A

UNIVERSITEIT GENT
FEA: BACHELOR OF SCIENCE IN DE INDUSTRIËLE WETENSCHAPPEN
Wiskunde II oefeningen: **test Reeks A**

Naam:

Schrijf net en duidelijk. Geen ZRM of GSM. Verklaar, indien niet gespecifieerd 'enkel antwoord', steeds de tussenstappen. **Oplossing zonder uitleg telt niet**. Vereenvoudig je antwoord.

Vraagnummer	1	2	3	4	5	Totaal
Maximum	5	3	4	4	4	
Behaalde score						

1. Bepaal de P.O. door $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ van $xe^{xy}y' + ye^{xy} + 1 = y' \sin y$.

AO * DVG: $(1 + y.e^{xy}) + (x.e^{xy} - \sin y).y' = 0$; $y' = \frac{dy}{dx}$

$$\underbrace{(1 + y.e^{xy})}_{= M(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}} dx + \underbrace{(x.e^{xy} - \sin y)}_{= N(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} dy = 0$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^{xy} + xy.e^{xy} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^{x.y} + xy.e^{xy}$$

$\Leftrightarrow$ totale DVG: $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}.dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}.dy = 0$; $dF = 0 \Leftrightarrow$ AO: $F = C_0$

* (1) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 1 + y.e^{xy} \xrightarrow{\text{integratie}} F = x + e^{xy} + K(y)$

(2) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x.e^{xy} - \sin y$

$x.e^{xy} + \frac{dK(y)}{dy} = x.e^{xy} - \sin y \Rightarrow \frac{dK(y)}{dy} = -\sin y$

$\Rightarrow K(y) = \cos y + C_1$

(3) $F(x,y) = x + e^{xy} + \cos y + C_1$

(4) AO: $x + e^{xy} + \cos y = C$

PO door $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: $0 + 1 + 0 = C \Rightarrow$ PO: $x + e^{xy} + \cos y = 1$

2. Bij deze vraag **ENKEL het antwoord** geven.

i. Bepaal de vergelijking van de bol wiens middelpunt samenvalt met het middelpunt van de bol $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 6$. De gezochte bol raakt aan het ruimtelichaam met vergelijking $x - 2y + 3z = 29$.

$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 56$

$* \ m(1,0,0)$

$* \ R = d(m,\alpha) = \dfrac{|1-2.0+3.0-29|}{\sqrt{1+4+9}} = \dfrac{28}{\sqrt{14}}$

$* \ R^2 = \dfrac{(4.7)^2}{2.7} = \dfrac{2^4.7}{2} = 8.7 = 56$

ii. Stel de DVG op die enkel en alleen de familie krommen $y - \ln(C_1 x) + C_2 = 0$ als oplossing heeft.

$x.y' = 1$

$y = \ln(C_1 x) + \ln(C_3)$ $\quad -C_2 = \ln(C_3)$

$y = \ln(C_1.C_3.x)$ $\quad C = C_1.C_3$

$y = \ln(Cx)$ [1 onafhankelijke constante]

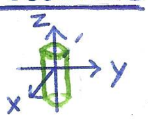
$\Downarrow$

$y' = \dfrac{C}{Cx} = \dfrac{1}{x}$

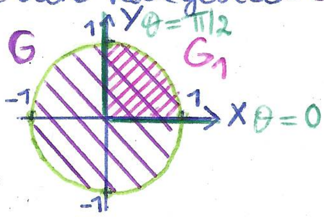
3. Bereken m.b.v. een dubbelintegraal de inhoud in $x^2 + y^2 = 1$ boven het XY-vlak en onder $z = 4 - x^2 - y^2$.

$\rightarrow z = 0$

$* \ x^2+y^2=1 \rightarrow$ in ruimte: omwentelingscilinder // Z-as met richtkromme de rand van vlak gebied G



integratiegebied G



$\rightarrow$ in XY-vlak: cirkel met $m(0,0)$ en $R=1$

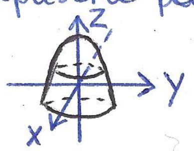
in Po.Co.: $r=1$

$x^2+y^2 \leq 1$

$* \ z = 4-x^2-y^2 \rightarrow$ elliptische paraboloide

$x^2+y^2 = 4-z$

$z \leq 4$



$f(x,y) = 4-x^2-y^2$

$z = f(x,y) \rightarrow \geq 0$ als $x^2+y^2=1$

Als $z=0$ dan $x^2+y^2=4$ (>1)

$\Rightarrow V = \iint_G |f(x,y)|\,dS = 4\iint_{G_1} f(x,y)\,dS$

Het ruimtelichaam is symmetrisch t.o.v. het XZ-vlak en t.o.v. het YZ-vlak.

Overgaan naar Po.Co. $(x^2+y^2=r^2)$ Jacobiaan

$V = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (4-r^2)\,r\,dr\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2} d\theta . \int_0^1 (4r-r^3)\,dr$

$V = 4.[\theta]_0^{\pi/2}.\left[2r^2 - \dfrac{r^4}{4}\right]_0^1 = 4.\dfrac{\pi}{2}.\left(2.\dfrac{4}{4} - \dfrac{1}{4}\right) = 2\pi.\dfrac{7}{4} = \dfrac{7\pi}{2}$

4. Bereken een lineaire benadering voor Bgtg $((1.03)\cdot(0.99)) - \frac{\pi}{4}$.

$$f(x_p+\Delta x, y_p+\Delta y) \approx f(x_p, y_p) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p \cdot \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_p \cdot \Delta y$$

$* \; f(x,y) = \text{Bgtg}(x.y) - \frac{\pi}{4}$

$* \begin{cases} x_p = 1 \\ y_p = 1 \end{cases}$ met $\begin{cases} \Delta x = 0{,}03 \\ \Delta y = -0{,}01 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x_p, y_p) = \text{Bgtg}\,1 - \frac{\pi}{4} = 0$

$$\begin{cases} * \; \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2.y^2} \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p = \frac{1}{2} \\ * \; \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{1+x^2.y^2} \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Bgtg}(1{,}03\cdot 0{,}99) - \frac{\pi}{4} \approx 0 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}03 + \frac{1}{2}\cdot(-0{,}01)$$

$$\approx 0{,}015 - 0{,}005 \qquad \Rightarrow \boxed{\approx 0{,}01}$$

5. Gegeven $p(2,2,2)$, $A: \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+t \\ z = -3-t \end{cases}$.

Bepaal de cartesische vergelijking van de rechte door p, met een richting loodrecht op A, die de X-as snijdt. $=$ rechte R

$* \; \vec{v}_A = \{-1, 1, -1\} \,/\!/\, \{1, -1, 1\}$

$* \; X$ = rechte die samenvalt met de X-as: $X: \begin{cases} x = k \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ met $k \in \mathbb{R}$

STAP 1: vergelijking van vlak α bepalen, zodat $\alpha \perp A$ en $p \in \alpha$

$* \; \vec{n}_\alpha \,/\!/\, \vec{v}_A$: $\quad \alpha: x - y + z = d$

$* \; p \in \alpha$: $\quad \cancel{2-2} + 2 = d$

$\Rightarrow \alpha: x - y + z = 2$

STAP 2: Ca.Co. van snijpunt q bepalen van vlak α en rechte X

$k - 0 + 0 = 2 \quad \Rightarrow q(2,0,0)$

STAP 3: cartesische vergelijking van rechte R bepalen, zodat $p \in R$ en $q \in R$

$* \; q(2,0,0)$

$* \; \vec{v}_R = \vec{p} - \vec{q} = \{0,2,2\} \,/\!/\, \{0,1,1\}$

$\Rightarrow \boxed{R: \begin{cases} x = 2 \\ y = z \end{cases}}$