* *Специальные законы распределения математической статистики*

Виды распределений:

- дискретные;
- непрерывные.

* Дискретные распределения

Биномиальное распределение (распределение Бернулли)

Свойства

Распределение вероятностей

$$f(x; n, p) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \quad 0 \leqslant p \leqslant 1$$

— вероятность появления события ровно x раз в серии из n испытаний, при условии, что в единичном испытании вероятность его появления равна p.

Функция распределения

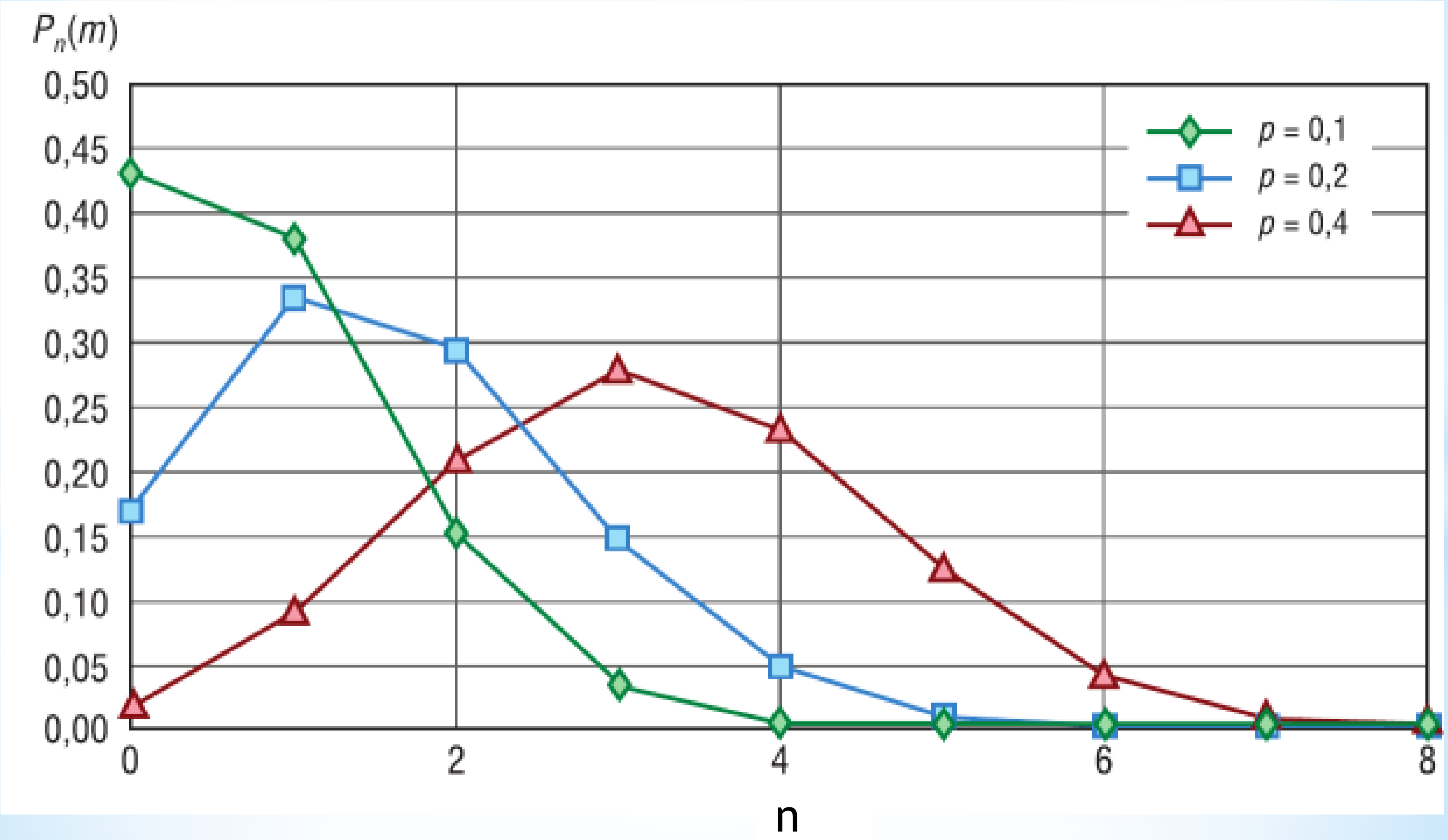
$$F(x; n, p) = \sum_{i=0}^{x} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$$

— вероятность появления событий $\leqslant x$ раз в серии из n испытаний.

Среднее	$\mathbf{M}(x) = np$
Дисперсия	$\mathbf{D}(x) = np(1-p)$
Коэффициент вариации	$v = \left(\dfrac{1-p}{np}\right)^{\frac{1}{2}}$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3 = (1-2p)[np(1-p)]^{-\frac{1}{2}}$
Коэффициент эксцесса	$\alpha_4 = 3 - \dfrac{6}{n} + \dfrac{1}{np(1-p)}$

* Дискретные распределения

Биномиальное распределение (распределение Бернулли)



* *Дискретные распределения*

Биномиальное распределение (распределение Бернулли)

Пример. Вероятность появления дефектного изделия в производстве равна 0,1. Вычислить вероятность появления в партии из 60 изделий не более 10 дефектных.

Имеем $p = 0{,}1$; $n = 60$; $x = 10$ и $np = 6$. Необходимо вычислить величину $F(10; 0,1; 60)$. Непосредственный расчет (точное решение) дает

$$F(10; 0{,}1; 60) = \sum_{i=0}^{10} C_{60}^{i} \cdot 0{,}1^{i} \cdot 0{,}9^{60-i} = C_{60}^{0} \cdot 0{,}9^{60} + C_{60}^{1} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^{59} + C_{60}^{2} \cdot 0{,}1^{2} \cdot 0{,}9^{58} =$$

$$= C_{60}^{3} \cdot 0{,}1^{3} \cdot 0{,}9^{57} + C_{60}^{4} \cdot 0{,}1^{4} \cdot 0{,}9^{56} + C_{60}^{5} \cdot 0{,}1^{5} \cdot 0{,}9^{55} + C_{60}^{6} \cdot 0{,}1^{6} \cdot 0{,}9^{54} + C_{60}^{7} \cdot 0{,}1^{7} \cdot 0{,}9^{53} +$$

$$+ C_{60}^{8} \cdot 0{,}1^{8} \cdot 0{,}9^{52} + C_{60}^{9} \cdot 0{,}1^{9} \cdot 0{,}9^{51} + C_{60}^{10} \cdot 0{,}1^{10} \cdot 0{,}9^{50} = 0{,}96570865.$$

* Дискретные распределения

Распределение Пуассона

Распределение вероятностей

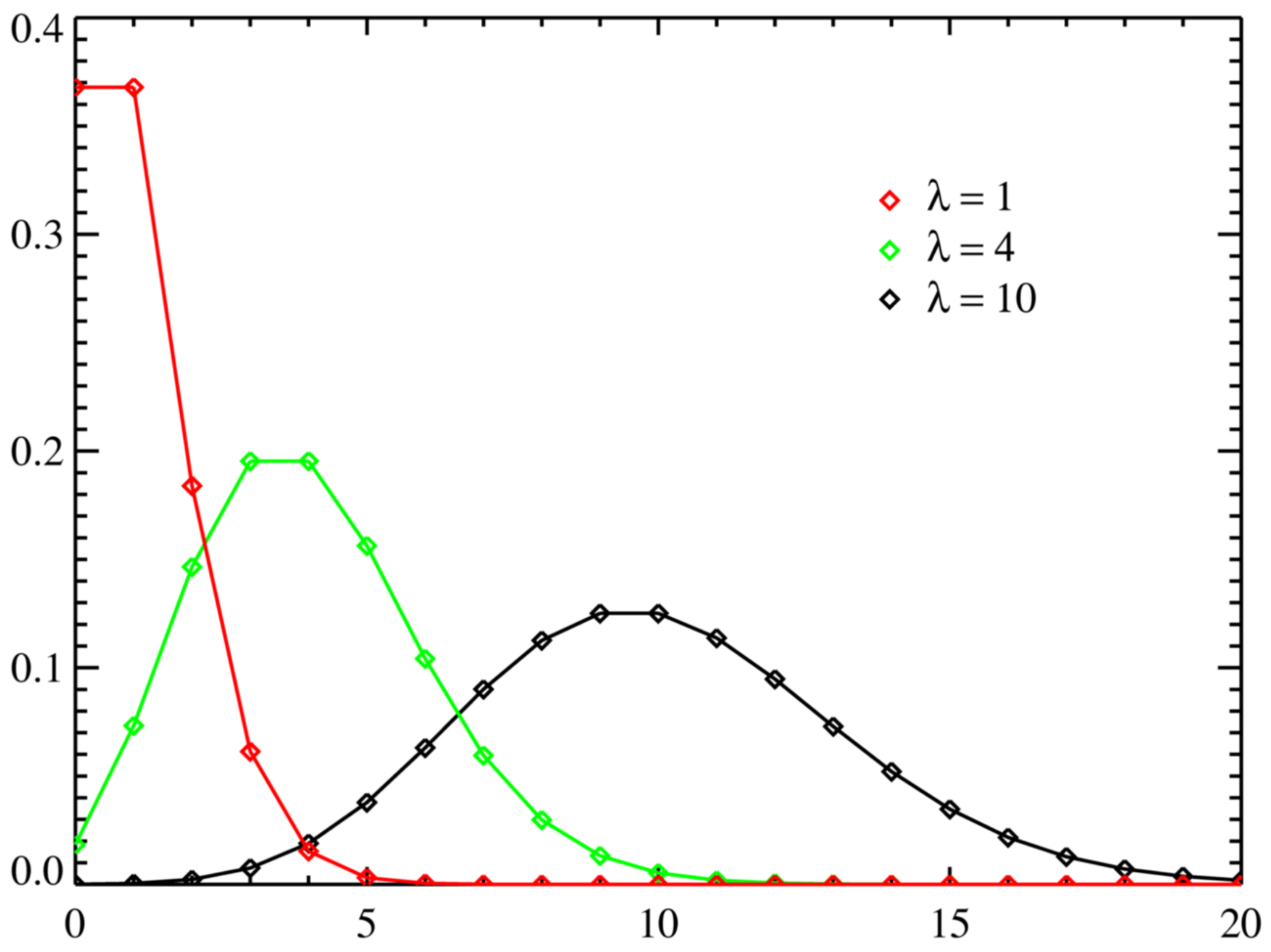
$$f(x;\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots; \quad \lambda > 0;$$

$f(x;\lambda) = \max$ при $x = [\lambda]$ (наибольшее целое число $\leqslant \lambda$)

Функция распределения	$F(x;\lambda) = \sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$
Среднее	$\mathbf{M}(x) = \lambda$
Дисперсия	$\mathbf{D}(x) = \lambda$
Коэффициент вариации	$v = \lambda^{-\frac{1}{2}}$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3 = \lambda^{-\frac{1}{2}}$
Коэффициент эксцесса	$\alpha_4 = 3 + \frac{1}{\lambda}$

* Дискретные распределения

Распределение Пуассона



* Дискретные распределения

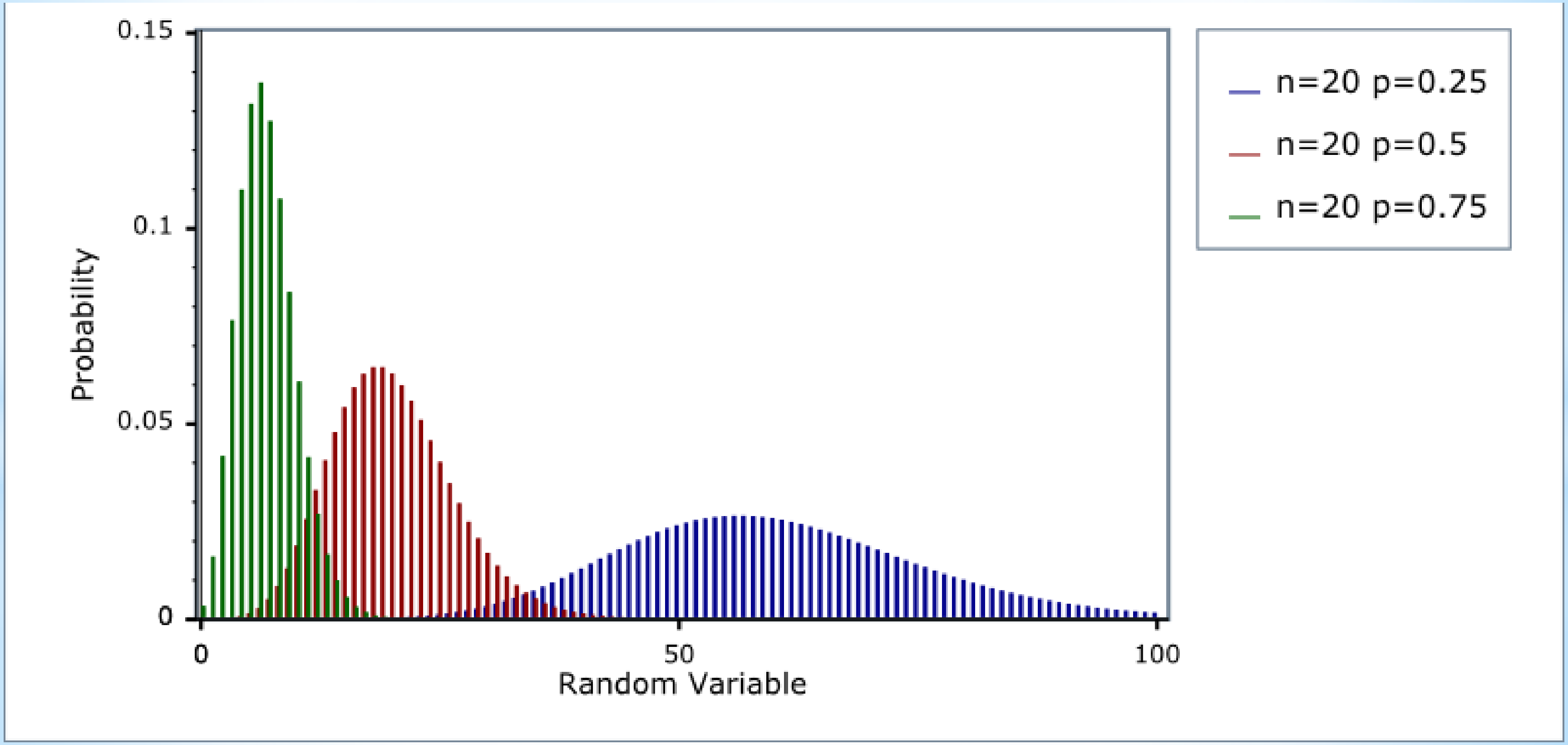
Отрицательное биномиальное распределение

$$f(x; m, p) = C^m_{x+m-1} p^m (1-p)^x, \quad m = 0, 1, 2, \ldots; \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Функция распределения	$F(x; m, p) = \sum_{i=1}^{m} C^m_{m+i-1} p^m (1-p)^i$
Среднее	$\mathbf{M}(x) = \frac{m(1-p)}{p}$
Дисперсия	$\mathbf{D}(x) = \frac{m(1-p)}{p^2}$
Коэффициент вариации	$v = \frac{1}{\sqrt{m(1-p)}}$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3 = (2-p)[m(1-p)]^{-\frac{1}{2}}$
Коэффициент эксцесса	$\alpha_4 = 3 + \frac{6}{m} + \frac{p^2}{m(1-p)}$

* Дискретные распределения

Отрицательное биномиальное распределение



* *Дискретные распределения*

Отрицательное биномиальное распределение

Пример. Вероятность получения дефектного изделия равна 0,1. Вычислить вероятность того, что будут произведены 50 годных изделий до появления 10-го дефектного изделия (m = 10; p = 0,1; x =50).

$$f\left(x,m,p\right)=C_{50+10-1}^{10}\cdot 0{,}1^{10}\cdot 0{,}9^{50}=C_{59}^{10}\cdot 0{,}1^{10}\cdot 0{,}9^{50}=0{,}03238$$

* Дискретные распределения

Распределение Паскаля

Распределение вероятностей

$$f(x; m, p) = C_{x-1}^{m-1} p^m (1-p)^{x-m}, \quad x = m, m+1, \ldots$$

— это вероятность того,что в x испытаниях наблюдаемое событие произойдет равно m раз, если вероятность появления его в каждом испытании равна p.

Функция распределения

$$F(x; m, p) = \sum_{i=m}^{x} C_{i-1}^{m} p^i (1-p)^{i-m}$$

— это вероятность появления m успехов не более, чем за x испытаний.

Среднее $\mathbf{M}(x) = \frac{m}{p}$

Дисперсия $\mathbf{D}(x) = \frac{m(1-p)}{p^2}$

Коэффициент вариации $v = \left(\frac{1-p}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$

* *Дискретные распределения*

Распределение Паскаля

Пример. Если вероятность отказа изделия в одном испытании равна 0,1, то какова вероятность того, что понадобятся 50 испытаний до появления 5 отказов (р = 0,1; *m* = 5; *x* = 50)?

$$f\left(x,5,0,1\right)=C_{49}^{4}\cdot 0,1^{5}\cdot 0,9^{45}=211876\cdot 10^{-5}\cdot 8,72796\cdot 10^{-3}=$$

$$=0,01849$$

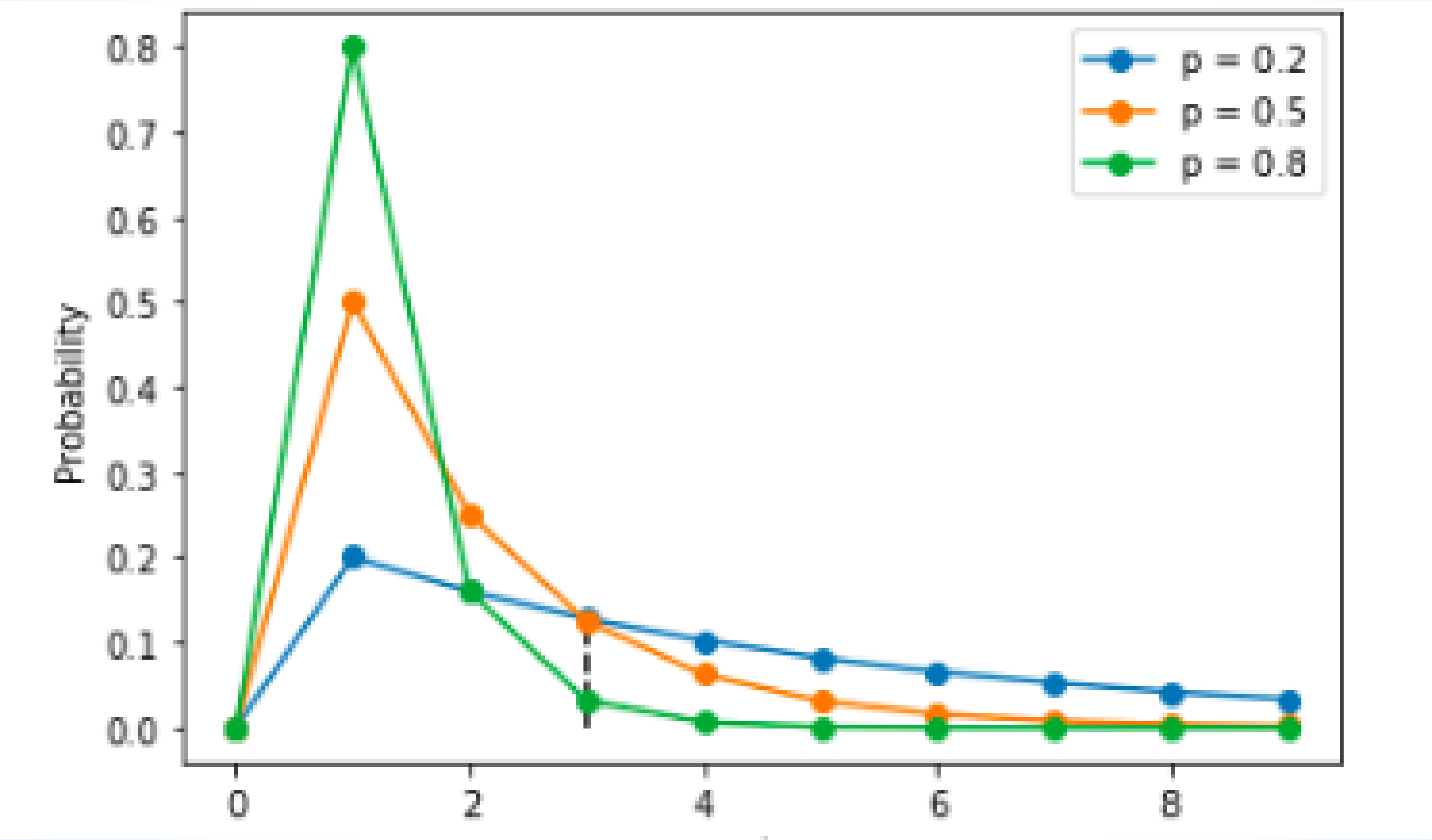
* Дискретные распределения

Геометрическое распределение (Фарри)

Распределение вероятностей	$f(x;p) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \ldots; \quad 0 \leqslant p \leqslant 1$
Функция распределения	$F(x;p) = \sum_{i=1}^{x} p(1-p)^{i-1} = 1 - (1-p)^x$
Среднее	$\mathbf{M}(x) = \dfrac{1}{p}$
Дисперсия	$\mathbf{D}(x) = \dfrac{1-p}{p^2}$
Коэффициент вариации	$v = \sqrt{1-p}$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3 = \dfrac{2-p}{\sqrt{1-p}}$
Коэффициент эксцесса	$\alpha_4 = 9 + \dfrac{p^2}{1-p}$

* Дискретные распределения

Геометрическое распределение (Фарри)



x

* *Дискретные распределения*

Геометрическое распределение (Фарри)

Пример. Вероятность безотказной работы изделия равна 0,95. Вычислить вероятность того, что для получения одного отказа необходимо испытать выборку изделий из 10 приборов (x = 10; p = 0,05).

$$f\left(x,0,5\right)=0,05\cdot 0,95^{9}=0,031$$

Вычислить вероятность того, что для получения первого отказа понадобится испытать не более 5 приборов.

$$F\left(x,0,5\right)=1-\left(1-0,05\right)^{9}=0,3697$$

* Дискретные распределения

Гипергеометрическое распределение

Распределение вероятностей $f(x; N, n, D) = \dfrac{c_D^x C_{N-D}^{n-x}}{c_N^n}$

Функция распределения $F(x; N, n, D) = \sum\limits_{i=0}^{x} \dfrac{c_D^i C_{N-D}^{n-i}}{c_N^n}$

Среднее $\mathbf{M}(x) = \dfrac{nD}{N}$

Дисперсия $\mathbf{D}(x) = \dfrac{nD}{N}\left(1 - \dfrac{D}{N}\right)\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$

Коэффициент вариации $v = \left(\dfrac{N-D}{nD}\dfrac{N-n}{N-1}\right)^{\frac{1}{2}}$

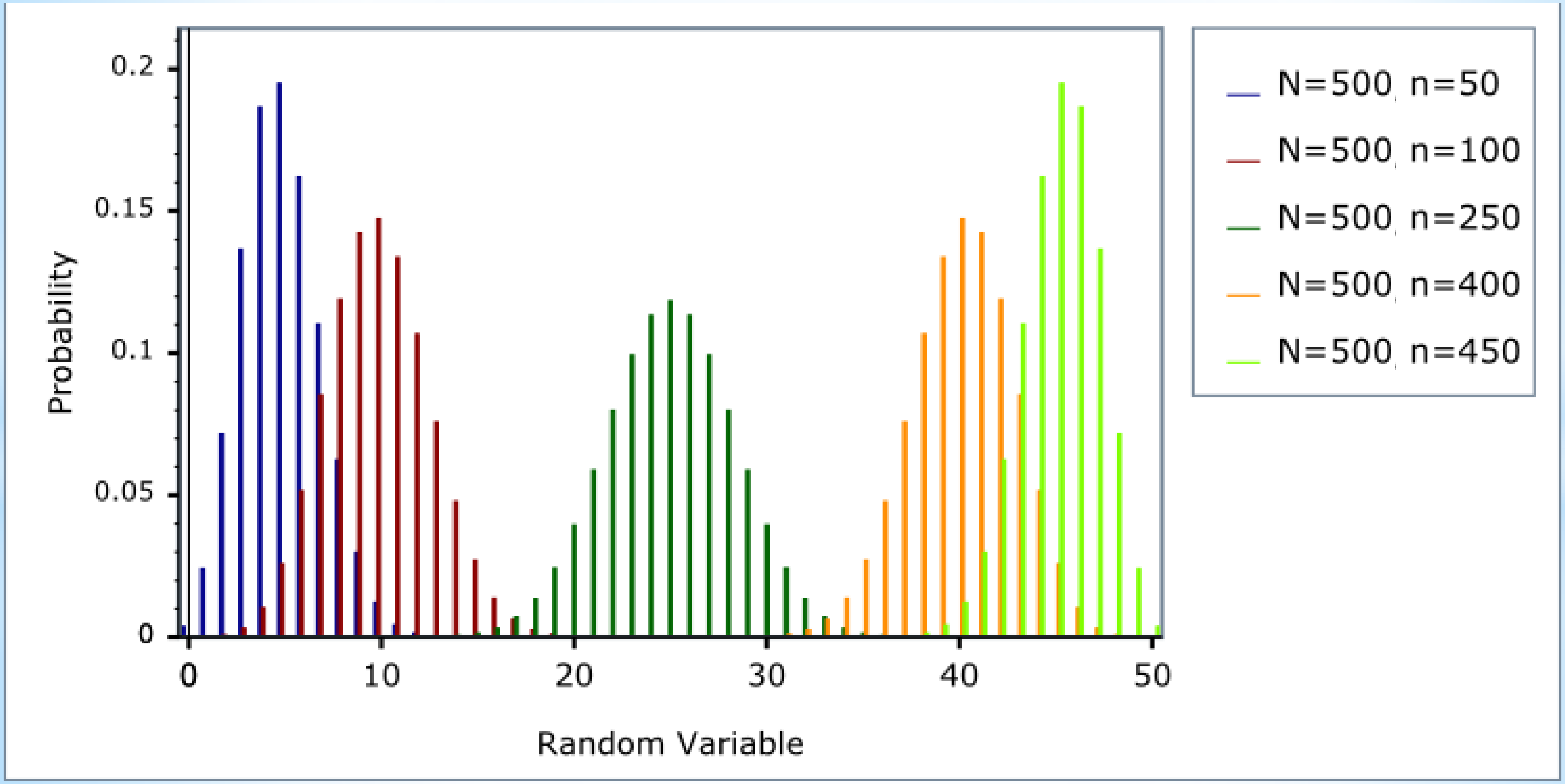
Коэффициент асимметрии $\alpha_3 = (N-2D)[nD(N-D)]^{-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{N-1}{N-n}\right)^{\frac{1}{2}}\dfrac{N-2n}{N-2}$

Коэффициент эксцесса

$$\alpha_4 = \frac{N^2(N-1)}{(N-2)(N-3)n(N-n)}\left\{\frac{N(N+1)-6N(N-n)}{D(N-D)} + \frac{3n(N-n)(N+6)}{N^2} - 6\right\}$$

* Дискретные распределения

Гипергеометрическое распределение



* Дискретные распределения

Равномерное распределение

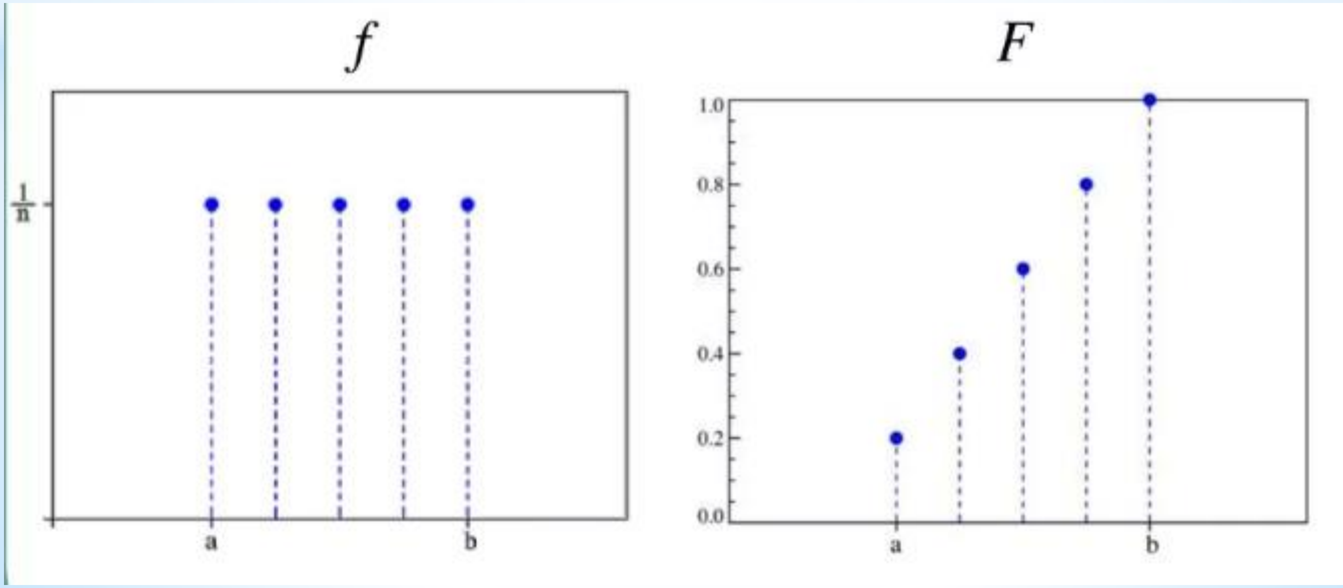
$$f(x) = \frac{1}{n}$$

$$F(x) = \frac{x - a + 1}{n}$$

$$\textit{Мат.ожидание} \quad \frac{a + (n-1)}{2}$$

$$\textit{Дисперсия} \quad \frac{n^2 - 1}{12}$$

$$\textit{Коэффициент асимметрии} \quad 0$$



* Непрерывные распределения

Нормальное распределение (Гаусса)

Теоретическое и практическое значение:

— схема его возникновения соответствует многим реальным физическим процессам, порождающим результаты обрабатываемых наблюдений;

— при возрастании объема выборки предельное распределение для большинства распределений является нормальным;

— обладает рядом благоприятных математико-статистических свойств (легко нормируется и аппроксимируется, обладает свойством аддитивности);

— в теории надежности описывает износовые отказы, интенсивность которых со временем возрастает.

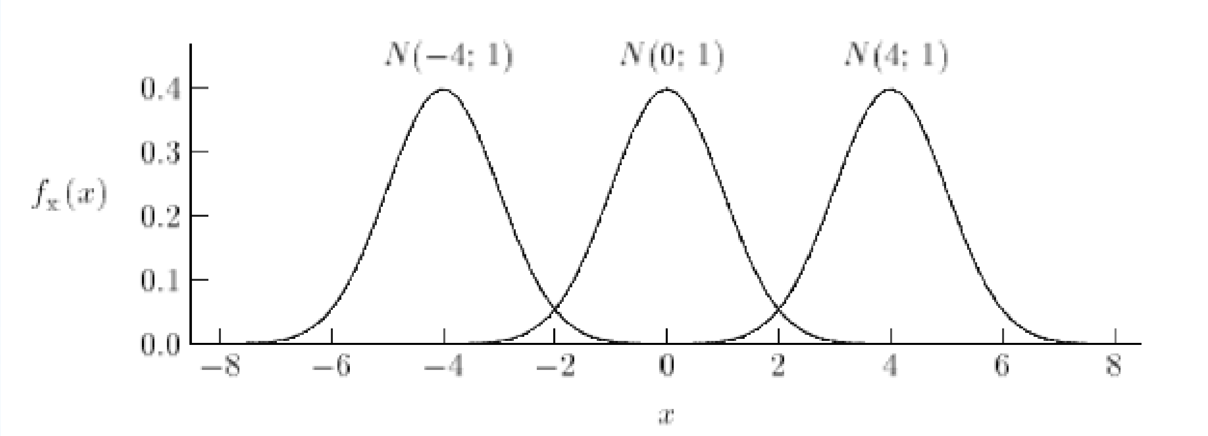
* Непрерывные распределения

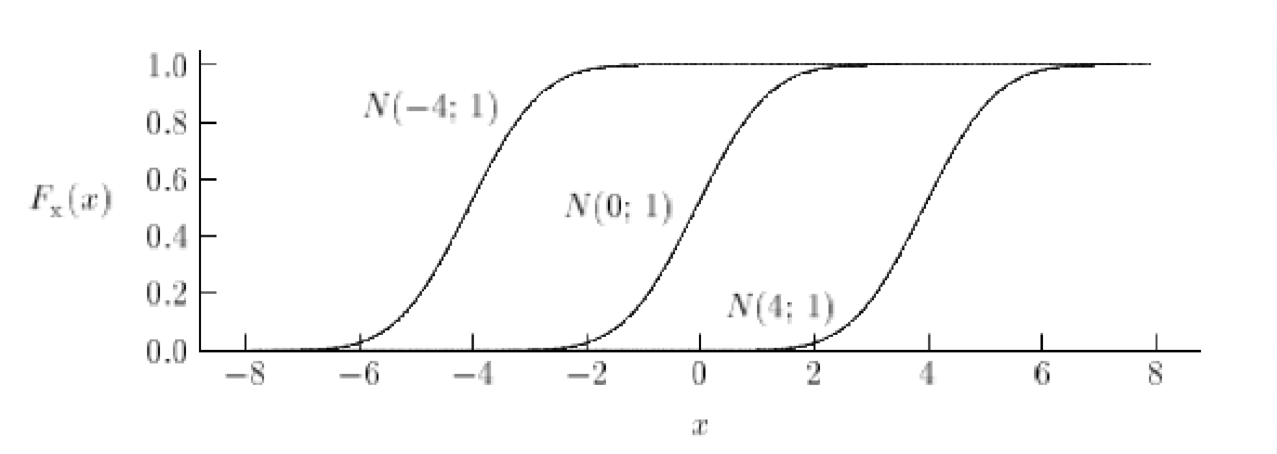
Нормальное распределение (Гаусса)

Обозначение	$N(\mu, \sigma)$
Параметры	$\mu,\ \sigma$
Плотность	$f(x;\mu,\sigma) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$
Функция распределения	$F(x;\mu,\sigma) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} dt$
	$(-\infty < x < +\infty)$
Среднее	$\mathbf{M}(x) = \mu$
Дисперсия	$\mathbf{D}(x) = \sigma^2$
Стандартное отклонение	σ
Коэффициент вариации	$v = \dfrac{\sigma}{\mu}$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3 = 0$
Коэффициент эксцесса	$\alpha_4 = 3$
Мода	$\mathbf{Mo} = \mu$
Медиана	$\mathbf{Me} = \mu$

* Непрерывные распределения

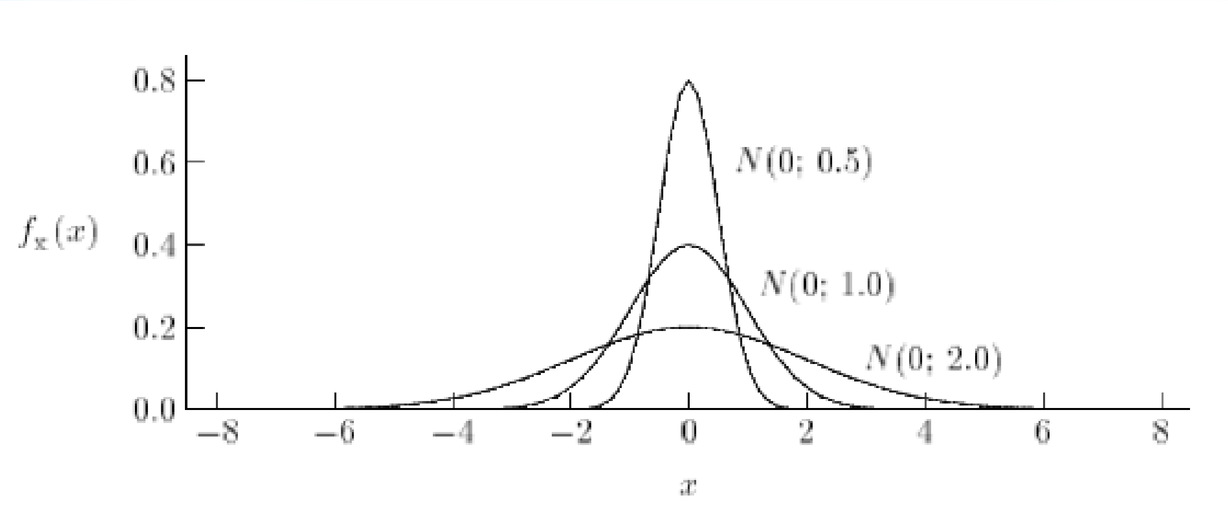
Нормальное распределение (Гаусса)

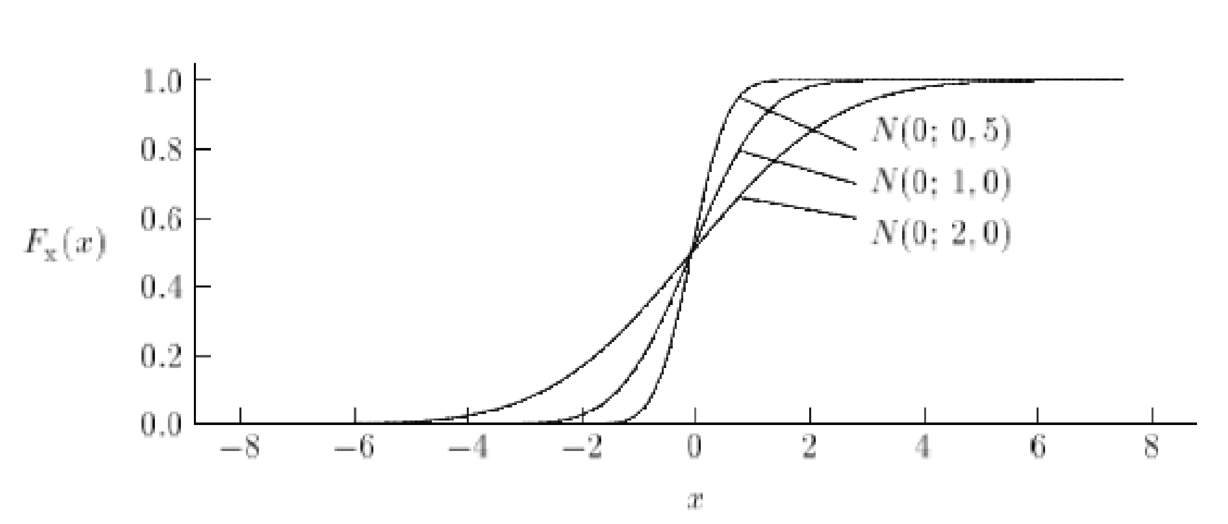




* Непрерывные распределения

Нормальное распределение (Гаусса)





* Непрерывные распределения

Нормальное распределение (Гаусса)

Нормированная случайная величина z = (x − μ)/σ, ее распределение называется стандартным нормальным с нулевым средним и единичной дисперсией: *N*(0, 1).

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

Связь с функцией Лапласа

$$\Phi(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{z} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = 2F(z) - 1$$

$$F(-z) = 1 - F(z), \quad P(a \le z \le b) = F(b) - F(a)$$

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(|X - \mu| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

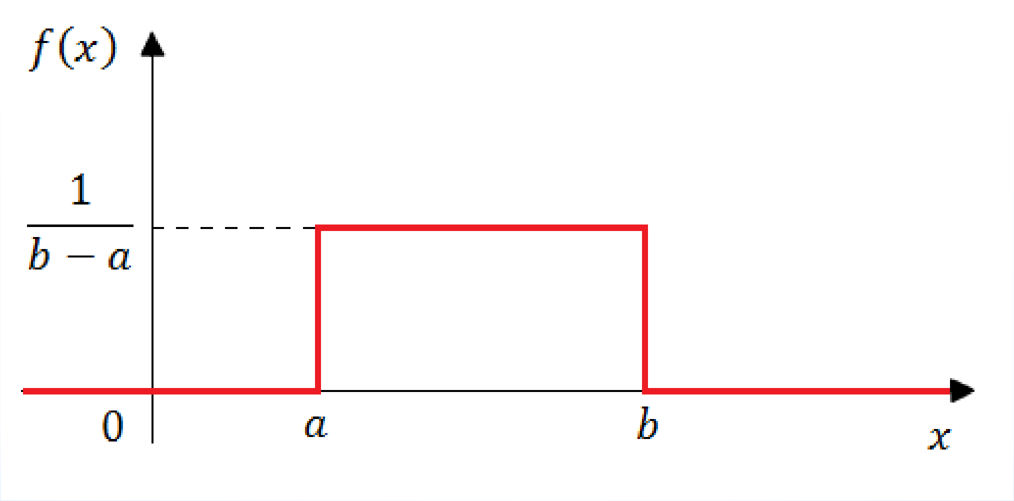
* Непрерывные распределения

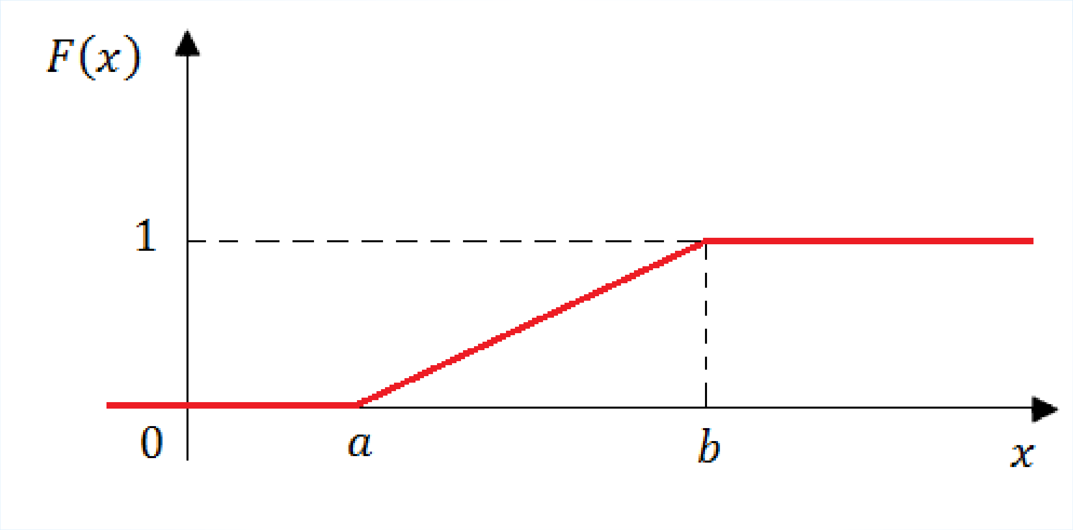
Равномерное распределение

Обозначение	$R(a,b)$
Параметры	a, b
Плотность	$f(x;a,b) = \begin{cases} (b-a)^{-1}, & a < x < b; \\ 0, & x < a; \quad x > b \end{cases}$
Функция распределения	$F(x;a,b) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x < b; \\ 1, & x \geqslant b \end{cases}$
Среднее	$\mathbf{M}(x) = \dfrac{b+a}{2}$
Дисперсия	$\mathbf{D}(x) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
Коэффициент вариации	$v = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \dfrac{b-a}{b+a}$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3 = 0$
Коэффициент эксцесса	$\alpha_4 = 1{,}8$
Медиана	$\mathbf{Me} = \dfrac{b+a}{2} = \mathbf{M}(x)$
Мода не определена	

* Непрерывные распределения
Равномерное распределение

•





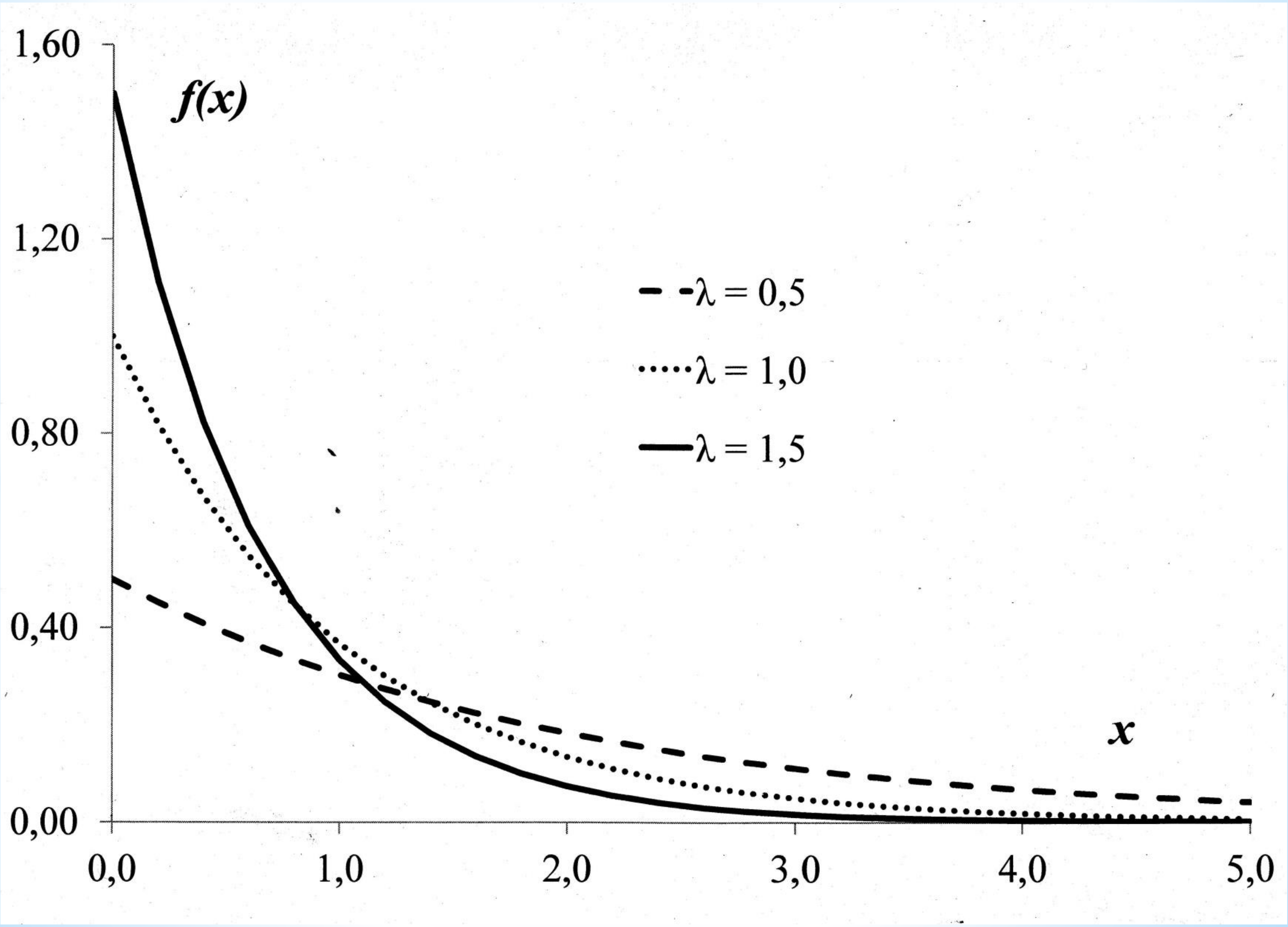
* Непрерывные распределения

Экспоненциальное распределение

Параметр	b
Плотность	$f(x;b) = \dfrac{1}{b}\exp\left(-\dfrac{x}{b}\right), \quad x \geqslant 0$
Функция распределения	$F(x,b) = 1 - \exp\left(-\dfrac{x}{b}\right), \quad x \geqslant 0$
Среднее	$\mathbf{M}(x) = b$
Дисперсия	$\mathbf{D}(x) = b^2$
Коэффициент вариации	$v = 1$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3 = 2$
Коэффициент эксцесса	$\alpha_4 = 9$
Мода	$\mathbf{Mo} = 0$
Медиана	$\mathbf{Me} = b\ln 2 = 0{,}6931b$

* Непрерывные распределения

Экспоненциальное распределение



* *Непрерывные распределения*

Логарифмически нормальное распределение

Если случайная величина *Y* распределена нормально, то с.в. $x = \ln Y$ подчинена логарифмически нормальному (или логнормальному) закону распределения.

Описывает износовые отказы, наработку на отказ невосстанавливаемых электронных приборов.

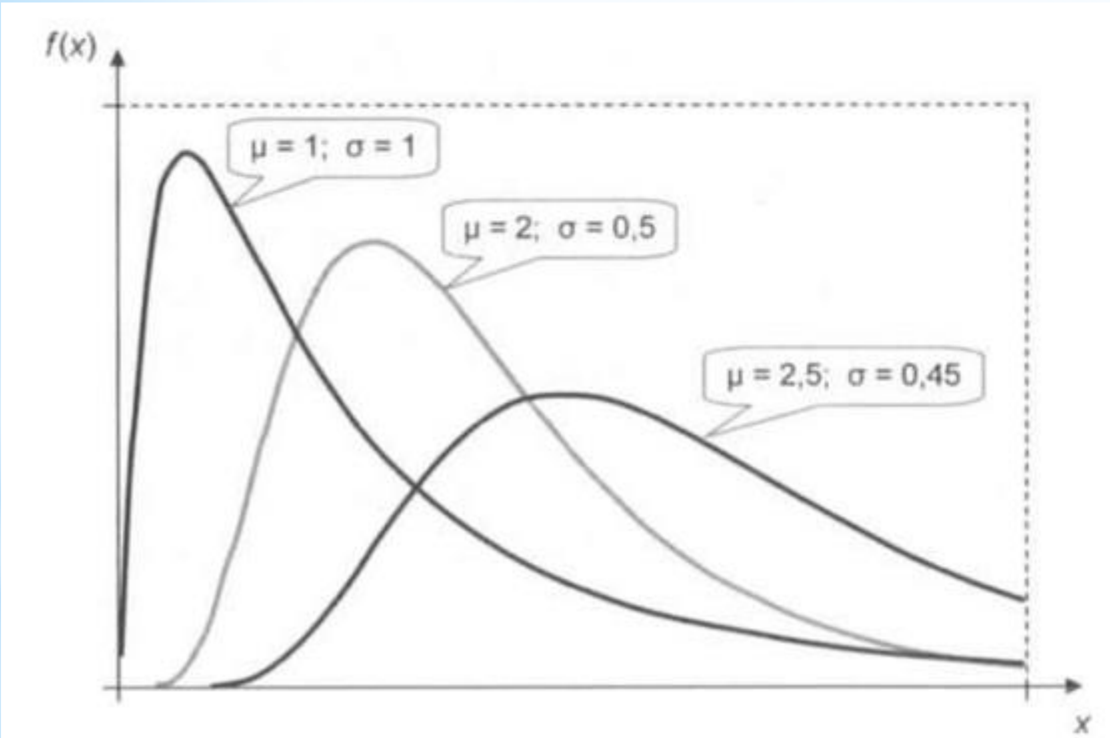
* Непрерывные распределения

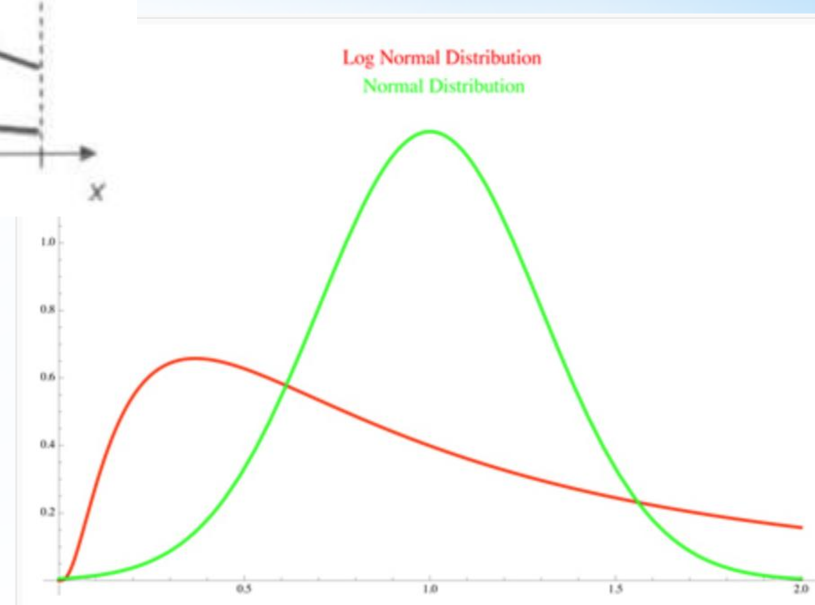
Логарифмически нормальное распределение

Обозначение	$LN(\mu, \sigma)$
Параметры	$\mu,\ \sigma$
Плотность	$f(x; \mu, \sigma) = \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\dfrac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x,\ \sigma > 0$
Функция распределения	$F(x; \mu, \sigma) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \exp\left\{-\dfrac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dt; \quad x > 0$
Среднее	$\mathbf{M}(x) = \exp\left\{\mu + \dfrac{1}{2}\sigma^2\right\}$
Дисперсия	$\mathbf{D}(x) = \exp\{2\mu + \sigma^2\}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$
Коэффициент вариации	$v = \left(e^{\sigma^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3 = \left(e^{\sigma^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}\left(e^{\sigma^2} + 2\right)$
Коэффициент эксцесса	$\alpha_4 = 3 + \left(e^{\sigma^2} - 1\right)\left(e^{3\sigma^2} + 3e^{2\sigma^2} + 6\right)$
Мода	$\mathbf{Mo} = \exp(\mu - \sigma^2)$
Медиана	$\mathbf{Me} = e^{\mu}$

* Непрерывные распределения

Логарифмически нормальное распределение





* Непрерывные распределения

Гамма-распределение

Гамма-функция или интеграл Эйлера $\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^{\infty} x^{\alpha-1}\exp(-x)dx$

Свойства:

1) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$ при $\alpha>0$

2) $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$

3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

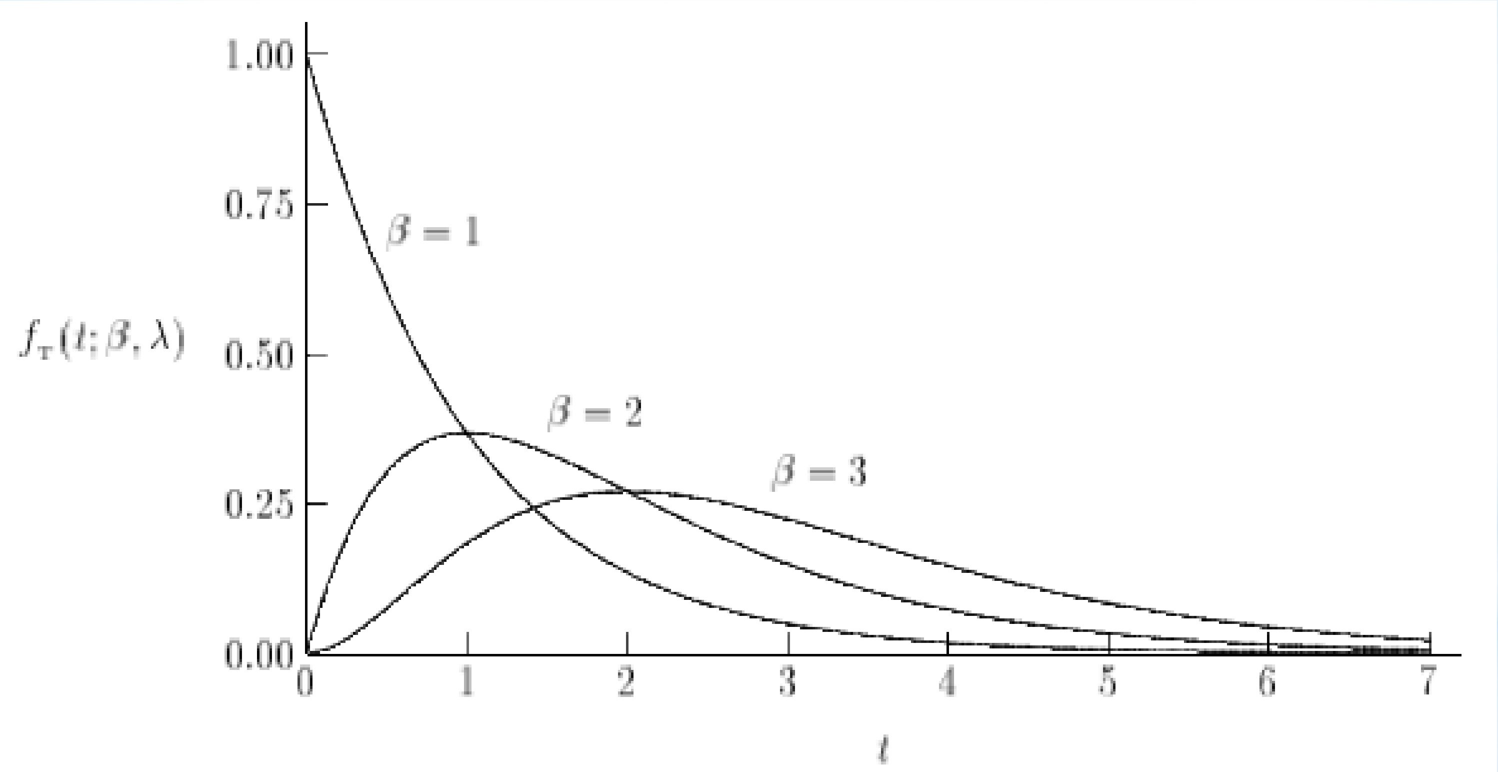
Функция плотности и интегральная функция распределения гамма-распределения

$$f(t)=\frac{\lambda^{\beta}}{\Gamma(\beta)}t^{\beta-1}e^{-\lambda t},\ t\geq 0,\qquad M[T]=\frac{\beta}{\lambda},$$

$$P(T\leq t)=F(t)=\frac{\lambda^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^{t} x^{\beta-1}e^{-\lambda x}dx\qquad D[T]=\frac{\beta}{\lambda^{2}}$$

* Непрерывные распределения

Гамма-распределение



При β = 1 распределение совпадает с показательным, если β - целое положительное, то распределение превращается в распределение Эрланга.

* Непрерывные распределения

Распределение Вейбулла

Обозначение	$W(\alpha, \beta)$
Параметры	$\alpha,\ \beta$
Плотность	$f(x; \alpha, \beta) = \dfrac{\beta}{\alpha^{\beta}}\, x^{\beta-1} \exp\left[-\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right], \quad x \geqslant 0, \quad \alpha, \beta > 0$
Функция распределения	$F(x; \alpha, \beta) = 1 - \exp\left[-\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right], \quad x \geqslant 0, \quad \alpha, \beta > 0$
Среднее	$\mathbf{M}(x) = \alpha\Gamma\left(1 + \dfrac{1}{\beta}\right)$
Дисперсия	$\mathbf{D}(x) = \alpha^2\left[\Gamma\left(1 + \dfrac{2}{\beta}\right) - \left\{\Gamma\left(1 + \dfrac{1}{\beta}\right)\right\}^2\right]$
Коэффициент вариации	$v = \left[\dfrac{\Gamma\left(1 + \dfrac{2}{\beta}\right)}{\left\{\Gamma\left(1 + \dfrac{1}{\beta}\right)\right\}^2} - 1\right]^{\frac{1}{2}}$

* Непрерывные распределения

Распределение Вейбулла

Обозначение	$W(\alpha, \beta)$
Параметры	$\alpha,\ \beta$
Плотность	$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta}{\alpha^\beta}\, x^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right], \quad x \geqslant 0, \quad \alpha, \beta > 0$
Функция распределения	$F(x; \alpha, \beta) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right], \quad x \geqslant 0, \quad \alpha, \beta > 0$
Среднее	$\mathbf{M}(x) = \alpha\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$
Дисперсия	$\mathbf{D}(x) = \alpha^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left\{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right\}^2\right]$
Коэффициент вариации	$v = \left[\frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)}{\left\{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right\}^2} - 1\right]^{\frac{1}{2}}$

* Непрерывные распределения

Распределение Вейбулла

Коэффициент асимметрии

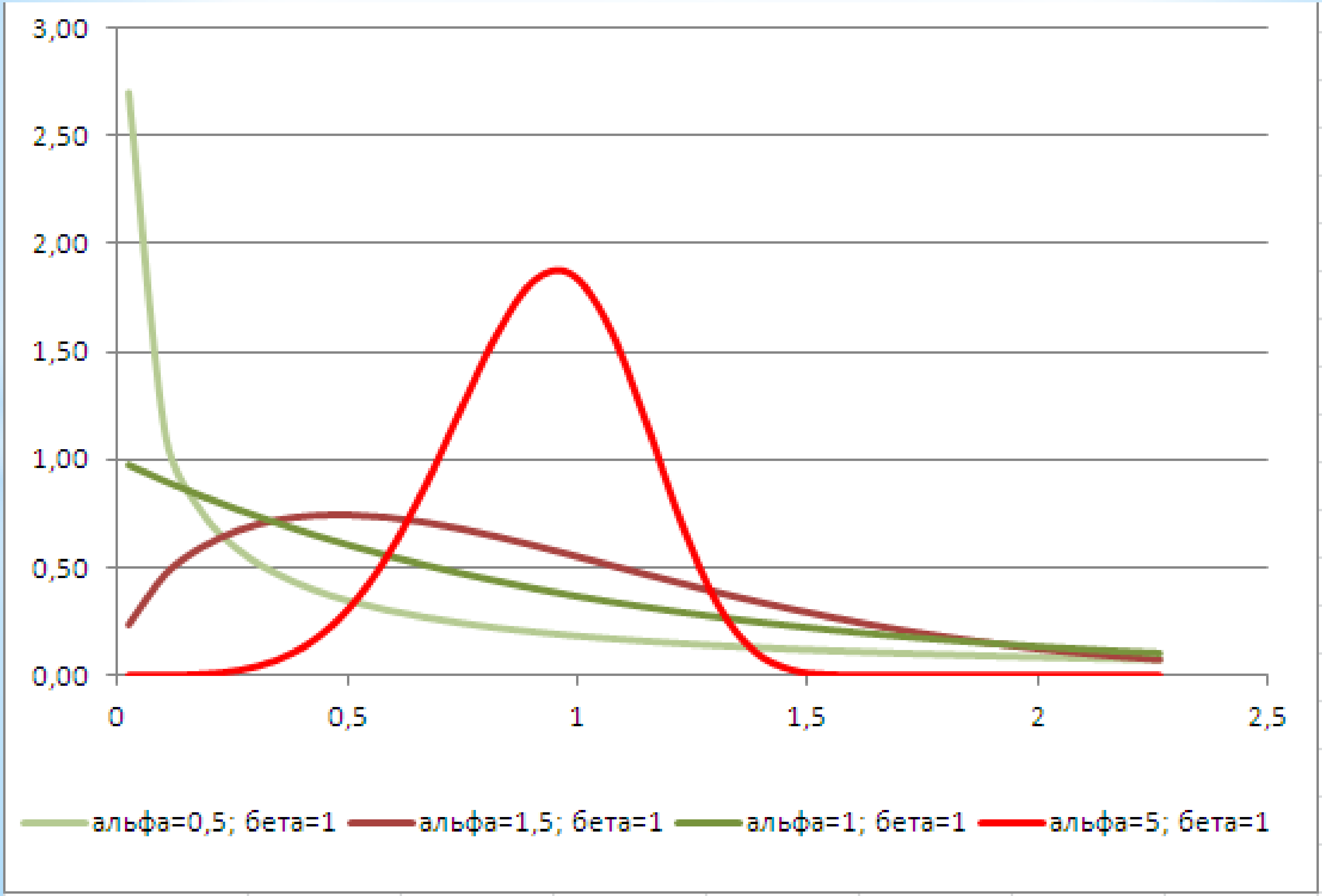
$$\alpha_3 = \frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{\beta}\right) - 3\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) + 2\left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right\}^3}{\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right\}^2\right]^2}$$

Коэффициент эксцесса

$$\alpha_4 = \frac{\Gamma\left(1+\frac{4}{\beta}\right) - 4\Gamma\left(1+\frac{3}{\beta}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) + 6\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)\left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right\}^2 - 3\left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right\}^4}{\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right\}^2\right]^2}$$

* *Непрерывные распределения*

Распределение Вейбулла



* *Непрерывные распределения*

Бета-распределение

Через бета-распределение могут быть выражены практически все применяемые распределения вероятностей, в том числе и дискретные. Доля дефектных изделий в партии подчиняется бета-распределению. Особенно велико его значение в непараметрической статистике

Обозначение	$\mathrm{B}(\alpha, \beta)$
Параметры	α, β
Плотность	

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{(\alpha+\beta+1)!}{\alpha!\,\beta!} x^{\alpha}(1-x)^{\beta}, \quad 0 < x < 1; \quad \alpha, \beta \geqslant -1$$

Функция распределения

$$I_x(\alpha, \beta) = \int\limits_0^x \frac{(\alpha+\beta+1)!}{\alpha!\,\beta!} x^{\alpha}(1-x)^{\beta} dx = \frac{(\alpha+\beta+1)!}{\alpha!\,\beta!} \mathrm{B}_x(\alpha+1, \beta+1),$$

где $\mathrm{B}_x(\alpha+1, \beta+1) = \int\limits_0^x x^{\alpha}(1-x)^{\beta} dx$ — неполная бета-функция

* Непрерывные распределения

Бета-распределение

Среднее $\mathbf{M}(x) = \dfrac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}$

Дисперсия $\mathbf{D}(x) = \dfrac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha+\beta+2)^2(\alpha+\beta+3)}$

Коэффициент вариации $v = \left\{\dfrac{\beta+1}{(\alpha+1)(\alpha+\beta+3)}\right\}^{\frac{1}{2}}$

Коэффициент асимметрии $\alpha_3 = \dfrac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\beta+4}\left[\dfrac{\alpha+\beta+3}{(\alpha+1)(\beta+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$

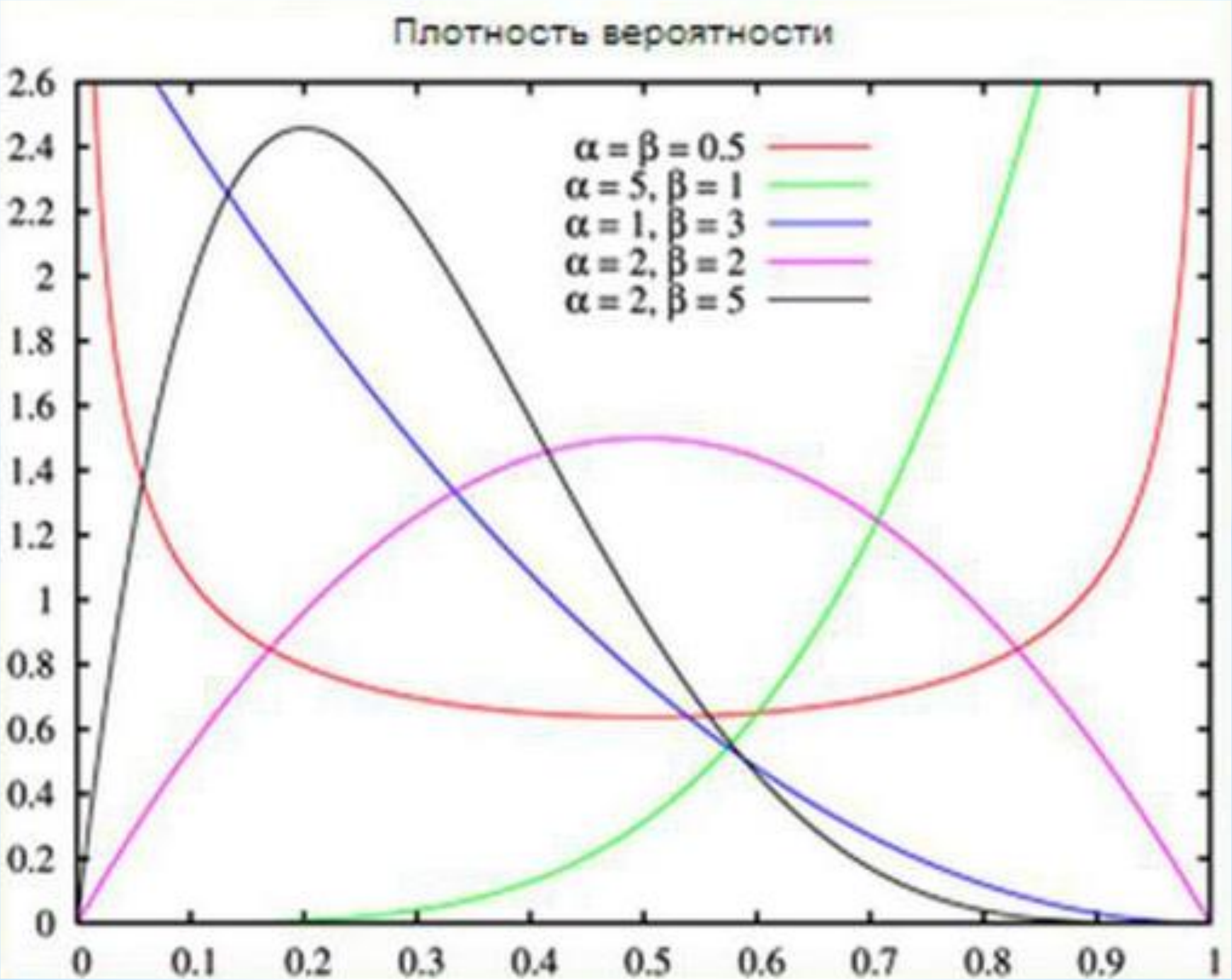
Коэффициент эксцесса

$$\alpha_4 = \frac{3(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}{(\alpha+\beta+4)(\alpha+1)(\beta+1)}\left[\frac{(\alpha+2)(-\alpha+2\beta+1)}{\alpha+\beta+5} + \frac{(\alpha+1)(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta+2}\right]$$

Мода $\mathbf{Mo} = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$

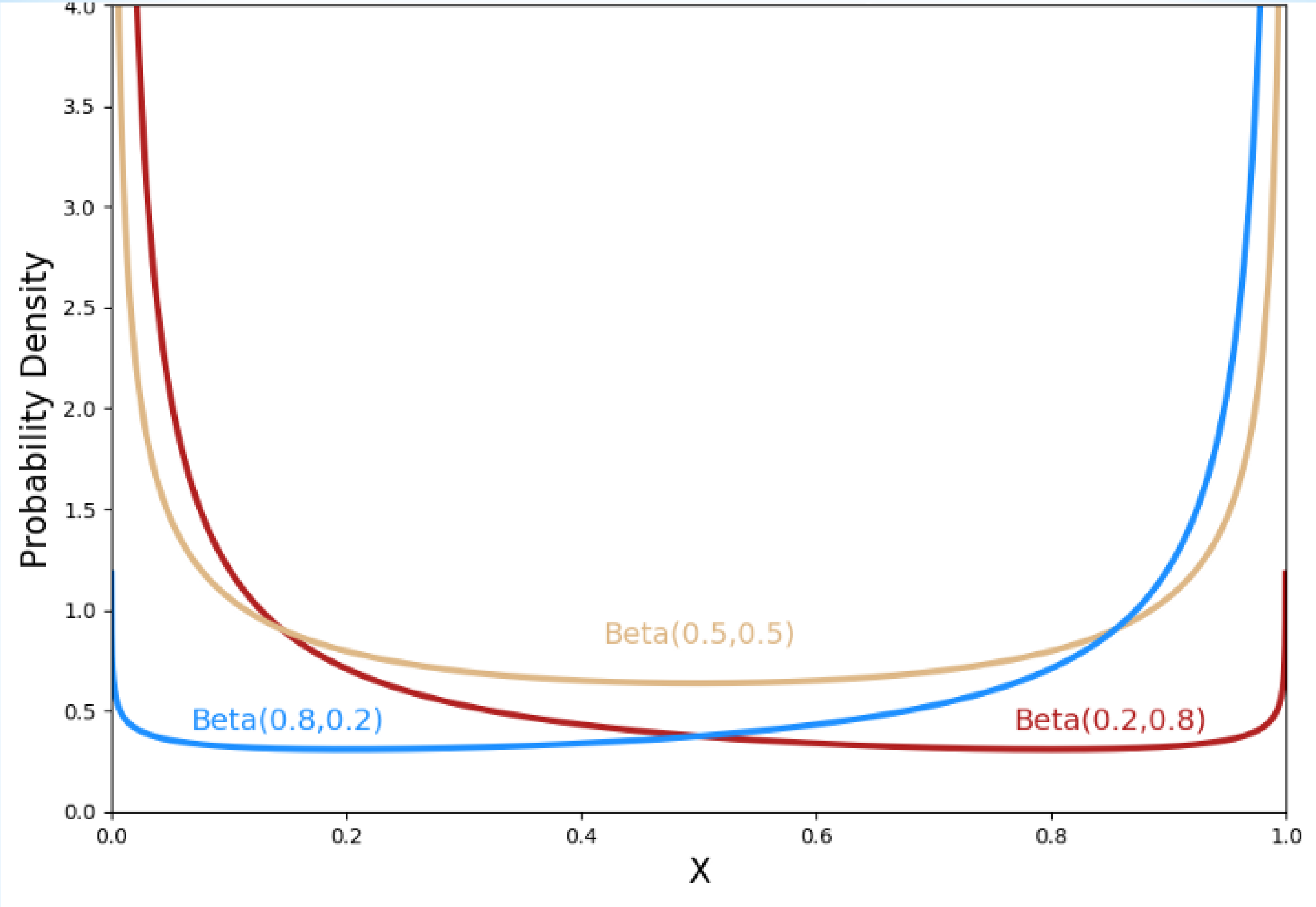
* Непрерывные распределения

Бета-распределение



* Непрерывные распределения

Бета-распределение



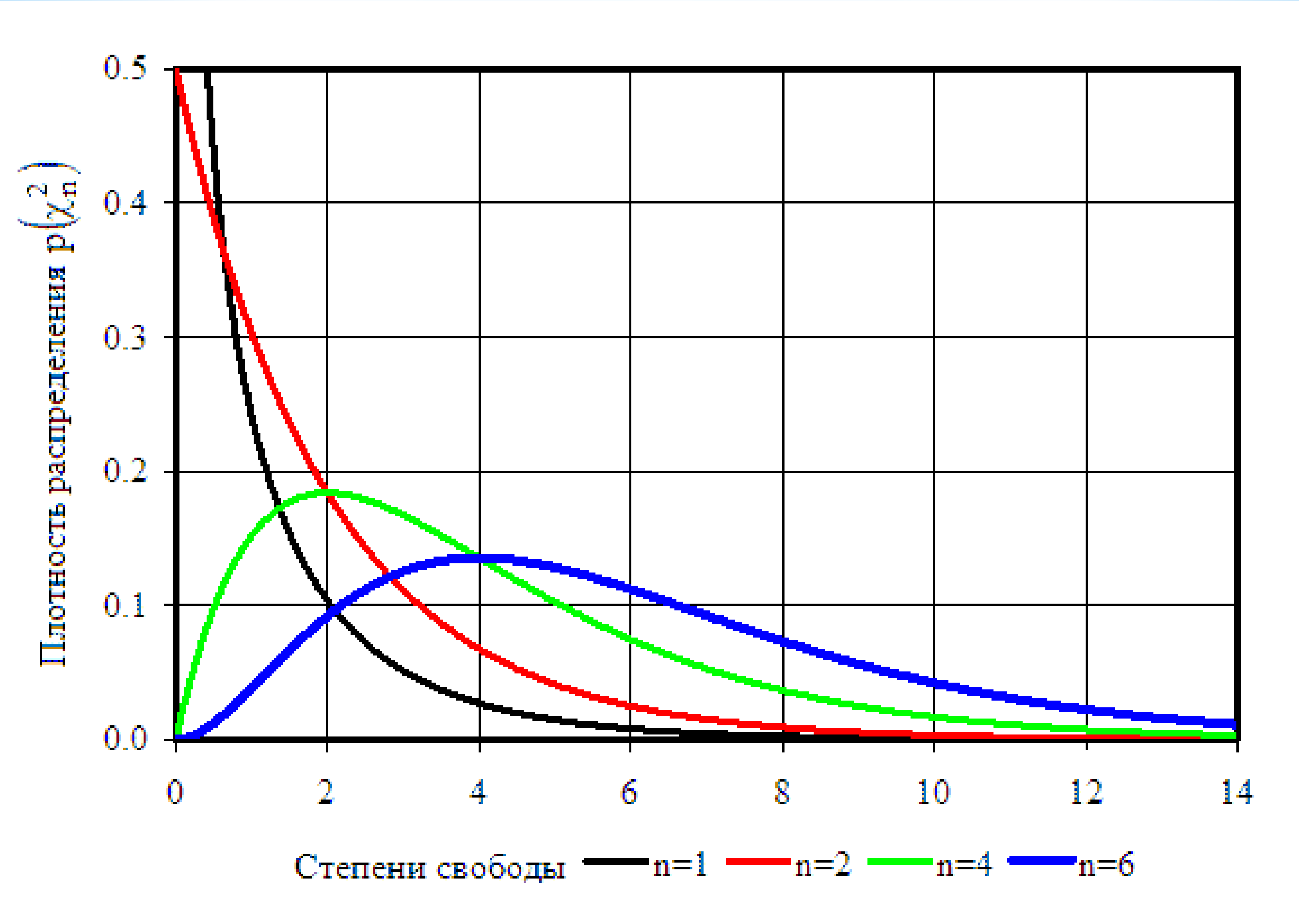
* Непрерывные распределения

Распределение χ^2 (хи-квадрат)

Обозначение	$\chi^2(f)$
Параметр	f
Плотность	$\varphi(\chi^2; f) = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} (\chi^2)^{\frac{f-2}{2}} \exp\left\{-\dfrac{\chi^2}{2}\right\}, \quad \chi^2 \geqslant 0$
Функция распределения	$F_f(x) = \mathbf{P}\{\chi^2(f), x\} = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \displaystyle\int_0^x y^{\frac{f}{2}-1} \exp\left\{-\dfrac{y}{2}\right\} dy,$ $x > 0$
Среднее	$\mathbf{M}\left[\chi^2(f)\right] = f$
Дисперсия	$\mathbf{D}[\chi^2(f)] = 2f$
Коэффициент вариации	$v = \left(\dfrac{2}{f}\right)^{\frac{1}{2}}$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3 = 2\left(\dfrac{2}{f}\right)^{\frac{1}{2}}$
Коэффициент эксцесса	$\alpha_4 = 3 + \dfrac{12}{f}$
Мода	$\mathbf{Mo} = f - 2, \quad f \geqslant 2$

Непрерывные распределения

Распределение χ^2 (хи-квадрат)



* Непрерывные распределения

F-распределение (Фишера)

Если две независимые случайные величины χ_1^2 и χ_2^2 распределены по закону хи-квадрат соответственно с f_1 и f_2 степенями свободы, то случайная величина

$$F = \frac{\chi_1^2 f_2}{\chi_2^2 f_1}$$

имеет распределение Фишера, *F*-распределение широко применяется при обработке данных (при сравнении дисперсий, анализе корреляций). С помощью *F*-распределения можно вычислять некоторые дискретные распределения, например, биномиальное.

* Непрерывные распределения

F-распределение (Фишера)

Обозначение	$F(f_1, f_2)$
Параметры	$f_1,\ f_2$
Плотность	

$$f(x; f_1, f_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{f_2}{2}\right)}\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{\frac{f_1}{2}}\frac{x^{\frac{f_1}{2}-1}}{\left(1+\frac{f_1}{f_2}x\right)^{\frac{f_1+f_2}{2}}}, \quad x \geqslant 0$$

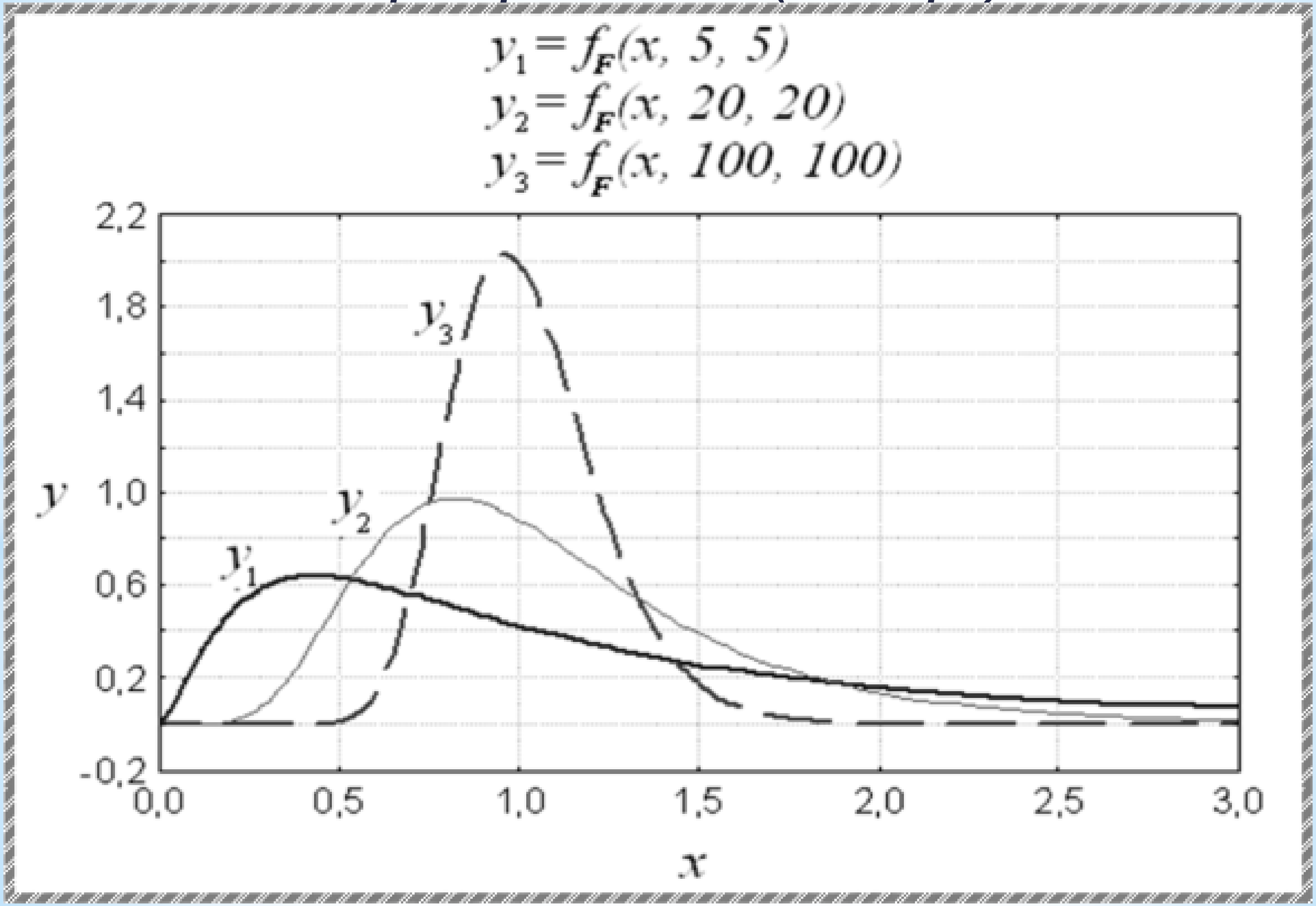
Функция распределения

$$S(x) = P\{F < x\} = \frac{\Gamma\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{f_2}{2}\right)} f_1^{\frac{f_1}{2}} f_2^{\frac{f_2}{2}} \int\limits_0^x y^{\frac{f_1}{2}-1}(f_2+f_1)^{\frac{f_1+f_2}{2}}\,dy.$$

Среднее	$\mathbf{M}[F(f_1, f_2)] = \dfrac{f_2}{f_2-2}, \quad f_2 > 2$
Дисперсия	$\mathbf{D}[F(f_1, f_2)] = \dfrac{2f_2^2(f_1+f_2-2)}{f_1(f_2-2)^2(f_2-4)}, \quad f_2 > 4$
Коэффициент вариации	$v = \left[\dfrac{2(f_1+f_2-2)}{f_1(f_2-4)}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad f_2 > 4$
Коэффициент асимметрии	$\alpha_3 = \dfrac{2f_1+f_2-2}{f_2-6}\left[\dfrac{8(f_2-4)}{f_1+f_2-2}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad f_2 > 6$
Мода	$\mathbf{Mo} = \dfrac{f_2(f_1-2)}{f_1(f_2+2)}$

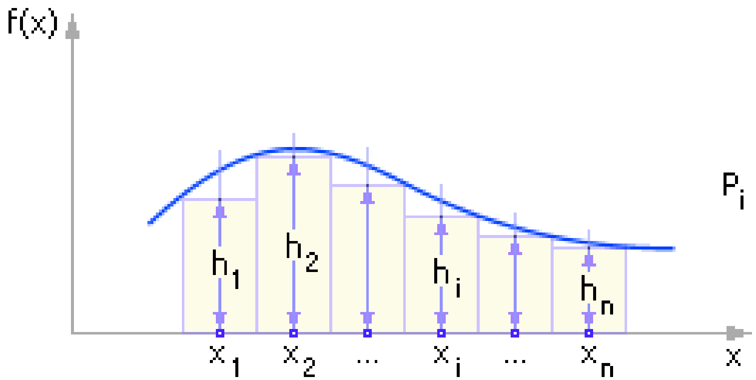
* Непрерывные распределения

F-распределение (Фишера)



* Моделирование с.в. с произвольным законом распределения

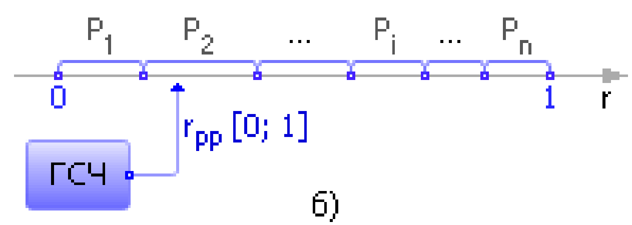
Метод ступенчатой аппроксимации



а)

$$P_i = \frac{h_i}{h_1 + h_2 + \ldots + h_i + \ldots + h_n}$$

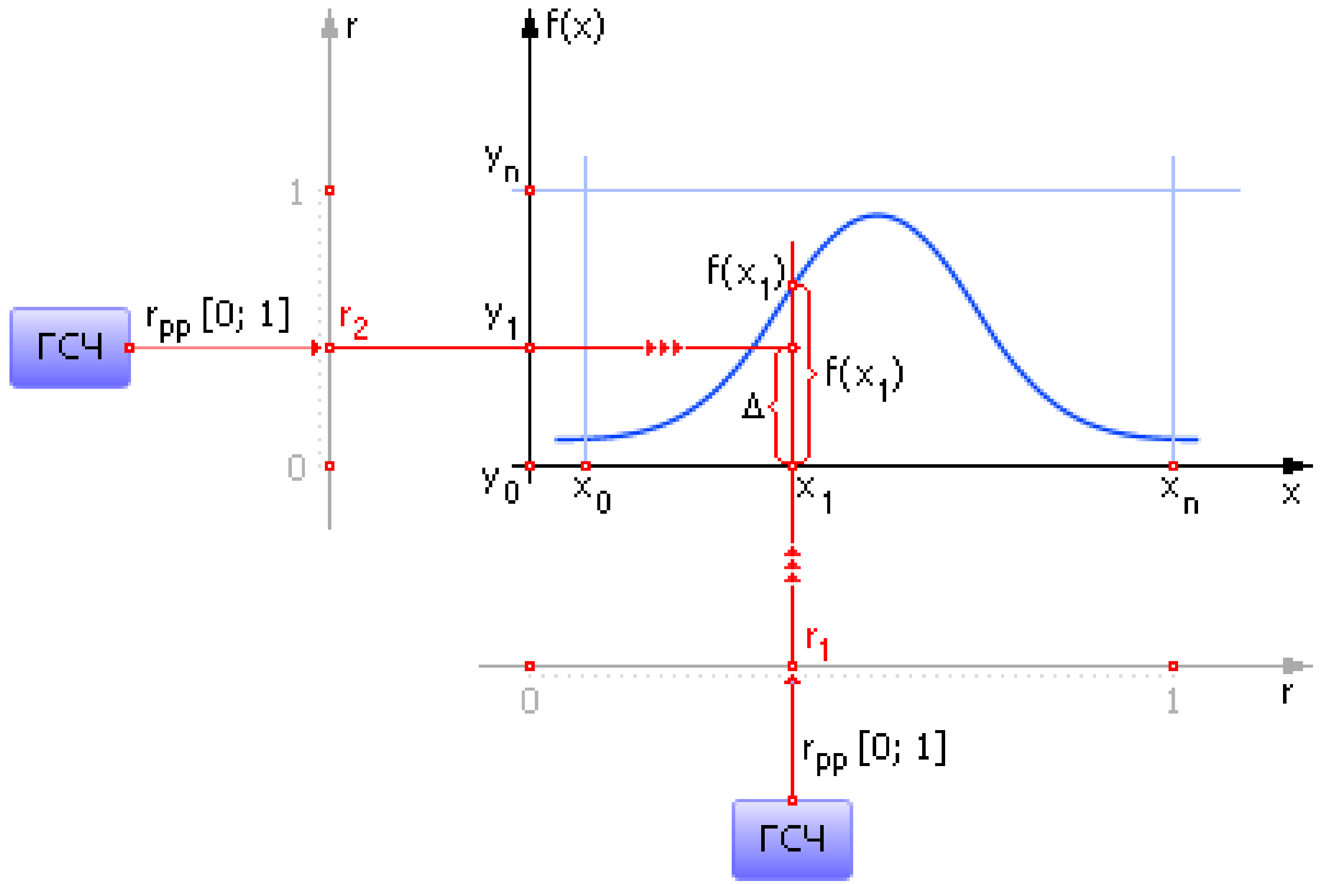
$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$



б)

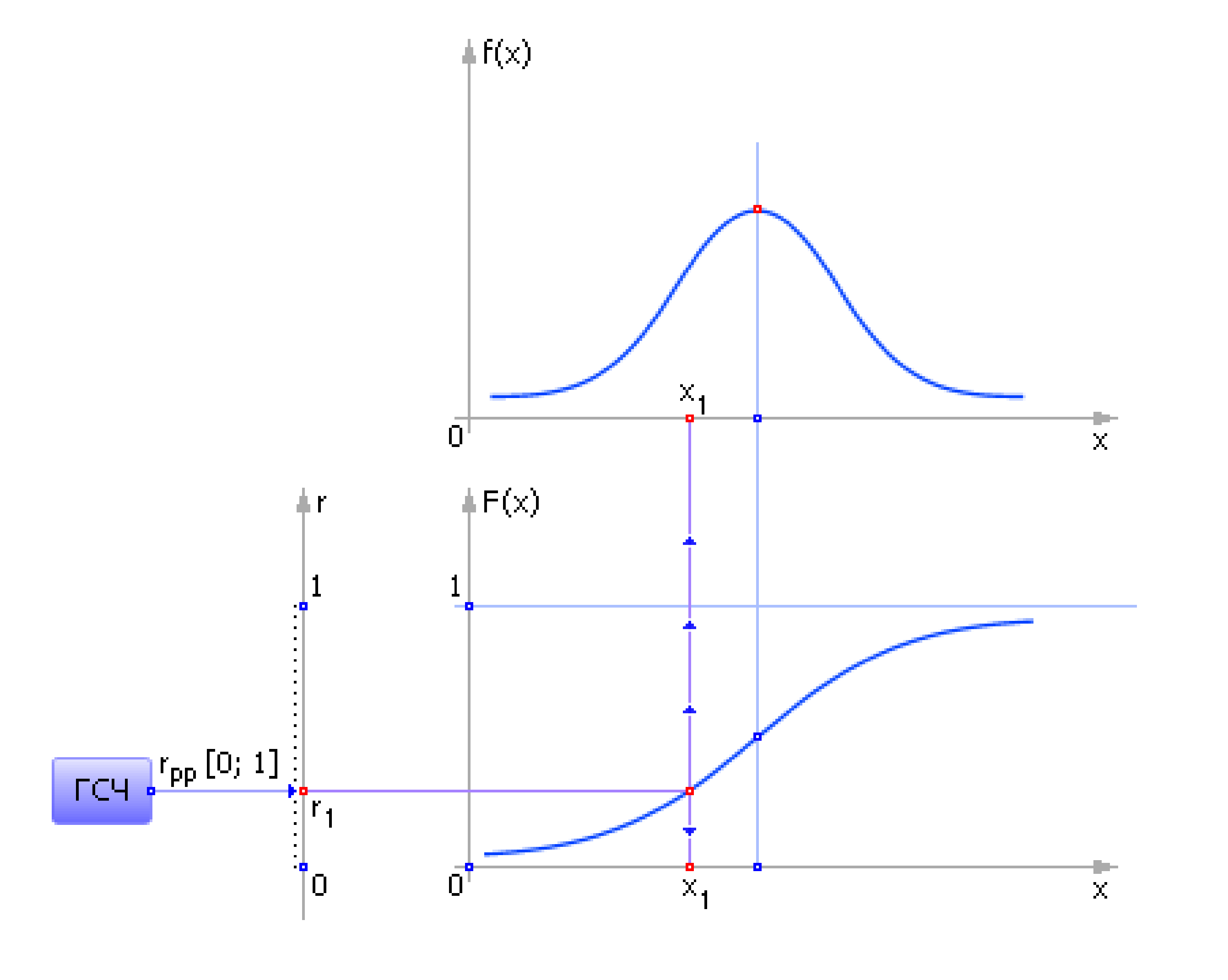
* Моделирование с.в. с произвольным законом распределения

Метод усечения



* Моделирование с.в. с произвольным законом распределения

Метод взятия обратной функции



* Моделирование с.в. с произвольным законом распределения

Метод взятия обратной функции

Пример экспоненциального распределения

$$f(y) = \begin{cases} 0, \text{если } y \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda y}, \text{если } y > 0; \end{cases}$$

$$F(y) = \begin{cases} 0, \text{если } y \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda y}, \text{если } y > 0. \end{cases}$$

$$x_i = \int_{-\infty}^{y_i} f(y)dy = \int_{-\infty}^{0} f(y)dy + \int_{0}^{y_i} f(y)dy = \int_{0}^{y_i} f(y)dy = 1 - e^{-\lambda y_i};$$

$$x_i \sim \mathrm{Rav}(0;\, 1);\; e^{-\lambda y_i} = 1 - x_i;\; -\lambda y_i = \ln(1 - x_i);\; y_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - x_i).$$