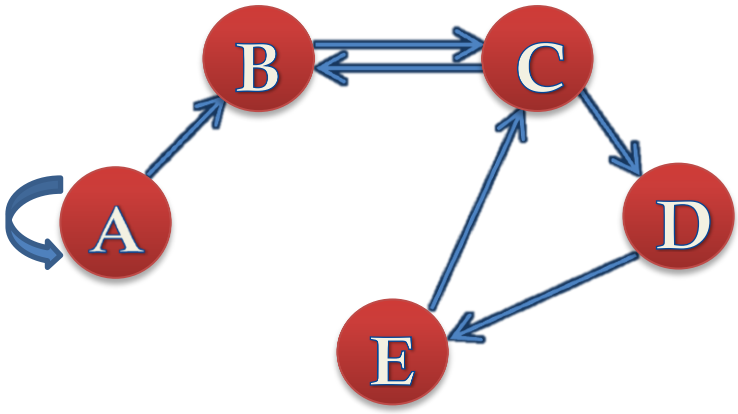
Maths Graphes
By the Anonymous Mr. Maths

I. Graphe orienté et non-orienté, Définition

La représentation suivante est appelé représentation sagittale du graphe G.



Un graphe est l'ensemble-couple G=(S, A), où S représente l'ensemble des sommets et A l'ensemble des arcs.

Ici S={A'(pour le différencier du A précédent),B,C,D,E} et A est l'ensemble des arcs qui connectent ces sommets.

Les arcs est caractérisé par le couple (x ;y) ∈ S^2 (S x S), avec x l'origine de l'arc (il s'agit du sommet duquel l'arc part) et y l'extrémité (finale) (il s'agit du sommet sur lequel la flèche pointe).

– On peut aussi décrire un graphe en donnant des propriétés caractérisant l'ensemble de ses arcs et/ou de ces sommets. Par exemple considérons le graphe $G = (S, A)$ donné par $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ et tel que A vérifie

$$\forall (x, y) \in S^2 \qquad (x, y) \in A \iff x \text{ divise strictement } y$$

Une représentation sagittale de ce graphe est

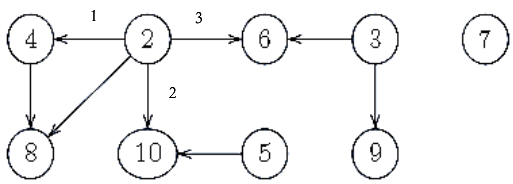


Figure 3:

Etant donnée que je ne puisse pas dire mieux que M. Motchan, je vais reprendre son exemple.

Ici l'ensemble des sommets est données très explicitement, S={2,3,4,5,6,7,8,9,10}

Tandis que l'ensemble des sommets est définis par $\forall(x,y) \in S^2$, $(x,y) \in A$ ⇔ x divise strictement y.

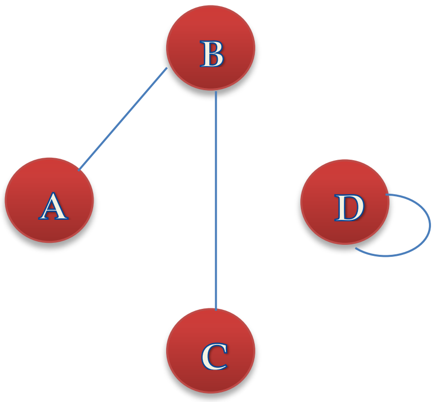
Autrement dit : « pour tout x et y appartenant tous deux à S, le couple (x,y) appartient à A si et seulement si la division de y par x est un entier strictement supérieur à 1 »

J'ai numéroté les flèches sortant de 2. La flèche 1 pointe vers 4, cela veut dire que 2 divise 4 => 2/4=2. On a suivi la même logique pour tracé les arc 2 et 3 : 2 divise 6 et 2 divise 10.

Il n'y a ni arc entrant ni arc sortant pour le sommet 7. Normal, 7 ne divise aucun de ces nombres ci et il ne peut être divisé que par lui-même, c'est un nombre premier. Et 7/7=1.

Deux graphes sont isomorphes sont deux graphes qui ont les même arcs/les mêmes propriétés.

Un graphe non orienté est un graphe dont les liens qui relie deux sommets sont représenté par des trais, on dit que ce sont des arrêtes :



Les arcs des graphes orienté ont la caractéristique d'être à sens unique, contrairement aux arêtes des graphes non-orienté qui stipule que qu'on associe l'origine à l'extremité et l'extrémité à l'origine. (on ne parle plus à proprement parlé d'origine et d'extrémité)

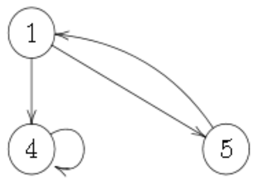
1.1.3 Sous-graphes

Définitions. *On appelle* sous-graphe *d'un graphe $G = (S, A)$, orienté ou non, tout graphe $G' = (S', A')$ tel que $S' \subset S$ et $A' \subset A$.*

On dit alors que

- *G' est un* sous-graphe induit *de G si A' est formé de tous les arcs (ou arêtes) de G ayants leurs extrémités dans S' ;*
- *G' est un* sous-graphe couvrant *de G si $S' = S$.*

Exemples. Le sous-graphe induit par le graphe de la figure 2 sur les sommets $\{1, 4, 5\}$ est



Ai-je réellement besoin de développer ceci ?

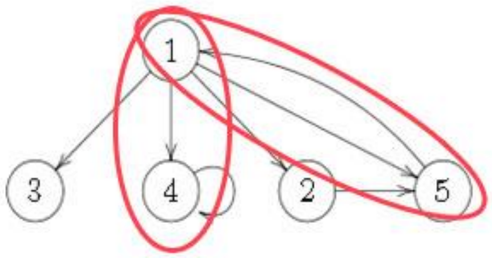
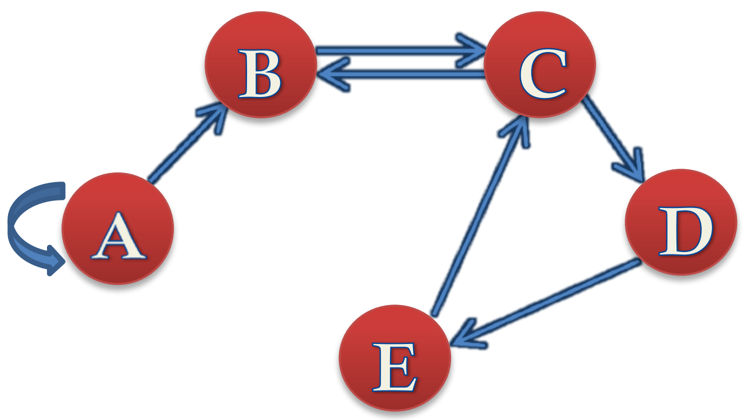


Figure 2:

Voilà je l'ai fait.

II. Notions



Il faut distinguer deux types de degrés, les degrés entrant et les degrés sortant.

Le degré sortant d'un sommet x correspond au nombre d'arcs qui ont pour origine, x. on le note $d_+(x)$.

Le degré entrant d'un sommet x correspond au nombre d'arc qui ont pour extrémité finale, x. on le note d-(x).

Exemple pour le graphe ci-dessus : d-(c) = 2 ; car Il deux arc qui rentrent dans C.

d+(c) = 2 ; car il y a deux arc qui sortent de C.

Attention : d+(a) = 2 ; car il y a deux arc qui sortent de A : de A vers lui-même et de A vers B.

d-(a) = 1 : car il y a un arc qui rentre : de A vers lui-même.

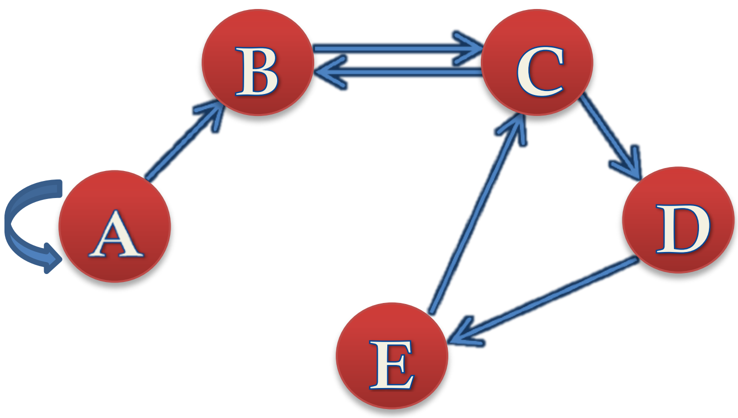
Les demi-dégrées designent respectivement les sommets correspondant au dégrée sortant et au degré entrant. On les notes respectivement G+(x) et G-(y).

Exemple : G+(c) = {B, D} ; car les flèches sortant de c pointent respectivement vers B et D.

G-(c) = {B, E} ; car les flèches entrant dans c ont respectivement pour origines B et E.

Remarque : Lorsqu'on vous demande d'établir le dictionnaire d'un graphe, il vous faut lister tous les demi-degré sortant de chaque sommets.

Exemple :



G(A) = {A, B}

G(B) = {C}

G(C) = {B, D}

G(D) = {E}

G(E) = {C}

Voici les différentes notions qu'on peut aborder chez un graphe :

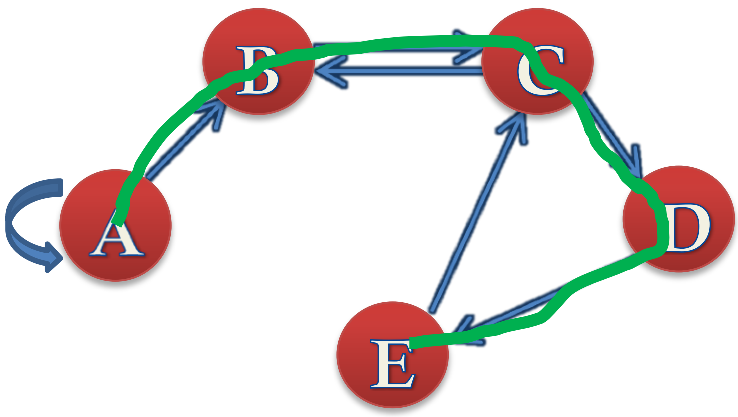
graphe orienté	graphe non orienté
arc	arête
chemin	chaîne
circuit	cycle

Voilà maintenant vous savez parler le graphe oriental et occidentale.

Mr. ToutLeMonde : « … »

Bon d'accord c'était de mauvais goût. Maintenant regardons un peu ce que ces mots signifie :

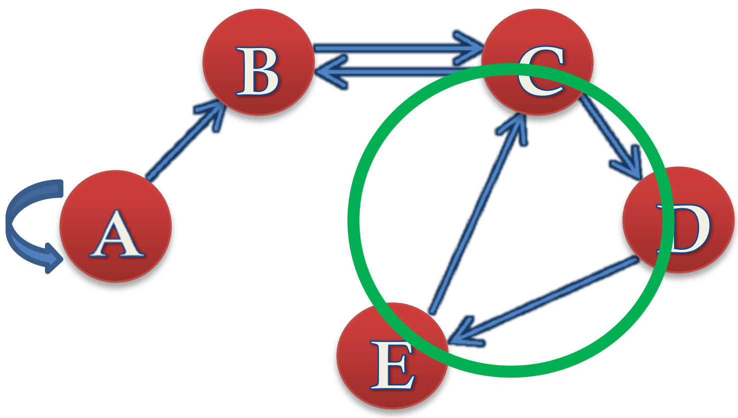
Un chemin allant de x à y est UN ensemble de sommets (x et y inclus) qui permettent de relié x et y.



C'est moche, hein ? Non mais de quoi je me mêle.

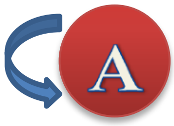
{A,B,C,D,E} est chemin allant de A à E. Dans le cas d'un graphe orienté, c'est à sens unique, il s'agit donc d'un chemin, dans le cas non-orienté, c'est une chaine qui relie tout bonnement A et E.

Un circuit est un chemin allant d'un sommet x à lui-même.



{C,D,E,C} est un circuit allant de C à C. Dans le cas d'un graphe orienté, c'est à sens unique, c'est un circuit (comme le circuit Luigi), dans le cas non oriénté, c'est un cycle qui relie C à lui-même. (Mauvais nom étant donné qu'un cycle est en général à sens unique aussi)

Autre notion à connaitre, lorsque un sommet possède un arc/une arête qui va vers lui-même on dit qu'il possède une boucle. Par exemple, A possède une boucle.



Terminologie. *Un chemin sera dit*

- simple *si tous ses arcs sont distincts (ici les chemins b et d sont simples) ;*
- élémentaire *si tous ses sommets sont distincts (le chemin b est élémentaire) ;*
- eulérien *s'il passe une fois et une seule par chaque arc du graphe ;*
- hamiltonien *s'il passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe.*

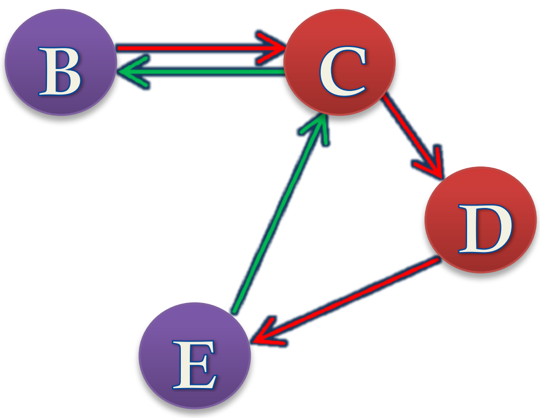
Voilà je ne dirais pas mieux.

III. Caractéristique d'un graphe

Connexité :

On dit d'un composant (en générale il s'agit de deux sommets x, y liés) qu'il est fortement connexe si de x on peut aller à y et de y à x.

Par exemple :



Je pense que je vais colorer un peu désormais, c'est plus beau. Mais je m'éloigne.

On peut dire que (B,E) est un composant connexe car de B on peut aller à E (avec le chemin rouge) et de E on peut aller à B (avec le chemin vert). Mais on peut en trouver un plus simple, par exemple (B,C), cependant (B,C) est inclus dans le composant fortement connexe (B,E), donc on ne le considère pas.

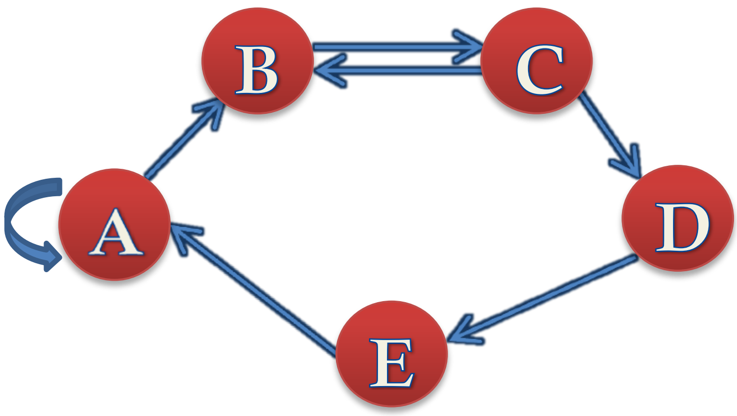
Dans le cas non-orienté, on parle juste de composant connexe.

Si un graphe est fortement connexe alors il n'a qu'un seul composant fortement connexe. Ce composant fortement connexe inclus les autres.

Attention la réciproque est fausse, un graphe qui possède un et un seul composant fortement connexe n'est pas forcement fortement connexe.

Exemple :

Le graphe suivant est fortement connexe, il ne possède qu'un seul composant fortement connexe qui est (A,E) car on peut aller de A à E et de E à A. Cela n'empêche pas le graphe d'avoir d'autre composant fortement connexe (officieusement) comme (B,C) cependant il est inclus dans (A,E) donc on ne le considère pas (officiellement) comme un composant fortement connexe. On prend le composant qui couvre tous les sommets



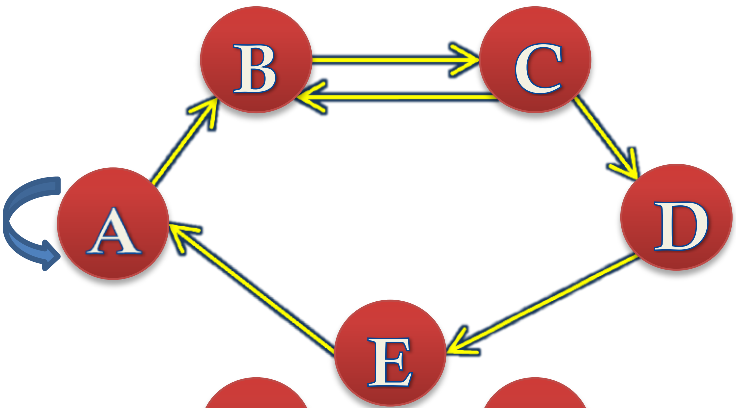
Pourquoi (A,E) et pas (D,C) ?

On peut prendre (D,C), dans ce cas-là, on considère que (A,E) est inclus dans (D,C).

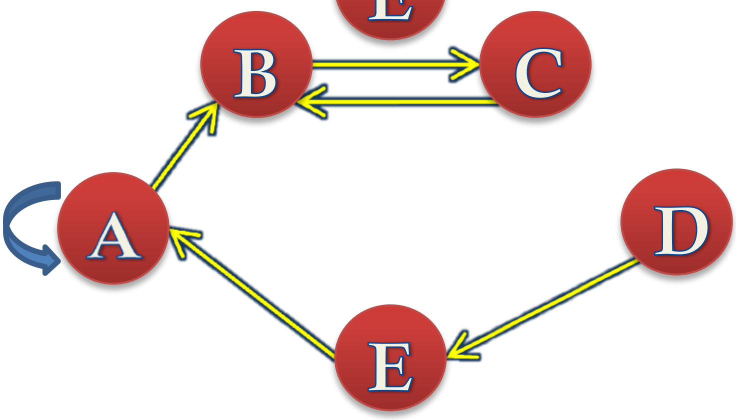
Un graphe est fortement connexe si et seulement si en partant de n'importe quel point donné pour en rejoindre un autre, on peut revenir à ce point.

Encore flou ?

Cela se traduit dans tous les cas par la présence d'un circuit qui relie tous les points entre-eux.



Graphe fortement connexe



Hop, plus connexe. Car il n'a plus de cycle qui relie tous les sommets

Un graphe est reflexive ⇔ pour $\forall x \in S, \exists\, a \in A$ *tel que* $a = (x, x)$

⇔Tous les sommets possède une boucle.

Un graphe est symétrique ⇔ *pour* $\forall x, y \in S^2, x \neq y$, *si* $\exists\, a = (x, y)$, *alors* $\exists\, a' = (y, x)$

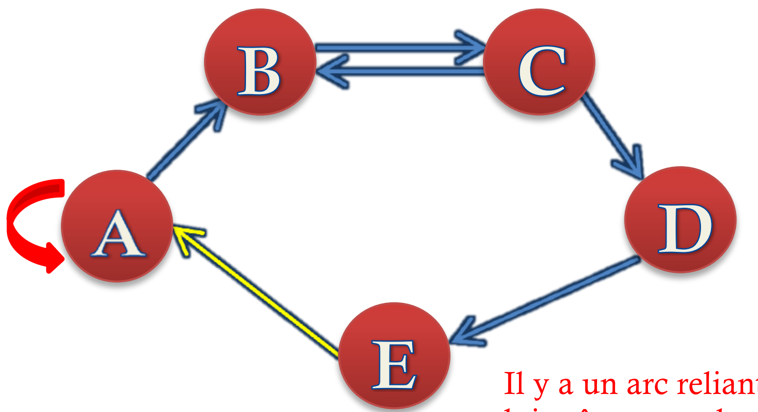
⇔ Si il existe un arc qui lie x à y alors il y a un arc qui lie y à x.

Un graphe est antisymétrique⇔ *pour* $\forall x, y \in S^2$, *si* $\exists\, a = (x, y)$ *et* $a' = (y, x)$, alors x=y

Un graphe est transitive ⇔ *pour* $\forall x, y, z \in S^3$, *si* $\exists\, a = (x, y)$ *et* $a' = (y, z)$, alors $\exists\, a'' = (x, z)$

IV. Matrice d'adjacence et Matrice d'incidence

La matrice d'adjacence d'un graphe permet de lister les arcs existants entre les sommets.

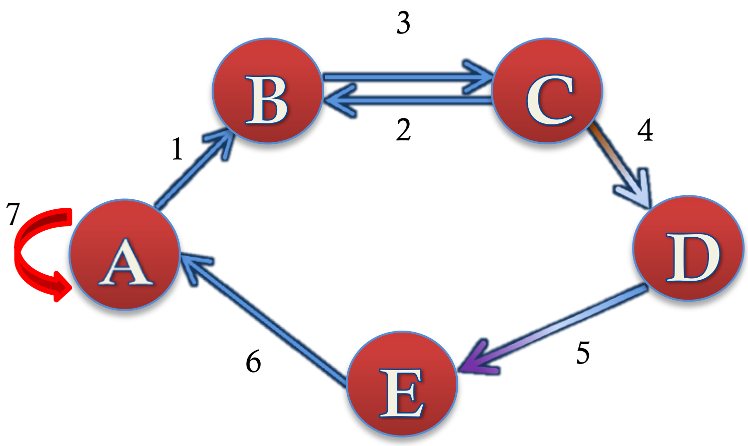


$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Il y a un arc reliant A à lui-même, tous les 1 présent dans la diagonale représentent des boucles

Ce 1 représente l'arc qui part de E et pointe vers A

La matrice d'incidence décrit les comportements des arcs, c'est-à-dire de où il part, et vers où il pointe. Pour cela il faut numéroter les arcs.



$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{-1} \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On note 2 dans la colonne qui possède une boucle

On note 1 dans la colonne d'où part l'arc.

On note -1 dans la colonne qui est pointé par l'arc.

V. Tri topologique

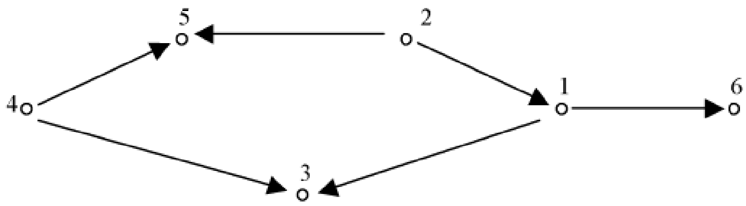
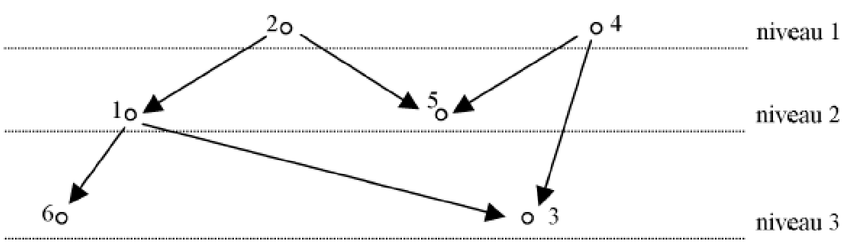


Figure 8:

Lorsque l'on on a déterminé la fonction ordinale d'un graphe, on peut adopter une disposition plus claire des sommets, par classe ou niveau. Pour le graphe de la figure 8 par exemple, cela donne :



A propos du groupe M, Steeve m'a dit que vous aviez eu ça en contrôle donc je m'excuse de ne pas vous avoir donné ça plus tôt.

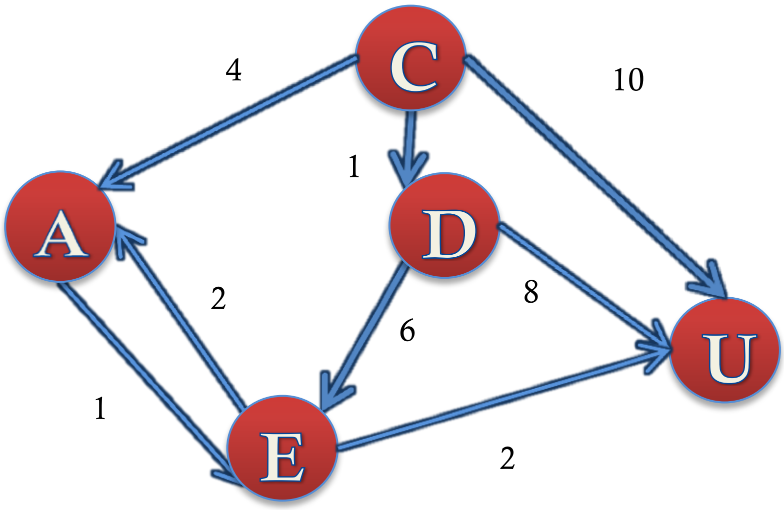
Le tri topologique consiste à diviser un graphe en plusieurs niveaux qu'on appelle classe.

Sachant que le premier niveau contient tous les sommets qui n'ont aucun prédécesseur et que le dernier niveau contient tous les sommets qui n'ont pas de successeurs. Ensuite pour classer le reste des sommets : le sommet de classe C^k, k étant le niveau, a pour prédécesseur un sommet de la classe C^{k-1} et/ou pour successeur un sommet de la classe C^{k+1}.

Attention, si un sommet possède un successeur et/ou un prédécesseur dans sa classe alors on ne peut pas classer ce sommet là (le successeur/prédécesseur en question non-plus).

VI. Algorithme

Un jour M. Ford, dans sa belle voiture, se trouva devant un carrefour C. Devant lui se présenta trois possibilités pour se rendre à son usine U. Il lui alors une idée pour trouver le chemin le plus court pour arriver à destination. Qui plus est, avec son idée, il trouverait aussi les chemins les plus court pour aller chez ses amis A, et chez ses enfants E. Il connait l'emplacement d'une décharge D par laquelle il peut y accéder rapidement depuis son carrefour.



Pendant que les chauffeurs chevronnés criaient à son égard, lui déroulait son génialissime Algorithme de Ford.

Il part de l'hypothèse qu'il peut atteindre rapidement son usine par un chemin à un seul arc. Il note alors le temps qu'il met pour arriver à son usine par les chemins à un seul arc. Puis il passe à l'hypothèse qu'il peut atteindre rapidement son usine avec un chemin à deux arcs. Si c'est le ou les chemins qu'il trouve sont plus rapide que ceux trouver dans l'hypothèse précédent il oublie le temps qu'il avait noté pour le remplacer par la nouvelle (celui qui est donc le moins long) et il fait ainsi de suite jusqu'à ce qu'il épuisé tous les hypothèses. Il déroule cet algorithme pour tous les sommets.

Voyons ce que cela donne.

Chacune de ces colonnes décris le temps que l'on met pour arriver à x. On note d(x). Mais il ne s'agit pas de degré.

Chacune de ces colonnes le prédécesseur de x qui a été parcourue par le chemin le plus court.

Chaque ligne correspond à une hypothèse. Le nombre indique le nombre d'arc qui est parcourue dans le chemin

	d(C)	d(A)	d(D)	d(E)	d(U)		P(C)	P(A)	P(D)	P(E)	P(U)
1	0	4	1	∞	10		Null	C	C	Null	C
2	0	4	1	5	9		Null	C	C	D	D
3	0	4	1	5	7		Null	C	C	D	E
4	0	4	1	5	7		Null	C	C	D	E

Bien évidemment on ne met aucun temps à arriver au point où on est déjà.

Ici nous sommes dans le cas où pour arriver à x, le chemin à un arc est le plus court donc on ne change pas la colonne

Lorsque qu'on ne peut pas arriver à x avec l'hypothèse donné. On marque cette case avec infini.

Ensuite on peut y accéder avec le chemin à deux arc {C, D, E} qui a pour durée 5. Il s'agit notamment du plus court chemin.

(Je commence à manquer de place). Ici le chemin à un arc a pour durée 10.

Ensuite on voit que le chemin à deux arc {C,D,U} a pour durée 9. Ce qui est inférieur à 10. Don on change le 10 en 9.

Et là encore une fois on trouve un chemin de plus courte durée. Le chemin à trois arc {C, A, E, U} qui a pour durée 7.

On a dit que pour aller vers A le chemin le plus court était celui à un arc. Donc le prédécesseur de A est C lui-même et cela ne change pas

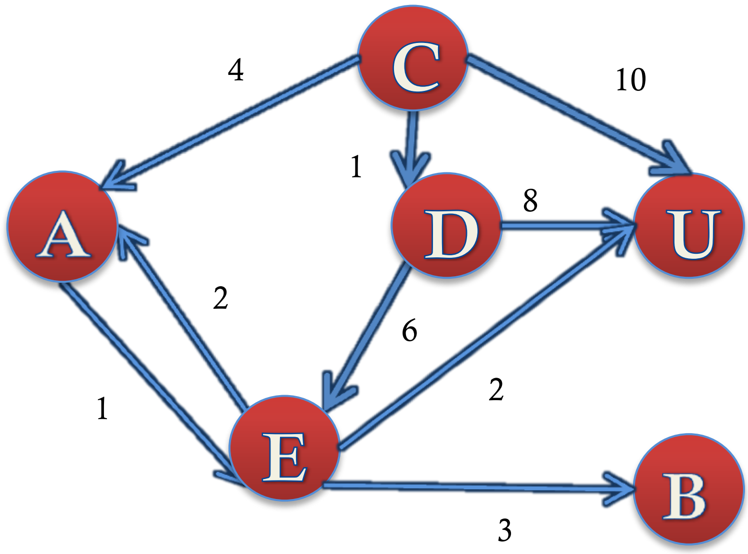
Oui il n'y a plus de place. Donc on fait avec. On a dit que E ne pouvez pas être accéder en 1 seul arc donc on ne met pas de prédécesseur

On actualise à chaque fois le prédécesseur. Ici le dernier prédécesseur retenu est E. Cela permettra de retrouver le chemin le plus court

L'algorithme stipule qu'il faut s'arrêter uniquement lorsque toutes les hypothèses sont épuisé, ce n'est pas parce qu'une situation se stabilise (on retrouve toujours la même valeur) qu'il faut s'arrêter. Cependant cette ligne n'a pas lieu d'être car aucun sommet ne peut être accéder avec un chemin à quatre arc.

Voilà M. Ford à trouver un chemin plus court que celui qui prenait d'habitude retrouve néanmoins à l'hôpital après s'être pris une raclée par un chauffeur mé
Merci M. Ford pour cette démonstration et à une prochaine fois.

Maintenant appliquons l'algorithme de Dijkstra (Etonnant, Word ne reconnait pas le nom de cet illustre personnage). Je ne vais pas essayer de décrire directement son algorithme je trouve que la pratique est toujours mieux que la théorie.



	C	A	D	E	U	B		Prédécesseur	
M={C}		4	1	∞	10	∞		…	

Pour cet algorithme, on regarde à chaque ligne le sommet qui est accessible le plus rapidement par x0 en un seul arc(ici on part de c donc x0=C). Et comme avant, on enregistre les prédécesseurs des chemins les plus courts respectives.

	C	A	D	E	U	B			
M={C}		4	1	∞	10	∞			
M={C,D}		4		6	9	∞			

On prend ensuite ce sommet et on le rajoute à M puis on regarde tous les sommets accessibles par D => on calcule ensuite le temps que l'on met de C à ces sommets tout en ayant M comme chemin initiale. Si le sommet en question est accessible plus rapidement que dans la ligne d'avant alors on change la durée.

Exemple : de D on peut aller à E et à U.

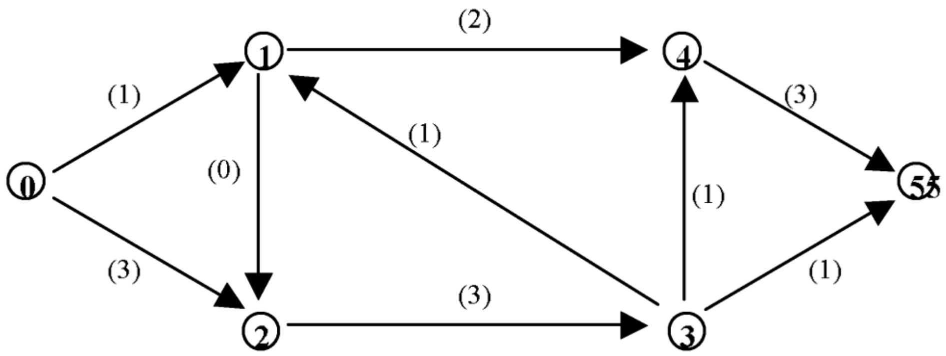
On prend le chemin {M,E} = {C,D,E}. Ce chemin a pour durée 6, ce qui est relativement plus rapide qu'infini. Donc on change et on met 6. Pareillement pour U, de 10 on passe à 9. Alors que A et B sont inaccessible => on ne change rien.

Vous avez sans doute remarqué que je n'avais pas mis la valeur de C et de D. Eh bien, si on eut, ces deux-là sont déjà qualifié (on connait déjà leur chemin le plus court), donc on ne s'intéresse plus à leurs durées.

On obtient à la fin ce tableau suivant. Ici je n'ai pas fait les prédécesseur mais ça reste le même principe que pour l'algorithme de Ford.

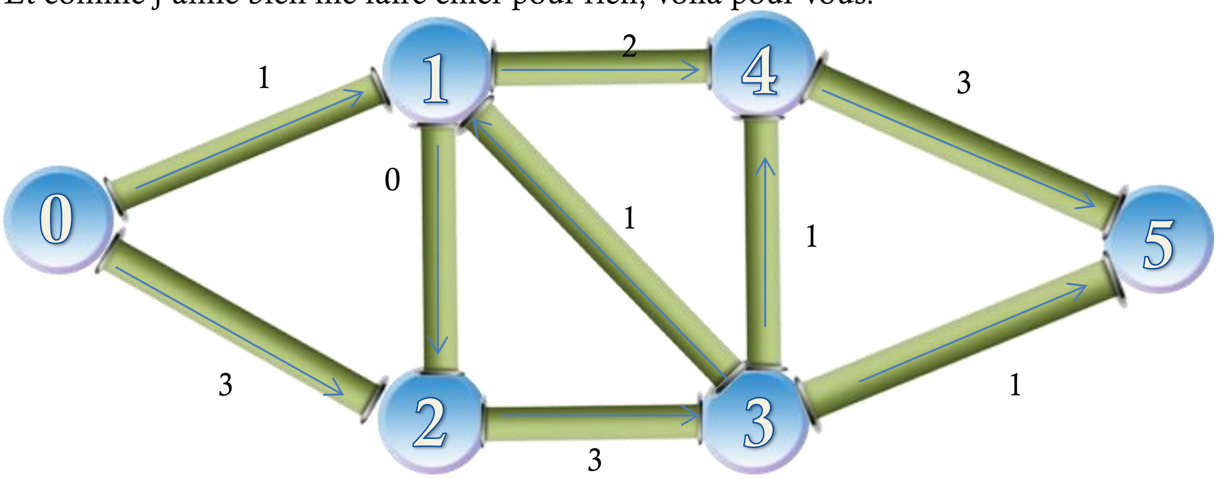
	A	B	C	D	E	U
M={C}	4	∞		1	∞	10
M={C,D}	4	∞			6	9
M={C, D, A}		∞			5	9
M={C, D, A, E}		8				7
M={C, D, A, E, U}		8				
M={C, D, A, E, U, B}						

VII. Flot



Hmmm, cette image est de mauvaise qualité, il y a un double 5 sur la droite. Bon bref.

Et comme j'aime bien me faire chier pour rien, voilà pour vous.



Bien voilà comment je vois les choses. Les sommets sont des points d'eau, les arcs sont des tuyaux et les flux (la valeur correspondant à un arc) sont les quantités d'eau transportée. Un tel graphe possède une fonction f tel que $\forall\ x\ et\ successeur(x) \in$ à $S^2, f\big(x, successeur(x)\big) = une\ valeur/flux$

Par exemple ici f(0,2) = 3et f(3,4)=1

On dit qu'un graphe est un réseau de transport lorsque qu'il possède une et une seul source et un et un seul puits.

Une source est un sommet qui n'a pas de prédécesseur et un puit est un sommet qui n'a pas de successeur.

Dans notre cas, le graphe possède une source, 0, et un puits, 5.

Un réseau de transport est un Flot s'il obéit à la loi de la conservation des Kirschoff, entre autre, on doit retrouver autant d'eau à l'arrivé qu'au départ. Ici la source a envoyé 1L (parce que oui je vais parler en termes de litre) à 1 et 3L à 2. En tout il a envoyé 4L, qu'on retrouve à la fin => le puits reçoit 3L de 4 et 1L de 3.

Les flux eux obéissent à la loi des conservations des flux, le flux sortant d'un sommet doit être égale aux flux rentrant. Logique.

Le sommet 4 est un point d'eau. Il reçoit 2L d'eau de 1 et 1L d'eau de 3. Il ne peut envoyer ni moins ni plus. Ici il envoie bien 3L.

Prenant maintenant en compte un autre facteur qui est la capacité => c'est le flux maximal qui peut être envoyé.

Un tuyau plus ou moins gros n'aura pas la même capacité.