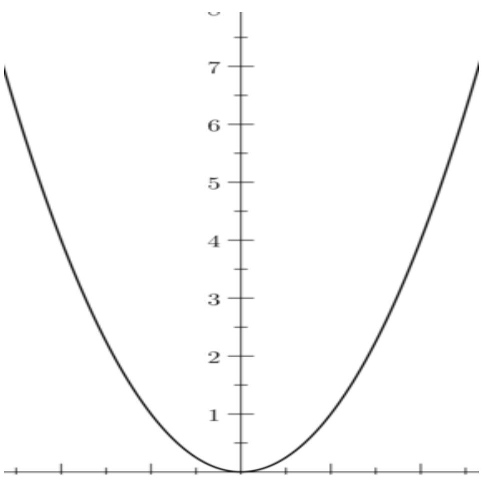
Maths Analyse
By the Anonymous Mr. Maths
Feat. Steeve

I. Notions de bases à savoir

- Une fonction f est paire sur [-a ;a] ⇔ f(x)=f(-x)

Cela se traduit en graphe que la courbe représentatif de f(x) en [-a ; 0] est la symétrie, par rapport à l'axe des ordonnées, de la courbe représentatif de f sur [0 ; a]

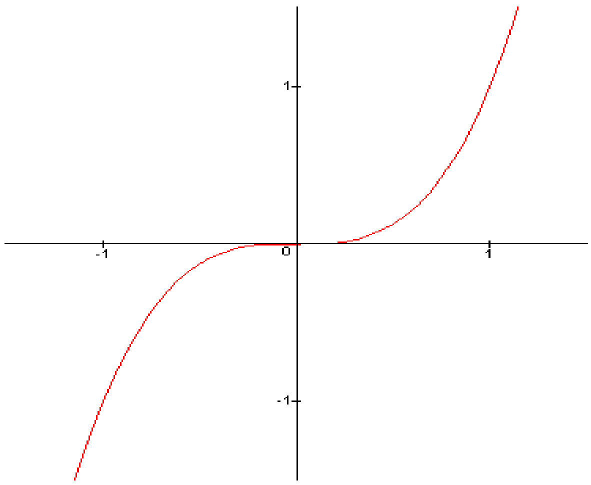
Exemple : $f(x) = x^2$ est une fonction paire



- Une fonction f est paire sur [-a ;a] ⇔ -f(x)=f(-x)

Cela se traduit en graphe que la courbe représentatif de f(x) en [-a ; 0] est la symétrie, par rapport à l'origine, de la courbe représentatif de f sur [0 ; a]

Exemple : $f(x) = x^3$ est une fonction impaire



Cas d'utilisation :

Cas simple : je sais que ma fonction f a pour image 5 au point d'abscisse 2 $\Leftrightarrow$ $f(2) = 5$

Et je sais aussi que f est paire donc $f(-2)=5$

Plus subtil : Soit la fonction g, définis par

$$G \begin{cases} \text{Pour tout } x < 0, \\ g(x)=-5x+4 \end{cases}$$

On considère deux cas : 1 – g est paire

2 – g est impaire

Pour les deux cas décrit déterminer le sens de variation de g(x) sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$

1- On sait que g est paire donc $g(x)=g(-x)$
   Pour x appartenant à $[0 ; +\infty[$, -x appartient à $]-\infty ;0]$
   Or $g(x) = -5x+4$ quand $x<0$ $\Leftrightarrow$ $g(-x)=-5(-x)+4$

   Donc quand $x>0$ $g(x)=5x+4$, donc g est croissant sur l'intervalle $[0 ;+ \infty[$

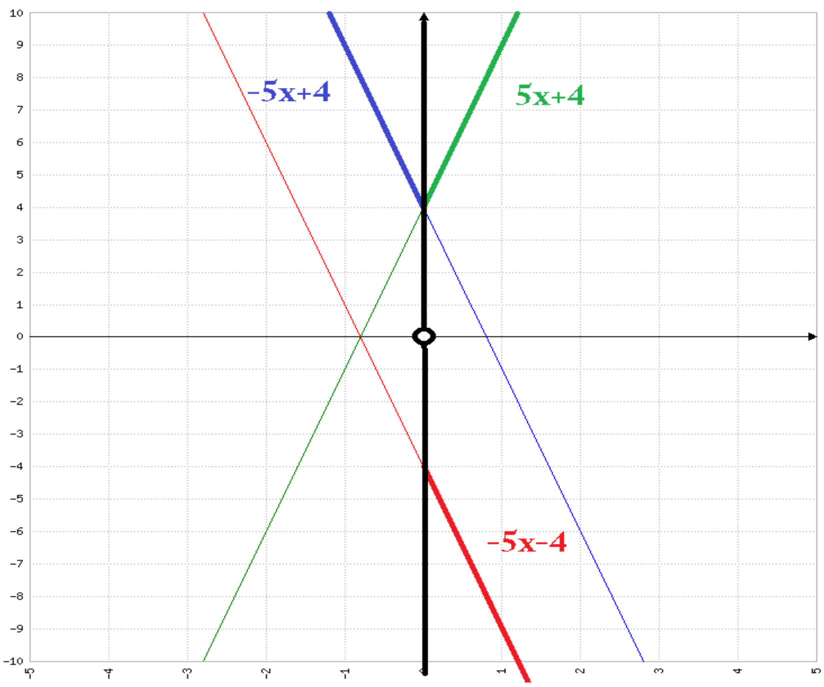
2- On sait que g est impaire donc $-g(x)=g(-x)$

   $\Leftrightarrow$ $g(x)=-g(-x)$

   Pour x appartenant à $[0 ; +\infty[$, -x appartient à $]-\infty ;0]$
   Or $g(x) = -5x+4$ quand $x<0$ $\Leftrightarrow$ $g(-x)=-5(-x)+4$

   Donc quand $x>0$ $g(x)=-(5x+4)=-5x-4$, donc g est décroissant sur l'intervalle $[0 ;+ \infty[$

   Vérifions :



En effet 5x+4 est symétrique à -5x+4 par rapport à l'axe des ordonnées et -5x-4 est symétrique à -5x+4 par rapport à l'origine (0 ;0) donc c'est parfait.

- f a un minimum local en x0 s'il existe un voisinage V de x0

ou` ∀x ∈ V; f(x) ≥ f(x0).

- f a un minimum global en x0 si ∀x ∈ Df; f(x) ≥ f(x0).
- f a un maximum local en x0 s'il existe un voisinage V de x0

ou` ∀x ∈ V; f(x) ≤ f(x0).

- f a un maximum global en x0 si ∀x ∈ Df; f(x) ≤ f(x0).

- f est une fonction bornée sur son domaine de définition si ∃(m,M) ∈ R²; ∀x ∈ Df, m ≤ f(x) ≤ M

  Je ne pense pas que j'ai besoin de développer sur ces points.

  (Petit rappel : R² = produit cartésien de R par R = R x R, Df = ensemble de définition de f)

Cas d'utilisation :

Prouver que a est une limite de f sur un intervalle donné revient à prouver que a est un minimum locale ou un maximum locale. Autrement dit qu'il ne peut dépasser cette limite.

II. Limite de fonction

- Quelques limites de fonctions usuelles :
  - $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
  - $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
  - $\lim_{x\to 0} x^a \ln x = 0 \ (a > 0)$
  - $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^b} = 0 \ (b \in \mathbb{R})$
  - $\lim_{x\to +\infty} x^c e^{-x} = 0 \ (c \in \mathbb{R})$
  - $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^d} = +\infty \ (d \in \mathbb{R})$

Rinkel sauvage apparait : « Je vous arrête quelque instant parce qu'on se fout un petit peu de ma gueule. C'est du vol et du plagiat. Moi je n'aime pas trop les voleurs et les fils de putes »

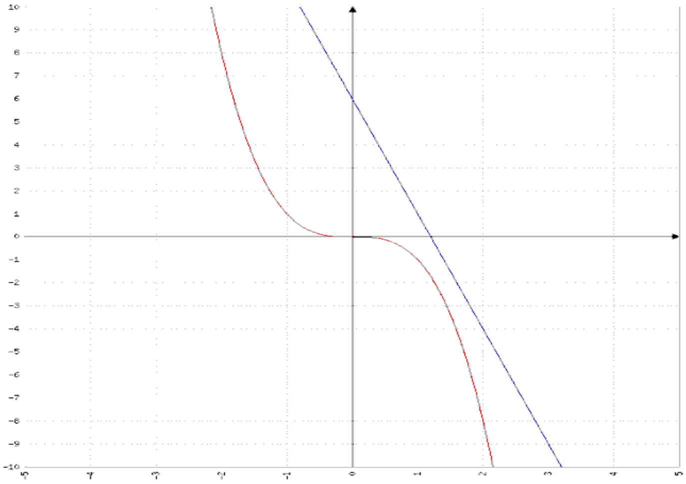
Mr. Maths lance stratoppercut. C'est très efficaces. *Rinkel fuit*

Théorème des gendarmes :

Si Mr. Maths tend vers la perfection et que Mr. X est meilleurs que Mr. Maths alors Mr. tend vers la perfection.

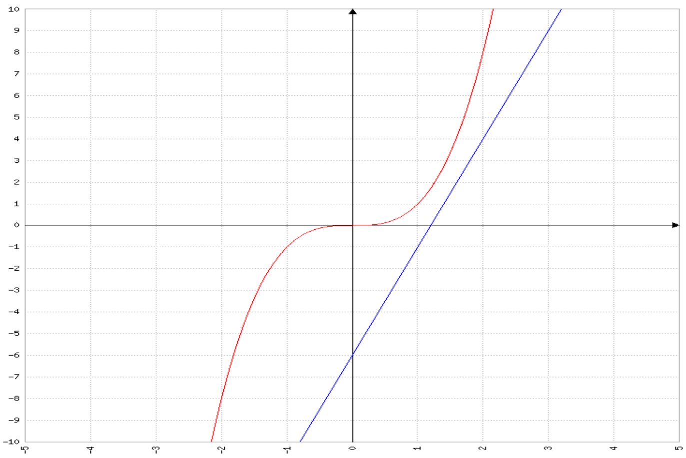
Si Mr. Maths tend vers la médiocrité et que Mr. X est pire que Mr. Maths alors Mr. X tend vers la médiocrité.

Si Mr Maths et Mr. X tend vers la normalité avec Mr.X meilleurs que Mr Maths et que Mr. ToutLeMonde est meilleurs que Mr.Maths mais pire que Mr. X alors Mr.ToutLeMonde tend vers la normalité.



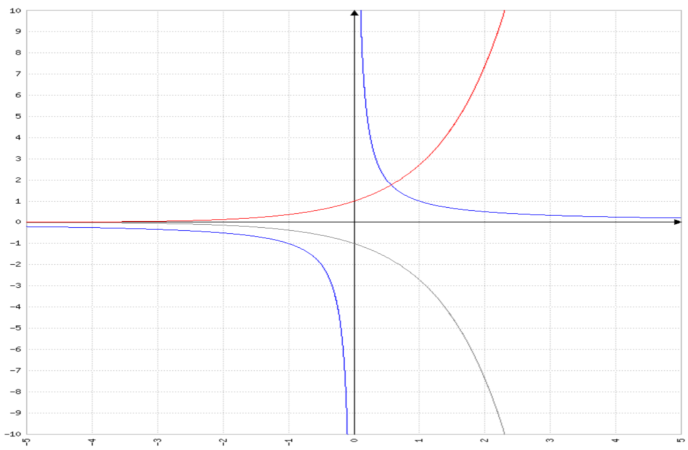
Exemple 1 : la fonction $f(x)=-(x^3) < g(x)=-5x+6$

On sait que -5x+6 tend vers -infini, Or f(x)<g(x) donc g(x) tend lui aussi vers –infini



Exemple 2 : la fonction $f(x)=(x^3) > g(x)=5x-6$

On sait que 5x-6 tend vers +infini, Or f(x)>g(x) donc g(x) tend lui aussi vers +infini



Exemple 3 : $f(x)= 1/x < g(x) = -\exp(x) < h(x)=\exp (x)$ sur $]- \infty ;0]$

On sait que g(x) et h(x) tend vers 0 quand x tend vers –infini or f(x)<g(x)<h(x) donc g(x) tend lui aussi vers 0

On note deux limites qui sont égaux, tel que f(x) et g(x) quand x tend vers infini,

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$.

On dit que f(x) est équivalent à g(x) au voisinage de plus infini.

Pour déterminer si deux limites sont égaux il suffit de calculer leur limites respectives et de voir si elles sont égaux. Si vous arrivé un une forme indéterminés alors passer à la deuxième méthode :

Lim f(x) = lim g(x) ⇔ lim f(x) / lim g(x) = 1 ⇔ lim (f(x) / g(x)) =1

Il vous suffit alors de calculer la limite de f(x) sur g(x) et voir si c'est égale à 1.

Notations de Landau : o et O

- $o(x^n)$ désigne toute fonction définie dans un voisinage de x_0 de la forme $x^n\varepsilon(x)$ où $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Ça vous dit rien ? Alors vous êtes au bonne endroit.

Prenons d'abord un exemple histoire d'illustrer cette propriété :

$-3x^3 + 6x^5 = o(?)$ au voisinage de $+\infty$.

Si vous avez une question sur les landaus o, vous en aurez toujours dans ce sens et jamais dans le sens $o(x^2) = ?$.

$-3x^3 + 6x^5 = x^6 [(-3/x^3) + (6/x)]$

$\lim_{x \to +\infty} [(-3/x^3) + (6/x)] = 0$

$x^6 [(-3/x^3) + (6/x)]$ est donc bien de la forme $x^n\, \varepsilon(x)$

donc $x^6 [(-3/x^3) + (6/x)] = o(x^6) = -3x^3 + 6x^5$

La méthode passe partout c'est de prendre le x degré le plus haut + 1 et on aura

$o(x^{\text{degré plus haut } +1})$

Au voisinage de 0, rien de plus facile $-3x^3 + 6x^5$ tend déjà vers 0 donc on a $o(x^0)$

- $O(x^n)$ désigne toute fonction définie dans un voisinage de x_0, de la forme $K(x)x^n$ où K est une fonction bornée dans un voisinage de x_0.

Vous n'avez rien compris ?

Moi non plus. (M. X : « Mais j'ai compris, moi » , Mr. Maths : « t'as pas compris c'est tout»)

A vrai dire, je pense que pour Rinkel, borné c'est « tend vers un nombre converge »

Mr. X : « Hepepep, commence pas avec tes mots trop savant »

Mr. Maths : « C'est pas très savant mais bon, en autre il a une limite autre que 0, +∞, -

∞ »

Donc si on prend l'exemple d'avant : $3x^3 + 6x^5 = x^5 [(-3/x^2) +6]$

$\text{Lim}_{x \to +\infty} [(-3/x^2) +6]= 6$

Donc $x^5 [(-3/x^2) +6]= O(x^5)$

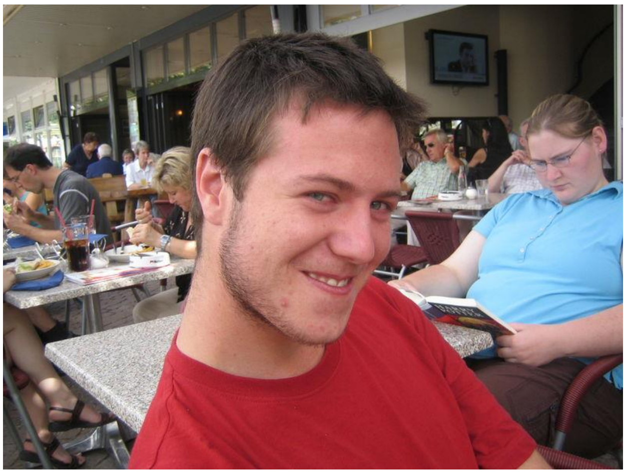
Ici on prend le degré le plus haut tout court ;

- $\sum_{k=1}^{n} k = O(?)$ au voisinage de $+\infty$.

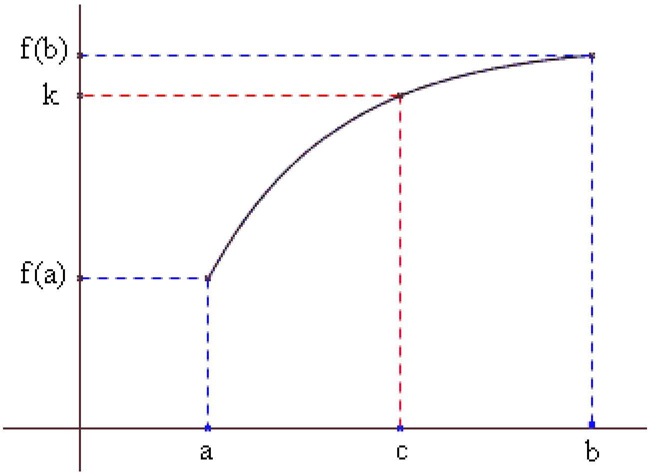
Ici quel que soit n' > 0, $(\sum k / x^{n'})$ diverge toujours vers 0.

Théorème des valeurs intermédiares :

Bon tout d'abord une illustration vaut mieux que des mots :



Non ce n'est pas ce que je voulais dire par illustration



C'est déjà mieux merci

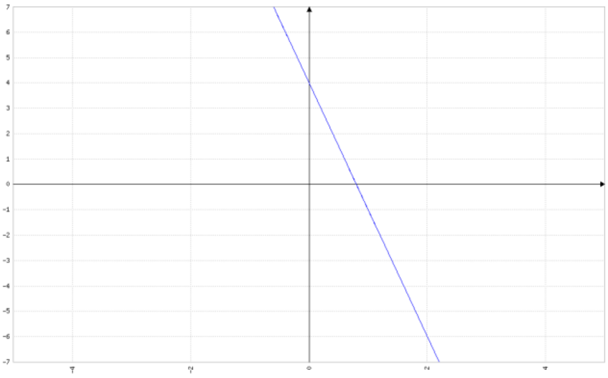
Qu'est-ce que vous allez me répondre si je vous dit que le théorème des Valeurs intermédiaire est con ?

« Tu nous prends pour des cons c'est ça ? »

Eh bien oui, quand je vous dis qu'entre l'Amérique et l'Europe, il y a l'océan Atlantique et que je veux aller de la France jusqu'aux Etats-Unis, par où dois-je passer ? (tout en voulant aller strictement vers l'ouest)

C'est exactement la même chose ici, je veux savoir si f a pour image k et je sais que k se trouve entre f(a) et f(b), il me suffit de dire que la fonction est continue et strictement croissant.

Exemple concret pour k=0 et f(x)=-5x+4



Utilisons le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer qu'il existe un α sur R tel que $f(\alpha)=0$.

F(x) est strictement décroissant et continue sur R. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Or 0 appartient à] $-\infty$; $+\infty$ [, donc d'après le CTVI (corolaire du théorème des valeurs intermédiaire) il existe un x appartenant à R tel que f(x)=0.

III. Dérivés

Petit rappel :

$x^{-1}=1/x$ $x^{1/2}=\sqrt{x}$

(f o u)' = u' * f'(u)

(u*v)'=u'v+v'u

(u/v)'= (u'v-v'u)/v²

Cos'(x) = - sin x

Sin'(x) = cos x

(ln x)' = 1/x

E. Dérivabilité

E1. Nombre dérivé en un point

f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite réelle quand $x \to x_0$.

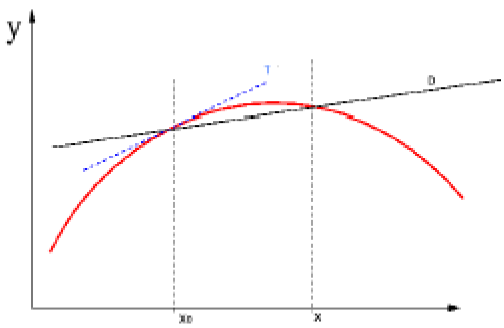


FIGURE: D est de pente $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, T est de pente $f'(x_0)$

Notation

$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est le nombre dérivé de f en x_0.

La tangente d'une fonction en un point a(x,f(x)) correspond à son taux d'accroissement, autrement cela représente comment évolue la fonction au moment où il traverse ce point.

On peut voir aussi ça comme une petite moyenne -> sur un intervalle [2, 6] la fonction h va de 10 à 20 donc sa moyenne est de (20-10)/(6-2) = 10/4 =2,5.

Plus l'intervalle est « étroit », plus la moyenne représentera un accroissement au point a.

D'où la formule :
$F'(a) = \lim_{x\to a} (f(x)-f(a) / (x-a))$

Equation de la tangente au point a(x0,f(x0))

Y= f(x0) + f'(x0)(x-x0)

Notation :

f^n est la fonction dérivé n fois de f

f est une fonction de classe C^n ⇔ f est dérivable n fois

<u>Théorème de Taylor Young :</u>

H3. Formule de Taylor-Young à l'ordre *n*

Théorème
Soit $a < b$ et f une fonction de classe C^{n-1} sur $[a, b]$.
Soit $x_0 \in]a, b[$ un point où f est n fois dérivable.
Alors

- il existe V_{x_0}, un voisinage de x_0
- il existe une fonction $\varepsilon : V_{x_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

tels que $\forall x \in V_{x_0}$,

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$$

Bon là, je ne vais pas développé, cette formule permet de décomposer une fonction f de classe C^n avec ses dérivées au point x0.

Il n'y a qu'à apprendre cette formule. V étant un intervalle au voisinage de x0 =>

[x0-v ;x+v0].

Mr. X : « attend mais t'es un rigolo toi, tu veux qu'on apprenne une formule longue comme mon bras ? »

Mr. Maths : « Ecris le sur ton bras, puisqu'elle aussi longue que ça »

Mr. X : « … »

Mr. Maths : « bon d'accord, voyons comment retenir ça »

Déjà à l'ordre 1, ça fait un truc du genre :

f(x0) + f'(x0)(x- x0) + (x-x0) ε(x)

la première partie est la formule de la tangente en point x0 et la deuxième est la notation Landau.

On a alors y + o(x-x0), c'est mieux non ?

Mr. X : « C'est quoi ce o ? »

Mr. Maths « bon retourne au début toi »

Bon reprenons et divisons cette formule en trois

f(x0) + f'(x0)(x- x0) + (x-x0) ε(x)

f(x0) + f'(x0)(x- x0) + o($(x\text{-}x0)^n$)

Après pas de mystère il faut retenir la formule à l'ordre n.

Théorème

Soit f une fonction de classe C^{n-1} sur $[a, b]$.

Soit $x_0 \in]a, b[$ un réel où f est n fois dérivable.

Si

- il existe V_{x_0} un voisinage de x_0
- il existe une fonction $\varepsilon : V_{x_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

- il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$, tels que $\forall x \in V_{x_0}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

alors

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \quad a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

Unicité de l'écriture

Vous vous dites surement : « Oh non par pitié pas une autre formule, achevez moi ! Ne vous inquiétez pas… »

Mr. ToutLeMonde : « Euh non, pas vraiment, il nous suffit juste de le noter sur la feuille A4 »

Mr. Maths : « Bon d'accord, mais juste à titre informatif, cette formule est exactement la même que celle vu précédemment »

Décomposons un peu ceci :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k)(x - x0)^k + (x - x0)^n \varepsilon(x)$$

$$= (a_0)(x - x0)^0 \ + \sum_{k=1}^{n} (a_k)(x - x0)^k + (x - x0)^n \varepsilon(x)$$

$$= \ f^0(\mathrm{x0}) * 1 \ + \sum_{k=1}^{n} (a_k)(x - x0)^k + (x - x0)^n \varepsilon(x)$$

$$= f(\mathrm{x0}) \ + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x - x0)^k}{k!} * \mathrm{f}^k(x0) + o(x - x0)^n$$

Incroyable n'est-ce pas ? Bon détaillons un peu :

$a_0 = 1/0\,! * f^0(\mathrm{x0})$ Or 0 !=1

donc $a_0 = 1 * f^0(\mathrm{x0})$

Pour pouvez retenir cette formule à la place de l'autre si vous trouvez qu'elle est plus simple et que vous savez revenir à la formule initiale.

H4. Règles de calcul pour $x_0 = 0$

Toutes les fonctions ε_i utilisées dans la suite vérifient $\lim_{x \to 0} \varepsilon_i(x) = 0$

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon_1(x)$
$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + x^n \varepsilon_2(x)$

- Somme
  $(f+g)(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + x^n \varepsilon_3(x).$

  Exemple
  Ecrire Taylor Young au voisinage de 0, à l'ordre 2 de la fonction : $f(x) = e^x - \cos x - \sin x$

Ici, c’est la même chose, il s’agit là de la formule initiale sauf que vous avez remplacez x0 par 0 donc (x-x0) devient tout simplement x.

Donc si vous avez deux fonctions f et g, et que vous les décomposer avec la formule de Taylor Young, vous pouvez les additionner sans problème => il suffit à chaque fois de factorisé le facteur commun, donc les x^n. Et vous obtenez cette expression ci-dessus.

Vous pouvez aussi multiplier deux fonction, c’est le même concept mais tout de même plus délicat.

Exemples au voisinage de 0

- $e^x =$
- $\ln(1+x) =$
- $\sin x =$
- $\cos x =$
- $(1+x)^\alpha =$

$e^x = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + \varepsilon(x) * o(x^n)$

$= \sum_{k=0}^{n} e^x * x^k / k! + \varepsilon(x) * o(x^n)$ => $a_k = f(x-x_0) / k!$ or $x_0 = 0$ et $f^k(x) = e^x$

De plus $e'(x) = e(x)$ donc quelques soit k appartenant à N $e^k(x) = e(x)$

Application au calcul d’équivalent

Théorème

Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors

$$f(x) - f(x_0) \underset{x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$$

Là non plus je ne vais pas développer, il faut retenir tout simplement la formule.

F. Formule des accroissements finis et applications

F1. Formule des accroissements finis

Si f est une fonction

- continue sur $[a, b]$
- dérivable sur $]a, b[$

alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

□

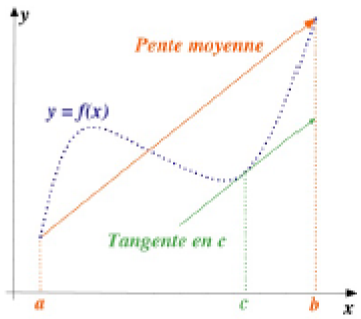


FIGURE: Illustration

Ici la figure est assez représentative de la formule.

Vous la retiendrai sans doute mieux ainsi : f'(c)= (f(b)-(a))/(b-a))

Comme vous le savez f'(c) est égale aux coefficient directeur de la tangente de f au point c.

(f(b)-(a))/(b-a)) représente la petite moyenne de f sur l'intervalle [a, b]. C'est le coefficient la pente moyenne

Deux fonctions affines qui ont le même coefficient directeur ont des droites représentatives parallèles. Si vous retenez cette image, vous devriez pouvoir retrouver facilement cette formule.

N'oubliez surtout pas de justifier en disant que f est dérivable sur l'intervalle *ouvert* et continue sur l'intervalle *fermé.*

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert $I =]a, b[$.
Si f admet un extremum local en un point $x_0 \in I$, alors

$$f'(x_0) = 0.$$

Remarque

Cette condition n'est pas suffisante.

Exemple

$f(x) = x^3$

Théorème de Rolle = Formule des accroissements finis quand $f(a) = f(b)$.

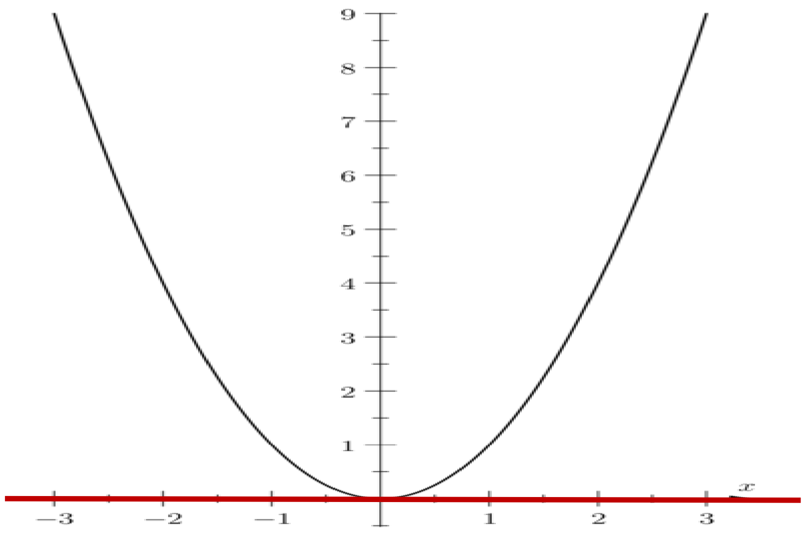
Si f est une fonction

- continue sur $[a, b]$
- dérivable sur $]a, b[$
- vérifiant $f(a) = f(b)$

alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Le théorème de Rolle est un cas particulier de la formule des accroissements finis, c'est le cas où on a f(a)=f(b). Elle permet de dire que lorsque cette condition est remplie il existe un point de la fonction où l'accroissement est nul, elle est finie. Comme pour le cas de la fonction carrée.

La tangente de $f(x) = x^2$ en 0 est une droite qui a pour coefficient directeur 0.



F3. Application au calcul approché

Théorème

Si f est une fonction

- continue sur $[a, b]$ $(a < b)$
- dérivable sur $]a, b[$
- il existe un réel $M > 0$ tel que $\forall x \in]a, b[, \quad |f'(x| \leq M$;

alors pour tous réels x et x_0 dans $[a, b]$, on a :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|$$

Cette formule permet de calculer une valeur approchée de f(x).

|f(x) – f(x0)| est l'écart entre f(x) et f(x0). Et c'est écart est égale à M fois l'écart entre x et x0.

Bon si vous avez l'impression que c'est du char à bien, on va faire un exemple.

Exemple

Soit $f = \sin$.

- Soit a et b deux réels. Appliquer la formule des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$.
- En déduire que $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$.
- En déduire un encadrement de $\sin(29°)$.

1) Blabla continue, blablabla dérivable donc voilà f(b)-f(a) = (b-a) f'(c)
2) f'(x) = cos x or -1<=cos x <=1
   donc 0<=|f'(c)|<=1 Car |x|>=0 donc M=1
   ⇔ |(b-a)f'(c)|<=|(b-a)|
   ⇔ | f(b)-f(a) |<= |(b-a)|
3) prenons b=29 et a=30 soit π/3
   | sin 29 – sin 30 |<= |29 -30|
   ⇔ 0 <=|sin 29 - √2/2 | <= 1
   ⇔ -1 <= sin 29 - √2/2 <= 1
   √2/2 - 1 <= Sin 29 <= √2/2 +1
   Voilà c'est gagné

<u>Les points fixes</u>

f possède un point fixe si et seulement il existe un x sur Df tel que f(x)=x, le point a pour coordonnés (x,x)

Théorème du point fixe

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné et f une fonction définie sur I telle que

- $f(I) \subset I$
- f est continue sur I
- f est dérivable sur $]a, b[$
- il existe un réel $M < 1$ vérifiant $\forall x \in]a, b[, \quad | f'(x) | \leq M$.

Alors f a une unique point fixe dans I.

Etudions un peu ces conditions, il y a déjà les classique dérivable et continue sur l'intervalle. Ensuite il la première condition qui demande à ce l'ensemble des images de f sur I soit inclus dans I. Quoi de plus logique vu qu'on veut un x sur I tel que f(x)=x

Si x est compris entre a et b alors f(x) doit l'être aussi.

Et la quatrième condition qui dit que la dérivée de f'(x) doit être compris entre 1 et -1.

Mr. X : « Mais où as-tu vus un -1 toi ?»

Mr. Maths : « Ah Mr. X, vous êtes enfin revenue du royaume de ce fameux Landau. Votre question est assez pertinente, en fait vu qu'en parle en valeur absolue si f(x)<0 alors | f(x) | > 0 et |f(x)|=- f(x). Il faut donc prendre deux cas le cas où f est négatif et où il est positif. Mais dans tous les cas sa valeur absolue doit être inférieure à 1. (il peut donc prendre la valeur de -0.9, en valeur absolue il sera inférieur à 1) »

Mais bon revenons au pourquoi de cette condition. Si f'(x) ne remplit pas cette condition alors il peut potentiellement accroitre (ou décroitre) trop vite pour atteindre le point en question.

Méthode des approximations successives

Théorème

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné et f une fonction définie sur I telle que

- $f(I) \subset I$
- f est continue sur I
- f est dérivable sur $]a, b[$
- il existe un réel $M < 1$ vérifiant $\forall x \in]a, b[, \quad | f'(x) | \leq M$.

Alors, pour tout $u_0 \in I$, $u_{n+1} = f(u_n)$ définit une suite convergente vers l'unique point fixe $r \in I$ de f.

De plus, l'erreur commise en approximant r par u_n est inférieure à $(b - a)M^n$, c'est à dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad | u_n - r | \leq (b - a)M^n$$

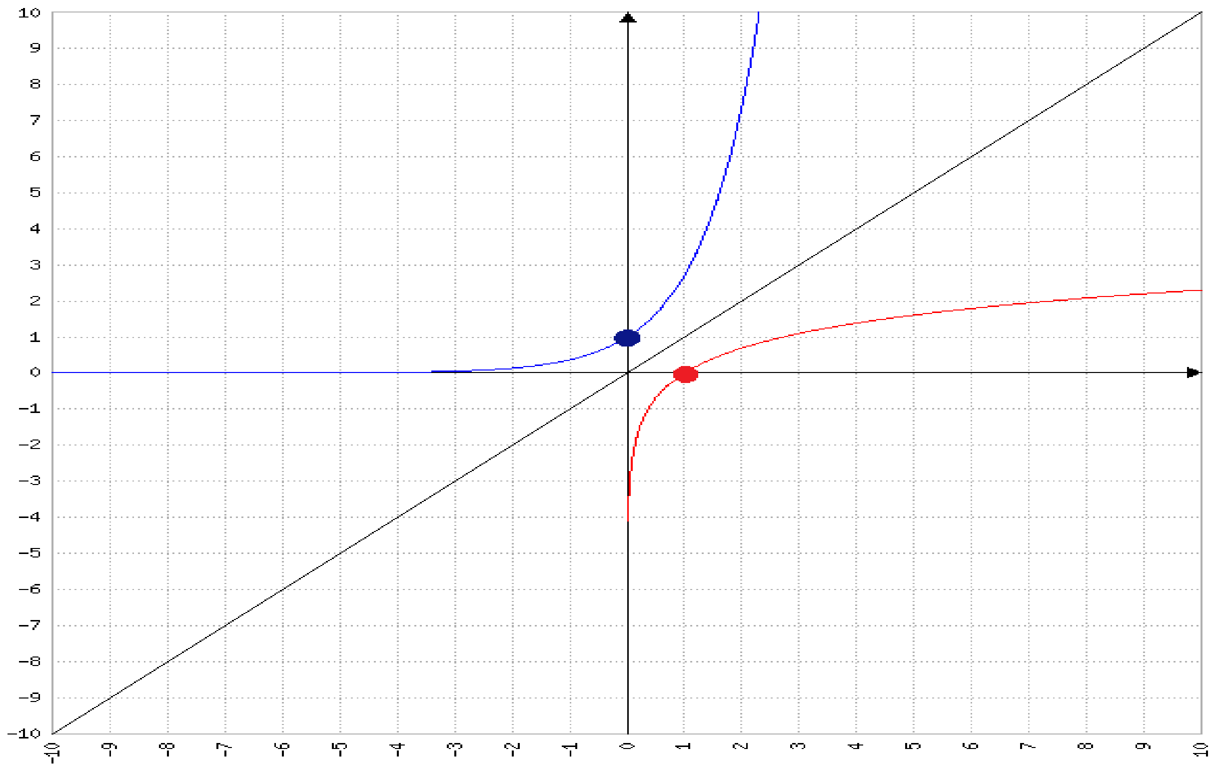
Voilà une combinaison du calcul approché et du théorème des points fixes. Il s'agit d'encadrer le point fixe à l'aide du calcul approché. Et il faut ici appliquer les conditions du théorème des points fixes. On pourra alors dire que

Un< |r| < -(b-a)M^n+Un

<u>Fonction réciproque :</u>

Qu'est ce qu'une fonction réciproque ?

Prenons une fonction quelconque f qui à x associe y : f(x)=y, eh bien sa fonction réciproque, c'est la fonction qui permet tout simplement le x qui est associé à un y donner. On le note $f^{-1}(y)=x$. En graphe cela se traduit par une symétrie par rapport à la droite représentatif de g(x)=x



Jolie n'est ce pas, il s'agit de la fonction exponentiel (en bleu) et de sa réciproque, la fonction logarithme népérien, ln pour les intimes (en rouge).

Le point bleu d'abscisse 0, montre que fonction exp a pour image 1 quand x=0 .

De l'autre côté on a le point rouge de point d'abscisse 1 qui montre que la fonction ln a pour image 0 quand x… tenez-vous bien quand x=1.

En effet on peut voir la logique suivante exp(x)=y ⇔ ln(y)=x. On dit aussi que $f(f^{-1}(x)) = x$.

Maintenant pour avoir la dérivé de la réciproque, il vous suffit de faire le calcul suivant :

$f^{-1}{}'(x) = 1 / f^{-1}(f'(x))$. Si on l'applique ici ça fait ln(x)' = 1 / (ln (exp(x)) = 1/x

Attention c'est un cas spécifique ici car la dérivé d'exponentiel est exponentiel.

Quelque fonction réciproque : x^2 / $\sqrt{x}$, sin (x) / arcsin (x) , tan(x) / arctan(x)…

Quelque notes :

$\tan'(x) = \tan^2(x) + 1$

$\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$

$\tan^2(x) = \tan(x^2)$ mais il est plus recommandé de noter $\tan^2(x)$

$\ln(a*b) = \ln(a) + \ln(b)$

$\exp(a+b) = \exp(a) * \exp(b)$

$\ln(a^b) = b \ln(a)$

$\exp(a)^{b} = \exp(a*b)$

$X^n = e^{n \ln(X)}$

Sin(a+b) = sinA cosB + cos A sin B | Sin(a-b) = sinA cosB - cos A sin B

Cos(a+b) = cosAcosB + sinA sinB | Cos(a-b) = cosAcosB - sinA sinB

IV. Intégration de Darboux

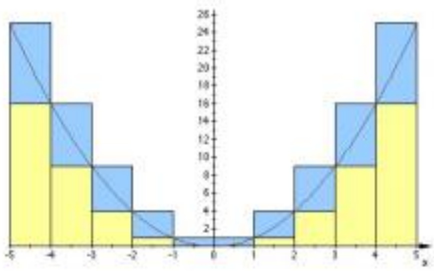


FIGURE: Sommes de Darboux inférieure et supérieure

On appelle somme de Darboux la somme des n rectangles qui recouvre la surface entre l'axe des abscisses et le graphe d'une une fonction donnée. Il existe deux sommes de Darboux, l'inférieur et le supérieur. Rien(du tout) de bien difficile comme vous le voyez dans la figure ci-dessous, la sommes des surfaces des rectangles jaunes représente la somme inférieur tant dis que la sommes des surfaces jaunes et bleus est la somme supérieur.

Erreur commise

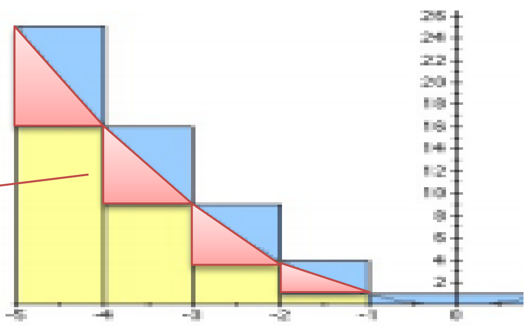


FIGURE: Sommes de Darboux

On dit qu'on effectue une somme inférieur dans l'intervalle [a,b] sur n intervalles, lorsqu'on découpe la fonction en n rectangle de largeur régulier. Dans ce cas le rectangle de largeur [a,a+n]prendra comme hauteur la plus petite valeur entre f(a) et f(a+n). Par exemple ici pour le premier rectangle jaune, [-5 ;4],

f(-4) = 16 < f(-5) =25

donc on a un rectangle de taille 1x16 pour une surface de 16.

La somme supérieur possède le même principe mais prend, elle, la borne supérieur des rectangles.

On note Mk, la borne supérieur et mk la borne inférieur

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} M_k \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} m_k$$

L'erreur commise par cette somme est divisés par le nombre d'intervalles. Ce qui fait que plus l'on prend d'intervalle et plus on se rapproche de la surface réel couvert par la fonction.

Ce qui fait que la surface de f est lim Sn n-> +∞ et lim sn n->+∞. On dit qu'une fonction est intégrable uniquement si lim Sn n-> +∞ = lim sn n->+∞.

On note l'intégrale de f

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

V. Intégrer des fonctions

Propriété d'intégration :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Remarque : lorsque vous intégrer, il faut s'assurer que le nombre d'en bas soit inférieur au nombre d'en haut.

Une intégrale est toujours positive.

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

L'intégrale d'une fonction f sur un intervalle [a,b] se calcul en calculant la primitives de la fonction f. On note la primitive de f(x) -> F(x) ou ∫ f(x)

$$\int_a^b f(x)dx = \quad F(b) - F(a)$$

F'(x) = f(x)

On dit que f(x) à plusieurs primitives, elles se déclinent sous la forme F(x) + C car la dérivé d'une constante est nul.

Primitives de fonctions usuelles

f	$\int f(x)dx$
e^x	$e^x + C$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln \mid x \mid + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$

Rinkel + Dahmani : « Eh toi là ! Pourquoi tu pique mon poly !?»

Calcul d’une primitive à partir de la forme f’(u) * u’ = (f(u))’

Si la dérivé de (f(u))’ c’est f’(u) * u’ alors inversement une fonction de la forme f’(u) * u’ aura pour primitive f(u).

Mr.X : « ah bah bien joué, ça nous avance des masses ça »

Mr.Maths : « dsl, voyons plutôt comment faire pour repérer la forme f’(u) * u’ »

Exemple :

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

Pour repérer la forme et décortiquer cette fonction, il faut d’abord repérer la parti u’. Vous devez repérer un produit dont l’un des deux facteurs est facilement primitivable (oui cela n’existe point comme mot).

Ici on peut voir la fonction comme étant le produit de 1/x et $(\ln x)^2$. Là, c’est le 1/x qui est le plus facile à primitiver (petit clin d’œil à Mr.Rongère).

$u' = 1/x \Leftrightarrow u = \ln x$

Donc on a 1/x * f’(ln(x)), reste plus qu’à déterminer f’(x), là $f'(x) = x^2$.

Mr.X : « wow wow woh, vous allez un peu trop vite pour moi »

Mr.Maths : « d’accord on récapitule»

$Ln(x)^2/x$

<u>Première étape</u> : trouver le produit (et donc séparer les facteurs)

$\ln(x)^2$ * 1/x

Deuxième étape : déterminer le facteur le plus facile à primitiver.

$\ln(x)^2$ * **<u>1/x</u>**, bien entendu on connait la primitive de 1/x qui est ln(x)

Rinkel : « Non, c’est faux, faux, faux ! »

Mr.Maths « wat ? ah oui. Pardon, il s’agit de ln |x|, car contrairement à 1/x, ln(x) n’aime pas les x négatifs, quelle raciste celle-là »

Reprenons le fil.

On a donc déterminé u’(x) = 1/x et sa primitive u(x) = ln(x)

On cherche à reproduire la forme u’ * f’(u), bah il suffit de remplacer le u et u’ par ce qu’on a trouvé, et ça fait :

$Ln(x)^2/x$ = 1/x * f’(ln(x))

Et là bah il suffit de trouver le fameux f’.

Donc là f' c'est $f'(x) = x^2$

Voilà on a décortiqué la fonction.

$u'(x) = 1/x \Leftrightarrow u(x) = \ln |x|$

$f'(x) = x^2 \Leftrightarrow f(x) = x^3/3$

finalement la primitive de $\ln(x)^2/ x = f(u) = \ln|x|^3/3$

Calcul d'une primitive à partir de la forme (u'v)

Bon passons directement à la pratique, il s'agit du même principe, passer de la dérivée à la primitive.

$(uv)' = u'v + v'u$

$u'v = (uv)' – v'u$

$\int(u'v) = uv - \int(uv')$

- Calculer $\int_0^1 xe^x dx$

Comme tout à l'heure il faut décortiquer la fonction. Je vous laisse quelques instants pour le faire.

..

.

.

.

.

..

.

..

…

Alors vous avez trouvez ?

Oui vous n'avez pas cherché, pas étonnant.

Donc on veut calculer $\int(u'v)$

Prenons v = x, car comme l'a dit une personne que nous allons appeler Mr.Swag, on cherche à réduire le dégrée des x lorsqu'on en a.

Donc si on prend $v = x \Leftrightarrow v' =1$ et donc $u = e^x \Leftrightarrow u'=e^x$

$\int(u'v) = xe^x - \int(e^x)$

$\int xe^x = xe^x – e^x = e^x(x-1)$

Mr.X : « c'est tout ? »

Mr.Maths : « Bah oui, me semble-t-il, ah bah on va calculer l'intégrale de 0 à 1 »

$\int xe^x = 0*e^1 – (e^0*(-1)) = 1$ et voilà

Calcul d'une primitive à partir de changement de variable

Le calcul d'une primitive avec un changement de variable n'est pas une méthode qui sera à déterminer. Il vous sera demandé directement.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha=u^{-1}(a)}^{\beta=u^{-1}(b)} f(u(t)) \times u'(t)\, dt$$

Comment en est-on arrivé à cette formule ?

La primitive de f(x) est F(x), le changement de variable consiste à changer la variable x avec une fonction u(t). ainsi f(x) deviendra f(u(t)) et sa primitive sera F(u(t)). Une primitive qui sera facile à trouver puisque sa dérivé est f(u(t)) * u'(t). D'où la formule ci-dessous.

Mr.X : « Quoi, mais c'est un peu délirant, ça veut dire que f(u(t)) = f(u(t)) * u'(t) ? »

Mr.Maths « attention ne me faite pas dire ce que je n'ai pas dit. f(u(t)) et f(u(t)) * u'(t) ont la même <u>Intégrale sur deux intervalles donnés</u> mais elles ne sont pas égale. Les bornes de l'intégrale changent puisqu'on effectue un changement de variable. »

Toujours flou ? un bon exemple et tout s'éclaircira.

- Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ en posant $x = u(t) = cost$.

Ok on pose donc x= cos(t). On pose cos(t) et pas cos(x) parce qu'il s'agit de deux variables différent. On doit trouver alors trouvé alors :

x = cos(t) ⇔ x² = cos²(t) ou cos (t²)

1 = cos(β) ⇔ β= 0

0 = cos(α) ⇔ α= π/2

On se retrouve donc avec $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1-cos^2(t)}$

Oups on a π/2>0, pas bien ça.

Il faut donc inverser un peu la donne => $\int_0^{\pi/2} -\sqrt{1-cos^2(t)}$

On rajoute u'(t) et on se retrouve avec :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} = \int_0^{\pi/2} -\sqrt{1-cos^2(t)} * (-sin(t))$$

Si on essaie de simplifier ça, on sait que cos²(t) = 1 – sin²(t)… quoi ? Vous ne le saviez pas ? Au temps pour moi.

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

Donc ça nous fait

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{sin^2(t)} * (sin(t))$$

« un peu trop vite en besogne » c'est ça ? alors reprenons :

$\text{Cos}^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) \Leftrightarrow \cos^2(a) = 1 - \sin^2(a)$

$\sqrt{1 - cos^2(t)} = \sqrt{1 - (1 - (-sin^2(t))} = \sqrt{sin^2(t)}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sqrt{sin^2(t)} * (-sin(t)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{sin^2(t)} * (sin(t))$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin(t) * (sin(t))$$

$$\int_0^{\pi/2} sin^2(t)$$

$$\int_0^{\pi/2} 1 - \cos(2t)/2$$

Primitive de (1 – cos(2t)) /2

½ est un coefficient, on ne le change pas

Primitive de 1 c'est t

Et primitive de cos(2t) c'est sin(2t)/2 (quand on dérive sin(2t), ça nous fait 2cos(2t), donc on enlève le 2 en divisant par 2)

Primitive du tout c'est donc (1/2) (t-sin(2t)/2)

Finalement

$\int_0^{\pi/2} sin^2(t)$= F(π/2) – F(0)

= π/4 - sin(π)/4 – 0 + sin(0)/4

= π/4 -0 – 0 + 1/4

= (1+π)/4

VI. Intégrale selon une variable x

A6. Intégrale fonction de la borne supérieure

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$.

Alors f est intégrable sur tout intervalle $[x_0, x] \subset [a, b]$.

Si x_0 est fixé, l'intégrale $\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$ est une fonction de x. Notons

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

On a $F(x_0) = 0$.

Théorème

- Si f est intégrable sur $[a, b]$, alors F est continue sur $[a, b]$.
- Si f est continue sur $[a, b]$, alors F est dérivable sur $[a, b]$ et $F' = f$.

Ce théorème permet de trouver la primitive de f (ou la dérivé de F) lorsqu'on définit une fonction qui à x associe une intégrale. Tout à fait logique quand on y pense, explication :

F(x) = ∫f(x) - ∫f(x0)

F'(x) = f(x) - 0 car x0 est un nombre fixé, donc ∫f(x0) est une constante. Et la dérivée d'une constante est nulle. Donc

F'(x) = f(x)

Petite exemple (non trivial) :

Calculer la dérivé de la fonction suivante :

- $x \to \int_{x}^{2x} e^{-t^2} dt$

Ici, on a pas une borne inférieure fixe donc il faut s'arranger pour que le x se casse.

Si on change la fonction en e^{-t^2-t}, on enlève x sur chacun des deux bornes.

On alors

$$\int_0^x e^{-t^2-t}(t)$$

Donc la dérivée de la fonction donnée est e^{-t^2-t}

C. Intégrale de Riemann généralisée

- Soit a un réel fixé, f une fonction intégrable sur $[a, x]$ pour tout $x > a$.

  Définitions
  - Si $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ a une limite réelle quand $x \to +\infty$, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ existe (ou est convergente) et on note
  $$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt$$
  - Si $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ n'a pas de limite réelle quand $x \to +\infty$, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ n'existe pas (ou qu'elle est divergente).

29

Théorème

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ existe si et seulement si $\alpha > 1$.

Si $\alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$

Exemple

Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$

30

- Soit a un réel fixé, f une fonction intégrable sur $[y, a]$ pour tout $y < a$.

  Définitions
  - Si $G(y) = \int_y^a f(t)dt$ a une limite réelle quand $y \to -\infty$, on dit que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ existe (ou est convergente) et on note
  $$\int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \lim_{y \to -\infty} \int_y^a f(t)dt$$
  - Si $G(y) = \int_y^a f(t)dt$ n'a pas de limite réelle quand $y \to -\infty$, on dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ n'existe pas (ou qu'elle est divergente).

Exemple

$\int_{-\infty}^{a} e^t \, dt$

31

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Définitions

- On dit que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ existe (ou est convergente) si $\int_{-\infty}^{a} f(t)\, dt$ et $\int_{a}^{+\infty} f(t)\, dt$ existent.

  On note alors :
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)\, dt + \int_{a}^{+\infty} f(t)\, dt$$
- On dit que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ n'existe pas (ou est divergente) si $\int_{-\infty}^{a} f(t)\, dt$ ou $\int_{a}^{+\infty} f(t)\, dt$ n'existe pas.

Exemple

$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, dt$ n'existe pas et pourtant $\lim_{x \to +\infty} \int_{-x}^{x} t\, dt = 0$

32

Pas besoin de trop s'attarder dessus, c'est assez clair ainsi je pense.

VII. Petite parenthèse de physique

Si on étudie la vitesse d'un objet en mouvement, on trace le graphe de la fonction f qui à un instant t associe la vitesse de l'objet.

On dit que son accélération est la dérivée de cette fonction et que sa position est la primitive.

La valeur moyenne de la vitesse au cours du trajet est égale à la moyenne de f qui se calcul avec

$$f_{moy}[a, b] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

(Calcul utilisable, évidemment, pour les autres fonctions ordinaires, ceux qui ne parlent pas de physique)

Contrairement à la vitesse moyenne pendant le trajet où là il s'agit de F(b) – F(a) / (b-a).

VIII. Fonctions paramétrées

Une fonction paramétrée qu'est-ce que c'est ? il s'agit d'une fonction qui selon un paramètre t va associés plusieurs images (ici en étudie que le cas où on a deux images pour un paramètre t).

$$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

On associe, le plus souvent, les fonctions paramétrer aux déplacements d'un objet. Dans ce cas là le paramètre t représente le temps tandis que les images sont des coordonnées.

Dérivé une fonction paramétrée consiste tout simplement à dérivé toutes les fonctions qui lui est associé.

On dit que la norme du vecteur vitesse (dérivé de la fonction) est égale à :

$$f'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

La norme du vecteur vitesse est égale à :
$\| f'(t) \| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$.

Et la longueur de celle-ci est

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

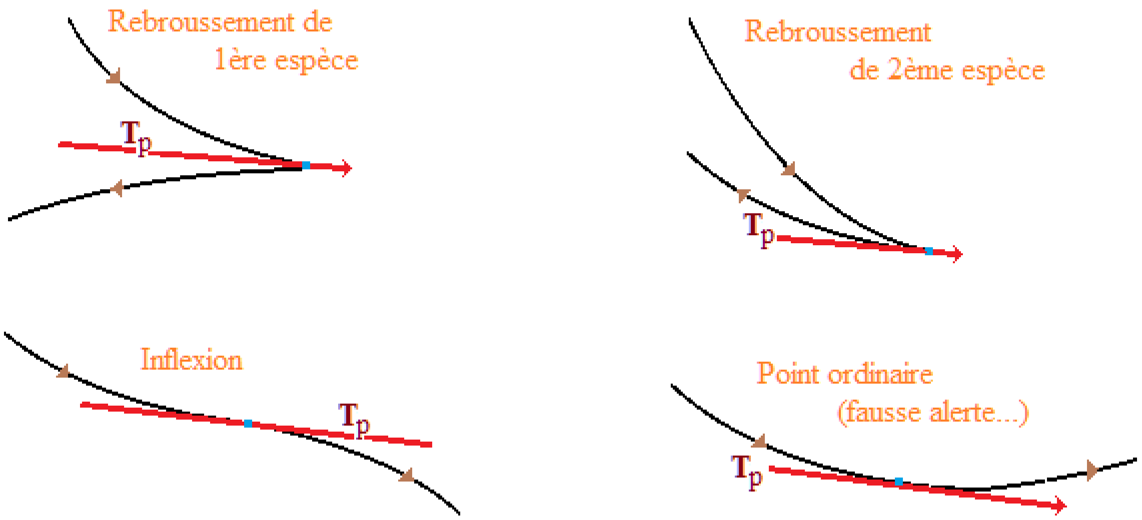
Petit rappel :

L'équation de la tangente de la fonction f en un point x0 est : f(x0)+f'(x0)(x-x0)

Il faut distinguer deux types de points dans une courbe paramétré :

- Les points ordinaires, ceux dont la vitesse instantanée est non nul (dérivé en un point)
- Les points stationnaires, donc inversement ceux qui ont une vitesse nul et qui marque la fin d'un accroissement, parmi les points stationnaires :
  - Point d'allure normale
  - Point d'inflexion
  - Point de rebroussement
  - Point de rebroussement de deuxième espèce

Voilà à quoi ils correspondent du point de vue d'un graphe



L'équation de la tangente d'un point stationnaire se calcul différemment des points ordinaires car il faut calculer la première dérivée qui n'est pas nul en ce point, ainsi que la deuxième pour en tirer le type.

On notera p le niveau de la dérivé non nul en ce point et q celui du deuxième non colinéaire à la $p^{\text{ième}}$ dérivé.

- Si p est impair
  - Si q est pair, $M(t_0)$ est un point à allure normale
  - si q est impair, $M(t_0)$ est un point d'inflexion
- Si p est pair
  - si q est impair, $M(t_0)$ est un point de rebroussement de première espèce
  - Si q est pair, $M(t_0)$ est un point de rebroussement de deuxième espèce

Ici, le théorème de Taylor Young trouve son utilité car si on peut exprimer f en fonction de ses dérivées, on peut exprimer une dérivée à partir des autres et de f.

Je m'arrête là car il s'agit de tout ce qu'on a fait jusqu'ici.

Exercice

http://formation.u-psud.fr/courses/DUTINFOS2/document/Maths/Analyse_et_methodes_numeriques/Revisions/Revisions.pdf?cidReq=DUTINFOS2

Exercice 1

Donc pour rechercher les coordonnées de l'unique point stationnaire de la fonction il faut trouver le t pour laquelle la dérivé donne des coordonnées nuls puis donner les images de f(t)

(le mot « unique » et fort utile, car vous pouvez en avoir plusieurs donc ça nous indique qu'il faut en trouver un et il faut qu'il soit unique)

D'abord la dérivée :

$$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) = \dfrac{t^2+1}{2t} \\ y(t) = \dfrac{2t-1}{t^2} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \frac{t^2+1}{2t} : \frac{u}{v}$$

u = t² +1 ⇔ u' = 2t

v = 2t ⇔ v' = 2

$$x'(t): \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{4t^2 - 2t^2 - 2}{4t^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2}$$

$$y'(t): \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{2t^2 - 4t^2 + 2t}{t^4}$$

$$= -\frac{2}{t^2} + \frac{2}{t^4}$$

Ici donc on a qu'une solution, t=1

$x'(1) = (1/2) – (1/2 * 1^2) = 0$

$y'(1) = (-2/1^2) + (2/1^4) = 0$

donc maintenant on cherche les coordonnées avec la fonction paramétrée.

$x(1) = (1^2 + 1)/2 = 1$

$y(1) = 2\text{-}1/1 = 1$

L'unique point stationnaire de f est le point de coordonnées (1,1)

Pour trouver l'équation paramétrée de la tangente en ce point, on utilise ses coordonnées, car on sait que la tangente passe en ce point, ainsi que la dérivée de la tangente.

La dérivée de la tangente :

$x''(t) = 0 -(-2/2 * t^{-3}) = t^{-3}$

$y''(t) = -2*-2 * t^{3} + 2 *- 4 * t^{-5} = 4t^{-3} - 8t^{-5}$

donc l'équation paramétrée de la tangente de ce point est

$$\big(x(1) + x''(t), y(1) + y''(x)\big)$$
$$(1 + t^{-3}, 1 + 4t^{-3} - 8t^{-5})$$

Puis pour trouver l'équation cartésienne de ce point, il faut exprimer y en fonction de x

$$\begin{pmatrix} 1 + t^{-3} \\ 1 + 4t^{-3} - 8t^{-5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 + t^{-3} = x \\ -3 + 8t^{-5} = y - 4x \end{pmatrix} \boxed{\begin{array}{l} L1 \\ L2 - 4L1 \end{array}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 + t^{-3} = x \\ -3 + 8t^{-5} + 4x = y \end{pmatrix}$$

Voilà l'équation cartésienne de la tangente du point stationnaire.

2.

Ici, vu qu'ils nous demandent pas de faire du Taylor-Young, les deux dérivée non nul seront facile à trouver normalement.

On connait déjà la première dérivé, il suffit de voir s'elle est nulle ou pas en ce point.

Donc on est point (1,1)

$(1+1^{-3}, 1+4*1^{-3} - 8 * 1^{-5}) = (2,-3)$

On a notre premier dérivé non nul, donc p=2 qui est paire.

La dérivé de la dérivé :

$$(1 - 3t^{-4}, 1 - 12t^{-4} + 40t^{-6})$$
$$(0{,}29)$$

deuxième dérivé non nul, donc q=3 qui est impaire.

Donc on a p, impaire et q paire donc qu'est qu'on en dit ?

N'attendez pas la réponse de moi, je ne sais pas, faut que je regarde plus haut.

Bon d'accord je vais voir.

C'est un point de rebroussement de première ezpez.

Exercice 2

1.

Taylor Young à l'ordre 2 pour ln(1 + x)

$$f(x) = \ln(1) + \frac{x}{x0+1} + -\frac{x^2}{2*(x0+1)^2}$$
$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Taylor Young à l'ordre 4 pour cos(x)

$$f(x) = \cos(0) - x\sin(0) - \frac{x^2 cos(0)}{2} + \frac{x^3 sin(0)}{6} + \frac{x^4 cos(0)}{24}$$
$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^2)$$

2.

x(t) = ln(1+t²)

x(t) = t² - t^4/2 + $o(t^4)$

selon la formule de taylor young :

x(t) = x(0) + x'(0)*t +x''(0)*t²/2 + x'''(0)*t^3/6 + $x^{(4)}$(0) * t^4/24

⇔ x'(0) = 0

⇔ x''(0) = 2

⇔ x'''(0) =0

⇔ $x^{(4)}$(0) = -12

y(t) = ln(cos(t))

$$\ln\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right)$$
$$\left(\frac{-t^2}{2}\right) + \frac{t^4}{24} - \left(\frac{\left(\frac{-t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right)^2}{2}\right) + o(t^4)$$
$$\frac{-t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{\frac{t^4}{4}}{2} + o(t^4)$$
$$-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^4}{8} + o(t^4) = -\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{12} + o(t^4)$$

y(0) = y(0) + y'(0)t + y''(0)t²/2 + y'''(0) t^3/6 + $y^{(4)}$(0) t^4/24 + o(t^4)

$$\leftrightarrow y'(0) = 0$$

$$\leftrightarrow y''(0) = -1$$
$$\leftrightarrow y'''(0) = 0$$
$$\leftrightarrow y^{(4)}(0) = -2$$

La première dérivée non nul en ce point est (2,-1) et le deuxième non colinéaire à celui-ci est (-12,-2).

4. Donc p = 2 et q=4, ils sont tous les deux paires, il s'agit donc point de rebroussement de deuxième ezpez.

3. Le point O(0,0) est un point stationnaire car la vitesse de la fonction en ce point nul.