EXAMEN WISKUNDE 2 (eerste zittijd academiejaar '20-'21, reeks A)
Opleiding industrieel ingenieur
Omcirkel: Eerste bachelor / Schakelprogramma

UNIVERSITEIT GENT

Nr.:

Naam :

/40

Schrijf netjes. Vul in op de opengelaten plaatsen.
Geen rekenmachine, gsm, smartphone, ...
Geef uitleg bij de open vragen. Veel succes!

FACULTEIT INGENIEURSWETENSCHAPPEN EN ARCHITECTUUR

1. Los op: $y' = \dfrac{1 - x^2 - y}{2 + y^3 + x}$. /6

$$\underbrace{(x^2+y-1)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(2+y^3+x)}_{N(x,y)}dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \Rightarrow \text{totale DVG (exacte)}$$

$\Rightarrow \exists F(x,y)$ met $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M$ en $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N$ waarbij $F(x,y) = 0$ de oplossing is van de DVG.

- $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = x^2 + y - 1 \Rightarrow F(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + yx - x + k(y)$
- $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2 + y^3 + x \Rightarrow x + k'(y) = x + (y^3 + 2)$
  $\Rightarrow \int dk(y) = \int (y^3+2)\,dy$
  $\Rightarrow k(y) = \dfrac{y^4}{4} + 2y + C$
- AO: $\dfrac{x^3}{3} + yx - x + \dfrac{y^4}{4} + 2y + C = 0$

2. Wat is de differentiaalvergelijking voor $v(t)$, met als oplossing enkel en alleen de bundel $v(t) = C_1 + C_2 \ln t$ waarbij $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$? /2

$$\begin{cases} v = C_1 + C_2 \ln t \\ v' = \dfrac{C_2}{t} \quad (*) \\ v'' = -\dfrac{C_2}{t^2} \end{cases}$$

$(*)$ $C_2 = v't$

$\Downarrow (**)$

$v'' = -\dfrac{v't}{t^2}$

$\Downarrow$

DVG: $t v'' + v' = 0$

3. Zij D het eindig ruimtelichaam begrensd door het XY-vlak, $\Omega_1 : x^2 + y^2 = 2\,z$ en $\Omega_2 : x^2+y^2 = 4\,x$. Stel de dubbelintegralen op om de inhoud van D te berekenen zowel in cartesische coördinaten als in poolcoördinaten.

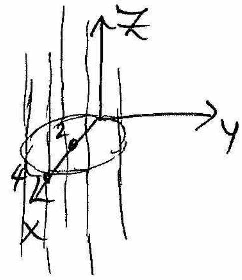
Reken vervolgens één van de twee dubbelintegralen uit.
Maak een schets van het integratiegebied. /8

$\Omega_1 : x^2+y^2=2z$ (elliptische paraboloïde met $z\geq 0$, top $=(0,0,0)$)

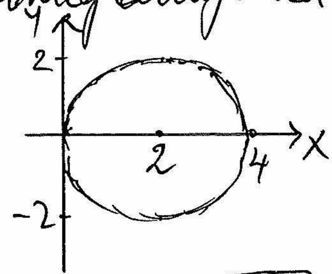
$\Leftrightarrow z = \dfrac{x^2+y^2}{2}$

$\Omega_2 : x^2+y^2=4x$ (cilinderoppervlak // Z-as)

$\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=4$



integratiegebied G : schijf met $m(2,0)$, $R=2$ in het XY-vlak



grens in CaCo : $y=\sqrt{4x-x^2}$ bovenaan
$y=-\sqrt{4x-x^2}$ onderaan

grens in PoCo : $r=4\cos\theta$

(CaCo) $$V=\int_0^4\int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} \frac{x^2+y^2}{2}\,dy\,dx$$

(PoCo) $$V=2\int_0^{\pi/2}\int_0^{4\cos\theta}\frac{r^2}{2}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{4\cos\theta}d\theta$$

$$=64\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta=16\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)\,d\theta$$

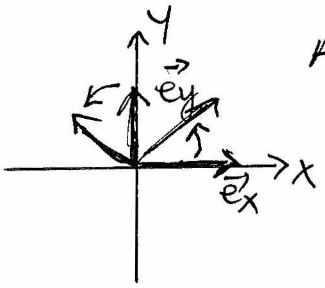
$$=16\int_0^{\pi/2}d\theta+8\int_0^{\pi/2}2\cos 2\theta\,d\theta+8\int_0^{\pi/2}(1+\cos 4\theta)\,d\theta$$

$$=8\left[3\theta+\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}+2\left[\sin 4\theta\right]_0^{\pi/2}$$

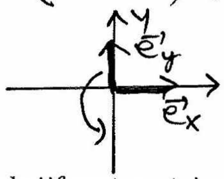
$$=8\Big(\frac{3\pi}{2}+\underbrace{\sin\pi}_{=0}-0\Big)+2\Big(\underbrace{\sin 2\pi}_{=0}-0\Big)$$

$$=12\pi$$

4. (a) Wat is de transformatiematrix A van de lineaire transformatie in het vlak die volgende beweging weergeeft: een spiegeling om de X-as, uitgevoerd na een rotatie van 45° in tegenwijzerzin rond de oorsprong. /8



$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ +\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$$



In de kolommen staan de beelden van de basisvectoren

(b) Omschrijf met matrices de transformatie in het vlak die een verschuiving voorstelt (waarbij bijvoorbeeld het punt (1, 1) verschoven wordt naar het punt (0, 5)), uitgevoerd na een herschaling in de x-richting met een factor 4. (x' en y' zijn de nieuwe coördinaten)

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ 4\end{pmatrix}$$

(c) Onder welke voorwaarden voor a, b en $c \in \mathbb{R}$ zullen de vectoren voorgesteld door de kolommen $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}b+c\\a+c\\a+b\end{pmatrix}$ lineair onafhankelijk zijn?

als $\begin{vmatrix}1 & a & b+c\\ 1 & b & a+c\\ 1 & c & a+b\end{vmatrix}\neq 0 \underset{\substack{R_2-R_1\\ R_3-R_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{vmatrix}1 & a & b+c\\ 0 & b-a & a-b\\ 0 & c-a & a-c\end{vmatrix}\neq 0$

$\Longleftrightarrow (b-a)(a-c)-(a-b)(c-a)\neq 0$

$\Longleftrightarrow (b-a)(\underbrace{a-c+c-a}_{=0})\neq 0$

onmogelijk

(d) Wat zijn de eigenvectoren horend bij de transformatiematrix $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$?

(Beredeneer dit zonder te rekenen.)

B: projectie op het XZ-vlak in combinatie met een herschaling met factor 2.

$\Rightarrow$ vectoren ($\neq \vec{0}$) die op een veelvoud van zichzelf worden afgebeeld zijn

- vectoren langs de Y-as ($\lambda=0$)

  $\begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix}$ $a\in\mathbb{R}_0$

- vectoren in het XZ-vlak ($\lambda=2$)

  $\begin{pmatrix}b\\0\\c\end{pmatrix}$ $b,c\in\mathbb{R}$ (niet tegelijk 0)

5. Vul in onderstaande tabel met een hoofdletter de juiste oplossing aan. Er is telkens exact 1 juiste oplossing. Duid bij elke vraag een antwoord aan want standard setting wordt toegepast bij de evaluatie. /16

vraag	1	2	3	4	5	6	7	8
antwoord								

(1) Wat is de oplossing van de DVG $y^{(4)} + y''' + y'' = 0$?

$L(D) = D^4 + D^3 + D^2$
$= D^2(D^2 + D + 1)$
$L(D) = 0 \Leftrightarrow D = 0$ of
$D = \frac{-1 \pm \sqrt{3}j}{2}$

A. $y(x) = C_1 + C_2\,x + C_3\,e^{-x/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x) + C_4\,e^{-x/2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x)$

B. $y(x) = C_1\,e^{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})\,x} + C_2\,e^{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})\,x}$

C. $y(x) = C_1\,e^{-x/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x) + C_2\,e^{-x/2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x)$

D. $y(x) = C_1 + C_2\,x + C_3\,e^{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})\,x} + C_4\,e^{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})\,x}$

(2) In welke richting in het punt $p(x,\,y) = p(1,\,1)$ verandert de functiewaarde f het meest met $f(x,\,y) = x + y^2 - 3\,x\,y + 5\,y - 1$?

A. $\{1,\,2\}$

B. $\{-2,\,-4\}$

C. $\{2,\,4\}$

D. $\{1,\,-2\}$

$\vec{\nabla} f = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right\} = \{1-3y, 2y-3x+5\}$

$\vec{\nabla} f_p = \{-2, 4\} \,/\!/\, \{1, -2\}$

(3) Welke uitspraken zijn waar voor de reguliere matrices $A, B \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$?

$*$: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

$**$: $|A + B| = |A| + |B|$ → niet geldig

bijvoorbeeld: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$|A| = 1$ $|B| = 2$ $|A+B| = 6$
$\neq |A| + |B|$

A. $*$ en $**$

B. enkel $*$

C. enkel $**$

D. geen van beiden

(4) Beschouw de oplossing y van $y' = y\,\text{cotg}x$ waarvoor $y = -2$ als $x = \frac{\pi}{2}$. Welke waarde neemt y aan voor $x = \pi$?

A. -2

B. 2

C. 0

D. ∞

$y' = y \,\text{cotg}\, x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y\,\frac{\cos x}{\sin x}$

$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$

$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln|\sin x| + C$

$\Leftrightarrow y = C^* \sin x$ $\quad C^* = e^C$

• $(\frac{\pi}{2}, -2)$: $-2 = C^*$

• y als $x = \pi$: $y = -2\sin\pi = 0$

(5) Beschouw de functie $z = y^2 - x^2$. Wat kan gesteld worden i.v.m. extrema van f over zijn domein?

A. in (0, 0) bereikt f een maximum
B. in (0, 0) bereikt f een minimum
C. in (1, 1) bereikt f een minimum
D. $z = f(x, y)$ heeft geen extrema

$$\begin{cases} \partial z/\partial x = 0 \\ \partial z/\partial y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow p(0,0) \text{ kandidaat}$$

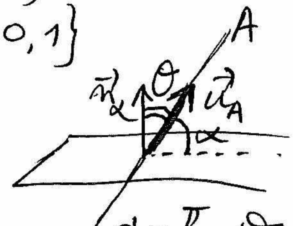
$$\Delta_p = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_p^2 - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_p \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_p = 0 - (-2).2 > 0$$

$\Rightarrow p(0,0)$ is een zadelpunt

(6) Wat is de grootte van de scherpe hoek α tussen de ruimtefiguren beschreven door $x = y = z$ en door $2x + z + 6 = 0$.

A. $\text{Bgcos}\sqrt{\frac{3}{5}}$
B. $\text{Bgsin}\sqrt{\frac{3}{5}}$
C. 30°
D. 60°

rechte $A: x=y=z \rightarrow \vec{u}_A = \{1,1,1\}$
vlak $\alpha: 2x+z+6=0 \rightarrow \vec{n}_\alpha = \{2,0,1\}$
$\vec{u}_A \cdot \vec{n}_\alpha = \|\vec{u}_A\| \, \|\vec{n}_\alpha\| \cos\theta$
$3 = \sqrt{3}\sqrt{5} \sin\alpha$
$\Rightarrow \alpha = \text{Bgsin}\frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{5}} = \text{Bgsin}\sqrt{\frac{3}{5}}$



$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$

(7) Beschouw de lineaire transformatie $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ waarvoor $T(\vec{e_x}) = 2\,\vec{e_x}$, $T(\vec{e_y}) = 3\,\vec{e_y}$ en $T(\vec{e_x} + \vec{e_y} + \vec{e_z}) = \vec{0}$.
Wat is de som van de eigenwaarden van T?

A. 0
B. 4
C. 5
D. -1

$T(\vec{e_x}+\vec{e_y}+\vec{e_z}) = T(\vec{e_x}) + T(\vec{e_y}) + T(\vec{e_z}) = \vec{0}$
$\Rightarrow T(\vec{e_z}) = -2\,\vec{e_x} - 3\,\vec{e_y}$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$|T - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(3-\lambda)(-\lambda) = 0$
eigenwaarden : 2, 3, 0

(8) Wat is het middelpunt m en straal R van $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z = 86 \\ 2x - 2y - z + 9 = 0 \end{cases}$?

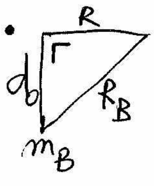
$\rightarrow$ bol B
$\rightarrow$ vlak α

A. $m(-1, 2, 3)$, $R = 10$
B. $m(3, -2, 1)$, $R = 8$
C. $m(-1, 2, 3)$, $R = 8$
D. $m(3, -2, 1)$, $R = 10$

$B: (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$
$m_B(3,-2,1) \qquad R_B = 10$

• loodlijn L door m_B en $\perp \alpha$: $\begin{cases} x = 3+2k \\ y = -2-2k \\ z = 1-k \end{cases}$

• $m = L \cap \alpha$:
$2(3+2k) - 2(-2-2k) - (1-k) + 9 = 0 \Leftrightarrow k = -2$
$\Rightarrow m(-1,2,3)$

• 

$d_0 = d(m_B, \alpha) = \frac{|2.3 - 2(-2) - 1 + 9|}{\sqrt{9}} = 6$

Pythagoras: $R = \sqrt{R_B^2 - d_0^2} = \sqrt{100-36}$
$= 8$