Из этого рассказа любопытный читатель узнает, как с помощью проекции на случайную прямую или плоскость ответить на три вопроса:

1. Чему равна сумма углов в плоском треугольнике?
2. Чему равна сумма углов в сферическом треугольнике?
3. Как связаны двугранные и трехгранные углы в произвольном выпуклом многограннике?

1. Новое доказательство старой формулы

Начнём с необычного вероятностного доказательства формулы для суммы углов треугольника.

Рассмотрим закрашенный треугольник ΔABC на плоскости.

Для любой точки плоскости x определим величину $\alpha(x)$. Величина $\alpha(x)$ показывает, какой процент территории неподалёку от точки x попадает в треугольник.

Формально понятие «рядом» задается термином ε-окрестность. Вспомним, что ε-окрестностью произвольной точки x на плоскости называют круг радиуса ε с центром в точке x.

И величина $\alpha(x)$ равна доле площади пересечения маленькой ε-окрестности с треугольником от общей площади окрестности.

Точка a лежит строго внутри треугольника ΔABC, и для неё доля $\alpha(a)$ равна 1.

Точка b лежит на стороне треугольника, но не совпадает ни с одной вершиной, и для неё доля $\alpha(b)$ равна 0.5.

Точка c является вершиной треугольника, поэтому для неё доля $\alpha(c)$ равна отношению угла треугольника γ_c к 2π.

Точка d лежит вне треугольника, поэтому для неёё доля $\alpha(d)$ равна 0.

Спроецируем треугольник на случайную прямую. Для определённости поясним, как мы выбираем случайную прямую. Будем считать, что прямая проходит через начало координат, а направление прямой выбирается равномерно из всех возможных.

В результате закрашенный треугольник с тремя вершинами спроецируется в отрезок с двумя вершинами. Каждая вершина треугольника либо «выживает» при проецировании и оказывается вершиной отрезка, либо «погибает», попадая внутрь отрезка.

Введем случайную величину I_v — индикатор выживания вершины v при проецировании. Случайная величина I_v равна 1, если вершина v выживает после проецирования и равна 0, если вершина v погибает при процировании.

Давайте найдём вероятность выживания для вершины треугольника. На картинке изображены две ситуации: слева вершина выживает при проецировании, справа — погибает.

Вершина погибает, если и только если вектор-перпендикуляр к случайной прямой попадает в закрашенную область. Таким образом, $\mathrm{P}(I_v = 0) = 2\alpha(v)$ и $\mathrm{P}(I_v = 1) = 1 - 2\alpha(v)$.

А теперь снова посмотрим на суммарное число выживших после проецирования вершин. Обозначим его N_V. При проецировании треугольник превращается в отрезок ровно в двумя вершинами, поэтому

$$N_V = 2$$

Количество N_V можно разложить в сумму индикаторов выживания каждой из вершин,

$$\sum_{v \in V} I_v = 2$$

Здесь V — множество всех вершин треугольника, v — конкретная вершина.

Возьмем математическое ожидание правой и левой частей этого тождества

$$\mathrm{E}(\sum_{v\in V} I_v) = 2$$

В силу линейности математического ожидания

$$\sum_{v\in V} \mathrm{E}(I_v) = 2$$

Индикаторы принимают только значения 0 или 1, поэтому $\mathrm{E}(I_v) = \mathrm{P}(I_v = 1) = 1 - 2\alpha(v)$.

$$\sum_{v\in V}(1 - 2\alpha(v)) = 2$$

Или

$$\operatorname{card} V = 2 + 2\sum_{v\in V} \alpha(v),$$

где $\operatorname{card} V$ — общее число вершин.

У треугольника ровно 3 вершины, поэтому равенство упрощается до

$$1 = 2\alpha(v_1) + 2\alpha(v_2) + 2\alpha(v_3)$$

Поскольку для вершины $\alpha(v) = \gamma/2\pi$, получаем сумму всех углов треугольника:

$$\pi = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

Ура, сумма углов треугольнике равна $180°$!

Заметим, что все наши рассуждения до формулы

$$\operatorname{card} V = 2 + 2\sum_{v\in V} \alpha(v),$$

остаются справедливыми и в случае произвольного выпуклого n-угольника.

2. Сферический треугольник

Испольуем случайную проекцию и разложение в сумму для сферического треугольника!

Нарисуем сферический треугольник и рассмотрим бесконечный закрашенный внутри трехгранный угол, образованный центром сферы и вершинами сферического треугольника.

Для любой точки пространства x определим величину $\alpha(x)$. Величина $\alpha(x)$ показывает, какой процент пространства неподалёку от точки x попадает в закрашенный трехранный угол.

Формально $\alpha(x)$ равна доле объёма пересечения маленькой ε-окрестности с трёхгранным углом от общего объёма окрестности.

Рассмотрим примеры $\alpha(x)$:

Точка a лежит строго внутри трёхгранного угла, и для неё доля $\alpha(a)$ равна 1.

Точка b лежит на грани трёхгранного угла, но не лежит ни на одном ребре, и для неё доля $\alpha(b)$ равна 0.5.

Точка d лежит вне трёхгранного угла, поэтому для неёё доля $\alpha(d)$ равна 0.

Если точка c лежит на ребре, то для неё доля $\alpha(c)$ равна отношению двугранного угла γ_c к 2π.

И последний интересный случай, вершина трёхгранного угла, точка o:

В силу подобия маленькой ε-сферы и единичной сферы

$$\alpha(o) = \frac{S}{4\pi},$$

где S — площадь сферического треугольника.

Спроецируем бесконечный трёхгранный угол на случайную плоскости. Случайную плоскость будем выбирать так же, как и случайную прямую на плоскости. Проложим плоскость через начало координат, а направление плоскости выбираем равномерно из всех возможных. Можно равномерно выбрать случайную точку s на сфере и провести через центр сферы плоскость, перпендикулярную вектору os.

В результате проецирования трёхгранный угол превратится либо в бесконечный угол на плоскости, либо накроет всю плоскость.

Вершина трёхгранного угла либо выживает при проецировании и оказывается вершиной плоского угла, либо погибает.

Каждое ребро трёхгранного угла либо выживает при проецировании и оказывается ребром плоского угла, либо погибает, оказываясь внутри плоского угла.

Вершина погибает, если и только если вектор-перпендикуляр к случайной плоскости попадает в закрашенную область. Таким образом, $\mathrm{P}(I_v = 0) = 2\alpha(v)$ и $\mathrm{P}(I_v = 1) = 1 - 2\alpha(v)$.

Ребро погибает, если и только если вектор-перпендикуляр к случайной плоскости попадает в закрашенную область. Таким образом, $\mathrm{P}(I_e = 0) = 2\alpha(e)$ и $\mathrm{P}(I_e = 1) = 1 - 2\alpha(e)$.

Посмотрим на возможное количество выживших рёбер и вершин. Если проекция накрывает всю плоскость, то $N_V = 0$ и $N_E = 0$. Если при проецировании получается плоский угол, то $N_V = 1$ и $N_E = 2$.

В любом случае выполнено соотношение

$$N_E = 2N_V$$

Снова раскладываем количества выживших в сумму:

$$\sum_{e \in E} I_e = 2 \sum_{v \in V} I_v$$

Снова берём математическо ожидание:

$$\sum_{e \in E} \mathrm{E}(I_e) = 2 \sum_{v \in V} \mathrm{E}(I_v)$$

Снова переходим к вероятностям выживания:

$$\sum_{e \in E} 1 - 2\,\mathrm{E}(I_e) = 2 \sum_{v \in V} \mathrm{E}(I_v)$$

И получаем новое тождество:

$$\operatorname{card} V + 2 \sum_{e \in E} \alpha(e) = \operatorname{card} E + 2 \sum_{v \in V} \alpha(v)$$

3. Выпуклый многогранник

И теперь ничто не остановит нас от произвольного выпуклого многогранника!

Спроецируем произвольный выпуклый многогранник на случайную плоскость. Получим выпуклый многоугольник.

Про многоугольник мы можем лишь утверждать, что у него число вершин равно числу ребёр:

$$N_V = N_E$$

Снова раскладываем количество выживших вершин или рёбер в сумму индикаторов:

$$\sum_{v\in V} I_v = \sum_{e\in E} I_e$$

Снова берём математическо ожидание:

$$\sum_{v\in V} \mathrm{E}(I_v) = \sum_{e\in E} \mathrm{E}(I_e)$$

Снова переходим к вероятностям выживания:

$$\sum_{v\in V} 1 - 2\alpha(v) = \sum_{e\in E} 1 - 2\alpha(e)$$

И получаем новое тождество:

$$\operatorname{card} V + 2\sum_{e\in E} \alpha(e) = \operatorname{card} E + 2\sum_{v\in V} \alpha(v)$$

4. Обзор результатов

Подведём итоги трёх задачек!

Все они основаны на проецировании объекта на плоскость или прямую и обнаружении некоторого тождества для числа вершин и рёбер у проекции. Математическое ожидание, взятое от тождества, позволяет перейти к вероятностям выживания вершин или ребёр при проецировании, а вероятности выживания могут быть проинтерпретированы с помощью углов.

Обозначения общие:

- V — множество вершин исходного многоугольника или многогранника,
- E — множество ребёр,
- N_V — число вершин, выживших при проецировании,
- N_E — число рёбер, выживших при проецировании,
- $\alpha(v)$ или $\alpha(e)$ — вероятность выживания вершины или ребра.

Полученные результаты:

- Выпуклый многоугольник:

  Тождество для проекции: $N_V = 2$.

  Соотношение для углов многоугольника: $\operatorname{card} V = 2 + 2\sum_v \alpha(v)$.

- Выпуклый многоугольник на сфере:

  Тождество для проекции: $N_E = 2N_V$.

  Соотношение для углов многоугольника: $\operatorname{card} E$.

- Выпуклый многогранник:

  Тождество для проекции: $N_V = N_E$.

  Соотношение для углов многогранника: $\operatorname{card} V + 2\sum_e \alpha(e) = \operatorname{card} E + 2\sum_v \alpha(v)$.

Научной новизны эта статья не содержит и полностью основана на статьях [Kla20] и [Wel94] из American Mathematical Monthly. Мне лишь показалось, что для ясности можно изложить ту же идею сначала для обычного треугольника и добавить поясняющих картинок.

[Kla20] Daniel A Klain. “A probabilistic proof of the spherical excess formula”. В: *The American Mathematical Monthly* 128.1 (2020), с. 70—72. URL: https://arxiv.org/abs/1909.04505.

[Wel94] Emo Welzl. “Gram’s equation—A probabilistic proof”. В: *Results and Trends in Theoretical Computer Science*. Springer, 1994, с. 422—424. URL: http://www3.math.tu-berlin.de/combi/wp_henk/wp-content/uploads/2011/05/Welzl-Grams-equation-a-probabilistic.pdf.