Tout savoir sur les Maths Linéaire
By the Anonymous Mr.maths

Pour commencer avez-vous des questions ?

Oui, moi j'en ai, quelle est votre nom ?

Mon est Steev… euh non, enfin… cela ne vous regarde pas. Oublions les questions.

I. Calcule Matricielle

a) Les Matrice

Une Matrice M appartient à Z^n, avec n le nombre de coefficient (ou le nombre d'élément) de la matrice. Pourquoi ?

Prenons $M_{2,3}$, 2 ligne et 3 colonne. Cette matrice appartient à Z^6, car il y a 2 x 3 éléments donc 6.

$M_{2,3}$ =

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{pmatrix}$$

Soit $A_{i,j}$, l'élément de M tel que i est l'indice de la ligne et j l'indice la colonne.

$A_{i,j}$ appartient à Z, or il y a 6 élément donc le couple ($A_{1,1}$ $A_{1,2}$ $A_{1,3}$ $A_{2,1}$ $A_{2,2}$ $A_{2,3}$) appartient à (ZxZxZxZxZxZ)= Z^6

Voilà c'est aussi simple que cela.

b) Addition et multiplication

L'addition pour les Matrices ne se fait qu'entre matrices de même taille. La somme

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1}+B_{1,1} & A_{1,2}+B_{1,2} & A_{1,3}+B_{1,3} \\ A_{2,1}+B_{2,1} & A_{2,2}+B_{2,2} & A_{2,3} \end{pmatrix}$$

de deux matrices revient à créer une matrices résultat dont les éléments sont les sommes respectives de chaque élément des deux matrices.

La multiplication est se divise en deux cas, il y a le cas où on multiplie une matrice à un nombre et celui où on multiplie deux matrices entre elles.

Premier Cas : Produit Matrice, réels.

La multiplication entre une Matrice est un réels consiste à créer une matrices résultat dont les éléments sont les produits respectives de chaque élément de la matrice et du réels.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{pmatrix} \quad x \quad \alpha \quad = \begin{pmatrix} \alpha A_{1,1} & \alpha A_{1,2} & \alpha A_{1,3} \\ \alpha A_{2,1} & \alpha A_{2,2} & \alpha A_{2,3} \end{pmatrix}$$

Deuxième Cas : Produit Matrice, Matrice

L'élément $P_{i,j}$ du Produit de deux Matrice est la somme des produits respectives entre les éléments de la ligne i de la première matrice et de la colonne j de la deuxième matrice.

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 10 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 & 50 \\ 50 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x6 +1x3 +2x2 & 5x4+3x10+2x0 \\ 5x6 + 2x1 +4x2 & 5x2+2x10+4x0 \end{pmatrix}$$

D'où l'importance que la première matrice ait le même nombre de colonne que de nombre de lignes de la deuxième matrice

Remarque :

Soit deux Matrice M et M' tel que M-M'=0

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{pmatrix} + \quad (-1) \quad x \begin{pmatrix} A'_{1,1} & A'_{1,2} & A'_{1,3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A'_{1,1} & -A'_{1,2} & -A'_{1,3} \\ -A'_{2,1} & -A'_{2,2} & -A'_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1}- A'_{1,1} & A_{1,2}- A'_{1,2} & A_{1,3}- A'_{1,3} \\ A_{2,1}- A'_{2,1} & A_{2,2}- A'_{2,2} & A_{2,3}- A'_{2,3} \end{pmatrix}$$

Or $A_{i,j}$-$A'_{i,h}$=0 donc $A_{i,j}$=$A'_{i,j}$

M-M'=0 ⇔ M=M'

Conclusion : Deux Matrice sont égaux si et seulement tous les éléments respectives aux deux Matrices sont égaux.

c) Les Matrices particulier

La matrice nul est représenté par 0_n , 'n' étant encore une fois le nombre de coefficient.

Il varie selon les calculs, exemple avec la matrice $M_{2,3}$, si on veut faire $M_{2,3}$ x 0, il faut

avoir $0_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Et bien évidemment $M_{2,3}$ x 0_3 = 0

La Matrice identité I_n est une matrice carré de taille n tel que la diagonal soit composé de 1 et le reste des éléments composé de 0.

Exemple $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A quoi sert-il ? Voyons ça.

$A= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$M= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

Comparons M*A, M*1, M*I_3

M*A=

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 18 & 18 & 18 \\ 21 & 21 & 21 \end{pmatrix}$$

$$M*1 = \begin{pmatrix} 1*1 & 2*1 & 3*1 \\ 9*1 & 4*1 & 5*1 \\ 6*1 & 7*1 & 8*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$M*I_3=$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

On a $M*A \neq \; M*1=M*I_3 = M$

Eh oui la matrice Identité correspond au 1 Matricielle.

Mais alors pourquoi I et pas 1 ?

Chez les réels : $x/x = x * 1/x = x * x^{-1}=1$

Chez les matrices la division n'existe pas, on multiplie par l'inverse

Si on divise deux nombre égaux entre eux, on obtient 1, eh bien chez les Matrices, si on multiplie une matrice par son inverse on obtient I_n et pas 1

$A*A^{-1}=I_3$

d) Inverse de matrice

Comme nous l'avons dit l'inverse d'une matrice M est la matrice M^{-1} tel que $M \times M^{-1}=I_n$

Remarque : $M \times M^{-1}=I_n=M^{-1} \times M$; donc seul les matrices carrées sont inversible.

Trouvé la matrice inverse de M :

Premièrement calculer son déterminant afin de savoir si elle est inversible ou pas.

Déterminant d'une matrice carrée de taille 2.

$$\text{Det} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = A \times D - C \times B = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

Déterminant d'une matrice carrée de taille 3 et plus :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{pmatrix}$$

On selectionne une seul ligne ou colonne, n'importe lequelle, puis on selectionne chaque élément de cette ligne. Pour chacun de ses éléments on fait abstraction de la première ligne (respectivement colonne) et de la colonne (respectivement ligne) sur laquelle se trouve l'élément selectionné. Dans notre cas on obtient alors trois matrice carrée de taille 2.

Dans l'ordre :

$$\begin{matrix} A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,2} & A_{3,3} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} A_{2,1} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,3} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{matrix}$$

Puis on cherche leur determinants respective qu'on appelera respectivement, det1, det2 et det3. Dans le cas où on a une matrice de taille 4 au debut, on obtient des matrices de tailles 3, on applique alors cette méthode pour obtenir leur determinant.

Enfin on calcul le determinant de la matrice initiale selon la formule suivante :

La puissance des « -1 » étant la somme de chaque indice des éléments sélectionné

Det(M)=(- 1)$^{1+1}$*Det1+(-1)$^{1+2}$*Det2+(-1) $^{1+3}$*Det3

$A_{1,1}$ $A_{1,2}$

On conclue en comparant le determinant à 0, si il est égale à 0, la matrice n'est pas inversible, dans la cas contraire il l'est.

Si la matrice est triangulaire, il suffit de multiplier tous les éléments de la diagonal pour trouvé la matrice .

Quand on sair que la matrice est inversible, on calcul son inverse .

Première méthode :

On pose M et I_n

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis on fait en sorte que la matrice M devienne la matrice I_n, en faisant des calculs sur les lignes . Ces calculs seront transmis à la matrice I_n de droite et à la fin elle deviendra la matrice M^{-1}

L1

L2<- L2-L1

L3<- L3-2L1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L1<-L1-2L2

L2

L3<-L3+L2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

L1<-L1+L3

L2<-L2-2L3

L3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Voilà la Matrice de droite est la matrice inverse.

2ème Méthode (dite la méthode de l'exercice 1 du contrôle commun):

Si M est inversible alors il existe une combinaison composé de I et des puissances de A tel que :

$M^{-1}=(1/\det(M)) \times (\sum (A^n \times k) \times aI)$

Exemple : $M^{-1}=(1/4) \times (M^2-4M+7I)$

3ème Méthode :

Si la matrice est donné dans une équation tel que MX=B

Avec $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Il suffit de trouver la solution du système pour trouver la matrice inverse

Exemple si on trouve

$$\begin{cases} x=3a+2b \\ y=2c \\ z=a+b+c \end{cases}$$

alors la matrice inverse est l'ensemble des coefficient respectives à a,b et c

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

II. Méthode de Gauss

Si votre contrôle commun comporte un « ce n'est pas la méthode de Gauss !»

alors cette partie est pour vous.

La méthode de Gauss permet de résoudre un système avec plusieurs inconnues.

Il faut d'abord commencer par représenter le système matriciellement.

Soit le système suivant

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x + \alpha_{1,2}y + \alpha_{1,3}z = a \\ \alpha_{2,1}x + \alpha_{2,2}y + \alpha_{2,3}z = b \\ \alpha_{3,1}x + \alpha_{3,2}y + \alpha_{3,3}z = c \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

On cherche x y et z. Ensuite on applique la méthode de Gauss, et pour cela, il faut faire ce qu'on avait fait pour transformer la matrice M en la matrice identité. Mais cette fois ci on doit le transformer en une matrice triangulaire.

Dans notre cas, il faut avoir soit $\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ 0 & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ 0 & 0 & \alpha_{3,3} \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & 0 & 0 \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & 0 \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix}$

Exemple :

Il ne faut pas oublié que chaque opération a un impact dans le vecteur B

$$\begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 11 & 13 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L1 \\ L2 \leftarrow L2-2L1 \\ L3 \leftarrow L3-2L1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \leftarrow L3+2L2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ensuite on reprend l'équation en mode système.

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 1 \\ y + 9z = -2 \end{cases}$$

$21z=-1$

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2(-1/21) = 1 \\ y+9(-1/21)=-2 \\ z=-1/21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 5(-33/21) - 2/21 = 1 \\ y=-2+9/21=-33/21 \\ z=-1/21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1+2/21+165/21=188/21 \\ y=-33/21 \\ z=-1/21 \end{cases}$$

Voici le premier cas possible, le système ne comporte qu'une seul solution

S= {(188/21 ;-33/21 ;-1/21)}

Il peut y a deux autres cas qu'on raccorde ensemble, une infinité de solution ou pas de solution du tout.

Si on utilisant la méthode de Gauss on arrive au cas ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2x+5y+2z=a \\ y+9z=b \\ 0=c \end{cases}$$

Alors on doit envisager deux cas, celui où c est différent de 0, dans ce cas là le système est impossible donc il y a 0 solution, est l'autre cas où c est égale à 0.

Il nous reste alors

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$$

Car la dernière ligne n'est pas concluante.

Ici il faut poser un paramètre libre ou une inconnue secondaire. On fait cela car on peut pas déterminer une unique solution x,y et z. Mais une infinité de solution où on exprime deux des inconnue avec la troisième qui lui prendra une valeur quelconque t.

On va poser ici z=t ; t appartient à Z.

$$\begin{cases} 2x+5y+2t=a \\ y+9t=b \\ z=t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+5(b-9t)=a-2t \\ y=b-9t \\ z=t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=[a-2t-5b+45t]/2=[a+43t-5b]/2 \\ y=b-9t \\ z=t \end{cases}$$

la solution est alors S= {([a+43t-5b]/2 ; b-9t ; t), t appartient à Z}

Il ya une infinité de solution dépendant de t, on peut en obtenir une en choisissant une valeur précise de t.

Par exemple t=0, on a une solution particulière ([a-5b]/2 ; b ; 0).

III. Espace vectorielle

a) Sous espace vectorielle

Un vecteur dans cette partie est une matrice colonne (qui ne posséde qu'une seule colonne) dont les éléments sont les coordonnée d'un vecteur.

Un sous espace vectorielle est un ensemble de vecteur qui confirme les trois règles suivant :

- Le vecteur nul 0_n appartient à cet ensemble
- La somme de deux vecteurs de cet ensemble appartient à cet ensemble
- Tous les vecteurs colinéaires à un vecteur de cet ensemble appartiennent à cet ensemble. Traduit mathématiquement : soit αu, α appartient à R, u appartient à cet ensemble, alors αu appartient à cet ensemble.

Ces ensembles sont souvent de la forme { u appartient à F, <système>}

On dit alors que l'ensemble des solutions du système forme l'ensemble F.

Pour montrer que l'ensemble est un sev il faut montrer que ces trois vecteurs suivants vérifie l'équation/le système :

- 0_n
- w=u+ v, avec u= $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et v= $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ appartenant à cet ensemble

- $\alpha u = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$, α appartenant à R et u appartenant à cet ensemble.

b) Famille génératrice

On dit qu'un vecteur est la combinaison linéaire de n vecteurs lorsqu'on peut l'exprimer à l'aide de ces vecteurs.

Exemple

$v1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

v3 est une combinaison linéaire de v1 et v2 car v3=-5v1-4v2

Une famille est un ensemble de vecteur.

Soient la famille {u,v,w}, cette famille est génératrice du sous ensemble F, si et

seulement si tous les combinaisons linéaire composé de u, v et w appartiennent à l'ensemble F.

C'est-à-dire qu'on peut obtenir f à partir des vecteurs u, v et w.

Nous avons vus en haut que l'ensemble des vecteurs f de F pouvaient être déterminer à partir de la solution des équations de F, c'est à partir de cette solution que nous allons determiner une famille génératrice.

Par exemple, la solution etait S= {([a+43t-5b]/2 ; b-9t ; t), t appartient à Z}

Remarque : Seuls, les sev peuvent posseder des familles génératrices.

Pour convenir à cette règle prenons a=0 et b=0

Le vecteur solution est donc $X = \begin{pmatrix} 43t/2 \\ -9t \\ t \end{pmatrix}$

On peut aussi écrire $X = t \times \begin{pmatrix} 43/2 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi l'ensemble de solutions S est une combinaison linéaire du vecteur $\begin{pmatrix} 43/2 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$

Car on peut exprimer S avec ce vecteur et un coefficient t appartenant

à Z.

Plus on a d'inconnue secondaire plus on a de vecteur dans la famille génératrice. Ce nombre de vecteurs correspond à la Dimension de l'ensemble.

Propriété : Soit une famille de vecteur F={$u_1 u_{2,\dots} u_n$} et en sous ensemble vectorielle de R^m appelé E. F est une famille génératrice de E ⇔ pour tous ($\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$) appartenant à

Z^n tel que $u_1 \times \alpha_1 + u_2 \times \alpha_2 + \dots + u_n \times \alpha_n = e$. avec e , le vecteur appartenant à E.

Autre exemple :

Soit F, l'ensemble définis par { $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à F, x+y+z=0}

Il faut résoudre l'équation x+y+z = 1. On utilise la méthode de Gauss qui consiste à exprimer l'équation matriciellement.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ici la matrice ne peut pas être triangularisé on revient donc au système de départ et on résout le système.

x+y+z= 1 ici on a deux inconnue secondaire/ parametres libres.

x=-y-z

y=t

z=t'

le vecteur solution est X= $\begin{pmatrix} -t-t' \\ t \\ t' \end{pmatrix}$

On peut aussi l'écrire sous la forme $X = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t' \end{pmatrix}$

$$= t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ici on a décomposé le vecteur solution X afin de mettre les inconnue secondaires de part et d'autre de l'équation. Ainsi l'ensemble des vecteurs X de F sont la combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

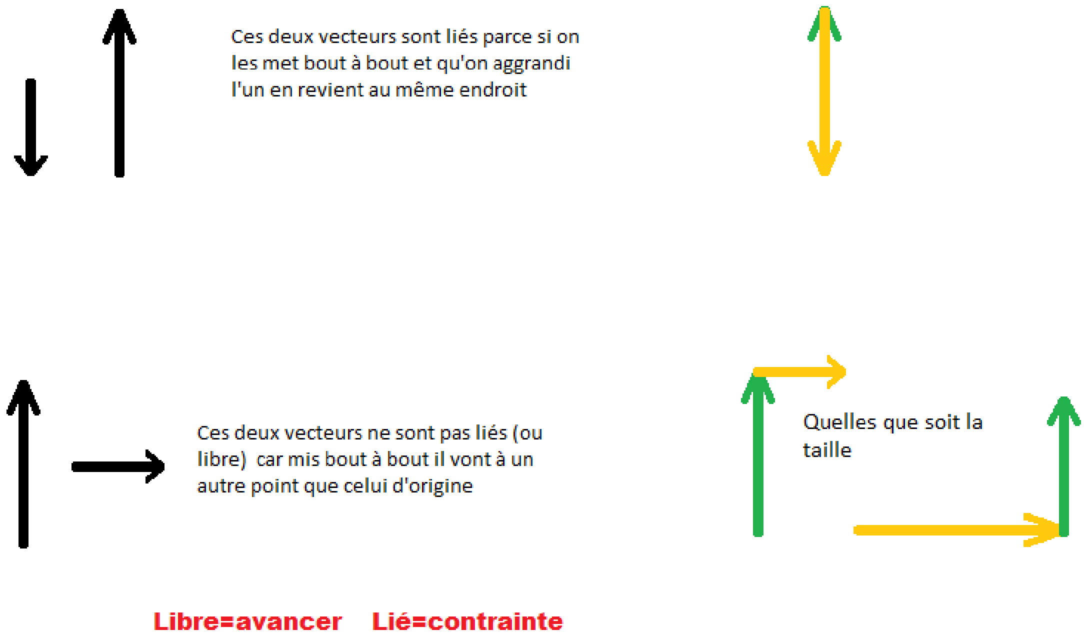
Car on peut exprimer X à partir de ces deux

Vecteurs.

Si on veut vérifier si une famille est génératrice d'un ensemble, il suffit de vérifié si tous la sommes de tous les vecteurs est un vecteur de l'ensemble en question.

c) Famille lié et libre

Voici ce que représentent des vecteurs liés et de vecteurs libre :



Soit une famille de vecteur F={$u_1 u_{2,\dots} u_n$}.

Pour savoir si des vecteurs sont liés ou pas, il faut résoudre l'équation pour tous ($\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$) appartenant à Z^n => $u_1 \times \alpha_1 + u_2 \times \alpha_2 + \dots + u_n \times \alpha_n = 0$

Cette équation aura toujours au moins une solution qui est $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$

Si on trouve que l'équation a une seule et unique solution alors cette solution est celle-ci-dessus. Donc la famille est libre.

Dans l'autre cas, si on trouve que l'équation a une infinité de solution, alors la famille est liés.

Propriété :

F est une famille libre si et seulement si toute combinaison lin´eaire nulle est `a coefficients nuls :

$(\lambda 1 \cdot u1) + \cdots + (\lambda n \cdot un) = 0 \Rightarrow \lambda 1 = \cdots = \lambda n = 0.$

F est une famille liée si:

$\exists(\lambda 1,\dots,\lambda n)$ 6= (0,...,0), tels que $(\lambda 1 \cdot u1) + \cdots + (\lambda n \cdot un) = 0$

Remarque :

La méthode de Gauss permet de trouver les solutions des équations, on peut déterminer le nombre de solution en calculant le déterminant de la matrice des coefficients (dans le cas bien sûr où la matrice est carré).

Dans ce cas on peut arriver à trois cas possibles :

- Il n’y a qu’une seul solution , c’est le cas où le déterminant de la matrice est différent de 0
- Il y a une infinité de solution, c’est l’un des deux cas où le déterminant de la matrice est égale à 0
- Enfin, il n’y a pas de solution, c’est l’autre cas où le déterminant de la matrice est égale à 0

Ici on a dit qu’il y avait au moins une solution, donc on ne prend que les deux premier cas :

Pour savoir si cette équation a une seule ou plusieurs solutions, il faut tout simplement le mettre sous forme matricielle (Méthode de Gauss) puis trouver le déterminant de la matrice vectorielle.

Exemple :

Determinons si les vecteurs v1,v2 et v3 sont liés ou si ils sont liés

$$v1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v2=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v3=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

On « fusionne » ces vecteurs pour obtenir une matrice carrée :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =0$$

On peut déterminer son déterminant de façons traditionnel sinon on peut triangularisé la matrice, il suffit ensuite de faire la multiplication des éléments se trouvant dans la diagonal, eh oui !

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -12 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinant=1 x -1 x 0 =0

Tiens donc, voilà un determinant nul. Vous savez ce que ca veut dire ?

Que v1,v2 et v3 sont liés.

Autre cas :

Determinons si les vecteurs v1,v2 et v3 sont liés ou si ils sont liés

v1= $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ v2= $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ v3= $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oh non, il n'y a pas de matrice carré, qu'allons-nous faire !?

Pas de panique Mr.Maths est là. Dans ce cas on va résoudre l'équation sans passé par le determinant :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a-2b+3c=0 \\ -b+4c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-2(4c)+3c=0 \\ b=4c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=5c \\ b=4c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=5t \\ b=4t \quad \text{, t appartient à R} \\ c=t \end{cases}$$

On trouve une infinité de solution, donc la famille est liée.

d) Les Bases

La base d'un ensemble, est une famille génératrice de cet ensemble qui est libre.

Remarque : La notation < famille F> désigne **<u>l'ensemble</u>** généré par la famille F alors que {famille F'} désigne juste une famille de vecteur.

<u>Cas Base de R^n :</u>

Propriété :

- La base de R^n a exactement n vecteur
- Une famille libre de n vecteur est une base de R^n
- Une famille génératrice de R^n de n vecteur est une base de R^n

<u>Cas Base d'un sev de R^n :</u>

- Un sev F de R^n possède au moins une base

- Toute les bases de F ont le même nombre de vecteur, ce nombre N est inférieur à n et est appelé dimension de F
- Toute famille de plus de N vecteur de F est une famille lié
- Une famille libre de N vecteur est une base de F
- Une famille génératrice de F de N vecteur est une base de F

Le rang r d'une famille de p vecteur est la dimension de l'ensemble qu'il génére (et comme l'as mentionné un ami que j'appellerai Mr. Royaume-Uni, toute famille de vecteur génére un ensemble)

Propriété :

r est forcément inférieur ou égale à p, le nombre de vecteur ;

Si r est égale à p, alors la famille est libre

Si r est égale à n, le nombre d'élément d'un vecteur, alors la famille est génératrice de R^n

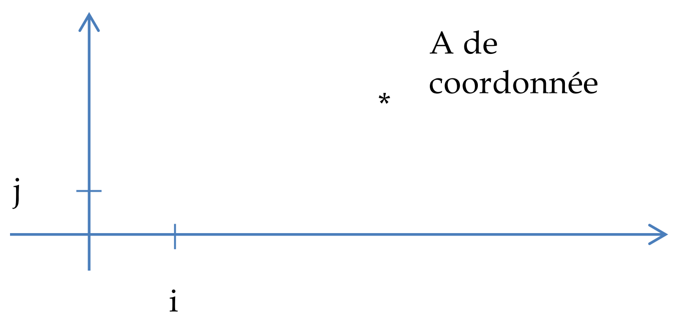
Assimilons l'ensemble F à un objet dans l'espace. Si F a pour dimension 2, alors c'est un plan, s'il a 1 dimension, alors c'est une droite…

On cherche à determiner les coordonnées d'un vecteur à l'aide de la base.

La base canonique de R^n est la base de R^n tel que chaque vecteur possède un seul élément égale à 1 et avec le reste des éléments égale à 0. Chaque vecteur de cette base est différent.

Exemple la base canonique de R^3 est :

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$$

Les bons vieux maths, d'un ancien prof de maths dont je ne citerai pas le nom, que j'adore.

L'ensemble R^2 représente ce plan et {i,j} est la base canonique de R^2, car ils sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ca vous rappelle des choses ? parfait

Eh bien le but est d'exprimer les coordonnées du point A à partir de la base {i,j}

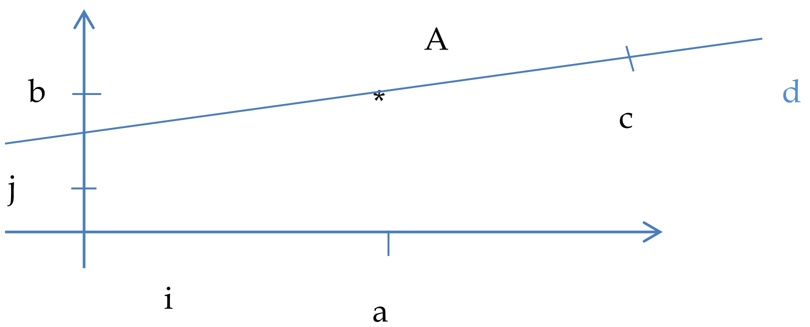
Là c'est facile on a une base canonique, A=5i + 3j

Eh bien le coefficient de i et de j sont les coordonnées de A. Facile hein ?

Eh bien ca va se compliquer parce que on chercher maintenant les coordonnées des vecteurs dans un sev de R^n et ce ensemble F, ne possède pas de forme canonique. Pour determiner les coordonnées d'un point A sur l'ensemble F il faut passer de la base canonique de R^n à la base de F.

On appel ça un changement de base.

Concretement :



A a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans l'ensemble R^2 mais sur la droite d de base {c},

Coordonnée est tout autre, (-6) par exemple, eh oui rappelé vous d est une droite donc une seul dimension.

On peut aussi représentez A avec la base {a,b} de l'ensemble R^2, il aurait (0,0)

Soit B et B' deux bases de F, la matrice de passage P de B à B' permet d'exprimer les coordonnée d'un vecteur exprimer en base B dans la base B'.

On compose la matrice P en mettant pour chaque colonne les coordonnées des vecteurs de B' dans la base B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par exemple soit la base canonique B de R^3 et B' la base de R^3

u v w

On exprime u,v et w dans la base B. C'est simple, c'est les vecteurs u,v et w en eux même, mais essayons de comprendre :

La matrice p est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pourquoi ?

On exprime u, v et w grâce à la base canonique

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

u=1A+0B+0C

v=1A+1B+0C

w=1A+1B+1C

Voilà on obtient bien la matrice P.

Pour passer de la base B' à la base B, on utilise la matrice P^{-1}. Je ne vous explique pas comment on fait vous le savez plus que bien.

Si toutefois, la base B n'est pas une base canonique, pour connaitre les coefficients vous devez résoudre l'équation

$$u=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

A,B et C étant les vecteurs de la base B. Et a,b et c étant les **<u>coefficient à chercher</u>**.

IV. Application linéaire

Une application linéaire est une fonction f prenant un antécédent dans R^p ,et donnant une image dans R^n ; tel que

$F(u+v)=f(u)+f(v)$ et $f(\lambda u)= \lambda f(u)$

Cela revient à dire que $f(\lambda u+\mu v)= \lambda f(u) + \mu f(v)$

Si f est une application linéaire, alors on note $f \in \mathcal{L}(R^p,R^n)$

Propriété : Soit $f \in \mathcal{L}(R^p,R^n)$ alors

F(0)=0

F(-u)=-f(u)

E {u appartient à R^p, f(u)=0} est un sev de R^p

Si une application linéaire est défénis à partir d'une base de R^p du genre

F(u1)=…

F(u2)=…

F(u3)=…

U1,u2,u3 étant les vecteurs de la base.

Alors pour tout u appartenant à R^p, il existe une unique combinaison (x1, … xp) appartenant R^p tel que

U=x1u1+….xpup

Ainsi si vous voulez connaitre l'image de f(u) il faut calculer l'image de f(x1u1+x2u2+x3u3)=x1f(u1)+x2f(u2)+x3f(u3)

Voilà ensuite ca me fait clairement chier donc j'en fini là, Mr maths vous au revoir et à la prochaine.,R^n)