最优化学习笔记 2(p23-p)

BD S

2021 年 7 月 13 日

目录

本章将从范数和导数讲起，接着介绍广义实值函数、凸集、凸函数、共轭函数和次梯度等凸分析方面的概念以及结论

1 范数

1.1 向量范数

首先是范数的定义

Definition 1 从向量空间 $\mathbb{R}^n$ 到实数域 R 的非负函数 $||\cdot||$，满足正定性、齐次性、三角不等式，那么它就是范数

l_p 范数：

$$||v||_p = (|v_1|^p + |v_2|^p + ... + |v_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

当 $p = 0$ 时候，l_0 范数就是非 0 元素个数，当 $p = 1$ 时候，l_1 范数就是绝对值之和，当 $p = 2$ 时候，l_0 范数就是平方和开根，当 $p = \infty$ 时候，l_0 范数就是元素的最大值。

1.2 矩阵范数

矩阵的 l_1 范数就是所有的元素之和，$||A||_1 = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$，矩阵的 l_2 范数也就是矩阵的 F 范数。就是所有元素的平方和开根。常用的范数还有核范数，为所有非 0 奇异值之和。给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，核范数定义为

$$||A||_* = \sum_{i=1}^{r}\sigma_i,\ i = 1, 2, \dots, r$$

，并且 r 是矩阵的秩。

1.3 矩阵内积

Frobenius 内积：

$$< A, B > \overset{def}{=} Tr(AB^T) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$$

对应的也有矩阵范数的柯西不等式

$$| < A, B > | \leq ||A||_F||B||_F$$

等号在 A 和 B 线性相关的时候成立。

2 导数

2.1 梯度与海瑟矩阵

本章重点：梯度、海瑟矩阵、之间的关系以及雅可比矩阵。

当优化问题没有显式解的时候，可以通过函数值和导数信息来构造可以求解的子问题。首先是梯度的定义。

Definition 2 定义一个函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，且 f 在点 x 的一个领域内有意义，若存在向量 $g\in\mathbb{R}^n$ 满足

$$\lim_{p\to 0}\frac{f(x+p)-f(x)-g^Tp}{||p||}=0$$

就称 f 在点 x 处可微，g 成为 f 在点 x 处的梯度，记作 $\bigtriangledown f(x)$。

同时，如果 x 是一个向量，那么就有

$$\bigtriangledown f(x)=[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\frac{\partial f(x)}{\partial x_2},...,\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}]^T$$

这是一阶偏导，还有二阶偏导（海瑟矩阵）

$$\bigtriangledown^2 f(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}$$

二阶可微：$\bigtriangledown^2 f(x)$ 在区域 D 的每个 x 处都存在。如果还连续，就是二阶连续可微，且这个时候，海瑟矩阵对称。

接下来是雅可比矩阵。对于一个函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，可以定义它的雅可比矩阵为

$$J(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

其实它的第 i 行分量就是 $f_i(x)$ 的梯度的转置此外，**梯度 $\bigtriangledown f(x)$ 的雅可比矩阵就是海瑟矩阵**。对于一阶可微和二阶可微的函数，我们可以进行泰勒展开，得到 $f(x+p)=f(x)+\bigtriangledown f(x+tp)^Tp,\ 0<t<1$，以及 $f(x+p)=f(x)+(\bigtriangledown f(x))^Tp+\frac{1}{2}p^T\bigtriangledown^2 f(x+tp)p,\ 0<t<1$。

接下来介绍一类特殊的可微函数——梯度利普希兹连续的函数。给出定义

Definition 3 给定可微函数 f，若存在 $L>0$，对任意的 $x,y\in domf$ 有

$$||\bigtriangledown f(x)-\bigtriangledown f(y)||\leq L||x-y||$$

那么就说 f 是梯度李普希兹光滑，相应有李普希兹常数 L。也记作梯度 L-李普希兹光滑或 L-光滑。

梯度李普希兹光滑就带来了很多很好的性质，比如说函数二次是有上界的。这里说明一下，就是泰勒展开后的二次项的上界。比如说

$$f(y) - f(x) - \bigtriangledown f(x)^T(y-x) \leq \frac{L}{2}||y-x||^2$$

此外，还引申出来一个性质

$$\frac{1}{2L}||\bigtriangledown f(x)||^2 \leq f(x) - f(x^*)$$

表示了梯度与当前值和最优值之差的关系，这也恰恰是强凸性的反面，这个的本质就说二阶梯度 $||\bigtriangledown f(x)||^2 < mI$，就这样。

2.2 矩阵变量函数的导数

对于一个变量为 $m \times n$ 维矩阵的函数 $f(X)$ 来说，若存在矩阵 $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 满足

$$\lim_{V\to 0} \frac{f(X+V) - f(X) - < G, V >}{||V||} = 0$$

就称矩阵变量函数 f 在 X 处 **Frechet 可微**，且 G 为 Frechet 可微下的梯度。$f(x)$ 的梯度可以用其偏导来表示

$$\bigtriangledown f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{11}} & \frac{\partial f}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{1n}} \\ \frac{\partial f}{\partial x_{21}} & \frac{\partial f}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{m1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{m2}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{mn}} \end{bmatrix}$$

注意到变量是 $m \times n$，梯度也是 $m \times n$ 形式的。

除了 **Frechet 可微**，还有 **Gateaux 可微**对于一个变量为 $m \times n$ 维矩阵的函数 $f(X)$ 来说，若存在矩阵 $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 满足

$$\lim_{V\to 0} \frac{f(X+tV) - f(X) - t < G, V >}{t} = 0$$

就称矩阵变量函数 f 在 X 处 **Gateaux 可微**，且 G 为 Gateaux 可微下的梯度。可以证明，这两个可微基本上是效果一样的，不区分。

举个例子，求 $f(X) = Tr(AX^TB)$ 的微分，其中 $A \in \mathbb{R}^{p\times n}, B \in \mathbb{R}^{m\times p}, X \in \mathbb{R}^{m\times n}$，对任意的方向 $V \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 以及 $t \in \mathbb{R}$ 有

$$\lim_{V\to 0} \frac{f(X+tV) - f(X)}{t} = \lim_{V\to 0} \frac{Tr(A(X+tV)^TB - Tr(AX^TB))}{t} = \lim_{V\to 0} Tr(AV^TB) = \langle BA, V\rangle$$

因此，$\bigtriangledown f(x)=BA$ 这里就要用到 1.3 节提到的公式

$$<A,B>\stackrel{def}{=}Tr(AB^T)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$$

简单讲述一下为何是 BA 而不是 AB，因为 $A\in\mathbb{R}^{p\times n},B\in\mathbb{R}^{m\times p}$ 只能后者乘以前者，在内部迹的变换的时候就是 $Tr(AV^TB)=Tr(BAV^T)=\langle BA,V\rangle$

再来一个例子，一个二次函数 $f(X,Y)=\frac{1}{2}||XY-A||_F^2$ 其中 $(X,Y)\in\mathbb{R}^{m\times p}\times\mathbb{R}^{p\times n}$ 对任意的方向 $V\in\mathbb{R}^{m\times p}$ 以及 $t\in\mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned}
&\lim_{V\to 0}\frac{f(X+tV,Y)-f(X,Y)}{t}\\
&=\lim_{V\to 0}\frac{\frac{1}{2}||(X+tV)Y-A||_F^2-\frac{1}{2}||XY-A||_F^2}{t}\\
&=\lim_{V\to 0}\frac{\frac{1}{2}||XY-A+tVY||_F^2-\frac{1}{2}||XY-A||_F^2}{t}\\
&=\lim_{V\to 0}\frac{\langle XY-A,tVY\rangle+\frac{1}{2}t^2||VY||_F^2}{t}\\
&=\langle XY-A,VY\rangle+\mathbb{O}(t^2)\\
&=\left\langle (XY-A)Y^T,V\right\rangle+\mathbb{O}(t^2)
\end{aligned}\tag{1}$$

所以说对应的梯度就是 $\frac{\partial f}{\partial X}=(XY-A)Y^T$，这里值得注意的是，矩阵的点乘，就是内积。F 范数也可以与乘相联系，F 范数的平方就是矩阵元素的平方和，这个数值与两个相同矩阵的内积恰恰一样，也就可以表示为两个矩阵相乘。

最后一个例子 $F=ln(det(X))$，$X\in\mathbb{S}_{++}^n$，给定 $X\succ 0$，对于任意的方向 $V\in\mathbb{S}^n$ 以及 $t\in\mathbb{R}$，那么计算梯度

$$\begin{aligned}
&f(X+tV)-f(X)\\
=&ln(det(X+tV))-ln(det(X))\\
=&ln(det(X^{1/2}(I+tX^{-1/2}VX^{-1/2})X^{1/2}))-ln(det(X))\\
=&ln(det(I+tX^{-1/2}VX^{-1/2}))
\end{aligned}\tag{2}$$

这里 det 是行列式的意思，矩阵的行列式的值等于特征值的乘积。由于 $X^{-1/2}VX^{-1/2}$ 是一个实对称矩阵，所以可以进行正交对角化。先设矩阵 $X^{-1/2}VX^{-1/2}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$，

又知道矩阵的行列式的值等于特征值的乘积，可以得到

$$
\begin{aligned}
&ln(det(I+tX^{-1/2}VX^{-1/2}))\\
=&ln(\prod_{i=1}^{n}(1+t\lambda_i))\\
=&\sum_{i=1}^{n}ln(1+t\lambda_i)\\
=&\sum_{i=1}^{n}ln(t\lambda_i)+O(t^2)\\
=&tTr(X^{-1/2}VX^{-1/2})+O(t^2)\\
=&tTr(X^{-1}V)+O(t^2)\\
=&tTr((X^{-1})^TV^T)+O(t^2)\\
=&t\left\langle X^{-1})^T,V\right\rangle
\end{aligned}
\tag{3}
$$

自己认为，这个有点复杂，如果有求导公式会好很多。所以这个梯度就是 $\bigtriangledown f(x)=(X^{-1})^T$，这里的第三行变到第四行用的是泰勒展开。

2.3 自动微分

自动微分是计算机计算导数的方法。具体流程是先构建函数有关的图，再利用计算导数的链式法则进行求解。

自动微分有两种，一种前向一种后向。举例一个函数 $f(x_1,x_2)=x_1x_2+sinx_1$ 来说明。该计算的流程图可以用图 1 来表示，计算微分的过程如图 2 所示，通过链式法则，一步步求解。

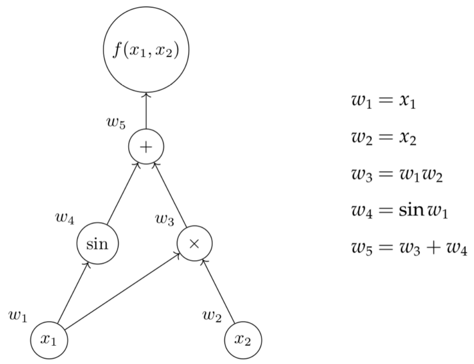


图 1: 函数微分计算结构图

以图 1 为例，前向梯度计算的过程先根据 w_1 和 w_2 的值来计算出 w_3 并得出对应的 $\frac{\partial w_3}{\partial w_1}$ 以及 $\frac{\partial w_3}{\partial w_2}$，通过链式法则依次求解。后向模式则是先根据 w_1 和 w_2 的值来计算出 w_3，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial w_5} = 1,\\
&\frac{\partial f}{\partial w_4} = \frac{\partial f}{\partial w_5}\frac{\partial w_5}{\partial w_4} = 1,\\
&\frac{\partial f}{\partial w_3} = \frac{\partial f}{\partial w_5}\frac{\partial w_5}{\partial w_3} = 1,\\
&\frac{\partial f}{\partial w_2} = \frac{\partial f}{\partial w_3}\frac{\partial w_3}{\partial w_2} = w_1 = x_1,\\
&\frac{\partial f}{\partial w_1} = \frac{\partial f}{\partial w_3}\frac{\partial w_3}{\partial w_1} + \frac{\partial f}{\partial w_4}\frac{\partial w_4}{\partial w_1} = w_2 + \cos w_1 = \cos x_1 + x_2.
\end{aligned}
$$

图 2: 函数微分计算过程图

但是此时不求导，继续求后面的值，求完所有值后先求 $\frac{\partial w_5}{\partial w_3}$ 以及 $\frac{\partial w_5}{\partial w_4}$，从后往前求解。后向模式的梯度计算复杂度更低，至多为函数值计算代价的 5 倍，自动微分基本上采用的都是后向的方法。

3 广义实值函数

将值域扩展，多了两个特殊的值 $\pm\infty$。

Definition 4 令 $\overline{\mathbb{R}}$ 为 $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ 为广义实值空间，则映射 $f:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}}$ 为广义实值函数。

3.1 适当函数

许多优化理论都是建立在适当函数的基础上的。适当函数定义为：至少有一个值不是正无穷且函数处处都不是负无穷。

3.2 闭函数

以下是一些定义。下水平集：这是对于定义域来讲的，$C_a=\{x|f(x)\leq\alpha\}$。若 C_a 非空，那么全局最小点就一定落在 C_a 之中。上方图：$epi\ f=\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}|f(x)\leq t\}$ 闭函数与

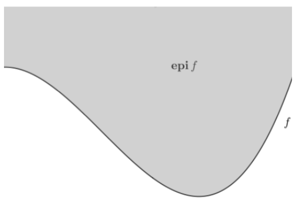


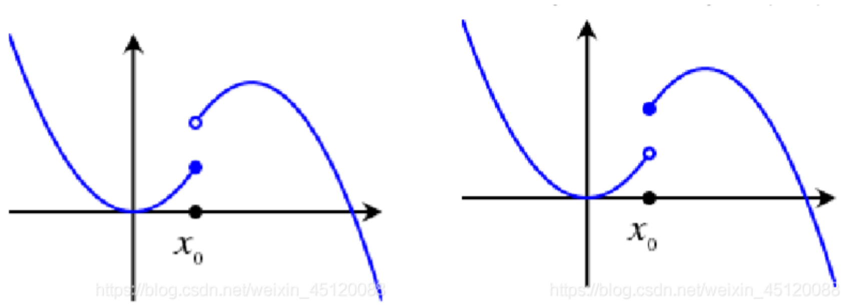
图 3: 上方图

下半连续函数：这两个函数是等价的。闭函数定义：设 $f:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}}$ 为广义实值函数，若 epi

为闭集，则这个函数是闭函数。设广义实值函数 $f:\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$，若对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 有

$$\lim_{y\to x} inf\ f(y) \geq f(x)$$

则 $f(x)$ 为下半连续函数。其实就是在 x_0 处的邻域处，如果 $f(x_0)$ 减去一个正的微小值，从而可以恒小于该邻域的所有 $f(x)$，则称在该间断点处有下半连续性。以下三个性质等价：闭



(a) 下半连续函数　　(b) 上半连续函数

函数、下半连续、任意下水平集都是闭集。

闭函数经过：加法、仿射、取上确界后依然是闭函数。

4　凸集

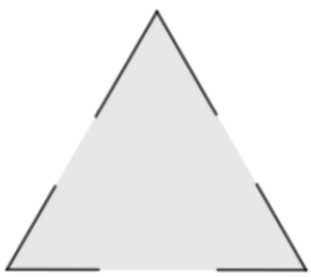


图 4: 这个也是凸集

5　凸函数

5.1　强凸函数

定义为 $f(x)$ 为凸函数且 $\bigtriangledown^2 f(x) \succeq mI, m>0$。强凸性带来很多优秀的性质，比如二阶泰勒展开 $f(y) \geq f(x) + \bigtriangledown f(x)^T(y-x) + \frac{m}{2}||y-x||_2^2$。

5.2 凸函数判定定理

方法 1：先将函数限制在任意直线上，判定对应的一维函数是否是凸的。

定理：$f(x)$ 为凸函数当且仅当对任意的 $x \in domf, v \in \mathbb{R}^n, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(t) = f(x + tv),\ \text{dom}\ g = \{t|x + tv \in \text{dom}f\}$$

是凸函数。

举个例子：判断 $f(X) = -\ln\ \det X$ 是凸函数。那么将这个函数限制在 $X + tV$ 上，考虑一个函数 $g(t) = f(X + tV) = -\ln\ \det(X + tV)$，那么有 $g(t) = -\ln\ \det(X) - \ln\ \det(1 + tX^{-\frac{1}{2}}VX^{-\frac{1}{2}}) = -\ln\ \det(X) - \sum_{i=1}^{n} ln(1 + t\lambda_i)$，负对数函数很明显是凸的了。

注：这里应该是 det 符号里面可以随意换位，并且可以转置。

方法 2：一阶条件，对于定义在凸集上的可微函数 f，f 是凸函数当且仅当

$$f(y) \geq f(x) + \bigtriangledown f(x)^T (y - x)$$

方法 3：梯度单调性，对于定义在凸集上的可微函数 f，f 是凸函数当且仅当

$$(\bigtriangledown f(x) - \bigtriangledown f(y))^T (x - y) \geq 0$$

得到了相应的推论：f 是严格凸函数当且仅当

$$(\bigtriangledown f(x) - \bigtriangledown f(y))^T (x - y) > 0$$

f 是 m-强凸函数当且仅当

$$(\bigtriangledown f(x) - \bigtriangledown f(y))^T (x - y) > m||x - y||^2$$

方法 4：二阶条件，设 f 定义域为凸集且二阶连续可微函数，则 f 是凸函数当且仅当

$$\bigtriangledown^2 f(x) \succeq 0$$

，如果是正定，那就是强凸函数。

方法 5：设 f 定义域为凸集则 f 是凸函数当且仅当其上方图 $epif$ 为凸集

5.3 保凸运算

先留着，证明部分以后再看

6 共轭函数

对于一个适当函数 $f(x)$，它的共轭函数为

$$f^*(y) = \sup_{x \in domf} \{y^T x - f(x)\}$$

具有性质：Fenchel 不等式

$$f(x) + f^*(y) \geq x^T y$$

举例求一些函数的共轭：$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x + b^T x + c$，在强凸的情形下 $(A \succeq 0)$，的共轭函数为 $f^*(y) = \frac{1}{2}(y-b)^T A^{-1}(y-b) - c$。注：正定矩阵的逆的转置等于矩阵的转置的逆

再举个例子：凸集的示性函数

$$I_c(x) = \begin{cases} 0, & x \in C \\ +\infty, & x \notin C \end{cases} \tag{4}$$

对应的共轭函数就说

$$f^*(y) = \sup_{x \in domf} \{y^T x - I_C(x)\} = \sup_{x \in domf} y^T x$$

，所以这个又称为定义域的支撑函数

再举个例子：范数的共轭范数。若

$$f(x) = ||x||$$

，共轭范数为

$$I_c(x) = \begin{cases} 0, & ||y||_* \leq 1 \\ +\infty, & ||y||_* > 1 \end{cases} \tag{5}$$

6.1 二次共轭函数

已知

$$f^*(y) = \sup_{x \in domf} \{y^T x - f(x)\}$$

，那么二次共轭函数就是

$$f^{**}(x) = \sup_{y \in domf^*} \{x^T y - f^*(y)\}$$

这个二次共轭函数一定是个凸函数，并且有 $f^{**}(x) \leq f(x)$ 或者等价的说 $epif \subseteq epif^{*}*$，等号在原函数是凸的时候成立。

7 次梯度

7.1 次梯度的定义

设 f 为适当凸函数，x 为定义域 $domf$ 中的一点，若向量 $g \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$f(y) \geq f(X) + g^T(y - x), \forall y \in domf$$

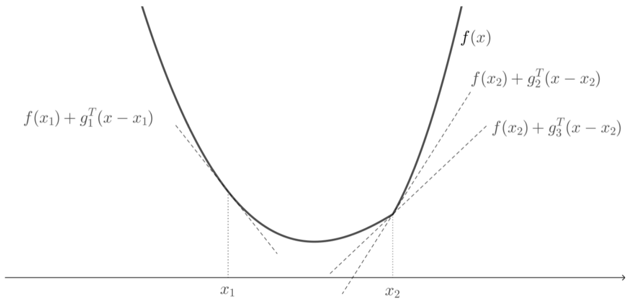


图 5: f(x) 的次梯度

那么 g 就是在函数 f 处的一个次梯度。进一步的，称集合

$$\partial f(x)=\{g|g\in\mathbb{R}^n, f(y)\geq f(x)+g^T(y-x),\ \forall y\in domf\}$$

为 f 在 x 处的次微分。也可以在图 5 中看到，部分点是有一个次梯度，部分点是有多个。从次梯度的定义中也可以得出，如果 g 是 f 在 x_0 处的次梯度，那么函数

$$l(x)=f(x_0)+g^T(x-x_0)$$

为凸函数 $f(x)$ 的一个全局下界。同时也可以推导处上方图在这个点的支撑超平面。

次梯度的存在性。f 为适当凸函数，如果点 x_0 是定义域的内点（也就是 $x_0\in \mathrm{intdom}f$），那么就存在次梯度。

次微分的计算。以 $f(x)=||x||_2$ 为例，求在 $x=0$ 处的次微分。根据定义得到 $f(y)-0\geq g^T(y-0)$，也就是 $||y||_2\geq g^T(y)$ 因此 $||g||_2\leq 1$ 就是次微分。再带入 $||g||_2\geq 1$ 发现不符合，求解结束。

7.2 次梯度的性质

定理：设 f 是凸函数，那么 $\partial f(x)$ 就有以下性质。

1. 对于任何 $x\in domf$，那么 $\partial f(x)$ 就是一个闭凸集。如果 $x\in intdomf$，那么 $\partial f(x)$ 就说非空的有界集。

2. 如果 $f(x)$ 在 $x_0\in intdomf$ 处可微，那么次梯度就是梯度，$\partial f(x)=\bigtriangledown f(X)$。

3. 次梯度的单调性。设 $f:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$，且 $(u-v)^T(x-y)\geq 0$，其中 $u\in\partial f(x), v\in\partial f(y)$

4. 某种程度上的连续性。如果，$x^k\Rightarrow\overline{x}$ 且 $g^k\Rightarrow\overline{g}, g^k\in\partial f(x^k)$ 那么就会有 $\overline{g}\in\partial f(\overline{x})$ 这个相当于要求了 g^k 是闭集，也等价于 $\partial f(x)$ 的图像 $(x,g)|g\in\partial f(x), x\in domf$ 是闭集。

7.3 凸函数的方向导数

设 f 为适当函数，给定点 x_0 以及方向 $d \in \mathbb{R}^n$，方向导数定义为

$$\lim_{t \downarrow 0} \phi(t) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t}$$

这和之前计算矩阵的梯度十分相似啊。$t \downarrow 0$ 表示 t 单调下降趋于 0。凸函数是一个单调不减的函数，所以 lim 也可以换成下确界 inf。那么，方向导数的定义还可以更新为

$$\partial f(x_0; d) = \inf_{t > 0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t}$$

命题：只要 $f(x)$ 是凸函数，且 $x_0 \in intdomf$，则对任意 $d \in \mathbb{R}^n$，梯度 $\partial f(x_0; d)$ 是有限的。并且 $\partial f(x_0; d) = \max\limits_{g \in \partial f(x_0)} g^T d$，$\partial f(x_0; d) = \sup\limits_{g \in \partial f(x_0)} g^T d$。

7.4 次梯度计算规则

可微凸函数，次梯度就是梯度。凸函数的非负线性组合，次微分也是相应组合。比如 $f = a_1 f_1 + a_2 f_2$，那么 $\partial f = a_1 \partial f_1 + a_2 \partial f_2$（仅指内部的点）。线性变量的替换，比如 $f(x) = h(Ax + b)$，那么次微分之间的关系就是 $\partial f(x) = A^T \partial h(Ax + b), \forall x \in intdomf$。

函数族的上确界。比如说 $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)\}$，那么对应的梯度就是 $\partial f(x_0) = conv \partial \cup_{i \in I(x_0)} f_i(x_0)$ 其实就是各个点的次微分的组合。举个例子，那么在 $x = x_0$

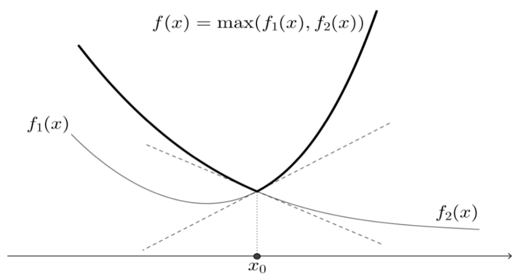


图 6: 两个函数的最大值

处，$\partial f(x) = \{v | v = t \bigtriangledown f_1(x) + (1 - t) \bigtriangledown f_2(x)\}$，对于 $x < x_0, \partial f(x) = \{\bigtriangledown f_2(x)\}$，对于 $x > x_0, \partial f(x) = \{\bigtriangledown f_2(x)\}$

看到 72 页，到后面 75 页以后再来看。