223521 - Wiskunde II, 2016-2017 1e zit, 2/6/2017

UNIVERSITEIT GENT

Vragenreeks

*OPGELET! Juiste antwoorden staat in vet en worden voorafgegaan door * :* NIET VOOR EXAMEN GEBRUIKEN!

1. Gegeven de kromme met parametervoorstelling

$$\begin{cases} x(t) &= 1 - \cos t \\ y(t) &= t - \sin t \end{cases}$$

Wat is de 2de-orde-afgeleide van deze kromme?

Maak 1 keuze

A. * $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1-\cos t}{\sin^3 t}$

B. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-1}{(1-\cos t)^2}$

C. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\cos t - 1}{\sin^3 t}$

D. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{(1-\cos t)^2}$

E. geen van de andere antwoorden is juist

$\frac{dx}{dt} = \sin t$ $\qquad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1-\cos t}{\sin t}$

$\frac{dy}{dt} = 1 - \cos t$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\sin t . \sin t - (1-\cos t)\cos t}{\sin^2 t}$

$= \frac{\sin^2 t - \cos t + \cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{1-\cos t}{\sin^2 t}$

$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{1-\cos t}{\sin^2 t}}{\sin t} = \frac{1-\cos t}{\sin^3 t}$

2. Gegeven de kromme met parametervoorstelling

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{2}{2-t} \\ y(t) &= \frac{2\sqrt{t}}{2-t} \end{cases}$$

Onderzoek het verloop van deze kromme. Welke uitspraak is waar?

Maak 1 keuze

A. * De kromme heeft een niet-verticale asymptoot met vergelijking $y = \sqrt{2}x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

B. De kromme heeft geen asymptoten.

C. De kromme heeft een verticale asymptoot maar geen niet-verticale asymptoten.

D. De kromme heeft slechts 1 asymptoot, namelijk een horizontale asymptoot.

E. De kromme heeft een niet-verticale asymptoot met vergelijking $y = -\sqrt{2}x + \dfrac{1}{2}.$

$\lim\limits_{t \to 2^{>}_{<}} x(t) = \lim\limits_{t \to 2^{>}_{<}} \frac{2}{2-t} = \begin{matrix} -\infty \\ +\infty \end{matrix}$

$\lim\limits_{t \to 2^{>}_{<}} y(t) = \lim\limits_{t \to 2^{>}_{<}} \frac{2\sqrt{t}}{2-t} = \lim\limits_{t \to 2^{>}_{<}} \frac{1}{2-t} . 2\sqrt{2} = \begin{matrix} -\infty \\ +\infty \end{matrix}$

Als $t \to_{>} 2$ dan $x, y \to -\infty$
$\Longrightarrow$ schuine asymptoot

Als $t \to_{<} 2$ dan $x, y \to +\infty$
$\Longrightarrow$ schuine asymptoot

$\lim\limits_{t \to 2^{>}_{<}} \frac{y}{x} = \lim\limits_{t \to 2^{>}_{<}} \frac{2\sqrt{t}}{2} = \boxed{\sqrt{2}} = a$

$\lim\limits_{t \to 2^{>}_{<}} (y - ax) = \lim\limits_{t \to 2^{>}_{<}} \left(\frac{2\sqrt{t}}{2-t} - \sqrt{2} . \frac{2}{2-t}\right) = \lim\limits_{t \to 2^{>}_{<}} \frac{2(\sqrt{t} - \sqrt{2})}{(\sqrt{2}-\sqrt{t})(\sqrt{2}+\sqrt{t})} = \frac{-2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \boxed{\frac{-1}{\sqrt{2}}} = b$

extrema?

$\frac{dr}{d\theta} = 0 + \cos\theta + e^{\sin\theta}\cos\theta$

$\frac{dr}{d\theta} = 0 \ ? \iff \cos\theta.(1+\underbrace{e^{\sin\theta}}_{>1}) = 0 \iff \cos\theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$

3. Beschouw de kromme gegeven in poolcoordinaten
$r(\theta) = 1 + \sin\theta + e^{\sin\theta}$.

Bij welke poolhoek(en) in het interval $[0, 2\pi[$
bereikt de afstand van de kromme tot de pool een minimum?

Maak 1 keuze

A. * Enkel bij $\theta = 3\pi/2$.

B. Enkel bij $\theta = \pi/2$.

C. Enkel bij $\theta = \pi$.

D. Er zijn meerdere poolhoeken waar de afstand van de kromme tot de pool minimaal is in het interval $\theta \in [0, 2\pi[$

in interval $[0, 2\pi[$ hebben we enkel $\theta = \frac{\pi}{2}$ en $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$r(\theta = \frac{\pi}{2}) = 1 + 1 + e = 2 + e$

$r(\theta = \frac{3\pi}{2}) = \cancel{1} - \cancel{1} + e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\frac{1}{e} < 2 + e$ en functie $r(\theta)$ is continu $\Rightarrow$ MIN in $\frac{3\pi}{2}$

4. Gegeven de krommen K1 en K2 in poolcoordinaten
$K_1: \quad r = 4\sin\theta$
$K_2: \quad 4 = -r\cos\theta$
Welke uitspraak is waar?

Maak 1 keuze

A. * De krommen hebben geen snijpunt.

B. De krommen hebben slechts 1 snijpunt. De krommen raken elkaar in dat snijpunt.

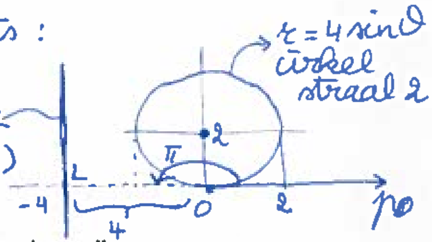
C. De krommen hebben slechts 1 snijpunt. De krommen zijn niet rakend in dat snijpunt.

D. De krommen hebben 2 snijpunten. De krommen raken elkaar in die snijpunten.

E. De krommen hebben 2 snijpunten. De krommen zijn niet rakend in die snijpunten.

a.h.v. schets:

$4 = -r\cos\theta = r\cos(\theta - \pi)$



5. Gegeven de bepaalde integraal
$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx$
Waaraan is deze integraal gelijk?

Maak 1 keuze

A. * 4

B. $-\infty$

C. 0

D. $+\infty$

E. 2

$= \lim_{b \to 4^<} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx = \lim_{b \to 4^<} \left[-2\sqrt{4-x}\right]_0^b$

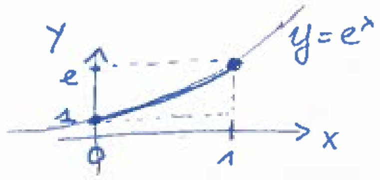
$= \lim_{b \to 4^<} \left(-2\sqrt{4-b} + 2\sqrt{4}\right)$

$= 0 + 2.2 = 4$

probleempunt $x = 4$

dan $\frac{1}{\sqrt{4-x}} \to \infty$

dus oneigenlijke integraal



6. Stel de integraal op voor het berekenen van de booglengte van de kromme $y = e^x$ tussen de punten $x = 0$ en $x = 1$.

$ds^2 = \left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)dx^2 = \left(1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)dy^2$

Maak 1 keuze

A. * $\int_1^e \sqrt{1+\frac{1}{y^2}}\,dy$

B. $\int_1^e \frac{y^2}{2}\,dy$

C. $\int_0^1 e^{2x}\,dx$

D. $\int_1^e (1+y^2)\,dy$

E. geen van de andere antwoorden is juist

$x=0 \rightarrow y = e^0 = 1$
$x=1 \rightarrow y = e^1 = e$

$y = e^x$
$x = \ln y$

$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(\ln y) = \frac{1}{y}$, $\frac{dy}{dx} = e^x$

Hier: $\int_1^e \sqrt{1+\left(\frac{1}{y}\right)^2}\,dy$

ofwel $\int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}\,dx$

7. Gegeven het gebied G begrensd door y=2, x=0, en $y = 2 + \cos x$.
Stel de bepaalde integraal op die het volume berekent van het omwentelingslichaam dat bekomen wordt door G te wentelen rond y=2.

Maak 1 keuze

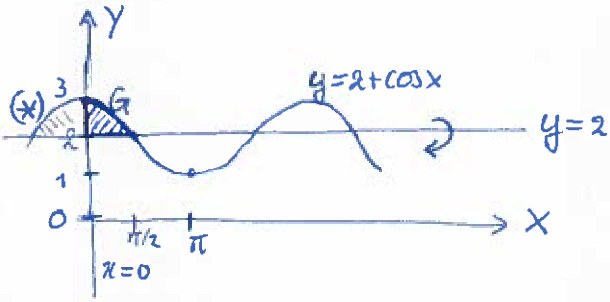
A. * $\int_0^{\pi/2} \pi\cos^2 x\,dx$

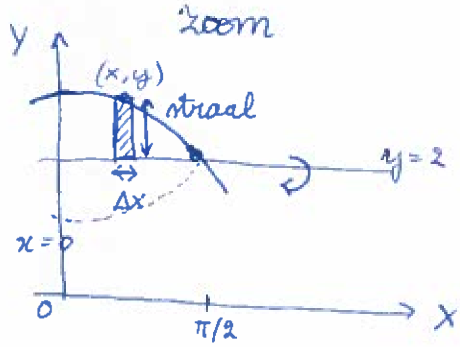
B. $\int_0^{\pi/2} \pi(2+\cos x)^2\,dx$

C. $\int_2^3 \pi(\mathrm{Bgcos}\,y - 2)^2\,dy$

D. $\int_1^3 2\pi(\mathrm{Bgcos}\,y - 2)(y-2)\,dy$

E. geen van de andere antwoorden is juist

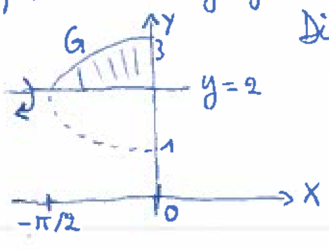




straal tekening
$= y - 2$
$= (2+\cos x) - 2 = \cos x$

$\Delta V = \pi \text{ straal}^2 \cdot \Delta x$
$\Delta V = \pi \cos^2 x \cdot \Delta x \Rightarrow V = \int_0^{\pi/2} \pi\cos^2 x\,dx$

(*) Andere mogelijkheid:



Dit geeft zelfde volume wegens symmetrie.

(*) 

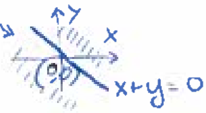
8. Wat is het domein van de functie
$f(x, y) = \ln(x^4 + y^4)$?

Maak 1 keuze

A. * $R^2 \setminus \{(0,0)\}$

B. $\{(x, y) \mid x \neq 0 \text{ en } y \neq 0\}$ (*)

C. R^2

D. $\{(x, y) \mid x + y \neq 0\}$ 

E. $R^2 \setminus \{0\}$ → kan niet

logaritmische functie ⇒ argument moet > 0

$x^4 + y^4 > 0$

bovendien zijn x^4 en y^4 positieve getallen

⇒ $x^4 \neq 0$ ~~of~~ $y^4 \neq 0$

⇒ $x \neq 0$ ~~of~~ $y \neq 0$ 

9. Gegeven de functie
$z = y^2 \cos x$
Bereken $d^2 z$

Maak 1 keuze

A. * $-y^2\cos(x)dx^2 - 4y\sin(x)dxdy + 2\cos(x)dy^2$

B. $-y^2\cos(x)dx^2 - 2y\sin(x)dxdy + 2\cos(x)dy^2$

C. $-\sin(x)y^2dx^2 + 2y\cos(x)dy^2$

D. $-y^2\cos(x)dx^2 + 2\cos(x)dy^2$

E. $-\sin(x)y^2dx^2 - 2y\sin(x)dxdy + 2y\cos(x)dy^2$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -y^2 \sin x$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cos x$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2 \cos x$ $\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2y \sin x$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \cos x$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

10. Beschouw de coordinatentransformatie
$$\begin{cases} x = \ln(3uv) \\ y = v^2 - u^2 \end{cases}$$
Wat is het oppervlakte-element $dxdy$ in de nieuwe coordinaten?

Maak 1 keuze

A. * $dxdy = 2\frac{u^2+v^2}{|uv|}dudv$

B. $dxdy = 2\frac{u^2+v^2}{uv}dudv$

C. $dxdy = \frac{2}{3}\frac{u^2+v^2}{|uv|}dudv$

D. $dxdy = \frac{2}{3}\frac{u^3+v^3}{uv}dudv$

E. $dxdy = \frac{2}{3}\frac{u^2+v^2}{uv}dudv$

$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{u}$, $\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{v}$

$\frac{\partial y}{\partial u} = -2u$, $\frac{\partial y}{\partial v} = 2v$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{u} & \frac{1}{v} \\ -2u & 2v \end{vmatrix} = \frac{2v}{u} + \frac{2u}{v}$$

matrix determinant (Jacobiaan)

$$\Rightarrow dxdy = \left|\frac{2v^2 + 2u^2}{uv}\right| dudv$$

absolute waarde v. Jacobiaan

$$= \frac{2(u^2+v^2)}{|uv|} dudv$$

Eventuele verdere vereenvoudiging:

$x = \ln(3uv) \Rightarrow uv > 0$

⇒ $|uv| = uv$ in domein

$$\Rightarrow dxdy = \frac{2(u^2+v^2)}{uv} dudv$$ in domein

⇒ B. ook juist gerekend

$a = 1$
$b = 2$
$c = 3$
$\Delta a = \Delta b = \Delta c = \pm 0{,}05 = \Delta$
(alles in meter)

$V = abc$
$\Delta V \approx dV = bc\,da + ac\,db + ab\,dc$
$= (bc + ac + ab).\ \Delta$
$= (2.3 + 1.3 + 1.2).\ 0{,}05$
$= 11.\ 0{,}05 = 0{,}55 \Rightarrow 0{,}55\ m^3$

11. Een betonbalk heeft afmetingen 1 m x 2 m x 3 m. De fout op de afmetingen bedraagt 5 cm. Schat de grootte van de fout op het volume van de betonbalk gebruik makend van een lineaire benadering.

Maak 1 keuze

A. * $0.550\ \mathrm{m}^3$

B. $0.565\ \mathrm{m}^3$

C. $6.500\ \mathrm{m}^3$

D. $0.650\ \mathrm{m}^3$

E. $0.110\ \mathrm{m}^3$

12. Beschouw de functie

$$A(x, y) = 2xy + \frac{2000}{x} + \frac{2000}{y}$$

en het gebied G bepaald door x>0 en y>0.
Welke uitspraak is waar?

Maak 1 keuze

A. * A(x,y) bereikt een minimum over G in (10,10).

B. A(x,y) bereikt een maximum over G in (10,10).

C. In (10,10) bereikt A(x,y) geen extremum, en in (10,10) vinden we ook geen zadelpunt. A(x,y) bereikt wel een maximum in een ander punt.

D. In (10,10) bereikt A(x,y) geen extremum, en in (10,10) vinden we ook geen zadelpunt. Bovendien zijn er geen andere maxima.

E. In (10,10) vinden we een zadelpunt van A(x,y).

extrema over open gebied $x>0, y>0$?
$\Rightarrow$ kritische punten zijn kandidaat

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial x} = 2y - \frac{2000}{x^2} = 0 \rightarrow 2yx^2 = 2000 = 2xy^2 \\ \frac{\partial A}{\partial y} = 2x - \frac{2000}{y^2} = 0 \end{cases}$$

$\downarrow x \neq 0,\ y \neq 0$
$x = y$
en $2000 = 2x^3$
$\downarrow$
$x = y = 10$
$\downarrow$
punt $(10, 10)$

$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{4000}{x^3}$ $\quad \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{4000}{y^3}$ $\quad \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = 2$

$\Delta = (2)^2 - \frac{4000}{x^3} \cdot \frac{4000}{y^3}$

in $(10,10)$: $\Delta = 4 - 4 \cdot 4 = -12 < 0$
$\Rightarrow$ een extremum
$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} > 0 \Rightarrow$ een minimum

13. Verwissel de integratievolgorde bij volgende integraal:

$$\int_1^2 \int_0^{4-y^2} f(x, y)\ dxdy$$

Maak 1 keuze

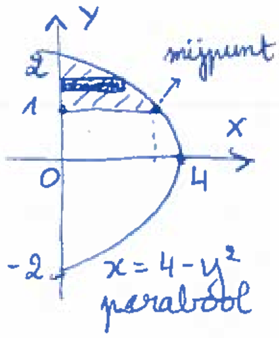
A. * $\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-x}} f(x, y)\ dydx$

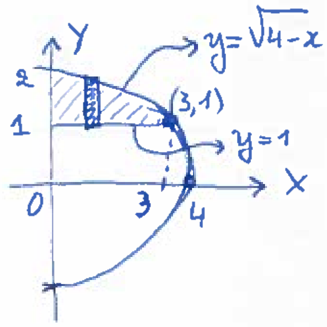
B. $\int_0^3 \int_0^{4-x^2} f(x, y)\ dydx$

C. $\int_1^2 \int_1^{\sqrt{4-x}} f(x, y)\ dydx$

D. $\int_1^2 \int_0^{4-x^2} f(x, y)\ dydx$

E. geen van de andere antwoorden is juist





snijpunt?
$y = 1$ en $x = 4 - y^2$
$\Rightarrow x = 4 - 1^2 = 4 - 1 = 3$
$(3,1)$

$$\int_0^{\pi/2}\int_2^{4\cos u} v^3\,dv\,du = \int_0^{\pi/2}\left[\frac{v^4}{4}\right]_2^{4\cos u} du = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{4^4}{4}\cos^4 u - \frac{2^4}{4}\right)du = \int_0^{\pi/2} 4^3\cos^4 u - \underbrace{\int_0^{\pi/2} 4\,du}_{4\frac{\pi}{2}=2\pi}$$

primitieve van $\cos^4 x$ is $\frac{3}{8}x + 8\sin(2x) + \sin(4x)$

$$\left[\frac{3}{8}x + 8\sin(2x) + \sin(4x)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{3}{16}\pi + 8\sin\pi - 8\sin 0 + \sin 2\pi - \sin 0$$

$$= \frac{3}{16}\pi$$

$$4^3\cdot\frac{3}{16}\pi = 12\pi$$

$$\Rightarrow 12\pi - 2\pi = 10\pi$$

14. Bereken de dubbelintegraal

$$\int_0^{\pi/2}\int_2^{4\cos u} v^3\,dv\,du$$

Maak 1 keuze

A. * 10π

B. 0

C. $5\pi^2$

D. -10π

E. $-5\pi^2$

15. Beschouw de krommenbundel
$y = C_1 \ln x + C_2 x$
Wat is de bijhorende DVG?

Maak 1 keuze

A. * $y - xy' + x^2(\ln x - 1)y'' = 0$

B. $C_1 = -x^2 y''$

C. $y - xy' - x^2(\ln x - 1)y'' = 0$

D. $y' = -xy''$

E. geen van de andere antwoorden is juist

$$\begin{cases} y = C_1 \ln x + C_2 x \\ y' = \frac{C_1}{x} + C_2 \\ y'' = \frac{-C_1}{x^2}\end{cases} \longrightarrow C_1 \text{ en } C_2 \text{ elimineren:}$$

$$C_1 = -x^2 y''$$

$$C_2 = y' - \frac{C_1}{x} = y' + \frac{x^2 y''}{x} = y' + xy''$$

$$y = C_1 \ln x + C_2 x$$

$$y = -x^2 y'' \ln x + (y' + xy'')x$$

$$y = (-x^2 \ln x + x^2)y'' + xy'$$

$$y - xy' + x^2(\ln x - 1)y'' = 0$$

16. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$(1 + x^5)y^3 = \frac{e^{x+y}}{\sin^3 x}(y' + y'')^3$$

Welke uitspraak over deze differentiaalvergelijking is waar?

Maak 1 keuze

A. * Het is een differentiaalvergelijking van de 2e orde en 3e graad.

B. Het is differentiaalvergelijking van de 3e orde en 2e graad.

C. Het is een lineaire differentiaalvergelijking van de 2e graad.

D. Het is een lineaire differentiaalvergelijking van de 3e orde.

E. Het is een lineaire differentiaalvergelijking van de 3e graad.

Hoogste afgeleide : $y'' \Rightarrow 2^e$ orde

Graad van deze hoogste afgeleide is : $(y'')^3 \Rightarrow 3^e$ graad

want $(y' + y'')^3$

$= y'^3 + 3y'^2 y'' + 3y'y''^2 + y''^3$

(c) $y(\tan x + 1) - \cos y \frac{dy}{dx} = 0$

$y(\tan x + 1)dx = \cos y \, dy$

$(\tan x + 1)dx = \frac{\cos y}{y} dy$

scheiding!

(d) $\sqrt{\alpha^4\beta}\, d\beta + \sqrt{\alpha\beta^4}\, d\alpha = 0$

$\sqrt{\alpha^4}\sqrt{\beta}\, d\beta = -\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta^4}\, d\alpha$

$\alpha^2\sqrt{\beta}\, d\beta = -\sqrt{\alpha}\,\beta^2\, d\alpha$

$\frac{\sqrt{\beta}}{\beta^2} d\beta = -\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha^2} d\alpha$ scheiding!

17. Welke van de volgende differentiaalvergelijkingen zijn scheidbaar?

(a) $\cos(xy)y' + (xy)^3 = 0$

(b) $1 - x^2 + y^2 - x^2y^2 + y' = 0$

(c) $y \tan x + y - y' \cos y = 0$

(d) $\sqrt{\alpha^4\beta}d\beta + \sqrt{\alpha\beta^4}d\alpha = 0$

(Meerdere antwoorden kunnen aangeduid worden!)

Maak 1 of meerdere keuzes

A. (a)

B. * (b)

C. * (c)

D. * (d)

(a) $\cos(xy)\, dy + (xy)^3\, dx = 0$

gaat niet.

(b) $(1 - x^2 + y^2 - x^2y^2)dx + dy = 0$

$(1 - x^2 + y^2(1-x^2))\,dx + dy = 0$

$(1-x^2)(1+y^2)\, dx + dy = 0$

$(1-x^2)\, dx = -\frac{1}{1+y^2} dy$

scheiding!

18. Gegeven een DVG van de vorm

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

waarbij hier M en N verondersteld worden volgende vorm aan te nemen:

$M(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ en $N(x, y) = g(x)$

Voor deze DVG geldt dan dat de veranderlijken scheidbaar zijn.

Maak 1 keuze

A. * waar

B. vals

$f_1(x) f_2(y)\, dx + g(x)\, dy = 0$

$\Rightarrow f_1(x) f_2(y)\, dx = -g(x)\, dy$

$\Rightarrow \frac{f_1(x)}{g(x)} dx = -\frac{1}{f_2(y)} dy$

scheiding der veranderlijken!

19. Beschouw de differentiaalvergelijking

$(x^3 + 6y^3)dx + (\ln(x^3 - y^3) - \ln(x^3 + y^3))\, dy = 0$

van de vorm

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

Welke uitspraak over deze differentiaalvergelijking is waar?

Maak 1 keuze

A. * De DVG is niet homogeen want M is homogeen van de 3e graad en N is homogeen van de 0e graad.

B. De DVG is homogeen want M en N zijn homogeen van de 3e graad.

C. De DVG is niet homogeen want M en N zijn niet homogeen.

D. De DVG is homogeen want M is homogeen van de 3e graad en N is homogeen van de 1e graad.

E. De DVG is niet homogeen want M is homogeen van de 3e graad en N is homogeen van de 1e graad.

$M(x,y) = x^3 + 6y^3$

$M(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 + 6(\lambda y)^3 = \lambda^3 (x^3 + 6y^3) = \lambda^3 M(x,y)$

$\Rightarrow$ homog. 3e gr.

$N(x,y) = \ln(x^3 - y^3) - \ln(x^3 + y^3)$

$= \ln \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$

$N(\lambda x, \lambda y) = \ln \frac{\cancel{\lambda^3}(x^3 - y^3)}{\cancel{\lambda^3}(x^3 + y^3)} = N(x,y) \cdot \lambda^0 \Rightarrow$ homog. 0e gr.

$= N(x,y)$

M en N niet van dezelfde graad homogeen $\Rightarrow$ DVG niet homogeen.

homogene DVG van de 0^e gr:

$y\left(1-\ln\frac{x}{y}\right) = x\frac{dy}{dx} \longrightarrow \left(1-\ln\frac{x}{y}\right)dx = \frac{x}{y}\,dy$ $\quad u=\frac{x}{y}$

$(1-\ln u)\,dx = u\,dy$

verwang

20. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y - y\ln\frac{x}{y} = xy'$$

Welke differentiaalvergelijking bekomt men aan de hand van de substitutie

$u = \dfrac{x}{y}$? $\quad uy = x \quad x' = u'y + uy'$

$dx = u\,dy + y\,du$

Maak 1 keuze

A. * $\dfrac{1-\ln u}{u\ln u}u' = \dfrac{1}{y}$

B. $\dfrac{1+\ln u}{u\ln u}u' = 1$

C. $\dfrac{1-\ln u}{u\ln u}u' = x$

D. $\dfrac{u\ln u}{1+\ln u}u' = x$

E. geen van de andere antwoorden is juist

$(1-\ln u)(u\,dy + y\,du) = u\,dy$

$\cancel{u\,dy} - \ln u\cdot u\,dy + y\,du - y\ln u\,du = \cancel{u\,dy}$

$-u\ln u\,dy + y(1-\ln u)\,du = 0$

$y(1-\ln u)\,du = u\ln u\,dy$

$\dfrac{1-\ln u}{u\ln u}\,du = \dfrac{1}{y}\,dy$

(scheiding!)

21. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$\left(\frac{-1}{x^2} + y^2\right)dx + 2xydy = 0$$

De algemene oplossing heeft de vorm F(x,y)=C.

Met welke uitdrukking kan F berekend worden, in de veronderstelling dat K een nog nader te bepalen functie is?

Maak 1 keuze

A. * $F(x,y) = \displaystyle\int\left(\frac{-1}{x^2} + y^2\right)dx + K(y)$

B. $F(x,y) = \displaystyle\int\left(\frac{-1}{x^2} + y^2\right)dx + K(x)$

C. $F(x,y) = \displaystyle\int 2xy\,dx + K(y)$

D. $F(x,y) = \displaystyle\int 2xy\,dx + K(x)$

E. De algemene oplossing heeft niet met zekerheid de vorm F=C want de DVG is niet totaal.

vw. Euler: $\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{x^2}+y^2\right) &= 2y\\ \frac{\partial}{\partial x}(2xy) &= 2y\end{aligned}\right) = !$

dus DVG is inderdaad totaal.

$\exists F: \; dF = 0 = M\,dx + N\,dy$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{-1}{x^2} + y^2 & (1)\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2xy & (2)\end{cases}$$

integreren naar x: neem (1)

$F(x,y) = \displaystyle\int\left(\frac{-1}{x^2} + y^2\right)dx + K(y)$

"integratie-cte."

DVG is 1e orde, 1e gr, en totaal: vw. van Euler:

22. Beschouw de differentiaalvergelijking
$(\frac{y}{x} + 2xy)dx + (\ln x + x^2)dy = 0$
Wat is de algemene oplossing?
Maak 1 keuze

A. * $y \ln x + x^2 y = C_1$

B. $F(x, y) \cancel{= y \ln x} + x^2 y$ geen C_1

C. $y = y \ln \cancel{x + x^2} y$ geen C_1

D. $y = y \ln x + x^2 y + C_1$

E. $F(x, y) = y \ln x + x^2 y + C_1$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x} + 2xy\right) = 2x$
$\frac{\partial}{\partial x}(\ln x + x^2) = 2x$ $\Big) \stackrel{!}{=}$ dus totaal.

$\Rightarrow \exists F: \; dF = M dx + N dy = 0$
en A.O. is dan $F = C_1$

Hier is $F = y \ln x + x^2 y$
dus A.O. is: $y \ln x + x^2 y = C_1$.

want $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y}{x} + 2xy & \rightarrow F = y \ln x + x^2 y + K(y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \ln x + x^2 & \rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = \ln x + x^2 + \frac{dK(y)}{dy} = \ln x + x^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{dK}{dy} = 0 \Rightarrow K = C$, kies $C = 0$ $\Rightarrow F = y \ln x + x^2$.

23. Beschouw de differentiaalvergelijking
$y^3 y' - x^3 y^4 = 1$
Met welke substitutie wordt de DVG omgezet in een lineaire DVG?
Veronderstel hieronder dat u(x) nog nader te bepalen is, en dat v(x) gegeven wordt door
$v = e^{\int x^3 dx}$.
Maak 1 keuze

A. * $w(x) = y^4$

B. $w(x) = \frac{1}{y^2}$

C. $w(x) = \frac{1}{y^3}$

D. $w(x) = \frac{y}{x}$

E. $w(x) = u(x)v(x)$

$y^3 \boxed{y'} - x^3 \boxed{y^4} = 1$ 1e orde, 1e graad
niet lineair
niet homogeen
~~niet~~

$y' - x^3 y = \frac{1}{y^3}$

dit is DVG Bernoulli
met $n = -3$
$y' + P(x) y = Q(x) y^n$

$\Rightarrow$ substitutie $w = y^{1-n} = y^{1-(-3)} = y^4$

24. Beschouw de differentiaalvergelijking
$xy = y' e^{x+y'}$
Voor deze DVG is de substitutie p=y' een eerste stap in de oplossingsmethode.
Aan welke differentiaalvergelijking moet p voldoen?
Maak 1 keuze

A. * $xe^{x+p}(p+1)p' = x^2 p + e^{x+p} p(1-x)$

B. $xe^{x+p}p' = x^2 p + e^{x+p}p(1-x)1$

C. $xe^{x+p}(p+1)p' = x^2 p - xe^{x+p} p$

D. $xe^{x+p}p' = x^2 p' + e^{x+p} p$

E. geen van de andere antwoorden is juist

1e orde, graad onbepaald

$xy = p e^{x+p}$
afleiden naar x
$y + x \frac{dy}{dx} = p' e^{x+p} + p e^{x+p}(1+p')$
verwang $\frac{p}{x} e^{x+p}$ p

Eenvoudiger: eerst oplossen naar $y = \frac{p}{x} e^{x+p}$
dan pas afleiden naar x: $\frac{dy}{dx} = p = \frac{p' e^{x+p}}{x} - \frac{p}{x^2} e^{x+p} + \frac{p}{x} e^{x+p}(1+p')$

$p x^2 = (p' x \cancel{p} - p + xp + xp p') e^{x+p}$
$p x^2 = \boxed{p'} x e^{x+p}(1+p) - p e^{x+p}(1-x)$ 1e orde 1e gr in $p(x)$.

 05/31/2017 04:57 PM

25. Beschouw de differentiaalvergelijking

$x^3 y''' = 1$

Los deze differentiaalvergelijking op. Wat is de algemene oplossing?

$y''' = \frac{1}{x^3}$ $y'' = \frac{-1}{3x^2} + C_1$

$y' = \frac{1}{6x} + C_1 x + C_2$

$y = \frac{1}{6}\ln x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$

C_1'

Maak 1 keuze

A. * $y = \frac{1}{6}\ln x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

B. $y = \frac{1}{6}\ln x + C_1 + C_2 + C_3$

C. $y = \frac{1}{6}\ln x + C_1$

D. $y = -\frac{1}{3x^2} + C_1$

E. geen van de andere antwoorden is juist

26. Stel dat y1 en y2 particuliere oplossingen zijn van de lineaire differentiaalvergelijking L(D) y = Q(x).
Welke uitspraak is waar?

$L(D)y_1 = Q(x)$

$L(D)y_2 = Q(x)$

$L(D)\left[\frac{y_1+y_2}{2}\right] = \frac{1}{2}L(D)y_1 + \frac{1}{2}L(D)y_2$

Maak 1 keuze

A. * Aan de hand van de lineariteitseigenschap kunnen we besluiten dat (y1+y2)/2 ook een particuliere oplossing is van L(D) y = Q(x).

B. Aan de hand van de lineariteitseigenschap kunnen we besluiten dat y1-y2 ook een particuliere oplossing is van L(D) y = Q(x).

C. Aan de hand van de lineariteitseigenschap kunnen we besluiten dat y1+y2 ook een particuliere oplossing is van L(D) y = Q(x).

D. De functies y1 en y2 zijn lineair afhankelijk.

E. Er geldt dat y1-y2 = 0.

$= \frac{1}{2}Q(x) + \frac{1}{2}Q(x)$

$= Q(x)$

$\Rightarrow \frac{y_1+y_2}{2}$ is ook opl.

27. Beschouw de differentiaalvergelijking

$y'' - 8y' + 15y = 0$

voor y(t). Los de DVG op. Wat is de algemene oplossing?

Maak 1 keuze

A. * $y = C_1 e^{5t} + C_2 e^{3t}$

B. $y = C_1 \cos(5t) + C_2 \sin(3t)$

C. $y = 5e^t + 3e^t + C_1$

D. $y = 5\cos t + 3\sin t + C_1$

E. $y = 5e^t + 3e^{-t} + C_1 x + C_2$

$D^2 - 8D + 15$

$d = 8^2 - 4.15 = 64 - 60 = 4$

$z^2 - 8z + 15 = 0$

$z = \frac{8+2}{2} = 5$ of $z = \frac{8-2}{2} = 3$

A.O. is $y = C_1 e^{5t} + C_2 e^{3t}$

28. Beschouw de differentiaalvergelijking

$y'' + 16y = 4x\sin 4x$

Wat is de vorm van de particuliere oplossing van deze differentiaalvergelijking?

(Veronderstel hierbij dat a, b, c en d nog nader te bepalen constanten zijn.)

Maak 1 keuze

A. * $x(ax+b)\sin 4x + x(cx+d)\cos 4x$

B. $(ax+b)\sin 4x + (cx+d)\cos 4x$

C. $ax\sin 4x + bx\cos 4x$

D. $a\sin 4x + b\cos 4x$

E. $ax\sin 4x$

A.O.?

$L(D) = D^2 + 16$

$L(z) = z^2 + 16 = 0$

$z = \pm 4j$

A.O.: $y = C_1 \sin(4x) + C_2 \cos(4x)$

P.O.? rechterlid vd vorm $\begin{pmatrix} x \\ \text{veelterm} \\ \text{graad 1} \end{pmatrix} \cdot \left(\cancel{\cos 4} \sin 4x\right) \cdot \left(e^{0 \cdot x}\right)$

$\Downarrow \beta = 4$ $\Downarrow \alpha = 0$

voorstel P.O. is dus

$x^1 \cdot \left[\underbrace{(ax+b)}_{\text{veelterm } 1^e \text{ gr}} \sin 4x + \underbrace{(cx+d)}_{\text{veelterm } 1^e \text{ gr.}} \cos 4x\right]$

extra want $\alpha + \beta j = 4j$ is 1 keer een wortel van $L(z) = 0$