(19) 中华人民共和国国家知识产权局

(12) 发明专利申请

(10) 申请公布号 CN 105677923 A
(43) 申请公布日 2016.06.15

(21) 申请号 201610182640.8

(22) 申请日 2016.03.24

(71) 申请人 安徽大学

地址 230601 安徽省合肥市经济技术开发区九龙路111号

(72) 发明人 李学俊 光洋 王春 朱二周 吴蕾

(74) 专利代理机构 南京知识律师事务所 32207

代理人 高玲玲

(51) Int.Cl.

G06F 17/30(2006.01)

A63F 3/00(2006.01)

权利要求书2页 说明书7页 附图4页

(54) 发明名称

爱恩斯坦棋基于攻防兼备估值函数的博弈搜索方法

(57) 摘要

本发明公开了一种爱恩斯坦棋基于攻防兼备估值函数的博弈搜索方法，将攻防兼备估值函数用于期望极大极小搜索中模拟博弈搜索。本发明采用期望极大极小算法，它是极大极小算法的变种，在向下搜索拓展的过程中引入概率层，克服了由骰子所带来的博弈信息不完备的问题。本发明将设计好的攻防兼备的估值函数应用到期望搜索中，设计了攻防兼备的期望极大极小算法，提高系统的搜索效率和博弈水平。

CN 105677923 A

1.一种爱恩斯坦棋基于攻防兼备估值函数的博弈搜索方法,其特征在于:将攻防兼备估值函数用于期望极大极小搜索中模拟博弈搜索。

2.根据权利要求1所述的博弈搜索方法,其特征在于具体搜索过程包括以下步骤:

步骤1:设置结点信息、搜索深度值、玩家和棋子信息;

步骤2:判断是否达到搜索深度,如果达到搜索深度,执行步骤6;否则,执行步骤3;

步骤3:扩展节点,获取所有待扩展的节点;

步骤4:判断此层是哪一层,如果是极大层或者极小层,进行我方或者对方落子模拟;如果是骰子层,根据结点信息,确定何方进行骰子模拟,进行投骰子模拟;

步骤5:如果本层不是骰子层,改变玩家并且标识下层的骰子层隶属何方;如果本层是骰子层,记录保存骰子层的信息;上述判断处理完毕之后,深度+1,执行步骤1;

步骤6:采用攻防兼备估值函数进行估值,然后一直递归回溯到根结点,搜索结束。

3.根据权利要求1所述的博弈搜索方法,其特征在于:所述骰子层的骰子层值采用下式计算:

$$Value(D)=\sum_{i=1}^{6}p(i)nextValue(i) \qquad (1)$$

其中:i为模拟的骰子数,nextValue(i)表示i分支下的下一层节点的值,p(i)为投到骰子数为i的概率。

4.根据权利要求1或2所述的博弈搜索方法,其特征在于:所述攻防兼备估值函数进行估值的方法包括以下步骤:

步骤1:判断是否为叶子结点,如果为叶子结点,表示未达到指定搜索深度,棋盘提前结束,执行步骤6;否则执行步骤2;

步骤2:扫描当前棋盘,统计敌我双方所有现存棋子的属性及位置关系表;

步骤3:根据现存棋子表,计算各现存棋子的概率表与价值表;

步骤4:根据概率表与价值表计算当前我方棋子的进攻性估值和防御性估值;

步骤5:根据棋子的位置关系表,结合概率表与价值表计算威胁度估值;

步骤6:结合进攻性估值与防御型估值以及威胁度估值,给出总体的棋面估值;

步骤7:未达到指定搜索深度,棋盘结束,直接给出与当前结束深度有关的直接估值。

5.根据权利要求4所述的博弈搜索方法,其特征在于:所述步骤3所述现存棋子的价值表计算采用下式计算:

$\mathrm{value}(i)=2^{4-\mathrm{distance}(i)}$　(2)

i表示某个棋子,distacn(i)表示棋子到对方角部的距离。

6.根据权利要求4所述的博弈搜索方法,其特征在于:所述步骤4所述的进攻性估值采用下式计算:

$$exp_1=\sum_{i=1}^{6}p(i)*value(i)1\le i\le 6 \qquad (3)$$

其中:p(i)表示投骰子选中编号为i的棋子的概率,骰子投中1～6中的每个数的概率都为1/6;value(i)为我方编号为i的棋子的价值,若棋子i不存在,即为替代法求得的代替棋子i走动的的棋子的最大价值。

7.根据权利要求4所述的博弈搜索方法,其特征在于:所述步骤4所述的防御性估值采

用下式计算：

$$exp_2 = -\sum_{i^{'}=1}^{6} value(i^{'}) \quad 1 \le i^{'} \le 6 \qquad (4)$$

其中:value(i’)为对方编号为i’的棋子的价值。

8.根据权利要求4所述的博弈搜索方法，其特征在于:所述步骤5所述的威胁度估值采用下式计算：

$$thread_1 = \sum_{i=1}^{6} MAX(value(j_{i1}), value(j_{i2}), value(j_{i3})) \qquad (5)$$

其中:i为对方掷到的骰子数，j_{i1}，j_{i2}，j_{i3}对应被对方i棋子所威胁的我方棋子，value(j_{i1})，value(j_{i2})，value(j_{i3})为对应的价值;如果棋子i不存在，同样用替代法求得替代威胁度。

9.根据权利要求4所述的博弈搜索方法，其特征在于:所述步骤5所述的总体的棋面估值采用的估值函数为：

$VALUE = k_1*exp_1+k_2*exp_2+k_3*thread_2-k_4*thread_1$ (6)

exp_1是占领对手角部位置的期望进攻值，exp_2是阻击对手棋子靠近己方角部位置的期望阻击值，$thread_1$是对手棋子威胁己方棋子的总威胁期望值，$thread_2$是己方棋子吃掉对手棋子的总威胁期望值，k_1，k_2，k_3，k_4是权重因子，代表每个部分在整体估值函数中所占的比重。

爱恩斯坦棋基于攻防兼备估值函数的博弈搜索方法

技术领域

[0001] 本发明属于棋类游戏机器博弈的研究领域，特别涉及一种爱恩斯坦棋基于攻防兼备估值函数的博弈搜索方法。

背景技术

[0002] 计算机博弈，也称机器博弈，是一个极具挑战与发展前景的计算机研究领域，其作为人工智能领域一个极其重要的课题，素有人工智能领域“果蝇”之称。而对于棋类游戏的研究又是计算机博弈研究过程中的一个标准且极为重要的问题。现有的很多重要理论和技术方法诸如各类搜索算法及智能方法，最初的提出都是为了解决存在于棋类博弈中的某些问题。对于计算机博弈的研究最早可以追溯到半个世纪之前，在过去的五六十年里，人工智能的学者们呕心沥血的研究了计算机博弈中的包括奥赛罗、国际象棋、跳棋、五子棋、围棋等等，取得了大量傲人的成果。

[0003] 在规定的时间内提高博弈水平是博弈的最终目标。但是由于受到硬件系统和爱恩斯坦棋本身复杂度的限制，要想提高博弈水平，只有从博弈树的搜索和估值两方面考虑。

[0004] 爱因斯坦棋由德国一个应用数学方向的教授Ingo Althöfer在04年根据他之前设计的一个需要很大运气的足球小游戏设计的，原名是EinStein würfelt nicht!，中文意思是爱因斯坦不投骰子。游戏的名字的来源是因为爱因斯坦的一句著名的话：我确信上帝不会投骰子。2005年被用作爱因斯坦年的官方游戏进入到公众视野，目前是国际计算机奥林匹克大赛竞赛项目，并于2012年首次作为我国大学生计算机博弈大赛的竞赛项目。

[0005] 规则简介：爱恩斯坦棋的棋盘是5×5的方格型，初始红蓝方各有标有数字1～6的6个棋子。走棋时双方轮流掷骰子，然后走动与骰子数相对应的棋子。如果对应的棋子被移出，走动大于或小于此数字的与此数字最接近的棋子。例如假设编号为4和5的棋子已移出，如果骰子显示为4，则可以走动编号为3或6的棋子。走棋时每次走动一格，率先到达对方出发区角点或将对方棋子全部吃掉的一方获胜。

[0006] 爱恩斯坦棋博弈研究中存在的问题：

问题1：估值函数是对当前局面优劣的评估，它为博弈过程的具体实现提供计算的基础，一个好的估值方法往往是博弈取胜的关键。现有的研究提出了对估值影响的俩个因素：距离(distance)和概率(probably)，并提出了简单的估值。从现有的估值来看，知识量偏少，考虑片面，虽然在程序运行速度上相对快些，但由于知识量贫乏，对于棋盘状态估值不准确，知识程序的漏洞过多，甚至出现比较明显的错误决策，最终导致“快而不准”的尴尬局面，严重影响了程序的博弈水平。

[0007] 问题2：由于爱恩斯坦棋规则的特殊性，下棋的过程中并不能确定下一步棋对方应该下哪个棋子、哪一个位置，具体下哪个棋子是由掷骰子得到的数字来决定，这就造成了博弈过程中双方博弈信息不完备。传统的博弈数搜索在扩展树的过程中会将双方可能的对弈过程展示出来，这就需要博弈双方的信息完备。所以，传统的博弈树搜索无法适用于爱恩斯坦棋。

发明内容

[0008] 本发明针对现有技术的缺陷，提供一种爱恩斯坦棋基于攻防兼备估值函数的博弈搜索方法。

[0009] 为了实现上述目的，本发明采用以下技术方案：一种爱恩斯坦棋基于攻防兼备估值函数的博弈搜索方法，将攻防兼备估值函数用于期望极大极小搜索中模拟博弈搜索。

[0010] 具体搜索过程包括以下步骤：

步骤1：设置结点信息、搜索深度值、玩家和棋子信息；

步骤2：判断是否达到搜索深度，如果达到搜索深度，执行步骤6；否则，执行步骤3；

步骤3：扩展节点，获取所有待扩展的节点；

步骤4：判断此层是哪一层，如果是极大层或者极小层，进行我方或者对方落子模拟；如果是骰子层，根据结点信息，确定何方进行骰子模拟，进行投骰子模拟；

步骤5：如果本层不是骰子层，改变玩家并且标识下层的骰子层隶属何方；如果本层是骰子层，记录保存骰子层的信息；上述判断处理完毕之后，深度+1，执行步骤1；

步骤6：采用攻防兼备估值函数进行估值，然后一直递归回溯到根结点，搜索结束。

[0011] 所述骰子层的骰子层值采用下式计算：

$$Value(D)=\sum_{i=1}^{6}p(i)nextValue(i) \qquad (1)$$

其中：i为模拟的骰子数，nextValue(i)表示i分支下的下一层节点的值，p(i)为投到骰子数为i的概率。

[0012] 所述攻防兼备估值函数进行估值的方法包括以下步骤：

步骤1：判断是否为叶子结点，如果为叶子结点，表示未达到指定搜索深度，棋盘提前结束，执行步骤6；否则执行步骤2；

步骤2：扫描当前棋盘，统计敌我双方所有现存棋子的属性及位置关系表；

步骤3：根据现存棋子表，计算各现存棋子的概率表与价值表；

步骤4：根据概率表与价值表计算当前我方棋子的进攻性估值和防御性估值；

步骤5：根据棋子的位置关系表，结合概率表与价值表计算威胁度估值；

步骤6：结合进攻性估值与防御型估值以及威胁度估值，给出总体的棋面估值；

步骤7：未达到指定搜索深度，棋盘结束，直接给出与当前结束深度有关的直接估值。

[0013] 所述步骤3所述现存棋子的价值表计算采用下式计算：

$value(i)=2^{4-distance(i)}$ (2)

i表示某个棋子，distance(i)表示棋子到对方角部的距离。

[0014] 所述步骤4所述的进攻性估值采用下式计算：

$$exp_1=\sum_{i=1}^{6}p(i)*value(i) \quad 1\le i\le 6 \qquad (3)$$

其中：p(i)表示投骰子选中编号为i的棋子的概率，骰子投中1～6中的每个数的概率都为1/6；value(i)为我方编号为i的棋子的价值，若棋子i不存在，即为替代法求得的代替棋子i走动的的棋子的最大价值。

[0015] 所述步骤4所述的防御性估值采用下式计算：

$$exp_2 = -\sum_{i'=1}^{6} value(i')1 \le i' \le 6 \qquad (4)$$

其中:value(i')为对方编号为i'的棋子的价值。

[0016] 所述步骤5所述的威胁度估值采用下式计算:

$$thread_1 = \sum_{i=1}^{6} MAX(value(j_{i1}), value(j_{i2}), value(j_{i3})) \qquad (5)$$

其中:i为对方掷到的骰子数,j_{i1},j_{i2},j_{i3}对应被对方i棋子所威胁的我方棋子,value(j_{i1}),value(j_{i2}),value(j_{i3})为对应的价值;如果棋子i不存在,同样用替代法求得替代威胁度。

[0017] 所述步骤5所述的总体的棋面估值采用的估值函数为:

$$VALUE = k_1*exp_1+k_2*exp_2+k_3*thread_2-k_4*thread_1 \qquad (6)$$

exp_1是占领对手角部位置的期望进攻值,exp_2是阻击对手棋子靠近己方角部位置的期望阻击值,$thread_1$是对手棋子威胁己方棋子的总威胁期望值,$thread_2$是己方棋子吃掉对手棋子的总威胁期望值,k_1,k_2,k_3,k_4是权重因子,代表每个部分在整体估值函数中所占的比重。

[0018] 步骤4与5所述的估值计算是一种特殊的期望计算,是从攻击和防守两个方面的对于对弈方的进攻能力与防御能力的期望计算。离散随机变量的一切可能取值与其对应的概率P的乘积之和称为数学期望,简称期望。在这里我们定义的进攻性估值、防御性估值以及威胁度估值值得就是进攻性、防御性以及威胁度的期望,最后得出的估值函数就是当前局面的某一方的总体实力的期望。

[0019] 鉴于目前的估值包含知识量太少,考虑太过片面,没有系统全面的设计,本发明综合进攻和防御双方面的考虑,设计了进攻性估值、防御性估值以及威胁度估值3个方面的估值来全面评估棋子的进攻性和防御性,力求准确高效地评估局面情况。

[0020] 传统的极大极小搜索只能应用于完全信息博弈,而爱恩斯坦棋在下棋的过程中并不能确定下一步棋对方应该下哪个棋子、哪一个位置,具体下哪个棋子是由掷骰子得到的数字来决定,这种棋类博弈属于不完备信息博弈,传统的极大极小搜索不再适用于爱恩斯坦棋,本发明采用期望极大极小算法,它是极大极小算法的变种,在向下搜索拓展的过程中引入概率(骰子)层,克服了由骰子所带来的博弈信息不完备的问题。本发明将设计好的攻防兼备的估值函数应用到期望搜索中,设计了攻防兼备的期望极大极小算法,提高系统的搜索效率和博弈水平。

附图说明

[0021] 图1为计算棋子距离对手角部位置距离的示意图。

[0022] 图2为计算棋子在不同位置的价值表。

[0023] 图3为计算棋子概率时的实例棋局。

[0024] 图4为估值函数中计算威胁度估值的实例棋局。

[0025] 图5是期望搜索算法的博弈树搜索过程示意图。

具体实施方式

[0026]　下面结合具体实施例和附图对本申请做进一步的说明。

[0027]　首先六子棋的棋盘是5x5的矩形，每格子就是一颗棋子的位置，这里是用一个二维数组chess[5][5]来表示棋子在棋盘上的位置。每个棋子有一个棋子类来表示，下面是棋子的数据结构表示：

```
public int num;//棋子的数字
public int color;//棋子的颜色,0表示红方,1表示蓝方
public int bl;//该位置是否存在棋子,0表示不存在,1表示存在
public int proba;//棋子的概率
```

1.攻防兼备的期望极大极小算法

1)估值函数设计

评估函数是指对任何一局面根据人在某种棋类中长期研究的经验抽取局面中与棋局优劣相关的各个特征。在介绍爱恩斯坦棋的估值函数设计之前，我们先介绍俩特征因素的概念。

[0028]　1.距离(distance)

爱恩斯坦棋的主要赢棋方式是占领对方的角部位置，距离(distacn(i))是指棋子距对方角部位置的最少步数。假设我方为红方，在左上角。

[0029]　有distance(i)＝4-MAX(Line,Column)　(1)

i表示某个棋子，line、column表示棋子的行列号。

[0030]　根据距离我们引申出棋子价值(value(i))这个概念，根据距离很容易得出棋子距离越小，棋子的价值越大，换言之，棋子离对方的角部位置越近，赢得可能性就越大，它的价值就越高。图1为计算棋子距离对手角部位置距离的示意图。

[0031]　定义1：根据距离大小，规定棋子在各个位置的价值如下式：

$value(i)=N^{4-distance(i)}$　(2)

i表示某个棋子，distacn(i)表示距离，N是价值因子。图2为计算棋子在不同位置的价值表。

[0032]　2.概率因素(probability)

爱恩斯坦棋采用掷骰子来决定走子。所以除了距离，还有个概率因素，即某个棋子的走子概率。

[0033]　对于以下图3中的棋局：分别计算红1和红6的走子概率。当骰子掷出1和6的时候，必须移动对应的棋子，而当掷出{2,3,4,5}的时候，因为棋子1只需走一步就可以赢，而6离角点还有2步，所以这个时候只可能走1，而不会走6，即p(1)＝5/6，p(2)＝1/6。值得注意的是这里通常会有一个误区，认为p(1)＝p(6)＝5/6，这是错误的，因为掷出{2,3,4,5}，走1就赢，而走6从策略上来说就是一种错误的走法。从概率学来说，概率之和也不能大于1。

[0034]　对于概率因素，为了避免浮点运算，我们也引申出替代(exchange)的概念。

[0035]　定义2：当我方走子时，掷到某骰子个数i，而棋盘上不存在棋子i，此时我们根据规则寻找棋盘上棋子中大于或小于此数字的并与此数字最接近的棋子来替代计算，若替代子j唯一，则

Value(i)＝Value(j)　(3)

若替代子不唯一(j_1,j_2)，有

$$Value(i)=max(Value(j_1),Value(j_2)) \quad (4)$$

这里的Value不仅仅指棋子的价值(value),包括其他需要计算的值。与棋子的价值一样,替代具有相对性,当对方走子时,有

$$Value(i)=min(Value(j_1),Value(j_2)) \quad (5)$$

通过引入替换的概念,我们无需计算某个棋子的概率,只需当掷到某骰子个数时,如果对应这个骰子数的棋子不存在,找到替代子,并计算作为掷到这个骰子数的计算结果。

[0036] 介绍完了特征因素,下面我们从3个方面设计了攻防兼备的估值函数。

[0037] ①进攻性估值

离散随机变量的一切可能取值与其对应的概率P的乘积之和称为数学期望,简称期望。这里我们定义我方的进攻性为我方占领对方角部的期望。

[0038] 定义3:在爱因斯坦棋中,某个棋子占领对方角部的期望是掷得该棋子的概率p(i)与我方该棋子的价值value(i)之积,那么我方的进攻性亦即我方占领对方角部的期望就是棋盘上所有我方棋子的期望价值和。

[0039] $$exp_1=\sum_{i=1}^{6} p(i)*value(i) 1\le i\le 6 \quad (6)$$

p(i)表示投骰子选中编号为i的棋子的概率,骰子投中1-6中的每个数的概率都为1/6;value(i)为我方编号为i的棋子的价值,若棋子i不存在,即为替代法求得的代替棋子i走动的的棋子的最大价值。

[0040] ②防御性估值

我们定义我方的防御性为对方占领我方的角部的期望的负值,即对方进攻性的负值exp_2。计算对方到我方角部位置的期望是为了拦截对方到我方角部距离很近的对方的棋子,其计算方法与exp_1相似。

[0041] 对方棋子占领我方角部的期望是掷得该棋子的概率p(i)与对方该棋子的价值value(i')之积,我方的防御性即棋盘上所有对方棋子的期望价值和的负值。同理消去p(i)

$$exp_2=-\sum_{i'=1}^{6} value(i') 1\le i'\le 6 \quad (7)$$

value(i')为对方编号为i'的棋子的价值。

[0042] ③威胁度估值

爱因斯坦棋赢棋有两种方法,一种是占领对角,另一种是吃掉对方全部子。exp_1和exp_1是从占领对角的方面考虑的,现在我们要从吃子的角度来考虑。所谓威胁度,就是当轮到敌方落子时,我方棋子被对方棋子吃掉的期望,亦即我方棋子受到对方棋子威胁的期望值,也称对方对我方的威胁度$thread_1$。同理轮到我方落子时,有我方对敌方的威胁度$thread_2$。

[0043] 以图4中的棋局为例,蓝方只剩下4、6两个棋子,我方(红方)只剩下1、3俩个棋子。当对方掷骰子得到1、2、3、4时,对方只能走4,若是向右走,我方的棋子3就会受到威胁。当对方掷到6时,只能走6,我方的1就会受到威胁。当对方掷到5时,对方可以走4也可以走6,这时我方的3或1就会受到威胁。当对方掷到5时,1或3都会受到对方的威胁。显然,对于对方来说,当掷到5时会选择吃掉价值更大的红子3,所以,我们选取红3作为对方掷到5时我们受威胁的棋子。由上例可以得出:当对方一棋子i同时威胁到我方多个棋子时,选取其中价值最大的作为棋子i所威胁的棋子。

[0044] 定义5：对方掷到数字i的威胁度为对方掷到的数字i概率p(i)与对应走的棋子可以吃掉的我方棋子中价值最大的棋子价值。同exp_1一样，我们乘以6消去p(i)，有我方受对方的威胁度为：

$$thread_1=\sum_{i=1}^{6}MAX(value(j_{i1}),value(j_{i2}),value(j_{i3})) \qquad (8)$$

i为对方掷到的骰子数，j_{i1}，j_{i2}，j_{i3}对应被对方i棋子所威胁的我方棋子，value(j_{i1})，value(j_{i2})，value(j_{i3})为对应的价值；如果棋子i不存在，同样用替代法求得替代威胁度。

[0045] 同理有我方对对方的威胁度

$$thread_2=\sum_{i'=1}^{6}MAX(value(j_{i'1}),value(j_{i'2}),value(j_{i'3})) \qquad (9)$$

综上可以得出期望算法的估值函数为

$VALUE=k_1*exp_1+k_2*exp_2+k_3*thread_2-k_4*thread_1$ (10)

exp_1是占领对手角部位置的期望进攻值，exp_2是阻击对手棋子靠近己方角部位置的期望阻击值，$thread_1$是对手棋子威胁己方棋子的总威胁期望值，$thread_2$是己方棋子吃掉对手棋子的总威胁期望值。攻防兼备的估值函数的设计思想是让己方棋子到对手角部位置的平均距离最近并且让对手到己方角的平均距离最远并且对方给我方的威胁度最小。k_1，k_2，k_3，k_4是参数，或者说是权重因子，代表每个部分在整体估值函数中所占的比重。

[0046] 2)期望搜索算法

期望极大极小算法是极大极小算法的变种，在向下搜索拓展的过程中引入概率(骰子)层，克服了由骰子所带来的博弈信息不完备的问题。

[0047] 在期望极大极小搜索中，返回值的过程类似极大极小搜索。有如下特点：

①极大层的计算结果是下一层返回的最大值；

②极小层的值是下一层返回的最小值；

③骰子层值是下一层返回的期望平均值，计算公式如下：

$$Value(D)=\sum_{i=1}^{6}p(i)nextValue(i) \qquad (6)$$

i为模拟的骰子数，nextValue(i)表示i分支下的下一层节点的值，p(i)为投到骰子数为i的概率，图5为期望极大极小算法的示意图。

[0048] ①极大层的值为概率层3个值中的最大值。

[0049] ②概率层的值为下一层返回值的平均值，这里我们同样为避免浮点型的运算，采取替代法。即计算值时实际上为6个分支返回值得和。

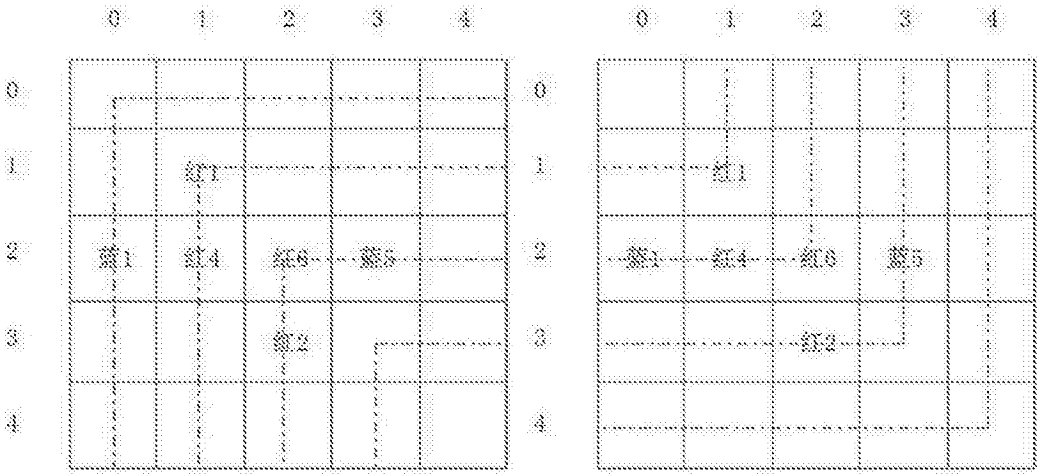
[0050] ③极小层为下一层3个值之中的最小值。

[0051] ④所谓搜索就是向下拓展模拟，我方下棋和对方下棋。当达到搜索深度时，根据估值函数计算叶子结点的值，然后向上更新其父结点的值直到根结点。

[0052] ⑤当没有达到搜索深度但此时棋盘已经结束，比如发生越界，或者一方已经赢棋，发生这种情况时：如果模拟走棋，发生越界，直接返回一个极小值(极大层)或者一个极大值(极小值)；如果模拟走棋，一方赢棋，根据判赢返值函数(按搜索深度计算)来计算返回一个值；发生着俩种情况时，不必继续向下搜索，直接返值。

[0053] 以上所述，仅是本发明的较佳实施例而已，并非对本发明做任何形式的限制。凡是

依据本发明的技术和方法实质对以上实施例所作的任何简单修改、等同变化与修饰，均仍属于本发明的技术和方法方案的范围内。



（a）Red　　　（b）Blue

图1

0	1	1	1	1
1	2	2	2	2.5
1	2	4	4	5
1	2	4	8	10
1	2.5	5	10	16

（a）红

16	10	5	2.5	1
10	8	4	2	1
5	4	4	2	1
2.5	2	2	2	1
1	1	1	1	0

（b）蓝

图2

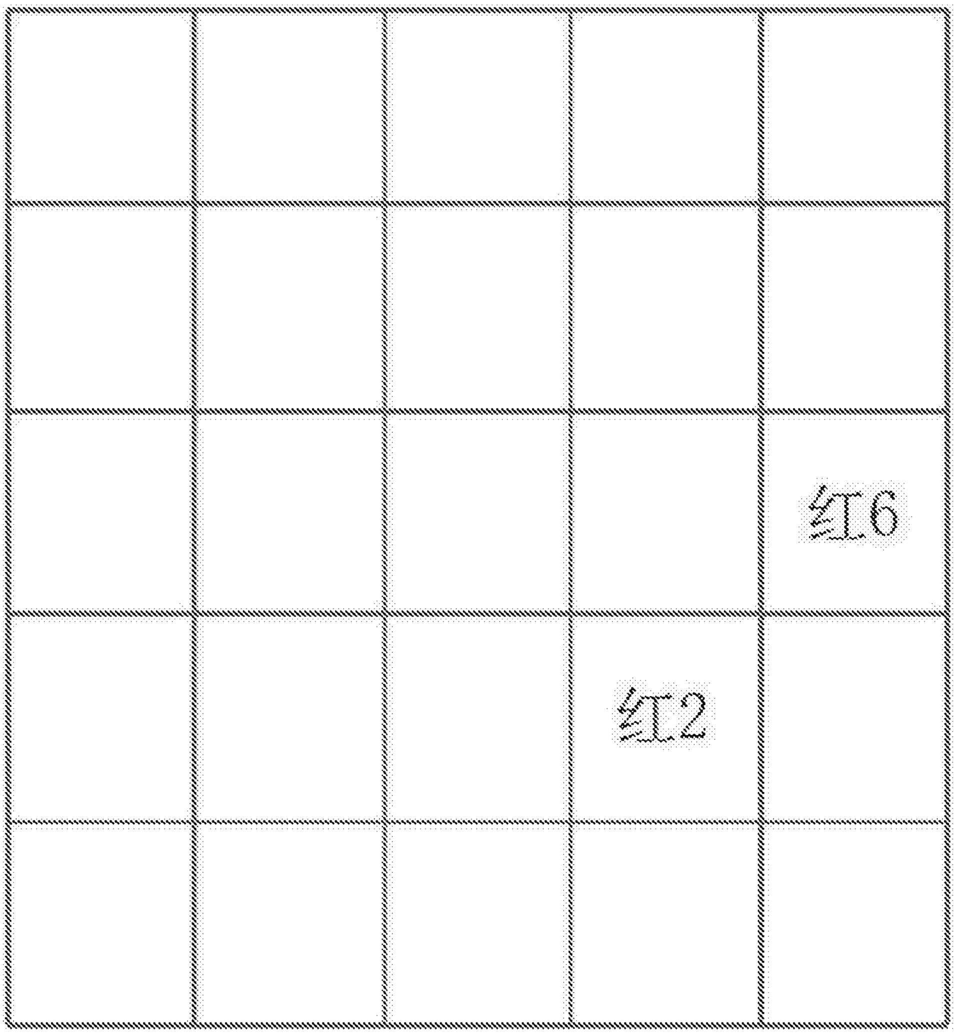


图3

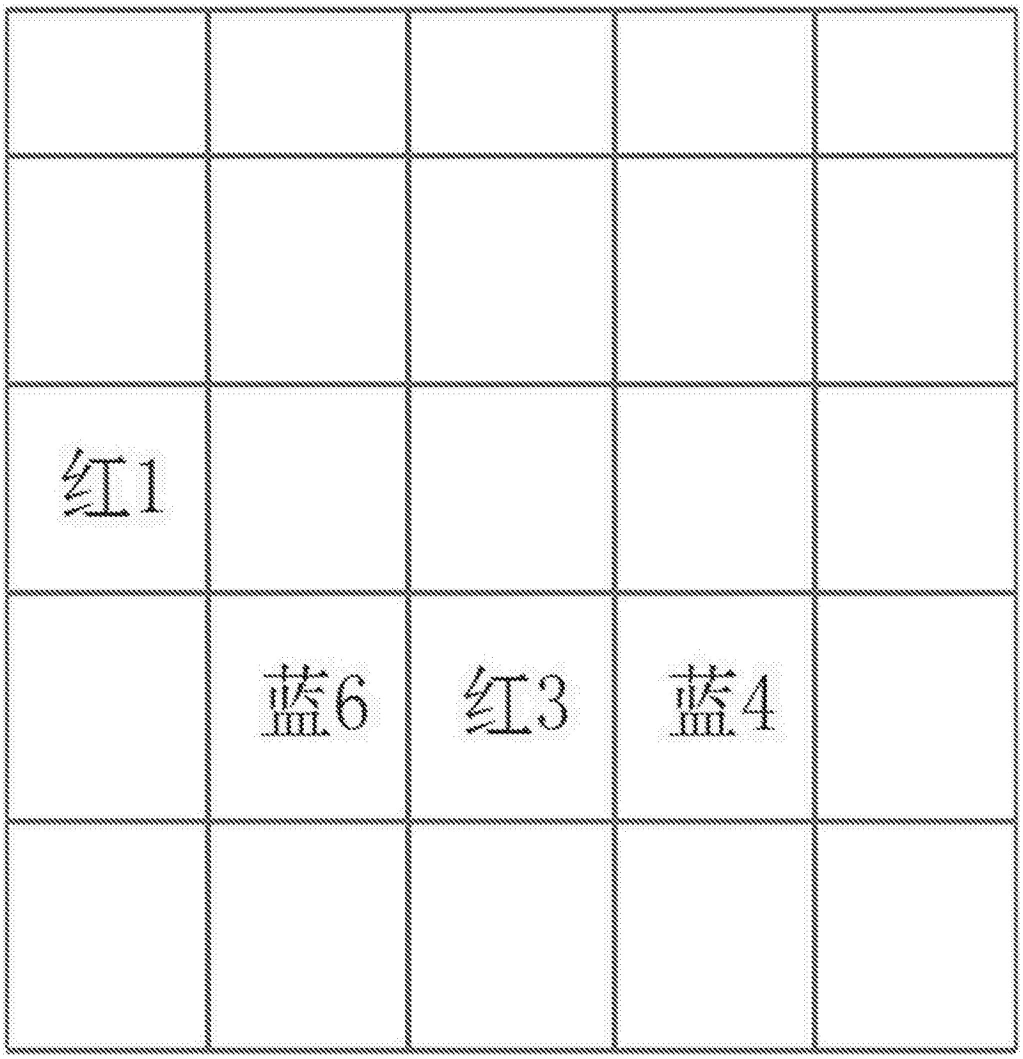


图4

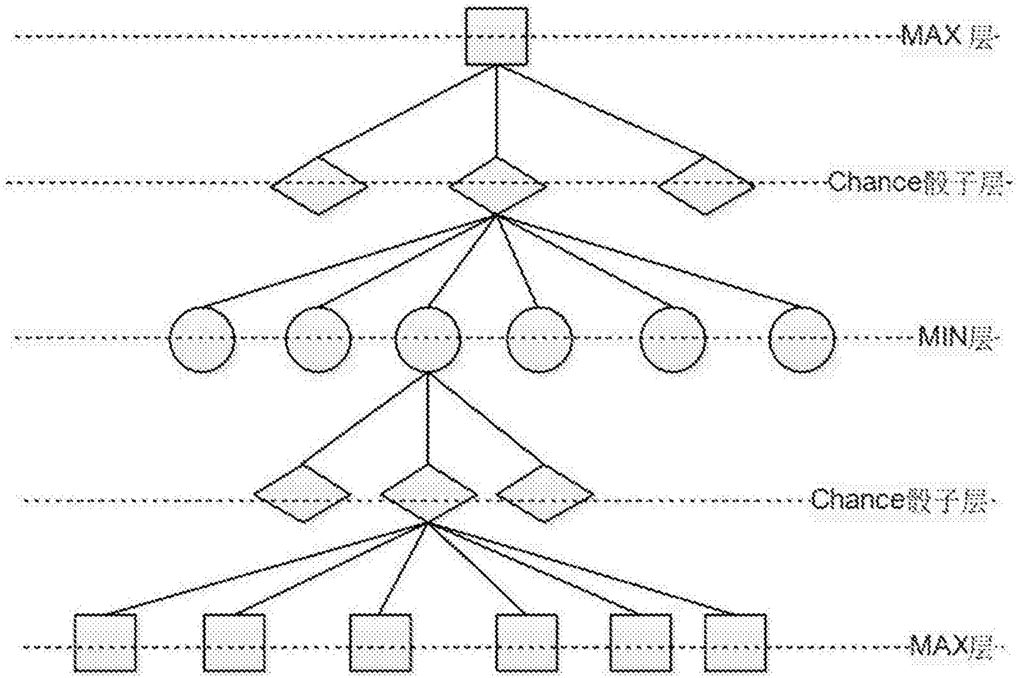


图5