EXAMEN WISKUNDE 1 (eerste zittijd academiejaar '20-'21, reeks A)
Opleiding industrieel ingenieur
Omcirkel: Eerste bachelor / Schakelprogramma

UNIVERSITEIT GENT

Nr.:

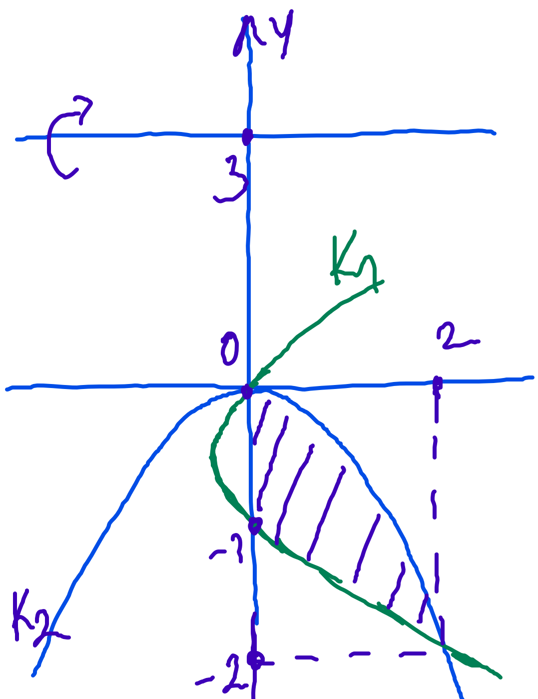
Naam : /40

Schrijf netjes. Vul in op de opengelaten plaatsen.
Geen rekenmachine, gsm, smartphone, ...
Geef uitleg bij de open vragen. Veel succes!

FACULTEIT INGENIEURSWETENSCHAPPEN EN ARCHITECTUUR

1. Beschouw de krommen $K_1 : x = y\,(y+1)$ en $K_2 : x^2 = -2\,y$. /8

   (a) Bereken de oppervlakte van het eindige gebied G gelegen tussen K_1 en K_2, rechts van de Y-as aan de hand van een integraal van de vorm $\int_{\dots}^{\dots} \dots\, dx$. Maak ook een tekening.



$$\text{opp} = \int_0^2 \left[\left(-\frac{x^2}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+4x}}{2}\right)\right] dx$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\,\frac{(1+4x)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^2$$

$$= -\frac{4}{3} + 1 + \frac{1}{12}(27-1)$$

$$= \frac{11}{6}$$

$K_1 : y^2 + y - x = 0$ $\quad D = 1+4x$

$y = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1+4x}\right)$

   (b) Stel de integraal (aan de hand van de schilmethode) op die toelaat de inhoud te berekenen van het omwentelingslichaam dat ontstaat door G te wentelen om $y = 3$. De integraal moet niet berekend worden.

$$I = \int_{-1}^{0} 2\pi(3-y)\sqrt{-2y}\, dy$$

$$+ \int_{-2}^{-1} 2\pi(3-y)\left[\sqrt{-2y} - y(y+1)\right] dy$$

2. (a) Beschouw de poolkromme $r = \dfrac{9}{27\,\theta^3 + \pi^3}$. Bepaal de vergelijking van een asymptoot van deze kromme. Teken deze asymptoot. /8

$r \to +\infty$ als $\theta \to -\frac{\pi}{3} = \theta_0$

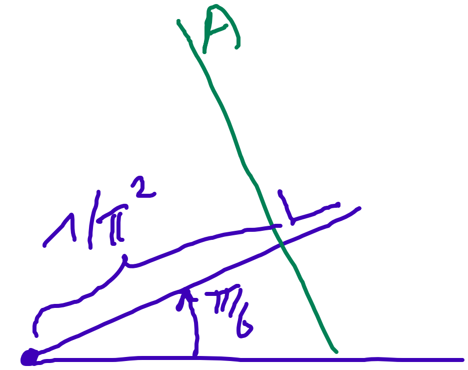
$\left(\frac{1}{r}\right)' = \frac{1}{9}\left(27 \times 3\theta^2\right) = 9\theta^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{r}\right)'_0 = \pi^2$

A asymptoot: $\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r}\right)'_0 \sin(\theta - \theta_0)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{r} = \pi^2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\pi^2} = r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta - \frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\pi^2} = r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$



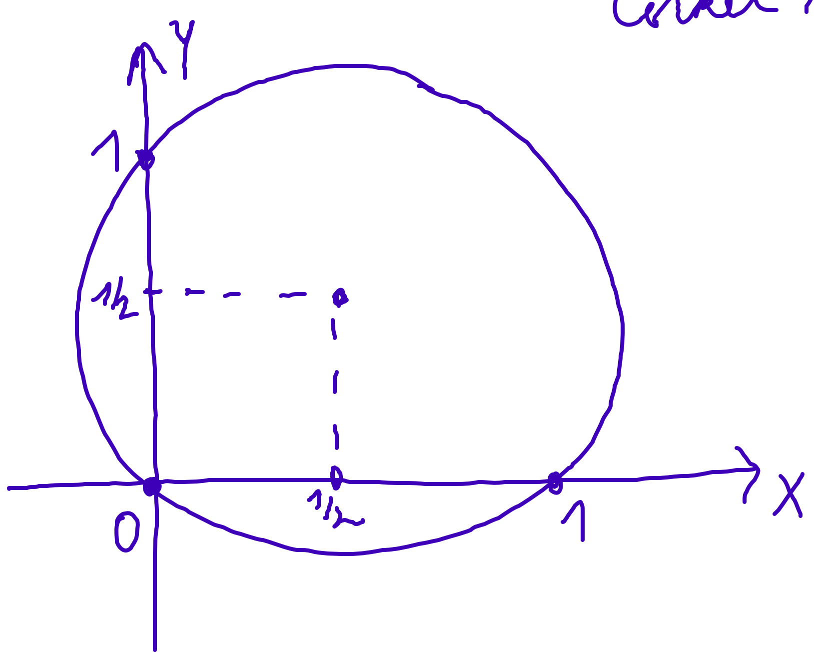
(b) Zet de poolkromme $r = \cos\theta + \sin\theta$ om naar cartesische coördinaten en maak een tekening hiervan.

$r = \cos\theta + \sin\theta \Rightarrow r^2 = r\cos\theta + r\sin\theta$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - x - y = 0$

$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

Cirkel met $m\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\quad R = \frac{1}{\sqrt{2}}$



3. (a) Los op over $\mathbb{R}$: $\log_{(1/3)}(4\,x) < -2 + \log_{(1/3)}(x-1)$. /8

BV: $4x>0$ en $x-1>0$, m.a.w. $x>1$

$\log_{1/3}(4x) < -2 + \log_{1/3}(x-1)$

$\Leftrightarrow 2 < \log_{1/3}\left(\frac{x-1}{4x}\right)$ $\left(2 = \log_{1/3}\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$

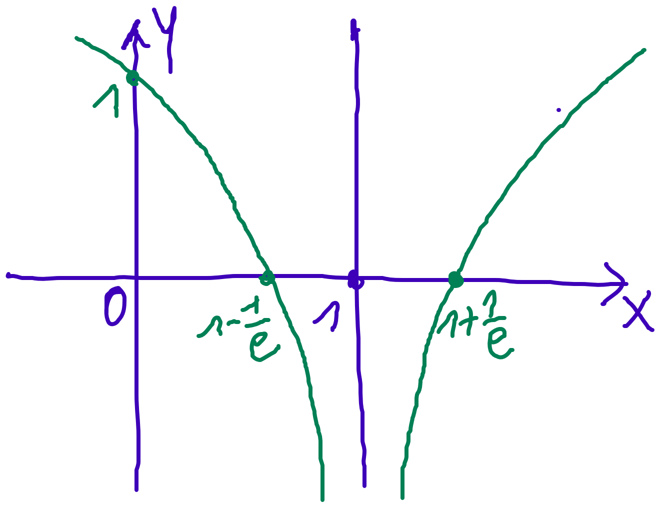
$\Leftrightarrow \frac{1}{9} > \frac{x-1}{4x}$ (grondtal $\frac{1}{3} < 1$, dus $<$ wordt $>$)

$\Leftrightarrow 9x - 9 < 4x$

$\underset{BV}{\Leftrightarrow} x < \frac{9}{5}$

oplossing: $\left]1, \frac{9}{5}\right[$

(b) Teken $y = \ln|x-1| + 1$ en duid de coördinaten aan van de snijpunten met de assen.



$y=0 \Leftrightarrow \ln|x-1| = -1$
$\Leftrightarrow x-1 = \pm e^{-1}$
$\Leftrightarrow x = 1+\frac{1}{e}$ of $x = 1-\frac{1}{e}$

(c) Beschouw $K : y = 2\cos(2\,x+2)$.

Snijpunten met de X-as: .... $\frac{\pi}{4} - 1 + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

Snijpunten met de Y-as: ...$(0, 2\cos 2)$

Periode: ....π

$y = 0$
$\Leftrightarrow 2x+2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - 1 + k\frac{\pi}{2}$

4. Vul in onderstaande tabel met een hoofdletter de juiste oplossing aan. Er is telkens exact 1 juiste oplossing. Duid bij elke vraag een antwoord aan want standard setting wordt toegepast bij de evaluatie. /16

vraag	1	2	3	4	5	6	7	8
antwoord								

(1) Wat is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de kromme met vergelijking $(x^2+y^2+6\,x)^2 = (x^2-y^2+2\,y)^2$ in het punt $p(-1,\,2)$?

A. -2
B. 1
C. -1
D. 2

$2(x^2+y^2+6x)(2x+2yy'+6) = 2(x^2-y^2+2y)(2x-2yy'+2y')$

in p: $(-1)(4+4y') = -2-4y'+2y'$

$\Leftrightarrow y' = -1$

(2) $\dfrac{(j-\sqrt{3})^{15}}{(1-j)^{26}} = \ldots$ $\dfrac{(2e^{j5\pi/6})^{15}}{(\sqrt{2}\,e^{-j\pi/4})^{26}} = \dfrac{2^{15}}{2^{13}}\,e^{j\left(\frac{25}{2}+\frac{13}{2}\right)\pi}$

$= 4e^{j19\pi}$

$= 4e^{j\pi}$

$= -4$

A. 4
B. $4\,j$
C. $-4\,j$
D. -4

(3) Wat is de oppervlakte van de driehoek met hoekpunten $a(-2,\,1,\,5)$, $b(3,\,-2,\,1)$ en $c(1,\,1,\,-1)$?

$\vec{ab} = \{5,-3,-4\}$ $\quad \vec{ac} = \{3,0,-6\}$

$Opp = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 5 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & -6 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\|\{6,6,3\}\|$

$= \frac{9}{2}\sqrt{4+4+1} = \frac{27}{2}$

A. $\dfrac{81}{2}$
B. $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$
C. 27
D. $\dfrac{27}{2}$

(4) Wat is waar omtrent volgende uitspraken voor een willekeurige f?
$*$: $y = f(x)$ is continu in $x = a$
$**$: $y = f(x)$ is afleidbaar in $x = a$
$***$: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

A. $** \Rightarrow * \Rightarrow ***$
B. $*** \Rightarrow ** \Rightarrow *$
C. $*** \Rightarrow * \Rightarrow **$
D. $* \Rightarrow ** \Rightarrow ***$

(5) Voor $L_1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5\,x) + x\,\cos(3\,x)}{\sin(2\,x) + x\,\cos(4\,x)}$ en $L_2 = \lim\limits_{x\to 0}(x+1)^{\sin x}$ geldt:

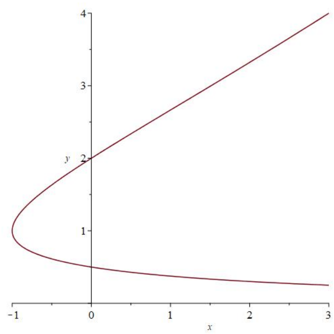
A. $L_1 = 2$ en $L_2 = 0$
B. $L_1 = 2$ en $L_2 = 1$
C. $L_1 = 1$ en $L_2 = 0$
D. $L_1 = 1$ en $L_2 = 1$

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{\underbrace{\frac{\sin 5x}{5x}}_{\to 1} + \frac{x}{5x}\cos 3x}{\underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{\to 1} + \frac{x}{2x}\cos 4x} \cdot \frac{5\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{5}{2}\,\frac{6/5}{3/2} = 2$$

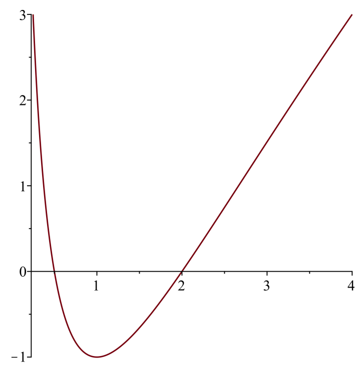
$$L_2 = 1^0 = \lim_{x\to 0}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{\sin x \cdot x} = e^0 = 1$$

(6) Welke tekening hoort bij de parameterkromme $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = 2^t \end{cases}$?

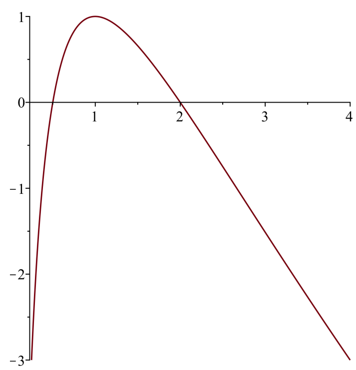
$y > 0$
$x \leq 1$



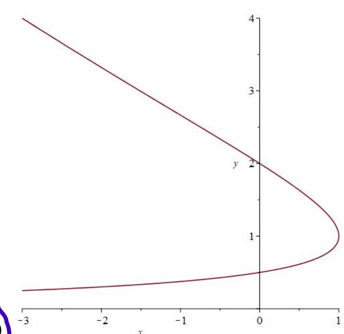
A.



B.



C.



D

(7) Wat stelt $x^2 = x - y^2$ voor in de ruimte?

A. een hyperbool
B. een cirkel
C. een elliptische cilinder
D. een hyperbolische cilinder

• geen z in de vgl. dus cilinder

• $\begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ is ellips

(8) Welke uitdrukking geeft de beste benadering voor $f(a-h)$ voor een willekeurige $y = f(x)$ en een kleine h-waarde?

A. $f(a-h) \approx f(a) + f'(a)\,h$
B. $f(a-h) \approx f(a) - f'(a)\,h$
C. $f(a-h) \approx f(a) + f'(h)\,(a-h)$
D. $f(a-h) \approx f(a) - f'(h)\,(a-h)$