1C Bereken de dubbelintegraal $\int_0^{\pi}\int_0^{\cos\theta} r\sin\theta\, dr\, d\theta$

$$\int_0^{\pi}\underbrace{\int_0^{\cos\theta} r\sin\theta\, dr}\, d\theta$$

"van binnen naar buiten"

$$= \int_0^{\pi}\sin\theta\underbrace{\int_0^{\cos\theta} r\,dr}\, d\theta$$

factor "$\sin\theta$" is onafhankelijk van r

$$= \int_0^{\pi}\sin\theta\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\frac{\cos^2\theta\,\sin\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \left[\frac{\cos^3\theta}{-6}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{(-1)-(1)}{-6}$$

$$= \frac{1}{3}$$

(1e) Bereken de dubbelintegraal $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\, dy\, dx$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\, dy\, dx$$

eigenschap 3.3.1 (p.34)

$$= \int_0^1 x^2\, dx \cdot \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \cdot \left[\operatorname{Bgtg} y\right]_0^1$$

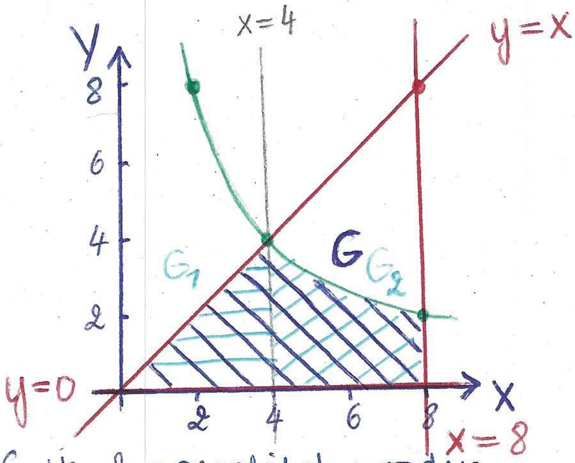
$$= \left(\frac{1}{3} - 0\right) \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0\right)$$

$$= \frac{\pi}{12}$$

③ Bereken $\iint_G x^2\,dx\,dy$ met G het gebied in het eerste kwadrant tussen $xy=16$, $y=x$, $y=0$ en $x=8$.

(1) <u>gebied G tekenen</u>:

* enkele punten v/h deel v/d hyperbool $xy=16$ $\left(y=\frac{16}{x}\right)$ in het eerste kwadrant: $P_1(2,8)$, $P_2(4,4)$, $P_3(8,2)$



(2) <u>integratievolgorde kiezen</u>

* bij beide integratievolgorden zal G in 2 opgesplitst worden

* bijvoorbeeld integratievolgorde dydx kiezen

→ eenvoudige integralen en berekeningen

→ opsplitsing van G in gebieden G_1 en G_2 door verticale rechte $x=4$ (op figuur aangeduid)

(3) <u>dubbelintegralen opstellen en berekenen</u>

$$\iint_{G_1} x^2\,dy\,dx + \iint_{G_2} x^2\,dy\,dx$$

* Voor alle punten van G_1: $x \in [0,4]$

* Rand van G_1 onderaan ligt op $y=0$

* Rand van G_1 bovenaan ligt op $y=x$

$$= \int_0^4 \int_0^x x^2\,dy\,dx + \int_4^8 \int_0^{16/x} x^2\,dy\,dx$$

$$= \int_0^4 x^2\,[y]_0^x\,dx + \int_4^8 x^2\,[y]_0^{16/x}\,dx$$

$$= \int_0^4 x^3\,dx + \int_4^8 16x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4 + \left[8x^2\right]_4^8$$

$$= [64] + [8.64 - \underbrace{8.16}_{=2.64}]$$

$$= 64\,[1+8-2]$$

$$= 420 + 28$$

$$= 448$$

5. Bereken $\iint_G \frac{1}{\sqrt{2y-y^2}}\,dx\,dy$ met G het gebied ingesloten door $x^2 = 4-2y$ in het eerste kwadrant.

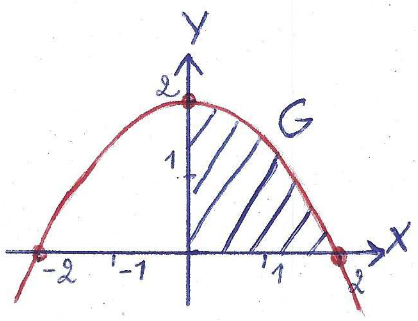
---

(1) gebied G tekenen:

$x^2 = 4-2y$: parabool $\rightsquigarrow x = \pm\sqrt{4-2y}$

→ top $t(0,2)$

→ snijpunten met x-as : $p_1(-2,0)$ en $p_2(2,0)$



(2) integratievolgorde kiezen:

* bij integratievolgorde dydx zal de onbepaalde integraal $\int \frac{dy}{\sqrt{2y-y^2}}$ (geen eenvoudige integraal / geen standaardintegraal) bepaald moeten worden
* integratievolgorde ~~dydx~~ dx dy levert eenvoudigere integralen op.

(3) dubbelintegraal opstellen en berekenen:

* Voor alle punten van G: $y \in [0,2]$
* Rand van G links ligt op $x=0$
* Rand van G rechts ligt op parabool: $x^2 = 4-2y$ met $x \geq 0$

$$\iint_G \frac{1}{\sqrt{2y-y^2}}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \int_0^{+\sqrt{4-2y}} \frac{1}{\sqrt{2y-y^2}}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2y-y^2}}\,[x]_0^{\sqrt{4-2y}}\,dy$$

$$= \int_0^2 \frac{\sqrt{4-2y}}{\sqrt{2y-y^2}}\,dy$$

$$= \int_0^2 \sqrt{\frac{2\cancel{(2-y)}}{y\cancel{(2-y)}}}\,dy$$

$$= \sqrt{2}\int_0^2 \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$= \sqrt{2}\,\left[2\sqrt{y}\right]_0^2$$

$$= 4$$