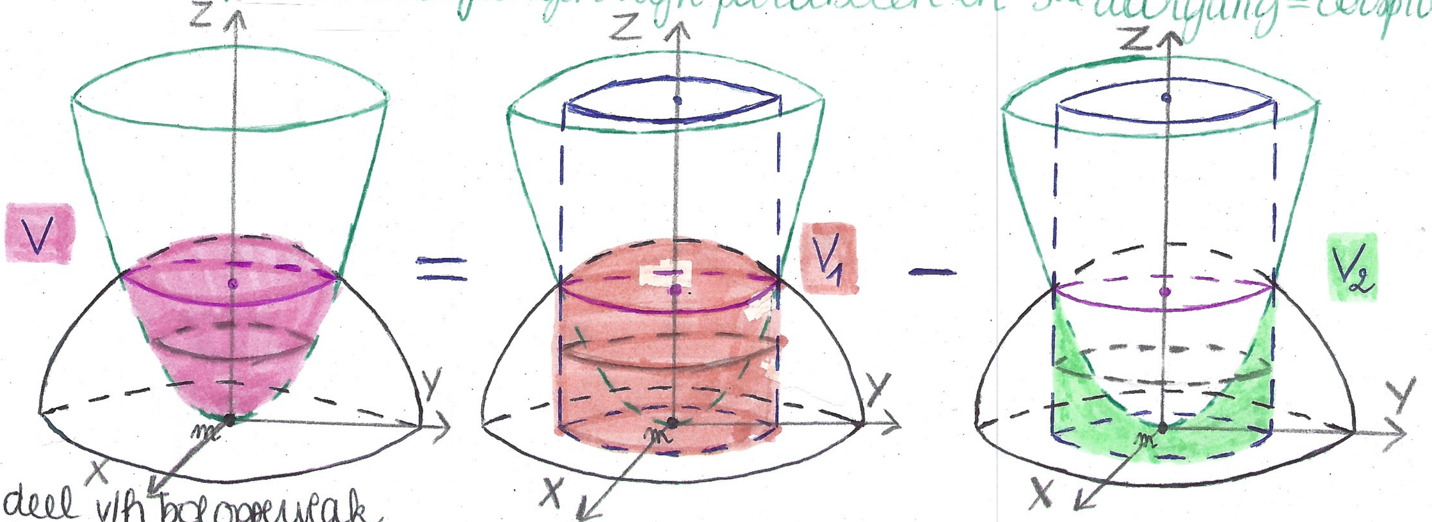
(11d) Stel de dubbelintegraal op voor het berekenen van het volume van het lichaam ingesloten door $2z \geqslant x^2+y^2$ en $x^2+y^2+z^2 \leqslant 3$ (in Po. Co.).

---

* $x^2+y^2+z^2=3 \rightarrow$ boloppervlak met $m(0,0,0)$ en $R=\sqrt{3}$
* $x^2+y^2=2z \longrightarrow$ elliptische paraboloïde met top $m(0,0,0)$ en $z \geqslant 0$.

(2 v/d 3 doorgangen zijn parabolen en 3de doorgang = oorsprong)



deel v/h boloppervlak boven het XY-vlak $(z \geqslant 0)$

cilinderoppervlak // Z-as met richtkromme de rand van gebied G

doorsnede (cirkel)

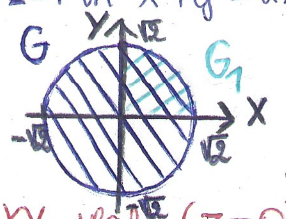
$\hookrightarrow 2z = x^2+y^2 = 3-z^2 \Rightarrow z^2+2z-3=0 \xrightarrow[P=-3]{S=-2} \cancel{z_1=-3}$ of $z_2=1$ $\quad z>0$

$\Rightarrow$ doorsnede = cirkel $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ z=1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ cilinderoppervlak : $x^2+y^2=2$ (substitutie van $z=1$ in $x^2+y^2=2z$)

$\Rightarrow$ gebied G :

* $x^2+y^2=2$ cirkel met $m_0(0,0)$ en $r_1=\sqrt{2}$
  $\Rightarrow r=\sqrt{2}$



cursus p.37

De inhoud v/h ruimtelichaam begrensd door het XY-vlak $(z=0)$, het oppervlak $z=f(x,y)$, en $\boxed{\text{het cilinderoppervlak // Z-as, met richtkromme de rand v/h vlak gebied G in het XY-vlak}}$

$z=+\sqrt{3-x^2-y^2}=\sqrt{3-r^2}$

$z=\dfrac{x^2+y^2}{2}=\dfrac{r^2}{2}$

$\hookrightarrow x^2+y^2=2$

$V=\iint_G |f(x,y)|\,dS$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{(1) } \sqrt{3-x^2-y^2} \geqslant 0,\ \frac{x^2+y^2}{2} \geqslant 0 \\ \text{(2) lichaam is symmetrisch t.o.v. XZ-vlak en YZ-vlak} \end{array}}$

De dubbelintegraal

$V \underset{(1)}{=} \iint_G [f_1(x,y)-f_2(x,y)]\,dx\,dy \underset{(2)}{=} 4\iint_{G_1} [f_1(x,y)-f_2(x,y)]\,dx\,dy$

$G_1 \rightarrow$ aangeduid op figuur van gebied G

$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{2}} \left[\sqrt{3-r^2}-\dfrac{r^2}{2}\right] r\,dr\,d\theta$

Jacobiaan

12a) Stel de integraal op voor het berekenen van de oppervlakte van het ruimte-oppervlak bepaald door het deel van $x^2+y^2=3z^2$ gelegen boven het XY-vlak en binnen $x^2+y^2=4y$ (in Ca.Co. en in Po.Co.)

---

cursus p.38

De oppervlakte van het deel van het ruimteoppervlak $z=f(x,y)$, begrensd door $\boxed{\text{het cilinderoppervlak // Z-as met richtkromme de rand k van het gebied G in het XY-vlak (1)}}$

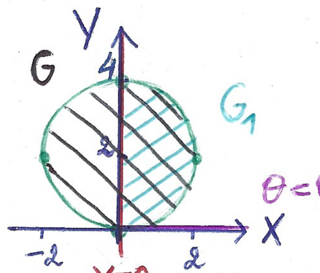
$x^2+y^2=4y$
$x^2+(y-2)^2=4$

$$\sigma = \iint_G \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dS$$

$x^2+y^2=3z^2$ met $z \geq 0$
$\Downarrow$
$z = +\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3}}$

(1) Gebied G tekenen

* doorsnede v/h cilinderoppervlak $x^2+(y-2)^2=4$ met het XY-vlak: cirkel met $m(0,2)$ en $R=2$ $\quad x^2+y^2=4y$
  - $\hookrightarrow x^2+(y-2)^2=4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4y-y^2}$
  - $\hookrightarrow r = 4\sin\theta$



$x=0$
$\hookrightarrow y \geq 0: \theta = \pi/2$
$\hookrightarrow y < 0: \theta = -\pi/2$

(2) * $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3}}$

* $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$

* $\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\frac{3(x^2+y^2)}{3(x^2+y^2)}+\frac{x^2}{3(x^2+y^2)}+\frac{y^2}{3(x^2+y^2)}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

(3) dubbelintegraal

$\sigma = \iint_G \frac{2}{\sqrt{3}}\, dS = 2\iint_{G_1} \frac{2}{\sqrt{3}}\, dS$, want het beschouwde deel v/h oppervlak is symmetrisch t.o.v. het YZ-vlak.

aangeduid op figuur

$\rightarrow$ dubbelintegraal in Ca.Co.

$$\sigma = 2\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} \frac{2}{\sqrt{3}}\, dx\, dy$$

$\rightarrow$ dubbelintegraal in Po.Co.:

$$\sigma = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{4\sin\theta} \frac{2}{\sqrt{3}}\, r\, dr\, d\theta$$

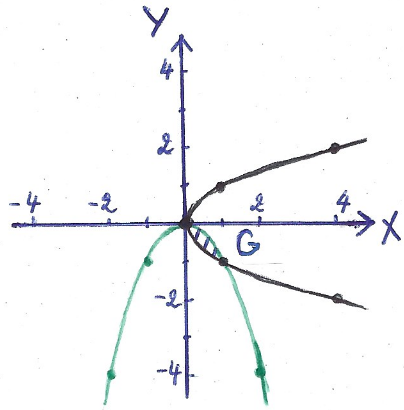
13c) Bepaal het zwaartepunt van het homogeen gebied tussen $x=y^2$ en $y=-x^2$.

(1) Gebied G tekenen

* $x=y^2$: parabool, $x \geq 0$
  → top $t(0,0)$
  → $p_1(1,1), p_2(1,-1), p_3(4,2), p_4(-4,2)$

Als $y \leq 0$: $y=-\sqrt{x}$

* $y=-x^2$: parabool, $y \leq 0$
  → top $t(0,0)$
  → $p_2(1,-1), p_5(-1,-1), p_6(2,-4), p_7(-2,-4)$



zwaartepunt $z(\bar{x},\bar{y})$ met $\bar{x}=\frac{M_y}{S}$ en $\bar{y}=\frac{M_x}{S}$

→ S = oppervlakte v/h gebied G : $S=\iint_G dxdy$

→ M_y = statisch moment van G t.o.v. de Y-as : $M_y=\iint_G x\,dxdy$

→ M_x = statisch moment van G t.o.v. de X-as : $M_x=\iint_G y\,dxdy$

(2) Oppervlakte van G

$$S=\iint_G dydx = \int_0^1\int_{-\sqrt{x}}^{-x^2} dydx = \int_0^1 (-x^2+\sqrt{x})dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{3}+\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

(3) Statisch moment van G t.o.v. de Y-as

$$M_y=\iint_G x\,dydx = \int_0^1\int_{-\sqrt{x}}^{-x^2} x\,dydx = \int_0^1(-x^3+x^{3/2})dx = \left[-\frac{x^4}{4}+\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{4}+\frac{2}{5} = \frac{3}{20}$$

(4) Het zwaartepunt $z(\bar{x},\bar{y})$

* $\bar{x}=\frac{M_y}{S} = \frac{3/20}{1/3} = \frac{9}{20}$

* het homogeen gebied is symmetrisch t.o.v. $y=-x$
  ⇒ het zwaartepunt z ligt op de rechte $y=-x$
  ⇒ $\bar{y}=-\bar{x}=-\frac{9}{20}$
  ⇒ zwaartepunt $z\left(\frac{9}{20},-\frac{9}{20}\right)$