Examen Wiskunde 1 (eerste zittijd academiejaar '20-'21, reeks B)
Opleiding industrieel ingenieur
Omcirkel: Eerste bachelor / Schakelprogramma

UNIVERSITEIT GENT

Naam : /40

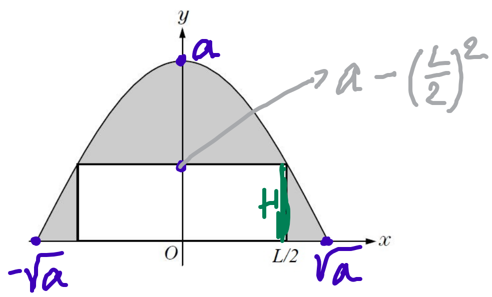
Schrijf netjes. Vul in op de opengelaten plaatsen.
Geen rekenmachine, gsm, smartphone, ...
Geef uitleg bij de open vragen. Veel succes!

FACULTEIT INGENIEURSWETENSCHAPPEN EN ARCHITECTUUR

---

1. Een rechthoek heeft 1 zijde met lengte L langs de X-as en de andere zijde reikt tot aan de grafiek van $y = a - x^2$ zoals op de tekening. /8

   (a) Voor welke afmetingen van de rechthoek is de oppervlakte van de grijze zone minimaal als $a = 4$?



$a=4$

$O = 2\int_0^2 (4-x^2)\,dx - L\left(4-\frac{L^2}{4}\right)$

$= 2\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 - 4L + \frac{L^3}{4} = 2\left(8-\frac{8}{3}\right) - 4L + \frac{L^3}{4}$

$= \frac{L^3}{4} - 4L + \frac{32}{3}$

$\frac{dO}{dL} = 0 \iff \frac{3}{4}L^2 = 4 \iff L = \frac{4}{\sqrt{3}}$ $(L>0)$

L	0		$4/\sqrt{3}$		2
dO/dL		$-$	0	$+$	
L		$\searrow$	min	$\nearrow$	

Als $L=\frac{4}{\sqrt{3}}$, is $H=\frac{8}{3}$

   (b) Voor welke waarde van a is de oppervlakte van de grijze zone maximaal als $L = 2$?

$O = 2\int_0^{\sqrt{a}} (a-x^2)\,dx - \underbrace{2}_{L}\underbrace{(a-1)}_{H} = 2\left(a\sqrt{a} - \frac{a^{3/2}}{3}\right) - 2a + 2 = \frac{4}{3}a^{3/2} - 2a + 2$

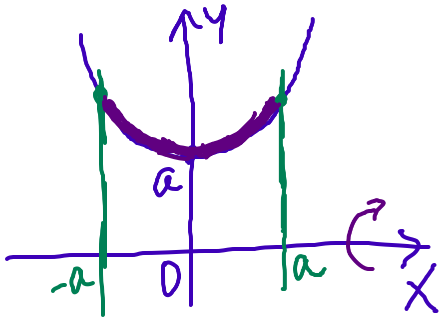
$\frac{dO}{da} = 0 \iff 2\sqrt{a} = 2 \iff a = 1$

a	0		1		
$\frac{dO}{da}$		$-$	0	$+$	
O			min	$\nearrow$	

Zie tekening:
$\sqrt{a} > \frac{L}{2} \underset{L=2}{\iff} \sqrt{a} > 1 \iff a > 1$

Als $a=1$, is er geen rechthoek want H is dan 0.

2. Bereken de zijdelingse oppervlakte van de ruimtefiguur die ontstaat door wenteling van het deel van de kromme $y = a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$ $(a \in \mathbb{R}_0^+)$ voor $x \in [-a, a]$ om de X-as. /8



$$y = a\,ch\frac{x}{a} = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$$

$$Z.O. = 2 \times 2\pi \int_0^a y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$= 4\pi a \int_0^a ch\frac{x}{a}\sqrt{1+sh^2\left(\frac{x}{a}\right)}\,dx$$

$$= 4\pi a \int_0^a ch^2\frac{x}{a}\,dx$$

$$= 4\pi a \int_0^a \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}ch\frac{2x}{a}\right)dx$$

$$= 2\pi a\left[x + \frac{a}{2}sh\left(\frac{2x}{a}\right)\right]_0^a$$

$$= 2\pi a\left(\left(a + \frac{a}{2}sh\,2\right) - 0\right)$$

$$= \pi a^2(2 + sh\,2)$$

$$\left(a\,ch\frac{x}{a}\right)' = \frac{a}{a}sh\frac{x}{a}$$

$$ch^2\alpha - sh^2\alpha = 1$$

$$\Rightarrow ch\,\alpha = \sqrt{1+sh^2\alpha}$$

$$ch\,2\alpha = ch^2\alpha - sh^2\alpha$$

3. Bereken de asymptoten van $\mathcal{K} : y = \dfrac{2\,x^2}{\sqrt{x^2-4}}$ en maak hiermee een schets van $\mathcal{K}$. /8

• domein $= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 > 0\} =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

• VA: $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-4}} = \dfrac{8}{0^+} = +\infty \Rightarrow x = 2$ is een VA

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-4}} = \dfrac{8}{0^+} = +\infty \Rightarrow x = -2$ is een VA

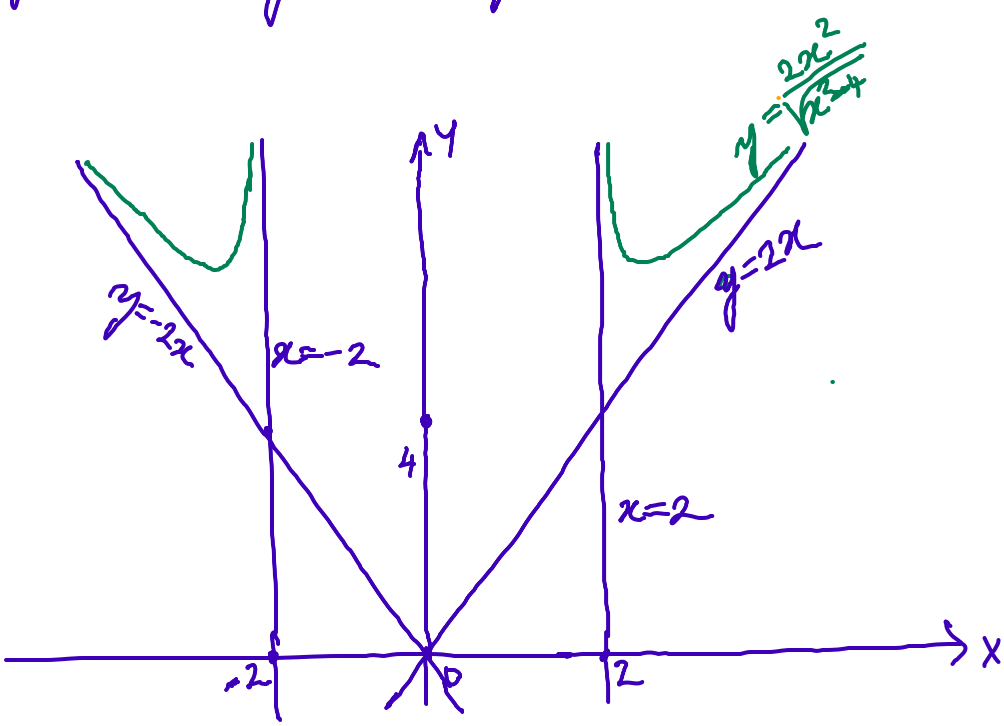
• NVA: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x}{\pm x} = \pm 2 \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} (y - 2x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-4}} - 2x \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}} = \dfrac{+\infty - \infty}{+\infty}$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2 - 2x\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}} \cdot \dfrac{(2x^2 + 2x\sqrt{x^2-4})}{(2x^2 + 2x\sqrt{x^2-4})}$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\cancel{4x^4} - \cancel{4x^4} + 16x^2}{2x^2\sqrt{x^2-4} + 2x(x^2-4)} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{16x^2}{\pm 4x^3} = 0 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y = 2x$ en $y = -2x$ zijn SA



4. Vul in onderstaande tabel met een hoofdletter de juiste oplossing aan. Er is telkens exact 1 juiste oplossing. Duid bij elke vraag een antwoord aan want standard setting wordt toegepast bij de evaluatie. /16

vraag	1	2	3	4	5	6	7	8
antwoord								

(1) Voor welke van onderstaande θ-waarden bereikt de poolkromme $K : r = \dfrac{1}{(1 - 2\,\sin\theta)^2}$ een buigpunt t.o.v. de pool?

A. π
B. $\frac{\pi}{2}$
C. $-\frac{\pi}{2}$
D. $\frac{2\pi}{3}$

$\frac{1}{r}+\left(\frac{1}{r}\right)'' = (1-2\sin\theta)^2 + \left(2(1-2\sin\theta)(-2\cos\theta)\right)'$

$= (1-2\sin\theta)^2 + 4\sin\theta + 4\times 2\cos 2\theta$

$= 1 + 4\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) + 8\cos 2\theta = 3 + 6\cos 2\theta$

$A = \frac{1}{r}+\left(\frac{1}{r}\right)'' = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{3}+k\pi \vee \theta = \frac{2\pi}{3}+k\pi$

θ		$2\pi/3$	
A	$-$	BP	$+$

(2) Wat is het product van de oplossingen van $x^{\ln x} = x\,e^2$?

A. e^{e^2}
B. e^2
C. e
D. 0

$\ln(x^{\ln x}) = \ln(xe^2) \iff (\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0 \iff k^2 - k - 2 = 0$

$k = \ln x$

$\iff k = 2 \vee k = -1$

$\iff x = e^2 \vee x = e^{-1}$

$\text{Product} = e^2\frac{1}{e} = e$

(3) Wat is de som van de lengtes van de intervallen die tot het domein behoren van $y = \text{Bgcos}(\sin x + \frac{1}{2})$ en waarbij $x \in [-\pi,\, \pi]$?

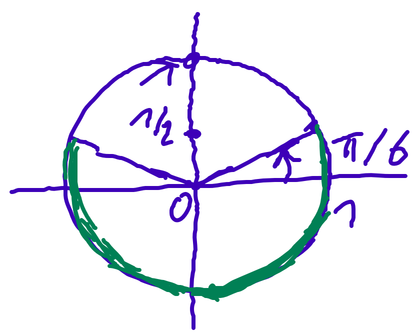
A. $\frac{4\,\pi}{3}$
B. $\frac{7\,\pi}{6}$
C. $2\,\pi$
D. $\frac{\pi}{6}$

$-1 \leq \sin x + \frac{1}{2} \leq 1$

$\iff \underbrace{-\frac{3}{2} \leq}_{\text{triviaal}} \sin x \leq \frac{1}{2}$

$\iff x \in \bigcup_k \left[-\frac{7\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi\right]$

in $[-\pi, \pi]$: $\left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right]$ en $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$



(4) De cirkel met middelpunt $m(x,\,y) = (2,\,2)$ en straal $2\,\sqrt{2}$ wordt in poolcoördinaten omschreven door

A. $r = 4\,(\cos\theta - \sin\theta)$
B. $r = 4\,(\cos\theta + \sin\theta)$
C. $r = \sqrt{2}\,(\cos\theta - \sin\theta)$
D. $r = \sqrt{2}\,(\cos\theta + \sin\theta)$

$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$

$\iff x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 = 8$

$\iff r^2 - 4r\cos\theta - 4r\sin\theta = 0$

$\iff \underbrace{r = 0}_{\text{geen extra punten t.o.v.}} \vee r = 4(\cos\theta + \sin\theta)$

(5) De raaklijn in het punt (4, 16) aan de kromme $y = (\sqrt{x})^x$ is evenwijdig met

A. $y = (8 + 16\,\ln 2)\,x$

B. $y = (\frac{1}{2} + \ln 2)\,x$

C. $y = (32 + 16\,\ln 2)\,x$

D. $y = (2 + \ln 2)\,x$

$\ln y = \ln(\sqrt{x})^x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \left(\frac{x}{2}\ln x\right)'$

$\Rightarrow y' = (\sqrt{x})^x\left(\frac{\ln x}{2} + \frac{1}{2}\right)$

in $(4,16)$: $y'_p = \frac{16}{2}\left(\ln \underbrace{4}_{=2^2} + 1\right) = 16\ln 2 + 8$

(6) Welke uitspraken zijn waar?

$*$: Er zijn geen zuiver imaginaire derdemachtswortels van -2. $= 2e^{j\pi}$

$**$: $-|z\,\bar{z}| = z\,\bar{z}\,e^{j\,\pi}$

A. zowel $*$ als $**$

B. enkel $**$

C. enkel $*$

D. geen van beiden

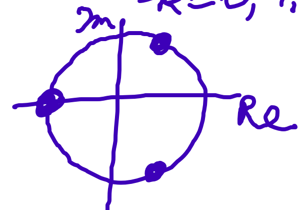
$z^3 = -2 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{2}\,e^{j\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$

$k = 0, 1, 2$

$z\bar{z} = |z|^2$

$= |z\bar{z}|$

$-1 = e^{j\pi}$



(7) De inhoud van het parallellepipedum opgespannen door $\vec{u} = \{1,\,-1,\,0\}$, $\vec{v} = \{0,\,3,\,4\}$ en $\vec{w} = \{2,\,-8,\,-1\}$ is

A. 37

B. $\dfrac{7}{2}$

C. $\dfrac{37}{6}$

D. 21

$I = |\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})| = \left|\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & -8 & -1 \end{vmatrix}\right| =$

$= |-3 + 32 - 8| = 21$

(8) De parabool $\mathcal{P} : \begin{cases} x = \frac{7}{8} - \frac{t^2}{2} \\ y = 1 + t \end{cases}$ met $t \in \mathbb{R}$ heeft

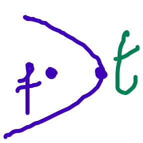
A. $\left(\dfrac{5}{8},\,1\right)$ als brandpunt en heeft een symmetrie-as evenwijdig met de X-as.

B. $\left(\dfrac{3}{8},\,1\right)$ als brandpunt en heeft een symmetrie-as evenwijdig met de X-as.

C. $\left(\dfrac{7}{8},\,\dfrac{3}{4}\right)$ als brandpunt en heeft een symmetrie-as evenwijdig met de Y-as.

D. $\left(\dfrac{7}{8},\,\dfrac{1}{2}\right)$ als brandpunt en heeft een symmetrie-as evenwijdig met de Y-as.

t elimineren: $\frac{7}{8} - \frac{(y-1)^2}{2} = x \Leftrightarrow -4(y-1)^2 = 8x - 7 \Leftrightarrow (y-1)^2 = -2\left(x - \frac{7}{8}\right)$



$f: \left(\frac{7}{8} - \frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{3}{8}, 1\right)$

$2a = 2$

$\Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$