Chapitre 2

Espace de fonctions continues

2.1 Définitions et premières propriétés

Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques. On désigne par

$$\mathcal{B}(X_1, X_2) := \{f \ : \ X_1 \to X_2 \text{ t.q. } f(X_1) \text{ est un borné de } X_2\}$$

et

$$\mathcal{BC}(X_1, X_2) := \{f \in \mathcal{B}(X_1, X_2) \text{ t.q. } f \text{ est continue sur } X_1\}.$$

On munit $\mathcal{B}(X_1, X_2)$ (et donc aussi $\mathcal{BC}(X_1, X_2)$) de la distance (dite distance *uniforme*)

$$d_u(f, g) := \sup_{x \in X_1} d_2(f(x), f(y)).$$

Lorsque cela ne porte pas à confusion, on note simplement d à la place de d_u.

La convergence dans $\mathcal{B}(X_1, X_2)$ ou dans $\mathcal{BC}(X_1, X_2)$ pour d_u est appelée la convergence uniforme. Commençons par la classique

Proposition 2.1. *L'espace $\mathcal{BC}(X_1, X_2)$ est fermé dans $\mathcal{B}(X_1, X_2)$. Autrement dit, toute limite uniforme de fonctions bornées continues est bornée continue.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{BC}(X_1, X_2)$ et $f \in \mathcal{B}(X_1, X_2)$ telles que $d(f_n, f) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Soit $x \in X_1$ et $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dans X_1 tels que $x_m \to x$ lorsque $m \to +\infty$. Montrons que $f(x_m) \to f(x)$ lorsque $m \to +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque $d(f_n, f) \to 0$, il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $d(f_{n(\varepsilon)}, f) < \varepsilon/3$. Puisque $f_{n(\varepsilon)} \in \mathcal{BC}(X_1, X_2)$, il existe $\delta > 0$ tel que si $d_1(x, y) < \delta$ alors $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon/3$. Puisque $x_m \to x$, il existe $m(\delta) \in \mathbb{N}$ tel que $d_1(x_m, x) < \delta$ quel que soit $m \geq m(\delta)$. Dès lors, pour tout $m \geq m(\delta)$ on a

$$\begin{aligned} & d_2(f(x), f(x_m)) \\ \leq \ & d_2(f(x), f_{n(\varepsilon)}(x)) + d_2(f_{n(\varepsilon)}(x), f_{n(\varepsilon)}(x_m)) + d_2(f_{n(\varepsilon)}(x_m), f(x_m)) \\ < \ & \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration. $\square$

2.2 Complétude

La complétude de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{BC}$ ne dépend que de celle de l'espace d'arrivée.

Théorème 2.2. *Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques. Si (X_2, d_2) est complet alors il en va de même pour $\mathcal{B}(X_1, X_2)$ et $\mathcal{BC}(X_1, X_2)$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que puisque $\mathcal{BC}$ est fermé dans $\mathcal{B}$, il suffit de démontrer la complétude de $\mathcal{B}(X_1, X_2)$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}(X_1, X_2)$. Pour chaque $x_1 \in X_1$, puisque pour $n, m \in \mathbb{N}$ on a

$$d_2(f_n(x_1), f_m(x_1)) \leq \sup_{x\in X_1} d_2(f_n(x), f_m(x)),$$

il s'ensuit que la suite $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (X_2, d_2). Par complétude, cette dernière possède une limite dans X_2 que nous appelons $f(x_1)$. Il nous reste à démontrer que la fonction f ainsi définie sur X_1 appartient à $\mathcal{B}(X_1, X_2)$ et que $f_n \to f$ lorsque $n \to +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, n' \geq n(\varepsilon)$, $d(f_n, f_{n'}) < \varepsilon$. Par passage à la mimite lorsque $n' \to +\infty$, on obtient ainsi que

$$\forall n \geq n(\varepsilon),\ \forall x \in X_1,\ d_2(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon. \tag{2.2.1}$$

Puisque $f_{n(\varepsilon)} \in \mathcal{B}(X_1, X_2)$, il existe $x_2 \in X_2$ et $r > 0$ tel que $f_{n(\varepsilon)}(X_1) \subseteq B(x_2, r)$. On en déduit que

$$f(X_1) \subseteq B(x_2, r + \varepsilon)$$

et donc que $f \in \mathcal{B}(X_1, X_2)$. Comme $\varepsilon > 0$ était quelconque, (2.2.1) indique alors que $f_n \to f$. □

La convergence uniforme implique bien évidemment la convergence simple (i.e. ponctuelle). La réciproque n'est pas vraie, sauf dans quelques cas particuliers dont un est le

Théorème 2.3 (Dini)**.** *Soit (X, d) un espace métrique compact et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{BC}(X, \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante et minorée.*

Alors, si la fonction f définie sur X_1 par

$$f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \inf_{n\geq 0} f_n(x)),\ \forall x \in X_1$$

est continue, nécessairement

$$f_n \to f \quad \text{dans} \quad \mathcal{BC}(X, \mathbb{R}).$$

Démonstration. Quitte à remplacer f_n par $f_n - f$, on peut supposer sans perte de généralité que f est la fonction identiquement nulle. Par le Lemme 1.27 du chapitre précédent, chaque f_n atteint sa valeur maximale, disons α_n, en au moins un point, disons $x_n \in X$. Par compacité, il existe $x_* \in X$ et une sous-suite

$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $x_{n_k} \to x_*$ lorsque $k \to +\infty$. Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, on obtient par monotonie

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}\left(\max_{x\in X} f_{n_k}(x)\right) &= \lim_{k\to+\infty} f_{n_k}(x_{n_k}) \\ &\leq \lim_{k\to+\infty} f_m(x_{n_k}) = f_m(x_*).\end{aligned}$$

Ainsi, toujours par monotonie et puisque m était quelconque,

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\max_{x\in X} f_{n_k}(x)\right) \leq \lim_{m\to+\infty} f_m(x_*) = f(x_*) = 0.$$

La conclusion suit. □

Remarque 2.4. *Lorsque X_1 est compact, toute fonction $f : X_1 \to X_2$ continue est nécessairement bornée. Dans ce cas, on abrège la notation $\mathcal{BC}(X_1, X_2)$ par $\mathcal{C}(X_1, X_2)$.*

2.3 Compacité

Le critère le plus important de compacité dans $\mathcal{C}(X_1, X_2)$ est le

Théorème 2.5 (Ascoli). *Soit (X_1, d_1) un espace métrique compact et (X_2, d_2) un espace métrique complet. Soit A un sous-ensemble de $\mathcal{C}(X_1, X_2)$ tel que*

(i) A est une famille uniformément équi-continue :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall f \in A,\ \forall x, x' \in X_1,\ d_1(x, x') < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x')) < \varepsilon,$$

(ii) quel que soit $x \in X_1$, l'ensemble $\{f(x)\}_{f\in A}$ est d'adhérence compacte dans X_2.

Alors A est d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}(X_1, X_2)$.

Démonstration. Puisque X_2 est supposé complet, il en est de même pour $\mathcal{C}(X_1, X_2)$, et donc aussi pour $\bar{A}$. En vertu du Théorème 1.29, il suffit donc de démontrer que $\bar{A}$ est totalement borné. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Tentons de recouvrir A par un nombre fini de boules (dans $\mathcal{C}(X_1, X_2)$) de rayon au plus égal à 4ε. Pour cet ε, soit $\delta > 0$ nous étant fourni par la condition d'uniforme équi-continuité. Puisque X_1 est supposé compact, donc totalement borné, il existe $y_1, \cdots, y_m \in X_1$ tels que

$$X_1 = \cup_{k=1}^m B(y_k, \delta).$$

Pour chaque $k = 1, \cdots, m$, l'ensemble $\{f(y_k)\}_{f\in A}$ est d'adhérence compacte dans X_2. Il existe donc $z_{k,1}, \cdots, z_{k,l(k)}$ tels que

$$\{f(y_k)\}_{f\in A} \subseteq \cup_{j=1}^l (k) B(z_{k,j}, \varepsilon).$$

Soit $E_1 := \{1, \cdots, m\}$, $E_2 := \{(i, j),\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq l(i)\}$ et notons Γ l'ensemble de toutes les fonctions définies sur E_1 et à valeurs dans E_2. Notons que $\sharp\Gamma < +\infty$.

Pour chaque $\gamma \in \Gamma$, on définit

$$A_\gamma := \{f \in A \text{ t.q. } d_2(f(y_k), z_{\gamma(k)}) < \varepsilon,\ \forall k = 1, \cdots, m\}.$$

Par construction,
$$A = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma.$$
Soit $\gamma \in \Gamma$ fixé et $f, f' \in A_\delta$. Soit $x \in X_1$ fixé et $k \in \{1, \cdots, m\}$ tel que $x \in B(y_k, \delta)$. On a
$$\begin{aligned} d_2(f(x), f'(x)) &\leq d_2(f(x), f(y_k)) + d_2(f(y_k), z_{\gamma(k)}) \\ &\quad + d_2(z_{\gamma(k)}, f'(y_k)) + d_2(f'(y_k), f'(x)) \\ &< 4\varepsilon. \end{aligned}$$
Comme x était quelconque, on déduit que
$$A_\gamma \subseteq B(f_\gamma, 4\varepsilon) \quad \text{pour un certain } f_\gamma \in A_\gamma$$
et dès lors
$$A \subseteq \cup_{\gamma\in\Gamma} B(f_\gamma, 4\varepsilon)$$
ce qui termine la démonstration. □

Exercice 2.1. Montrer que l'énoncé du théorème précédent ne nécessite pas la complétude de l'espace X_2. On pourra par exemple se ramener au cas étudié en considérant le *complété* de X_2.

2.4 Séparabilité

Le but principal de cette section est de démontrer le

Théorème 2.6 (Stone Weierstrass)**.** *Soit (X, d) un espace métrique compact et A une sous-algèbre de l'espace $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ telle que*

(i) A contient les fonctions constantes,

(ii) A sépare les points de X, au sens où
$$\forall\, x \neq y \in X,\ \exists f \in A,\ f(x) \neq f(y).$$
Alors A est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Nous commençons par démontrer le

Lemme 2.7. *Il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes d'une variable à coefficients réels qui converge uniformément sur l'intervalle $[0, 1]$ vers la fonction racine carrée.*

Démonstration. On définit $P_0(x) \equiv 0$ et ensuite la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence via la formule
$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n^2(x)\right).$$
Si pour $k \in \mathbb{N}$ on a $P_k(x) \leq \sqrt{x},\ \forall x \in [0, 1]$, alors on a aussi
$$\begin{aligned} P_{k+1}^2(x) &= \left(P_k(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_k^2(x)\right)\right)^2 \\ &= \left(P_k(x) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} - P_k(x)\right)\left(\sqrt{x} + P_k(x)\right)\right)^2 \\ &\leq \left(P_k(x) + (\sqrt{x} - P_k(x))\right)^2 \\ &\leq x, \end{aligned}$$

puisque $\sqrt{x} + P_k(x) \leq 2\sqrt{x} \leq 2$ pour $x \in [0,1]$. On en déduit que $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$, $\forall x \in [0,1]$, et $\forall n \in \mathbb{N}$. Dès lors $P_{n+1} \geq P_n$, et la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc monotone croissante. Par ailleurs elle converge simplement vers la fonction racine carrée sur $[0,1]$. Il suit du Théorème de Dini 2.3 que la convergence est uniforme sur $[0,1]$. □

Corollaire 2.8. *Sous les hypothèses du Théorème 2.6, si f et g appartiennent à $\bar{A}$ alors il en va de même pour* $\max(f,g)$ *et* $\min(f,g)$.

Démonstration. Par continuité de la somme et du produit, remarquons d'abord que si A est une algèbre, alors $\bar{A}$ l'est également. D'autre part,

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}\left(f + g + |f-g|\right) \quad \text{et} \quad \min(f,g) = \frac{1}{2}\left(f + g - |f-g|\right).$$

Finalement, au sens de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$,

$$|f-g| = \lim_{n\to+\infty} P_n\left(\frac{(f-g)^2}{\|f-g\|_\infty^2}\right)\cdot\|f-g\|_\infty^2,$$

de sorte que $|f-g| \in \bar{A}$. La conclusion suit. □

Démonstration du Théorème 2.6. Etape 1. Pour tous $y \neq z \in X$ et $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, il existe $f \in \bar{A}$ tel que $f(y) = \alpha$ et $f(z) = \beta$. En effet, si $\alpha = \beta$ il suffit de choisir la fonction constante correspondante, et sinon il existe par hypothèse une fonction $g \in A$ telle que $g(y) \neq g(z)$. Dès lors, la fonction f définie par

$$f(x) := \alpha + \frac{\beta-\alpha}{g(z)-g(y)}\left(g(x)-g(y)\right)$$

appartient à A et vérifie $f(y) = \alpha$ et $f(z) = \beta$.
Etape 2. Soit $h \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Quel que soit $x \in X$ il existe $f^x \in \bar{A}$ telle que

$$f^x(x) = h(x) \quad \text{et} \quad f^x(y) < h(y) + \varepsilon,\ \forall y \in X.$$

En effet, x étant fixé, pour chaque $y \in X$ il existe $f_y \in \bar{A}$ tel que $f_y(x) = h(x)$ et $f_y(y) = h(y)$. Par continuité de f_y, il existe $r(y) > 0$ tel que

$$\forall z \in B(y, r(y)),\ f_y(z) < h(z) + \varepsilon.$$

Du recouvrement $\{B(y,r(y))\}_{y\in X}$ de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini $\{B(y_i, r(y_i))\}_{i=1,\cdots,l}$. La fonction

$$f^x := \min_{i\in\{1,\cdots,l\}} f_{y_i}$$

appartient à $\bar{A}$ (en vertu du Corollaire 2.8) et vérifie les conditions requises.
Etape 3. Soit $h \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $f \in \bar{A}$ telle que

$$h(y) - \varepsilon < f(y) < h(y) + \varepsilon,\ \forall y \in X.$$

En effet, pour chaque $x \in X$ il existe $r'(x) > 0$ tel que

$$\forall y \in B(x, r'(x)),\ f^x(y) > h(y) - \varepsilon.$$

Du recouvrement $\{B(x, r'(x)\}_{x \in X}$ de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini $\{B(x_j, r'(x_j))\}_{j=1,\cdots,m}$. La fonction

$$f := \max_{j \in \{1,\cdots,m\}} f^{x_j}$$

appartient à $\bar{A}$ et vérifie les conditions requises.
Conclusion. Il suit de l'étape 3 que $\bar{A} = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, ce qui termine la démonstration. □

Corollaire 2.9. *Soit F un fermé borné de $\mathbb{R}^N$. Toute fonction continue $f \in \mathcal{C}(F, \mathbb{R})$ peut être approchée au sens de la convergence uniforme sur F par une suite de polynômes à N variables.*

Démonstration. L'algèbre des polynômes à coefficients réels contient les constantes et est clairement séparante dans $\mathcal{C}(F, \mathbb{R})$. □

Corollaire 2.10. *Soit F un fermé borné de $\mathbb{R}^N$. Alors $\mathcal{C}(F, \mathbb{R})$ est séparable.*

Démonstration. L'ensemble des polynômes à coefficients rationnels à N variables est dénombrable. La conclusion suit du corollaire précédent et d'un argument direct d'approximation d'un polynôme à coefficients réels par un polynôme à coefficients rationnels. □

Corollaire 2.11. *Si (X, d) est un espace métrique compact, alors $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ est séparable.*

Démonstration. Comme X est compact, il est séparable, nous notons $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dénombrable et dense dans X. Notons également par $\mathbb{R}[(y_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ l'ensemble des polynômes à une infinité dénombrable de variables $y_0, y_1, \cdots$. Finalement, définissons

$$A := \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}),\ \exists P \in \mathbb{R}[(y_n)_{n \in \mathbb{N}}],\ f(x) = P(d(x_0, x), d(x_1, x), \cdots)\}.$$

On vérifie sans peine que A est une sous-algèbre séparante de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ qui contient les constantes. Par conséquent, $\bar{A} = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ en vertu du Théorème de Stone Weiertrass. L'ensemble

$$B := \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}),\ \exists P \in \mathbb{Q}[(y_n)_{n \in \mathbb{N}}],\ f(x) = P(d(x_0, x), d(x_1, x), \cdots)\}$$

est dénombrable et dense dans A. La conclusion suit. □