

# Esercizi sulle Dipendenze Funzionali

Stefano Calzavara

1. Usando gli assiomi di Armstrong, si dimostri che se  $X \rightarrow Y$  e  $YW \rightarrow Z$ , allora  $XW \rightarrow Z$ .

**Solution:** Possiamo costruire il seguente albero di prova:

$$\begin{array}{c} \text{AUGM} \frac{X \rightarrow Y, YW \rightarrow Z \vdash X \rightarrow Y}{X \rightarrow Y, YW \rightarrow Z \vdash XW \rightarrow YW} \\ \text{TRANS} \frac{X \rightarrow Y, YW \rightarrow Z \vdash XW \rightarrow YW \quad X \rightarrow Y, YW \rightarrow Z \vdash YW \rightarrow Z}{X \rightarrow Y, YW \rightarrow Z \vdash XW \rightarrow Z} \end{array}$$

In alternativa possiamo esibire la seguente derivazione:

$$X \rightarrow Y, XW \rightarrow YW, YW \rightarrow Z, XW \rightarrow Z.$$

2. Si supponga che una dipendenza funzionale  $X \rightarrow Y$  sia soddisfatta da due istanze di relazione  $r$  ed  $s$  con gli stessi attributi. Dire se  $r \cap s$  e  $r \cup s$  soddisfano  $X \rightarrow Y$ , fornendo una dimostrazione o un controesempio opportuni.

**Solution:**  $r \cap s$  soddisfa la dipendenza  $X \rightarrow Y$ , dato che  $r \cap s \subseteq r$  ed  $r$  soddisfa  $X \rightarrow Y$ . In particolare, sappiamo che  $\forall u, v \in r : u[X] = v[X] \Rightarrow u[Y] = v[Y]$ , quindi tale proprietà continua a valere anche per ogni sottoinsieme di  $r$ , fra cui  $r \cap s$ .

Al contrario  $r \cup s$  potrebbe non soddisfare  $X \rightarrow Y$ . In particolare, si considerino le relazioni  $r = \{(X = 1, Y = 1)\}$  e  $s = \{(X = 1, Y = 2)\}$ . Sebbene sia  $r$  che  $s$  soddisfino  $X \rightarrow Y$ , è facile osservare che tale dipendenza non è soddisfatta da  $r \cup s$ .

3. Si consideri lo schema di relazione  $R(A, B, C, D)$  con dipendenze  $F = \{AB \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow A\}$ . Si trovino tutte le dipendenze non banali<sup>1</sup> derivabili da  $F$  e tutte le chiavi di  $R$ .

**Solution:** Ci concentriamo sulle dipendenze funzionali che hanno un solo attributo nella parte destra, in quanto tutte le altre sono derivabili tramite la regola di unione e quindi vengono omesse per leggibilità. Costruiamo le chiusure per tutti i sottoinsiemi di attributi, per leggibilità vengono omessi i sottoinsiemi che non contribuiscono a generare nuove dipendenze:

- $C^+ = CDA$ , da cui la nuova dipendenza  $C \rightarrow A$
- $AB^+ = ABCD$ , da cui la nuova dipendenza  $AB \rightarrow D$
- $AC^+ = ACD$ , da cui la nuova dipendenza  $AC \rightarrow D$
- $BC^+ = BCDA$ , da cui le nuove dipendenze  $BC \rightarrow D$  e  $BC \rightarrow A$

<sup>1</sup>La dipendenza funzionale  $X \rightarrow Y$  è detta banale se e solo se  $Y \subseteq X$ .

- $BD^+ = BDAC$ , da cui le nuove dipendenze  $BD \rightarrow A$  e  $BD \rightarrow C$
- $CD^+ = CDA$ , da cui la nuova dipendenza  $CD \rightarrow A$
- $ABC^+ = ABCD$ , da cui la nuova dipendenza  $ABC \rightarrow D$
- $ABD^+ = ABDC$ , da cui la nuova dipendenza  $ABD \rightarrow C$
- $BCD^+ = BCDA$ , da cui la nuova dipendenza  $BCD \rightarrow A$

Sulla base delle chiusure calcolate possiamo identificare le chiavi  $AB$ ,  $BC$  e  $BD$ . Si noti che tutte le chiavi contengono  $B$ , in quanto tale attributo non è derivabile.

4. Si trovino tutte le chiavi dell'esercizio precedente utilizzando l'algoritmo apposito descritto a lezione.

**Solution:** Dato che  $B$  è il solo simbolo che non compare mai a destra, partiamo da  $B :: (ACD)$ . Osserviamo che  $B^+ = B$ , perciò generiamo i nuovi candidati  $BA :: (CD)$ ,  $BC :: (D)$  e  $BD :: ()$ . A questo punto abbiamo:

- $BA^+ = BACD$ , quindi  $BA$  è una chiave;
- $BC^+ = BCDA$ , quindi  $BC$  è una chiave;
- $BD^+ = BDAC$ , quindi  $BD$  è una chiave.

Poichè i candidati sono finiti, l'algoritmo termina.

5. Si consideri l'insieme di dipendenze funzionali  $F = \{A \rightarrow B, C \rightarrow B, D \rightarrow ABC, AC \rightarrow D\}$ . Trovare una copertura canonica di  $F$ .

**Solution:** Prima di tutto convertiamo  $F$  in modo che le parti destre contengano un solo attributo:

$$G = \{A \rightarrow B, C \rightarrow B, D \rightarrow A, D \rightarrow B, D \rightarrow C, AC \rightarrow D\}.$$

Procediamo poi all'eliminazione degli attributi estranei, che possono occorrere solo nella dipendenza  $AC \rightarrow D$ . Dato che  $A_G^+ = AB$  e  $C_G^+ = CB$ , non vi sono attributi estranei da eliminare.

Infine ci restano da eliminare le dipendenze ridondanti. Consideriamo le dipendenze una per una:

- $A \rightarrow B$ : abbiamo  $A_{G \setminus \{A \rightarrow B\}}^+ = A$ , quindi la dipendenza non è ridondante;
- $C \rightarrow B$ : abbiamo  $C_{G \setminus \{C \rightarrow B\}}^+ = C$ , quindi la dipendenza non è ridondante;
- $D \rightarrow A$ : abbiamo  $D_{G \setminus \{D \rightarrow A\}}^+ = DBC$ , quindi la dipendenza non è ridondante;
- $D \rightarrow B$ : abbiamo  $D_{G \setminus \{D \rightarrow B\}}^+ = DACB$ , quindi la dipendenza è ridondante e va rimossa;
- $D \rightarrow C$ : abbiamo  $D_{G \setminus \{D \rightarrow B, D \rightarrow C\}}^+ = DAB$ , quindi la dipendenza non è ridondante;
- $AC \rightarrow D$ : abbiamo  $AC_{G \setminus \{D \rightarrow B, AC \rightarrow D\}}^+ = ACB$ , quindi la dipendenza non è ridondante.

La copertura canonica è quindi  $\{A \rightarrow B, C \rightarrow B, D \rightarrow A, D \rightarrow C, AC \rightarrow D\}$ .

6. Si consideri l'insieme di dipendenze  $F = \{AB \rightarrow CDE, AC \rightarrow BDE, B \rightarrow C, C \rightarrow B, C \rightarrow D, B \rightarrow E\}$ . Portare  $F$  in forma canonica e trovare tutte le chiavi.

**Solution:** Assicuriamoci prima di tutto di avere un solo attributo a destra:

$$\{AB \rightarrow C, AB \rightarrow D, AB \rightarrow E, AC \rightarrow B, AC \rightarrow D, AC \rightarrow E, B \rightarrow C, C \rightarrow B, C \rightarrow D, B \rightarrow E\}$$

E' facile notare che  $AB \rightarrow C$  e  $AB \rightarrow E$  contengono un attributo estraneo  $A$ , dato che  $B \rightarrow C$  e  $B \rightarrow E$  fanno parte dell'insieme delle dipendenze. Più formalmente, si noti che  $B^+ = BCDE$  e quindi abbiamo sia  $C \in B^+$  che  $E \in B^+$ .

Analogamente osserviamo che  $AC \rightarrow B$  e  $AC \rightarrow D$  contengono un attributo estraneo  $A$ , dato che  $C \rightarrow B$  e  $C \rightarrow D$  fanno parte dell'insieme delle dipendenze. Più formalmente, si noti che  $C^+ = CBDE$  e quindi abbiamo sia  $B \in C^+$  che  $D \in C^+$ .

Infine  $AB \rightarrow D$  contiene un attributo estraneo  $A$  (dato che  $D \in B^+$ ) ed anche  $AC \rightarrow E$  contiene un attributo estraneo  $A$  (dato che  $E \in C^+$ ). Si ottiene quindi il nuovo insieme di dipendenze funzionali:

$$G = \{B \rightarrow D, C \rightarrow E, B \rightarrow C, C \rightarrow B, C \rightarrow D, B \rightarrow E\}$$

A questo punto andiamo ad eliminare le dipendenze ridondanti, in particolare:

- $B \rightarrow D$ : abbiamo  $B_{G \setminus \{B \rightarrow D\}}^+ = BCDE$ , quindi  $B \rightarrow D$  va rimossa;
- $C \rightarrow E$ : abbiamo  $C_{G \setminus \{B \rightarrow D, C \rightarrow E\}}^+ = CBDE$ , quindi  $C \rightarrow E$  va rimossa;
- $B \rightarrow C$ : abbiamo  $B_{G \setminus \{B \rightarrow D, C \rightarrow E, B \rightarrow C\}}^+ = BE$ , quindi  $B \rightarrow C$  non è ridondante;
- $C \rightarrow B$ : abbiamo  $C_{G \setminus \{B \rightarrow D, C \rightarrow E, C \rightarrow B\}}^+ = CD$ , quindi  $C \rightarrow B$  non è ridondante;
- $C \rightarrow D$ : abbiamo  $C_{G \setminus \{B \rightarrow D, C \rightarrow E, C \rightarrow D\}}^+ = CBE$ , quindi  $C \rightarrow D$  non è ridondante;
- $B \rightarrow E$ : abbiamo  $B_{G \setminus \{B \rightarrow D, C \rightarrow E, B \rightarrow E\}}^+ = BCD$ , quindi  $B \rightarrow E$  non è ridondante.

Rimangono quindi con le dipendenze:

$$H = \{B \rightarrow C, C \rightarrow B, C \rightarrow D, B \rightarrow E\}$$

A questo punto passiamo alla ricerca delle chiavi, iniziando dal candidato  $A :: (BCDE)$ . Dato che  $A^+ = A$ , generiamo i nuovi candidati  $AB :: (CDE)$ ,  $AC :: (DE)$ ,  $AD :: (E)$  e  $AE :: ()$ . Abbiamo:

- $AB^+ = ABCDE$ , quindi  $AB$  è una chiave;
- $AC^+ = ACBDE$ , quindi  $AC$  è una chiave;
- $AD^+ = AD$ , quindi  $AD$  non è una chiave e viene generato il candidato  $ADE :: ()$ ;
- $AE^+ = AE$ , quindi  $AE$  non è una chiave e non ci sono altri candidati da generare;
- $ADE^+ = ADE$ , quindi  $ADE$  non è una chiave e non ci sono altri candidati da generare.

Concludiamo che le chiavi sono  $AB$  e  $AC$ .

$A$	$B$	$C$	$D$
$a_1$	$b_1$	$c_1$	$d_1$
$a_1$	$b_1$	$c_2$	$d_2$
$a_2$	$b_1$	$c_1$	$d_3$
$a_2$	$b_1$	$c_3$	$d_4$

Table 1: Unica istanza valida di  $R$

7. Si consideri lo schema di relazione  $R(A, B, C, D)$  e si supponga che l'unica istanza valida di  $R$  sia quella in Table 1. Si trovi una copertura canonica delle dipendenze funzionali soddisfatte da  $R$ .

**Solution:** Identifichiamo prima le dipendenze funzionali e poi le portiamo in forma canonica. Partiamo ragionando sui singoli attributi, identificando così le dipendenze  $A \rightarrow B$ ,  $C \rightarrow B$  e  $D \rightarrow ABC$ . Ragioniamo poi sugli insiemi con più di un attributo:

- $AB$ : osserviamo che  $AB \not\rightarrow C$  e  $AB \not\rightarrow D$ , dato che troviamo dei controesempi;
- $AC$ : osserviamo che  $AC \rightarrow BD$ , dato che nessuna tupla ha gli stessi valori sia su  $a$  che su  $c$ , quindi la dipendenza funzionale è banalmente vera;
- $BC$ : osserviamo che  $BC \not\rightarrow A$  e  $BC \not\rightarrow D$ , dato che troviamo dei controesempi;
- $AD, BD, ABD, ACD, BCD, ABCD$ : questi insiemi di attributi contengono la chiave  $D$ , pertanto derivano tutti gli attributi mancanti. Chiaramente gli attributi diversi da  $D$  sono estranei e verrebbero eliminati nella copertura canonica, quindi possiamo ignorare tali dipendenze e tenere solo  $D \rightarrow ABC$ ;
- $ABC$ : questo insiemi di attributi contiene la chiave  $AC$ , pertanto abbiamo  $ABC \rightarrow D$ . Tale dipendenza contiene l'attributo estraneo  $B$ , che verrebbe eliminato nella copertura canonica, quindi possiamo ignorarla e tenere solo  $AC \rightarrow BD$ .

Per ottenere la copertura canonica, riscriviamo le dipendenze trovate in modo da avere un singolo attributo a destra di ciascuna:

$$F = \{A \rightarrow B, C \rightarrow B, D \rightarrow A, D \rightarrow B, D \rightarrow C, AC \rightarrow B, AC \rightarrow D\}.$$

Procediamo ora all'eliminazione degli attributi estranei. Dato che  $B \in A_F^+$ , l'attributo  $C$  è estraneo in  $AC \rightarrow B$ , quindi tale dipendenza viene eliminata (diventerebbe  $A \rightarrow B$ , che era già nell'insieme). Viceversa  $AC \rightarrow D$  non ha attributi estranei. Rimaniamo quindi con l'insieme di dipendenze:

$$G = \{A \rightarrow B, C \rightarrow B, D \rightarrow A, D \rightarrow B, D \rightarrow C, AC \rightarrow D\}.$$

Andiamo infine a rimuovere le dipendenze ridondanti. In particolare è possibile osservare che la sola dipendenza ridondante è  $D \rightarrow B$ , dato che  $D_{G \setminus \{D \rightarrow B\}}^+ = DACB$ .

8. Una palestra ospita diversi corsi appartenenti a diverse tipologie (aerobica, danza, ...). Ogni corso ha una sigla, che lo identifica, un insegnante e alcuni allievi. Un insegnante offre in generale più corsi, anche con diverse tipologie, e anche un allievo può essere iscritto a più corsi. Di ogni insegnante interessano il nome (che lo identifica) e l'indirizzo. Di ogni allievo interessano il nome (che lo identifica) e il numero di telefono. Per ogni allievo interessa sapere, per ogni corso che frequenta, quanto ha già versato finora. La palestra gestisce attualmente i dati con un foglio elettronico con tante colonne quanti sono i fatti

elementari da trattare. Si chiede di:

- (a) Definire le dipendenze funzionali;
- (b) Dare una copertura canonica delle dipendenze di tale schema;
- (c) Trovare tutte le chiavi.

**Solution:** Lo schema di relazione avrà forma  $R(TipoC, SiglaC, NomeI, IndI, NomeA, TelA, Vers)$ , dove i suffissi  $C, I, A$  indicano corsi, insegnanti ed allievi rispettivamente. Le dipendenze funzionali  $F$  sono:

1.  $SiglaC \rightarrow TipoC\ NomeI$
2.  $NomeI \rightarrow IndI$
3.  $NomeA \rightarrow TelA$
4.  $SiglaC\ NomeA \rightarrow Vers$

La copertura canonica  $G$  si ottiene semplicemente sostituendo la dipendenza 1 con due dipendenze  $SiglaC \rightarrow TipoC$  e  $SiglaC \rightarrow NomeI$ , visto che è possibile dimostrare che non ci sono attributi estranei e dipendenze ridondanti. A questo punto osserviamo che  $SiglaC$  e  $NomeA$  devono far parte di ogni chiave, perchè non occorrono a destra di nessuna dipendenza funzionale. In particolare abbiamo che la chiusura di tale coppia di attributi contiene tutti gli attributi della relazione, quindi  $\{SiglaC, NomeA\}$  è l'unica chiave.