B

UNIVERSITEIT GENT
FEA: BACHELOR OF SCIENCE IN DE INDUSTRIËLE WETENSCHAPPEN
Wiskunde II oefeningen: **test Reeks B**

**Naam:**

---

Schrijf net en duidelijk. Geen ZRM of GSM. Verklaar, indien niet gespecifieerd 'enkel antwoord', steeds de tussenstappen. **Oplossing zonder uitleg telt niet.** Vereenvoudig je antwoord.

| Vraagnummer | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Totaal |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Maximum | 5 | 4 | 4 | 3 | 4 | |
| Behaalde score | | | | | | |

1. Bepaal de P.O. door $(0,0)$ van $x\cos(xy)y' + y\cos(xy) - 1 = y'e^y$.

AO * DVG: $[y.\cos(xy) - 1] + [x.\cos(xy) - e^y].y' = 0$ ? $y' = \frac{dy}{dx}$

$$[y.\cos(xy)-1]dx + [x.\cos(xy) - e^y]dy = 0$$

$= M(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ ; $= N(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \cos(xy) - xy.\sin(xy) = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

$\Leftrightarrow$ totale DVG: $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}.dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}.dy = 0$ : $dF = 0 \Leftrightarrow$ AO: $F = C_0$

* (1) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y.\cos(xy) - 1 \xrightarrow{\text{integratie}} F = \sin(xy) - x + K(y)$

(2) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x\cos(xy) - e^y$

$x.\cos(xy) + \frac{dK(y)}{dy} = x.\cos(xy) - e^y \Rightarrow \frac{dK(y)}{dy} = -e^y$

$\Rightarrow K(y) = -e^y + C_1$

(3) $F(x,y) = \sin(xy) - x - e^y + C_1$

(4) AO: $\sin(xy) - x - e^y = C$

PO door $(0,0)$: $0 - 0 - 1 = C \Rightarrow$ PO: $\sin(xy) - x - e^y = -1$

B

2. Bereken een lineaire benadering voor $\frac{\pi}{4} - \text{Bgtg}\,((0.98)\cdot(1.01))$.

$$f(x_p+\Delta x, y_p+\Delta y) \approx f(x_p,y_p) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p \cdot \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_p \cdot \Delta y$$

$* \; f(x,y) = \frac{\pi}{4} - \text{Bgtg}(x.y)$

$* \begin{cases} x_p = 1 \\ y_p = 1 \end{cases}$ met $\begin{cases} \Delta x = -0{,}02 \\ \Delta y = 0{,}01 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x_p,y_p) = \frac{\pi}{4} - \text{Bgtg}\,1 = 0$

$$\begin{cases} * \; \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{1+x^2y^2} \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p = -\frac{1}{2} \\ * \; \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{1+x^2y^2} \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_p = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} - \text{Bgtg}(0{,}98 \cdot 1{,}01) \approx 0 - \frac{1}{2}\cdot(-0{,}02) - \frac{1}{2}\cdot 0{,}01$$

$$\approx 0{,}01 - 0{,}005 \qquad \Rightarrow \approx 0{,}005$$

3. Gegeven $p(1,1,1)$, $A: \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-t \\ z = 3-t \end{cases}$.

Bepaal de cartesische vergelijking van de rechte door $p$, met een richting loodrecht op $A$, die de $Z$-as snijdt.

= rechte R

$* \; \vec{v_A} = \{1,-1,-1\} \,/\!/\, \{-1,1,1\}$

$*$ Z = rechte die samenvalt met de Z-as: $Z: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}$ met $k \in \mathbb{R}$

STAP 1: vergelijking van vlak $\alpha$ bepalen, zodat $\alpha \perp A$ en $p \in \alpha$

$* \; \vec{n_\alpha} \,/\!/\, \vec{v_A}$: $\quad \alpha: -x+y+z = d$

$* \; p \in \alpha$: $\quad \cancel{-1+1}+1 = d$

$\Rightarrow \alpha: -x+y+z = 1$

STAP 2: Ca.Co. van snijpunt q bepalen van vlak $\alpha$ en rechte Z

$-0+0+k = 1 \quad \Rightarrow q(0,0,1)$

STAP 3: cartesische vergelijking van rechte R bepalen, zodat $p \in R$ en $q \in R$

$* \; q(0,0,1)$

$* \; \vec{v_R} = \vec{p} - \vec{q} = \{1,1,0\}$

$\Rightarrow R: \begin{cases} x = y \\ z = 1 \end{cases}$

4. Bij deze vraag **ENKEL het antwoord** geven.

i. Bepaal de vergelijking van de bol wiens middelpunt samenvalt met het middelpunt van de bol $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 8$. De gezochte bol raakt aan het ruimtelichaam met vergelijking $2x + y - z = 13$.

$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 24$

$* \; m(0,1,0)$

$* \; R = d(m, \alpha) = \dfrac{|2.0 + 1 - 0 - 13|}{\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{12}{\sqrt{6}}$

$* \; R^2 = \dfrac{(2^2.3)^2}{2.3} = 2^3.3 = 8.3 = 24$

ii. Stel de DVG op die enkel en alleen de familie krommen $y + \ln(C_1 x) - C_2 = 0$ als oplossing heeft.

$x.y' = -1$

$y = -\ln(C_3) - \ln(C_1 x) \leftarrow C_2 = -\ln(C_3)$

$y = -\ln(C_1.C_3 x) \rightarrow C = C_1.C_3$

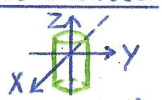
$y = -\ln(Cx)$ [1 onafhankelijke constante]

$\Downarrow$

$y' = -\dfrac{C}{Cx} = -\dfrac{1}{x}$

5. Bereken m.b.v. een dubbelintegraal de inhoud in $x^2 + y^2 = 4$ boven het $XY$-vlak en onder $z = 10 - x^2 - y^2$.

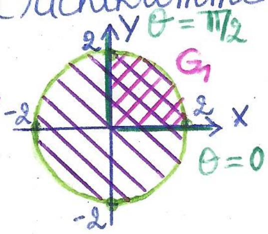
$* \; x^2+y^2=4 \rightarrow$ in ruimte: omwentelingscilinder // Z-as met richtkromme de rand van vlak gebied $G$.




$\rightarrow$ in XY-vlak: cirkel met $m(0,0)$ en $R=2$

$\rightarrow$ in Po.Co.: $r = 2$

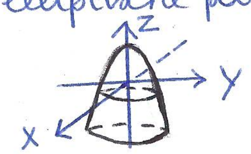
integratiegebied $G$: $x^2+y^2 \leq 4$




$* \; z = 10 - x^2 - y^2 \rightarrow$ elliptische paraboloide

$x^2+y^2 = 10 - z$

$z \leq 10$




$f(x,y) = 10 - x^2 - y^2$

$z = f(x,y) \rightarrow \geq 0$ als $x^2+y^2 = 4$

Als $z = 0$ dan $x^2+y^2 = 10$ $(>4)$

$\Rightarrow V = \iint_G |f(x,y)| dS = 4 \iint_{G_1} f(x,y) dS$

Het ruimtelichaam is symmetrisch t.o.v. het XZ-vlak en t.o.v. het YZ-vlak

Overgaan naar Po.Co. $(x^2+y^2=r^2)$ Jacobiaan

$V = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (10 - r^2) r \, dr \, d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} d\theta . \int_0^2 (10r - r^3) dr$

$V = 4 \, [\theta]_0^{\pi/2} . \left[5r^2 - \dfrac{r^4}{4}\right]_0^2 = 4 . \dfrac{\pi}{2} . \left[r^2 . \left(5 - \dfrac{r^2}{4}\right)\right]_0^2 = 2\pi . 4 . (5-1) = 32\pi$