Dérivation Terminale S

Rappels et Exercices

1 Rappels

1.1 Théorie :

Définition On dit qu'une fonction f sur $\mathbb{R}$ est dérivable en un point x_0 si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ existe. On nomme alors ce nombre } f'(x_0) \tag{1}$$

ou (ce qui est équivalent)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

Ce que l'on note f' est la fonction dérivée de f, c'est-à-dire la fonction qui en tout point dérivable de f renvoit le nombre dérivée de f en ce point.
Souvenez vous de la définition car elle permet de prouver certaines limites ($\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ par exemple, essayez !) ou de comprendre la relation entre la dérivée d'une fonction en un point et le coefficient de la tangente en ce point.

Remarque

Vous verrez peut-être la forme $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ en physique (où f sera a, v, x, etc...). Elle est **équivalente** dans le cas ou f est une fonction à une variable. Dans les autres cas elle permet simplement de dire la variable de dérivation ($\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}(x,y,z)}{\mathrm{d}x}$ par exemple).

1.2 Quelques résultats :

Théorème Soient f une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$ et $[a, b] \subset \mathbb{R}$
Si $f'(x) > 0$ sur $[a, b]$ alors f est croissante sur $[a, b]$.
Si $f'(x) < 0$ sur $[a, b]$ alors f est décroissante sur $[a, b]$.
Si $f'(x) = 0$ sur $[a, b]$ alors f est constante sur $[a, b]$

Proposition Pour f une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$.
Si $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f'(x_0) = 0$ alors x_0 est un extrema de f (c'est-à-dire que c'est un maximum ou un extremum).

C'est avec ces résultats que l'on peut tracer des tableaux de variations.

1.3 Formules :

Formules à connaître impérativement ! Elles sont au nombre de 4 :
Soient u et v deux fonctions dérivables et $x, n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\text{addition} && (u(x)+v(x))' = u' + v' && (2)\\
&\text{produit} && (u(x) \times v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) && (3)\\
&\text{composition} && (u(v(x)))' = u'(v(x)) \times v'(x) && (4)\\
&\text{exposant } (n \in \mathbb{R}\,!) && (x^n)' = n \times x^{n-1} && (5)
\end{aligned}$$

Avec ces formules, vous pouvez retrouver toutes les autres !

Exemple On va retrouver la formule de $\frac{1}{f(x)}$ avec seulement (4) et (5) :
Commençons par trouver la dérivée de $\frac{1}{x}$. On sait que $\frac{1}{x} = x^{-1}$ donc d'après (5) on a :

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = (-1) \times x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Il suffit maintenant d'appliquer la formule (4) avec $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = f(x)$. On a

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = u'(v(x)) \times v'(x) = -\frac{1}{f(x)} \times f'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)}$$

On retrouve bien la formule que vous connaissez.

Formules utiles Il est bien utile (bien que non nécessaire, exercice : retrouvez la) de connaître cette formule par coeur.

division

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

équation de la tangente en x_0 :

$$y(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Cette formule qui peut paraître un peu compliquée se retrouve facilement :
On sait que la droite à pour coefficient directeur $f'(x_0)$ donc $y(x)$ est de la forme

$$y(x) = f'(x_0)x + b$$

De plus, on sait que $y(x_0) = f(x_0)$ (tangente en x_0) donc $y(x_0) = f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$ d'où $b = f(x_0) - f(x_0)x_0$. Il suffit après de mettre en facteur.

1.4 Formules inutiles

Ces formules ne servent à rien d'autre qu'à vous encombrer le cerveau, oubliez les dès que possible !

$$\left(\mathrm{e}^{ax+b}\right)' \qquad (\cos(ax+b))' \qquad (\sin(ax+b))' \qquad \left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$((u(x))^n)', n \in \mathbb{N} \qquad (\ln(u(x)))' \qquad \left(\frac{1}{u(x)}\right)' \qquad (\sqrt{x})'$$

Elles sont trop spécialisées et découlent des formules de la section 1.5 et des formules de calculs précédentes.

1.5 dérivées classiques :

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (\sin x)' = \cos x \qquad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Remarque 1 vous trouvez peut-être qu'il manque quelques fonctions à cette section comme $\frac{1}{x}$ ou $\sqrt{x}$. Pourtant celles-ci peuvent (et doivent !) être retrouvées via les relations (2), (3) et (4). Comme toujours en maths, nous recherchons l'effort minimum.
Il est inutile de préciser qu'il est vivement conseillé de faire les calculs par soi-même (pensez que $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (pourquoi ?)).

Remarque 2 Prouvez que, pour a une constante et f une fonction sur $\mathbb{R}$ que

$$(a \times f(x))' = a \times f'(x)$$

une bonne fois pour toute et souvenez-vous-en ! Il est inutile et bien trop lent d'appliquer à chaque fois la formule (2) du produit !

2 Exercices