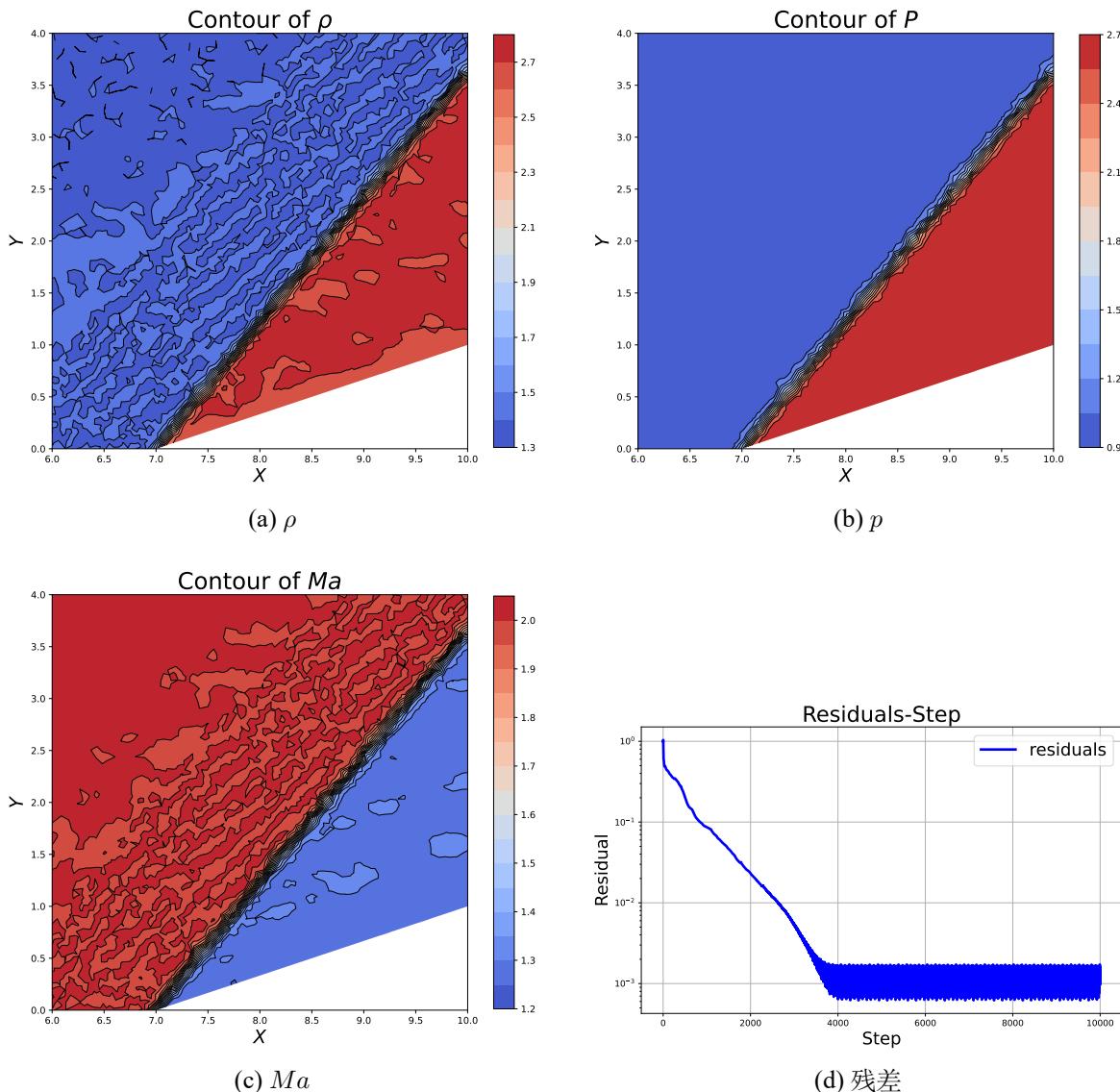


图 3.1:  $Ma = 2$  云图及收敛残差

### 3.2 $Ma = 3$

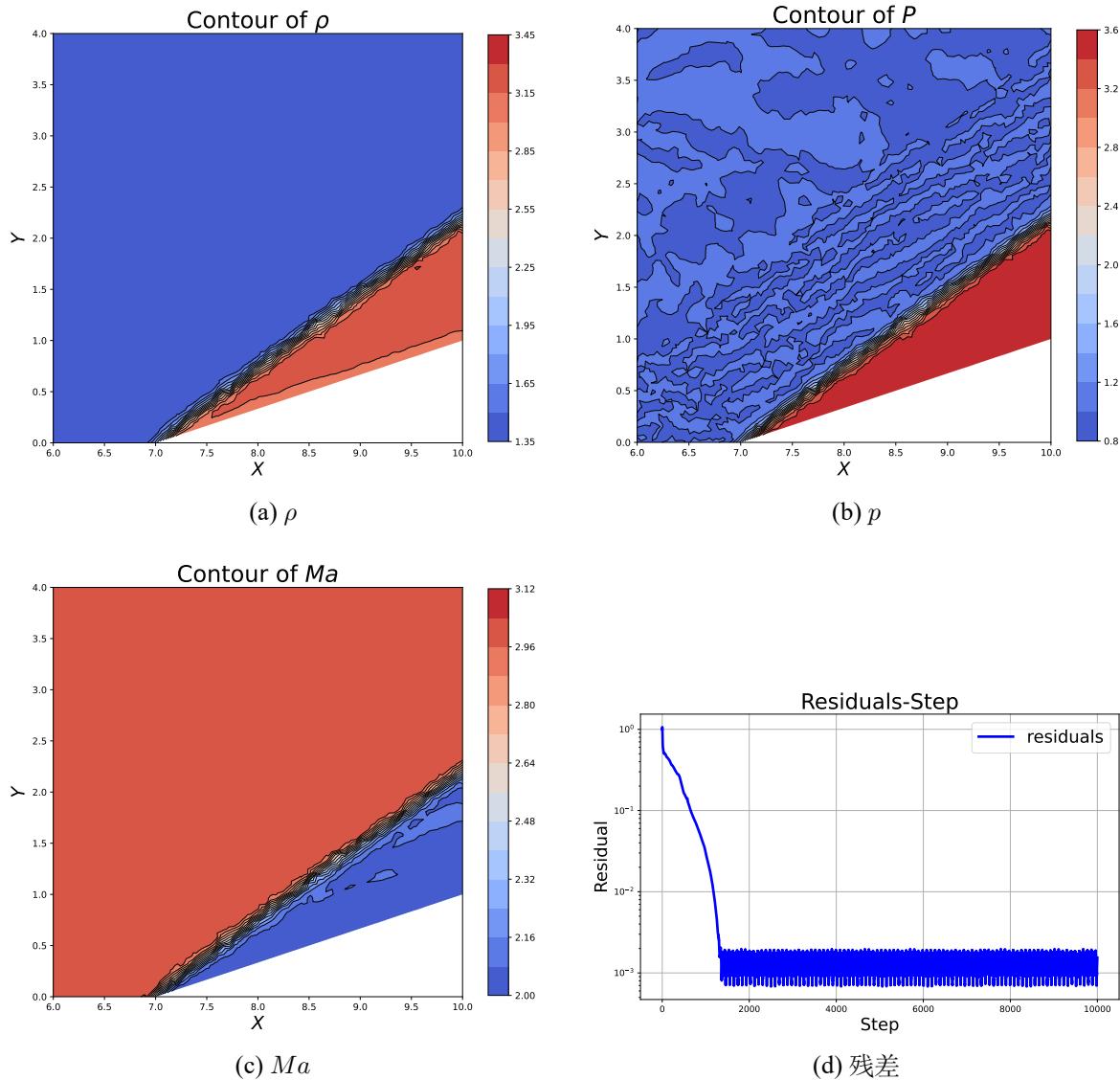


图 3.2:  $Ma = 3$  云图及收敛残差

### 3.3 $Ma = 4$

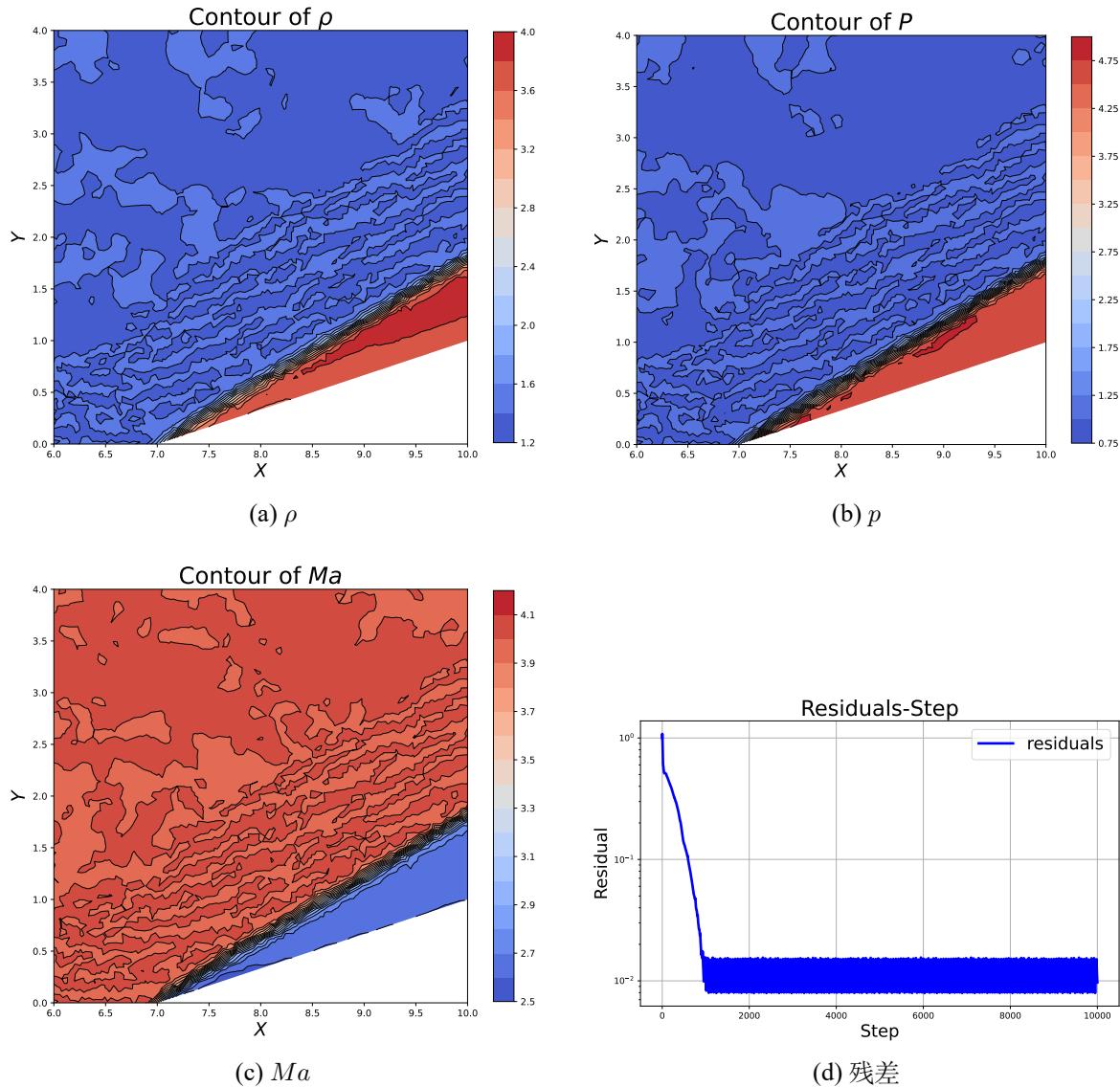


图 3.3:  $Ma = 4$  云图及收敛残差

### 3.4 $Ma = 5$

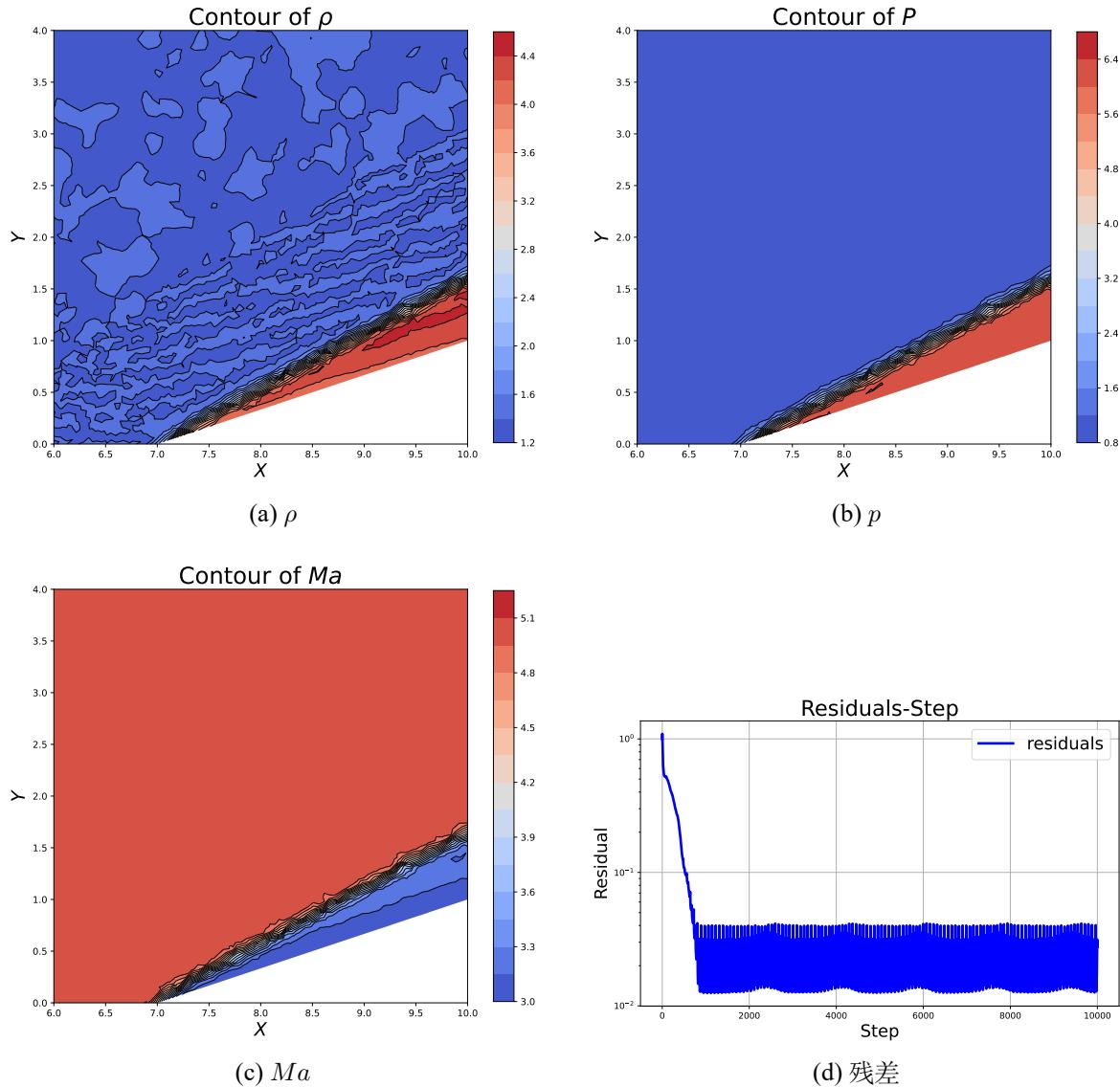


图 3.4:  $Ma = 5$  云图及收敛残差

### 3.5 $Ma = 6$

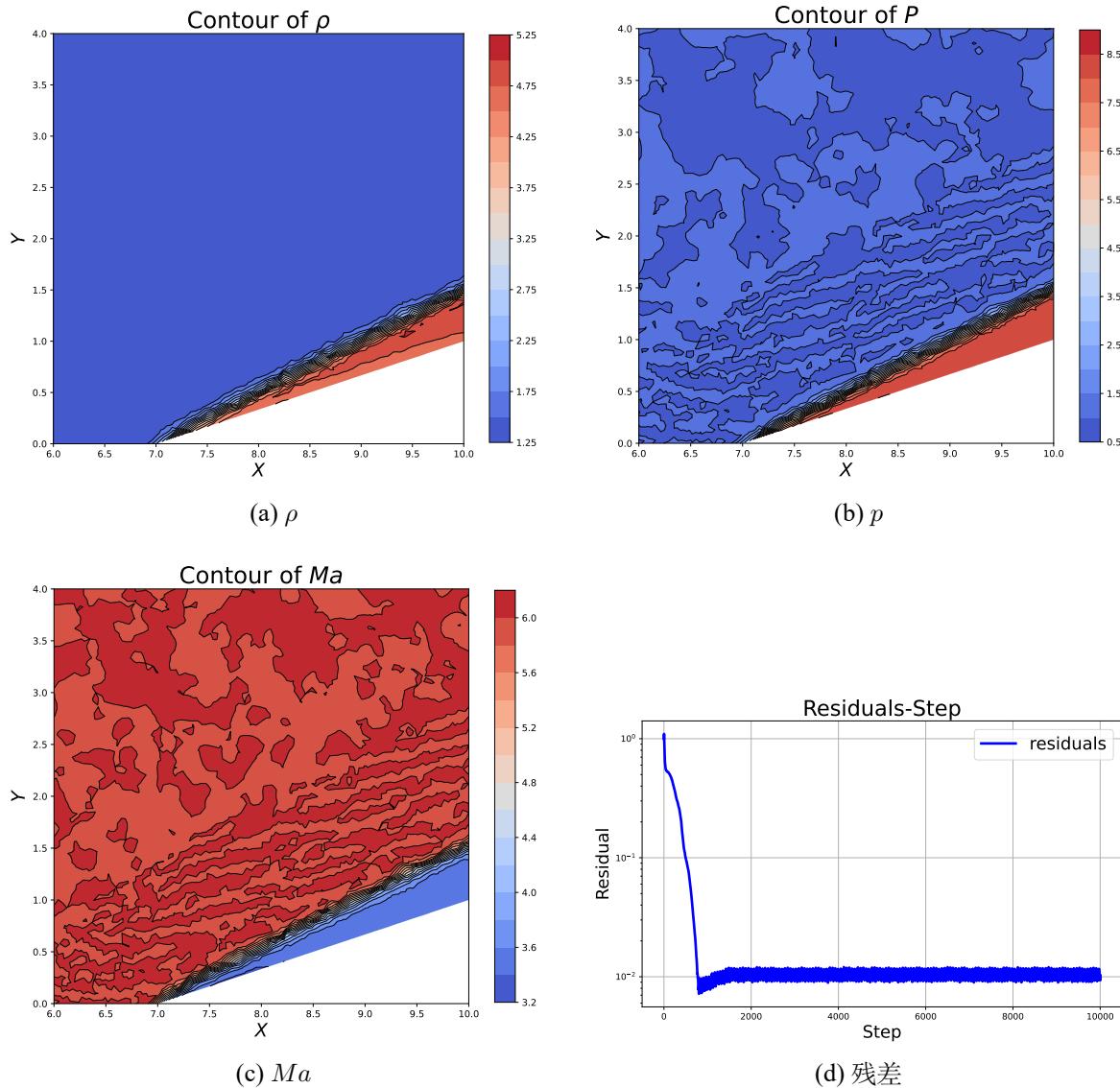


图 3.5:  $Ma = 6$  云图及收敛残差

### 3.6 $Ma = 7$

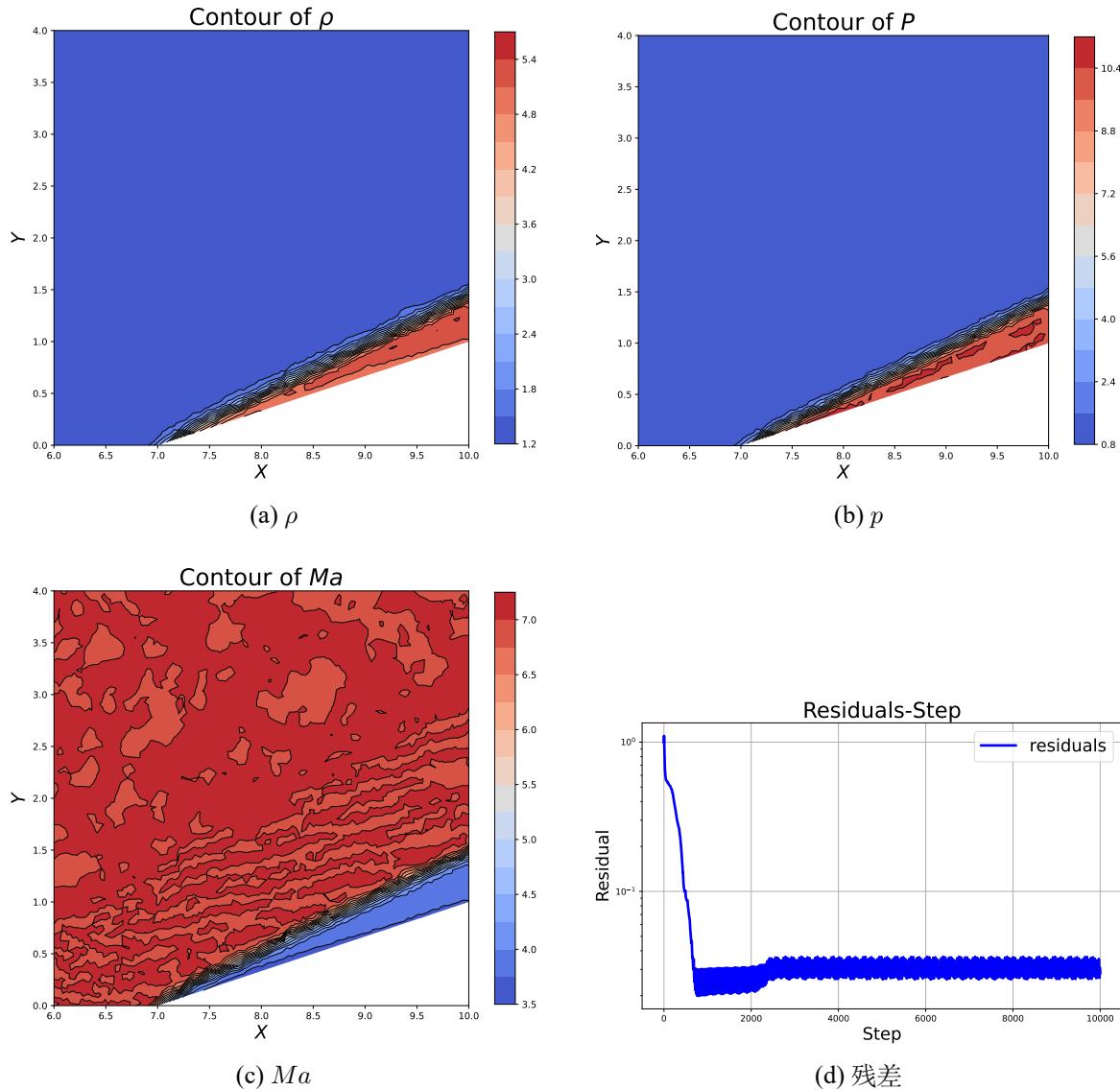


图 3.6:  $Ma = 7$  云图及收敛残差

### 3.7 $Ma = 8$

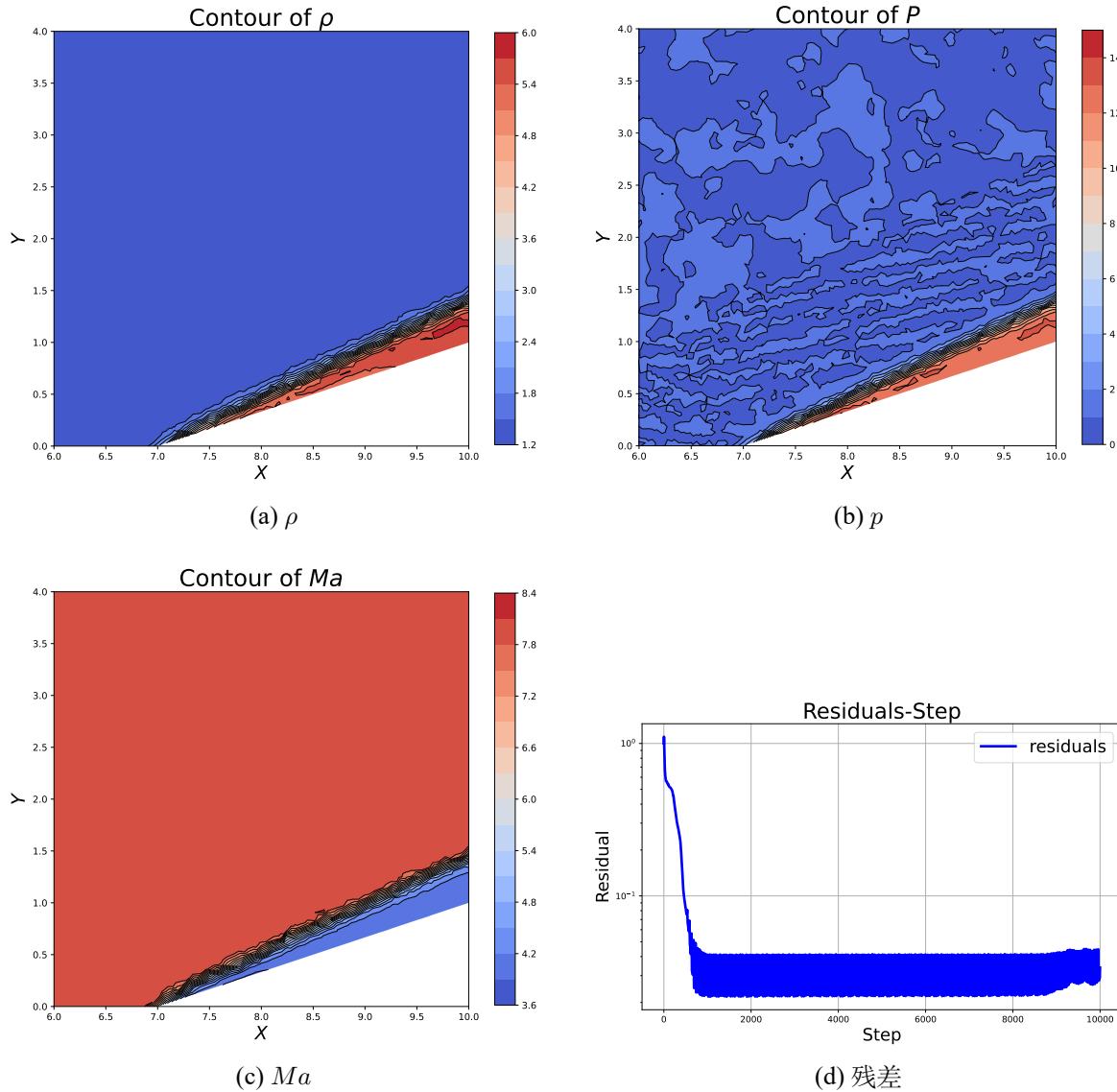


图 3.7:  $Ma = 8$  云图及收敛残差

### 3.8 $Ma = 9$

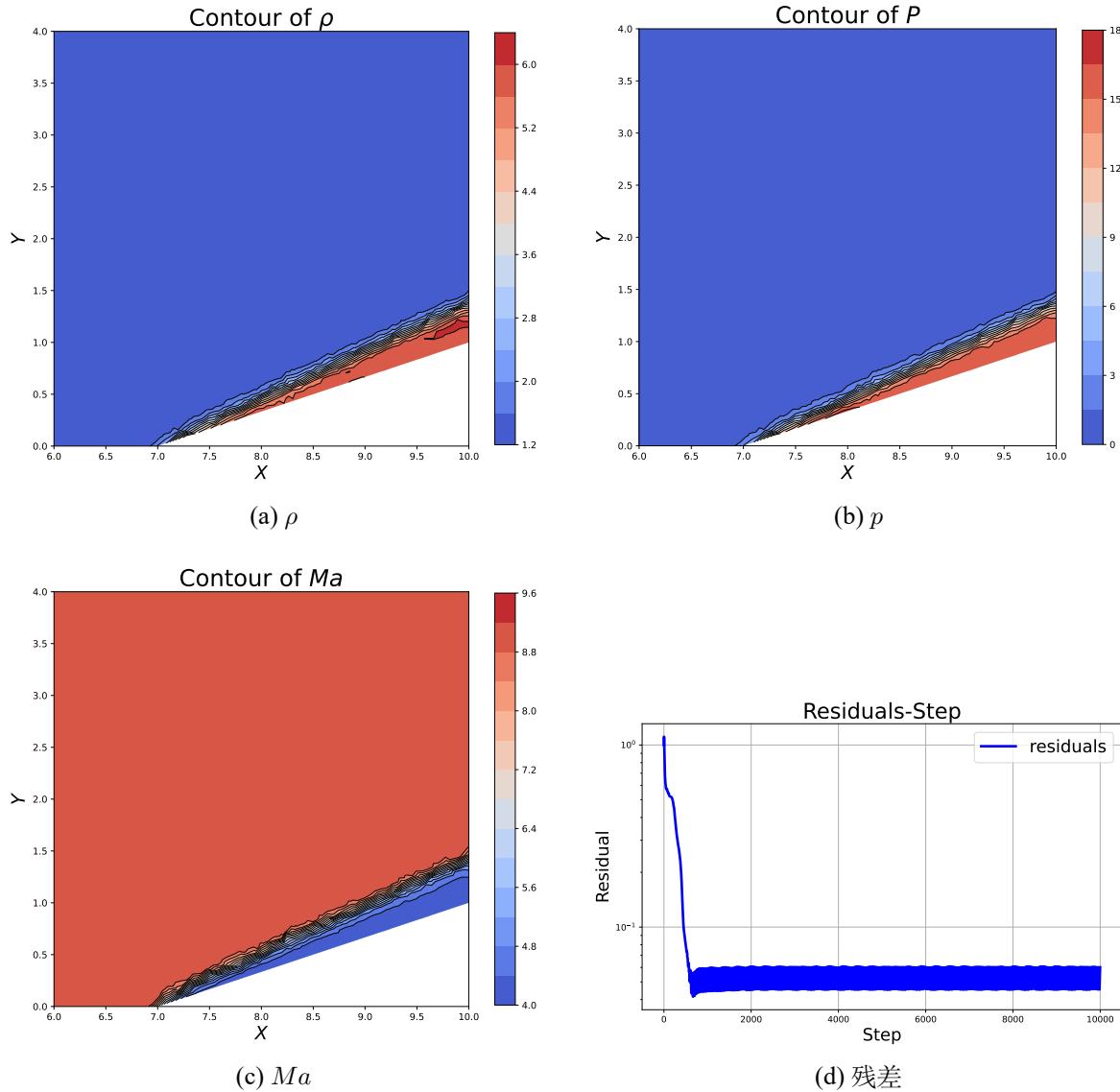


图 3.8:  $Ma = 9$  云图及收敛残差

### 3.9 $Ma = 10$

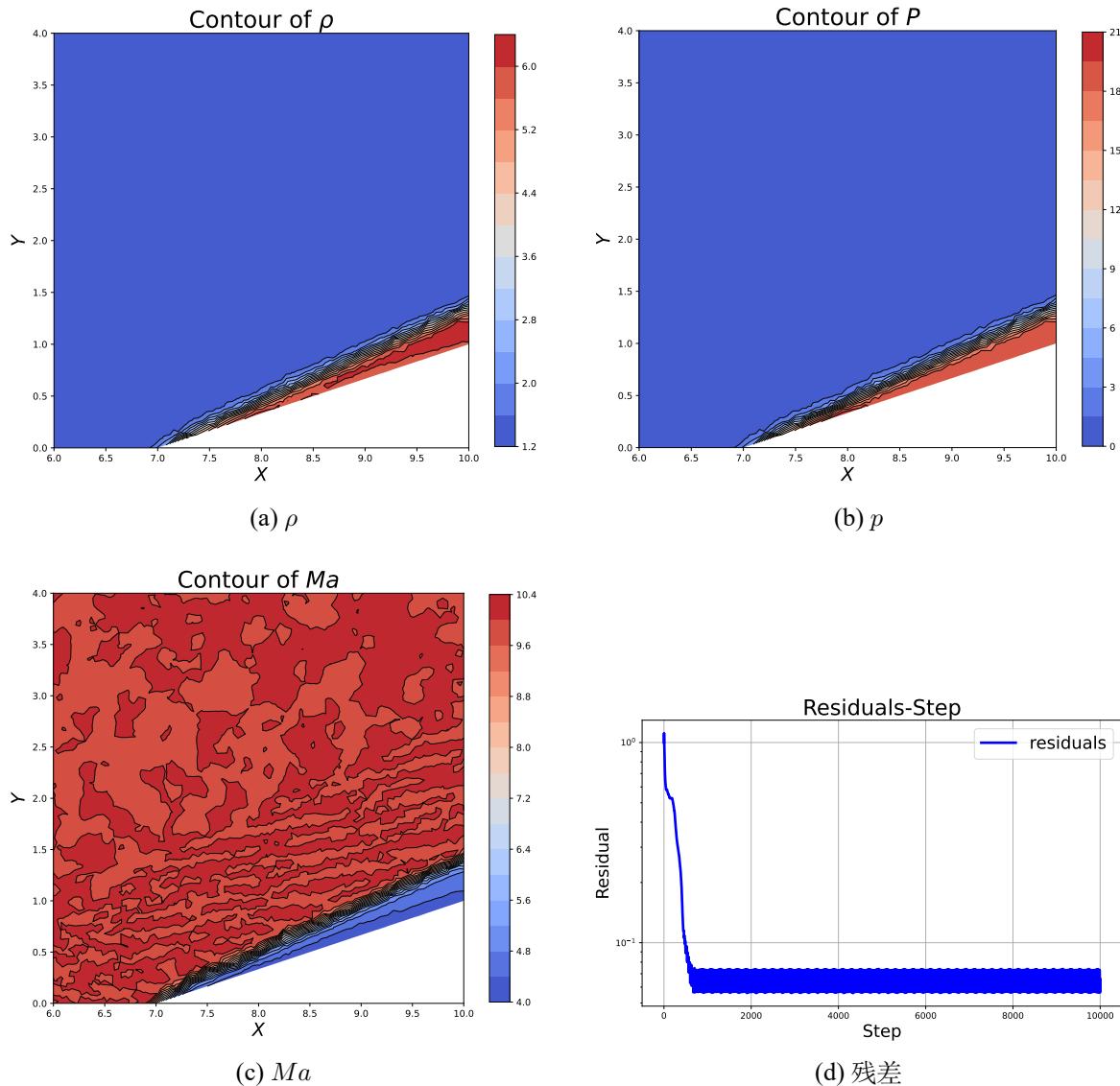


图 3.9:  $Ma = 10$  云图及收敛残差

## 4 存在的问题

本次作业还是存在很多不足的，如下：

1. 将问题想成定常问题，似乎让这个问题有所失真；
2. 采用的是人工粘性方法，这个计算方法不够 modern；
3. 在高马赫数情形下，残差收敛效果很差，甚至几乎不收敛，数值振荡明显。