A

Universiteit Gent
FEA: Opleiding Industrieel ingenieur (Eerste Bachelor/ Schakelprogramma)

Wiskunde I oefeningen 2020-2021: **Test/ Reeks A**

Naam:

NR:

Schrijf net en duidelijk. Geen ZRM of GSM. Verklaar, indien niet gespecifieerd 'enkel antwoord', steeds de tussenstappen. **Oplossing zonder uitleg telt niet**.

Vraagnummer	1	2	3	4	5	Totaal
Maximum	5	3.5	4.5	1	6	20
Behaalde score						

1. Bepaal alle oplossingen over $\mathbb{C}$ van $z^4 - j|1+j\sqrt{7}|z = 0$ in cartesische vorm en schets deze in het complexe vlak.

$* \ |1+j\sqrt{7}| = \sqrt{1+7} = \sqrt{8} = 8^{1/2}$

$\Rightarrow z^4 - 8^{1/2} j z = 0$ $\quad \boxed{z_1 = 0}$

$\Rightarrow z(z^3 - 8^{1/2} j) = 0$

$* \ z^3 = 8^{1/2} j = 8^{1/2} e^{j\pi/2}$

$\omega_k = (8^{1/2})^{1/3} e^{j\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$ met $k = \{0,1,2\}$ $\quad (8^{1/2})^{1/3} = (8^{1/3})^{1/2} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$

• $\underline{k=0}$: $z_2 = \sqrt{2}\, e^{j\pi/6} = \sqrt{2}\underbrace{\cos(\pi/6)}_{=\sqrt{3}/2} + \sqrt{2}\underbrace{\sin(\pi/6)}_{=1/2} j \Rightarrow \boxed{z_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} j}$

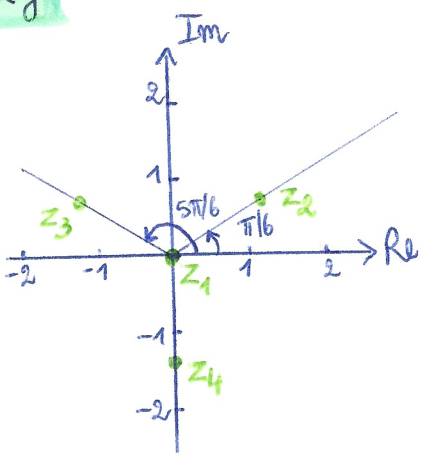
• $\underline{k=1}$: $z_3 = \sqrt{2}\, e^{j5\pi/6} = \sqrt{2}\underbrace{\cos(5\pi/6)}_{=-\cos(\pi/6)} + \sqrt{2}\underbrace{\sin(5\pi/6)}_{=\sin(\pi/6)} j \Rightarrow \boxed{z_3 = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} j}$

• $\underline{k=2}$: $z_4 = \sqrt{2}\, e^{j9\pi/6} = \sqrt{2}\, e^{j3\pi/2} = \sqrt{2}\underbrace{\cos(3\pi/2)}_{=0} + \sqrt{2}\underbrace{\sin(3\pi/2)}_{=-1} j$

$\Rightarrow \boxed{z_4 = -\sqrt{2} j}$

$*$ vlak van Gauss:

$(\sqrt{2} \approx 1,4)$



A

2. (i) Onderzoek het domein van $y = \sqrt{x^4 + 3x^2 - 4}$

(ii) Bepaal het beeld van $y = 3\text{Bgsin}\left(-\sqrt{x+2}\right) + \frac{\pi}{3}$

(i) $x^4 + 3x^2 - 4 \geq 0 \xRightarrow{t = x^2} t^2 + 3t - 4 \geq 0 \xrightarrow[t_1=-4,\, t_2=1]{S=-3,\, P=-4} (t+4)(t-1) \geq 0$

$\Rightarrow t \in]-\infty, -4] \cup [1, +\infty[$

$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \in [1, +\infty[\Rightarrow \boxed{x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}$

(ii) $\left.\begin{array}{l} * \ x+2 \geq 0 \\ * \ -\sqrt{x+2} \in [-1, 1] \end{array}\right\} \Rightarrow -\sqrt{x+2} \in [-1, 0] \Rightarrow \text{Bgsin}(-\sqrt{x+2}) \in \left[\frac{-\pi}{2}, 0\right]$

$\Rightarrow 3\text{Bgsin}(-\sqrt{x+2}) + \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ $\quad \frac{-9\pi + 2\pi}{6}$

$$\boxed{y \in \left[-\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]}$$

3. Los op in $\mathbb{R}$: $\log_2(x+2) = 1 + \log_{\frac{1}{2}}(x+3)$

! $\left.\begin{array}{l} x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \\ x+3 > 0 \Rightarrow x > -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x > -2}$ voorwaarde (*)

$* \ 1 = \log_2 2 \Leftrightarrow 2^1 = 2$

$* \ \log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$

$\log_{1/2}(x+3) = \underbrace{\log_{1/2} 2}_{=-1} \cdot \log_2(x+3) = -\log_2(x+3)$

$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2\right]$

$\Rightarrow \log_2(x+2) + \log_2(x+3) = \log_2 2$

$\log_2([x+2] \cdot [x+3]) = \log_2 2$

$x^2 + 5x + 6 = 2$

$x^2 + 5x + 4 = 0 \longrightarrow \Delta = 25 - 16 = 9$

$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$ $\nearrow$ $\cancel{x_1 = -4}$ (*) $\searrow$ $\boxed{x_2 = -1}$

A

4. Bij deze vraag **ENKEL het antwoord** op de stippellijn invullen.
Wat stelt volgende vergelijking in de **ruimte** voor (zo specifiek mogelijk):
$x^2 + z^2 = 4x - 6z$ in ruimte: $x^2 + 4x + 4 + z^2 + 6z + 9 = 0 + 4 + 9$

$\boxed{(x+2)^2 + (z+3)^2 = 13}$

omwentelingscilinder ↳ in xz-vlak: cirkel

5. Bepaal $\|\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b}\|$ als je weet dat $\frac{5}{6}\pi$ de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is, $\|\vec{a}\| = 2\|\vec{b}\|$ en de oppervlakte van de driehoek opgespannen door de vectoren $(\vec{a} - 2\vec{b})$ en $(3\vec{a} + \vec{b})$ gelijk aan 14 is.

* Opp Δ opgespannen door $(\vec{a} - 2\vec{b})$ en $(3\vec{a} + \vec{b})$

$= \frac{1}{2}\|(\vec{a} - 2\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b})\| = 14$

$\Rightarrow \|\underbrace{\cancel{3\vec{a}\times\vec{a}}}_{=\vec{0}} + \vec{a}\times\vec{b} - 6\underbrace{\vec{b}\times\vec{a}}_{=-\vec{a}\times\vec{b}} - \underbrace{\cancel{2\vec{b}\times\vec{b}}}_{=\vec{0}}\| = 28$

$\Rightarrow \|\cancel{7}\,\vec{a}\times\vec{b}\| = \cancel{28}\ 4$

$\Rightarrow \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|\,|\sin(5\pi/6)| = 4 \Rightarrow \cancel{2}\|\vec{b}\|^2 . \frac{1}{\cancel{2}} = 4$

$\Rightarrow \|\vec{b}\| = 2$ en $\|\vec{a}\| = 4$

* $\|\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b}\|^2 = (\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b}).(\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b})$

$= \vec{a}^2 - 2\sqrt{3}\,\vec{a}.\vec{b} + 3\vec{b}^2$

$= \|\vec{a}\|^2 - 2\sqrt{3}\,\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|\cos(5\pi/6) + 3\|\vec{b}\|^2$

$= 16 + \cancel{2}\sqrt{3}.8\left(\cancel{+}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) + 3.4$

$= 28 + 24$

$= 52$ $\qquad (52 = 2.26 = 2^2.13)$

$\Downarrow$

* $\|\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b}\| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$