* Проверка статистических гипотез

Статистическая гипотеза - это некоторое предположение о свойствах генеральной совокупности, которое необходимо проверить. Статистические гипотезы выдвигаются, когда необходимо проверить, является ли наблюдаемое явление элементом случайности или результатом воздействия некоторых мероприятий.

Выводы, полученные путём проверки статистических гипотез, носят вероятностный характер.

Статистическая гипотеза называется *непараметрической*, если в ней сформулированы предположения относительно вида функции распределения.

Статистическая гипотеза называется *параметрической*, если в ней сформулированы предположения относительно значения параметров функции распределения известного вида.

* *Проверка статистических гипотез*

Параметрическая гипотеза называется *простой*, если содержит только одно предположение относительно параметра.

Параметрическая гипотеза называется *сложной*, если она состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

Пример. Если a – мат.ожидание нормально распределенной с.в., то гипотеза $\{H_0: a = 0\}$ – простая, $\{H_1: a > 0{,}5\}$ – сложная, т.к. состоит из бесконечного множества простых вида $\{H_1: a = a_i\}$, где a_i – любое заданное число, большее 0,5.

Этапы проверки статистических гипотез:

1. Формулировка основной H_0 и альтернативной гипотез H_1;

2. Выбор статистического критерия, с помощью которого будет проверяться гипотеза;

3. Задание значение уровня значимости α;

4. Нахождение границы области принятия гипотезы;

5. Вывод о принятии или отвержении основной гипотезы H_0.

* Проверка статистических гипотез

Основная (нулевая) гипотеза H_0 - предположение о свойствах генеральной совокупности, которое является логичным и правдоподобным, но требует проверки. Основная гипотеза обладает "презумпцией справедливости": пока не доказано, что её утверждение ложно, она считается истинной.

Альтернативная гипотеза H_1 - утверждение о свойствах генеральной совокупности, которое принимается в случае, когда нет возможности принять основную гипотезу.

Пример. После изменения конфигурации компьютерной сети были собраны случайным образом 200 замеров скорости передачи сообщений.

Основная гипотеза H_0: изменение конфигурации не имело эффекта.

Альтернативная гипотеза H_1: эффект от изменения статистически значим.

* Проверка статистических гипотез

Статистическим критерием (тестом) К называют с.в. *К*, с помощью которой принимаются решения о принятии или отклонении выдвинутой нулевой гипотезы.

Виды критериев:

односторонний критерий - критерий, значения которого принадлежат области (0; +∞);

двусторонний критерий - критерий, значения которого принадлежат области (- ∞; + ∞).

Свойства статистического критерия:

- является случайной величиной, закон распределения которой известен;

- чем ближе значение статистического критерия к нулю, тем более вероятно, что основная гипотеза является верной.

* Проверка статистических гипотез

Уровень значимости α - это вероятность ошибки первого рода. Значение уровня значимости обычно достаточно малое и задаётся аналитиком, проверяющим гипотезу. Чаще всего принимает значения 0,01 (1%), 0,05 (5%) и 0,1 (10%).

Существуют два рода ошибки.

Ошибка первого рода - отвержение основной гипотезы при том, что она верна (ошибка отклонения верной гипотезы H_0).

Ошибка второго рода - принятие основной гипотезы при том, что она ложна (ошибка принятия ложной гипотезы H_0).

Уровень доверия *p* - вероятность принятия верной гипотезы.

Если уровень значимости α - вероятность отвержения верной гипотезы, то вероятность принятия верной гипотезы: $p = 1 - \alpha$.

Аналитик сам управляет ошибкой первого рода - задаёт вероятность её наступления. Ошибкой второго рода он управлять не может - всегда существует вероятность того, что может быть принята неверная гипотеза.

* Проверка статистических гипотез

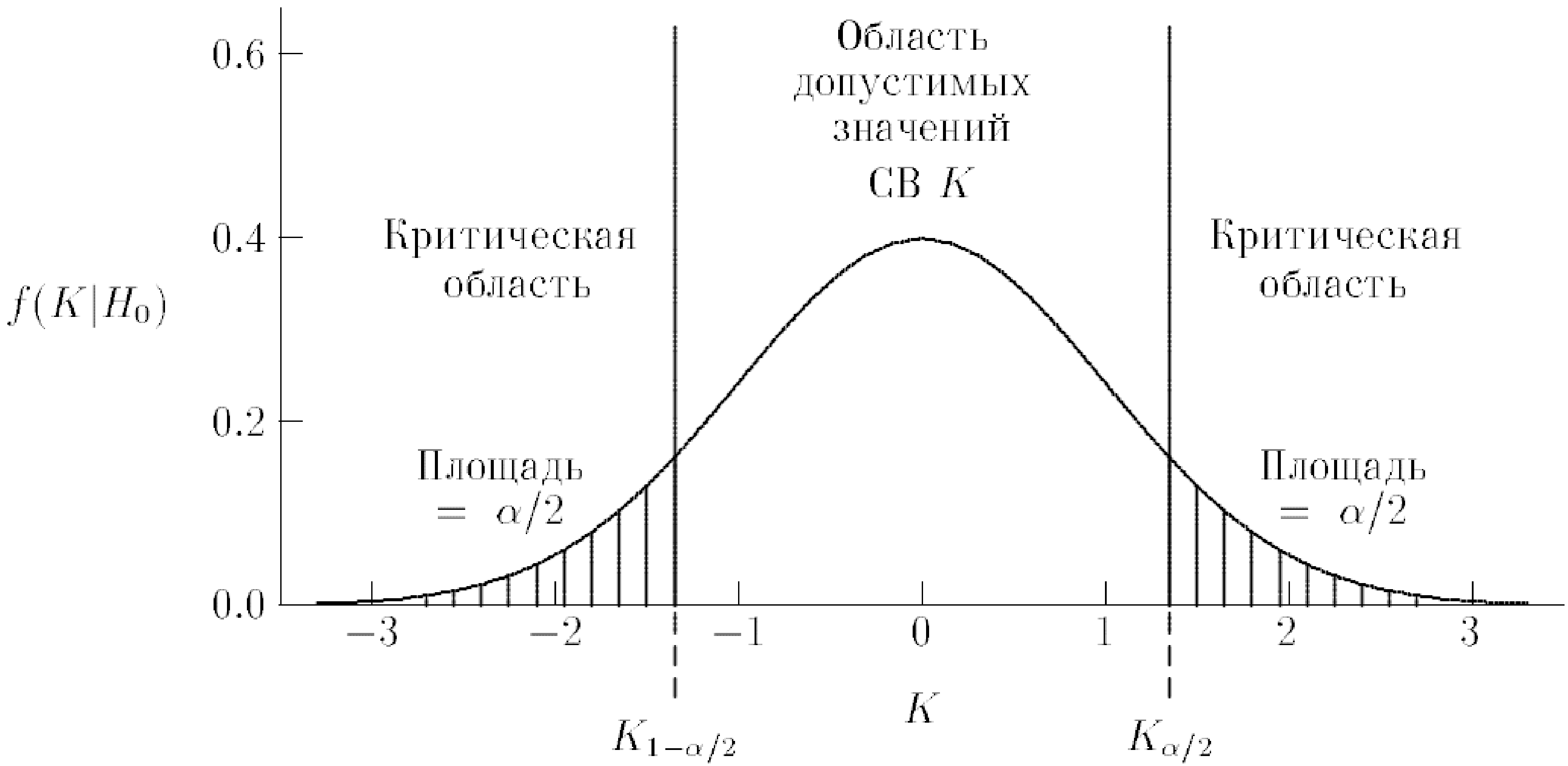
Область принятия гипотезы (ОПГ) - подмножество таких значений критерия, при которых основная гипотеза не может быть отвергнута. Область принятия гипотезы всегда включает в себя значение 0.

Критическая область - подмножество таких значений критерия, при которых основная гипотеза не может быть принята.

Односторонний критерий: критическая область одна и ОПГ включает в себя подмножество положительных значений.

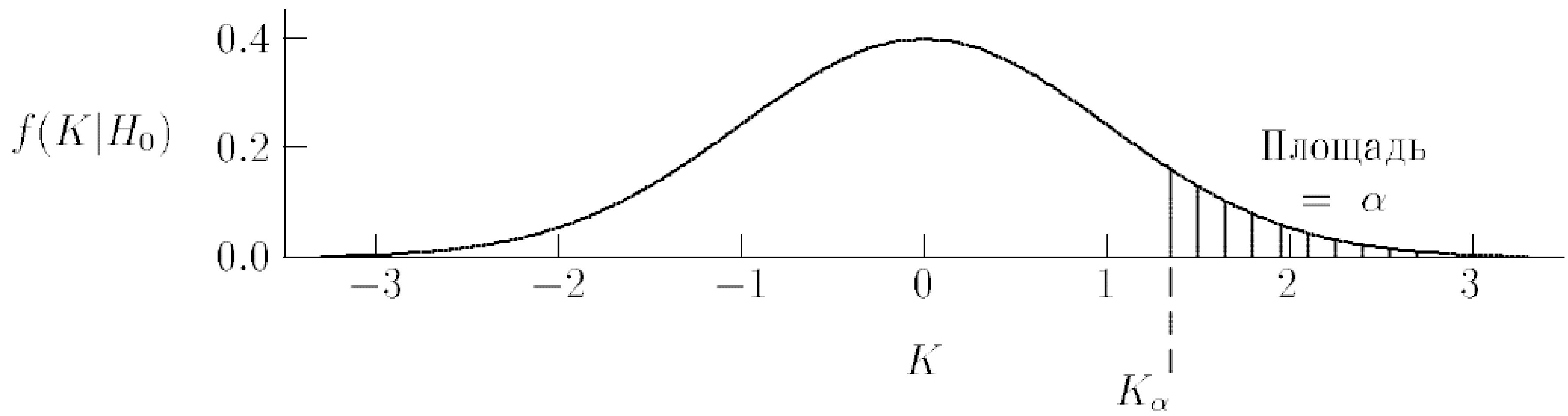
Двусторонний критерий: имеет две критические области и который может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

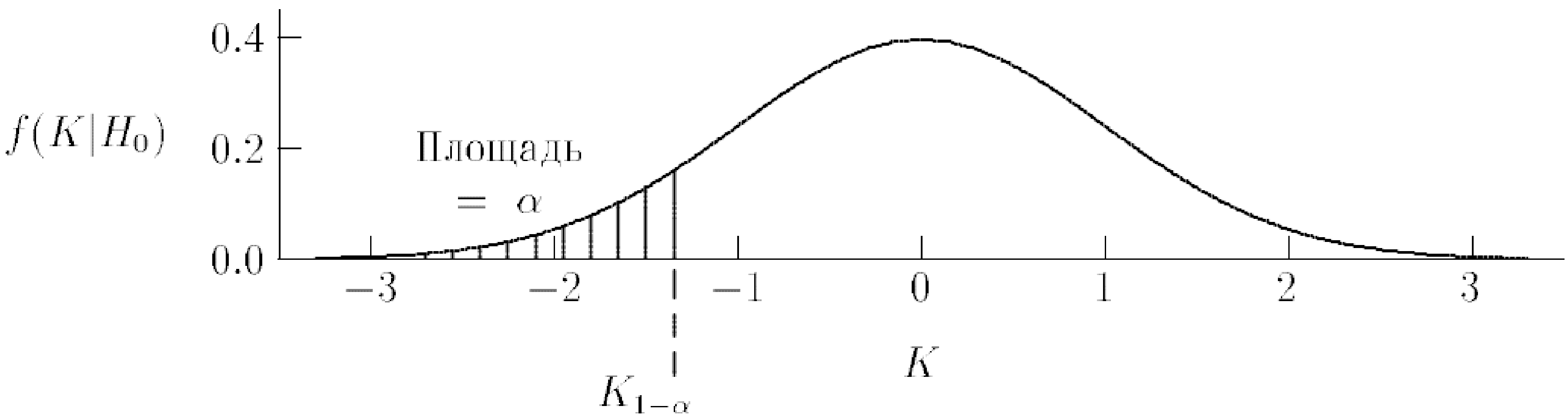
* Проверка статистических гипотез



Формирование критических областей и области допустимых значений случайного критерия *K* при заданном уровне значимости α (двусторонний случай)

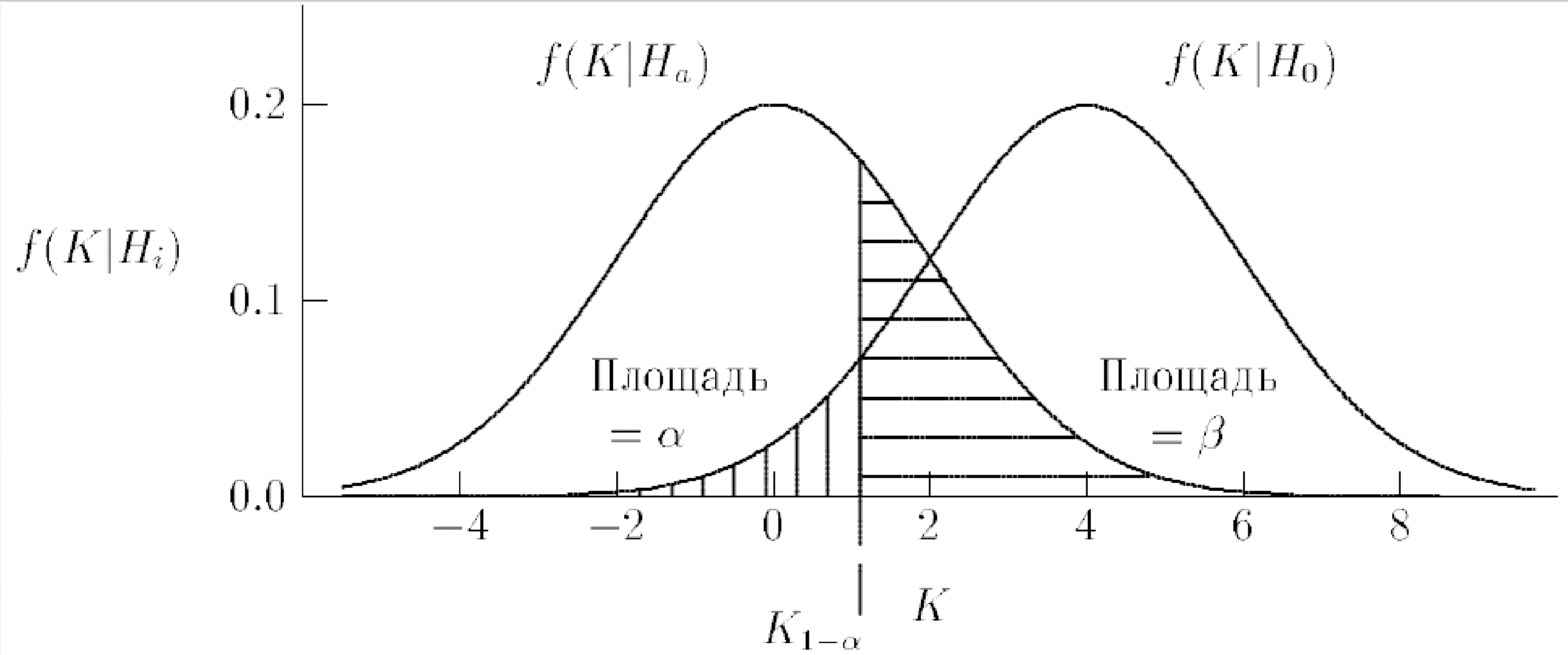
* Проверка статистических гипотез





Формирование право- и левосторонней критической области критерия *K* при заданном уровне значимости α (односторонний случай)

* Проверка статистических гипотез



Ошибки первого и второго рода критерия *K*, имеющего левостороннюю критическую область

* *Проверка статистических гипотез*

Проверка гипотезы о виде закона распределения выборки

Гипотезы:

Основная H_0: распределение выборки незначимо отличается от предполагаемого (нормальное, экспоненциальное и др.).

Альтернативная H_1: распределение выборки значимо отличается от предполагаемого.

Критерий согласия показывает степень отличия эмпирической функции распределения от гипотетической. Чем меньше значение критерия, тем больше степень схожести эмпирического и теоретического распределений.

Применяются критерий **хи-квадрат Пирсона** и **критерий Колмогорова-Смирнова**.

* Проверка статистических гипотез

Критерий хи-квадрат Пирсона

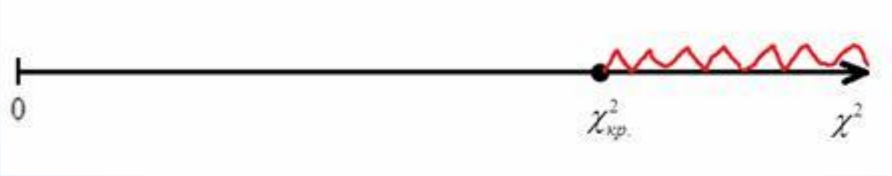
Формула оценки значения критерия хи-квадрат Пирсона:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i^* - np_i\right)^2}{np_i},$$

где *k* - число интервалов, n_i^* - число попаданий наблюдений в *i*-й интервал, *n* - мощность выборки, p_i - вероятность попадания элемента в *i*-й интервал.

При достаточно большом объеме выборки *n* распределение этой с.в. близко к распределению хи-квадрат с количеством степеней свободы *k* = *m* – *r* – 1, где *m* – количество интервалов группировки, r – количество оцениваемых параметров закона, которые определены по данным выборки.

Критическая область – правосторонняя.



* Проверка статистических гипотез

Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$, то на уровне значимости α **нет оснований отвергать гипотезу H_0 о том, что генеральная совокупность распределена по закону Z**, т.е. различие между эмпирическими и теоретическими частотами *незначимо* и обусловлено случайными факторами (случайностью самой выборки, способом группировки данных и т.д.).

Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$, то нулевую гипотезу отвергают, т.е. эмпирические и теоретические частоты отличаются *значимо*, и это различие вряд ли случайно.

Алгоритм:

1. Определить объем выборки *n*.

2. Выбрать число интервалов группировки *m* = 10÷15 или вычислить по формуле Стерджеса:

$$m = 1 + 3{,}32218 \lg n$$

* Проверка статистических гипотез

3. Построить эмпирический ряд распределения и определить эмпирические n_i^* .

4. Определить основные характеристики положения (м.о., мода, медиана), рассеяния (дисперсия, С.К.О., вариации), формы (коэффициенты асимметрии, эксцесса).

5. Задать уровень значимости α.

6. Выдвинуть основную H_0 и альтернативную H_1 гипотезы.

7. Вычислить вероятности p_i для каждого интервала наблюдения в соответствии с выдвинутой гипотезой о виде закона распределения Z.

8. Вычислить статистику критерия хи-квадрат

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i^* - np_i\right)^2}{np_i}$$

* Проверка статистических гипотез

9. Определить число степеней свободы $k = m - r - 1$, где r определяется по числу оцененных характеристик в п. 4.

10. Определить критическое значение $\chi^2_{кр}$, используя справочные таблицы или на основе вычисления.

11. Принять решение: если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$, то на уровне значимости α нет оснований отвергать гипотезу H_0 о том, что генеральная совокупность распределена по закону Z.

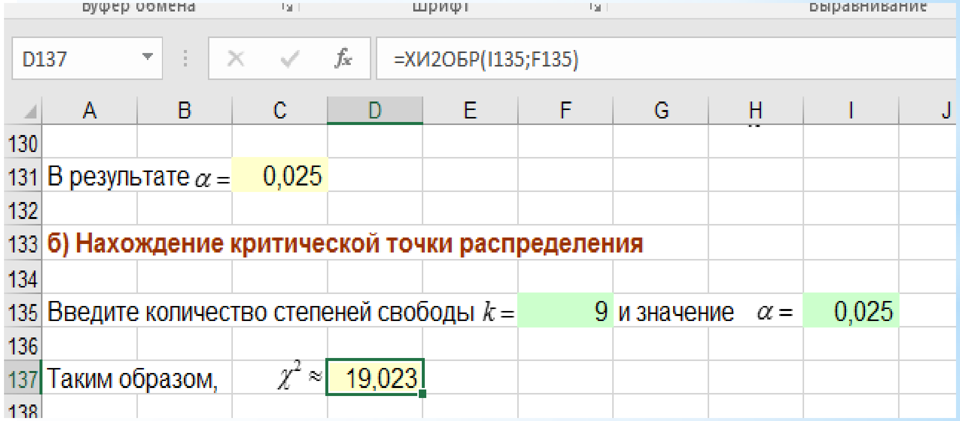
Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$, то нулевую гипотезу отвергают и принимают альтернативную H_1.

* Проверка статистических гипотез

Определение критических значений критерия хи-квадрат

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0



* Проверка статистических гипотез

Пример. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты:

Эмпирические частоты	6	13	36	74	106	85	30	14
Теоретические частоты	3	14	42	82	99	76	37	13

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i^* - np_i\right)^2}{np_i} = \frac{(6-3)^2}{3} + \frac{(13-14)^2}{14} + .. + \frac{(14-13)^2}{13} = 7{,}19$$

Число интервалов m = 8, число степеней свободы $k = m - r - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$, r = 2, т.к. для нормального распределения используют две оценки – мат.ожидание и С.К.О.

* Проверка статистических гипотез

По таблице критических точек распределения хи-квадрат с 5 степенями свободы и при уровне значимости α = 0,05 определяем, что $\chi^2_{кр} = 11,1$. Так как $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу, расхождение эмпирических и теоретических частот незначимое.

* Проверка статистических гипотез

Статистика критерия Колмогорова-Смирнова

$$D = \max_{-\infty < x < +\infty} |F^*(x) - F(x)|,$$

где $F^*(x)$ и $F(x)$ – значения эмпирической и теоретической функций распределения.

Область принятия гипотезы:

$$\left(0, K_{1-\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$K_{1-\alpha} \approx \sqrt{-\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha}{2}}.$$

Если $D \in \left(0, K_{1-\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$ то нет оснований отвергать нулевую гипотезу, в противном случае следует принять альтернативную гипотезу.

* Проверка статистических гипотез

Пример. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты:

Эмпирические частоты	6	13	36	74	106	85	30	14
Накопленные частоты	6	19	55	129	235	320	350	364
$F^*(x)$	0,01648	0,05219	0,15109	0,35439	0,64560	0,87912	0,96153	1
Теоретические частоты	3	14	42	82	99	76	37	13
Накопленные частоты	3	17	59	141	240	316	353	366
$F(x)$	0,00819	0,04644	0,16120	0,38524	0,65573	0,86338	0,96448	1
$\lvert F^*(x) - F(x) \rvert$	0,00828	0,00575	0,01010	0,0308	0,01013	0,01573	0,00294	0

* Проверка статистических гипотез

D = 0,0308.

$$K_{1-\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{-\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{-\frac{1}{2}\ln\frac{0{,}05}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{364}}=0{,}0712$$

$$D=0{,}0308\in\left(0,K_{1-\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\left(0;\ 0{,}0712\right)$$

поэтому нет оснований отвергать нулевую гипотезу.

Ограничения:

1) Для критерия хи-квадрат: в каждом интервале должно быть не менее 10 наблюдений;

2) Для критерия Колмогорова-Смирнова: объём выборки должен быть более 50.