

Dérivation Terminale S

Rappels et Exercices

1 Rappels

1.1 Théorie :

On dit qu'une fonction f sur \mathbb{R} est dérivable en un point x_0 si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ existe. On nomme alors ce nombre } f'(x_0) \quad (1)$$

ou (ce qui est équivalent)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Ce que l'on note f' est la fonction dérivée de f , c'est-à-dire la fonction qui en tout point dérivable de f renvoie le nombre dérivée de f en ce point.

Souvenez vous de la définition car elle permet de prouver certaines limites ($\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ par exemple, essayez !) ou de comprendre la relation entre la dérivée d'une fonction en un point et le coefficient de la tangente en ce point.

Remarque

Vous verrez peut-être la forme $\frac{df(t)}{dt}$ en physique (où f sera a, v, x , etc. ...). Elle est **équivalente** dans le cas où f est une fonction à une variable. Dans les autres cas elle permet simplement de dire la variable de dérivation ($\frac{d\vec{OM}(x,y,z)}{dx}$ par exemple).

1.2 Formules :

formules à connaître impérativement ! Elles sont au nombre de 4 :

Soient u et v deux fonctions dérivables et $x, n \in \mathbb{R}$

$$\text{addition} \quad (u(x) + v(x))' = u' + v' \quad (2)$$

$$\text{produit} \quad (u(x) \times v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad (3)$$

$$\text{composition} \quad (u(v(x)))' = u'(v(x)) \times v'(x) \quad (4)$$

$$\text{exposant } (n \in \mathbb{R}!) \quad (x^n)' = n \times x^{n-1} \quad (5)$$

Avec ces formules, vous pouvez retrouver toutes les autres !

Exemple On va retrouver la formule de $\frac{1}{f(x)}$ avec seulement (4) et (5) :

Commençons par trouver la dérivée de $\frac{1}{x}$. On sait que $\frac{1}{x} = x^{-1}$ donc d'après (5) on a :

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1) \times x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Il suffit maintenant d'appliquer la formule (4) avec $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = f(x)$. On a

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = u'(v(x)) \times v'(x) = -\frac{1}{f(x)} \times f'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)}$$

On retrouve bien la formule que vous connaissez.

formule utile

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Il est bien utile (bien que non nécessaire) de connaître cette formule par coeur.
Exercice : retrouvez-la avec les formules précédentes.

1.3 dérivées classiques :

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Remarque 1 vous trouvez peut-être qu'il manque quelques fonctions à cette section comme $\frac{1}{x}$ ou \sqrt{x} . Pourtant celles-ci peuvent (et doivent !) être retrouvées via les relations (2), (3) et (4). Comme toujours en maths, nous recherchons l'effort minimum.
Il est inutile de préciser qu'il est vivement conseillé de faire les calculs par soi-même (pensez que $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (pourquoi ?)).

Remarque 2 Prouvez que, pour a une constante et f une fonction sur \mathbb{R} que

$$(a \times f(x))' = a \times f'(x)$$

une bonne fois pour toute et souvenez-vous-en ! Il est inutile et bien trop lent d'appliquer à chaque fois la formule (2) du produit !

2 Exercices