② Bepaal de PO van $y'' + 2y' = 0$ met $y(1) = 0$ en $y'(1) = 2$

$y'' + 2y' = 0$: homogene lineaire DVG v/d 2de orde met constante, reële coëfficiënten

$\boxed{AO}$ * karakteristieke veelterm v/d DVG:

$L(D) = D^2 + 2D = D(D+2)$

$\Rightarrow$ nulpunten van $L(D) = 0$: $\alpha_1 = 0$ en $\alpha_2 = -2$

* AO v/d DVG : $y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}$ particuliere oplossingen v/d DVG: $y = 1$ en $y = e^{-2x}$

$\Rightarrow$ AO: $\boxed{y = C_1 + C_2 e^{-2x}}$ (*)

$\boxed{PO}$ * afleiden van AO (*) : $y' = -2C_2 e^{-2x}$

$\Downarrow$ $y'(1) = 2$

$2 = -2C_2 e^{-2} \Rightarrow C_2 = -e^2$

$\Downarrow$ (*)

$\boxed{y = C_1 - e^2 . e^{-2x} = C_1 - e^{2-2x}}$ (**)

* $y(1) = 0 \xrightarrow{(**)} 0 = C_1 - 1 \Rightarrow C_1 = 1$

$\Downarrow$ (**)

$\boxed{\text{PO: } y = 1 - e^{2-2x}}$

④ Bepaal de AO van $y'' - 2y' + 10y = 0$.
Extra: Toon aan dat de 2 gevonden particuliere oplossingen lineair onafhankelijk zijn.

$y'' - 2y' + 10y = 0$: homogene lineaire DVG v/d 2de orde met constante, lineaire coëfficiënten

* karakteristieke veelterm v/d DVG: $L(D) = D^2 - 2D + 10$
  $\Rightarrow$ nulpunten van $L(D) = 0$:
  $\Delta = 4 - 40 = -36 = 36j^2 \quad \Rightarrow \alpha \pm \beta j = \dfrac{2 \pm 6j}{2} = 1 \pm 3j \quad (\alpha = 1, \beta = 3)$
* particuliere oplossingen v/d DVG:
  $\boxed{y = e^{\alpha x}\cos(\beta x) = e^{x}\cos(3x) \quad \text{en} \quad y = e^{\alpha x}\sin(\beta x) = e^{x}\sin(3x)}$ (*)
* AO v/d DVG: $y = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$
  $\Rightarrow \boxed{\text{AO: } y = C_1 e^{x}\cos(3x) + C_2 e^{x}\sin(3x)}$

(*) Eigenschap 9.2.2 (cursus p. 60) met $n = 2$:
Is $L(D)y = 0$ een homogene lineaire DVG v/d 2de orde, dan zijn de 2 particuliere oplossingen $y = y_1(x)$ en $y = y_2(x)$ lineair onafhankelijk als de Wronskiaan verschillend is van nul voor elke x behorend tot het domein:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

$$W = \begin{vmatrix} e^{x}\cos(3x) & e^{x}\sin(3x) \\ e^{x}\cos(3x) - 3e^{x}\sin(3x) & e^{x}\sin(3x) + 3e^{x}\cos(3x) \end{vmatrix}$$

$$W = e^{2x}\left[\cancel{\sin(3x)\cdot\cos(3x)} + 3\cos^2(3x)\right] - e^{2x}\left[\cancel{\sin(3x)\cdot\cos(3x)} - 3\sin^2(3x)\right]$$

$$W = 3e^{2x}\cdot\underbrace{\left[\cos^2(3x) + \sin^2(3x)\right]}_{=1 \text{ (grondformule v/d goniometrie)}}$$

$\Rightarrow W = 3e^{2x}$: Voor elke $x \in \mathbb{R}$ is $W > 0$
$\Rightarrow$ Dus voor elke $x \in \mathbb{R}$ is $W \neq 0$
$\Rightarrow y = e^{x}\cos(3x)$ en $y = e^{x}\sin(3x)$ zijn lineair onafhankelijk.

⑦ Bepaal de AO van $y'' + y' = \sin^2 x$.

DVG: $y''+y' = \sin^2 x$ $\xrightarrow[\text{goniometrische formule: } 2\sin^2 x = 1-\cos(2x)]{}$ DVG: $y''+y' = \underbrace{\frac{1}{2}}_{=Q_1(x)} \underbrace{-\frac{1}{2}\cos(2x)}_{=Q_2(x)}$

→ AO: $y = y_h + y_1 + y_2$

(1) y_h = AO v/d corresponderende homogene DVG $y''+y'=0$

$L(D) = D^2 + D = D(D+1)$ ⇒ $\alpha_1 = 0$ en $\alpha_2 = -1$

⇒ $\boxed{y_h = C_1 + C_2 e^{-x}}$

(2a) y_1 = PO v/d DVG $y''+y' = Q_1(x)$ met $Q_1(x) = 1/2$

$Q_1(x)$ is v/d vorm $V_n(x)$ met $n=0$

⇒ $y_1 = ax^p$ met $p=1$, want $\boxed{0}$ is een nulpunt van $L(D)=0$ met multiplicititeit $p=1$.

$y_1 = ax$
$y_1' = a$
$y_1'' = 0$

⇒ $y''+y' = a = \frac{1}{2}$ ⇒ $\boxed{y_1 = \frac{1}{2}x}$

(2b) y_2 = PO v/d DVG $y''+y' = Q_2(x)$ met $Q_2(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

$Q_2(x)$ is v/d vorm $e^{\alpha x}.\cos(\beta x)$ met $\alpha = 0$ en $\beta = 2$

⇒ $y_2 = e^{\alpha x}.x^p[a\cos(\beta x) + b\sin(\beta x)]$

met $p=0$, want $\boxed{2j}$ $(\alpha+\beta j)$ is geen nulpunt van $L(D)=0$

$y_2 = a\cos(2x) + b\sin(2x)$
$y_2' = -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x)$
$y_2'' = -4a\cos(2x) - 4b\sin(2x)$

$y''+y' = [2b-4a]\cos(2x) + [-4b-2a]\sin(2x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

⇒ $\begin{cases} 2b-4a = -1/2 \\ -4b-2a = 0 \end{cases}$ ⇒ $\begin{cases} 2b = -a \\ -5a = -1/2 \end{cases}$ → $a = \frac{1}{10}$ en $b = \frac{-1}{20}$

⇒ $\boxed{y_2 = \frac{1}{10}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x)}$

(3) $y = y_h + y_1 + y_2$

$$\boxed{y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x)}$$

(8) Bepaal de AO van $2y'' + 2y' + 3y = x^2 + 2x - 1$

AO van $2y'' + 2y' + 3y = x^2 + 2x - 1$: $y = y_h + y_1$

(1) y_h = AO vld corresponderende homogene DVG $2y'' + 2y' + 3y = 0$

$L(D) = 2D^2 + 2D + 3$

$\Delta = 4 - 24 = -20 = 20j^2 = 4.5j^2 \Rightarrow \alpha_h \pm \beta_h j = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{5}j}{4} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2}j$

$$\Rightarrow \boxed{y_h = C_1 e^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{5}x}{2}\right) + C_2 e^{-x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{5}x}{2}\right)}$$

(2) y_1 = PO vld gegeven DVG $2y'' + 2y' + 3y = x^2 + 2x - 1$

$Q(x) = x^2 + 2x - 1 \longrightarrow Q(x)$ is vld vorm $V_n(x)$ met $n = 2$

$\Rightarrow y_1 = x^p(ax^2 + bx + c)$ met $p = 0$, want $\boxed{0}$ is geen nulpunt van $L(D) = 0$

$y_1 = ax^2 + bx + c$

$y_1' = 2ax + b$

$y_1'' = 2a$

$2y'' + 2y' + 3y = 3ax^2 + (3b + 4a)x + (2b + 4a + 3c) = x^2 + 2x - 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ 3b + 4a = 2 \\ 2b + 4a + 3c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/3 \\ b = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{4}{3}\right) = \frac{2}{9} \\ c = \frac{1}{3}\left(-1 - \frac{4}{9} - \frac{4}{3}\right) = -\frac{25}{27} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1 = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{25}{27}}$$

(3) $y = y_h + y_1$

$$\boxed{y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{5}x}{2}\right) + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{5}x}{2}\right) + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{25}{27}}$$