Chapitre 1

Éléments de Topologie

1.1 Rappel de quelques définitions

Définition 1.1. Etant donné un ensemble Ω et un sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ [l'ensemle de tous les sous-ensembles de Ω], on dit que $\mathcal{T}$ définit une *topologie* sur Ω si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\emptyset \in \mathcal{T} \quad \text{et} \quad \Omega \in \mathcal{T}$,

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \mathcal{O}_1, \cdots, \mathcal{O}_n \in \mathcal{T}, \quad \cap_{i=1}^n \mathcal{O}_i \in \mathcal{T}$,

(iii) $\forall \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I} \quad \text{avec} \quad \mathcal{O}_i \in \mathcal{T} \ \forall i \in I, \quad \cup_{i=1}^n \mathcal{O}_i \in \mathcal{T}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé un *espace topologique*. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les *ouverts* de la topologie. Un sous-ensemble $F \in \mathcal{P}(\Omega)$ est dit *fermé* si et seulement si son complémentaire dans Ω est ouvert.

Définition 1.2. Etant donnée une partie A d'un espace topologique $(\Omega, \mathcal{T})$, on dit que

(i) $x \in A$ est intérieur à A s'il existe un ouvert non vide de $\mathcal{T}$ qui contient x et qui est entièrement contenu dans A. On dit alors que A est un *voisinnage* de x.

(ii) $x \in \Omega$ est adhérent à A si tout ouvert de $\mathcal{T}$ contenant x possède une intersection non vide avec A.

On note $\mathring{A}$ (resp. $\bar{A}$) l'ensemble des points intérieurs (resp. adhérents) à A. Clairement,

$$\mathring{A} \subseteq A \subseteq \bar{A}.$$

Définition 1.3. On dit que A est *dense* dans Ω pour la topologie $\mathcal{T}$ si $\bar{A} = \Omega$.

Définition 1.4. (Convergence des suites) On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de Ω est convergente (pour la topologie $\mathcal{T}$) s'il existe $x \in \Omega$ vérifiant

$$\forall \mathcal{O} \in \mathcal{T} \text{ t.q. } x \in \mathcal{O}, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq n_0, \ x_n \in \mathcal{O}.$$

Autrement dit, tel que tout ouvert de $\mathcal{T}$ contenant x contienne tous les éléments de la suite à partir d'un certain rang. On dit alors que x est une limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et aussi que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x. On le note $x_n \to x$.

Exercice 1.1. Dans un espace topologique, une suite peut-elle posséder plusieurs limites différentes ?

Définition 1.5. On dit qu'un espace topologique $(\Omega, \mathcal{T})$ est séparé si quels que soient $x_1 \neq x_2 \in \Omega$, il existe $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}$ disjoints tels que $x_1 \in \mathcal{O}_1$ et $x_2 \in \mathcal{O}_2$.

Exercice 1.2. Reprendre l'exercice précédent dans le cadre d'un espace topologique séparé.

La connaissance de la topologie induit donc la connaissance des suites convergentes. La réciproque n'est pas vraie en général, et Fréchet a introduit la notion de *filtre*, qui généralise celle de suite, et qui permet de remédier à ce fait. Nous n'en ferons pas usage ici. Il en va différemment pour les espaces métriques, qui sont des cas particuliers d'espaces topologiques, et que nous abordons maintenant.

1.2 Espaces métriques

Définition 1.6. Etant donné un ensemble Ω et une application $d : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^+$, on dit que d définit une *distance* sur Ω si

(i) $\forall x, y \in \Omega,\ d(x, y) = 0$ ssi $x = y$

(ii) $\forall x, y \in \Omega,\ d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $\forall x, y, z \in \Omega,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Le couple (Ω, d) est appelé un *espace métrique*.

Etant donné $x \in \Omega$ et $r > 0$, on note

$$B(x, r) := \{y \in \Omega \text{ t.q. } d(x, y) < r\}$$

la *boule ouverte* de centre x et de rayon r.

De même,

$$B[x, r] := \{y \in \Omega \text{ t.q. } d(x, y) \leq r\}$$

désigne la *boule fermée* de centre x et de rayon r.

Définition 1.7. Etant donné un espace métrique (Ω, d), ont dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{O}$ de Ω est ouvert si et seulement si

$$\forall x \in \mathcal{O}, \exists r > 0 \text{ t.q. } B(x, r) \subseteq \mathcal{O}.$$

Exercice 1.3. Montrer que l'ensemble des ouverts ainsi définis constitue une topologie (au sens de la section précédente) sur Ω. L'espace topologique ainsi obtenu est-il nécessairement séparé ?

Exercice 1.4. Est-il vrai que dans un espace métrique, la boule fermée $B[x, r]$ est égale à l'adhérence de la boule ouverte $B(x, r)$? Démontrer ou exhiber un contre-exemple.

Définition 1.8. Un sous-ensemble de Ω est dit borné s'il est contenu dans au moins une boule ouverte.

Lemme 1.9. *Soit* (Ω, d) *un espace mérrique et* $\mathcal{T}$ *la topologie induite par* d *sur* Ω.

(i) Une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* Ω *converge vers* $x \in \Omega$ *pour* $\mathcal{T}$ *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0\ d(x_n, x) < \varepsilon.$$

(ii) Un sous-ensemble F *de* Ω *est fermé si et seulement si toute suite convergente et entièrement contenue dans* F *possède sa limite dans* F.

(iii) Un point $x \in \Omega$ *est adhérent à* $A \subseteq \Omega$ *si et seulement si il existe une suite contenue dans* A *et convergeant vers* x.

Exercice 1.5. Fournir une démonstration du lemme précédent.

1.3 Notion de Continuité

Définition 1.10. Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques et $f\ :\ \Omega_1 \to \Omega_2$ une application. On dit que f est continue au point $x_1 \in \Omega_1$ si l'image réciproque par f de tout voisinnage de $f(x_1)$ est un voisinage de x_1. On dit que f est continue sur un sous-ensemble A de Ω_1 si f est continue en chacun des points de A.

Lemme 1.11. *Si* $\mathcal{T}_1$ *et* $\mathcal{T}_2$ *sont induites toutes les deux par des métriques* d_1 *et* d_2, *alors la continuité de* f *en* x_1 *est équivalente à chacune des propriétés suivantes :*

(i)

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ d_1(x_1, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x_1), f(y)) < \varepsilon$$

(ii) quelle que soit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergeant dans* Ω_1 *vers* x_1, *la suite* $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* Ω_2 *vers* $f(x_2)$.

Exercice 1.6. Fournir une démonstration du lemme précedent.

Définition 1.12. Soient (Ω_1, d_1) et (Ω_2, d_2) deux espaces métriques, $f\ :\ \Omega_1 \to \Omega_2$ et $A \subseteq \Omega_1$. On dit que f est *uniformément continue* sur A si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in A,\ d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

La différence avec la continuité simple se trouve bien sûr dans l'odre des quantificatuers. L'uniforme continuité sur une partie implique la continuité simple sur cette partie ; la réciproque est fausse en général, hormis si cette partie est compacte (voir Section 1.6).

1.4 Espaces normés

Définition 1.13. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\|\cdot\|\ :\ X \to \mathbb{R}^+$. On dit que $\|\cdot\|$ est une *norme* sur X si

(i) $\forall u \in X,\ \|u\| = 0$ si et seulement si $u = 0$,

(ii) $\forall u \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$,

(iii) $\forall u, v \in X,\ \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Un espace vectoriel muni d'un norme est appelé un espace vectoriel normé.

Exercice 1.7. Montrer que si $(X, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, l'application

$$d\ :\ X \times X \to \mathbb{R}^+,\ (u,v) \mapsto \|u-v\|$$

définit une distance sur X.

Les propriétés topologiques dans un espace vectoriel normé sont entendues, sauf mention contraire, pour la topologie induite par la distance evoquée à l'exercice précédent.

1.5 Notion de Complétude

La complétude joue un rôle fondamental en analyse fonctionnelle ; historiquement elle a guidé de nombreuses constructions.

Définition 1.14. Soit (Ω, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans Ω est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n, n' \geq n_0,\ d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon.$$

On remarque qu'à la différence de celle de suite convergente, la notion de suite de Cauchy ne fait pas intervenir de limite éventuelle dans sa définition.

Définition 1.15. Un espace métrique (Ω, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans Ω est convergente.

La complétude de la grande majorité des espaces que nous aborderons plus loin repose sur celle de $\mathbb{R}$, muni de sa métrique usuelle. Rappelons d'abord la propriété d'existence de bornes.

Propriété 1.16. *Tout sous-ensemble majoré (resp. minoré) et non-vide de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure (resp. inférieure).*

Théorème 1.17. *L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de sa métrique usuelle est complet.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Pour le choix $\varepsilon = 1$, on obtient par définition un entier n_0 pour lequel en particulier, quel que soit $n \geq n_0$, $d(x_{n_0}, x_n) < 1$. On déduit dès lors que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, par la Propriété 1.16 on peut donc considérer la borne inférieure α_k et la borne supérieure β_k de l'ensemble $\{x_n\}_{n\geq k}$. Par construction, la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante (et bornée supérieurement par β_0) et la suite $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante (et bornée inférieurement par α_0). Toujours par la Propriété 1.16, on peut considérer la borne supérieure α^* de l'ensemble $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ et la borne inférieure β_* de l'ensemble $\{\beta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. En utlisant la définition de suite de Cauchy, on montre alors facilement que $\alpha^* = \beta_*$ et que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha^* = \beta_*$. □

Exercice 1.8. Rédiger la fin de la démonstration du Théorème 1.17

Nous allons d'ores et déjà démontrer trois résultats faisant intervenir de manière essentielle la notion de complétude. Nous en verrons bien d'autres lorsque l'algèbre se joindra à la topologie.

Théorème 1.18 (Point fixe de Banach - Picard)**.** *Soit (Ω, d) un espace métrique complet et $f : \Omega \to \Omega$ une contraction stricte, c'est-à-dire qu'il existe $\theta \in]0,1[$ pour lequel*

$$\forall x, y \in \Omega, d(f(x), f(y)) \leq \theta d(x, y).$$

Alors, il existe un unique $x^* \in \Omega$ tel que $f(x^*) = x^*$. De plus, quel que soit $x_0 \in \Omega$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{k+1} = f(x_k)$ $(k \geq 0)$ converge vers x^*.

Démonstration. On a, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \theta d(x_n, x_{n-1})$$

de sorte que, de proche en proche,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \theta^n d(x_1, x_0).$$

Ainsi, pour $n' > n$,

$$\begin{aligned} d(x_{n'}, x_n) &\leq \sum_{k=1}^{n'-n} d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) \\ &\leq d(x_1, x_0) \sum_{k=1}^{n'-n} \theta^{n+k-1} \\ &\leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Il en découle que la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, et par complétude converge donc vers un certain $x \in \Omega$. Par continuité de f, on obtient

$$f(x) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = x.$$

Ainsi, x est un point fixe de f. Par ailleurs, si x et x' étaient deux points fixes de f, alors

$$d(x', x) = d(f(x), f(x')) \leq \theta d(x, x')$$

de sorte que $d(x', x) = 0$ et donc $x = x'$. Le point x est l'unique point fixe de f sur Ω, on le note $x*$. □

Le théorème du point fixe de Banach - Picard est un outil très utilisé pour démontrer l'existence de solutions pour les problèmes de Cauchy associés à des équations différentielles ordinaires (EDO) ou même à des équations aux dérivées partielles (EDP).

Exemple 1.1. (Résolution d'EDO) On désigne par l'inconnue $y(t)$ la trajectoire en fonction du temps d'un petit bateau en perdition. On suppose connues sa position initiale $y_0 \in \mathbb{R}^2$ ainsi que la vitesse des vents $v(x, t) \in \mathbb{R}^2$, fontion régulière de la position et du temps. On fait l'hypothèse (très peu réaliste !) que la vitesse du bateau à tout moment est égale à celle du vent à l'endroit de la position du bateau. On traduit ce problème en l'équation différentielle ordinaire avec donnée initiale (problème de Cauchy)

$$y'(t) = v(y(t), t) \tag{1.5.1}$$

$$y(0) = y_0. \tag{1.5.2}$$

Une solution de (1.5.1), si elle existe, vérifie nécessairement

$$y(t) = y(0) + \int_0^t y'(s)ds = y_0 + \int_0^t v(y(s), s)ds, \tag{1.5.3}$$

quel que soit $t > 0$ fixé. Inversement, une trajectoire vérifiant

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v(y(s), s)ds$$

quel que soit $t \in [0, T]$ est solution de (1.5.1) sur $[0, T]$.

Soit $T > 0$ fixé. Appelons f_T l'application qui à une trajectoire $z(t)$ définie sur $[0, T]$ associe la trajectoire

$$\begin{aligned} &f_T(z) : [0, T] \to \mathbb{R}^2 \\ &f_T(z)(t) := y_0 + \int_0^t v(z(s), s)ds \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Pour résoudre (1.5.1) sur $[0, T]$, il suffit donc de trouver un point fixe de f_T. Dans le but d'appliquer le théorème du point fixe de Banach - Picard, il nous faut déterminer un espace complet X (celui qui contiendra les fonctions trajectoires), t.q. $f_T : X \to X$ et t.q. f_T soit une construction stricte dans X. Une fois ce problème résolu, la suite des trajectoires itérées définies par

$$\begin{aligned} y_0(t) &:= y_0 \quad \forall t \in [0, T] \\ y_1(t) &:= f_T(y^0)(t) = y_0 + \int_0^t v(y_0, s)ds \\ y_2(t) &:= f_T(y_1)(t) = y_0 + \int_0^t v(y_1(s), s)ds \\ &= y_0 + \int_0^t v(y_0 + \int_0^s v(y_0, z)dz, s)ds, \end{aligned}$$

et ainsi de suite, est telle que $(y_n)_{n \geq 0}$ converge dans X vers l'unique point fixe de f_T, et donc vers l'unique solution de (1.5.1) sur $[0, T]$. Un choix naturel pour X est fourni par $X = \mathcal{BC}([0, T], \mathbb{R}^2)$. On verra dans le Chapitre 2 que cet espace est complet lorsque muni de la métrique $d(y, z) = \sup |y(t) - z(t)|, \ t \in [0, T]$. Le caractère contractant de f_T contraint le choix de T :

$$\begin{aligned} d(f_T(y), f_T(z)) &= \sup_{t \in [0,T]} |f_T(y)(t) - f_T(z)(t)| \\ &= \sup_{t \in [0,T]} |y_0 + \int_0^t v(y(s), s)ds - y_0 - \int_0^t v(z(s), s)ds| \\ &= \sup_{t \in [0,T]} | \int_0^t v(y(s), s) - v(z(s), s)ds|. \end{aligned}$$

Une hypothèse commode de régularité du champs de vitesse v est qu'il soit globalement borné et lipschitzien, i.e.

$$\exists c > 0 \text{ t.q. } \begin{cases} |v(x,t)| \leq c & \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R} \\ |v(x,t) - v(x',t)| \leq c|x - x'| & \forall x, x' \in \mathbb{R}^2 \ \forall t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dans ce cas, on a

$$\sup_{t\in[0,t]} \left| \int_0^t (v(y(s),s) - v(z(s),s))ds \right| \leq \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t c|y(s) - z(s)|ds \leq cTd(y,z).$$

Pour que f_T soit une contraction stricte, on choisit donc par exemple T tel que $cT = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $T = \frac{1}{2c}$. Ayant construit la solution sur $[0,T]$, on peut ensuite réitérer la procédure en repartant de T, et de proche en proche reconstruire toute la trajectoire pour $t \geq 0$.

Théorème 1.19 (Baire, 1905)**.** *Dans un espace métrique complet, toute intersection dénombrable d'ouverts dense est dense.*

Par contraposition, on déduit bien sûr que dans un espace métrique complet, tout union dénombre de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Démonstration. Soit $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses. Il s'agit de montrer que $\cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_n$ est une partie dense. Pour cela, il suffit de montrer que quelle que soit la boule ouverte B de X (nous noterons (X,d) l'espace métrique complet considéré),

$$B \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_n) \neq \emptyset.$$

Comme $B \cap \mathcal{O}_0$ est non vide ($\mathcal{O}_0$ étant dense), et ouvert, il existe une boule fermée $B[x_0,r_0] \subset B \cap \mathcal{O}_0$. Par récurrence, on montre ainsi que, quel que soit $n \geq 1$, il existe une boule fermée $B[x_n,r_n]$ incluse dans $B(x_{n-1},r_{n-1}) \cap \mathcal{O}_n$, et qui de plus vérifie la relation $r_n < r_{n-1}/2$. Remarquons que par construction $x_k \in B(x_n,r_n)$, $\forall k \geq n$, et que $r_n < 2^{-n}r_0$. Il s'ensuit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X. Comme X est complet, il existe $x_* \in X$ tel que $x_n \to x_*$. On a alors $x_* \in B[x_n,r_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, et donc $x_* \in B \cap (\cap_{k=0}^n \mathcal{O}_k)$ quel que soit $n \geq 0$. Ceci termine la démonstration. ☐

Théorème 1.20 (Prolongement des fonctions uniformément continues)**.** *Soient (X_1,d_1) et (X_2,d_2) deux espaces métriques, $\Omega \subseteq X_1$ un sous-ensemble, et $f : \Omega \to X_2$. On suppose que*

(i) Ω est dense dans X_1,

(ii) f est uniformément continue sur Ω,

(iii) (X_2,d_2) est complet.

Alors il existe un unique prolongement (uniformément) continu $\tilde{f}$ de f à X_1 tout entier.

Démonstration. Soit $y \in X_1$ quelconque, et soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans Ω convergeant vers y. Puisque $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est de Cauchy. Puisque f est uniformément continue, on déduit que $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (X_2,d_2). Par complétude de ce dernier, il suit que $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente. Notons sa limite f_* pour l'instant. Supposons alors que $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une autre suite, quelconque dans Ω et vérifiant que $y'_n \to y$ lorsque $n \to +\infty$. Alors bien sûr $d_1(y_n, y'_n) \to 0$ lorsque $\to +\infty$, et par uniforme continuité de f on obtient que $d_2(f(y_n), f(y'_n)) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Il s'ensuit que $f(y'_n) \to f_*$ lorsque $n \to +\infty$. Sans ambiguité, nous pouvons dès lors définir $\tilde{f}(y) := f_*$. Comme y a été choisi quelconque, $\tilde{f}$ se trouve ainsi définie sur X_1 tout entier. Montrons maintenant que $\tilde{f}$ est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Par uniforme continuité de f, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall z, z' \in \Omega,\ d_1(z, z') < \delta \Rightarrow d_2(f(z), f(z')) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soient $z, z' \in X_1$ tels que $d_1(z, z') < \delta/3$. Puisque Ω est supposé dense dans X_1, il existe deux suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans Ω convergeant respectivement vers z et z'. Choisissons n suffisamment grand pour que $d_1(z_n, z) < \delta/3$, $d_1(z'_n, z') < \delta/3$, $d_2(f(z_n), \tilde{f}(z)) < \varepsilon/3$ et $d_2(f(z'_n), \tilde{f}(z')) < \varepsilon/3$. Par l'inégalité triangulaire, $d_1(z_n, z'_n) < \delta$ et par conséquent $d_2(f(z_n), f(z'_n)) < \varepsilon/3$. Une nouvelle application de l'inégalité triangulaire assure finalement que $d_2(\tilde{f}(z), \tilde{f}(z')) < \varepsilon$, ce qui termine la démonstration de l'existence. Pour ce qui est de l'unicité, c'est une conséquence immédiate de la densité de Ω : si $y \in X_1$ et si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans Ω convergeant vers y, alors nécessairement

$$\tilde{f}(y) = \lim_{n\to+\infty} \tilde{f}(y_n) = \lim_{n\to+\infty} f(y_n).$$

□

Définition 1.21. (Espace de Banach) Un *espace de Banach* est un espace vectoriel normé complet.

Théorème 1.22. *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors X est un espace de Banach si et seulement si toute série normalement convergente de X converge dans X.*

On rappelle qu'une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ à termes dans X est convergente si la suite $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge dans X. On dit qu'elle est normalement convergente si la série des normes $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|$ (il s'agit donc ici d'une série de réels positifs) converge, autrement dit si

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\| < +\infty.$$

Démonstration. Supposons X complet, et soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série normalement convergente. Pour $n < n' \in \mathbb{N}$, on a par l'inégalité triangulaire

$$\|\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n'} u_k\| = \|\sum_{k=n+1}^{n'} u_k\| \le \sum_{k=n+1}^{n'} \|u_k\|.$$

Puisque la série est supposée normalement convergente, le dernier terme de l'inégalité précédente tend vers 0 lorsque n et n' tendent conjointement vers $+\infty$. Il s'ensuit que la suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^{n} u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X, et, ce dernier étant supposé complet, qu'elle converge.

Inversement, supposons que toute série normalement convergente dans X converge, et considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans X. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il existe donc un indice $n_k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, n' \ge n_k,\ \|u_n - u_{n'}\| \le 2^{-k}.$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que la suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Par construction, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}}(u_{n_{k+1}} - u_{n_k})$ est normalement convergente, et dès lors par hypothèse elle converge. Mais pour $j \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{j}(u_{n_{k+1}} - u_{n_k}) = u_{n_{j+1}} - u_{n_0},$$

et on déduit que la suite $(u_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est par conséquent une suite de Cauchy (par hypothèse) et qui possède une sous-suite convergente (nous venons de le montrer), elle est alors nécessairement elle-même convergente. □

Exercice 1.9. Ecrire les détails justifiant la dernière affirmation de la preuve précédente.

1.6 Notion de Compacité

Dans $\mathbb{R}^N$ muni de sa métrique usuelle, les ensembles compacts sont confondus avec les ensembles fermés et bornés. En dimension infinie (pour ne parler que des espaces vectoriels), la compacité est une propriété autrement plus fine, et d'une importance majeure.

Définition 1.23. Un espace topologique $(\Omega, \mathcal{T})$ est dit *compact* s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert

$$\Omega = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{O}_\lambda$$

(Λ étant une famille quelconque d'indices, et les $\mathcal{O}_\lambda$ des ouverts de $\mathcal{T}$) on peut extraire un sous-recouvrement fini :

$$\Omega = \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} \mathcal{O}_\lambda$$

avec $\Lambda' \subseteq \Lambda$ et $\sharp\Lambda' < +\infty$.

Proposition 1.24. *Si (X, d) est un espace métrique, alors il est compact (pour la topologie associée) si et seulement si toute suite dans X possède une sous-suite convergente.*

Démonstration. Commençons par la condition nécessaire, que nous démontrerons par l'absurde. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X ne possédant aucune sous-suite convergente. Pour chaque $y \in X$, il existe alors $r(y) > 0$ tel que $\sharp\{n \in \mathbb{N},\ x_n \in B(y, r(y))\} < +\infty$. Clairement

$$X \subseteq \bigcup_{y\in X} B(y, r(y)).$$

Puisque X est compact, il existe alors $y_1, \cdots, y_m \in X$ tels que

$$X \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} B(y_k, r(y_k)).$$

Dès lors

$$\mathbb{N} \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} \{n \in \mathbb{N},\ x_n \in B(y_k, r(y_k))\}$$

ce qui est absurde car une union finie d'ensembles de cardinal fini est de cardinal fini.

Passons maintenant à la condition suffisante. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement ouvert de X par un nombre fini de boules ouvertes de rayon au plus égal à ε. En effet, si tel n'était pas le cas on pourrait construire par récurrence une suite de points de X (les centres des dites boules) tels que la distance mutuelle entre deux quelconques d'entre eux soit au moins égale à ε. Une telle suite ne contiendrait bien sûr aucune sous-suite convergente. Considérons maintenant un recouvrement ouvert quelconque $X = \cup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_\lambda$ de X. Pour $x \in X$, on définit

$$R(x) := \sup\{r > 0, \exists \lambda \in \Lambda,\ B(x,r) \subseteq \mathcal{O}_\lambda\}.$$

La fonction $x \mapsto R(x)$ est semi-continue inférieurement au sens où

$$(x_n \to x) \Rightarrow R(x) \leq \liminf_{n \to +\infty} R(x_n).$$

En effet, si $R(x) > \rho' > \rho > \liminf_{n\to+\infty} R(x_n)$, et si $\lambda \in \Lambda$ est tel que $B(x, \rho') \subseteq \mathcal{O}_\lambda$, alors comme $x_n \to x$ on a $B(x_n, \rho) \subseteq B(x, \rho')$ pour n suffisamment grand, d'où $B(x_n, \rho) \subseteq \mathcal{O}_\lambda$ et par conséquent $R(x_n) \geq \rho$, une contradiction. Soit $\varepsilon := \inf_{x \in X} R(x)$. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite minimisante pour R, alors par hypothèse elle possède une sous-suite convergente, dont on appellera x la limite. Par semi-continuité inférieure, $R(x) \leq \lim_{n\to+\infty} R(x_n) = \varepsilon$. Nous en déduisons que $\varepsilon > 0$. Pour cet $\varepsilon > 0$, soit $\{y_1, \cdots, y_m\}$ les centres de boules de rayon ε qui suffisent à recouvrir X. Pour chaque $k = 1, \cdots, m$, $B(y_k, \varepsilon)$ est incluse dans un des ouverts du recouvrement initial, disons $\mathcal{O}_{\lambda_k}$. Par construction on a alors

$$X \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} \mathcal{O}_{\lambda_k},$$

ce qui termine la démonstration. □

Remarquons qu'au passage, nous avons démontré deux résultats pouvant être mentionnés individuellement :

Définition 1.25. Un espace métrique est dit totalement borné si quel que soit $\varepsilon > 0$ il peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon au plus égal à ε.

Lemme 1.26. *Tout espace métrique compact est totalement borné.*

Démonstration. Cfr. le début de la démonstration de la Proposition 1.24. □

Lemme 1.27. *Toute fonction réelle semi-continue inférieurement sur un espace métrique compact y atteint sa valeur minimale.*

Démonstration. Cfr. la seconde partie de la démonstration de la Proposition 1.24. □

Montrons maintenant le

Lemme 1.28. *Tout espace métrique compact est complet.*

Démonstration. Soit (X, d) un espace métrique compact et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans X. Puisque X est compact, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente, dont nous appelons x la limite. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, on déduit que x est limite de la suite entière (cfr. exercice supra). □

Nous synthétisons et complétons les lemmes ci-dessus par le

Théorème 1.29. *[Fréchet, 1910] Un espace métrique est compact si et seulement si il est à la fois complet et totalement borné.*

Démonstration. Il ne nous reste qu'à vérifier la condition suffisante. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X, nous souhaitons montrer qu'elle possède une sous-suite convergente. Puisque X est totalement borné, il existe une boule B_1, de rayon 1, qui contient une sous-suite (notée $(x_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$) de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par récurrence, quel que soit $k \geq 2$ il existe une boule B_k, de rayon $1/k$, qui contient une sous-suite (notée $(x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$) de $(x_{k-1,n})_{n\in\mathbb{N}}$. La suite diagonale $(x_{n,n})_{n\geq 1}$ est telle que

$$\forall k \geq 1,\ \forall n \geq k,\ x_{n,n} \in B_k.$$

Il s'ensuit que $(x_{n,n})_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans X. Puisque X est supposé complet, $(x_{n,n})_{n\geq 1}$ possède une limite, et la démonstration est terminée. □

Nous finissons cette section par le bien connu

Théorème 1.30 (Heine)**.** *L'image d'un espace topologique compact par une application continue est compact (pour la topologie induite).*

Démonstration. Elle résulte directement de la première définition de la compacité, et du fait que l'image réciproque d'un ouvert par une application continue soit un ouvert. □

1.7 Notion de Séparabilité

La notion de séparabilité ne doit pas être confondue avec le caractère séparé abordé précédemment. Dans de nombreuses démonstrations, elle permet de ramener l'étude d'une propriété à vérifier partout en l'étude de cette propriété en une suite de points.

Définition 1.31. Un espace topologique est dit séparable s'il possède un sous-ensemble à la fois dénombrable et dense.

L'ensemble des rationnels est un sous-ensemble dénombrable et dense (pour la topologie usuelle) de $\mathbb{R}$. Ce dernier est par conséquent séparable.

Lemme 1.32. *Tout espace métrique compact est séparable.*

Démonstration. Nous montrons la propriété plus forte qui est que tout espace totalement borné est séparable. Pour chaque $k \geq 1$, il existe $y_{k,1}, \cdots, y_{k,l(k)}$ en nombre fini tels que, si X désigne l'espace en question,

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^{l(k)} B(y_{k,j}, 1/k).$$

Par construction, la famille $\cup_{k\geq 1} \cup_{j=1}^{l(k)} \{y_{k,j}\}$ est dénombrable et dense dans X. □

Lemme 1.33 (Critère de non séparabilité)**.** *Si (X, d) est un espace métrique qui contient un sous-ensemble Y non dénombrable et tel que*

$$\delta := \inf\{d(y, y'),\ y, y' \in Y,\ y \neq y'\} > 0,$$

alors X n'est pas séparable.

Démonstration. Supposons par l'absurde que X possède un sous-ensemble dénombrable et dense, que nous pouvons décrire sans perte de généralité au moyen d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. A chaque $y \in Y$, on associe le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $d(y, x_n) < \delta/3$. Un tel entier est bien défini puisque par hypothèse y (comme tout autre élément de X) est limite d'une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

L'application $y \in Y \mapsto n \in \mathbb{N}$ est injective. En effet, si $d(y, x_n) < \delta/3$ et $d(y', x_n) < \delta/3$ alors $d(y, y') < 2\delta/3$, ce qui n'est possible avec $y, y' \in Y$, par définition de δ, que si $y = y'$. On déduit que Y est au plus dénombrable, ce qui est absurde. □