(1f) Bepaal de orde en graad van de differentiaalvergelijking
$e^{y'''} - x \cdot y''' + y = 0$.

Cursus p. 42:

* De orde van de differentiaalvergelijking is de orde van de hoogste afgeleide die voorkomt in de vergelijking.
* De graad is de exponent van de macht waarmee de hoogste afgeleide voorkomt, waarbij de vergelijking als veelterm in die hoogste afgeleide wordt beschouwd.

* orde = 3, want y''' is de hoogste afgeleide die voorkomt in de vergelijking.
* graad is onbepaald, omwille van $e^{y'''}$.

(1g) Bepaal de orde en graad van de differentiaalvergelijking
$y' + x = (y - xy')^{-3}$

Cursus p.42:

* De orde van de differentiaalvergelijking is de orde van de hoogste afgeleide die voorkomt in de vergelijking.
* De graad is de exponent van de macht waarmee de hoogste afgeleide voorkomt, waarbij de vergelijking als veelterm in die hoogste afgeleide wordt beschouwd.

* DVG: $y' + x = \dfrac{1}{(y - xy')^3}$

merkwaardig product: $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

$$(y'+x)(y^3 - 3y^2xy' + 3y.x^2.y'^2 - x^3y'^3) = 1$$

$$y^3.y' - 3xy^2.y'^2 + 3x^2y.y'^3 - x^3y'^4 + xy^3 - 3x^2y^2y' + 3x^3y.y'^2 - x^4.y'^3 - 1 = 0$$

$$-x^3y'^4 + (3x^2y - x^4).y'^3 + (3x^3y - 3xy^2).y'^2 + (y^3 - 3x^2y^2)y' + xy^3 - 1 = 0$$

* orde $= 1$, want y' is de hoogste afgeleide die voorkomt in de vergelijking.
* graad $= 4$, omwille van y'^4

(2c) Toon aan dat de familie krommen $y = C_1 + \ln|C_2 x|$ te schrijven is met één constante.

$$y = C_1 + \ln|C_2 x|$$ eigenschap van logaritmen

$$y = \underbrace{C_1 + \ln|C_2|}_{= \text{ constante } C} + \ln|x|$$

$C_1 \in \mathbb{R}$ en $\ln|C_2| \in \mathbb{R}$

$$\Downarrow$$

$C_1 + \ln|C_2| \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow y = C + \ln|x|$$

5) a) Toon aan dat $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x$ de AO is van $y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$.

b) Bepaal de PO door (0,0) en (1,0)

---

a) $y = C_1 e^x + C_2 \cdot e^{2x} + x$ ⤵ afleiden naar x

$y' = C_1 e^x + 2 \cdot C_2 e^{2x} + 1$ ⤵ afleiden naar x

$y'' = C_1 e^x + 4 C_2 e^{2x}$

$$\Rightarrow y'' - 3y' + 2y$$

$$= \cancel{C_1 e^x} + \cancel{4 C_2 e^{2x}} - 3[\cancel{C_1 e^x} + \cancel{2 C_2 e^{2x}} + 1]$$
$$+ 2[\cancel{C_1 e^x} + \cancel{C_2 e^{2x}} + x]$$
$$= 2x - 3$$

b) substitutie van (0,0) en (1,0) in AO: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x$

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 0 = C_1 \cdot e + C_2 \cdot e^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -C_1 \\ C_1(e - e^2) = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{-1}{e - e^2} = \dfrac{1}{e^2 - e} \\ C_2 = \dfrac{-1}{e^2 - e} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ PO door (0,0) en (1,0):

$$y = \frac{1}{e^2 - e}[e^x - e^{2x}] + x$$

(8) Bepaal de DVG van de familie cirkels met gegeven straal R en middelpunt op de X-as.

STAP 1: Vergelijking van de familie krommen

* straal v/d cirkels $= R$
* middelpunt v/d cirkels $= m(C, 0)$
  (punt op de X-as)

$\Rightarrow$ vgl: $(x-C)^2 + y^2 = R^2$

STAP 2: DVG van de familiekrommen

Deze familie cirkels is enkel afhankelijk van 1 constante, namelijk van C: $(x-C)^2+y^2=R^2$

→ Elke cirkel van deze familie cirkels heeft dezelfde straal R

→ De cirkels van deze familie cirkels hebben niet dezelfde waarde voor de constante C.

⇓ cursus p. 44

Om de DVG van deze familie cirkels te bepalen, mag de vergelijking dus maar 1 keer afgeleid worden:

$$\begin{cases} (x-C)^2 + y^2 = R^2 & (2) \text{ impliciet afleiden naar } x \\ 2(x-C) + 2y \cdot y' = 0 & (1) \end{cases}$$

uit (1): $x - C = -y \cdot y'$

$\downarrow$ substitutie in (2)

DVG: $y^2 \cdot y'^2 + y^2 = R^2$

(10) Stel de DVG op van de bundel parabolen met de Y-as als as.

STAP 1 : Vergelijking van de familie krommen

* top = $t(0, C_1)$
* symmetrie-as: Y-as
* de richtlijn ligt niet vast $\Rightarrow C_2$

$\Rightarrow$ vgl: $(y - C_1) = C_2 x^2$

STAP 2 : DVG van de familie krommen

(1) ! Controle of de constanten C_1 en C_2 onafhankelijk zijn
→ OK, deze familie krommen is niet te schrijven met 1 constante.

(2) DVG vld familie krommen
Deze familie parabolen is afhankelijk van 2 constanten (namelijk van C_1 en C_2): $y - C_1 = C_2 x^2$

⇓ cursus p. 44

Om de DVG van deze familie parabolen te bepalen, mag de vergelijking dus maar 2 keer afgeleid worden:

$$\begin{cases} y - C_1 = C_2 x^2 \\ y' = 2C_2 x & (2) \\ y'' = 2C_2 & (1) \end{cases}$$

impliciet afleiden naar x

afleiden naar x

Substitutie van (1) in (2): $y' = y'' x$

$\Downarrow$

DVG: $x y'' = y'$