Моделирование аукционов. Азбука.

Борис Демешев

5 января 2017 г.

Оглавление

Глава 1

Аукционы бывают разные

1.1. Три аукциона и три модели

- **Английский аукцион**. Именно этот аукцион описан в «12 стульях» Ильфа и Петрова. Игроки по очереди называют ставки. Каждая последующая ставка должна быть больше, чем предыдущая. Товар достаётся тому, кто назвал наибольшую цену. Победитель платит за товар столько, сколько он сам поставил[1]. По этому принципу устроен самый крупный современный он-лайн аукцион товаров в Интернете, Ebay, http://www.ebay.com/.

- **Голландский аукцион цветов**. Большинство цветов, продающихся в России, были куплены на аукционе цветов в Голландии. Этот традиционный аукцион отличается от английского. Потенциальные покупатели цветов сидят в общем зале. Перед ними на стене — большие часы с одной стрелкой. Стрелка показывает текущую цену товара. Изначально цена высока и никто не хочет покупать. С движением стрелки цена опускается. Наступит момент, когда одного из покупателей цена наконец устроит. Он получает товар и платит соответствующую цену.

- **Аукцион интернет-рекламы**. Когда пользователь набирает в поисковике (в Яндексе, Гугле или любом другом) какое-нибудь слово, к примеру «ГУ-ВШЭ», поисковик выдает найденные страницы и рекламные ссылки. Естественно, рекламодатели платят за то, что поисковик показывает их рекламные ссылки. Более того, рекламные ссылки продаются на аукционе! Представим себе, что поисковик продаёт одно рекламное место. Желающие рекламодатели независимо друг от друга направляют свои заявки: «я готов платить за него 5 копеек

[1] Про оплату комиссионого сбора в 12 стульях мы, конечно, помним.

за клик», «я готов платить 10 копеек за клик», «я готов платить 7 копеек за клик». Побеждает, естественно, тот, кто готов платить больше других. Но платит он не ту сумму, которую заявил в своей заявке! Победитель платит вторую по величине ставку! В нашем примере с тремя заявками рекламное место достаётся тому, кто был готов платить 10 копеек за клик, но платить он будет 7 копеек за клик. В реальности всё чуть сложнее. Например, рекламных мест может быть несколько, тогда тот, кому досталось второе по притягательности место, платит ставку того, кому досталось третье. Гугл продаёт свои рекламные ссылки на adwords.google.com.

Этим трём реальным примерам мы сопоставим три простых модели.

Общее между тремя моделями:

На аукционе продаётся единица неделимого товара, скажем одна морковка. За право получить морковку борятся n покупателей.

1. **Кнопочный аукцион**. У каждого покупателя есть кнопка. Стартовая цена равна нулю. Изначально все покупатели давят на свои кнопки. Затем цена начинает расти. Как только игрок отпускает свою кнопку, он покидает аукцион. Аукцион прекращается, когда остаётся лишь один игрок, жмущий на кнопку. Товар достаётся этому игроку по цене, сложившейся на момент остановки.

   Эта модель является упрощением реального английского аукциона. В реальности часто бывает, что игроки начинают активно играть лишь незадолго до окончания аукциона. Эта модель не предназначена для описания такого явления. В реальности игроки могут повышать текущую цену на произвольную величину, здесь же цена меняется непрерывно. Тем не менее, многие свойства английского аукциона кнопочная модель ловит.

2. **Закрытый аукцион первой цены**. Покупатели одновременно делают свои ставки. Товар достаётся тому покупателю, который назвал самую высокую цену. Победитель платит продавцу свою ставку.

   Такой аукцион лучше всего подходит для моделирования голландского аукциона. Действительно, на голландском аукционе никакой другой информации, кроме того, по какой цене был продан товар, ни один из игроков не получает. Голландский аукцион и аукцион первой цены стратегически эквивалентны — множество стратегий у каждого игрока одно и то же, и функция выигрышей — такая же. Тем не менее в реальности на цену аукциона влияет, например, такой фактор как скорость движения стрелки на часах.

3. **Закрытый аукцион второй цены**. Покупатели одновременно делают свои ставки. Товар достаётся тому покупателю, который назвал самую высокую

цену. Победитель платит продавцу вторую по величине ставку, то есть наибольшую ставку сделанную покупателями за исключением его самого.

Эта модель хорошо подходит для аукциона интернет-рекламы с одним рекламным местом.

Чтобы разграничить реальность и модели, мы будем использовать слова «Английский аукцион», «Голландский аукцион» для описания реальных явлений, а слова «аукцион первой цены», «аукцион второй цены», «кнопочный аукцион» — для описания моделей.

Иногда вводят понятия: **открытый аукцион**, то есть аукцион, где игроки видят ставки других игроков и **закрытый аукцион**, где игроки не видят ставок других игроков. По этой классификации кнопочный аукцион является открытым, а аукционы, где игроки делают ставки одновременно — закрытыми.

Для формального описания наших задач нам потребуется куча обозначений. Мы их будем вводить потихоньку, поэтому пугаться не стоит. Нужно всего лишь быть очень аккуратным и отличать заглавные и строчные буквы, например, x и X. А листочек с обозначениями можно для удобства распечатать. Встречайте…

Обозначения!

Событие:

- W_i — событие, состоящее в том, что победителем аукциона стал игрок i.

Случайные величины:

- X_i — случайная величина, сигнал о ценности, получаемый игроком. Значение X_i известно игроку i. Функцию распределения этой случайной величины обозначим $F()$, а функцию плотности — $f()$.

- V_i — случайная величина, ценность товара для игрока i. Если игрок точно знает ценность товара, то $V_i = X_i$. Есть множество других возможностей, например, $X_i = V_i + e_i$, где e_i — некая случайная ошибка.

- Bid_i — случайная величина, ставка, которую сделает игрок i в равновесии Нэша. В симметричном равновесии Нэша:

$$Bid_i = b(X_i) \tag{7.1}$$

- Pay_i — случайная величина, выплата, которую делает игрок i в равновесии Нэша.

- R — случайная величина, доход продавца в равновесии Нэша:

$$R = Pay_1 + Pay_2 + \ldots + Pay_n \tag{7.2}$$

- $Profit_i$ — случайная величина, выигрыш игрока i в равновесии Нэша:

$$Profit_i = V_i \cdot 1_{W_i} - Pay_i \tag{7.3}$$

- Y_1, ..., Y_{n-1} — случайные величины X_2, ..., X_n упорядоченные по убыванию. В частности, $Y_1 = \max\{X_2, \ldots, X_n\}$ и $Y_{n-1} = \min\{X_2, \ldots, X_n\}$

Детерминистические функции:

- $b(\cdot)$ — неслучайная функция, зависимость ставки от сигнала в равновесии Нэша

- $q(x) = \mathbb{P}(W_1|X_1 = x)$ — вероятность выигрыша первого игрока, если $X_1 = x$ в равновесии Нэша

- $pay_1(x) = \mathbb{E}(Pay_1 | X_1 = x)$ — средняя выплата первого игрока, если $X_1 = x$ в равновесии Нэша

При поиске равновесия Нэша полезно ещё одно обозначение. Мы ищем наилучший ответ первого игрока на действия остальных, поэтому все игроки кроме первого используют равновесные стратегии, а первый игрок ставит константу b_1 вне зависиости от сигнала.

- $\pi_1(x, b_1) = \mathbb{E}(Profit_1 | X_1 = x; Bid_1 = b_1)$ — средний выигрыш первого игрока, если $X_1 = x$, он ставит константу b_1, а остальные игроки используют равновесные стратегии.

Для полного описания моделей нужно сказать, как распределены ценности V_i и какую информацию X_i о ценностях получают игроки. Наиболее популярен анализ двух частных случаев:

1. Частные независимые ценности. Каждый игрок знает, какую ценность товар представляет для него. то есть $X_i = V_i$. Такая ситуация возникает, если товар сложно перепродать вне аукциона или игроки не собираются делать этого. Для простоты ценности предполагают независимыми случайными величинами.

2. Общая ценность. Если товар можно легко перепродать и купить вне аукциона по стабильной цене, то ценность товара для каждого игрока определяется этой рыночной ценой товара. То есть $V_1 = V_2 = V_3 = \ldots = V_n = V$. При этом игроки могут не знать этого V. Каждый игрок знает лишь свой сигнал X_i, который зависит от V но не обязательно ему равен.

В общем случае, который мы проанализируем, не будет ни равенства ценностей, ни независимости сигналов. Но начнем мы со случая частных независимых ценностей.

А теперь давайте найдём оптимальные стратегии игроков и средний доход продавца в трёх моделях:

1.2. Поиск оптимальных стратегий

Кратко напомним предпосылки. Сигнал X_i, который получает от Природы игрок i — это и есть ценность товара для него, то есть $X_i = V_i$. Пусть ценности X_i будут независимыми и равномерными на отрезке $[0; 1]$ случайными величинами. Мы ограничимся поиском симметричного равновесия, то есть равновесия, где все игроки используют одинаковую стратегию. Фактические ставки при этом могут отличаться! Стратегия — это функция $b()$ от ценности, и даже если эти фукнции $b()$ одиковые, величины $b(X_i)$ будут разными в силу того, что ценности X_i будут разными.

До начала игры игроки ничем не отличаются: у них одинаковый закон распределения ценности товара, поэтому при анализе мы будем изучать поведение первого игрока.

Поехали!

1. Аукцион первой цены.

   Предположим, что есть некая равновесная стратегия $b(x)$. Предположим также, что она дифференциируема и возрастает по x.

Первый игрок выигрывает, если его ставка больше всех остальных, то есть $b_1 > Bid_i$ для $i \geqslant 2$. Обозначим событие, состоящее в том, что первый игрок выиграл буквой W_1. Его ожидаемый выигрыш равен:

$$\pi_1(x, b_1) = (x - b_1)\mathbb{P}(W_1 | X_1 = x; Bid_1 = b_1) \tag{10.1}$$

Вероятность:

$$\mathbb{P}(W_1 | X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \mathbb{P}(b_1 > Bid_2 \cap b_1 > Bid_3 \cap \ldots \cap b_1 > Bid_n) \tag{10.2}$$

Наша задача найти равновесие Нэша, то есть такую ситуацию, когда использование стратегии $b(x)$ является наилучшим действием, если остальные игроки используют такую же стратегию. Поэтому мы предположим, что все игроки кроме первого используют стратегию $b(x)$, и найдём условие при котором первому тоже выгодно её использовать.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_1 | X_1 = x; Bid_1 = b_1) &= \\ &= \mathbb{P}(b_1 > b(X_2) \cap b_1 > b(X_3) \cap \ldots \cap b_1 > b(X_n))\end{aligned} \tag{10.3}$$

В силу независимости случайных величин X_i:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_1 | X_1 = x; Bid_1 = b_1) &= \\ &= \mathbb{P}(b_1 > b(X_2)) \cdot \mathbb{P}(b_1 > b(X_3)) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(b_1 > b(X_n))\end{aligned} \tag{10.4}$$

В силу одинакового закона распределения X_i:

$$\mathbb{P}(W_1 | X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \mathbb{P}(b_1 > b(X_2))^{n-1} \tag{10.5}$$

Далее следует начало красивого трюка!

Чудо-замена

Всем мы знаем, как делать замену переменных при решении задач. Входит, скажем, в уравнение переменная k, а мы говорим, что вместо k мы будем писать $f(m)$. Или наоборот, входит в уравнение $f(m)$, а мы говорим, что вместо $f(m)$ будем писать k. Так вот сейчас мы сделаем замену. Мы заменим b_1 на неизвестную (!) функцию!!!

Итак, мы делаем замену $b_1 := b(a)$. С помощью этой замены мы упростим вероятность:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(b_1 > b(X_2))^{n-1} = \mathbb{P}(b(a) > b(X_2))^{n-1} = \\ = \mathbb{P}(a > X_2)^{n-1} = \mathbb{P}(X_2 < a)^{n-1} = F(a)^{n-1}\end{aligned} \tag{10.6}$$

На всякий случай: $F(a) = \mathbb{P}(X_i \leqslant a)$ — это функция распределения.

И наша прибыль имеет вид:

$$\pi_1 = (x - b(a))(F(a))^{n-1} \tag{11.1}$$

Вместо максимизации по b_1 нам придется максимизировать по a. Для нахождения оптимальной стратегии первого игрока приравниваем производную по a к нулю:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial a} = -b'(a)(F(a))^{n-1} + (x - b(a))(n-1)F(a)^{n-2}f(a) = 0 \tag{11.2}$$

После упрощения:

$$-b'(a)F(a) + (x - b(a))(n-1)f(a) = 0 \tag{11.3}$$

Завершение красивого трюка! Мы хотим потребовать, чтобы первому игроку тоже было оптимально использовать стратегию $b()$. Ценность товара для первого игрока мы обозначили x, значит оптимальное b_1 должно равняться $b(x)$. А мы делали замену $b_1 = b(a)$. Значит в точке оптимума $b(x) = b(a)$ или $x = a$.

$$-b'(x)F(x) + (x - b(x))(n-1)f(x) = 0 \tag{11.4}$$

Это дифференциальное уравнение можно решить в общем виде, но мы ограничимся нашим равномерным случаем.

Для равномерной случайной на отрезке $[0; 1]$ получаем $f(x) = 1$ и $F(x) = x$:

$$-b'(x)x + (x - b(x))(n-1) = 0 \tag{11.5}$$

Это линейное дифференциальное уравнение...Его можно решить стандартными методами, скажем, вариацией постоянной, а можно угадать вид решения. Мы пойдем путем угадывания, но я предполагаю, что все могут решить его честно! Раз фигурирует производная и первая степень x, попробуем $b(x) = kx + m$:

$$-kx + (x - kx - m)(n - 1) = 0 \tag{12.1}$$

Собираем коэффициенты при x:

$$-m(n - 1) + x(-k + (1 - k)(n - 1)) = 0 \tag{12.2}$$

Это должно быть тождеством для любого x, значит $m = 0$ и $-k + (1 - k)(n - 1) = 0$. Находим k, $k = \frac{n-1}{n}$.

Оптимальная стратегия первого и всех остальных игроков: $b(x) = \frac{n-1}{n}x$.

Комментарии:

(a) Так как $\frac{n-1}{n} < 1$ игроки занижают свою истинную ценность в равновесии Нэша. Причем, чем меньше игроков, тем сильнее занижаются ставки по сравнению с субъективной ценностью товара.

(b) Можно обойтись без красивого трюка. Для этого можно рассмотреть функцию, обратную к функции $b()$ и применить её внутри вероятности.

(c) В равномерном случае можно обойтись и без дифференциальных уравнений. Для этого достаточно сделать удачную догадку до начала решения. то есть начать со слов: предположим, что оптимальная стратегия имеет вид $b(x) = kx + m$ и максимизировать по k и m.

(d) Тот, кто попробует честно решить линейное дифференциальное уравнение, обнаружит, что общее решение имеет вид $b(x) = c \cdot x^{-(n-1)} + \frac{n-1}{n}x$. Почему мы берём $c = 0$? Наше дифференциальное уравнение является необходимым условием полученным в предположении, что $b(x)$ — возрастающая функция. Только решение при $c = 0$ является возрастающим.

(e) Мы проверили только необходимое условие максимума — первая производная равна нулю. Желающие могут взять вторую производную и убедиться, что она меньше нуля, как и положено в максимуме. Позже мы в общем случае докажем, что достаточное условие выполнено.

(f) Мы доказали, что найденная $b(x)$ — единственное симметричное равновесие Нэша, где $b(x)$ — возрастающая функция. Мы не искали равновесия Нэша, где $b(x)$ хотя бы иногда убывает.

Пример 12.3. Решение «в лоб», без чудо-замены.

Начнём с того, что прибыль представима в виде:

$$\pi(x, b_1) = (x - b_1)\mathbb{P}(b(X_2) < b_1)^{n-1} \tag{13.1}$$

По нашим предположениям функция $b()$ строго возрастает, значит у неё есть обратная. Обозначим её $b^{-1}()$:

$$\pi(x, b_1) = (x - b_1)\mathbb{P}(X_2 < b^{-1}(b_1))^{n-1} = (x - b_1)F(b^{-1}(b_1))^{n-1} \tag{13.2}$$

Берём производную по b_1:

$$\begin{split}\frac{\partial\pi(x, b_1)}{\partial b_1} = -F(b^{-1}(b_1))^{n-1} + \\ + (x - b_1)(n - 1)F(b^{-1}(b_1))^{n-2} f(b^{-1}(b_1)) \cdot \frac{db^{-1}(b_1)}{db_1} = 0\end{split} \tag{13.3}$$

Отсюда как-то неявно выражается b_1 как функция от x. Но мы на самом деле знаем ответ! Мы уже предположили, что ситуация, когда все игроки используют функцию $b()$ — это равновесие Нэша. Значит если все игроки кроме первого используют $b()$, то и первому игроку оптимально её использовать! Значит решением должно являться $b_1 = b(x)$. Поэтому при подстановке $b_1 = b(x)$, должно получаться тождество верное при любых x.

При подстановке $b_1 = b(x)$ величина $b^{-1}(b_1)$ превращается в x. Собственно, это и есть a при чудо-замене...Получаем дифференциальное уравнение:

$$-F(x)^{n-1} + (x - b(x))(n - 1)F(x)^{n-2} f(x) \left.\frac{db^{-1}(b_1)}{db_1}\right|_{b_1 = b(x)} = 0 \tag{13.4}$$

Сокращаем F^{n-2}:

$$-F(x) + (x - b(x))(n - 1) f(x) \left.\frac{db^{-1}(b_1)}{db_1}\right|_{b_1 = b(x)} = 0 \tag{13.5}$$

Остается вспомнить, что производная обратная функции — это единица делить на производную исходной функции и наше уравнение сопадает с 11.4.

2. Аукцион второй цены. Раз все игроки одинаковые, ограничимся рассмотрением первого игрока. Результат аукциона для него зависит от его собственной ставки и от максимальной ставки остальных игроков. Ценность товара для первого игрока у нас обозначена X_1. Обозначим максимальную ставку остальных игроков — m. Величину X_1 игрок знает, а m — нет. В наших обозначениях $m = b(Y_1)$, но это не существенно.

   Сравним две стратегии первого игрока: $b_1 = X_1$, $b_1 = X_1 + \Delta$. Числа X_1 и $X_1 + \Delta$ разбивают числовую прямую на три интервала. Неизвестное m попадет в один из этих трёх интервалов. Запишем выигрыш первого игрока в табличку. Если $b_1 < m$, то он ничего не платит и не получает товар. Если $b_1 > m$, то игрок получает товар ценностью X_1 и платит m:

	$m \in (-\infty; X_1)$	$m \in (X_1; X_1 + \Delta)$	$m \in (X_1 + \Delta; +\infty)$
$b_1 = X_1$	$X_1 - m$	0	0
$b_1 = X_1 + \Delta$	$X_1 - m$	$X_1 - m$	0

   Мы видим, что в двух случаях из трёх стратегии приносят одинаковый выигрыш. Различие есть только если $m \in (X_1; X_1 + \Delta)$. Стратегия $b_1 = X_1$ приносит нулевой выигрыш, а стратегия $b_1 = X_1 + \Delta$ приносит выигрыш $X_1 - m < 0$. Значит стратегия b_1 нестрого доминирует любую стратегию вида $b_1 = X_1 + \Delta$ при $\Delta > 0$. Делать ставку выше своей ценности не выгодно!

   Аналогично сравним стратегии $b_1 = X_1$ и $b_1 = X_1 - \Delta$:

	$m \in (-\infty; X_1 - \Delta)$	$m \in (X_1 - \Delta; X_1)$	$m \in (X_1; +\infty)$
$b_1 = X_1$	$X_1 - m$	$X_1 - m$	0
$b_1 = X_1 - \Delta$	$X_1 - m$	0	0

   На этот раз разница в выигрышах возникает если $m \in (X_1 - \Delta; X_1)$. Стратегия $b_1 = X_1$ приносит выигрыш $X_1 - m > 0$. Значит стратегия b_1 нестрого доминирует любую стратегию вида $b_1 = X_1 - \Delta$ при $\Delta > 0$.

   Вывод. Существует равновесие Нэша, в котором все игроки используют стратегию $b(x) = x$, то есть правдиво декларируют свои ценности.

   Комментарии:

   (a) Равномерность распределения нигде не использовалась в решении. Значит наше рассуждение проходит для любого непрерывного закона распределения X. Почему нам важна непрерывность распределения? Надеюсь, кто-нибудь обратил внимание, что интервалы для m были открытые, мы не рассматривали случай, когда m идеально точно попадает в его границу. Если распределение ценностей непрерывно, то вероятность того, что m будет равняться конкретному числу равна нулю. Исключив эти случаи из рассмотрения мы не изменили ожидаемую прибыль первого игрока, а значит не изменили его оптимальную стратегию.

В случае дискретного распределения доходностей очень важным становится правило, согласно которому распределяется товар, если ставки совпали. В непрерывном случае вероятность совпадения ставок равна нулю, и никакое правило распределения товара при «ничьей» не влияет на оптимальные стратегии.

(b) Также в решении нигде не использовалась независимость X_i. Значит рассуждение проходит и для зависимых ценностей. Единственное ограничение: вероятность совпадения ценностей должна равняться нулю.

Пример 15.1. Можно решить аукцион второй цены таким же способом, как и аукцион первой цены. В этом случае:

$$\begin{aligned}\pi(x, b_1) = \mathbb{E}((X_1 - b(Y_1))1_{b_1 > b(Y_1)} | X_1 = x, Bid_1 := b_1) = \\ = \mathbb{E}((x - b(Y_1))1_{b_1 > b(Y_1)})\end{aligned} \tag{15.2}$$

Поскольку X_i независимы условное мат. ожидание превратилось в безусловное. Чудо-замена $b_1 = b(a)$ и предположение о возрастании функции $b()$ позволяют упростить выражение:

$$\begin{aligned}\pi(x, b(a)) = x\mathbb{P}(Y_1 < a) + \mathbb{E}(b(Y_1)1_{Y_1 < a}) = \\ = x\int_0^a p_{Y_1}(t)dt - \int_0^a b(t)p_{Y_1}(t)dt\end{aligned} \tag{15.3}$$

Берём производную по a:

$$\frac{\partial \pi(x, b(a))}{\partial a} = xp_{Y_1}(a) - b(a)p_{Y_1}(a) \tag{15.4}$$

Мы предположили, что $b()$ — это равновесная стратегия, значит при ценности x игроку должно быть оптимально ставить $b_1 = b(x)$. Кроме того мы делали замену $b_1 = b(a)$. Значит производная обращается в ноль при $a = x$:

$$xp_{Y_1}(x) - b(x)p_{Y_1}(x) = 0 \tag{15.5}$$

И отсюда мы получаем решение $b(x) = x$.

Недостаток этого способа в том, что он говорит только что $b(x) = x$ — равновесие Нэша. А способ с доминированием стратегий говорит, что это не просто равновесие, а равновесие в нестрого доминирующих стратегиях.

3. Кнопочный аукцион.

   Снова рассмотрим первого игрока. Если он видит, например, что другие игроки долго давят свои кнопки, он может сделать вывод, что их ценности товара высоки. Наблюдая за другими, он получает информацию о них, но не о себе! Его ценность не зависит от их ценностей! Ситуция резко изменится, когда мы будем рассматривать зависимые ценности в следующих лекциях. А пока наблюдение за другими не дает нашему игроку никакой полезной информации, кроме того, остался ли он уже один в игре, или ещё нет.

   Естественно, как только игрок остался один в игре, победитель сразу определен. Значит стратегия игрока не зависит, от того, сколько ещё игроков осталось кроме него. ещё двое или трое, или семеро — никакой разницы. Значит ещё до начала аукциона, узнав свою ценность X, игрок может уже спланировать свои действия: «я буду давить на кнопку до тех пор, пока цена не дойдет до некоей цены b или пока я не выиграю аукцион.»

   Итак, действия игрока описывается его числом b_i. Представим теперь, что игроки просто пишут свои b_i на бумажках, а на кнопки давят роботы, согласно этим b_i. Кто победит на аукционе? Победит тот, кто написал наибольшее b_i. А сколько он заплатит? Он заплатит вторую по величине b_i!

   Получается, что при независимых ценностях, кнопочный аукцион полностью эквивалентен аукциону второй цены. А его мы уже решали. Оптимальная стратегия: $b(x) = x$.

   Когда ценности будут коррелированы, кнопочный аукцион будет отличаться от аукциона второй цены.

1.3. Теорема об эквивалентности доходностей

Чтобы не повторяться, введём:

Определение 16.1. Закон распределения случайной величины X назовём **регулярным**, если существуют такие числа a и b, что функция распределения F строго возрастает и непрерывна на отрезке $[a; b]$, $F(a) = 0$ и $F(b) = 1$.

Мы в этом курсе всегда будем рассматривать регулярное распределение на $[0; 1]$. Это нисколько нас не ограничивает, так как вопрос выбора начала и конца отрезка — это вопрос выбора масштаба, в котором измеряются денежные суммы. Может быть «один» — это один миллион рублей. Зато обозначения становятся проще.

***Теорема* 16.2.** *Теорема об одинаковой доходности. Revenue equivalence theorem.*

Если:

RE1. На аукционе выставлен один товар

RE2. За право получить товар торгуются n игроков

RE3. Ценности товара для разных игроков одинаково распределенны и независимы

RE4. Ценности имеют регулярное распределение на отрезке $[0; 1]$

RE5. В равновесии товар достаётся тому игроку, для которого он ценнее всего

RE6. В равновесии средний выигрыш игрока с минимальной ценностью (у нас с ценностью 0) равен 0

RE7. Покупатели нейтральны к риску

То:

Средний доход продавца не зависит от конкретного механизма проведения аукциона

Доказательство. Доказательство состоит из трёх шагов. Двух простых и третьего, позапутаннее, — связанного с теоремой об огибающей...

Шаг 1. Рассмотрим игрока с ценностью x. Какова вероятность того, что он выиграет аукцион? Из требования RE5 следует, что это вероятность того, что ценность остальных игроков ниже x. Применяя требования RE1-RE4 получаем, что искомая вероятность, обозначим её $q(x)$, равна

$$q(x) = F(x)^{n-1}$$

Шаг 2. Заметим, что средняя выручка продавца — это сумма средних платежей всех игроков.

Шаг 3. Оказывается, что средний платеж игрока однозначно выводится из вероятности, упомянутой в шаге 1 и условия RE6. А именно, вот-вот мы докажем, что средняя выплата игрока определяется по формуле:

$$pay(x) = xq(x) - \int_0^x q(t)dt \tag{17.1}$$

Доказательство на самом деле занимает две или три строчки, но перед ними нужно ввести кучу обозначений. Итак...

Мы выбрали конкретного игрока. Рассмотрим ситуацию, в которой остальные игроки используют равновесные стратегии. Вероятность того, что наш игрок выиграет аукцион зависит только от его ставки b, так как стратегии остальных зафиксированы. Обозначим её $\widehat{q}(b)$. Если игрок выигрывает аукцион, то он что-то платит, причем не обязательно свою ставку! Если не выигрывает, то ничего не платит. Среднее значение этого платежа опять же зависит только от его ставки b, обозначим его $\widehat{pay}(b)$.

Средний выигрыш игрока, тогда определяется по формуле:

$$\pi(x, b) = x\widehat{q}(b) - \widehat{pay}(b) \tag{18.1}$$

У игрока есть равновесная стратегия $b(x)$, которая по определению равновесия Нэша, является наилучшим ответом на действия других игроков.

При подстановке этой наилучшей стратегии $b(x)$ вместо b мы получаем определения трёх новых функций:

$$q(x) := \widehat{q}(b(x))$$

$$pay(x) = \widehat{pay}(b(x))$$

$$\pi^*(x) = \pi(x, b(x)) = xq(x) - pay(x)$$

Для ясности: единственная разница между функциями $\widehat{q}()$ и $q()$ состоит в том, что первая зависит от ставки, а вторая — от ценности. Повесив на стену столько ружей, пора стрелять!

Находим производную:

$$\frac{d\pi^*(x)}{dx} = \frac{d\pi(x, b(x))}{dx} = \frac{\partial\pi}{\partial x} + \frac{\partial\pi}{\partial b}\frac{db}{dx} \tag{18.2}$$

А теперь вспомним, что оптимальная стратегия $b(x)$ находится из условия $\frac{\partial\pi}{\partial b} = 0$. Значит:

$$\frac{d\pi^*(x)}{dx} = \left.\frac{\partial\pi}{\partial x}\right|_{b=b(x)} \tag{18.3}$$

Это, между нами говоря, была теорема об огибающей. Упрощаем производную:

$$\left.\frac{\partial\pi(x, b)}{\partial x}\right|_{b=b(x)} = \widehat{q}(b)|_{b=b(x)} = q(x) \tag{18.4}$$

Вот и всё! Кстати, это имеет легкую смысловую интерпретацию. Частная производная говорит нам, что случится с ожидаемым выигрышем, если мы будем менять ценность x, но не будем менять стратегию b. Не меняя стратегию мы не влияем на вероятность выигрыша и на наш средний платеж организаторам аукциона. Естественно, мы должны получить вероятность выигрыша.

Осталось записать это в интегральной форме:

$$\pi^*(x) = \pi^*(0) + \int_0^x q(t)dt \tag{18.5}$$

Условие RE6 говорит, что $\pi^*(0) = 0$ и мы можем увидеть, что:

$$xq(x) - pay(x) = \int_0^x q(t)dt \tag{19.1}$$

Что и требовалось доказать. □

Примечания.

1. Теорема говорит только о равенстве среднего дохода. Она не говорит, что доход продавца при данных конкретных ценностях покупателей не зависит от формы аукциона.

2. Теорема не говорит, что равновесие, в котором игрок с наивысшей ценностью получает товар, существует. Она, наоборот, опирается на существование такого равновесия: если такое равновесие есть, то средний доход продавца не зависит от формы проведения аукциона. Поэтому использовать теорему нужно аккуратно.

   Если в аукционе товар достаётся тому, кто сделал наибольшую ставку, то часто помогает такая цепочка рассуждений: Предположим, что равновесие, где товар достаётся игроку с наибольшей ценностью есть. Тогда мы можем использовать теорему. Она нам поможет (сейчас мы на примере это увидим) найти равновесную стратегию. Затем мы проверяем, что эта равновесная стратегия $b(x)$ является возрастающей функцией по X. И мы подобно барону Мюнхаузену вытащили сами себя за волосы! Если по правилам аукциона товар достаётся сделавшему наибольшую ставку, а наибольшая ставка соответствует наибольшей ценности, значит теорему можно было применять!

Наши три модели удовлетворяют условиям теоремы, поэтому средний доход продавца в них одинаковый:

$$\mathbb{E}(R^B) = \mathbb{E}(R^{FP}) = \mathbb{E}(R^{SP})$$

Средний доход продавца равен n умножить на среднюю выплату от первого игрока продавцу, поэтому воспользуемся формулой для средней выплаты от игрока продавцу:

$$pay(x) = xq(x) - \int_0^x q(t)dt$$

При равномерном распределении ценностей, то есть $q(x) = F(x)^{n-1} = x^{n-1}$:

$$pay(x) = \frac{n-1}{n} x^n \tag{20.1}$$

Воспользуемся равномерностью второй раз:

$$\mathbb{E}(pay(X_1)) = \mathbb{E}\left(\frac{n-1}{n} X_1^n\right) = \frac{n-1}{n} \int_0^1 t^n dt = \frac{n-1}{n(n+1)} \tag{20.2}$$

Умножаем на n и получаем:

$$\mathbb{E}(R^B) = \mathbb{E}(R^{FP}) = \mathbb{E}(R^{SP}) = \frac{n-1}{n+1} \tag{20.3}$$

А сейчас мы с помощью этой теоремы в два счета получим решение аукциона первой цены не только для равномерного случая.

Пример 20.4. Решение аукциона первой цены для случай произвольного регулярного распределения ценностей. Предположим, что есть некое равновесие, и теорему об одинаковой доходности можно применять.

На аукционе первой цене средний платеж игрока равен его ставке помноженной на вероятность выигрыша:

$$pay(x) = b(x)q(x) \tag{20.5}$$

Таким образом уравнение 17.1 имеет вид:

$$xq(x) - b(x)q(x) = \int_0^x q(t)dt \tag{20.6}$$

Отсюда мы находим оптимальную стратегию:

$$b(x) = x - \frac{\int_0^x q(t)dt}{q(x)} \tag{20.7}$$

Напомним, что условия RE1-RE5 говорят нам, что $q(x) = F(x)^{n-1}$. Это и есть решение аукциона первой цены для произвольной регулярной F.

Остается проверить, что теорему можно было применять! Берём производную $\frac{db(x)}{dx}$ и убеждаемся, что она строго положительна!

Убедитесь кстати, что при подстановке $F(t) = t$ на $[0; 1]$ мы получаем наш результат для равномерно распределенных ценностей.

1.4. Пример с коррелированными ценностями

Сравним на примере доходы аукциона первой и второй цены при коррелированных ценностях.

В аукционе участвуют два игрока. Предположим, что совместная функция плотностей на множестве $x_1, x_2 \in [0; 1]$ имеет вид:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \tag{21.1}$$

Наша задача найти равновесие Нэша для аукциона первой и для аукциона второй цены, а также среднюю выручку продавца.

1. Аукцион первой цены. Считаем ожидаемый выигрыш первого игрока, если его ценность равна x, а ставит он b_1. Отличие от формулы 10.1 состоит в том, что знание x содержит в себе информацию о ценности, и следовательно, ставке, второго игрока. Поэтому мы используем условную вероятность:

   $$\pi_1(x, b_1) = (x - b_1)\mathbb{P}(b_1 > Bid_2 | X_1 = x) \tag{21.2}$$

   Предположим, что существует симметричное равновесие Нэша, в котором все игроки делают ставки согласно функции $b(x)$. Предположим, что эта функция дифференциируема и возрастает по x.

   Снова рассмотрим ситуацию, в которой все игроки кроме первого используют функцию $b()$ для своих ставок и найдём оптимальное поведение первого игрока. В нашем частном случае «все остальные» — это только второй игрок. то есть $Bid_2 = b(X_2)$.

   Снова сделаем магическую замену b_1 на пока неизвестную функцию $b(a)$. В силу предположения о возрастании $b(x)$ условие $b(a) > b(X_2)$ равносильны тому, что $a > X_2$.

   После магической подстановки наша прибыль имеет вид:

   $$\pi_1 = (x - b(a))\mathbb{P}(a > X_2 | X_1 = x) \tag{21.3}$$

   Чтобы брать производную по a, вспомним немного теорию вероятностей:

   Из совместной функции плотности $f(x_1, x_2)$ можно получить:

   Сначала частную функцию плотности X_1:

   $$f_{X_1}(x_1) := \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_2 \tag{21.4}$$

В нашем случае (интеграл берите сами) $f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{2} + x_1$.

А затем и условную функцию плотности по принципу:

$$f(x_2|x_1) := \frac{f(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)} \tag{22.1}$$

В нашем случае получаем $f(x_2|x_1) = \frac{x_1+x_2}{1/2+x_1}$

А из условной функции плотности можно получить условную функцию распределения:

$$F(x_2|x_1) := \int_0^{x_2} f(t|x_1)dt \tag{22.2}$$

В нашем случае получаем $F(x_2|x_1) := \frac{x_1 x_2 + x_2^2/2}{1/2+x_1}$.

Но ведь $\mathbb{P}(X_2 < a|X_1 = x)$ – это и есть условная функция распределения, $F_{X_2|X_1}(a|x)$.

Значит наша прибыль в вероятностных терминах записывается как:

$$\pi_1 = (x - b(a))F_{X_2|X_1}(a|x) \tag{22.3}$$

Берём производную по a и приравниваем к нулю:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial a} = -b'(a)F_{X_2|X_1}(a|x) + (x - b(a))f_{X_2|X_1}(a|x) = 0 \tag{22.4}$$

Снова завершаем магический трюк. Мы должны потребовать, чтобы оптимальной стратегий первого игрока была бы функция $b_1 = b(x)$. Но мы использовали замену $b_1 = b(a)$, значит $x = a$:

$$-b'(x)F_{X_2|X_1}(x|x) + (x - b(x))f_{X_2|X_1}(x|x) = 0 \tag{22.5}$$

В результате мы получили дифференциальное уравнение:

$$b'(x) = (x - b(x))\frac{f_{X_2|X_1}(x|x)}{F_{X_2|X_1}(x|x)} \tag{22.6}$$

В нашем частном случае: $f(x|x) = \frac{2x}{1/2+x}$, $F(x|x) = \frac{1.5x^2}{1/2+x}$.

Получаем дифференциальное уравнение:

$$b' = (x - b(x))\frac{4}{3x} \tag{22.7}$$

Мы же везунчики, правда у него будет линейное решение?

Можно подбором получить $b(x) = \frac{4}{7}x$.

Если же решать честно, то общее решение имеет вид $b(x) = c \cdot x^{-4/3} + \frac{4}{7}x$. Но мы ищем стратегию, которая возрастает по x, поэтому $c = 0$.

Настала очередь дохода продавца. Он равен удвоенной ожидаемой выплате первого игрока. Первый игрок платит $\frac{4}{7}X_1$, только если $X_1 > X_2$. Значит:

$$\mathbb{E}(R^{FP}) = 2\mathbb{E}\left(\frac{4}{7}X_1 \cdot 1_{X_1 > X_2}\right) \tag{23.1}$$

Задача свелась к двойному интегралу:

$$\mathbb{E}(\frac{4}{7}X_1 \cdot 1_{X_1 > X_2}) = \int_0^1 \int_0^{x_1} \frac{4}{7}x_1 f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \tag{23.2}$$

Подставляем функцию плотности и после взятия интеграла получаем:

$$\mathbb{E}(R^{FP}) = \frac{3}{7} \approx 0.4286 \tag{23.3}$$

2. Аукцион второй цены. Логика решения такая же, как и в случае независимых ценностей. Рассматриваем поведение первого игрока. Поскольку игроков всего два, $m = b_2$. Отличие от случая независимыми ценностями состоит в том, что случайные величины m и X_1 зависимы. Но этот факт никак не влияет на логику решения. Поэтому снова оказывается, что стратегия $b_1 = X_1$ нестрого доминирует любую другую стратегию первого игрока.

   Считаем ожидаемый доход продавца. Он равен удвоенной ожидаемой выплате первого игрока. Первый игрок платит X_2 только если $X_1 > X_2$. Значит:

$$\mathbb{E}(R^{SP}) = 2\mathbb{E}(X_2 \cdot 1_{X_1 > X_2}) \tag{23.4}$$

   Задача свелась к двойному интегралу:

$$\mathbb{E}(X_2 \cdot 1_{X_1 > X_2}) = \int_0^1 \int_0^{x_1} x_2 f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \tag{23.5}$$

Подставляем функцию плотности и после взятия интеграла получаем:

$$\mathbb{E}(R^{SP}) = 5/12 \approx 0.4167 \tag{23.6}$$

Таким образом, для данного совместного распределения доходностей аукционы первой и второй цены не одинаково выгодны для продавца! Мы исследуем подробнее случай связанных доходностей позже.

1.5. Упражнения

1. В моделях аукциона первой и второй цены с независимыми, равномерными на $[0;1]$ ценностями покупателей приведите примеры

   (a) Вектора ценностей, при котором для продавца лучше аукцион первой цены

   (b) Вектора ценностей, при котором для продавца лучше аукцион второй цены

2. Рассмотрите покупателей с независимыми ценностями, имеющими функцию плотности $f(x) = 2x$ на отрезке $[0;1]$. Найдите в явном виде оптимальные стратегии и среднюю прибыль продавца.

3. Докажите, что формулу $pay(x) = xq(x) - \int_0^x q(t)dt$ можно представить в виде:

$$pay(x) = pay(0) + \int_0^x t \cdot \frac{dq(t)}{dt} \cdot dt \tag{24.1}$$

4. Аукцион «Платят все!» . Покупатели одновременно делают ставки. Товар достаётся тому, кто назвал наибольшую ставку, но платят все игроки. Каждый платит свою ставку. Ценности товара для покупателей имеют независимое регулярное распределение с функцией распределения $F()$.

   Используя трюк с теоремой об одинаковых доходностях (см. пример 20.4) найдите оптимальные стратегии игроков, $b(x)$.

   Какой вид имеют оптимальные стратегии, если X_i равномерны на $[0;1]$? Чему в этом случае будет равен ожидаемый доход продавца?

5. Наследство. Двум сыновьям достался земельный участок в наследство. Отец не хотел, чтобы участок был разделен, поэтому по завещанию установлены

следующие правила: два брата одновременно делают ставки. Участок получает тот, кто сделал большую ставку. При этом получивший участок выплачивает свою ставку проигравшему. Найдите равновесие Нэша, если ценности участка независимы и равномерны на $[0; 1]$.

6. Аукцион «Победитель платит чужую среднюю». Покупатели одновременно делают ставки. Товар достаётся тому, кто назвал наибольшую ставку. Победитель платит среднюю арифметическую ставок остальных игроков. Ценности товара для покупателей независимы и равномерно распределены на $[0; 1]$. Найдите оптимальные стратегии игроков, $b(x)$, средний доход продавца.

   Hint: А может у дифференциального уравнения простое линейное решение?

7. Аукцион с дискретными ценностями. В аукционе участвуют два покупателя. Ценности товара для покупателей независимы и имеют дискретное распределение: X_i равновероятно принимает значения 0 и 1. Аукцион проходит по следующим правилам: продавец предлагает товар по цене a, где a — это некая константа, $a \in (0; 2/3)$. Игроки одновременно решают, подходит ли им эта цена или нет. Если один сказал «да», а другой «нет», то товар достаётся тому, кто сказал «да» и он платит a. Если оба сказали «нет», то товар отдается бесплатно случайно выбираемому игроку. Если оба сказали «да», то товар отдается по цене a случайно выбираемому игроку.

   Найдите равновесие Нэша (хотя бы одно).

   Зависит ли равновесный доход аукциониста от a? Применима ли теорема об одинаковой доходности и почему?

   При каком a доход продавца будет максимальным?

   Hint1: На всякий случай, а то курс теории игр уже кончился :), во-первых, равновесия бывают в смешанных стратегиях, во-вторых, чистых стратегий у каждого игрока здесь четыре. Стратегия — это функция от ценности, значит у игрока есть, например, стратегия «если $X = 0$, то говорю 'нет', если $X = 1$, то говорю 'да'».

   Hint2: если задача кажется слишком сложной, решите её для конкретного a, скажем, для $a = 0.1$, а затем попробуйте снова. Это, кстати, один из немногих универсальных приемов решения всех задач: «Я не хочу решать эту задачу, поэтому буду решать более простую!»

1.6. Решения упражнений

1. В качестве примера возьмем аукцион двух игроков.

а) Если $X_1 = 0.2$, $X_2 = 0.6$, то на аукционе второй цены продавец получит 0.2 (вторую по величине ставку), а на аукционе первой цены продавец получит 0.3 (так как оптимальная стратегия имеет вид $b(x) = \frac{n-1}{n}x = \frac{1}{2}x$).

б) Если $X_1 = 0.4$, $X_2 = 0.6$, то на аукционе второй цены продавец получит 0.4 (вторую по величине ставку), а на аукционе первой цены продавец получит 0.3 (так как оптимальная стратегия имеет вид $b(x) = \frac{n-1}{n}x = \frac{1}{2}x$).

2. Подставляем $F(x) = x^2$, значит $q(x) = (x^2)^{n-1} = x^{2n-2}$. Подставляем $q(x)$ в 20.7. Получаем $b(x) = \frac{2n-2}{2n-1}x$.

   Полученную $b(x)$ подставляем в 20.5. Получаем $pay(x) = \frac{2n-2}{2n-1}x^{2n-1}$.

   Считаем ожидаемую выплату первого игрока:

$$\mathbb{E}(pay(X_1) = \int_0^1 pay(t)f(t)dt = \int_0^1 \frac{2n-2}{2n-1}t^{2n-1} \cdot 2tdt = \\ = \frac{4(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} \quad (26.1)$$

   И умножаем на число игроков:

$$\mathbb{E}(R^{FP}) = \frac{4n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} \quad (26.2)$$

3. Используем формулу интегрирования по частям.

4. Используем уравнение из теоремы об одинаковой доходности

$$xq(x) - pay(x) = \int_0^x q(t)dt \quad (26.3)$$

   В данном случае $pay(x) = b(x)$, так как ставка платится вне зависимости от того, кому достанется товар. Значит:

$$b(x) = xq(x) - \int_0^x q(t)dt \quad (26.4)$$

   где $q(x) = F(x)^{n-1}$

   Можно решить и по-другому — явно выписав задачу максимизации игрока и получив дифференциальное уравнение.

5. Эта игра не аукцион в чистом виде, так как игрок тоже может получить деньги. Выписываем прибыль первого игрока:

$$\pi_1 = (x - b_1)\mathbb{P}(b(X_2) < b_1) + \mathbb{E}(b(X_2) \cdot 1_{b(X_2) > b_1}) \tag{26.5}$$

Прибавка в прибыли — это ожидаемый платеж от второго игрока первому.

После чудо-замены:

$$\pi_1 = (x - b(a))\mathbb{P}(X_2 < a) + \mathbb{E}(b(X_2) \cdot 1_{X_2 > a}) \tag{27.1}$$

Запишем мат. ожидание в виде интеграла:

$$\pi_1 = (x - b(a))F(a) + \int_a^1 b(t)f(t)dt \tag{27.2}$$

После взятия производной по a:

$$-b'(a)F(a) + (x - b(a))f(a) - b(a)f(a) = 0 \tag{27.3}$$

Требуем оптимальности стратегии $b_1 = b(x)$:

$$-b'(x)F(x) + (x - b(x))f(x) - b(x)f(x) = 0 \tag{27.4}$$

Для равномерного случая получаем:

$$-b'(x)x + x - b(x) - b(x) = 0 \tag{27.5}$$

Находим общее решение и замечаем, что $c = 0$ или сразу подбираем линейное решение $b(x) = kx$:

$$-kx + x - 2kx = 0 \tag{27.6}$$

Получаем $k = 1/3$ и равновесие Нэша вида $b(x) = x/3$.

6. Победа первого игрока, событие $W_1 = \{b(X_2) < b_1 \cap \ldots \cap b(X_n) < b_1\}$. Чудо-замена $b_1 = b(a)$ позволяет упростить его до $W_1 = \{X_2 < a \cap \ldots \cap X_n < a\}$.

Функция прибыли:

$$\pi_1 = \left(x - \mathbb{E}\left(\frac{b(X_2) + \ldots + b(X_n)}{n-1}\middle| W_1\right)\right) \cdot \mathbb{P}(W_1) \tag{27.7}$$

В силу того, что X_i одинаково распределены и независимы, $\mathbb{P}(W_1) = F(a)^{n-1}$ и:

$$\pi_1 = (x - \mathbb{E}\left(b(X_2)|X_2 < a\right)) \cdot F(a)^{n-1} \tag{27.8}$$

Воспользуемся тем, что $\mathbb{E}(b(X_2)|X_2 < a) \cdot \mathbb{P}(X_2 < a) = \mathbb{E}(b(X_2) \cdot 1_{X_2<a})$:

$$\pi_1 = x \cdot F(a)^{n-1} - \mathbb{E}\left(b(X_2) \cdot 1_{X_2<a}\right)\right) \cdot F(a)^{n-2} \tag{27.9}$$

Заметим, что математическое ожидание равно интегралу:

$$\mathbb{E}(b(X_2) \cdot 1_{X_2<a}) = \int_0^a b(t)f(t)dt \tag{27.10}$$

Стало быть производная от мат. ожидания равна:

$$\frac{d\mathbb{E}(b(X_2) \cdot 1_{X_2<a})}{da} = b(a)f(a) \tag{28.1}$$

Теперь легко находим производную прибыли:

$$\begin{aligned} \pi_1 = F(a)^{n-1} + x \cdot (n-1)F(a)^{n-2}f(a) - \\ - \mathbb{E}\left(b(X_2) \cdot 1_{X_2<a}\right)\right) \cdot (n-2)F(a)^{n-3}f(a) - b(a)f(a)F(a)^{n-2} \end{aligned} \tag{28.2}$$

Приравняв к нулю и завершив чудо-замену замечанием, что $a = x$ получаем уравнение:

$$(n-1)xF(x)f(x) - (n-2)\int_0^x b(t)f(t)dtf(x) - b(x)f(x)F(x) = 0 \tag{28.3}$$

Вообще-то мы получили интегральное уравнение, то есть уравнение с интегралами, а не с производными. Но его можно свести к дифференциальному, сделав замену $y(x) = \int_0^x b(t)f(t)dt$, тогда $b(x)f(x) = y'(x)$. В общем виде дальше мы его решать не будем, а вспомним, что у нас $f(x) = 1$ и $F(x) = x$:

$$(n-1)x^2 - (n-2)\int_0^x b(t)dt - b(x)x = 0 \tag{28.4}$$

Вместо возможной замены $y(x) = \int_0^x b(t)dt$ мы возьмем производную от обеих частей уравнения:

$$(n-1)2x - (n-2)b(x) - b(x) - b'(x)x = 0 \tag{28.5}$$

Неленивые могут найти общее решение и заметить, что нужно взять $c = 0$. Ленивые сразу подбирают линейное решение $b(x) = kx$:

$$(n-1)2x-(n-2)kx-kx-kx=0 \tag{28.6}$$

Получаем $k=\frac{2(n-1)}{n}$ и равновесие Нэша со стратегиями вида $b(x)=\frac{2(n-1)}{n}x$. Кстати, при $n=2$ мы получаем аукцион второй цены, а наше решение, как и следует, дает $b(x)=x$.

Альтернативное решение по принципу «Мне повезет и без дифуров»:

А вдруг оптимальная стратегия линейна, то есть имеет вид $b(x)=kx$? Подставим эту функцию сразу в прибыль, до чудо-замены:

$$\pi_1=\left(x-\mathbb{E}\left(\frac{kX_2+\ldots+kX_n}{n-1}\middle| kX_2<b_1\cap\ldots kX_n<b_1\right)\right)\cdot \\ \cdot\mathbb{P}(kX_2<b_1\cap\ldots kX_n<b_1)) \tag{29.1}$$

Упрощаем мат. ожидание и вероятность:

$$\pi_1=(x-k\mathbb{E}\left(X_2|X_2<b_1/k\right)\cdot\mathbb{P}(X_2<b_1/k\cap\ldots\cap X_n<b_1/k)) \tag{29.2}$$

Теперь условное мат. ожидание легко считается. Условие $X_2<b_1/k$ и априорная равномерность X_2 равносильны тому, что X_2 равномерно на $[0;b_1/k]$. Значит условное мат.ожидание равное $\frac{b_1}{2k}$. Получаем:

$$\pi_1=\left(x-\frac{b_1}{2}\right)\cdot(b_1/k)^{n-1} \tag{29.3}$$

Без чудо-замены берём производную по b_1. то есть сразу ищем оптимальную ставку:

$$k^{1-n}\left(\left(x-\frac{b_1}{2}\right)\cdot(n-1)b_1^{n-2}-\frac{1}{2}b_1^{n-1}\right)=0 \tag{29.4}$$

Выражаем b_1 и получаем $b_1=\frac{2(n-1)}{n}x$. Поскольку она имеет предположенный вид, то все шаги были верными.

Считаем средний доход продавца. Поскольку все условия теоремы об одинаковой доходности выполнены, то ответ совпадает с найденным в лекции для аукциона первой цены:

$$\mathbb{E}(R^{MO})=\frac{n-1}{n+1} \tag{29.5}$$

7. Произвольная смешанная стратегия имеет вид:

   Если $X = 0$, то говорить «да» с вероятностью p_0; если $X = 1$, то говорить «да» с вероятностью p_1.

   Пусть моя ценность равна 0. Если я скажу «нет», то ничего не заплачу и возможно получу товар с нулевой для меня ценностью, значит мой ожидаемый выигрыш равен 0. Если я скажу «да», то с положительной вероятностью мне придется платить a, и мой ожидаемый выигрыш меньше 0. Значит, если ценность равна нулю, оптимально говорит «нет». то есть $p_0 = 0$.

   Пусть моя ценность равна 1. Если я скажу «нет», то получу в среднем:

$$(1 - 0.5p_1) \cdot \frac{1}{2} \tag{30.1}$$

   Если я скажу «да», то получу в среднем:

$$(1 - 0.5p_1) \cdot (1 - a) + 0.5p_1 \cdot \frac{1 - a}{2} \tag{30.2}$$

   Чтобы смешанная стратегия была оптимальной, мне нужно быть безразличным между чистыми стратегиями, так как иначе я выбрал бы чистую. Приравниваем эти два выигрыша и находим p_1.

   Формально получается $p_1 = 4 - \frac{2}{a}$. Возникает несколько случаев...

   Если $a \in (0; 1/2)$, то равенство достигается только при $p_1 < 0$. Это означает, что при всех $p_1 \in [0; 1]$ говорить «да» выгоднее, чем «нет». то есть в равновесии каждый игрок использует стратегию: Если $x = 0$, то «нет», если $x = 1$, то «да»

   Если $a \in (1/2; 2/3)$, то равенство достигается только при $p_1 = 4 - \frac{2}{a}$. В равновесии каждый игрок использует стратегию: Если $x = 0$, то «нет», если $x = 1$, то «да» с вероятностью $p_1 = 4 - \frac{2}{a}$.

   Если $a = 1/2$, то при $x = 1$ «да» лучше чем «нет» при $p_1 \in (0; 1]$ и игрок безразличен между «да» и «нет» при $p_1 = 0$. Получаем равновесие с парой стратегий: Если $x = 0$, то «нет», если $x = 1$, то «да». И ещё одно равновесий с парой стратегий: Всегда «нет».

1.7. Контрольная 1

1. Предположим, что условия теоремы об одинаковых доходностях выполнены.

(a) Может ли выбор механизма проведения аукциона влиять на ковариацию выплат двух разных игроков?

(b) Найдите ковариацию выплат первого и второго игрока в аукционе первой цены с независимыми и равномерными на $[0;1]$ ценностями. Hint: можно пользоваться тем, что средняя выплата равна $\frac{n-1}{n(n+1)}$.

Solution:

$$Cov(Pay_1, Pay_2) = \mathbb{E}(Pay_1 \cdot Pay_2) - \mathbb{E}(Pay_1)\mathbb{E}(Pay_2) \tag{31.1}$$

На вычитаемое способ аукциона влиять не может в силу теоремы об одинаковой доходности. Сосредоточимся на $\mathbb{E}(Pay_1 \cdot Pay_2)$. В аукционе первой цены никакие два игрока не могут платить одновременно, поэтому произведение выплат всегда равно нулю, то есть $\mathbb{E}(Pay_1 \cdot Pay_2) = 0$. В аукционе «Платят все» произведение выплат строго положительно, поэтому $\mathbb{E}(Pay_1 Pay_2) > 0$. Значит способ проведения аукциона может влиять на ковариацию.

2. «Наследство» по типу аукциона второй цены. Двум сыновьям достался земельный участок в наследство. Отец не хотел, чтобы участок был разделен, поэтому по завещанию установлены следущие правила: два брата одновременно делают ставки. Участок получает тот, кто сделал большую ставку. При этом получивший участок выплачивает проигравшему меньшую из двух ставок. Ценности участка для игроков независимы и равномерны на $[0;1]$.

Найдите равновесие Нэша.

Solution.

Ожидаемая прибыль:

$$\pi(x, b_1) = (x - \mathbb{E}(b(X_2)|b(X_2) < b_1)) \cdot \mathbb{P}(b(X_2) < b_1) + \\ + b_1\mathbb{P}(b(X_2) > b_1) \tag{31.2}$$

После чудо-замены $b_1 = b(a)$ и упрощения вероятностей:

$$\pi = (x - \mathbb{E}(b(X_2)|X_2 < a))\mathbb{P}(X_2 < a) + b(a)(1 - \mathbb{P}(X_2 < a)) \tag{31.3}$$

Или:

$$\pi = xF(a) - \mathbb{E}(b(X_2) \cdot 1_{X_2<a})) + b(a)(1 - F(a)) \tag{31.4}$$

В записи с интегралом:

$$\pi = xF(a) - \int_0^a b(t)f(t)dt + b(a)(1 - F(a)) \tag{31.5}$$

Приравниваем производную к нулю:

$$xf(a) - b(a)f(a) - b(a)f(a) + b'(a)(1 - F(a)) = 0 \tag{32.1}$$

Для случая равномерного распределения:

$$x - 2b(x) + b'(x)(1 - x) = 0 \tag{32.2}$$

Подбором коэффициентов находим линейное решение:

$$b(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} \tag{32.3}$$

3. Рассмотрим аукцион второй цены. Предположим, что ценности независимы и имеют регулярное распределение. Агенты не нейтральны к риску. Их отношение к риску отражается функцией полезности $u()$. Про $u()$ известно, что она непрерывна, строго возрастает и для удобства $u(0) = 0$. то есть если игрок получает товар ценностью x и платит продавцу m, то его полезность равна $u(x - m)$.

   Найдите равновесие Нэша.

   Как в лекции, составляем табличку и видим, что $b_1 = X_1$ нестрого доминирует остальные стратегии.

4. Рассмотрим аукцион второй цены с резервной ставкой r. Резервная ставка — это минимальная цена за которую продавец согласен расстаться с товаром. Если все игроки сделали ставки ниже r, товар остаётся у продавца, никто ничего не платит. Если хотя бы один игрок сделал ставку выше r, то товар достаётся игроку сделавшему самую высокую ставку и платит он максимум между второй по величине ставкой и r. Константа r общеизвестна всем игрокам. Ценности независимы и имеют регулярное распределение. Агенты нейтральны к риску.

   Найдите равновесие Нэша.

   Как в лекции, составляем табличку и видим, что $b_1 = X_1$ нестрого доминирует остальные стратегии.

5. Рассмотрим аукцион первой цены с двумя игроками. Ценности независимы и равномерны на $[0; 1]$. Но ставку можно сделать только 0 или 0.5. Если ставки игроков совпали, то товар достаётся случайно выбираемому игроку за соответствующую плату.

   Найдите равновесие Нэша.

   Предположим, что стратегия имеет вид:

   Если ценность ниже порога x^*, то делать ставку 0, иначе делать ставку 0.5.

   Осталось найти x^*.

   Допустим, что второй игрок использует такую стратегию.

   Если первый сделает ставку ноль, то его ожидаемый выигрыш будет равен:

$$\pi(x, 0) = x^* \frac{1}{2} x \tag{33.1}$$

   Если первый сделает ставку 0.5, то его ожидаемый выигрыш будет равен:

$$\pi(x, 0.5) = (x - 0.5)x^* + (x - 0.5)\frac{1}{2}(1 - x^*) = (x - 0.5)\frac{1}{2}(x^* + 1) \tag{33.2}$$

   Находим условие, при котором $\pi(x, 0.5) > \pi(x, 0)$, получаем:

$$x > \frac{1}{2}(x^* + 1) \tag{33.3}$$

   Значит правая часть представляет собой x^*. Решаем уравнение $x^* = \frac{1}{2}(x^* + 1)$, получаем $x^* = 1$. то есть вне зависимости от ценности игрокам имеет смысл ставить 0.

Глава 2

Общая ценность, аффилированные сигналы

2.1. Напоминалка по теории вероятностей

Определение 34.1. Индикатором события A называется случайная величина, которая равна 1, если A произошло и 0, если A не произошло. Обозначают индикатор A так: 1_A.

Проверьте, что вы понимаете, что $\mathbb{E}(1_A) = \mathbb{P}(A)$.

С помощью индикаторов легко определить условное ожидание:

Определение 34.2. Если $\mathbb{P}(A) > 0$, то условным ожидание случайной величины X при условии события A называют число:

$$\mathbb{E}(X|A) := \frac{\mathbb{E}(X \cdot 1_A)}{\mathbb{P}(A)}$$

Если вам знакомо альтернативное определение условного ожидания, убедитесь, что оно совпадает с этим на паре примеров. Альтернативное определение основано на идее: условное ожидание считается так же, как и безусловное, только вместо безусловной вероятности используется условная.

Пример 34.3. Задан закон распределения случайной величины X:

Prob	0.1	0.2	0.3	0.4
X	6	2	3	1

Найдите $\mathbb{E}(X|X > 2)$.

Решение:

$\mathbb{P}(X > 2) = 0.4$

Составляем табличку для $X \cdot 1_{X>2}$:

Prob	0.1	0.2	0.3	0.4
$1_{X>2}$	1	0	1	0
$X \cdot 1_{X>2}$	6	0	3	0

Находим $\mathbb{E}(X \cdot 1_{X>2}) = 1.5$. Значит $\mathbb{E}(X|X > 2) = 1.5/0.4 = 3.75$

Пример 35.1. Пусть X распределено экспоненциально с параметром $\lambda = 1$, то есть функция плотности X при $t \geqslant 0$ имеет вид:

$$p_X(t) = e^{-t}$$

Найдите $\mathbb{E}(X|X < 5)$.

Решение. Находим $\mathbb{P}(X < 5) = \int_0^5 e^{-x}dx = 1 - e^{-5}$. Затем $\mathbb{E}(X \cdot 1_{X<5}) = \int_0^5 xe^{-x}dx = 1 - 6e^{-5}$. И, следовательно, $\mathbb{E}(X|X < 5) = \frac{e^5-6}{e^5-1}$

Часто приходится иметь дело с условным ожиданием виде $\mathbb{E}(Y|X = x)$. В случае, когда X дискретна и $\mathbb{P}(X = x) > 0$ мы без проблем применяем определение 34.2. Однако, если, X непрерывна и $\mathbb{P}(X = x) = 0$, у нас возникают проблемы. Впрочем, если $\mathbb{P}(X \in [x; x + \Delta x]) > 0$, то наши проблемы легко решаются:

Определение 35.2. Если $\mathbb{P}(X \in [x; x + \Delta x]) > 0$, то мы определяем условное ожидание $\mathbb{E}(Y|X = x)$ по формуле:

$$\mathbb{E}(Y|X = x) := \lim_{\Delta x \to 0} \mathbb{E}(Y|X \in [x; x + \Delta x]) \tag{35.3}$$

Для практических вычислений мы редко (почти никогда в этих лекциях) будем пользоваться определением. Нам будет достаточно четырех свойств:

- Мат. ожидание суммы равно сумме мат. ожиданий

$$\mathbb{E}(X + Y|A) = \mathbb{E}(X|A) + \mathbb{E}(Y|A) \tag{35.4}$$

- Константу можно выносить за знак мат. ожидания

$$\mathbb{E}(cX|A) = c\mathbb{E}(X|A) \tag{35.5}$$

- Значения известной случайной величины можно подставлять:

$$\mathbb{E}(f(X, Y)|X = x) = \mathbb{E}(f(x, Y)|X = x) \tag{35.6}$$

- Если случайная величина X и событие A независимы, то

$$\mathbb{E}(X|A) = \mathbb{E}(X) \tag{35.7}$$

Для величин имеющих совместную функцию плотности можно указать способ считать $\mathbb{E}(Y|X=x)$ без предельного перехода:

***Теорема* 35.8.** *Если пара случайных величин X и Y имеет совместную функцию плотности $f(x,y)$, то*

$$\mathbb{E}(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf(y|x)dy \tag{35.9}$$

Доказательство.

$$\mathbb{E}(Y|X\in[x;x+\Delta x])=\frac{\mathbb{E}(Y1_{X\in[x;x+\Delta x]})}{\mathbb{P}(X\in[x;x+\Delta x])}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x}^{x+\Delta x} yf(x,y)dxdy}{f_X(x)\cdot\Delta x+o(\Delta x)}=$$
$$=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} y\int_{x}^{x+\Delta x} f(x,y)dxdy}{f_X(x)\cdot\Delta x+o(\Delta x)}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} y(f(x,y)\Delta x+o(\Delta x))dy}{f_X(x)\cdot\Delta x+o(\Delta x)}=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} y\frac{f(x,y)\Delta x+o(\Delta x)}{f_X(x)\cdot\Delta x+o(\Delta x)}dy \tag{36.1}$$

При $\Delta x\to 0$ указанный интеграл стремится к $\int_{-\infty}^{+\infty} yf(y|x)dy$. $\square$

2.2. Большая сила о-малых!

В теории вероятностей часто возникает примерно такая задача:

Известна функция плотности случайной величины X, $p_X(t)$. Также известно, как Y выражается через X, то есть известно, что $Y=f(X)$. Причем функция f — монотонная и дифференцируемая. Нужно найти функцию плотности Y, $p_Y(t)$.

Есть два способа решения.

Первый — стандартный, без о-малых и их силы. Нужно знать только, что функция плотности — это производная от функции распределения:

$$p_Y(y)=\frac{d\mathbb{P}(Y\leqslant y)}{dy}=\frac{d\mathbb{P}(X\leqslant f^{-1}(y))}{dy}=p_X(f^{-1}(y))\cdot\frac{df^{-1}(y)}{dy}$$

Или, если считать, что $y=f(x)$:

$$\frac{dy}{dx}p_Y(y)=p_X(x) \tag{36.2}$$

Пример 36.3. Пусть X имеет функцию плотности $p_X(x)=2x$ на отрезке $[0;1]$ и $Y=X^3$. Найдите функцию плотности Y.

Решение: Здесь $y=x^3$, значит $y'=3x^2$ и $x=y^{1/3}$. Значит:

$$3x^2p_Y(y)=2x \tag{36.4}$$

Подставляем вместо $x = y^{1/3}$:

$$3y^{2/3}p_Y(y) = 2y^{1/3} \tag{36.5}$$

Итого:

$$p_Y(y) = \frac{2}{3}y^{-1/3} \tag{37.1}$$

Теперь магия о-малых !

Какой смысл в функции плотности? Вероятность того, что X лежит в отрезке небольшой длины примерно равна произведению длины этого отрезка на значение плотности:

$$\mathbb{P}(X \in [x; x + \Delta x]) \approx p(x)\Delta x \tag{37.2}$$

Здесь Δx — это небольшое число. Если быть точным, то:

$$\mathbb{P}(X \in [x; x + \Delta x]) = p_X(x)\Delta x + o(\Delta x) \tag{37.3}$$

На всякий случай,

- $o(\Delta x)$ — это такая функция от Δx, что:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \tag{37.4}$$

- $o(1)$ — это такая функция от Δx, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} o(1) = 0 \tag{37.5}$$

Поскольку f монотонная, то событию $X \in [x; x + \Delta x]$ соответствует событие $Y \in [y; y + \Delta y]$, где конечно, $y = f(x)$ и $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Аналогично:

$$\mathbb{P}(Y \in [y; y + \Delta y]) = p_Y(y)\Delta y + o(\Delta y) \tag{37.6}$$

Приравниваем две вероятности:

$$p_X(x)\Delta x + o(\Delta x) = p_Y(y)\Delta y + o(\Delta y) \tag{37.7}$$

Делим на Δx:

$$p_X(x) + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = p_Y(y)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{o(\Delta y)}{\Delta x} \tag{37.8}$$

Устремляем о-малое к нулю и по определению о-малого получаем:

$$p_X(x) = p_Y(y)\frac{dy}{dx} \tag{37.9}$$

Продолжаем осваивать большую силу о-малых!

Пусть X_1, ..., X_n — имеют регулярную функцию распределения $F()$ на $[0;1]$ и независимы. Напомним, что мы вводили обозначения Y_1, Y_2, ..., Y_{n-1} — это величины X_2, X_3, ..., X_n, отсортированные в порядке убывания. В частности, $Y_1 = \max\{X_2, \ldots, X_n\}$ — наибольшая ставка сделанная всеми игроками кроме первого.

Пример 38.0. Найдите функцию плотности Y_1.

Решение. Прежде чем доставать из ножен о-малые вспомним два простых факта:

$$\mathbb{P}(X_1 \leqslant x) = F(x) \tag{38.1}$$

$$\mathbb{P}(X_1 \in [x_1; x_2]) = F(x_2) - F(x_1) \tag{38.2}$$

Вместо плотности $p_{Y_1}(z)$ мы ищем вероятность $\mathbb{P}(Y_1 \in [z; z+\Delta z])$. При маленьких Δz вероятность и плотность связаны:

$$\mathbb{P}(Y_1 \in [z; z+\Delta z]) \approx p_{Y_1}(z)\Delta z \tag{38.3}$$

Расчехлим о-малые:

$$\mathbb{P}(X_2 < X_1 | X_1 \in [z; z+\Delta z]) = F(z) + o(1) \tag{38.4}$$

Чуть-чуть помедитируйте над этим равенством. При $\Delta z \to 0$ правая и левая части становятся похожи на $F(z)$. Значит верное равенство.

А теперь мы одним махом выпишем ответ!

Что значит $Y_1 \in [z; z+\Delta z]$? Это означает, что одна из величин X_i попала в этот интервал. У нас есть $(n-1)$ возможностей выбрать эту одну. А остальные $(n-2)$ случайные величины должны быть меньше избранной! Смотрите на ответ:

$$\mathbb{P}(Y_1 \in [z; z+\Delta z]) = (n-1) \cdot (F(z+\Delta z) - F(z)) \cdot (F(z) + o(1))^{n-2} \tag{38.5}$$

По сомножителям:

- $(n-1)$ — это число способов выбрать ту случайную величину, которая будет максимумом. Скажем мы выбрали X_3
- $F(z+\Delta z) - F(z)$ — это вероятность того, что X_3 попадет в интервал $[z; z+\Delta z]$.
- $F(z) + o(1) = \mathbb{P}(X_i < X_3 | X_3 \in [z; z+\Delta z])$

Чтобы получить функцию плотности: делим на Δz и устремляем Δz к нулю!

$$p_{Y_1}(z) = (n-1) \cdot f(z) \cdot F(z)^{n-2} \tag{38.6}$$

На всякий случай напомню стандартный способ без о-малых:

$$p_{Y_1}(z) = \frac{d\mathbb{P}(Y_1 \leqslant z)}{dz} = \frac{d\mathbb{P}(X_2 < z \cap \ldots \cap X_n < z)}{dz} = \\ = \frac{dF(z)^{n-1}}{dz} = (n-1)f(z)F(z)^{n-2} \tag{38.7}$$

Если при поиске отдельной функции плотности можно обойтись без о-малых, то при переходе к совместной функции плотности о-малые впереди на лихом коне!

Пример 39.1. Найдите совместную функцию плотности для пары Y_1 и Y_3.

Вместо плотности легче искать вероятность:

$$\mathbb{P}(Y_1 \in [w; w + \Delta w] \cap Y_3 \in [z + \Delta z]) = p(w, z)\Delta w \Delta z + o(dwdz) \tag{39.2}$$

Что значит $Y_1 \in [w; w+\Delta w] \cap Y_3 \in [z+\Delta z]$? Это означает, что одна из величин X_2, ..., X_n попала в $[w; w + \Delta w]$. У нас есть $(n-1)$ возможностей выбрать эту одну. ещё одна попала в $[z; z + \Delta z]$. Эту одну можно выбрать $(n-2)$ способом. ещё одна попала между ними, то есть в интервал $[w+o(1); z+o(1)]$. Эту одну можно выбрать $(n-3)$ способами. Оставшиеся $(n-4)$ случайные величины должны быть меньше Y_3, так как лежать в интервале $[0; w + o(1)]$:

$$\mathbb{P}(Y_1 \in [w; w + \Delta w] \cap Y_3 \in [z; z + \Delta z]) = \\ = (n-1)(n-2)(n-3)(F(w + \Delta w) - F(w))(F(z + \Delta z) - F(z)) \cdot \\ \cdot (F(z) - F(w) + o(1))(F(z) + o(1))^{n-4} \tag{39.3}$$

На всякий случай объясняем по сомножителям:

- $(n-1)$ — это число способов выбрать ту случайную величину, которая будет максимумом. Скажем мы выбрали X_3
- $(n-2)$ — это число способов выбрать Y_3 среди оставшихся. Скажем мы выбрали X_7.
- $(n-3)$ — это число способов выбрать Y_2. её надо оговаривать особо, так как она должна лечь между Y_1 и Y_3. Пусть это оказалась X_9.

- $(F(w+\Delta w)-F(w))$ — это $\mathbb{P}(X_3 \in [w; w+\Delta w])$
- $(F(z+\Delta z)-F(z))$ — это $\mathbb{P}(X_7 \in [z; z+\Delta z])$
- $(F(w)-F(z)+o(1))$ — это $\mathbb{P}(X_9 \in [w+o(1); z+o(1)])$
- $(F(z)+o(1))^{n-4}$ — это вероятность того, что оставшиеся X_i меньше X_7

Делим на Δw, Δz и устремляем их к нулю.

$$p_{Y_1,Y_3}(w,z) = (n-1)(n-2)(n-3)f(z)f(w)(F(w)-F(z))F(z)^{n-4} \tag{40.1}$$

2.3. Старые формулы на вероятностном языке

> Сова стала объяснять, что такое Необходимая или Соответствующая Спинная Мускулатура. Она уже объясняла это когда-то Пуху и Кристоферу Робину и с тех пор ожидала удобного случая, чтобы повторить объяснения, потому что это такая штука, которую вы спокойно можете объяснять два раза, не опасаясь, что кто-нибудь поймёт, о чём вы говорите.
>
> Алан Милн в переводе Бориса Заходера.

Мы быстро повторим то, что сделали на первой лекции:

***Теорема* 40.2.** *Если сигналы совпадают с ценностями, то есть $X_i = V_i$, то ожидаемая прибыль первого игрока может быть записана как:*

1. $\pi_1(x, b(a)) = (x-b(a)) \cdot (F(a))^{n-1}$, *если X_i независимы*
2. $\pi_1(x, b(a)) = (x-b(a)) \cdot \mathbb{P}(Y_1 < a | X_1 = x)$, *если X_i зависимы*

Доказательство. Для аукциона первой цены:

$$Pay_1 = Bid_1 \cdot 1_{W_1} \tag{40.3}$$

Значит:

$$Profit_1 = X_1 \cdot 1_{W_1} - Pay_1 = (X_1 - Bid_1) \cdot 1_{W_1} \tag{40.4}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Profit_1 | X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \\
&= \mathbb{E}((X_1 - Bid_1) \cdot 1_{W_1} | X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \\
&= (x - b_1)\mathbb{E}(1_{W_1} | X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \\
&= (x - b_1)\mathbb{P}(W_1 | X_1 = x; Bid_1 = b_1)
\end{aligned} \tag{40.5}$$

Озаботимся величиной $\mathbb{P}(W_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1)$. Если ценности независимы, то:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \mathbb{P}(W_1|Bid_1 = b_1) = \\ = \mathbb{P}(Bid_2 < Bid_1 \cap \ldots; Bid_n < Bid_1|Bid_1 = b_1) = \\ = \mathbb{P}(Bid_2 < b_1 \cap \ldots; Bid_n < b_1) = \\ = \mathbb{P}(Bid_2 < b_1)^{n-1} = \mathbb{P}(b(X_2) < b_1)^{n-1}\end{aligned} \tag{40.6}$$

Дальше чудо-замена $b_1 = b(a)$. Уточняем: b_1 — константа, a — константа, $b()$ — неизвестная, но детерминистическая функция.

$$\mathbb{P}(b(X_2) < b_1)^{n-1} = \mathbb{P}(b(X_2) < b(a))^{n-1} = \mathbb{P}(X_2 < a)^{n-1} = (F(a))^{n-1} \tag{41.1}$$

Итого, для аукциона первой цены с независимыми ценностями:

$$\pi_1(x, b(a)) = (x - b(a)) \cdot (F(a))^{n-1} \tag{41.2}$$

Что меняется, если ценности зависимы?

Единственное отличие состоит в том, что:

$$\mathbb{P}(W_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1) \neq \mathbb{P}(W_1|Bid_1 = b_1) \tag{41.3}$$

На этот раз вероятность упрощается не так сильно:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \\ = \mathbb{P}(Bid_2 < Bid_1 \cap \ldots \cap Bid_n < Bid_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \\ = \mathbb{P}(Bid_2 < b_1 \cap \ldots \cap Bid_n < b_1|X_1 = x) = \\ = \mathbb{P}(b(X_2) < b_1 \cap \ldots \cap b(X_n) < b_1|X_1 = x)\end{aligned} \tag{41.4}$$

И ещё чуть-чуть после чудо-замены:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(b(X_2) < b_1 \cap \ldots \cap b(X_n) < b_1|X_1 = x) = \\ \mathbb{P}(b(X_2) < b(a) \cap \ldots \cap b(X_n) < b(a)|X_1 = x) = \\ \mathbb{P}(X_2 < a \cap \ldots \cap X_n < a|X_1 = x)\end{aligned} \tag{41.5}$$

А эту вероятность можно посчитать, если известна совместная функция плотности ценностей. С использованием обозначения $Y_1 = \max\{X_2, \ldots, X_n\}$ можно записать её короче:

$$\mathbb{P}(X_2 < a \cap \ldots \cap X_n < a|X_1 = x) = \mathbb{P}(Y_1 < a|X_1 = x) \tag{41.6}$$

Итого, для аукциона первой цены с зависимыми ценностями:

$$\pi_1(x, b(a)) = (x - b(a)) \cdot \mathbb{P}(Y_1 < a | X_1 = x) \tag{41.7}$$

□

А сейчас мы увидим, как с помощью мат. ожидания записать уже знакомые нам вещи. А именно:

***Теорема* 42.1.** *Если предпосылки теоремы об одинаковой доходности выполнены, то:*

- *Для произвольного аукциона* $q(x) = \mathbb{P}(Y_1 < x)$
- *Для произвольного аукциона* $pay(x) = \mathbb{E}(Y_1 \cdot 1_{Y_1 < x})$
- *Для аукциона первой цены* $b(x) = \mathbb{E}(Y_1 | Y_1 < x)$

Доказательство. Первое. Из предпосылки о том, что товар достаётся тому покупателю, у которого выше ценность немедленно следует, что $q(x) = \mathbb{P}(Y_1 < x)$.

Второе. В одном из упражнений первой лекции мы установили:

$$pay(x) = pay(0) + \int_0^x t \cdot \frac{dq(t)}{dt} \cdot dt \tag{42.2}$$

Если предпосылки теоремы об одинаковой доходности выполнены, то:

$$pay(x) = \int_0^x t \cdot \frac{dq(t)}{dt} \cdot dt \tag{42.3}$$

Вспоминаем, что:

$$q(x) = F(x)^{n-1} \tag{42.4}$$

Стало быть

$$\frac{dq(x)}{dx} = (n-1) f(x) F(x)^{n-2} \tag{42.5}$$

И!!! Мы видим, что это есть функция плотности Y_1!!!:

$$\frac{dq(x)}{dx} = p_{Y_1}(x) \tag{42.6}$$

то есть для любого аукциона подходящего в теорему об одинаковой доходности:

$$pay(x) = \int_0^x t \cdot p_{Y_1}(t) \cdot dt = \mathbb{E}(Y_1 \cdot 1_{Y_1 < x}) \tag{42.7}$$

Третье. На аукционе первой цены:

$$pay(x) = b(x) \cdot q(x) \tag{42.8}$$

Пользуемся первыми двумя результатами и получаем:

$$\mathbb{E}(Y_1 1_{Y_1<x}) = b(x) \cdot \mathbb{P}(Y_1 < x) \tag{42.9}$$

Отсюда немедленно следует, что:

$$b(x) = \frac{\mathbb{E}(Y_1 1_{Y_1<x})}{\mathbb{P}(Y_1 < x)} = \mathbb{E}(Y_1 | Y_1 < x) \tag{42.10}$$

□

2.4. Просто разные примеры

Пример 43.1. Потренируем о-малую мускулу. Найдем равновесие Нэша в аукционе третьей цены. Его правила таковы. Есть n игроков, они одновременно делают ставки. Товар получает тот, кто назвал самую высокую ставку, но платит от не свою ставку, а третью по величине ставку. Предполагаем, что ценность и сигнал — это одно и то же, то есть $V_i = X_i$, а сами сигналы X_i независимы и имеют регулярное распределение на $[0; 1]$.

Мы только что доказали, что при выполнении теоремы об одинаковой доходности:

$$pay_1(x) = \mathbb{E}(Y_1 \cdot 1_{Y_1<x}) = \int_0^x t p_{Y_1}(t) dt \tag{43.2}$$

Из этого следует, что:

$$\frac{dpay_1(x)}{dx} = x p_{Y_1}(x) \tag{43.3}$$

С другой стороны на аукционе третьей цены первый игрок платит третью по величине ставку, значит вторую по величине ставку игроков не считая себя.

$$pay_1(x) = \mathbb{E}(Pay_1 | X_1 = x) = \mathbb{E}(b(Y_2) \cdot 1_{W_1} | X_1 = x) \tag{43.4}$$

Если мы предположим, что в равновесии функция $b()$ строго возрастает, то

$$W_1 = \{b(X_1) > b(X_2) \cap \ldots \cap b(X_1) > b(X_n)\} = \{X_1 > Y_1\} \tag{43.5}$$

так как X_i независимы, нашу функцию выплат можно записать с помощью безусловного мат. ожидания:

$$pay_1(x) = \mathbb{E}(b(Y_2) \cdot 1_{Y_1<X_1} | X_1 = x) = \mathbb{E}(b(Y_2) \cdot 1_{Y_1<x}) \tag{43.6}$$

Судя по формуле нам нужна совместная функция плотности Y_1 и Y_2. О-малые приходят на помощь:

$$p(y_1, y_2) = (n-1)(n-2)f(y_1)f(y_2)F(y_2)^{n-3} \tag{43.7}$$

Следует уточнить, что эта формула верна при $0 < y_2 < y_1 < 1$. При остальных y_1 и y_2 плотность равна нулю.

Для нахождения математического ожидания выписываем страшный двойной интеграл:

$$\begin{aligned} pay_1(x) = \mathbb{E}(b(Y_2)\cdot 1_{Y_1<x}) = \int_0^1 \int_0^{y_1} b(y_2)1_{y_1<x}p(y_1,y_2)dy_2dy_1 = \\ = \int_0^x \int_0^{y_1} b(y_2)p(y_1,y_2)dy_2dy_1 = \\ = \int_0^x \int_0^{y_1} b(y_2)(n-1)(n-2)f(y_1)f(y_2)F(y_2)^{n-3}dy_2dy_1 = \\ (n-1)(n-2)\int_0^x f(y_1)\int_0^{y_1} b(y_2)f(y_2)F(y_2)^{n-3}dy_2dy_1 \end{aligned} \tag{44.1}$$

Конечно, интегрировать это мы не будем. Мы наоборот, возьмем производную по x два раза. Берём производную первый раз:

$$\frac{dpay_1(x)}{dx} = (n-1)(n-2)f(x)\int_0^x b(y_2)f(y_2)F(y_2)^{n-3}dy_2 \tag{44.2}$$

С другой стороны,

$$\frac{dpay_1(x)}{dx} = xp_{Y_1}(x) = x(n-1)f(x)(F(x))^{n-2} \tag{44.3}$$

После сокращения $(n-1)$ и $f(x)$ мы получили уравнение:

$$(n-2)\int_0^x b(y_2)f(y_2)F(y_2)^{n-3}dy_2 = x(F(x))^{n-2} \tag{44.4}$$

Чтобы избавиться от интеграла берём ещё раз производную по x от обеих частей.

$$(n-2)b(x)f(x)F(x)^{n-3} = F(x)^{n-2} + (n-2)xf(x)F(x)^{n-3} \tag{44.5}$$

Выражаем $b(x)$:

$$b(x) = \frac{F(x)}{(n-2)f(x)} + x \tag{44.6}$$

При равномерном распределении наша формула превращается в:

$$b(x) = \frac{n-1}{n-2}x \tag{44.7}$$

Она возрастает по x, значит теорему об одинаковой доходности действительно можно было применять.

Пример 45.1. Общая ценность.

Предположим, что на аукционе первой цены продаётся участок с домом. Торгуются два игрока. Ценность участка с домом одинакова для обоих игроков. Только они её не совсем полностью знают. Один игрок хорошо разбирается в домах, а второй — в земельных участках. то есть Природа сообщает первому игроку ценность дома, а второму — ценность участка.

Введем обозначения:

- V_i — случайная величина, ценность товара для игрока i
- X_i — случайная величина, сигнал от Природы, который получает игрок i

В нашем случае: $V_1 = V_2 = X_1 + X_2$ — это ценности товара, а X_1 — сигнал, часть ценности, известная первому игроку и X_2 — сигнал, часть ценности, известная второму игроку.

Предположим, что X_i независимы и равномерны на $[0;1]$. Найдите равновесие Нэша.

Решение:

В этом случае прибыль равна:

$$Profit_1 = (V_1 - Bid_1) \cdot 1_{W_1} \tag{45.2}$$

Находим нашу детерминистическую функцию:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Profit_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \\ = \mathbb{E}((x + X_2) - b_1) \cdot 1_{W_1}|X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \\ = (x - b_1)\mathbb{P}(W_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1) + \mathbb{E}(X_2 \cdot 1_{W_1}|X_1 = x; Bid_1 = b_1)\end{aligned} \tag{45.3}$$

Здесь нужно быть очень аккуратным так как $\mathbb{E}(X \cdot Y)$ в общем случае не совпадает с $\mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$!

В силу независимости X_i и того, что $Bid_2 = b(X_2)$ упрощаем $\mathbb{P}(W_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \\ = \mathbb{P}(Bid_2 < Bid_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \mathbb{P}(Bid_2 < b_1)\end{aligned} \tag{45.4}$$

Вспомнив чудо-замену $b_1 = b(a)$ получаем:

$$\mathbb{P}(Bid_2 < b_1) = \mathbb{P}(b(X_2) < b(a)) = \mathbb{P}(X_2 < a) = F(a) \tag{45.5}$$

Упрощаем: $\mathbb{E}(X_2 \cdot 1_{W_1} | X_1 = x; Bid_1 = b_1)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_2 \cdot 1_{W_1} | X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \mathbb{E}(X_2 \cdot 1_{Bid_2 < Bid_1} | X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \\ = \mathbb{E}(X_2 \cdot 1_{b(X_2) < b_1} | X_1 = x) = \mathbb{E}(X_2 \cdot 1_{b(X_2) < b_1}) \end{aligned} \tag{46.1}$$

В последнем переходе мы использовали то, что X_1 и X_2 независимы.
И, чудо-замена,

$$\mathbb{E}(X_2 \cdot 1_{b(X_2) < b_1}) = \mathbb{E}(X_2 \cdot 1_{b(X_2) < b(a)}) = \mathbb{E}(X_2 \cdot 1_{X_2 < a}) = \int_0^a t f(t) dt \tag{46.2}$$

Собираем все вместе:

$$\pi_1(x, b(a)) = (x - b(a))F(a) + \int_0^a t f(t) dt \tag{46.3}$$

Берём производную по a:

$$-b'(a)F(a) + (x - b(a))f(a) + af(a) = 0 \tag{46.4}$$

так как мы ищем равновесие Нэша, оптимальное $b_1 = b(x)$, и значит, оптимальное $a = x$:

$$-b'(x)F(x) + (x - b(x))f(x) + xf(x) = 0 \tag{46.5}$$

В случае равномерных ценностей:

$$-b'(x)x + (x - b(x)) + x = 0 \tag{46.6}$$

Это линейное дифференциальное уравнение, общее решение имеет вид $b(x) = x + \frac{c}{x}$. Единственное ограниченное на $[0; 1]$ решение — это $b(x) = x$. Почему нас не интересуют неограниченные решения? Потому, что оно заведомо не оптимально. Если стратегия $b(x)$ принимает значения больше единицы, то стратегия $\min\{b(x), 1\}$ окажется лучше. Стратегия $b(x)$ с положительной вероятностью приводит к ситуации, когда мы выигрываем товар, но обязаны заплатить за него сумму выше 1, то есть мы получаем отрицательный выигрыш. Стратегия $\min\{b(x), 1\}$ этого недостатка лишена, а во всем прочем точно копирует стратегию $b(x)$.

Пример 46.7. Кнопочный аукцион с зависимыми ценностями. У нас имеется три игрока, $V_1 = V_2 = V_3 = X_1 + X_2 + X_3$, ценности независимы и равномерны на $[0; 1]$. Найдите равновесные Нэша и средний доход продавца.

Самое сложное — это понять, что является здесь стратегией игрока. Напомню правила. Текущая цена равна времени прошедшему с момента начала аукциона. В начале все игроки жмут свои кнопки. Каждый сам решает, когда ему отпустить кнопку. Как только кнопку отпускает предпоследний игрок, аукцион оканчивается. Победителем считается тот, кто продолжает давить. Он получает товар, по текущей цене на конец аукциона. Во время аукциона игроки знают кто и когда его покидает. Стратегия игрока может учитывать эту информацию. Если ценности зависимы, так оно и окажется.

Рассмотрим первого игрока. Стратегия должна говорить игроку: до которого времени давить кнопку, если никто другой не вышел, и до которого времени давить кнопку, если один другой игрок вышел на цене p. При всем при этом стратегия может учитывать известное игроку значение X_1. В результате стратегия игрока в симметричном случае описывается двумя (!) функциями $(b^3(x), b^2(x, p))$:

- $b^3(x)$ — до которого времени давить кнопку, если в игре 3 игрока
- $b^2(x, p)$ — до которого времени давить кнопку, если в игре 2 игрока, и один ушел на цене p

Сейчас мы предъявим равновесные стратегии, а затем докажем, что они действительно равновесные.

Пусть:

- $b^3(x) = x + x + x = 3x$
- $b^2(x, p) = x + x + \frac{p}{3} = 2x + \frac{p}{3}$

Откуда взялись эти стратегии?

Первая, $b^3()$, получилась подстановкой x в платежную функцию вместо каждого X_i.

Чтобы понять вторую, $b^2(x, p)$, давайте ещё раз вспомним, что такое равновесие Нэша. Равновесие Нэша — это набор стратегий, такой что игрокам не выгодно в одиночку их менять, даже если они расскажут друг другу о своих стратегиях. то есть при поиске равновесия Нэша можно считать стратегии общеизвестными!

Теперь допустим, что текущая цена равна p, и остальные два игрока используют функцию $b^3()$. И вдруг кто-то из них выходит. Это означает, что для него $b^3(x) = p$. Значит для уходящего игрока $x = \frac{p}{3}$. В равновесии Нэша этот вывод могут сделать все игроки! то есть можно восстановить сигнал x уходящего игрока, зная цену на которой он вышел. И мы вводим новую функцию $b^2(x, p)$, в которой сигнал ушедшего игрока выражен через p, а сигналы остающихся игроков по-прежнему заменены на одно и то же x.

Чем они хороши?

Сначала определим, в каком порядке будут выходить игроки, если все используют указанную стратегию. Сначала выйдет тот игрок, у кого минимальное значение $b^3(X_i)$. Поскольку $b^3()$ строго возрастающая функция первым выйдет игрок с минимальным X_i. Допустим это произошло на цене p. Следующим игроком из двух оставшихся выйдет тот, у кого $b^2(X_i, p)$ меньше. Но $b_2(x, p)$ строго возрастает по x, а значение p одинаковое, значит вторым выйдет тот из оставшихся игроков, у кого X_i меньше. Мораль. Если игроки используют эти стратегии, то они выходят в порядке возрастания ценностей и товар получает тот, у кого X_i наибольшее. Это хорошее свойство указанной стратегии, но ещё не доказательство оптимальности.

Почему же они все-таки равновесны?

Рассматриваем ситуацию, когда все игроки кроме первого используют указанную стратегию. Мы сейчас посчитаем какой выигрыш получает первый игрок, если тоже использует указанную стратегию и сколько он получит, если отклонится.

Пусть первый игрок также использует стратегию $(b^3(x), b^2(x, p))$. Возможно две ситуации:

- Первый игрок выигрывает аукцион.

  Это происходит, если его ценность выше других, то есть $X_1 > Y_1$. В этом случае первый выход из игры происходит при цене $b^3(Y_2)$, а второй — при цене $b^2(Y_1, b^3(Y_2))$. Значит первый игрок заплатит $b^2(Y_1, b^3(Y_2))$. И выигрыш первого игрока равен:

  $$V_1 - b^2(Y_1, b^3(Y_2)) = X_1 + X_2 + X_3 - b^2(Y_1, b^3(Y_2)) = \\ = X_1 + Y_1 + Y_2 - Y_1 - Y_1 - Y_2 = X_1 - Y_1 > 0 \quad (48.1)$$

  Если игрок захочет отклонится, то есть не выиграть аукцион, то он получит 0. Значит отклоняться не выгодно.

- Первый игрок проигрывает аукцион.

  Это происходит, если его ценность не максимальная, то есть $X_1 < Y_1$. В этом случае его доход равен 0. Сколько игрок получит, если захочет отклонится, то есть выиграть?

  $$V_1 - b^2(Y_1, b^3(Y_2)) = X_1 + X_2 + X_3 - b^2(Y_1, b^3(Y_2)) = \\ = X_1 + Y_1 + Y_2 - Y_1 - Y_1 - Y_2 = X_1 - Y_1 < 0 \quad (48.2)$$

  Отклоняться не выгодно.

Считаем среднюю выручку продавца:

$$\mathbb{E}(R) = \mathbb{E}(b^2(Y_1, b^3(Y_2))|X_1 > Y_1) = \mathbb{E}((2Y_1 + Y_2)|X_1 > Y_1) = \ldots = 1.25 \quad (48.3)$$

Замечания:

- При определении стратегий была важна связь между X_i и V_i, но не совместная функция плотности X_i. В решении равномерность распределения не использовалась!

- Если после окончания игры игроки раскроют значения своих X_i друг другу, то никто не пожалеет о выбранной стратегии. Проигравшие не жалеют, так как при известных X_i им ничего не светит. Выигравший не жалеет, так как при фиксированных стратегиях других игроков выиграть за меньшую сумму он не мог.

- Аукцион как и раньше очень сильно похож на аукцион второй цены

2.5. Супермодулярные функции

Введем более короткие обозначения для максимума и минимума:

$$x \wedge y \wedge z = \min\{x, y, z\} \quad (49.1)$$

$$x \vee y \vee z = \max\{x, y, z\} \quad (49.2)$$

Запомнить эти обозначения легко поняв их происхождение. Кто-то когда-то давно заметил, что минимум и максимум нескольких чисел ведут себя точно так же, как пересечение и объединение множеств:

Убедитесь, что для множеств верно:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \quad (49.3)$$

А для чисел верно:

$$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c) \quad (49.4)$$

Совпадение это не случайно. Если какая-то формула для множеств верна, то она верна и для подмножеств числовой прямой вида $(-\infty; t]$. А на таких подмножествах аналогия совершенно прямая: если $A = (-\infty; a]$ и $B = (-\infty; b]$, то $A \cup B = (-\infty; a \vee b]$ и $A \cap B = (-\infty; a \wedge b]$.

Докажите, что, например, верны формулы:

$$1_A \wedge 1_B = 1_{A\cap B} \tag{49.5}$$

$$1_A \vee 1_B = 1_{A\cup B} \tag{49.6}$$

Аналогичные операции применяются и к векторам:

Определение 50.1. Если $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, то:

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = (x_1 \wedge y_1, \ldots, x_n \wedge y_n) \tag{50.2}$$

$$\vec{x} \vee \vec{y} = (x_1 \vee y_1, \ldots, x_n \vee y_n) \tag{50.3}$$

В экономическом моделировании то там, то сям возникают супермодулярные функции:

Определение 50.4. Функция $f()$ называется **супермодулярной**, если для любых $\vec{x}$ и $\vec{y}$

$$f(\vec{x} \wedge \vec{y}) + f(\vec{x} \vee \vec{y}) \geqslant f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \tag{50.5}$$

Пример 50.6. Функция $f(x_1, x_2) = x_1$ является супермодулярной. Действительно, левая часть равна:

$$f(\vec{x} \wedge \vec{y}) + f(\vec{x} \vee \vec{y}) = x_1 \wedge y_1 + x_1 \vee y_1 = x_1 + y_1 \tag{50.7}$$

Правая часть равна:

$$f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = x_1 + y_1 \tag{50.8}$$

Пример 50.9. Функция $f(x) = x^3$ является супермодулярной:

$$\begin{multline} f(x \wedge y) + f(x \vee y) = (x \wedge y)^3 + (x \vee y)^3 = x^3 \wedge y^3 + x^3 \vee y^3 = \\ = x^3 + y^3 = f(x) + f(y) \tag{50.10} \end{multline}$$

Пример 50.11. Функция $f(x_1, x_2) = -x_1 x_2$ не является супермодулярной:

$$f((1,2) \wedge (2,1)) + f((1,2) \vee (2,1)) = f(2,2) + f(1,1) = -4 - 1 = -5 \tag{50.12}$$

$$f(1,2) + f(2,1) = -2 - 2 = -4 \tag{50.13}$$

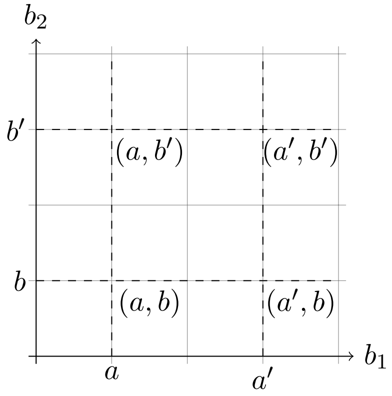
***Теорема* 50.14.** *Если у функции f существуют вторые производные, то она является супермодулярной если и только если для $i \neq j$:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \geqslant 0 \tag{50.15}$$

Сначала мы докажем, что эта теорема верна для функции двух переменных.

Доказательство. Случай двух переменных.

Рассмотрим функцию $f(x, y)$ и четыре точки на плоскости, $a' > a$ и $b' > b$:



Применяя определение супермодулярности к паре (a, b') и (a', b) мы получаем:

$$f((a', b) \wedge (a, b')) + f((a', b) \vee (a, b')) \geqslant f(a', b) + f(a, b') \tag{51.1}$$

Применительно к нашим точкам:

$$f(a, b) + f(a', b') \geqslant f(a', b) + f(a, b') \tag{51.2}$$

Или:

$$f(a', b') - f(a', b) \geqslant f(a, b') - f(a, b) \tag{51.3}$$

Что можно озвучить словами так: разность $f(x, b') - f(x, b)$ растет по x при $b' > b$.

Значит при $b' > b$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x, b') - f(x, b)) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, b') - \frac{\partial}{\partial x} f(x, b) \geqslant 0 \tag{51.4}$$

По определению, вторая производная, это:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, b) = \lim_{\Delta b \to 0} \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x, b + \Delta b) - \frac{\partial}{\partial x} f(x, b)}{\Delta b} \tag{51.5}$$

Если взять $b' = b + \Delta b$ и $\Delta b > 0$ мы получаем положительные числитель и знаменатель. Значит и сама вторая производная будет положительной.

В обратную сторону. Если вторая производная всюду неотрицательна, то первая производная разности растет по b, то есть мы получаем формулу 51.4. Остальные переходы равносильны.

□

Чтобы получить доказательство для произвольного случая нам понадобится такая теорема полезная и сама по себе:

***Теорема* 52.0.** *Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ является супермодулярной если и только если она является супермодулярной функцией от любых двух своих переменных при фиксированных значениях остальных переменных.*

Доказательство. Мы докажем теорему для функции трёх переменных. В общем случае доказательство ничем не сложнее, просто навешивается куча индексов.

Итак, пусть у нас есть супермодулярная функция трёх аргументов, $f(a, b, c)$.

Заметим, что рассмотрев её как функцию двух аргументов, зафиксировав любой третий мы получим снова супермодулярную функцию. Например, если $g(a, b) := f(a, b, c)$, то g — супермодулярна:

$$\begin{aligned}
g((x_1, x_2) \vee (y_1, y_2)) + g((x_1, x_2) \wedge (y_1, y_2)) = \\
f((x_1, x_2, c) \vee (y_1, y_2, c)) + f((x_1, x_2, c) \wedge (y_1, y_2, c)) \geqslant \\
f((x_1, x_2, c)) + f((y_1, y_2, c)) = g(x_1, x_2) + g(y_1, y_2)
\end{aligned} \tag{52.1}$$

В обратную сторону чуть посложнее...Пусть при рассмотрении любых двух переменных мы получаем супермодулярную функцию.

Рассмотрим две точки, (a', b', c) и (a, b, c'). Штрихованная переменная больше, $a' > a$, $b' > b$, $c' > c$.

Получаем:

$$\begin{aligned}
f((a', b', c) \vee (a, b, c')) + f((a', b', c) \wedge (a, b, c')) - f(a', b', c) - f(a, b, c') = \\
f(a', b', c') + f(a, b, c) - f(a', b', c) - f(a, b, c') = \\
f(a', b', c') + f(a, b, c) - f(a', b, c) - f(a, b', c') + \\
+ [f(a', b, c) - f(a', b, c)] + [f(a', b, c') - f(a', b, c')] = \\
[f(a', b', c') + f(a', b, c) - f(a', b, c') - f(a', b', c)] + \\
+ [f(a, b, c) + f(a', b, c') - f(a', b, c) - f(a, b, c')] \geqslant 0
\end{aligned} \tag{52.2}$$

При доказательстве для $n > 3$ можно пользоваться предположением индукции, то есть тем, что для $n - 1$ теорема уже доказана. □

Нам супермодулярные функции понадобятся для описания зависимости между сигналами X_i. Мы хотим, чтобы сигналы были связаны положительно между собой. Например, если выставлен на торги хороший лот, то все участники считают его хорошим. А выставлен плохой — все более или менее видят, что он плох. Более формально:

Определение 52.3. Случайные величины X_1, ..., X_n с совместной функцией плотности $f(x_1, \dots, x_n)$ называются **аффилированными**, если $\ln(f(\vec{x}))$ — супермодулярная функция.

Чуть позже (теорема 71.4) мы докажем, что из аффилированности случайных величин X и Y следует например, что:

1. $Cov(X, Y) \geqslant 0$
2. Функция $g(x) = \mathbb{E}(Y|X = x)$ неотрицательно зависит от x

В силу того, что логарифм произведения равен сумме логарифмов, это определение эквивалентно следующему:

Определение 53.1. Случайные величины X_1, ..., X_n с совместной функцией плотности $f(x_1, \dots, x_n)$ называются **аффилированными**, если

$$f(\vec{x} \wedge \vec{y}) \cdot f(\vec{x} \vee \vec{y}) \geqslant f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) \tag{53.2}$$

2.6. Задачи

1. Пусть A и B — это события. Верно ли, что $\mathbb{E}(1_A|B) = \mathbb{P}(A|B)$?
2. Пусть A и B — это независимые события. Верно ли, что $\mathbb{E}(1_A|B) = \mathbb{E}(1_A)$?
3. С помощью o-малых найдите:
   (a) функцию плотности минимума остальных ставок, $p_{Y_{n-1}}(t)$
   (b) функцию плотности $p_{Y_6}(t)$
   (c) совместную функцию плотности $p_{Y_1,Y_{n-1}}(a, b)$
   (d) совместную функцию плотности $p_{Y_3,Y_6}(a, b)$
   (e) совместную функцию плотности $p_{Y_{n-2},Y_{n-1}}(a, b)$
   (f) совместную функцию плотности $p_{X_1,Y_1}(a, b)$
4. Рассмотрим аукцион первой цены двух игроков. Ценности независимы и имеют функцию плотности $f(t) = 2t$ на $[0; 1]$.

   Найдите:

   (a) Равновесие Нэша, то есть детерминистические стратегии $b(x)$
   (b) Детерминистическую функцию $pay_1(x)$

(c) Детерминистическую функцию $\widehat{pay_1}(b)$

(d) Детерминистическую функцию $q_1(x)$

(e) Детерминистическую функцию $\widehat{q_1}(b)$

(f) Функцию распределения случайной величины Pay_1

(g) $\mathbb{E}(Pay_1), Cov(Pay_1, Pay_2), Var(Pay_1)$

(h) Функцию распределения случайной величины R

(i) $\mathbb{E}(R), Var(R), Cov(R, Pay_1)$

(j) Тонкая разница! Если применить детерминистическую функцию $pay_1(x)$ к случайной величине X_1, то мы получим случайную величину $pay_1(X_1)$. Временно обозначим её L_1 (и забудем это обозначение после этого упражнения). Найдите функцию распределения $L_1, \mathbb{E}(L_1), Var(L_1), Cov(L_1, L_2)$

5. Предположим, что на аукционе первой цены продаётся участок с домом. Торгуются два игрока. Природа сообщает первому игроку ценность дома, X_1, а второму — ценность участка, X_2. При этом ценности игроков определяются по формулам: $V_1 = X_1 + 0.5X_2$ — первому важнее дом, $V_2 = 0.5X_1 + X_2$ — второму важнее участок. Ценности независимы и равномерны на $[0;1]$. Найдите равновесие Нэша.

6. Сколько функций потребуется (и от каких переменных каждая из них зависит) чтобы описать стратегию в симметричном равновесии Нэша в кнопочном аукционе с 4-мя игроками? С 5-ю? С n игроками?

7. Сколько функций потребуется (и от каких переменных каждая из них зависит) чтобы описать стратегию в несимметричном равновесии Нэша в кнопочном аукционе с 4-мя игроками? С 5-ю? С n игроками?

8. Рассмотрим кнопочный аукцион с тремя игроками. Каждый игрок знает своё X_i, а ценности определяются по правилу:

$$V_1 = X_1 + X_2 \cdot X_3 V_2 = X_2 + X_1 \cdot X_3 V_3 = X_3 + X_1 \cdot X_2 \tag{54.1}$$

Сигналы X_i независимы и имеют равномерное распределение на $[0;1]$. Найдите равновесие Нэша и средний доход продавца.

9. Найдите $(1,2,3) \wedge (5,0,2)$ и $(1,2,3) \vee (5,0,2)$

10. Являеются ли супермодулярными функции:

(a) $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$

(b) $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ при положительных x_i

(c) $f(a, b, c) = a \wedge b \wedge c$

(d) $f(a, b, c) = a \vee b \vee c$

11. Существует ли функция одной переменной не являющаяся супермодулярной?

12. Верно ли, что X_i аффилированы если:

    (a) X_1, ..., X_n — независимы

    (b) $f(x, y) = x + y$ при $x, y \in [0; 1]$

    (c) $f(x, y) = \frac{1+4xy}{2}$ при $x, y \in [0; 1]$

13. Пара случайных величин X и Y имеет совместное нормальное распределение с корреляцией ρ. При каких ρ они будут аффилированы?

2.7. Решения задач

1. Да. $\mathbb{E}(1_A|B) = \mathbb{E}(1_A 1_B)/\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A|B)$

2. Да. $\mathbb{E}(1_A|B) = \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(1_A)$

3. (a) $p_{Y_{n-1}}(t) = (n-1)f(t)(1-F(t))^{n-2}$

    (b) $p_{Y_6}(t) = (n-1)f(t)C_{n-1}^5(1-F(t))^5(F(t))^{n-7}$

    (c) $p_{Y_1,Y_{n-1}}(a, b) = (n-1)(n-2)f(a)f(b)(F(a)-F(b))^{n-3}$

    (d) $p_{Y_3,Y_6}(a, b) = (n-1)(n-2)C_{n-3}^2 C_{n-5}^2 f(a)f(b)(F(b))^{n-7}(1-F(a))^2(F(a)-F(b))^2$

    (e) $p_{Y_{n-2},Y_{n-1}}(a, b) = (n-1)(n-2)f(a)f(b)(1-F(a))^{n-3}$

    (f) $p_{X_1,Y_1}(a, b) = f(a)(n-1)f(b)(F(b))^{n-2}$

4. (a) Стратегии $b(x)$ мы уже искали в предыдущей домашней работе, $b(x) = \frac{2}{3}x$

    (b) Функцию $pay_1(x)$ проще всего найти через теорему 42.1:

$$pay_1(x) = \int_0^x t(n-1)f(t)(F(t))^{n-2}dt = \frac{2}{3}x^3 \tag{55.1}$$

(c) Функция $\widehat{q_1}(b)$ — это вероятность того, что первый выиграет, если поставит b. Значит:

$$\widehat{q_1}(b) = \mathbb{P}(Bid_2 < b) = \mathbb{P}\left(\frac{2}{3}X_2 < b\right) = \\ = \mathbb{P}\left(X_2 < \frac{3}{2}b\right) = F\left(\frac{3}{2}b\right) = \left(\frac{3}{2}b\right)^2 \quad (55.2)$$

(d) Ищем $\widehat{pay_1}(b)$:

$$\widehat{pay_1}(b) = \mathbb{E}(b \cdot 1_{Bid_2 < b}) = b \cdot \mathbb{P}(Bid_2 < b) = b\left(\frac{3}{2}b\right)^2 \quad (56.1)$$

(e) Функция $q_1(x)$ — это вероятность того, что первый выиграет при ценности x, значит $q_1(x) = x^2$

(f) Случайная величина Pay_1 — интересный зверь. Она не является ни дискретной, ни непрерывной. Заметим, что в равновесии с вероятностью 0.5 первый проигрывает аукцион и не платит ничего. Значит у функции распределения скачок высотой 0.5 в точке $t = 0$! А в остальных точках — она непрерывна. Замечаем, что область значений Pay_1 — отрезок $[0; 2/3]$...

Более детально рассматриваем точки $t \in (0; 2/3)$

$$\mathbb{P}(Pay_1 \leqslant t) = \mathbb{P}(Pay_1 \leqslant t \cap X_1 > X_2) + \mathbb{P}(Pay_1 \leqslant t \cap X_1 < X_2) = \\ = \mathbb{P}(Pay_1 \leqslant t \cap X_1 > X_2) + \mathbb{P}(X_1 < X_2) = \\ = \mathbb{P}(Pay_1 \leqslant t \cap X_1 > X_2) + 0.5 \quad (56.2)$$

Считаем первую вероятность отдельно:

$$\mathbb{P}(Pay_1 \leqslant t \cap X_1 > X_2) = \mathbb{P}(\frac{2}{3}X_1 \leqslant t \cap X_1 > X_2) = \\ \mathbb{P}(X_1 \leqslant 1.5t \cap X_1 > X_2) = \int_0^{1.5t}\int_0^{x_1} 2x_1 2x_2 dx_2 dx_1 = \frac{81}{32}t^4 \quad (56.3)$$

Итого, получаем функцию распределения:

$$F_{Pay_1}(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 0.5 + \frac{81}{32}t^4, t \in [0; 2/3] \\ 1, t > 2/3 \end{cases} \quad (56.4)$$

Функции плотности у Pay_1 нет! Функция распределения разрывна. Тем не менее выпишем производную:

$$f_{Pay_1}(t) = 0.5d(0) + \frac{81}{8}t^3 \tag{56.5}$$

В начале формулы идет некое мифическое $0.5d(0)$ — это просто условная запись. Она нужна чтобы помнить, что у $F(t)$ в точке $t = 0$ был скачок высотой 0.5.

(g) $\mathbb{E}(Pay_1), , Var(Pay_1)$
Считаем мат. ожидание. Это легко. От дискретной части появляется $0{\cdot}0.5$. От непрерывной — интеграл.

$$\mathbb{E}(Pay_1) = 0 \cdot 0.5 + \int_0^{2/3} t \cdot \frac{81}{8}t^3 dt = \ldots = 4/15 \tag{57.1}$$

Для дисперсии нам нужно:

$$\mathbb{E}(Pay_1^2) = 0^2 \cdot 0.5 + \int_0^{2/3} t^2 \cdot \frac{81}{8}t^3 dt = \ldots = 4/27 \tag{57.2}$$

Дисперсия равна:

$$Var(Pay_1) = \mathbb{E}(Pay_1^2) - \mathbb{E}(Pay_1)^2 = 4/27 - (4/15)^2 = 52/675 \tag{57.3}$$

Два игрока никогда не платят одновременно, поэтому $Pay_1 \cdot Pay_2$ тождественно равно нулю. Отсюда:

$$Cov(Pay_1, Pay_2) = \mathbb{E}(Pay_1 Pay_2) - \mathbb{E}(Pay_1)\mathbb{E}(Pay_2) = \\ = 0 - (4/15)^2 \tag{57.4}$$

(h) Случайная величина R — это не что иное, как максимум из ставок:

$$R = \max\left\{\frac{2}{3}X_1, \frac{2}{3}X_2\right\} = \frac{2}{3}\max\{X_1, X_2\} \tag{57.5}$$

Функция распределения:

$$F_R(t) = \mathbb{P}(R \leqslant t) = \mathbb{P}\left(\frac{2}{3}\max\{X_1, X_2\} \leqslant t\right) = \\ = \mathbb{P}\left(X_1 < \frac{3}{2}t \cap X_2 < \frac{3}{2}t\right) = F\left(\frac{3}{2}t\right)^2 = \left(\frac{3}{2}t\right)^4 \tag{57.6}$$

Это непрерывная случайная величина, и у неё есть функция плотности:

$$f_R(t) = 4\left(\frac{3}{2}t\right)^3 \frac{3}{2} \tag{57.7}$$

(i) Для нахождения $\mathbb{E}(R), Var(R), Cov(R, Pay_1)$ вспоминаем, что $R = Pay_1 + Pay_2$.

$$\mathbb{E}(R) = \mathbb{E}(Pay_1 + Pay_2) = 2\mathbb{E}(Pay_1) \tag{57.8}$$

$$Var(R) = Var(Pay_1) + Var(Pay_2) + 2Cov(Pay_1, Pay_2) \tag{58.1}$$

$$\begin{aligned} Cov(R, Pay_1) = Cov(Pay_1 + Pay_2, Pay_1) = \\ = Var(Pay_1) + Cov(Pay_2, Pay_1) \end{aligned} \tag{58.2}$$

(j) В нашем случае $L_1 = \frac{2}{3}X_1^3$.
Функция распределения:

$$\begin{aligned} F_{L_1}(t) = \mathbb{P}(L_1 < t) = \mathbb{P}\left(\frac{2}{3}X_1^3 < t\right) = \\ = \mathbb{P}(X_1 < (1.5t)^{1/3}) = F((1.5t)^{1/3}) = (1.5t)^{2/3} \end{aligned} \tag{58.3}$$

В данном случае речь идет о непрерывной случайной величине, у неё есть функция плотности:

$$f_{L_1}(t) = 1.5\frac{2}{3}(1.5t)^{-1/3} \tag{58.4}$$

Мат. ожидание:

$$\mathbb{E}(L_1) = \int_0^1 \frac{2}{3}t^3 2tdt = \frac{4}{15} \tag{58.5}$$

Дисперсия:

$$Var(L_1) = \mathbb{E}(L_1^2) - \mathbb{E}(L_1)^2 = \frac{1}{9} - \left(\frac{4}{15}\right)^2 = \frac{1}{25} \tag{58.6}$$

Поскольку X_1 и X_2 независимы, $pay(X_1)$ и $pay(X_2)$ тоже независимы, и $Cov(L_1, L_2) = 0$

Заметим, что $\mathbb{E}(Pay_1) = \mathbb{E}(pay_1(X_1))$, но $Var(Pay_1) \neq Var(pay(X_1))$! Ковариации также различаются...то есть Pay_1 и $pay_1(X_1)$ — это разные случайные величины!

5. От рассмотренного примера отличается только коэффициентом 0.5 перед $\mathbb{E}(X_2 1_{W_1}|$
Значит финальное дифф. уравнение имеет вид:

$$-b'(x)F(x) + (x - b(x))f(x) + 0.5 \cdot xf(x) = 0 \tag{58.7}$$

При равномерном распределении:

$$-b'(x)x + (x - b(x)) + 0.5 \cdot x = 0 \tag{58.8}$$

Подбираем сразу линейное решение, получаем $b(x) = 0.75x$

6. Для четырех. $b^4(x)$, $b^3(x, p_4)$, $b^2(x, p_3, p_4)$ (названия переменных объясняются соглашением, что p_i — это моменты выхода игроков в порядке убывания)

   Для пяти. $b^5(x)$, $b^4(x, p_5)$, $b^3(x, p_4, p_5)$, $b^2(x, p_3, p_4, p_5)$

   Для n игроков. Нужна $(n-1)$ функция, $b^n(x)$, $b^{n-1}(x, p_n)$, ..., $b^2(x, p_3, \ldots, p_n)$

7. Начнём все-таки с трех. Заметим, что у каждого игрока свои стратегии! Например, рассмотрим первого:

   (a) $b_1^3(x)$ — до какого момента давить на кнопку, если в игре 3 игрока.
   (b) $b_1^{2:-2}(x, p)$ — до какого момента давить на кнопку, если в игре 2 игрока и первым вышел второй.
   (c) $b_1^{2:-3}(x, p)$ — до какого момента давить на кнопку, если в игре 2 игрока и первым вышел третий.

   Для четырех (функции описывают, до какого момента давить на кнопку)

   (a) $b_1^4(x)$ — если все четверо в игре
   (b) $b_1^{3:2}(x, p)$ — если вышел только второй на цене p
   (c) $b_1^{3:3}(x, p)$ — если вышел только третий на цене p
   (d) $b_1^{3:4}(x, p)$ — если вышел только четвертый на цене p
   (e) $b_1^{2:2,3}(x, p_3, p_4)$ — если сначала вышел второй, на цене p_4, а затем — третий, на цене p_3
   (f) $b_1^{2:2,4}(x, p_3, p_4)$
   (g) $b_1^{2:3,4}(x, p_3, p_4)$
   (h) $b_1^{2:3,2}(x, p_3, p_4)$
   (i) $b_1^{2:4,2}(x, p_3, p_4)$
   (j) $b_1^{2:4,3}(x, p_3, p_4)$

   Итого: $1 + 3 + 6 = 10$ функций.

   Для пяти: $1 + 4 + 12 + 24 = 41$ функция.

   Для произвольного n: $C_{n-1}^1 1! + C_{n-1}^2 2! + C_{n-1}^3 3! + C_{n-1}^4 4! + \ldots C_{n-1}^{n-2}(n-2)!$

8. Сначала равновесие. Первая функция — $b^3(x) = x + x^2$. Со второй чуть посложнее...Если игрок вышел на цене p, то $x + x^2 = p$. Решаем квадратное уравнение, берём корень из $[0; 1]$:

$$x = \frac{\sqrt{1+4p} - 1}{2} \tag{59.1}$$

И получаем:

$$b^2(x, p) = x + x\frac{\sqrt{1+4p} - 1}{2} = x\frac{\sqrt{1+4p} + 1}{2} \tag{60.1}$$

Пусть Z_1 — наибольшая из всех X_i, Z_2 — вторая по величине, а Z_3 — самая маленькая. Тогда побеждает игрок с сигналом Z_1. При этом он платит $b^2(Z_2, b(Z_3)) = Z_2 + Z_2Z_3$.

Значит:

$$\mathbb{E}(R) = \mathbb{E}(Z_2 + Z_2Z_3) = \mathbb{E}(Z_2) + \mathbb{E}(Z_2Z_3) \tag{60.2}$$

Для их расчета привлекаем банду о-малых.

Ищем функцию плотности Z_2. Три способа выбрать Z_2, одна из двух X_i должна быть больше избранной (сомножитель $(1-t)$), другая — меньше (сомножитель t):

$$p_{Z_2}(t) = 3 \cdot 2 \cdot t(1-t) \tag{60.3}$$

Совместная функция плотности положительна только при $a > b$ и равна:

$$p_{Z_2,Z_3}(a, b) = 6(1-a) \tag{60.4}$$

После интегрирования первой получаем очевидный результат, что мат. ожидание медианы трёх равномерных случайных величин равно половине:

$$\mathbb{E}(Z_2) = \ldots = 1/2 \tag{60.5}$$

И после интегрирования второй:

$$\mathbb{E}(Z_2Z_3) = \ldots = \frac{3}{20} \tag{60.6}$$

Итого: $\mathbb{E}(R) = \frac{13}{20}$

9. Ответ: $(1, 2, 3) \wedge (5, 0, 2) = (1, 0, 2)$ и $(1, 2, 3) \vee (5, 0, 2) = (5, 2, 3)$

10. К первым двум можно применять теорему 50.14.

    (a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0$, супермодулярна

    (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} > 0$, супермодулярна

    (c) да, супермодулярна. Достаточно, например, рассмотреть два случая:

        i. $x_1 > y_1$, $x_2 > y_2$, $x_3 > y_3$. Здесь $f(\vec{x} \wedge \vec{y}) = f(\vec{y})$ и $f(\vec{x} \vee \vec{y}) = f(\vec{x})$ и неравенство выполнено.

        ii. $x_1 > y_1$, $x_2 > y_2$, $x_3 < y_3$ Здесь нужно немного помучиться с рассмотрением разных порядков...

    (d) нет, не супермодулярна. Например: $\vec{x} = (3,3,1)$ и $\vec{y} = (2,2,4)$. Тогда: $\vec{x} \wedge \vec{y} = (2,2,1)$ и $\vec{x} \vee \vec{y} = (3,3,4)$. Находим, что: $f(\vec{x} \wedge \vec{y}) = 2$, $f(\vec{x} \vee \vec{y}) = 4$, $f(\vec{x}) = 3$, $f(\vec{y}) = 4$

11. Нет. Если $x = y$, то $x \wedge y = x \vee y = x = y$ и $f(x \wedge y) + f(x \vee y) = f(x) + f(y)$. Если $x \neq y$, то одно из этих чисел больше, а другое — меньше. А это значит, что $x = x \wedge y$ и $y = x \vee y$. Или наоборот, $x = x \vee y$ и $y = x \wedge y$.

12. (a) Независимые случайные величины аффилированы: $\ln(f(x,y,z) = \ln(f(x)) + \ln(f(y)) + \ln(f(z))$

    (b) Если $f(x,y) = x + y$, то

    $$\frac{\partial^2 \ln(f)}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{(x+y)^2} < 0 \qquad (61.1)$$

    Значит, величины не аффилированны. Кстати, в этом примере ради интереса можно посчитать ковариацию: $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 7/12$, $\mathbb{E}(XY) = 1/3$, $Cov(X,Y) = -1/144$.

    (c) Если $f(x,y) = \frac{1+4xy}{2}$, то:

    $$\frac{\partial^2 \ln(f)}{\partial x \partial y} = \ldots = \frac{4}{(1+4xy)^2} \geqslant 0 \qquad (61.2)$$

    Случайные величины аффилированны

13. Для начала заметим, что ответ на вопрос не зависит от мат. ожидания и дисперсии. Это связано с тем, что в силу теоремы 50.14 нужна только неотрицательность смешанной второй производной логарифма плотности при любых x и y. Выбор мат. ожидания — это перенос графика плотности вдоль осей, выбор дисперсии — это растяжение графика плотности вдоль осей. Если была

где-то точка с отрицательной второй смешанной производной, то она просто поменяет свои координаты.

Рассматриваем случай с нулевым мат. ожиданием и единичной дисперсией. Ковариационная матрица имеет вид:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \tag{61.3}$$

Функция плотности равна:

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi \det(S)} \exp\left(-\frac{1}{2}(x\ y)S^{-1}(x\ y)^t\right) \tag{62.1}$$

После логарифмирования получаем (нам интересна только смешанная вторая производная, поэтому следим только за коэффициентом при xy):

$$\ln(p(x,y)) = \ldots + \frac{\rho}{1-\rho^2}xy \tag{62.2}$$

Значит двумерное совместное нормальное распределение аффилированно если корреляция неотрицательная.

2.8. Контрольная 2

1. Техническая задача.

   (a) Известно, что $f(\vec{x})$ и $g(\vec{x})$ — супермодулярные функции, а $a > 0$ и $b > 0$ — константы. Верно ли, что $af(\vec{x}) + bg(\vec{x})$ — супермодулярная функция?

   Да. Проверяем два свойства:

   i. $af(\vec{x})$ — супермодулярна

   ii. $f(\vec{x}) + g(\vec{x})$ — супермодулярна

   (b) Пусть X_1,..., X_n независимы и имеют функцию плотности $f(t) = 3t^2$ на $[0;1]$. Случайные $Y_1, ..., Y_{n-1}$ — это есть упорядоченные по убыванию случайные величины X_2, ..., X_n. С помощью о-малых или без неё найдите совместную функцию плотности $f_{Y_5,Y_{10}}(a,b)$.

Сразу ответ: $f(a,b) = (n-1)(n-2)C^4_{n-3}C^4_{n-7}3a^2 3b^2(a^3-b^3)^4(b^3)^{n-11}(1-a^3)^4$

Следующие две задачи очень похожи, разница в них только в типе аукциона...

2. На аукционе первой цены продаётся участок. Потенциальных покупателей двое. Ценность участка для каждого игрока определяется его площадью. Первый покупатель знает ширину участка X_1, а второй — длину X_2. Совместная фукнция плотности X_1 и X_2 имеет вид $f(x_1, x_2) = \frac{7}{8} + \frac{1}{2}x_1x_2$. Найдите дифференциальное уравнение, которому подчиняется равновесная стратегия игрока.

   Сразу начнем с чудо-замены, $b_1 = b(a)$. Сначала упростим событие W_1:

$$W_1 = \{Bid_2 < b(a)\} = \{b(X_2) < b(a)\} = \{X_2 < a\} \tag{63.1}$$

   А теперь прибыль:

$$\begin{aligned}\pi(x, b(a)) &= \mathbb{E}(X_1X_2 1_{W_1}|X_1 = x) - b(a)\mathbb{E}(1_{W_1}|X_1 = x) = \\ &= x\mathbb{E}(X_2 1_{X_2<a}|X_1 = x) - b(a)\mathbb{E}(1_{X_2<a}|X_1 = x) = \\ &= x\int_0^a x_2\frac{f(x, x_2)}{f(x)}dx_2 - b(a)\int_0^a \frac{f(x, x_2)}{f(x)}dx_2\end{aligned} \tag{63.2}$$

   Сокращаем на $f(x)$ и берём производную по a:

$$\frac{\partial\pi}{\partial a} = xaf(x, a) - b'(a)\int_0^a f(x, x_2)dx_2 - b(a)f(x, a) = 0 \tag{63.3}$$

   Мы хотим, чтобы оптимальной стратегий первого была $b_1 = b(x)$, то есть чтобы $a = x$:

$$\frac{\partial\pi}{\partial a} = x^2f(x, x) - b'(x)\int_0^x f(x, x_2)dx_2 - b(x)f(x, x) = 0 \tag{63.4}$$

   Остается подставить:

$$\begin{aligned}f(x, x) &= \tfrac{7}{8} + \tfrac{1}{2}x^2 \\ \textstyle\int_0^x f(x, x_2)dx_2 &= \tfrac{7}{8}x + \tfrac{1}{4}x^3\end{aligned} \tag{63.5}$$

3. На аукционе второй цены продаётся участок. Потенциальных покупателей двое. Ценность участка для каждого игрока определяется его площадью. Первый покупатель знает ширину участка X_1, а второй — длину X_2. Совместная фукнция плотности X_1 и X_2 имеет вид $f(x_1, x_2) = \frac{7}{8} + \frac{1}{2}x_1x_2$. Найдите равновесие Нэша.

   Никакой разницы с кнопочным аукционом в данном случае нет. Игроков-то всего два! Значит равновесие Нэша имеет вид $b(x) = x^2$.

Доказательство: Если второй игрок использует такую стратегию и первый выигрывает аукцион, то его прибыль равна:

$$X_1X_2 - X_2^2 = (X_1 - X_2)X_2 \tag{63.6}$$

Мы видим, что прибыль положительна, только если $X_1 > X_2$. Использование первым игроком функции $b(x) = x^2$ будет обеспечивать его выигрыш только в ситуации $X_1 > X_2$, значит это и есть равновесие Нэша.

4. Найдите равновесие Нэша в случае кнопочного аукциона. Сигналы X_i игроков имеют совместную функцию плотности $f(x_1, x_2, x_3) = 7/8 + x_1x_2x_3$ при $x_1, x_2, x_3 \in [0; 1]$. Ценности определяеются по формулам:

$$\begin{aligned} V_1 &= X_1(X_2 + X_3) \\ V_2 &= X_2(X_1 + X_3) \\ V_3 &= X_3(X_1 + X_2) \end{aligned} \tag{64.1}$$

Стратегия описывается двумя функциями: $b^3(x) = 2x^2$. Если при использовании такой стратегии игрок вышел на цене p, значит его $x = \sqrt{p/2}$. Получаем $b^2(x, p) = x^2 + x\sqrt{p/2}$. Доказательство аналогично лекции:

Если остальные игроки используют эти стратегии и первый выигрывает аукцион, то его выигрыш равен:

$$\begin{aligned} &X_1(X_2 + X_3) - b^2(Y_1, b^3(Y_2)) = \\ &\qquad = X_1(Y_1 + Y_2) - (Y_1^2 + Y_1Y_2) = (X_1 - Y_1)(Y_1 + Y_2) \end{aligned} \tag{64.2}$$

Мы видим, что выигрыш положительный, только если $X_1 > Y_1$. Использование первым игроком правил $b^3()$ и $b^2()$ приводит к выигрышу только если $X_1 > Y_1$, значит это и есть равновесие.

5. Ценности игроков одинаково распределены, независимы, распределение ценностей дискретно: X_i равновероятно принимает натуральное значение от 1 до 100 включительно. Игроки одновременно делают ставки. Значения всех ценностей общеизвестны всем игрокам ещё до ставок! Разрешаются только целые неотрицательные ставки. Товар достаётся игроку, сделавшему наивысшую ставку. Если таких игроков несколько, то победитель выбирается из них равновероятно. Победитель платит сделанную им ставку. Найдите хотя бы одно равновесие Нэша в чистых стратегиях, в котором игроки не используют нестрого доминируемых стратегий.

Пример равновесия Нэша. Обозначим v_{max} — максимальную ценность и v_{sec} — вторую по величине ценность (возможно они совпадают). Те игроки, чья ценность $v_i < v_{max}$ делают ставку $b_i = v_i - 1$. Если лидер один, то он делает ставку $b = v_{sec}$, иначе каждый лидер делает ставку $b = v_{max} - 1$.

Глава 3

Сравнение аукционов в общем случае

Сравним доходность трёх аукционов (первой, второй цены и кнопочного) для продавца в общем случае. Предположений у нас будет всего два: аффилированность сигналов и симметричность игроков.

3.1. Про симметричность

Для наглядности три примера впереди определения:

Пример 66.1. Совместная функция плотности сигналов имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{7}{8} + x_1 x_2 x_3 \tag{66.2}$$

Ценности определяются по формулам:

$$\begin{aligned} V_1 &= X_1 + \sqrt{X_2 X_3 + 1} - 1 \\ V_2 &= X_2 + \sqrt{X_1 X_3 + 1} - 1 \\ V_3 &= X_3 + \sqrt{X_1 X_2 + 1} - 1 \end{aligned} \tag{66.3}$$

Все симметрично. Ценность товара для меня может по-особому зависеть от моего сигнала, но должна одинаково зависеть от сигнала других игроков. С моей точки зрения другие игроки одинаковые, и то, что знают они, чего не знаю я, должно одинаково воздействовать на ценность товара для меня.

Пример 66.4. Совместная функция плотности сигналов имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{2} x_2 x_3 \right) \tag{66.5}$$

Ценности определяются по формулам:

$$\begin{aligned} V_1 &= X_1 + \sqrt{X_2 X_3 + 1} - 1 \\ V_2 &= X_2 + \sqrt{X_1 X_3 + 1} - 1 \\ V_3 &= X_3 + \sqrt{X_1 X_2 + 1} - 1 \end{aligned} \tag{66.6}$$

Несимметрична функция плотности.

Пример 67.1. Совместная функция плотности сигналов имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{7}{8} + x_1 x_2 x_3 \tag{67.2}$$

Ценности определяются по формулам:

$$\begin{gathered} V_1 = X_1 + \sqrt{X_2 X_3 + 1} - 1 \\ V_2 = X_2 + X_3 \\ V_3 = X_3 \cdot X_1 \end{gathered} \tag{67.3}$$

Несимметричны ценности.

Для формальности:

Определение 67.4. Функция $f(a, b, c, d, e)$ симметрична относительно аргументов a, b, c, если её значение не изменится при перестановке a, b, c в другом порядке.

Пример 67.5. Функция симметричная относительно x и y: $f(x, y, z) = xy + z$

Пример 67.6. Функция симметричная относительно всех аргументов:

$$f(w, x, y, z) = xyz + wxy + wxz + wyz$$

Определение 67.7. Игроков будем называть **симметричными**, если:

1. Совместная функция плотности $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ симметрична по всем аргументам

2. Ценность V_i определяется по формуле:

$$V_i = u(X_i, X_{-i}) \tag{67.8}$$

   где: X_{-i} — это вектор $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ в котором отсутствует X_i, а функция $u(t, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$ симметрична по переменным t_1,..., t_{n-1}, то есть по всем кроме t

Предпосылки на функцию полезности

Кроме того, функция полезности $u()$ удовлетворяет условиям:

1. Не убывает по всем аргументам. Это означает, что сигнал X_i положительно связан с ценностью.

2. $u(0, 0, \ldots, 0) = 0$. Это просто условие нормировки. Если все получили сигнал: «Товар просто никакой», значит товар действительно никакой.

3.2. Еще об аффилированности

Сперва кое-что о вероятностях...

Если у нас есть случайная величина Z, то мы можем построить функцию $z(y) = \mathbb{E}(Z|Y = y)$. Рассмотрим эту функцию в случайной точке Y:

$$\mathbb{E}(z(Y)) = \int_0^1 z(y) f_Y(y) dy = \int_0^1 \int_0^1 z \cdot \frac{f(y,z)}{f_Y(y)} dz f_Y(y) dy = \\ = \int_0^1 \int_0^1 z \cdot f(y,z) dy dz = \mathbb{E}(Z) \quad (68.1)$$

Значит это нам это дает способ расчета $\mathbb{E}(Z)$:

$$\mathbb{E}(Z) = \int_0^1 \mathbb{E}(Z|Y = y) f_Y(y) dx \quad (68.2)$$

Честно говоря, этот способ мы уже использовали. Он очень мощный.

Лирическое отступление для интересующихся. Если глубоко копать, то можно понять, что это не что иное, как теорема о трёх перпендикулярах из 11-го класса средней школы. Намекну: мат. ожидание случайной величины — это её проекция на множество действительных чисел. Квадратом расстояния между двумя случайными величинами при этом служит $\mathbb{E}((X - Y)^2)$. Например, теорема Пифагора формулируется так: $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(m^2) + \mathbb{E}((X - m)^2)$. Три перпендикуляра: наклонная — это Y; плоскость — это множество случайных величин, записывающихся как функция от X; проекция на плоскость — это $\mathbb{E}(Y|X = x)$ взятая в случайной точке X; константы — это прямая в нашей плоскости; $\mathbb{E}(Y)$ — это проекция на прямую...

Аналогично, довесив условие $X = x$ слева и справа, можно получить, что:

$$\mathbb{E}(Z|X = x) = \int_0^1 \mathbb{E}(Z|Y = y \cap X = x) f_{Y|X}(y|x) dy \quad (68.3)$$

Это не очевидно. Те, кому интересна теория вероятностей могут это вывести, остальные могут поверить.

Теперь вернемся к аффилированности:

Теорема 68.4. *Если $X_1, ..., X_n$ аффилированы, то и $X_1, Y_1, Y_2, ..., Y_{n-1}$ аффилированы.*

Доказательство. Великие о-малые говорят нам, что совместная функция плотности вектора $X_1, Y_1, Y_2, ..., Y_{n-1}$ на участке $y_1 > y_2 > \ldots > y_{n-1}$ равна:

$$f_{X_1,Y_1,\ldots,Y_{n-1}}(x_1, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = (n-1)!f(x_1, y_1, \ldots, y_{n-1}) \tag{69.1}$$

Нам нужно проверить супермодулярность логарифма:

$$\ln(f_{X_1,Y_1,\ldots,Y_{n-1}}(x_1, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})) = \ln((n-1)!) + \ln(f(x_1, y_1, \ldots, y_{n-1})) \tag{69.2}$$

Вторые смешанные производные от левой части неотрицательны в силу того, что неотрицательны вторые смешанные производные от правой части.

□

Теоремы которые мы далее докажем будут верны для любых аффилированных случайных величин. Но мы будем иметь ввиду X_1 и Y_1, поэтому и будем использовать соответствующие обозначения.

Теорема 69.3. *Если из набора аффилированных величин некоторые удалить, то оставшиеся будут аффилированы*

Доказательство. Пропущено. Если будут желающие, то допишу.

□

Из теорем 69.3 и 68.4 следует, что X_1 и Y_1 аффилированы. Знание этих двух величин всегда позволяет определить, победил ли первый игрок, и сколько он платит (по крайней мере для трёх аукционов, которые мы сравниваем).

Нам надо изучать X_1 и Y_1, чтобы все время не писать индекс $_1$ в доказательствах пока забудем про него.

Введем несколько обозначений для этой пары:

1. $g(x, y)$ — их совместная функция плотности,
2. $g(y|x) = \frac{g(x,y)}{f_X(x)}$ — условная функции плотности Y при заданном X
3. $G(y|x) = \mathbb{P}(Y \leqslant y|X = x)$ — условная функции распределения Y при заданном X.

   Конечно, верно соотношение:

$$G(y|x) = \mathbb{P}(Y \leqslant y|X = x) = \int_0^y g(t|x)dt \tag{69.4}$$

4. $R(y|x) = \frac{g(y|x)}{G(y|x)}$ — условная обратная функция риска Y при заданном X.

   Поясним её смысл. Это шансы того, что Y будет около y, если известно, что $Y \leqslant y$ и $X = x$. Например, значение $R(10, 20) = 30$ можно проинтерпретировать так. Возьмем маленький $\Delta y = 0.01$. Тогда $\mathbb{P}(Y \in [9.99; 10] | Y \leqslant 10, X = 20) \approx 30 \cdot 0.01 = 0.3$.

При расчете $R(y|x)$ можно не считать $f_X(x)$, так как оно сокращается:

$$R(y|x) = \frac{g(y|x)}{G(y|x)} = \frac{g(x,y)}{\int_0^y g(x,t)dt} \tag{70.1}$$

Нам потребуется такой технический результат:

Теорема 70.2. *Если случайные величины X и Y аффилированы, и $g(x,y)$ — их совместная функция плотности, то*[1]

1. *Условная функция распределения $G(y|x)$ — не возрастает по x*

2. *Условная обратная функция риска $R(y|x) = \frac{g(y|x)}{G(y|x)}$ — не убывает по x*

Доказательство. Величины X и Y аффилированы.

Рассмотрим пару точек (x', y) и (x, y'). Воспользуемся аффилированностью:

$$g((x', y) \wedge (x, y')) \cdot g((x', y) \vee (x, y')) \geqslant g(x', y) \cdot g(x, y') \tag{70.3}$$

Пусть $x' \geqslant x$ и $y' \geqslant y$. Тогда:

$$g(x, y) \cdot g(x', y') \geqslant g(x', y) \cdot g(x, y') \tag{70.4}$$

Поскольку $g(x, y) = g(y|x) \cdot f_X(x)$ мы получаем:

$$g(y|x) \cdot f_X(x) \cdot g(y'|x') \cdot f_X(x') \geqslant g(y|x') \cdot f_X(x') \cdot g(y'|x) \cdot f_X(x) \tag{70.5}$$

Убираем повторы

$$g(y|x) \cdot g(y'|x') \geqslant g(y|x') \cdot g(y'|x) \tag{70.6}$$

Или:

$$\frac{g(y|x)}{g(y'|x)} \geqslant \frac{g(y|x')}{g(y'|x')} \tag{70.7}$$

[1] *Тут обычно вводят кучу определений (стохастическое доминирование, доминирование в терминах обратной доли риска и пр.), но мы не будем этого делать.*

Интегрируем по y от 0 до y':

$$\frac{G(y'|x)}{g(y'|x)} \geqslant \frac{G(y'|x')}{g(y'|x')} \tag{70.8}$$

Переворачиваем дробь:

$$\frac{g(y'|x)}{G(y'|x)} \leqslant \frac{g(y'|x')}{G(y'|x')} \tag{70.9}$$

Используя условную обратную функцию риска:

$$R(y'|x) \leqslant R(y'|x') \tag{70.10}$$

А у нас $x \leqslant x'$. Это и означает, что $R(\cdot|x)$ не убывает по x.

Осталось доказать, что $G(y'|x)$ не возрастает по x. Мы докажем, что $\ln(G(y'|x))$ не возрастает по x.

Заметим, что:

$$\frac{\partial \ln(G(y'|x))}{\partial y'} = \frac{g(y'|x)}{G(y'|x)} = R(y'|x) \tag{71.1}$$

Или:

$$\ln(G(y'|x)) = \int_1^{y'} R(t|x)dt \tag{71.2}$$

Обратите внимание, что здесь несколько непривычные пределы интегрирования: не от 0, а от 1. Связано это с тем, что интеграл должен обращаться в 0 не при $y' = 0$, а при $y' = 1$. Действительно, у нас регулярное распределение на $[0; 1]$, значит $G(1|x) = 1$ и $\ln(G(1|x)) = 0$. Заметьте, что знаки при этом совпадают: и слева отрицательное выражение, так как $G \in (0; 1)$ и справа, так как верхний предел меньше нижнего.

Давайте перепишем в привычном варианте, когда верхний предел интегрирования больше нижнего:

$$\ln(G(y'|x)) = -\int_{y'}^{1} R(t|x)dt \tag{71.3}$$

С ростом x подынтегрируемое выражение растет для любого t, значит растет результат интегрирования. то есть функция $\ln(G(y'|x))$ не возрастает по x.

$\square$

Из этих свойств следует теорема имеющая более наглядный смысл:

***Теорема* 71.4.** *Если X и Y аффилированы, то:*

1. *Функция $\mathbb{E}(Y|X = x)$ не убывает по x*

2. *Если $\gamma()$ — возрастающая функция, то $\mathbb{E}(\gamma(Y)|X=x)$ не убывает по x*

3. $Cov(X,Y) \geqslant 0$

Доказательство. По определению:

$$\mathbb{E}(Y|X=x) = \int_0^1 yg(y|x)dy \tag{71.5}$$

Мы можем проинтегрировать по частям ($u=y$, $v'=g(y|x)$) и получить:

$$\mathbb{E}(Y|X=x) = yG(y|x)|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 G(y|x)dy \tag{72.1}$$

Поскольку мы работаем с регулярным на $[0;1]$ распределением, то $G(0|x)=0$ и $G(1|x)=1$. ещё раз напомню, что выбор 0 и 1 в качестве границ распределения — это просто масштабирование для удобства и все наши доказательства проходят без изменений для случая регулярного распределения на отрезке $[a;b]$.

$$\mathbb{E}(Y|X=x) = 1 - \int_0^1 G(y|x)dy \tag{72.2}$$

Остается заметить, что с ростом x падает подынтегральное выражение и, следовательно, интеграл. Значит $\mathbb{E}(Y|x=x)$ возрастает.

Доказательство для произвольной $\gamma(y)$ ничем не отличается:

$$\mathbb{E}(\gamma(Y)|X=x) = \int_0^1 \gamma(y)g(y|x)dy \tag{72.3}$$

Интегрируя по частям получаем:

$$\mathbb{E}(\gamma(Y)|X=x) = \gamma(y)G(y|x)|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \gamma'(y)G(y|x)dy \tag{72.4}$$

Или:

$$\mathbb{E}(\gamma(Y)|X=x) = 1 - \int_0^1 \gamma'(y)G(y|x)dy \tag{72.5}$$

Снова замечаем, что с ростом x падает подынтегральное выражение. Вывод: $\mathbb{E}(\gamma(Y)|X=x)$ возрастает по x.

Теперь про ковариацию. Пусть $\mathbb{E}(X)=m$. Тогда:

$$\begin{aligned} Cov(Y,X) = Cov(Y,X-m) = \mathbb{E}(Y(X-m)) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X-m) = \\ \mathbb{E}(Y(X-m)) - \mathbb{E}(Y)\cdot 0 = \mathbb{E}(Y(X-m)) \end{aligned} \tag{72.6}$$

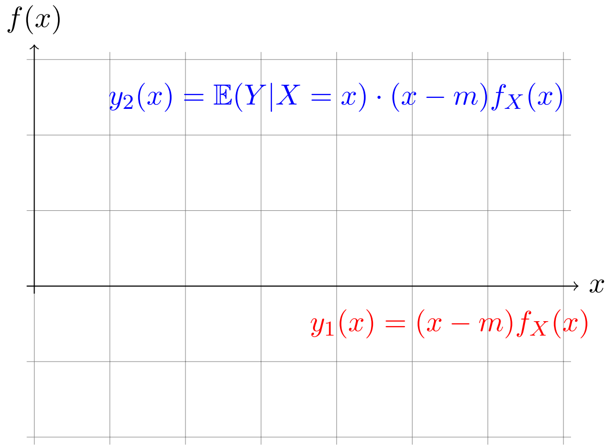
Пользуемся условным способом расчета мат. ожидания 68.2:

$$\mathbb{E}(Y\cdot(X-m)) = \int_0^1 \mathbb{E}(Y(X-m)|X=x)f_X(x)dx = \\ = \int_0^1 \mathbb{E}(Y|X=x)(x-m)f_X(x)dx \quad (72.7)$$

Теперь мы замечаем, что если бы не было сомножителя $\mathbb{E}(Y|X=x)$ то интеграл бы равнялся нулю, т.к.

$$\int_0^1 (x-m)f_X(x)dx = \mathbb{E}(X-m) = \mathbb{E}(X) - m = 0 \quad (73.1)$$

А теперь глядим на функцию $(x-m)f_X(x)$. Сначала она отрицательна, затем положительна, суммарная площадь равна 0:



Функция $\mathbb{E}(Y|X=x)$ положительна и возрастает по x, значит холм растягивается сильнее, чем яма. Следовательно, интересующий нас интеграл $\int_0^1 \mathbb{E}(Y|X=x)(x-m)f_X(x)dx$ равный ковариации неотрицательный.

□

Нам потребуется изучать функцию $\mathbb{E}(V_1|Y_1=y, X_1=x)$. Для краткости мы введём обозначение:

Определение 73.2.

$$v(x,y) = \mathbb{E}(V_1|Y_1=y, X_1=x) \quad (73.3)$$

Самое время сделать упражнение 10

***Теорема* 73.4.** *Если X_1, ..., X_n аффилированы, и g возрастает по всем аргументам, то $\mathbb{E}(g(X_1,\ldots,X_n)|X_1=x_1, X_2=x_2)$ возрастает по x_1 и x_2.*

Доказательство. Пропущено. Если будут желающие, то допишу. Интуитивно: с ростом x_1 растут условные средние остальных переменных в силу аффилированности, а с их ростом растет функция g. □

В частности из этой теоремы следует, что $v(x, y) = \mathbb{E}(V_1|X_1 = x, Y_1 = y)$ возрастает по обоим аргументам.

Теперь у нас хватает сил, чтобы решить наши три аукциона в общем виде.

3.3. Решение трёх аукционов

- Кнопочный аукцион.

  Если вы разобрались с примером кнопочного аукциона для трёх игроков, то замена трёх на n несложная. Запишем традиционные обозначения:

  - p_1,...,p_n — цены, на которых игроки покидают аукцион, упорядоченные по убыванию. Т.е., p_n — цена, на которой покинул аукцион самый слабый игрок, p_{n-1} — цена, на которой произошел второй выход. Заметим, что аукцион оканчивается на цене p_2, то есть когда аукцион покидает предпоследний игрок. А p_1 — цена, до которой был готов идти победитель, она остаётся неизвестной.

  Стратегия описывается набором функций. Каждая функция говорит, до какого момента давить на кнопку, если моя ценность x и...

  - $b^n(x)$ — все n игроков в игре
  - $b^{n-1}(x, p_n)$ — в игре $(n-1)$ игрок, а самый слабый вышел на p_n
  - $b^{n-2}(x, p_{n-1}, p_n)$ — в игре $(n-2)$ игрока; самый слабый вышел на p_n, а следующий — при цене p_{n-1}
  - ...
  - $b^2(x, p_3, \ldots, p_n)$ — в игре 2 игрока, а выходы были на ценах p_n, ..., p_3.

  На кнопочном аукционе равновесие Нэша можно найти по алгоритму:

Шаг 1. В свою функцию ценности вместо всех сигналов подставляю x. Получаю: $b^n(x) = u(x, x, x, \ldots, x)$.

Шаг 2. Предполагаю, что остальные игроки поступили также. Если я вижу, что первый выход был на цене p_n, значит сигнал x_n вышедшего игрока можно найти из уравнения:

$$b^n(x_n) = p_n \tag{74.1}$$

Учитываю эту информацию в новой функции:

$$b^{n-1}(x, p_n) = u(x, x, \ldots, x, x_n) \tag{74.2}$$

Шаг 3. Предполагаю, что остальные игроки поступили также. Если я вижу, что второй выход был на цене p_{n-1}, значит сигнал x_{n-1} второго вышедшего можно найти из уравнения:

$$b^{n-1}(x_{n-1}, p_n) = p_{n-1} \tag{75.1}$$

Учитываю эту информацию в новой функции:

$$b^{n-2}(x, p_{n-1}, p_n) = u(x, x, \ldots, x, x_{n-1}, x_n) \tag{75.2}$$

Шаг i.

Шаг $(n-1)$. Предполагаю, что остальные игроки поступили также. Если я вижу, что $(n-2)$-ой по счету выход был на цене p_3, значит сигнал x_3 недавно вышедшего игрока можно найти из уравнения:

$$b^3(x_3, p_4, p_5, \ldots, p_n) = p_3 \tag{75.3}$$

Учитываю эту информацию в новой функции:

$$b^2(x, p_3, \ldots, p_{n-1}, p_n) = u(x, x, x_3, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \tag{75.4}$$

Замечаем, что при использовании этих стратегий игроки выходят в порядке возрастания сигналов X_i. По предположению, функция u возрастает по всем аргументам, значит $b^n(x)$ возрастает по x. Значит первым выходит игрок с наименьшим X_i. Поскольку p_n одинаково для всех остающихся игроков, функция $b^{n-1}(x, p_n)$ возрастает по x. Значит вторым выходит игрок с наименьшим X_i среди оставшихся в игре. И т.д. В частности, первый побеждает, только если его сигнал выше всех, то есть $X_1 > Y_1$.

Остается доказать, что это — равновесие Нэша. Пусть все игроки кроме первого используют такие функции. Что произойдет, если первый не будет использовать предлагаемую стратегию, а захочет выиграть аукцион любой ценой?

В силу того, что игроки выходят в порядке возрастания X_i предпоследний игрок выйдет на цене $b^2(Y_1, p_3, \ldots, p_n)$. так как он использует указанную стратегию:

$$b^2(Y_1, p_3, \ldots, p_n) = u(Y_1, Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_{n-1}) \tag{75.5}$$

Выигрыш первого игрока мы упрощаем воспользовавшись тем, что Y_i — это X_2,..., X_n в другом порядке:

$$u(X_1, X_2, \dots, X_n) - u(Y_1, Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_{n-1}) = \\ = u(X_1, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}) - u(Y_1, Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_{n-1}) \quad (75.6)$$

Функция u возрастает по первому аргументу, значит выигрыш положителен, если и только если $X_1 > Y_1$. то есть жать кнопку до выигрыша первому игроку следует если $X_1 > Y_1$. Но именно такой результат гарантирует предлагаемая стратегия. Значит она и дает нам равновесие Нэша.

- Аукцион первой цены.

  Мы стандартным путем получаем дифференциальное уравнение, которое является необходимым условием. Итак, пусть $b()$ — является равновесной стратегией. И пусть остальные игроки кроме первого её используют.

  При стандартных предположениях о функции $b()$ чудо-замена $b_1 = b(a)$ упрощает нам событие W_1 до $W_1 = \{Y_1 < a\}$:

$$\pi(x, b(a)) = \mathbb{E}((V_1 - b(a))1_{Y_1<a} | X_1 = x) \quad (76.1)$$

  Далее мы пользуемся способом расчета мат. ожидания через постановку условия 68.2. Дополнительное условие, которое мы используем — это условие по $Y_1 = y$:

$$\pi(x, b(a)) = \int_0^1 \mathbb{E}((V_1 - b(a))1_{Y_1<a} | X_1 = x, Y_1 = y) g(y|x) dy = \\ = \int_0^a \mathbb{E}((V_1 - b(a)) | X_1 = x, Y_1 = y) g(y|x) dy = \\ = \int_0^a (v(x, y) - b(a)) g(y|x) dy = \int_0^a v(x, y) g(y|x) dy - \int_0^a b(a) g(y|x) dy = \\ = \int_0^a v(x, y) g(y|x) dy - b(a) G(a|x) \quad (76.2)$$

  Берём производную по a:

$$\frac{\partial \pi(x, b(a))}{\partial a} = v(x, a) g(a|x) - b(a) g(a|x) - b'(a) G(a|x) = 0 \quad (76.3)$$

  Первому игроку тоже должно быть оптимально использовать $b(x)$, значит $a = x$:

$$v(x, x) g(x|x) - b(x) g(x|x) - b'(x) G(x|x) = 0 \quad (76.4)$$

Наш диф. ур приобрел вид:

$$b'(x) = (v(x,x) - b(x))\frac{g(x|x)}{G(x|x)} = (v(x,x) - b(x))R(x|x) \tag{76.5}$$

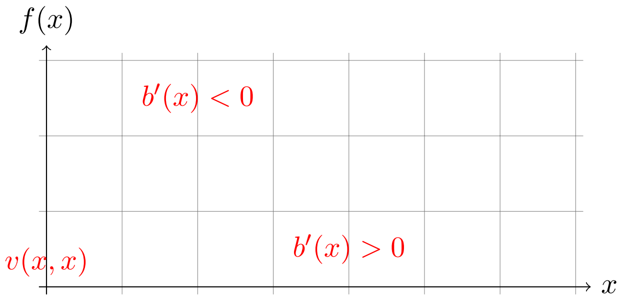
Мы уже говорили, что из множества решений нам нужно выбрать то, которое удовлетворяет условию $b(0) = 0$. Давайте мы строго и в общем виде докажем, что это условие является достаточным.

***Теорема* 77.1.** *Решение дифференциального уравнения:*

$$b'(x) = (v(x,x) - b(x))\frac{g(x|x)}{G(x|x)} = (v(x,x) - b(x))R(x|x) \tag{77.2}$$

удовлетворяющее условию $b(0) = 0$ дает равновесие Нэша на аукционе первой цены.

Доказательство. Построим на графике функцию $v(x,x)$. В силу аффилированности она возрастает. В силу предпосылок на функцию $u()$ наша $v(x,x)$ проходит через начало координат. Заметим, что $R(x|x) \geqslant 0$. Из вида дифференциального уравнения следует, что решения убывают выше $v(x,x)$, и возрастают ниже $v(x,x)$.



Решения не удовлетворяющие условию $b(0) = 0$ обязательно убывают при небольших x. Но наше дифференциальное уравнение является необходимым условием только для случая возрастающей $b(x)$. Мы пользовались возрастанием функции $b()$ при исполнении чудо-замены. Решение же удовлетворяющее условию $b(0) = 0$ позволяет оправдать чудо-замену.

Осталось доказать, что решение с $b(0) = 0$ удовлетворяет какому-нибудь достаточному условию максимума. Мы докажем, что знак производной меняется с плюса на минус, как и положено.

Присмотримся повнимательнее к первой производной прибыли:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\pi(x,b(a))}{\partial a} &= v(x,a)g(a|x) - b(a)g(a|x) - b'(a)G(a|x) = \\ &= (v(x,a)-b(a))g(a|x) - b'(a)G(a|x) = \\ &= (v(x,a)-v(a,a)+v(a,a)-b(a))g(a|x) - b'(a)G(a|x) = \\ &(v(x,a)-v(a,a))g(a|x) + (v(a,a)-b(a))g(a|x) - b'(a)G(a|x) \end{aligned} \quad (77.3)$$

Функция $b()$ является решением дифференциального уравнения 76.5, поэтому $v(a,a) - b(a) = b'(a)/R(a|a)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\pi(x,b(a))}{\partial a} &= (v(x,a)-v(a,a))g(a|x) + \frac{b'(a)}{R(a|a)}g(a|x) - b'(a)G(a|x) = \\ &(v(x,a)-v(a,a))g(a|x) + b'(a)g(a|x)\left(\frac{1}{R(a|a)} - \frac{1}{R(a|x)}\right)\end{aligned} \quad (78.1)$$

1. Рассмотрим $a > x$. Во-первых, $v(x,a) < v(a,a)$ так как $v()$ возрастает по обоим аргументам. Во-вторых, $1/R(a|a) < 1/R(a|x)$ поскольку $R(a|x)$ возрастает по второму аргументу. Значит справа производная отрицательна.
2. Рассмотрим $a < x$. Во-первых, $v(x,a) > v(a,a)$ так как $v()$ возрастает по обоим аргументам. Во-вторых, $1/R(a|a) > 1/R(a|x)$ поскольку $R(a|x)$ возрастает по второму аргументу. Значит слева производная положительна.

Кстати, никаких секретов в решении линейных диф. уров первого порядка в 21 веке нет, поэтому мы можем его предъявить в явном виде:

$$b(x) = \int_0^x v(y,y)R(y|y)\cdot\exp\left(-\int_y^x R(t|t)dt\right)dy \quad (78.2)$$

Желающие могут убедиться, что оно подходит и в само уравнение, и к условию $b(0) = 0$, или получить его самостоятельно методом вариации постоянной. Но форма его настолько громоздкая, что проще решать задачи без него. □

В качестве побочного результата мы получили доказательство того, что $b(x) \leqslant v(x,x)$.

Для последующего сравнения прибыли продавца нам потребуется функция выплат первого игрока. Вероятность того, что первый выиграет аукцион если его сигнал равен x равна $\mathbb{P}(Y_1 < x|X_1 = x) = G(x|x)$. Поэтому:

$$pay^{FP}(x) = b^{FP}(x)G(x|x) \tag{78.3}$$

Здесь мы обозначили равновесную стратегию не как $b()$, а как $b^{FP}()$ так как она отличается от равновесной стратегии на других аукционах.

- Аукцион второй цены.

  При решении задач мы столкнулись с тем, что аукцион второй цены в каком-то смысле правдивый, то есть ставить надо свою ценность. Когда ценность не совпадает с сигналом верен очень похожий результат:

  ***Теорема* 79.1.** *На аукционе второй цены равновесием Нэша будет набор стратегий:* $b(x) := v(x,x) = \mathbb{E}(V_1|X_1 = x \cap Y_1 = x)$

  Доказательство. Пусть остальные игроки используют предлагаемую стратегию, а первый ставит b_1.

$$\pi(x, b_1) = \mathbb{E}((V_1 - b(Y_1))1_{W_1}|X_1 = x; Bid_1 = b_1) \tag{79.2}$$

  Сделаем замену $b_1 = b(a)$, она упрощает нам событие W_1 до $W_1 = \{Y_1 < a\}$

$$\pi(x, b(a)) = \mathbb{E}((V_1 - b(Y_1))1_{Y_1<a}|X_1 = x) = \\ = \mathbb{E}((V_1 1_{Y_1<a}|X_1 = x) - \mathbb{E}(b(Y_1))1_{Y_1<a}|X_1 = x) \tag{79.3}$$

  Отдельно считаем вычитаемое:

$$\mathbb{E}(b(Y_1))1_{Y_1<a}|X_1 = x) = \int_0^a b(y)g(y|x)dy = \int_0^a v(y,y)g(y|x)dy \tag{79.4}$$

  И применив к уменьшаемому формулу 68.3:

$$\mathbb{E}((V_1 1_{Y_1<a}|X_1 = x) = \int_0^1 \mathbb{E}(V_1 1_{Y_1<a}|X_1 = x \cap Y_1 = y)g(y|x)dy = \\ \int_0^a \mathbb{E}(V_1|X_1 = x \cap Y_1 = y)g(y|x)dy = \int_0^a v(x,y)g(y|x)dy \tag{79.5}$$

  Значит:

$$\pi(x, b(a)) = \int_0^a (v(x,y) - v(y,y))g(y|x)dy \tag{79.6}$$

Если $y < x$, то величина $v(x, y) - v(y, y) > 0$ в силу того, что $v(x, y)$ возрастает по x. Мы хотим, максимизировать прибыль, то есть мы хотим интегрировать до тех пор, пока подынтегральное выражение положительно. то есть оптимальное $a = x$. Остается заметить, что по предположению игрок делает ставку $b_1 = b(a)$. Но оптимальное $a = x$, значит оптимальная ставка равна $b(x)$.

□

Для последующего сравнения прибыли продавца нам потребуется функция выплат первого игрока:

$$pay^{SP}(x) = \mathbb{E}(b(Y_1)1_{Y_1<x}|X_1 = x) = \int_0^x v(t,t)g(t|x)dt \tag{80.1}$$

3.4. Теорема о сравнении доходностей

***Теорема* 80.2.** *Если:*

RC1. Сигналы X_i имеют регулярное на $[0; 1]$ распределение

RC2. Сигналы X_i аффилированы

RC3. Игроки симметричны, в частности:

RC3a. Совместная функция плотности сигналов симметрична

RC3b. Ценность игрока симметрична относительно сигналов других игроков.

RC4. Ценность является возрастающей функцией от сигналов, $u(0, \ldots, 0) = 0$.

То:

$$\mathbb{E}(R^B) \geqslant \mathbb{E}(R^{SP}) \geqslant \mathbb{E}(R^{FP}) \tag{80.3}$$

Доказательство. Сначала докажем, что для продавца аукцион второй цены лучше, чем аукцион первой цены, $\mathbb{E}(R^{SP}) \geqslant \mathbb{E}(R^{FP})$.

Мы снова воспользуемся дифференциальным уравнением 76.5:

$$\begin{aligned}pay^{SP}(x) = \int_0^x v(y,y)g(y|x)dy = \\ = \int_0^x (v(y,y) - b^{FP}(y))g(y|x)dy + \int_0^x b^{FP}(y)g(y|x)dy = \\ = \int_0^x b'^{FP}(y)\frac{1}{R(y|y)}g(y|x)dy + \int_0^x b^{FP}(y)g(y|x)dy = \\ = \int_0^x b'^{FP}(y)\frac{R(y|x)}{R(y|y)}G(y|x)dy + \int_0^x b^{FP}(y)g(y|x)dy \geqslant \\ \geqslant \int_0^x b'^{FP}(y)G(y|x)dy + \int_0^x b^{FP}(y)g(y|x)dy\end{aligned} \tag{80.4}$$

Последний переход верен в силу того, что $y < x$. Продолжаем:

А теперь долго и пристально смотрим на эти два интеграла и берём их в уме оба сразу:

$$\begin{aligned}\int_0^x b'^{FP}(y)G(y|x)dy + \int_0^x b^{FP}(y)g(y|x)dy = \\ \int_0^x b^{FP}(y)g(y|x) + b'^{FP}(y)G(y|x)dy = b^{FP}(x)G(y|x) = pay^{FP}(x)\end{aligned} \tag{81.1}$$

Мы сравнили детерминистические функции выплат. А ожидаемый доход продавца связан с ними:

$$\mathbb{E}(R) = n \cdot \mathbb{E}(Pay_1) = n \cdot \int_0^1 pay(x)f(x)dx \tag{81.2}$$

Опять же мы применяем трюк с условным подсчетом мат. ожидания 68.2.

Теперь докажем, что для продавца кнопочный аукцион лучше, чем аукцион второй цены $\mathbb{E}(R^B) \geqslant \mathbb{E}(R^{SP})$.

Только для целей этого доказательства введём функцию

$$z(x,y) = \mathbb{E}(u(Y_1, Y_1, \ldots, Y_{n-1})|X_1 = x, Y_1 = y)$$

.

Напомню смысл: на кнопочном аукционе самый сильный игрок (за исключением первого) жмет кнопку до $u(Y_1, Y_1, \ldots, Y_{n-1})$. Именно столько заплатит первый, если выиграет аукцион. По теореме 73.4 функция $z(x,y)$ возрастает по обоим аргументам.

Сначала мы замечаем, что $v(y,y) = z(y,y)$:

$$v(y,y) = \mathbb{E}(V_1|X_1 = y, Y_1 = y) = \mathbb{E}(u(X_1, Y_1, \ldots, Y_{n-1})|X_1 = y, Y_1 = y) = \\ = \mathbb{E}(u(Y_1, Y_1, \ldots, Y_{n-1})|X_1 = y, Y_1 = y) = z(y,y) \quad (81.3)$$

Если $x > y$, то $v(y,y) < z(x,y)$. А теперь считаем ожидаемую доходность продавца:

$$\mathbb{E}(R^{SP}) = \mathbb{E}(b^{SP}(Y_1)|X_1 > Y_1) = \mathbb{E}(v(Y_1,Y_1)|X_1 > Y_1) \leqslant \\ \leqslant \mathbb{E}(z(X_1,Y_1)|X_1 > Y_1) \quad (82.1)$$

Заметим, что в правой части написано мат. ожидание от условного мат. ожидания в случайной точке. Пользуясь идеей 68.2 мы видим, что:

$$\mathbb{E}(z(X_1,Y_1)|X_1 > Y_1) = \mathbb{E}(u(Y_1, Y_1, \ldots, Y_{n-1})|X_1 > Y_1) = \mathbb{E}(R^B) \quad (82.2)$$

□

3.5. Задачи

1. Аукцион второй цены с резервной ставкой. Имеется n покупателей. Сигналы независимы и равномерны на $[0;1]$, $V_i = X_i$. Покупатели одновременно делают ставки. Если наибольшая ставка больше r, то игрок с максимальной ставкой получает товар. Если наибольшая ставка меньше r, то товар остаётся у продавца. Победитель платит продавцу максимум между второй по величине ставкой и r.

   (a) Найдите равновесие Нэша.

   (b) Найдите оптимальное r для продавца, если ценности равномерны на $[0;1]$.

2. Аукцион первой цены с резервной ценой r. Имеется n покупателей. Сигналы независимы и равномерны на $[0;1]$, $V_i = X_i$. Покупатели одновременно делают ставки. Если наибольшая ставка больше r, то игрок с максимальной ставкой получает товар. Если наибольшая ставка меньше r, то товар остаётся у продавца. Победитель платит продавцу свою ставку. Предполагаем, что r известна покупателям.

   (a) Найдите равновесие Нэша.

   (b) Найдите оптимальное r для продавца, если ценности равномерны на $[0;1]$.

3. Аукцион второй цены с платой за вход. Имеется n покупателей. Сигналы независимы и равномерны на $[0;1]$, $V_i = X_i$. Покупатели одновременно решают делать ли ставку, и если делать, то какую. Сделавший ставку платит w вне зависимости от того, победил ли он. Игрок с максимальной ставкой получает товар. Если ставок не было, то товар остаётся у продавца. Победитель платит продавцу вторую по величине ставкой. Если на аукцион вошел только один игрок, то он побеждает и ничего кроме платы за вход не платит.
   (a) Найдите равновесие Нэша.
   (b) Найдите оптимальное w для продавца, если ценности равномерны на $[0;1]$.
4. Аукцион первой цены с платой за вход. Имеется n покупателей. Сигналы независимы и равномерны на $[0;1]$, $V_i = X_i$. Покупатели одновременно решают делать ли ставку, и если делать, то какую. Сделавший ставку платит w вне зависимости от того, победил ли он. Игрок с максимальной ставкой получает товар. Если ставок не было, то товар остаётся у продавца. Победитель платит продавцу свою ставку.
   (a) Найдите равновесие Нэша.
   (b) Найдите оптимальное w для продавца, если ценности равномерны на $[0;1]$.
5. Верно ли, что $\mathbb{E}(R)$ одинаково в аукционе первой и второй цены с резервной ценой?
6. Верно ли, что $\mathbb{E}(R)$ одинаково в аукционе первой и второй цены с платой за вход?
7. Величины X_1, X_2 и X_3 независимы и равномерны на $[0;1]$. В аукционе второй цены участвуют два игрока: первый знает X_1, второй — X_2. Ценность товара общая, $V_1 = V_2 = X_1 + X_2 + X_3$. Найдите равновесие Нэша и ожидаемый доход продавца.
8. По аналогии с определением условной обратной функции риска дайте определение безусловной обратной функции риска, $R(x)$. Пусть X — случайная величина, показывающая время в часах, которое я трачу на написание одной лекции. Как можно проинтерпретировать $R(5) = 10$?
9. Автобусы приходят на остановку согласно пуассоновскому потоку с интенсивностью $\lambda = 6$ автобусов в час. Вася стоит некоторое время у остановки. Сколько в среднем автобусов приедет за это время? Какова вероятность, что не приедет ни одного автобуса? Рассмотрите два случая:

(a) Вася стоит у остановки ровно 5 минут.

(b) Вася стоит у остановки случайное время X (в минутах), независимое от времени прихода автобусов. Функция плотности X имеет вид $f(x) = \frac{x}{25}$ при $x \in [0; 10]$.

Hint: В первом пункте вы не замечая того нашли $\mathbb{E}(N|X = 5)$.

10. Найдите функции $g(x, y)$, $g(y|x)$, $G(y|x)$, $R(y|x)$ и $v(x, y)$ для случаев:

    (a) Сигналы независимы, равномерны на $[0; 1]$, $V_i = X_i$.

    (b) Три игрока. Сигналы независимы, равномерны на $[0; 1]$, $V_1 = X_1+X_2X_3$.

    (c) Три игрока. Совместная функция плотности сигналов имеет вид $f(x_1, x_2, x_3) = 7/8 + x_1x_2x_3$ при $x_1, x_2, x_3 \in [0; 1]$, $V_1 = X_1 + X_2X_3$.

3.6. Решения задач

1. Аукцион второй цены с резервной ставкой.

   С помощью таблички доказываем, что игрокам оптимально говорить правду. Конечно, если ценность меньше r, то оптимально говорить любое число ниже r. Но правду оптимально говорить всегда.

   Первый игрок в среднем платит:

$$\mathbb{E}(Pay_1) = r \cdot \mathbb{P}(X_1 > r > Y_1) + \mathbb{E}(Y_1 \cdot 1_{X_1>Y_1>r}) \tag{84.1}$$

   Совместная функция плотности X_1 и Y_1 имеет вид:

$$g(x, y) = (n - 1)y^{n-2} \tag{84.2}$$

   Значит первое слагаемое равно:

$$r\mathbb{P}(X_1 > r > Y_1) = r \int_r^1 \int_0^r (n - 1)y^{n-2}dydx = (1 - r)r^n \tag{84.3}$$

   И второе слагаемое равно:

$$\mathbb{E}(Y_1 \cdot 1_{X_1>Y_1>r}) = \int_r^1 \int_r^x y \cdot (n - 1)y^{n-2}dydx =$$

$$= (n - 1) \left(\frac{1}{n(n + 1)} - \frac{\rho^n}{n} + \frac{\rho^{n+1}}{n + 1}\right) \tag{84.4}$$

Значит средняя выплата первого игрока равна:

$$\mathbb{E}(Pay_1) = (1-r)r^n + (n-1)\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{r^n}{n} + \frac{r^{n+1}}{n+1}\right) = \\ = \frac{r^n}{n} - \frac{2r^{n+1}}{n+1} + \frac{n-1}{n(n+1)} \quad (84.5)$$

Максимизируем по r находим, что $r^* = 0.5$.

2. Аукцион первой цены с резервной ставкой. Рассуждаем за 1-го игрока:

$$\pi_1(x, b_1) = (x - b_1)\mathbb{P}(b_1 \geqslant \max\{b(Y_1), r\}) \quad (85.1)$$

Наша задача максимизировать эту функцию выбирая произвольное b_1.

Если $x < r$, то нам ничего не светит, оптимально не участвовать в аукционе, то есть можно делать любую ставку меньше r. Если $x \geqslant r$, то оптимально участвовать в аукционе с некоторой ставкой $r \leqslant b_1 \leqslant x$. В частности, получаем, что $b(r) = r$.

Предположим, что $x \geqslant r$. Тогда целевая функция упростится до старой, без резервной цены!

$$\pi_1(x, b_1) = (x - b_1)\mathbb{P}(b_1 \geqslant b(Y_1)) \quad (85.2)$$

Делаем вывод. Если $x \geqslant r$, то оптимальное $b_1(x)$ удовлетворяет старому дифференциальному уравнению.

Напомним, что старое уравнение было:

$$b'(x)x = (n-1)(x - b(x)) \quad (85.3)$$

И его решением было:

$$b(x) = cx^{1-n} + \frac{n-1}{n}x \quad (85.4)$$

На этот раз c надо искать из условия $b(r) = r$. Раньше, кстати, начальное условие было $b(0) = 0$. Отсюда находим $c = r^n/n$ и частное решение:

$$b(x) = \frac{r^n}{n}x^{1-n} + \frac{n-1}{n}x, \quad x \geqslant r \quad (85.5)$$

На всякий пожарный можно убедиться, что эта функция возрастает по x.

Ожидаемая выплата от первого игрока:

$$\mathbb{E}(b(X_1)1_{X_1 \geqslant Y_1, X_1 \geqslant r}) = \int_r^1 \int_0^x b(x)g(x,y)dydx =$$
$$= \int_r^1 b(x) \int_0^x g(x,y)dydx = \int_r^1 b(x) \int_0^x (n-1)y^{n-2}dydx =$$
$$= \int_r^1 b(x)x^{n-1}dx = \frac{r^n}{n} - \frac{2r^{n+1}}{n+1} + \frac{n-1}{n(n+1)} \quad (85.6)$$

Зависимость выплаты первого игрока от r такая же как на аукционе второй цены.

3. Аукцион второй цены с платой за вход.

Для начала заметим, что если игрок решил делать ставку, то ему оптимально делать ставку равную ценности. Доказательство стандартное, стратегия $b_1 = X_1$ нестрого доминирует все остальные. Осталось определить, при каких X_1 первому игроку лучше играть, а при каких — нет.

Предполагаем, что оптимальная стратегия имеет вид: если $x \geqslant \rho$, то делать ставку $b_1 = x$, если $x < \rho$, то не делать ставку. Предположим кроме того, что равновесные стратегии $b(x)$ возрастают по x при $x \geqslant \rho$.

Рассмотрим игрока с ценностью $x \geqslant \rho$ в равновесии Нэша. Какова вероятность того, что он выиграет аукцион? Поскольку $b(x)$ монотонно возрастает вероятность выигрыша по-прежнему:

$$q(x) = F^{n-1}(x), \quad x \geqslant \rho \quad (86.1)$$

Игрок с ценностью ρ должен быть безразличен между ставкой $b(\rho)$ и не участием в аукционе. Не участвуя в аукционе он получает ноль. Участвуя, он выиграет только если все остальные не участвуют, то есть он выигрывает аукцион по нулевой цене. Значит условие безразличия имеет вид:

$$-w + \rho F^{n-1}(\rho) = 0 \quad (86.2)$$

Применительно к нашему случаю $F(x) = x$ получаем $\rho = w^{1/n}$.

Ожидаемая выплата от первого игрока равна:

$$\mathbb{E}(Pay_1) = \mathbb{E}(Y_1 1_{X_1 > Y_1 > \rho}) + w\mathbb{P}(X_1 > \rho) =$$
$$= \mathbb{E}(Y_1 1_{X_1 > Y_1 > \rho}) + w(1-\rho) \quad (86.3)$$

Первое слагаемое мы уже искали, см. 84.4:

$$\mathbb{E}(Y_1 1_{X_1 > Y_1 > \rho}) = (n-1)\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{\rho^n}{n} + \frac{\rho^{n+1}}{n+1}\right) \tag{86.4}$$

Складываем, и, как и раньше получаем:

$$\mathbb{E}(Pay_1) = (n-1)\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{\rho^n}{n} + \frac{\rho^{n+1}}{n+1}\right) + \rho^n(1-\rho) = \\ = \frac{\rho^n}{n} - \frac{2\rho^{n+1}}{n+1} + \frac{n-1}{n(n+1)} \tag{87.1}$$

4. Аукцион первой цены с платой за вход.

   Предположим, что оптимальная стратегия имеет вид: Если $x \geqslant \rho$, то делать ставку $b(x)$; если $x < \rho$, то не делать ставку. Предположим, что эта $b()$ возрастающая при $x \geqslant \rho$. Как и на аукционе второй цены из этого следует, что вероятность выигрыша первого игрока при $x \geqslant \rho$ равна:

$$q(x) = F(x)^{n-1} = x^{n-1} \tag{87.2}$$

   Если $x = \rho$, то игроку должно быть безразлично, делать или не делать ставку. Если ему не безразлично, то значит ρ выбрано не оптимально. Ожидаемый выигрыш первого игрока при ценности ρ:

$$(\rho - b(\rho))F(\rho)^{n-1} - w = 0 \tag{87.3}$$

   Заметим, что $b(\rho) = 0$. Действительно, игрок с пороговой ценностью ρ может выиграть только если у остальных ценность ниже ρ, то есть если остальные не участвуют. А при таком условии победы оптимально ставить $b(\rho) = 0$.

   Получаем такой же порог участия как на аукционе второй цены:

$$\rho = w^{1/n} \tag{87.4}$$

   Рассматриваем случай $x \geqslant \rho$. В этом случае прибыль совпадает со старой. Мы получаем старое дифференциальное уравнение и старое решение:

$$b(x) = cx^{1-n} + \frac{n-1}{n}x \tag{87.5}$$

   И начальное условие $b(\rho) = 0$. Получаем $c = \frac{1-n}{n}\rho^n$ и частное решение:

$$b(x) = \frac{n-1}{n}x(1 - \rho^n x^{-n}) \tag{87.6}$$

Считаем ожидаемый платеж первого игрока:

$$\mathbb{E}(Pay_1) = \mathbb{E}(b(X_1)1_{X_1 \geqslant Y_1, X_1 \geqslant \rho}) + \rho^n \mathbb{P}(X_1 > \rho) \quad (87.7)$$

Первый интеграл:

$$\mathbb{E}(b(X_1)1_{X_1 \geqslant Y_1, X_1 \geqslant \rho}) = \int_\rho^1 \int_0^x b(x)g(x,y)dydx =$$
$$\int_\rho^1 b(x) \int_0^x g(x,y)dydx = \int_\rho^1 b(x) \int_0^x (n-1)y^{n-2}dydx =$$
$$\int_\rho^1 b(x)x^{n-1}dx = (n-1)\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{\rho^n}{n} + \frac{\rho^{n+1}}{n+1}\right) \quad (87.8)$$

В сумме, как и раньше:

$$\mathbb{E}(Pay_1) = \frac{\rho^n}{n} - \frac{2\rho^{n+1}}{n+1} + \frac{n-1}{n(n+1)} \quad (88.1)$$

5. Верно ли, что $\mathbb{E}(R)$ одинаково в аукционе первой и второй цены с резервной ценой? Да.

6. Верно ли, что $\mathbb{E}(R)$ одинаково в аукционе первой и второй цены с платой за вход? Да.

   Более того, можно заметить, что аукцион с резервной ценой r похож на аукцион с платой за вход $w = r \cdot F(r)^{n-1}$.

7. Можно воспользоваться теоремой 79.1 и сказать, что равновесная стратегия:

$$b(x) = \mathbb{E}(V_1|X_1 = x, Y_1 = x) =$$
$$= \mathbb{E}(X_1 + X_2 + X_3|X_1 = x, Y_1 = x) = x + \mathbb{E}(X_2 + X_3|Y_1 = x) \quad (88.2)$$

Внимание! Здесь есть небольшая ловушка! Игроков всего два! X_3 — это не сигнал от Природы третьему игроку! X_3 — это просто составляющая ценности неизвестная обоим игрокам. Поэтому здесь $Y_1 = X_2$, а не $Y_1 = \max\{X_2, X_3\}$. Остается вспомнить про независимость X_2 и X_3 и получить:

$$x + \mathbb{E}(X_2 + X_3|Y_1 = x) = x + \mathbb{E}(X_2 + X_3|X_2 = x) =$$
$$= x + x + \mathbb{E}(X_3) = 2x + 0.5 \quad (88.3)$$

Считаем ожидаемую выигрыш продавца:

$$\mathbb{E}(R) = 2\mathbb{E}(\min\{X_1, X_2\}) + 0.5 = 2\int_0^1 y \cdot 2(1-y)dy + 0.5 = \ldots = \frac{7}{6} \quad (88.4)$$

8. Обратная функция риска: $R(x) = f(x)/F(x)$, где $f()$ — функция плотности, а $F()$ — функция распределения случайной величины X. Пусть X — случайная величина, показывающая время в часах, которое я трачу на написание одной лекции. Проинтерпретировать $R(5) = 10$ можно с помощью небольшой $\Delta = 0.01$ (одна сотая часа — это 36 секунд). Если известно, что прошло 5 часов после начала написания лекций, и я уже отдыхаю, то вероятность того, что я их окончил за только что истекшие 36 секунд примерно равна $R(5) \cdot \Delta = 0.1$.

9. Обозначим N — количество пришедших автобусов, а X — время, которое Вася наблюдал за остановкой.

   (a) Количество автобусов за x минут имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_x = 0.1x$, так как в среднем 6 автобусов в час, это в среднем 0.1 автобуса в минуту. $\mathbb{E}(N|X=5) = 0.5$

   (b)
   $$\mathbb{E}(N) = \int_0^{10} \mathbb{E}(N|X=x)f(x)dx = \int_0^{10} 0.1x \cdot \frac{x}{25}dx = \frac{4}{3} \qquad (89.1)$$

10. Найдите функции $g(x,y)$, $g(y|x)$, $G(y|x)$, $R(y|x)$ и $v(x,y)$ для случаев:

   (a) Сигналы независимы, равномерны на $[0;1]$, $V_i = X_i$. Применяя метод о-малых находим:
   $$g(x,y) = (n-1)y^{n-2} \qquad (89.2)$$
   $$g(y|x) = g(x,y)/f(x) = (n-1)y^{n-2} \qquad (89.3)$$
   $$G(y|x) = \int_0^y (n-1)t^{n-2}dt = y^{n-1} \qquad (89.4)$$
   $$R(y|x) = \frac{n-1}{y} \qquad (89.5)$$
   $$v(x,y) = \mathbb{E}(X_1|X_1 = x, Y_1 = y) = x \qquad (89.6)$$

   (b) Три игрока. Сигналы независимы, равномерны на $[0;1]$, $V_1 = X_1 + X_2X_3$. Отличается только $v(x,y)$:
   $$v(x,y) = \mathbb{E}(X_1 + X_2X_3|X_1 = x, Y_1 = y) = x + \mathbb{E}(X_2X_3|Y_1 = y) = \\ x + \mathbb{E}(Y_1Y_2|Y_1 = y) = x + y\mathbb{E}(Y_2|Y_1 = y) \qquad (89.7)$$

   Здесь мы посчитаем интуитивно, а в следующем пункте — через интегралы. Итак: если я знаю, что Y_1, максимум из X_2 и X_3, равен y, то оставшаяся величина Y_2 где-то на отрезке $[0;y]$. Поскольку безусловное распределение было равномерным, то и условное будет равномерным. И условное среднее будет равно $y/2$. то есть $v(x,y) = x + y^2/2$.

(c)

$$g(x,y) = 2! \cdot \int_0^y 7/8 + x \cdot y \cdot x_3 dx_3 = \ldots = \frac{7}{4}y + xy^3 \tag{89.8}$$

$$g(y|x) = \frac{g(x,y)}{f(x)} = \frac{\frac{7}{4}y + xy^3}{\int_0^1 \int_0^1 \frac{7}{8} + xx_2x_3 dx_2 dx_3} = \ldots$$

$$== \frac{\frac{7}{4}y + xy^3}{\frac{7}{8} + \frac{x}{4}} = \frac{14y + 8xy^3}{7 + 2x} \tag{90.1}$$

Интегрируя находим:

$$G(y|x) = \int_0^1 g(t|x)dt = \ldots = \frac{7y^2 + 2xy^4}{7 + 2x} \tag{90.2}$$

И взяв отношение:

$$R(y|x) = \frac{g(y|x)}{G(y|x)} = \frac{14y + 8xy^3}{7y^2 + 2xy^4} = \frac{14 + 8xy^2}{7y + 2xy^3} \tag{90.3}$$

Аналогично предыдущему пункту:

$$v(x,y) = \ldots = x + y\mathbb{E}(Y_2 | Y_1 = y) \tag{90.4}$$

Находим совместную функцию плотности X_2 и X_3:

$$f(x_2, x_3) = \int_0^1 7/8 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 dx_1 = \frac{7}{8} + \frac{1}{2}x_2x_3, \quad x_2, x_3 \in [0; 1] \tag{90.5}$$

Из этого сразу следует совместная функция плотности для Y_1 и Y_2:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = 2! f(y_1, y_2) = \frac{7}{4} + y_1y_2, \quad 0 < y_2 < y_1 < 1 \tag{90.6}$$

И функцию плотности для Y_1:

$$f_{Y_1}(y_1) = 2! \int_0^{y_1} f(y_1, x_3) dx_3 = \ldots = \frac{7}{4}y_1 + \frac{1}{2}y_1^3 \tag{90.7}$$

Далее находим условную функцию плотности:

$$f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1) = \frac{f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)}{f_{Y_1}(y_1)} = \frac{\frac{7}{4} + y_1y_2}{\frac{7}{4}y_1 + \frac{1}{2}y_1^3}, \quad 0 < y_2 < y_1 < 1 \tag{90.8}$$

И условное ожидание:

$$\mathbb{E}(Y_2|Y_1 = y) = \int_0^y y_2 \frac{\frac{7}{4} + yy_2}{\frac{7}{4}y + \frac{1}{2}y^3} dy_2 = \frac{8\,y^4 + 21\,y^2}{6\,(2\,y^3 + 7\,y)} \tag{90.9}$$

И, наконец,

$$v(x, y) = x + \frac{8\,y^4 + 21\,y^2}{6\,(2\,y^2 + 7)} \tag{90.10}$$

3.7. Контрольная 3

1. Пусть V — общая ценность товара для двух игроков, равномерна на $[0; 1]$. Величины R_1 и R_2 — независимы между собой и с V и равномерны на $[0.5; 1.5]$. Игроки получают сигналы $X_i = V \cdot R_i$.

   (a) Найдите совместную функцию плотности X_1 и X_2. Верно ли, что X_1 и X_2 аффилированны?

   (b) Найдите $v(x, y) = \mathbb{E}(V|X_1 = x, Y_1 = y)$

   (c) Найдите совместную функцию плотности X_1 и Y_1, $g(x, y)$

   По условию, при фиксированном v величина равномерна на $[0.5v; 1.5v]$. Длина этого отрезка равна v, значит условная функция плотности X_1 при фиксированном v имеет вид:

$$p(x_1|v) = \frac{1}{v} \quad x_1 \in [0.5v; 1.5v] \tag{91.1}$$

   так как при фиксированном v величины X_1 и X_2 независимы, то выписываем $p(x_1, x_2|v)$:

$$p(x_1, x_2|v) = \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{v}, \quad x_1, x_2 \in [0.5v; 1.5v] \tag{91.2}$$

   так как $p(x_1, x_2, v) = p(x_1, x_2|v)p(v)$:

$$p(x_1, x_2, v) = \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{v} \cdot 1, \quad x_1, x_2 \in [0.5v; 1.5v] \tag{91.3}$$

   Условие $x_1, x_2 \in [0.5v; 1.5v]$ записываем как: $x_1 \wedge x_2 > 0.5v$ и $x_1 \vee x_2 < 1.5v$. Или как $v \in [\frac{x_1 \vee x_2}{1.5}; \frac{x_1 \wedge x_2}{0.5}]$. Для краткости обозначим этот интервал: $[v_{min}; v_{max}]$.

   Интегрируем по v в указанных пределах и получаем:

$$p(x_1, x_2) = \int_{v_{min}}^{v_{max}} \frac{1}{v^2} dv = \frac{1}{v_{min}} - \frac{1}{v_{max}} \tag{91.4}$$

Есть точки, где функция недифференциируема, поэтому проверять супермодулярность нужно будет по определению. Проверка супермодулярности пропущена. Она сводится к аккуратному рассмотрению нескольких случаев.

Здесь $Y_1 = X_2$, поэтому третий пункт уже решен, осталось найти:

$$\mathbb{E}(V|X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \int vp(v|x_1, x_2)dv = \int v\frac{p(x_1, x_2, v)}{p(x_1, x_2)}dv = \frac{\int vp(x_1, x_2, v)dv}{p(x_1, x_2)} \quad (92.1)$$

В числителе:

$$\int_{v_{min}}^{v_{max}} \frac{1}{v}dv = \ln(v_{max}) - \ln(v_{min}) \quad (92.2)$$

Значит в итоге:

$$v(x_1, x_2) = \frac{\ln(v_{max}) - \ln(v_{min})}{\frac{1}{v_{min}} - \frac{1}{v_{max}}} \quad (92.3)$$

2. На аукционе продаётся картина, которая равновероятно является «Джокондой» Леонардо да Винчи или её подделкой. За неё торгуются n покупателей. Ценность картины для всех покупателей одинакова, $V_1 = V_2 = \ldots = V_n = V$ и равна 1, если это оригинал и 0, если подделка.

   Если $V = 0$, то сигналы X_i условно независимы и равномерны на $[0; 1]$. Если $V = 1$, то сигналы X_i условно независимы и имеют функцию плотности $f(x|V = 1) = 2x$ при $x \in [0; 1]$

   (a) Найдите совместную функцию плотности всех X_i. Верно ли, что все X_i аффилированны?

   (b) Найдите $v(x, y) = \mathbb{E}(V|X_1 = x, Y_1 = y)$

   (c) Найдите совместную функцию плотности X_1 и Y_1, $g(x, y)$

Возьмем событие $A = \{X_1 \in [x_1; x_1 + \Delta] \cap \ldots \cap X_n \in [x_n; x_n + \Delta]\}$. Поскольку $\mathbb{P}(A) > 0$ действуют старые правила:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap V = 1) + \mathbb{P}(A \cap V = 0) = \\ = \mathbb{P}(A|V = 1)\mathbb{P}(V = 1) + \mathbb{P}(A|V = 0)\mathbb{P}(V = 0) = \\ = 0.5\mathbb{P}(A|V = 1) + 0.5\mathbb{P}(A|V = 0) \quad (92.4)$$

О-малые говорят нам, что плотности подчиняются такой же формуле, так как многомерная плотность есть вероятность поделить на Δ^n:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0.5 f(x_1, \ldots, x_n | V = 0) + f(x_1, \ldots, x_n | V = 1) \tag{92.5}$$

Поэтому совместная функция плотности имеет вид:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0.5 \cdot 1 \cdot 1 \ldots \cdot 1 + 0.5 \cdot 2x_1 \cdot 2x_2 \cdot \ldots 2x_n = 0.5 + 2^{n-1} x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \tag{92.6}$$

Проверяем вторую смешанную производную логарифма. В силу симметрии достаточно по x_1 и x_2:

$$\frac{\partial^2 \ln(f)}{\partial x_1 \partial x_2} = \ldots = \frac{0.5}{f(x_1, \ldots, x_2)^2} \geqslant 0 \tag{93.1}$$

Найдем сначала третий пункт:

Для этого представим себе событие $A = \{X_1 \in [x_1; x_1 + \Delta], Y_1 \in [y_1; y_1 + \Delta]\}$. Для него $\mathbb{P}(A) = 0.5\mathbb{P}(A|V = 1) + 0.5\mathbb{P}(A|V = 0)$. О-малые говорят нам, что плотности подчиняются такой же формуле!

Поэтому находим две условные функции плотности X_1 и Y_1:

$$g(x, y | V = 0) = (n - 1) \cdot 1 \cdot y^{n-2} \tag{93.2}$$

И

$$g(x, y | V = 1) = (n - 1) \cdot 2x \cdot 2y \cdot (y^2)^{n-2} \tag{93.3}$$

И получаем безусловную:

$$g(x, y) = 0.5(n - 1) \cdot 1 \cdot y^{n-2} + 0.5(n - 1) \cdot 2x \cdot 2y \cdot (y^2)^{n-2} \tag{93.4}$$

Поскольку V принимает значения только 0 и 1, то $\mathbb{E}(V|A) = \mathbb{P}(V = 1|A)$. По формуле условной вероятности:

$$\mathbb{P}(V = 1|A) = \frac{\mathbb{P}(V = 1 \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|V = 1) \cdot \mathbb{P}(V = 1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.5\mathbb{P}(A|V = 1)}{\mathbb{P}(A)} \tag{93.5}$$

И в итоге искомая функция $v(x, y)$ равна:

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \mathbb{P}(V = 1 | X_1 = x, Y_1 = y) = \\ &= \frac{0.5(n - 1) \cdot 2x \cdot 2y \cdot (y^2)^{n-2}}{0.5(n - 1) \cdot 1 \cdot y^{n-2} + 0.5(n - 1) \cdot 2x \cdot 2y \cdot (y^2)^{n-2}} = \\ &= \frac{4xy^{n-1}}{1 + 4xy^{n-1}} \end{aligned} \tag{93.6}$$

3. На аукционе второй цены присутствуют n покупателей. Ценности совпадают с сигналами, $V_i = X_i$; сигналы X_i независимы и равномерны на $[0; 1]$. На аукционе продаётся k одинаковых чудо-швабр, $1 < k < n$. Каждому покупателю нужна только одна чудо-швабра. Покупатели одновременно делают свои ставки. Чудо-швабры достаются по одной каждому из k покупателей с самыми высокими ставками. Каждый из k победителей платит организатору наибольшую проигравшую ставку.

   Найдите равновесие Нэша.

   Проверяем метод «Авось старое решение подойдет». Строим табличку как в первой лекции и видим, что стратегия $b(x) = x$ нестрого доминирует остальные стратегии. Единственное отличие: выиграю ли я аукцион зависит от сравнения моей ставки и $m = b(Y_k)$, а не $m = b(Y_1)$ как в первой лекции.

4. На аукционе первой цены присутствуют n покупателей. Ценности совпадают с сигналами, $V_i = X_i$; сигналы X_i независимы и равномерны на $[0; 1]$. На аукционе продаётся k одинаковых чудо-швабр, $1 < k < n$. Каждому покупателю нужна только одна чудо-швабра. Покупатели одновременно делают свои ставки. Чудо-швабры достаются по одной каждому из k покупателей с самыми высокими ставками. Эти k победителей платят свои ставки организатору.

   Найдите дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет равновесная стратегия.

   Hint: Когда продавался один товар, то условие победы первого игрока — $Y_1 < a$, а если продаётся k товаров, то условие победы первого игрока $Y_? < a$.

   Условие победы первого игрока: $Y_k < a$. В функции прибыли мы можем убрать условие в силу независимости ценностей.

$$\pi(x, b(a)) = (x - b(a))\mathbb{E}(1_{Y_k < a} | X_1 = x) = (x - b(a))\mathbb{P}(Y_k < a) \tag{94.1}$$

   Применяем о-малые. Одна величина должна упасть около t, $(k-1)$ должна оказаться выше t, и $(n-1-k)$ должно оказаться ниже t:

$$f_{Y_k}(t) = (n-1) \cdot C_{n-1}^{k-1} \cdot 1 \cdot (1-t)^{k-1} \cdot t^{n-k-1} \tag{94.2}$$

   Значит:

$$\pi(x, b(a)) = (x - b(a))\mathbb{E}(1_{Y_k < a} | X_1 = x) = (x - b(a)) \int_0^a f_{Y_k}(t) dt \tag{94.3}$$

Получаем диф. ур:

$$(x - b(x))f_{Y_k}(x) - b'(x)\int_0^x f_{Y_k}(t)dt = 0 \tag{94.4}$$

Всё. Дифференциальное уравнение получено.

А дальше можно изолировать $\int_0^x \ldots dt$ в правой части, взять производную по x и избавится от интеграла. Но это уже относится к решению дифференциального уравнения.

5. Существуют ли неаффилированные случайные величины X_1 и X_2 такие, что $Cov(X_1, X_2) > 0$?

   Да. Возьмем пару аффилированных случайных величин с положительной корреляцией. У неё функция плотности всюду удовлетворяет условию

$$\partial^2 \ln(f(x_1, x_2))/\partial x_1 \partial x_2 \geqslant 0 \tag{95.1}$$

   А теперь на очень-очень маленьком участке нарушим это условие. Случайные величины перестали быть аффилированными. А ковариация от этого изменится очень-очень слабо, то есть останется положительной.

   Конкретный пример: X_1 — равномерно на $[0; 1]$, D — равномерно на $[0; 1]$.

$$X_2 = D + \begin{cases} X_1, X_1 > 0.00001 \\ -X_1, X_1 < 0.00001 \end{cases} \tag{95.2}$$

3.8. Домашка 3

Контрольная номер 3 оказалась чересчур сложной, поэтому студентам была предложена вместо неё домашка 3.

1. Техническая задача.

   (a) Выразите $(a+c) \vee (b+c)$ через $a \vee b$. Выразите $(a+c) \wedge (b+c)$ через $a \wedge b$.

   (b) Случайные величины Z_1, ..., Z_n аффилированы между собой. Случайные величины W_1, ..., W_k — аффилированы между собой. Набор случайных величин Z_1, ..., Z_n не зависит от набора W_1, ..., W_k. Верно ли, что набор случайных величин Z_1, ..., Z_n, W_1, ..., W_k аффилирован?

$$(a+c) \vee (b+c) = a \vee b + c \tag{95.3}$$

$$(a+c) \wedge (b+c) = a \wedge b + c \tag{95.4}$$

Да, набор $Z_1, ..., Z_n, W_1, ..., W_k$ аффилирован. В силу независимости логарифм совместной функции плотности разлагается в сумму логарифмов:

$$\ln f_{Z,W}(z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_k) = \ln f_Z(z_1, \ldots, z_n) + \ln f_W(w_1, \ldots, w_k) \tag{96.1}$$

И смешанные производные равны либо нулю, либо неотрицательны в силу аффилированности Z_i между собой и W_i между собой.

2. Пусть V — общая ценность товара для двух игроков, равномерна на $[1;2]$. Величины R_1 и R_2 — независимы между собой и с V и равномерны на $[-0.5; 0.5]$. По смыслу: R_1 и R_2 — это ошибки игроков при подсчете ценности товара V. Игроки получают сигналы $X_i = V + R_i$, то есть игроки знают ценность V с ошибкой.

   (a) Найдите совместную функцию плотности X_1 и X_2. Верно ли, что X_1 и X_2 аффилированны?

   (b) Найдите $v(x,y) = \mathbb{E}(V|X_1 = x, Y_1 = y)$. Найдите равновесие Нэша на аукционе второй цены.

   (c) Найдите совместную функцию плотности X_1 и Y_1, $g(x,y)$

Hint: В решении контрольной есть похожая задача. А $g(x,y)$ можно неплохо упростить пользуясь предыдущей задачей.

Поскольку игроков всего двое, то $g(x,y)$ — это просто совместная функция плотности X_1 и X_2.

Находим условную совместную плотность:

$$p(x_1, x_2|v) = 1, \quad x_1, x_2 \in [v - 0.5; v + 0.5] \tag{96.2}$$

Значит:

$$p(x_1, x_2, v) = 1, \quad x_1, x_2 \in [v - 0.5; v + 0.5], v \in [1; 2] \tag{96.3}$$

Заметим, что область, где плотность положительна, можно описать условием:

$$v \in [(x_1 - 0.5) \vee (x_2 - 0.5); (x_1 + 0.5) \wedge (x_2 + 0.5)] = [v_{min}; v_{max}] \tag{96.4}$$

Интегрируем по v и получаем:

$$p(x_1, x_2) = \int_{v_{min}}^{v_{max}} 1 dv = v_{max} - v_{min} = x_1 \wedge x_2 - x_1 \vee x_2 + 1 \tag{96.5}$$

$$\mathbb{E}(V|X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \int vp(v|x_1, x_2)dv = \int v\frac{p(x_1, x_2, v)}{p(x_1, x_2)}dv = \frac{\int vp(x_1, x_2, v)dv}{p(x_1, x_2)} \quad (96.6)$$

В числителе:

$$\int_{v_{min}}^{v_{max}} vdv = \frac{v_{max}^2 - v_{min}^2}{2} \quad (97.1)$$

Значит в итоге:

$$v(x_1, x_2) = \frac{v_{max}^2 - v_{min}^2}{2 \cdot (v_{max} - v_{min})} = \frac{v_{max} + v_{min}}{2} = \frac{x_1 \wedge x_2 + x_1 \vee x_2}{2} \quad (97.2)$$

Равновесие Нэша на аукционе второй цены:

$$v(x, x) = x \quad (97.3)$$

3. Пусть R_1, R_2 и S — равномерны на $[0; 1]$ и независимы. Ценность товара для первого игрока, $V_1 = 0.8X_1 + 0.2X_2$ и для второго — $V_2 = 0.8X_2 + 0.2X_1$. Первый игрок получает сигнал $X_1 = S + R_1$. Второй игрок получает сигнал $X_2 = S + R_2$.
   (a) Найдите $g(x, y)$, $R(y|x)$ и $v(x, y) = \mathbb{E}(V|X_1 = x, Y_1 = y)$
   (b) Используя предыдущие функции найдите равновесие Нэша на аукционе второй цены, первой цены и кнопочном аукционе

Игроков всего два, значит $g(x, y)$ — просто совместная функция плотности X_1 и X_2.

$$p(x_1, x_2|s) = 1 \cdot 1, \quad x_1, x_2 \in [s; s + 1] \quad (97.4)$$

Следовательно:

$$p(x_1, x_2, s) = 1 \cdot 1, \quad x_1, x_2 \in [s; s + 1], s \in [0; 1] \quad (97.5)$$

Заметим, что область, где плотность положительна, можно описать условием:

$$s \in [x_1 \vee x_2 - 1; x_1 \wedge x_2] = [s_{min}; s_{max}] \quad (97.6)$$

Интегрируем по s и получаем:

$$p(x_1, x_2) = \int_{s_{min}}^{s_{max}} 1ds = s_{max} - s_{min} = x_1 \wedge x_2 - x_1 \vee x_2 + 1 \tag{97.7}$$

Плотность обращается в ноль за пределами участка $0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 2$, $x_1 - 1 \leqslant x_2 \leqslant x_1 + 1$.

Чтобы найти $R(y|x)$ вспоминаем что это такое:

$$R(y|x) = \frac{g(x, y)}{\int_0^y g(x, t)dt} \tag{98.1}$$

Возникает четыре случая для $R(y|x)$...

К сожалению, в явном виде хорошего мало. Стандартная максимизация с чудозаменой дает дифференциальное уравнение:

$$(0.8x - b'(x)) \int_0^x p(x, x_2)dx_2 + x - b(x) = 0 \tag{98.2}$$

Возникает два случая из-за ломаной $p(x_1, x_2)$...

Если $x \in [0; 1]$, то:

$$(0.8x - b'(x)) \cdot (x - 0.5x^2) + x - b(x) = 0 \tag{98.3}$$

Из этого уравнения надо выбрать решение с $b(0) = 0$.

Если $x \in [1; 2]$, то:

$$(0.8x - b'(x)) \cdot 0.5 + x - b(x) = 0 \tag{98.4}$$

Из этого уравнения надо выбрать решение непрерывно склеивающееся с первым в точке $x = 1$.

Находим $v(x, y)$:

$$v(x, y) = \mathbb{E}(V_1|X_1 = x, Y_1 = y) = \mathbb{E}(V_1|X_1 = x, X_2 = y) = 0.8x + 0.2y \tag{98.5}$$

Равновесие Нэша на аукционе второй цены:

$$b(x) = v(x, x) = x \tag{98.6}$$

Кнопочный аукцион совпадает с аукционом второй цены.

4. Продолжение задачи 2 с контрольной (можно использовать все полученные в ней результаты). На аукционе продаётся картина, которая равновероятно является «Джокондой» Леонардо да Винчи или её подделкой. За неё торгуются n покупателей. Ценность картины для всех покупателей одинакова, $V_1 = V_2 = \ldots = V_n = V$ и равна 1, если это оригинал и 0, если подделка.

   Если $V = 0$, то сигналы X_i условно независимы и равномерны на $[0; 1]$. Если $V = 1$, то сигналы X_i условно независимы и имеют функцию плотности $f(x|V = 1) = 2x$ при $x \in [0; 1]$

   (a) Найдите равновесие Нэша на аукционе второй цены
   (b) Найдите $\mathbb{E}(V|X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3 \ldots X_n = x_n)$
   (c) С помощью предыдущего пункта найдите функции $b^n(x)$, $b^{n-1}(x, p_n)$ и $b^{n-2}(x, p_{n-1}, p_n)$ в равновесии Нэша на кнопочном аукционе

В решении контрольной 3 мы получили результат:

$$v(x, y) = \frac{4xy^{n-1}}{1 + 4xy^{n-1}} \tag{99.1}$$

Следовательно, равновесие Нэша на аукционе второй цены:

$$b(x) = v(x, x) = \frac{4x^n}{1 + 4x^n} \tag{99.2}$$

Можно отметить, что функция растет с ростом x и падает с ростом n.

Теперь рассмотрим $A = \{X_1 \in [x_1; x_1 + \Delta] \cap \ldots \cap X_n \in [x_n; x_n + \Delta]\}$. Как и в решении задачи с контрольной:

$$\mathbb{E}(V|A) = \mathbb{P}(V = 1|A) = \frac{\mathbb{P}(V = 1 \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \\ = \frac{\mathbb{P}(A|V = 1) \cdot \mathbb{P}(V = 1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.5\mathbb{P}(A|V = 1)}{\mathbb{P}(A)} \tag{99.3}$$

Согласно методу о-малых аналогичная формула справедлива для плотностей:

$$\mathbb{E}(V|X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \\ = \frac{0.5 \cdot 2^n \Pi_{i=1}^n x_i}{0.5 + 0.5 \cdot 2^n \Pi_{i=1}^n x_i} = \frac{2^n \Pi_{i=1}^n x_i}{1 + 2^n \Pi_{i=1}^n x_i} \tag{99.4}$$

Теперь частично находим стратегию на кнопочном аукционе:

$$b^n(x) = \frac{2^n x^n}{1 + 2^n x^n} \tag{99.5}$$

Если все игроки используют эту функцию, то чтобы игрок вышел на цене p ценность должна равняться:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{1/n} \tag{99.6}$$

Подставляя один такой x в ожидаемую ценность получаем:

$$b^{n-1}(x, p_n) = \frac{2^{n-1}x^{n-1}\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^{1/n}}{1 + 2^{n-1}x^{n-1}\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^{1/n}} \tag{100.1}$$

Если второй выходит на цене p_{n-1}, то его ценность была равна:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^{1/n(n-1)}\left(\frac{p_{n-1}}{1-p_{n-1}}\right)^{1/(n-1)} \tag{100.2}$$

Значит:

$$b^{n-2}(x, p_{n-1}, p_n) = \frac{2^{n-2}x^{n-2}\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^{1/n(n-1)}\left(\frac{p_{n-1}}{1-p_{n-1}}\right)^{1/(n-1)}}{1 + 2^{n-2}x^{n-2}\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^{1/n(n-1)}\left(\frac{p_{n-1}}{1-p_{n-1}}\right)^{1/(n-1)}} \tag{100.3}$$

Глава 4

Язык механизмов

Как выглядит аукцион, если не вдаваться в детали? Природа случайно раздает игрокам сигналы. Затем игроки делают ставки. Затем правила аукциона определяют, кто получает товар и кто сколько платит.

Если не обращать внимание на слово «аукцион», то так выглядят абсолютно все задачи, где нужно принять решение. И в этой лекции мы покажем, как аукцион второй цены неплохо справляется со всеми этими задачами!

4.1. Описание всех задач на языке механизмов

Рассмотрим несколько примеров. Во всех примерах нужно выбрать одно решение из нескольких возможных и определить, кто сколько платит. В табличках будут находится полезности игроков в зависимости от принятого решение. Вопрос оплаты решения мы в табличках освещать не будем. Мы также забудем пока про то, что Природа сообщает игрокам какие-то сигналы.

Пример 101.1. Аукцион. Есть три игрока и один товар. Ценность товара для них равна V_1, V_2 и V_3.

	Отдать товар игроку 1	Отдать товар игроку 2	Отдать товар игроку 3	Оставить тов продавца
Игрок 1	V_1	0	0	0
Игрок 2	0	V_2	0	0
Игрок 3	0	0	V_3	0

Можно рассмотреть различные вариации этой задачи. Например, добавить продавца как игрока или убрать решение «Оставить товар у продавца» из списка возможных.

Пример 101.2. Общественное благо. Есть два города, A и B, на разных берегах реки. Полезность моста для их жителей равна V_A и V_B. Есть ещё администрация области, для которой мост обойдется в сумму c.

	Построить мост	Не строить мост
Жители города А	V_A	0
Жители города В	V_B	0
Администрация	$-c$	0

Если администрация тратит не свои деньги, а скажем деньги из какого-то бюджета, который ни на что кроме моста потратить нельзя, тогда её как игрока можно не учитывать, так как ей все равно, строить мост или не строить.

Пример 102.1. . Разносчик пиццы. Есть два клиента, А и В. От ресторана до А ехать a минут, до В — b минут. От А до В ехать c минут. Разносчик может сначала посетить клиента А и затем клиента В, а может и наоборот. Удовольствие клиента от пиццы равно времени доставки со знаком минус.

	сначала к А, потом к В	сначала к В, потом к А
Клиент А	$-a$	$-b-c$
Клиент В	$-a-c$	$-b$

При желании можно учесть и полезность разносчика пиццы. Например, как общее время доставки со знаком минус. Это будет другая игра. Наш случай означает, что разносчику все равно сколько тратить на дорогу. Скажем, его в ресторане все равно нагрузили бы какой-нибудь работой, если бы он приехал раньше. Можно ещё добавить решения «Ехать только к А», «Ехать только к В» и «Не ехать ни к кому». Но мы будем считать, что пицца безумно вкусна эти варианты даже не рассматриваются клиентами.

Пример 102.2. Мама сказала Саше и Маше помыть посуду и подмести пол. Допустим, что неудовольствие от мытья посуды для каждого из них равно $(-a)$, а от подметания пола — $(-b)$.

	Саша моет посуду, Маша — пол.	Саша моет пол, Маша — посуду.	Все моет Саша.	Все моет Маша
Саша	$-a$	$-b$	$-a-b$	0
Маша	$-b$	$-a$	0	$-a-b$

Итак, любой механизм решения задачи должен состоять из двух правил: правило, которое говорит, какое решение должно быть принято, и правило, которое говорит, кто и сколько платит.

Некая дополнительная сложность состоит в том, что в реальности часто применяются случайные механизмы решения этих задач. В частности, Саша и Маша могут просто подкинуть монетку, чтобы принять решение. Поэтому правило выбора будет говорить, какими должны быть вероятности принятия каждого из решений.

Итого, для описания механизмов нам понадобятся множества:

1. T_i — множество всех возможных сигналов, которые Природа может послать игроку i. В наших трёх предыдущих лекциях — множество возможных значений случайной величины X_i. ещё говорят, множество возможных типов игрока i.

   Пример. Пусть каждый игрок знает своё X_i. Величины X_i равномерны на $[0;1]$. В этом случае $T_i = [0;1]$. Число x_1, конкретный сигнал, который получил первый игрок — это элемент из T_1.

2. B_i — множество[1] всех возможных ходов игрока i.

   Например, для аукциона первой цены — это список возможных ставок игрока i, $B_i = [0;+\infty)$. Число b_1, конкретная ставка, которую сделал первый игрок — это элемент из B_1.

3. $B = B_1 \times B_2 \times \dots B_n$ — декартово произведение множеств ходов отдельных игроков. то есть это набор всех возможных сочетаний ходов для наших игроков.

4. $T = T_1 \times T_2 \times \dots T_n$ — декартово произведение множеств типов отдельных игроков. то есть это набор всех возможных сочетаний типов для наших игроков.

5. Δ — множество вероятностных распределений на списке решений.

   Звучит страшно, но достаточно привести в пример пару элементов из Δ, чтобы все стало ясно. Если мы выбираем между решениями a, b и c, то элементами Δ, например, будут: {Принять решение a}, {Принять решение b с вероятностью 0.1 и решение c с вероятностью 0.9 }.

   С математической точки зрения, если у нас k возможных решений, то Δ — это все возможные векторы вероятностей:

   $$\Delta = \{(p_1, p_2, \dots, p_k) | \forall p_i \geqslant 0, \sum p_i = 1\} \tag{103.1}$$

   У нас, правда, Δ уже использовалась для обозначения маленького числа. Но из контекста, я думаю, всегда понятно, подразумевается ли под Δ число или множество вероятностных распределений.

[1]Не путайте с другими обозначениями! b_i — это конкретная ставка игрока i, число; Bid_i — ставка игрока как случайная величина; $b(x)$ — функция, которая говорит какую ставку делать в зависимости от сигнала.

В этих обозначениях, например, стратегия i-го игрока — это функция $s_i : T_i \to B_i$. Кстати, равновесие Нэша — это набор стратегий по одной от каждого игрока, то есть это функция $NE : T \to B$. Действительно, если заданы типы всех игроков и задано равновесие Нэша, то мы можем понять, какие ходы будут сделаны. Естественно, равновесие Нэша, это не произвольная такая функция — нужно ещё сказать, что никому не будет выгодно отклоняться, если все игроки расскажут друг другу свои стратегии.

А механизм — это правила игры:

Определение 104.1. Механизм. Описание механизма состоит из трёх пунктов:

1. B_i — список возможных ходов игрока i
2. $Q : B \to \Delta$ — правило распределения: функция, которая определяет вероятности принятия каждого решения в зависимости от ходов игроков.
3. $M : B \to \mathbb{R}^n$ — правило платежей: функция, которая определяет кто и сколько платит в зависимости от ходов игроков.

Вообще говоря список ходов B_i, предлагаемый игроку i может быть произвольным и никак не связанным со списком T_i возможных состояний игрока i.

Пример 104.2. Три игрока и один товар. Для игрока i товар имеет ценность X_i, каждый игрок знает своё X_i. Величины X_i независимы и равномерны на $[0; 1]$.

В этом примере $T_i = [0; 1]$. Но это никак не ограничивает нас в множестве ходов. Например, мы можем попросить наших трёх игроков одновременно в разных комнатах станцевать вальс. В этом случае $B_i = \{\text{Множество возможных вальсов}\}$.

Подобные механизмы использует Дед Мороз в детском саду: «Кто расскажет самый лучший стишок...» и тамада на свадьбе «Кто назовет больше всего комплиментов невесте ...».

Мы же ограничимся прямыми механизмами. Прямой механизм прямо спрашивает у каждого игрока: «Ты кто?». Точнее говоря, «Ты какого типа?» или «Какой сигнал послала тебе природа?». Игрок при этом может сказать правду, а может и соврать. В прямом механизме множество возможных ходов совпадает с множеством типов игрока, $T_i = B_i$

Определение 104.3. Прямой механизм. В прямом механизме $B_i = T_i$ и его описание включает в себя:

1. $Q : B \to \Delta$ — правило распределения: функция, которая определяет вероятности принятия каждого решения в зависимости от объявленных игроками своих типов

2. $M : B \to \mathbb{R}^n$ — правило платежей: функция, которая определяет кто и сколько платит в зависимости от объявленных игроками своих типов

Рассмотрим подробнее простую ситуацию. Три игрока и один товар. Для игрока i товар имеет ценность X_i, каждый игрок знает своё X_i. Величины X_i независимы и равномерны на $[0;1]$. В этом случае: $T_i = [0;1]$.

В рамках этой ситуации рассмотрим наши три аукциона на языке механизмов.

Пример 105.1. Аукцион первой цены. Товар достаётся тому, кто назвал наибольшую цену. Если таких игроков несколько — выбираем победителя из них наугад. Победитель платит названную им самим цену.

Можно считать, что механизм прямой и множество разрешенных ходов имеет вид $B_i = T_i = [0;1]$.

Функция $Q(\vec{b})$ говорит нам, с какой вероятностью побеждает тот или иной игрок при заданном $\vec{b}$.

Например пятый игрок назвал цену выше всех:

$$Q(1,2,3,4,5) = (0,0,0,0,1) \tag{105.2}$$

Или, второй и третий игрок назвали наибольшую цену:

$$Q(1,3,3,1,2) = (0,0.5,0.5,0,0) \tag{105.3}$$

то есть функция Q расставляет равные вероятности для игроков с наибольшей ставкой.

А соответственно функция $M(\vec{b})$ говорит, что только победитель платит. Но победитель выбирается наугад среди игроков с наибольшей ставкой, поэтому у всех игроков с наибольшей ставкой есть ожидаемый платеж.

Например, если пятый игрок назвал цену выше всех:

$$M(1,2,3,4,5) = (0,0,0,0,5) \tag{105.4}$$

Или, второй и третий игрок назвали наибольшую цену:

$$M(1,3,3,1,2) = (0,1.5,1.5,0,0) \tag{105.5}$$

Пример 105.6. Аукцион второй цены. Товар достаётся тому, кто назвал наибольшую цену. Если таких игроков несколько — выбираем победителя из них наугад. Победитель платит вторую по величине цену.

Можно считать, что механизм прямой и множество разрешенных ходов имеет вид $B_i = T_i = [0;1]$.

Функция $Q(\vec{b})$ точно такая же, как на аукционе первой цены, так как победитель — это тот, кто назвал наибольшую ставку.

Функция $M(\vec{b})$ отличается. Она говорит, что победитель платит не свою, а вторую по величине ставку.

Например,

$$M(1,2,3,4,5) = (0,0,0,0,4) \tag{105.7}$$

Или,

$$M(1,3,3,1,2) = (0,1,1,0,0) \tag{106.1}$$

Единица — взялась от деления двойки (второй по величине цены) на двух потенциальных победителей.

Пример 106.2. Кнопочный аукцион.

Кнопочный аукцион не является прямым механизмом, так как множество возможных ходов существенно сложнее множества сигналов, которые может получить игрок. Полное описание этого аукциона с выписыванием функций Q и M в явном виде занудно. Поэтому мы ограничимся описанием множеств B_i. Зная выбор каждого игрока из его B_i мы можем определить, кто выиграл и сколько ему нужно платить, значит функции Q и M существуют.

Представим себе, что первый игрок знает значение своего сигнала X_1. Ему нужно решить, до какой цены жать кнопку, пока кнопку жмут трое, то есть нужно выбрать некое число в диапазоне $[0;1]$. ещё нужно решить до какой цены жать кнопку, когда осталось двое игроков, а самый слабый вышел на цене p, то есть нужно выбрать некую непрерывную на $[0;1]$ функцию.

В результате $B_i = [0;1] \times C[0;1]$, то есть B_i — это декартово произведение отрезка $[0;1]$ на множество непрерывных на отрезке $[0;1]$ функций.

Для примера найдём $Q(\vec{b})$ и $M(\vec{b})$ в точке $\vec{b} = ((0.7, p+p^2), (0.5, 2p), (0.8, p+p^3))$. В данных условиях первым выйдет второй игрок, так как он жмет кнопку до момента времени $t = 0.5$. Далее останутся первый и третий игрок, которые подставят в свои функции $p = 0.5$. Значит первый будет жать кнопку до $t = 0.75$, а третий — до $t = 0.625$. Аукцион окончится в $t = 0.625$ победой первого игрока:

$$Q((0.7, p+p^2), (0.5, 2p), (0.8, p+p^3)) = (1,0,0) \tag{106.3}$$

И

$$M((0.7, p+p^2), (0.5, 2p), (0.8, p+p^3)) = (0.625, 0, 0) \tag{106.4}$$

Лишний раз стоит подчеркнуть, что $(0.7, p+p^2)$ — это ход первого игрока. А стратегия игрока — это функция, которая говорит, какой элемент из B_i выбирать в зависимости от полученного сигнала из T_i. Стратегия это правило, которое каждому числу из $T_i = [0;1]$ сопоставляет конкретный ход, то есть пару (число, функция) из B_i

Мы считаем, что организаторы честно исполняют описанные в механизме функции, даже если после того, как они узнали ставки, им стало выгодно изменить механизм. Это конечно не всегда так и тут уместно сделать небольшое лирическое отступление.

В поезде Москва-Амстердам перегонщиком машин из Белоруссии была рассказана следующая история. Он купил машину на аукционе за 1200 евро, перегнал, дал объявление о продаже за 2000. Звонков много, и всем он сказал, что она уже продана. Потом дал новое объявление о продаже за 2500. Звонков много, и всем он сказал, что она уже продана. И т.д. Продал он ее, то ли за 3500, то ли за 3800, не помню.

Именно поэтому в реальности на многих аукционах есть стартовая цена, а есть резервная цена и это не одно и тоже. Стартовая цена —это цена с которой начинаются торги. Естественно, товар не может быть продан ниже стартовой цены. Стартовую цену игроки знают, а резервная цена известна только организаторам аукциона. Если торги не доходят до резервной цены, то товар остаётся у продавца, но он получает информацию о ставках. А если бы продавец начал торг с резервной цены, то он бы не получил информацию о ставках, так как их бы не было.

4.2. Правдивость и другие желательные свойства

Когда механизм принятия решения объявлен игрокам, игроки будут выбирать свои стратегии. Какой механизм выбрать, чтобы в равновесии Нэша были достигнуты определенные цели?

А теперь чудо-замена превращается в чудо-теорему, объясняющую почему можно изучать только прямые механизмы. Оказывается, любой механизм можно изменить так, чтобы он стал прямым, а игрокам было бы выгодно правдиво декларировать свои типы. При этом ни принимаемое решение, ни платежи никак не изменятся:

***Теорема* 107.1.** *Пусть задан произвольный механизм (B, Q, M) и равновесие Нэша NE в нем. Существует прямой механизм (Q', M') и равновесие Нэша NE' в нем такое, что:*

1. *При любых типах игроков вероятностям принятия решений и платежи в равновесиях NE и NE' совпадают.*

2. *В равновесии NE' игроки правдиво сообщают свои типы*

Доказательство. Давайте вспомним логику нашей чудо-замены. Для конкретности можно представлять себе аукцион первой цены с симметричными игроками, но это нигде в доказательстве не используется.

Первый игрок зная x максимизирует функцию $\pi_1(x, b_1)$ по b_1. При этом получается некое оптимальное b_1^*.

Мы говорили: давайте заменим $b_1 = b(a)$. И будем максимизировать по a. Неважно, что функция $b()$ пока ещё неизвестна. Важно, нам заранее известен результат оптимизации по a. С одной стороны должно быть $b_1^* = b(a^*)$, а с другой $b()$ — это равновесная стратегия, поэтому $b_1^* = b(x)$. И при хороших свойствах $b()$ из этого следует $a^* = x$.

Что будет если мы реализуем нашу чудо-замену в реальности? то есть продавец обещает игрокам: вы мне говорите a, а я за вас сделаю ставку $b(a)$ на аукционе. Что тогда оптимально говорить игрокам? Игрокам оптимально говорить $a^* = x$, то есть правдиво сообщать ценность товара для себя.

Если организаторы аукциона будут сначала применять функцию $b()$ к ходам игроков, а затем использовать старый механизм, то игрокам будет выгодно правдиво декларировать свои типы.

(картинка ...)

Если игроки несимметричны, то при старом механизме у каждого игрока своя оптимальная стратегия и равновесие Нэша имело вид $(b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x))$. В этом случае в новом прямом механизме ход первого игрока предварительно обрабатывается функцией $b_1()$, ход второго — функцией $b_2()$ и т.д.

Более формально: Пусть равновесие NE имеет вид $\beta : T \to B$. Смысл написанного: равновесие — это функция, которая каждому набору типов игроков ставит в соответствие набор сделанных ими ходов. Если расписывать детально: $\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (b_1(x_1), b_2(x_2), \ldots, b_n(x_n))$.

Пусть $\vec{x}$ — произвольный набор типов игроков, $\vec{x} \in T$. Определим прямой механизм по принципу: $Q'(\vec{x}) := Q(\beta(\vec{x}))$ и $M'(\vec{x}) := M(\beta(\vec{x}))$.

При этом автоматически оказывается, что при новом механизме равновесие Нэша NE' будет иметь вид: $\beta'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Действительно, если бы какому-то игроку не было выгодно правдиво декларировать свой тип x_i в этой ситуации, то ему не было бы выгодно использовать стратегию $b_i(x_i)$ в исходном непрямом механизме.

А если все игроки правдиво декларируют свои ценности, то и результат применения прямого механизма совпадает с результатом применения исходного непрямого механизма. □

Применим нашу теорему к аукциону первой цены.

Пример 108.1. Когда мы решали аукцион первой цены в простейшем случае, $X_i = V_i$, ценности X_i независимы и равномерны на $[0; 1]$ мы установили, что оптимальная стратегия имеет вид $b(x) = \frac{n-1}{n}x$.

Теорема говорит нам, что можно так поменять правила аукциона, что никому ни хуже ни лучше не станет, но игроки будут говорить правду. Как это сделать?

Изменим правила аукциона. Победителем по прежнему будем считать игрока с наибольшей ставкой. А вот платить он будет не ровно свою ставку, а свою ставку, умноженную на $\frac{n-1}{n}$. Каждый игрок знает, что его ставка будет автоматом помножена на $\frac{n-1}{n}$. Значит теперь каждому выгодно говорить правду. А фактические платежи и победитель не поменялись!

На аукционе второй цены игроки говорят правду и без каких-то поправок.

Теперь вместо того, чтобы изучать произвольные механизмы и произвольные равновесия Нэша в них, можно ограничиться изучением прямых механизмов и равновесий Нэша в которых игроки правдиво заявляют свой тип. То есть можно никогда не делать разницы между множествами B_i и T_i. Кроме как на свадьбе и в детском саду :)

Существует несколько свойств, которые мы хотели бы видеть у механизмов:

Определение 109.1. Правдивость. Прямой механизм называется правдивым, если в равновесии Нэша игроки правдиво декларируют свои сигналы.

Пример 109.2. Будем считать, что выполнены предпосылки теоремы об одинаковой доходности. Аукцион первой цены — не правдив, аукцион второй цены — правдив.

Определение 109.3. Эффективность. Механизм называется эффективным, если в равновесии Нэша принятое решение максимизирует суммарную полезность всех агентов.

Пример 109.4. Если выполнены предпосылки теоремы об одинаковой доходности, то аукционы первой и второй цены является эффективными механизмами. Действительно, в этом случае товар достаётся игроку с максимальной полезностью. Любое другое решение приведет к снижению совокупной полезности.

Нужно подчеркнуть, что эффективность не учитывает правило платежей! Когда мы говорим об эффективности механизма, мы говорим об эффективности правила распределения.

Определение 109.5. Индивидуальная рациональность. Механизм называется индивидуально рациональным, если игроки согласны участвовать в нем добровольно.

Индивидуальная рациональность учитывает правило платежей! Когда мы говорим об индивидуальной рациональности, мы учитываем и правило распределения и правило платежей.

Пример 109.6. Если выполнены предпосылки теоремы об одинаковой доходности, то аукционы первой и второй цены индивидуально рациональны, так как ожидаемый выигрыш каждого игрока неотрицательный. А пример 102.2 с Сашей и Машей, которым нужно помыть пол и посуду не будет индивидуально рациональным, если только мама не предложит им какую-нибудь компенсацию в виде похода в кино.

Определение 110.1. Оптимальность. Механизм называется оптимальным, если в равновесии Нэша организаторы получают от игроков максимально возможную ожидаемую прибыль.

Если у нас есть диктаторские полномочия, то есть мы можем заставить игроков участвовать в аукционе, то, очевидно, мы можем получить сколь угодно большую прибыль. Для этого просто надо потребовать от каждого заплатить достаточно много. Но такой аукцион не будет индивидуально рациональным. Поэтому обычно выбирают оптимальный механизм среди индивидуально рациональных.

Иногда организаторам не нужно заработать денег. Бывает задача состоит в том, чтобы организовать игру так, чтобы в равновесии Нэша было принято некое желательное решение. Скажем, в примере со строительством моста организаторы могут быть заинтересованы в принятии решения «построить мост». то есть нам интересно принятие нужного решения, а не потоки платежей, которые возникают в связи с этим. В этом случае от механизма может требоваться:

Определение 110.2. Бюджетная сбалансированность. Механизм имеет сбалансированный бюджет, если в равновесии Нэша сумма платежей всех игроков равна нулю.

Стоит сразу сказать, что не всех этих свойств можно добиться одновременно. Для некоторых задач доказано, что не существует механизма, который был бы эффективен, правдив, индивидуально рационален и бюджетно сбалансирован.

4.3. Механизм VCG

Есть универсальный механизм, который применим к множеству ситуаций. Этот механизм есть не что иное, как аукцион второй цены. Давайте повнимательнее к нему присмотримся…Мы сознательно пока забудем про платежи и сосредоточимся только на полезности от получения товара.

Конкретный пример. У пяти игроков были ценности равные $(1, 3, 7, 11, 25)$. Ровно такие ставки они и сделали. Победил пятый игрок, который поставил 25. При этом он получил от товара полезность равную 25. Остальные четверо получили суммарную полезность 0.

А что произошло бы если бы пятый не участвовал в аукционе? Тогда победил бы игрок с ценностью 11. При этом четверо игроков (кроме нынешнего пятого) получили бы суммарную полезность равную 11.

Заметим, что при удалении любого другого игрока сумма полезностей остальных (без учета платежей) не поменялась бы.

Подводим итог. На аукционе второй цены:

$$\begin{multline}\text{Выплата } i\text{-го игрока} = \\ \text{Максимально достижимая суммарная полезность всех игроков кроме } i\text{-го} \\ - \\ \text{Текущая суммарная полезность всех игроков кроме } i\text{-го} \quad (111.1)\end{multline}$$

Механизм Викри-Кларка-Гровса применяет эту идею к любой задаче. А именно он говорит:

Определение 111.2. . Механизм VCG. Неформальное определение:

1. Правило распределение: выбрать решение, максимизирующее сумму полезностей.

2. Правило платежей: игрок i платит суммарную потерю полезности остальных игроков от своего участия в игре.

Опишем идею немножко более формально. Пусть множество возможных типов игрока i — это числовое множество T_i, чаще всего отрезок. Мы рассматриваем только прямые механизмы, поэтому множество возможных ходов такое же, $B_i = T_i$.

Полезность игрока зависит от его типа и принятого решения, $v_i(X_i, w)$. то есть типовая табличка имеет вид:

	Решение w_1	Решение w_2
Игрок 1	$v_1(X_1, w_1)$	$v_1(X_1, w_2)$
Игрок 2	$v_2(X_2, w_1)$	$v_2(X_2, w_2)$
Игрок 3	$v_3(X_3, w_1)$	$v_3(X_3, w_2)$

В теореме мы используем обозначения:

1. b_i — ход, сделанный игроком i, поскольку механизм прямой, это есть заявленный им тип.

2. w^* — решение максимизирующее суммарную полезность всех игроков при типах $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

3. w^*_{-i} — решение максимизирующее суммарную полезность всех игроков кроме игрока i при типах $(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Заметим, что в данном случае не важно, какой тип у i-го игрока поскольку о его полезности не заботятся.

Итак,

Определение 112.0. Механизм VCG, механизм Викри-Кларка-Гровса — это прямой механизм, в котором:

1. Множество $B_i = T_i$, то есть каждому игроку предлагают сказать свой тип.

2. Правило распределения: выбирается то решение w, которое максимизирует сумму полезностей игроков при задекларированных ходах. Если таких решений несколько, то оно выбирается равновероятно.

$$\max_w \sum_i v_i(b_i, w) \tag{112.1}$$

3. Правило платежей: платеж i-го игрока есть разница между: максимально возможной суммарной полезностью остальных игроков, если i-ый не участвует в игре, и суммарной полезностью остальных игроков при текущем решении.

$$M_i(\vec{b}) = \sum_{j \neq i} v_j(b_j, w^*_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(b_j, w^*) \tag{112.2}$$

Мы сейчас докажем, что в механизме VCG стратегия игрока «правдиво декларировать свой тип» нестрого доминирует все остальные. Но перед доказательством разберём пару примеров:

Пример 112.3. Применение механизма VCG к разносчику пиццы, 102.1.

Сначала определим, какое решение примет механизм VCG. Для этого посчитаем сумму полезностей.

	сначала к A, потом к B	сначала к B, потом к A
Клиент A	$-a$	$-b-c$
Клиент B	$-a-c$	$-b$
Сумма полезностей	$-2a-c$	$-2b-c$

то есть механизм VCG выберет наикратчайший путь. Для определенности будем считать, что $a < b < c$. В этом случае, разносчик пиццы едет сначала к A, потом к B.

Теперь определим для случая $a < b$ кто и сколько платит.

Сколько платит игрок A? Если бы A не было, то оптимальным был бы путь к B напрямую и тот получил бы полезность $-b$. Сейчас B получает полезность $-a-c$. Стало быть игрок A должен заплатить $-b-(-a-c)=a+c-b$.

Сколько платит игрок B? Если бы B не было, то оптимальным был бы путь к A напрямую и тот получил бы полезность $-a$. Сейчас A получает полезность $-a$. Стало быть игрок B ничего не платит, $-a-(-a)=0$.

Пример 113.1. Применение механизма VCG к строительству моста, 101.2. Для примера возьмем конкретные значения V_A, V_B и c. Посчитаем сумму полезностей. Зная сумму определим, какое решение примет VCG.

	Построить мост	Не строить мост
Жители города A	$+60$	0
Жители города B	$+90$	0
Администрация	-100	0
Сумма	+50	0

то есть механизм VCG говорит: строим мост.

Теперь считаем, кто и сколько платит.

Сколько платят жители A? Если бы их не было, то оптимальным было бы решение не строить мост и остальные игроки получили бы полезность 0. Сейчас остальные игроки получают в сумме (-10). Значит жители A платят $0-(-10)=10$.

Сколько платят жители B? Если бы их не было, то оптимальным было бы решение не строить мост и остальные игроки получили бы полезность 0. Сейчас остальные игроки получают в сумме (-40). Значит жители B платят $0-(-40)=40$.

Тут мы видим существенный недостаток механизма VCG: а именно бюджетную несбалансированность. Чтобы сделать то, что советует VCG, нужно взять откуда-то с потолка ещё 50 рублей. И это проблема не конкретно механизма VCG, а именно несовместимость некоторых желательных свойств.

Естественно, возникает вопрос: а как механизм VCG добьется того, чтобы максимизировать суммарную полезность? Ведь для этого надо знать истинные полезности игроков! А вдруг они соврали, когда сообщали свои типы? Ответ, естественно, состоит в том, что игрокам выгодно правдиво сообщать свои типы:

***Теорема* 113.2.** *При использовании механизма VCG стратегия «Правдиво декларировать свой тип, $b_i(x_i)=x_i$» нестрого доминирует остальные стратегии игрока i.*

Доказательство. Посчитаем полезность первого игрока полезность в случае, если игроки делают ходы $(b_1,\dots,b_n)$, не обязательно правдивые.

Общая полезность с учетом решения и платежа равна:

$$v_1(x_1, w^*) - M_1 = v_1(x_1, w^*) - \left(\sum_{j=2}^{n} v_j(b_j, w^*_{-1}) - \sum_{j=2}^{n} v_j(b_j, w^*) \right) =$$

$$= v_1(x_1, w^*) + \sum_{j=2} v_j(b_j, w^*) - \sum_{j=2}^{n} v_j(b_j, w^*_{-1}) \quad (113.3)$$

Первый игрок выбирает b_1. На что оно влияет? Оно влияет только на исход w^*! Первый игрок не в силах изменить, ни w^*_{-1}, так как это игра без него, ни ходы b_j остальных игроков. то есть выбор хода b_1 не меняет вычитаемого.

Оставшиеся два слагаемых, на которые первый игрок может влиять выбором хода b_1, — это не что иное, как суммарная полезность всех игроков, если бы их типы были бы равны $(x_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$.

А правило распределения w^* обеспечивает максимизацию суммарной полезности для задекларированных типов $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Значит, если первый игрок сообщит $b_1 = x_1$, то правило w^* само максимизирует его полезность.

□

Из этого, конечно, следует, что профиль стратегий, где все игроки правдиво декларируют свой тип, является равновесием Нэша.

Есть и другой подход к обобщению идеи аукциона второй цены. И этот подход также активно используется.

Пример 114.1. Обобщенный аукцион второй цены, Generalized Second Price auction, GSP.

Как Google делает деньги? Около 98% своих денег Google делает на продаже рекламных ссылок. Есть несколько рекламных мест, которые показываются, когда пользователь запрашивает в поисковике какое-нибудь слово, например «Абрикос». Эти места отличаются по престижности. А именно, места отличаются по среднему количеству переходов в час, «кликов» мышкой по ссылке.

У каждого игрока есть мнение о ценности одного «клика». Желающие получить эти рекламные места одновременно делают свои ставки.

Игрок, сделавший самую большую ставку получает самое престижное место, игрок сделавший вторую по величине ставку, получает второе по престижности место и т.д. При этом победитель платит за каждый «клик» не свою ставку, а вторую по величине ставку; игрок получивший второе по престижности место платит за каждый «клик» ставку игрока, получившего третье по престижности место и т.д. Игрок выигравший самое непрестижное рекламное место, платит за каждый «клик» самую высокую ставку среди игроков, которые ничего не выиграли.

Есть ещё разные тонкости, но основная идея верна. Желающие могут сами поиграться на adwords.google.com. Например, за сумму в несколько долларов можно сделать страницу-сюрприз, которая будет выводиться первой при поиске на фразу «день рождения Васи Петрова».

4.4. Оптимальный аукцион

А сейчас мы увидим, что в простейшей ситуации аукцион второй цены с резервной ценой оптимален.

Пусть каждый покупатель знает ценность товара для себя, то есть $X_i = V_i$. Кроме того предположим, что каждая ценность имеет регулярное распределение, описываемое функцией распределения $F_i(x)$.

Что произошло бы, если бы никакого аукциона не было, и продавец просто предложил бы каждому покупателю купить у него товар по цене x? В этом случае игрок i согласился бы на покупку, если $X_i > x$, а вероятность этого равна:

$$\mathbb{P}(X_i > x) = 1 - F_i(x) \tag{115.1}$$

И при отсутствии аукциона, средний доход продавца от i-го игрока был бы равен:

$$TR_i = x(1 - F_i(x)) \tag{115.2}$$

По сравнению с обычной формулой $TR(Q) = \mathbb{P}(Q) \cdot Q$:

1. x — это аналог цены $\mathbb{P}(Q)$
2. $1 - F_i(x)$ — это аналог количества товара Q

Как обычно в экономике можно определить предельный доход продавца, $TR'(Q)$:

$$\begin{aligned} MR_i(x) = \frac{dTR_i(x)}{d(1 - F_i(x))} = x + (1 - F_i(x))\frac{dx}{d(1 - F_i(x))} = \\ = x + (1 - F_i(x))\frac{-1}{f(x)} = x - \frac{1 - F_i(x)}{f_i(x)} \end{aligned} \tag{115.3}$$

Мы воспользовались тем, что производная обратной функции — это единица делить на производную исходной. В результате у нас появилось:

Определение 115.4. Предельный доход продавца — это

$$MR_i(x) = x - \frac{1 - F_i(x)}{f_i(x)} \tag{115.5}$$

Эта величина — скорость роста ожидаемого дохода продавца при росте вероятности сделки. Если она положительна, значит продавец заинтересован в росте вероятности сделки, то есть в снижении v. Если она отрицательна, значит продавец заинтересован в снижении вероятности сделки, то есть в росте v.

Оказывается, что величина MR_i возникает и при моделировании аукционов. А именно:

***Теорема* 116.1.**

$$\mathbb{E}(pay_1(X_1)) = \mathbb{E}(q_1(X_1)MR_1(X_1)) \tag{116.2}$$

Доказательство. Мы будем изучать первого игрока, и поэтому опустим индекс 1, чтобы было меньше писанины.

Для доказательства вспомним формулу из теоремы об одинаковой доходности первой лекции:

$$pay(x) = xq(x) - \int_0^x q(t)dt \tag{116.3}$$

Тогда мы считали, что все игроки используют равновесные стратегии. И при этом трактовали функции как:

- $q(x)$ — вероятность того, что первый игрок выиграет, если его ценность равна x.
- $pay(x)$ — средняя выплата от первого игрока продавцу, если его ценность равна x

Теперь представим себе, что как в теореме 107.1 мы заменили исходный механизм прямым, то есть продавец автоматом обрабатывает поступающие к нему сообщения о типах равновесными функциями b_i. Тогда получается новая трактовка старых функций:

- $q(x)$ — вероятность того, что первый игрок выиграет, если сообщит ценность x, а остальные правдиво сообщат свои ценности
- $pay(x)$ — средняя выплата от первого игрока, если он сообщит ценность x, а остальные правдиво сообщат свои ценности

Поехали:

$$\mathbb{E}(pay(X_1) = \int_0^1 pay(x)f(x)dx = \int_0^1 \left(xq(x) - \int_0^x q(t)dt\right) f(x)dx = \\ \int_0^1 xq(x)f(x)dx - \int_0^1 \int_0^x q(t)dtf(x)dx \tag{116.4}$$

Применим к вычитаемому формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^1 \int_0^x q(t)dtf(x)dx = \int_0^x q(t)dtF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 q(x)F(x)dx =$$
$$= \int_0^1 q(x)dx - \int_0^1 q(x)F(x)dx = \int_0^1 q(x)(1-F(x))dx \quad (116.5)$$

Подставляем полученный результат в исходную формулу:

$$\mathbb{E}(pay(X_1) = \int_0^1 xq(x)f(x)dx - \int_0^1 q(x)(1-F(x))dx =$$
$$= \int_0^1 q(x)f(x) \cdot \left(x - \frac{1-F(x)}{f(x)}\right) dx = \mathbb{E}(q(X_1) \cdot MR(X_1)) \quad (117.1)$$

□

Польза от этой теоремы в том, что с помощью неё легко определить оптимальный аукцион.

***Теорема* 117.2.** *Предположим, что функции $MR_i(x) = x - \frac{1-F_i(x)}{f_i(x)}$ для каждого игрока не убывают. Оптимальный аукцион устроен по принципу:*

1.1. *Товар достаётся покупателю с наибольшим $MR_i(X_i)$, если оно неотрицательно. Если таких покупателей несколько, то он выбирается из них равновероятно.*

1.2. *Если наибольшее $MR_i(x_i) < 0$, то товар остаётся у продавца*

2. *Победитель платит минимально возможную ставку, при которой он ещё остался бы победителем:*

$$M_i = \inf\{t | MR_i(t) \geqslant 0, MR_i(t) \geqslant MR_j(X_j) \forall j\} \quad (117.3)$$

Доказательство. Что делает оптимальный аукцион? Он должен максимизировать $\mathbb{E}(R) = \mathbb{E}(pay_1(X_1)) + \ldots + \mathbb{E}(pay_1(X_n))$.

Как мы только что доказали, $\mathbb{E}(pay_i(X_i)) = \mathbb{E}(q_i(X_i)MR_i(X_i))$. Выбирая правила аукциона мы не можем влиять на $MR_i(X_i)$, так как это характеристика распределения ценностей. Мы можем только влиять на вероятности получения товара каждым из игроков, то есть на функцию $q_i()$.

Предлагаемое правило распределения сделает максимум возможного! Оно помножит на 0 отрицательные $MR_i(X_i)$. При наличии положительных $MR_i(X_i)$, оно помножит на единицу наибольшее из них, а остальные помножит на 0. Значит оно максимизирует ожидаемую прибыль продавца.

Остался один вопрос. А сможет ли это правило работать? Ведь, чтобы определить $MR_i(X_i)$, надо знать настоящее X_i. то есть осталось доказать, что при использовании этого правила игроки правдиво декларируют свои ценности.

Как и в первой лекции построим сравнительную табличку. Результат аукциона для первого игрока зависит от его собственной ставки и от $m = \max\{0, MR_2(X_2), \dots, MR$

	$m \leqslant MR_1(X_1-\Delta)$	$m \in [MR_1(X_1-\Delta); MR_1(X_1)]$	$m \geqslant MR_1(X_1)$
$b_1 = X_1$	$X_1 - M_1$	$X_1 - M_1$	0
$b_1 = X_1 - \Delta$	$X_1 - M_1$	0	0

Разница только во втором столбце. В этом случае $MR_1(X_1) \geqslant MR_j(X_j)$ и $MR_1(X_1) \geqslant$ 0. Значит величина $X_1 - M_1 \geqslant 0$.

Аналогично доказывается, что и отклоняться в положительную сторону также невыгодно.

Платежи возникающие в матрице неотрицательные. Это означает, что механизм индивидуально рационален и игроков не надо в него затаскивать принудительно. □

Применим эту теорему к случаю симметричных игроков.

Пример 118.1. Если все функции $MR_i(x)$ одинаковые и возрастают по x, то товар либо достаётся игроку с наибольшим X_i, либо не достаётся никому. Товар не достаётся никому, если

$$MR(\max\{X_i\}) < 0 \tag{118.2}$$

Это условие можно записать и как:

$$\max\{X_i\} < MR^{-1}(0) \tag{118.3}$$

то есть на аукционе есть победитель, если максимальная ставка достигла отметки $MR^{-1}(0)$. Сколько платит победитель? Чтобы остаться победителем, минимальная ставка которую нужно сделать должна удовлетворять условию $MR(t) \geqslant 0$ и быть больше других ставок. Действительно:

$$M = \inf\{t | MR(t) \geqslant 0, MR(t) \geqslant MR(X_j) \forall j\} \Longleftrightarrow \inf\{t | MR(t) \geqslant 0, t \geqslant X_j \forall j\} \tag{118.4}$$

Таким образом мы доказали, что для симметричных игроков оптимальным аукционом будет аукцион второй цены с резервной ценой равной $r = MR^{-1}(0)$.

Стоит отметить, что если ценности независимы, но имеют разное распределение, то аукцион второй цены с резервной ценой может не быть оптимальным. Это связано с тем, что на аукционе второй цены побеждает игрок с наибольшей ценностью, а в оптимальном аукционе нужно чтобы победил игрок с наибольшей MR_i. Если фукнции MR_i отличаются, то эти условия могут не совпадать.

Пример 118.5. На аукционе n игроков. Ценности независимы и равномерны на $[0;1]$. Какими должны быть правила проведения аукциона, чтобы максимизировать ожидаемую доходность продавца?

Находим $MR(x)$:

$$MR(x) = x - \frac{1-x}{1} = 2x - 1 \tag{119.1}$$

Функция монотонно возрастает, поэтому оптимальный аукцион — это аукцион второй цены с резервной ценой. Находим цену из уравнение $MR(r) = 0$. Получаем $r = 0.5$

4.5. Спасибо!

Вот, пожалуй, и всё. Надеюсь, вам понравилось. Спасибо!

4.6. Задачи

1. Найдите $\mathbb{E}(MR_i(X_i))$

2. Рассмотрите задачу разносчика пиццы, $a < b < c < 1/4$. Помимо двух основных также есть варианты: «Ехать только к А», «Ехать только к В» и «Не ехать ни к кому». Полезность заказчика от доставленной пиццы равна 1. Какое решение будет принято и сколько заплатят игроки при применении механизма VCG?

3. Рассмотрите задачу разносчика пиццы с двумя игроками и с учетом самого разносчика пиццы, $a < b < c < 1/4$, где помимо двух основных также есть варианты: «Ехать только к А», «Ехать только к В» и «Не ехать ни к кому». Полезность заказчика от доставленной пиццы равна 1. Полезность разносчика пиццы равно времени потраченному на дорогу в одну сторону со знаком минус. Какое решение будет принято и сколько заплатят игроки при применении механизма VCG?

4. Какое решение будет принято, сколько заплатят игроки при использовании механизма VCG в задаче про посуду, 102.2?

5. Аукцион по продаже интернет-рекламы. Для каждого игрока переход по его рекламной ссылке имеет ценность $V_i = X_i$. Продаваемые рекламные места отличаются средним количеством кликов в час. Приведите пример, показывающий, что на аукционе GSP в равновесии Нэша игроки не всегда правдиво сообщают свои ценности.

6. Аукцион «Платят все!». Покупатели одновременно делают ставки. Товар достаётся тому, кто назвал наибольшую ставку, но платят все игроки. Каждый платит свою ставку. Ценности товара для покупателей имеют независимое регулярное распределение с функцией плотности $f(x) = 2x$ на $[0; 1]$.

   Как нужно изменить правила этой игры, чтобы игрокам было выгодно правдиво декларировать свои ценности, но при этом ни один игрок не выиграл и не проиграл?

   Hint: Смотрите список задач к лекции один

7. Наследство. Двум сыновьям достался земельный участок в наследство. Отец не хо- тел, чтобы участок был разделен, поэтому по завещанию установлены следующие правила: два брата одновременно делают ставки. Участок получает тот, кто сделал большую ставку. При этом получивший участок выплачивает свою ставку проигравшему. Ценности участка независимы и равномерны на $[0; 1]$.

   Как нужно изменить правила этой игры, чтобы игрокам было выгодно правдиво декларировать свои ценности, но при этом ни один игрок не выиграл и не проиграл?

   Hint: Смотрите список задач к лекции один

8. Аукцион «Победитель платит чужую среднюю». Покупатели одновременно делают ставки. Товар достаётся тому, кто назвал наибольшую ставку. Победитель платит среднюю арифметическую ставок остальных игроков. Ценности товара для покупателей независимы и равномерно распределены на [0; 1].

   Как нужно изменить правила этой игры, чтобы игрокам было выгодно правдиво декларировать свои ценности, но при этом ни один игрок не выиграл и не проиграл?

9. Два игрока. Ценности независимы и имеют экспоненциальные распределения с параметрами $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$. Сигналы совпадают с ценностями, $X_i = V_i$.

   (a) Предположим, что аукцион проводится по принципу аукциона второй цены с резервной ценой r.

      i. Найдите равновесие Нэша.

      ii. В осях (X_1, X_2) изобразите три множества: товар достаётся первому игроку, товар достаётся второму игроку, товар остаётся у продавца.

   (b) Разработайте оптимальный аукцион. Будет ли он отличаться от аукциона второй цены?

i. Найдите равновесие Нэша.

ii. В осях (X_1, X_2) изобразите три множества: товар достаётся первому игроку, товар достаётся второму игроку, товар остаётся у продавца.

10. На аукционе первой цены участвуют n потенциальных покупателей. Продаётся один товар, $V_i = X_i$, ценности равномерны на $[0; 1]$ и независимы. Доставка товара по почте стоит 0.1. Доставку оплачивает покупатель. Игроки одновременно решают делать ли ставки, и если делать, то какие.

    (a) Найдите равновесные стратегии и ожидаемую прибыль продавца.

    (b) Как изменится предыдущий ответ, если доставку оплачивает продавец?

    (c) Решите аналогичную задачу для аукциона второй цены.

11. Общественное благо наоборот. (Более корректная сказка). Рассмотрим задачу насильственного выбора поставщика общественного блага. Жители деревни Малое Гадюкино решили проложить к деревне новую освещенную дорогу от шоссе. Есть два варианта. Вариант А: заставить сделать всё местную администрацию по закону. От этого администрация получит ущерб в 100 тыс. рублей. При этом она и дорогу выложит и фонари поставит. Вариант Б: воспользоваться тем, что на территории деревни есть два магазинчика. Заставить владельца более крупного магазина оплатить прокладку дороги (60 тыс. рублей), а владельца более мелкого — фонари (30 тыс. рублей). Выгода жителей деревни — случайная величина, X равномерна на $[80; 180]$ тыс. рублей:

	Не строить	Строить «под ключ»	Строить по частям
Администрация	0	-100	0
Фирма Б1	0	0	-60
Фирма Б2	0	0	-30
Жители	0	X	X

Опишите механизм VCG применительно к этой задаче. то есть требуется описать кто и сколько платит, в зависимости от ставок игроков. Общее описание механизма VCG за ответ не засчитывается.

С какой вероятностью баланс механизма VCG положительный, то есть не потребуется вливать в него деньги?

12. Рассмотрим аукцион n игроков. Ценности независимы и равномерны на $[0; 1]$, $X_i = V_i$. Игроки одновременно делают свои ставки b_i. Продавец считает синус каждой ставки, $\hat{b}_i = \sin(b_i)$. И проводит обычный аукцион второй цены с реальными ставками равными $\hat{b}_i$. то есть побеждает тот, у кого $\hat{b}_i$ больше, а платит он вторую по величине $\hat{b}_i$.

Является ли этот механизм правдивым?

4.7. Решения задач

1. По определению $MR_i(x)$:

$$\mathbb{E}(MR_i(X_i)) = \mathbb{E}(X_i) - \int_0^1 (1 - F(t))dt \qquad (122.1)$$

Далее интегрируем по частям, $u(t) = 1 - F(t)$, $v'(t) = 1$ и получаем $\mathbb{E}(MR_i(X_i)) = 0$.

2. Табличка:

	$\to A$	$\to B$	$\to A \to B$	$\to B \to A$	Не ехать
A	$1-a$	0	$1-a$	$1-b-c$	0
B	0	$1-b$	$1-a-c$	$1-b$	0

Будет принято решение: $\to A \to B$. Игрок B не платит ничего (так как полезность A не меняется при отсутствии игрока B). Игрок A платит $(1-b)-(1-a-c) = a+c-b$.

3.

	$\to A$	$\to B$	$\to A \to B$	$\to B \to A$	Не ехать
A	$1-a$	0	$1-a$	$1-b-c$	0
B	0	$1-b$	$1-a-c$	$1-b$	0
Разносчик	$-a$	$-b$	$-a-c$	$-b-c$	0

Будет принято решение: $\to A \to B$. A платит $2 \cdot (a+c-b) > 0$, B платит $2 \cdot (b+c-a) > 0$. Разносчик: ничего не платит.

Внимание! Задача «без разносчика» не означает, что его нет и никто пиццу не разносит. Задача «без разносчика» означает, что о нем никто не заботится!

4. Поскольку суммарная полезность во всех случаях одинакова, то механизм VCG допускает принятие любого решения. Например, равновероятный выбор из 4-х решений. Или выбор решения «Саша — посуда, Маша — пол». Рассмотрим вариант с равновероятным выбором любого решения. Сколько должна платить Маша? Сейчас Саша получает полезность $-0.5a-0.5b$. Если оставить в игре только Сашу, то при оптимальном решении Саша получает полезность 0. Выплата Маши равна: $0-(-0.5a-0.5b) = 0.5a+0.5b$. В силу симметрии выплата Саши — такая же.

Возникает естественный вопрос: это как же так, Саша и Маша не только посуду моют, но ещё и платят? Есть два ответа. Во-первых выбор нулевой полезности произволен. Мы с таким же результатом могли увеличить полезность

Саши и Маши при каждом исходе на $a + b$. В этом случае Саша и Маша получали бы неотрицательную полезность. Во-вторых, обратите внимание на трактовку игры «без Маши». Это не означает, что есть тот же объем работ, но сделать его может только Саша. Игра «без Маши» — это тот же объем работ при тех же игроках, но заботимся мы только о Саше.

5. Самый простой пример — с общеизвестными ценностями. Три игрока, ценности кликов для них равны: 20, 10 и 5. Два рекламных места: одно дает 10 кликов в час, другое — 9 кликов в час. Если все говорят правду, то первый игрок получает полезность: $10 \cdot (20 - 10) = 100$. Если первый игрок отклонится и сделает ставку 9, то он получит: $9 \cdot (20 - 5) = 135$. Значит правду говорить не выгодно.

6. Мы знаем, что на этом аукционе равновесие Нэша: $b(x) = \frac{n-1}{n}x^n$, см. формулу 26.4 в задачах к первой лекции.

   Поэтому правила новой игры должны иметь вид: Каждый игрок платит не свою ставку, а свою ставку возведенную в степень n и домноженную на $\frac{n-1}{n}$. Товар достаётся тому, у кого ставка выше.

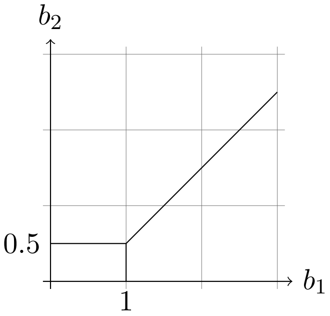
7. На этом аукционе равновесие Нэша имеет вид $b(x) = x/3$. Соответственно, измененные правила игры выглядят так: оба игрока одновременно делают ставки. Участок получает тот, кто сделал большую ставку. Победитель выплачивает проигравшему треть своей ставки.

8. Равновесие Нэша при оригинальных правилах имеет вид: $b(x) = \frac{2(n-1)}{n}x$. Измененные правила выглядят так: товар достаётся игроку с наибольшей ставкой. Победитель платит $\frac{2(n-1)}{n}\bar{x}_{-i}$, где $\bar{x}_{-i}$ — средняя ставка всех игроков кроме победителя.

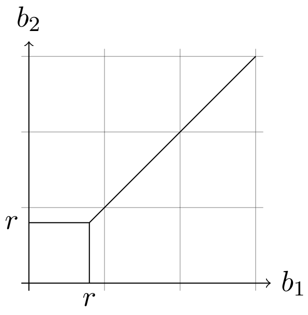
9. Для аукциона второй цены: Равновесие Нэша — говорить правду.

   Для оптимального аукциона: $MR(x) = x - \frac{1-(1-\exp(-\lambda x))}{\lambda \exp(-\lambda x)} = x - \frac{1}{\lambda}$, $MR_1(x) = x - 1$, $MR_2(x) = x - 0.5$. Стало быть правила таковы: Если $b_1 < 1$ и $b_2 < 0.5$, то товар остаётся у продавца. Иначе товар достаётся тому, у кого MR больше, то есть товар достанется первому если $b_1 - 1 > b_2 - 0.5$ или $b_2 < b_1 - 0.5$.

10. Оплата доставки товара покупателем равносильна плате за участие. Смотрим задачи из лекции 3. Если покупатель оплачивает доставку сам. То для него — это как плата за участие, но продавец её не получает. Поэтому равновесные стратегии для покупателей, такие же как в аукционе с платой за вход $w = 0.1$.



(a) Оптимальный аукцион



(b) Аукцион второй цены

Величина w продавцу не достаётся, поэтому его ожидаемый доход уменьшается на $w(1-\rho)$ и равен:

$$\mathbb{E}(R) = n(n-1)\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{\rho^n}{n} + \frac{\rho^{n+1}}{n+1}\right), \quad \rho = w^{1/n} \tag{123.1}$$

Если же продавец оплачивает доставку сам. То с точки зрения покупателей — это обычный аукцион. А доход продавца надо уменьшить на 0.1:

$$\frac{n-1}{n+1} - 0.1 \tag{124.1}$$

Если нарисовать эти функции, то при $n \geqslant 3$ получается, что продавцу выгоднее обещать бесплатную доставку!

11. Механизм VCG: ход делают только жители. Пусть $X \in [80; 180]$ — ход жителей. Принимается решение не строить дорогу, если $X < 90$, и строить дорогу с помощью двух фирм Б1 и Б2, если $X \geqslant 90$.

    Администрация платит 90, если дорога строится и X если дорога не строится.

    Фирма Б1 платит 0, если дорога строится, и $X - 30$, если дорога не строится.

    Фирма Б2 платит 0, если дорога строится, и $X - 60$, если дорога не строится.

    Жители получают 90, если дорога строится, и 0, если дорога не строится.

    Баланс всегда неотрицательный.

12. На отрезке $[0; 1]$ синус является монотонно возрастающим. Без применения синуса стратегия «Говорить правду» нестрого доминировала остальные, то

есть давала больше денег. С применением синуса стратегия «Говорить правду» дает больший синус количества денег. Но это одно и то же. Значит стратегия «Говорить правду» по-прежнему нестрого доминирует остальные.

Можно составить табличку для сравнения ходов $b = x$ и $b = x - \Delta$.

4.8. Контрольная 4

1. На аукционе участвуют n игроков. Ценности независимы, $X_i = V_i$. Пусть функция распределения сигналов имеет вид $F(x) = x^a$ на $[0; 1]$, где a — это некая константа, $a \geqslant 1$.

   (a) Найдите $MR(x)$. Является ли $MR(x)$ возрастающей?

   (b) Постройте оптимальный аукцион.

$$MR(x) = x - \frac{1 - x^a}{ax^{a-1}} = x\left(1 + \frac{1}{a}\right) - \frac{1}{ax^{a-1}} \tag{125.1}$$

Даже без производной видно, что функция возрастает. Оптимальным будет аукцион второй цены с резервной ценой:

$$r = \left(\frac{1}{a+1}\right)^{1/a} \tag{125.2}$$

2. Петя переезжает на новую квартиру, поэтому продает свои старые шкаф и комод (варианта взять их с собой у него нет). Потенциальных покупателей двое. Первый покупатель знает значение X_1, второй — значение X_2. Величины X_1 и X_2 независимы и равномерны на $[0; 1]$. Полезности первого игрока: от шкафа — 0.5, от комода — $0.8X_1$, от шкафа и комода — $0.5+X_1$. Полезности второго игрока: от шкафа — 0.8, от комода — X_2, от шкафа и комода — $0.8 + 0.8X_2$

   (a) Четко опишите механизм VCG применительно к этой задаче.

   (b) Какова средняя прибыль продавца при использовании механизма VCG?

Составляем табличку:

	(Ш,К)	(К,Ш)	(КШ,-)	(-,КШ)
Покупатель 1	0.5	$0.8X_1$	$0.5 + X_1$	0
Покупатель 2	X_2	0.8	0	$0.8 + 0.8X_2$
Сумма	$0.5 + X_2$	$0.8 + 0.8X_1$	$0.5 + X_1$	$0.8 + 0.8X_2$

Покупатели одновременно декларируют свои значения X_i. Мы знаем, что в механизме VCG им будет оптимально говорить правду. Механизм VCG максимизирует сумму полезностей. В данном случае мы замечаем, что $0.8+0.8X_1 > 0.5 + X_1$ при любых $X_1 \in [0;1]$. И аналогично для X_2. Поэтому правило выбора решения имеет вид:

Если $X_1 > X_2$, то комод — первому, и шкаф — второму. Если $X_1 < X_2$, то комод и шкаф — второму.

Осталось правило платежей:

Если $X_1 > X_2$, то первый платит $0.8X_2$, а второй — $0.5 + 0.2X_1$.

Если $X_1 < X_2$, то первый платит 0, а второй — $0.5 + X_1$.

Получаем выручку продавца:

$$R = (0.5 + 0.2X_1 + 0.8X_2)1_{X_1>X_2} + (0.5 + X_1)1_{X_1<X_2} \tag{126.1}$$

Находим:

$$\mathbb{E}(X_1 1_{X_1>X_2}) = \int_0^1 \int_0^{x_1} x_1 \cdot 1 \cdot dx_2 dx_1 = 1/3 \tag{126.2}$$

Аналогично, $\mathbb{E}(X_1 1_{X_1<X_2}) = 1/6$.

Получаем, что средняя выручка равна:

$$\mathbb{E}(R) = 0.5 \cdot \frac{1}{2} + 0.2 \cdot \frac{1}{3} + 0.8 \cdot \frac{1}{6} + 0.5 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{13}{15} \tag{126.3}$$

3. Есть n городов. Рядом с одним из них нужно построить мусоросжигательный завод. Жители города рядом с которым будет построен завод получат отрицательную полезность $U_i = -X_i$. Остальные получат полезность 0. Величины $X_i \sim U[0;1]$ и независимы. Каждый город знает своё X_i.

   (a) Опишите механизм VCG применительно к этой задаче. то есть предполагается, что игроки объявляют числа $b_i \in [0;1]$ и механизм должен определять, у какого города строить завод и какие платежи должны сделать игроки в зависимости от b_i.

   (b) Выпишите функцию плотности для компенсации, которую получают жители города рядом с которым будет построен мусоросжигательный завод.

   (c) Сходится ли баланс у механизма VCG в этом случае? Если нет, то сколько в среднем нужно вложить средств извне в этот механизм?

(d) Что больше: компенсация или ущерб от строительства завода в механизме VCG?

Каждый город одновременно декларирует свой ущерб.

Правило принятия решения: завод построить рядом с городом, сообщившим наименьший ущерб.

Правило платежей: Город рядом с которым строят завод должен получить компенсацию в размере минимума ущербов остальных городов. Остальные города ничего не платят и не получают.

Автоматически получаем, что механизм VCG требует вливания средств извне. так как компенсация равна не самому маленькому ущербу, а ущербу второму по малости, то: компенсация всегда больше ущерба.

Функция плотности: $p(y) = n \cdot 1 \cdot (n-1)y(1-y)^{n-2}$.

Средняя компесация равна (для взятия интеграла можно сделать замену $z = 1 - y$):

$$\mathbb{E}(K) = \int_0^1 y \cdot n(n-1)y(1-y)^{n-2}dy = \frac{2}{n+1} \qquad (127.1)$$

4. Кнопочный аукцион и три игрока. Ценности V_1, V_2 и V_3 равномерны на $[0;1]$ и независимы. Первый и второй игрок знают значение своих ценностей, то есть $X_1 = V_1$ и $X_2 = V_2$. А третий игрок — не знает значения своей ценности, а знает только закон распределения.

   (a) Что собой представляют стратегии игроков в этом случае? Почему их можно упростить?

   (b) Найдите равновесие Нэша

   Поскольку третий игрок ничего не знает, а только видит, сколько игроков осталось в игре, то его стратегия описывается двумя числами, b_3^3 и b_3^2. Эти числа говорят, до какой цены давить кнопку, если в игре осталось три и два игрока.

   Стратегия первого игрока описывается тремя функциями: $b_1^3(x)$ — до какой цены давить кнопку, если в игре три игрока, $b_1^{2a}(x,p)$ — до какой цены давить кнопку, если в игре двое: я и второй; $b_1^{2b}(x,p)$ — до какой цены давить кнопку, если в игре двое: я и третий. Стратегия второго игрока имеет такой же вид.

   Поскольку ценности независимы, то никакой полезной информации от наблюдения за ценами выхода других игроков мы не получаем. Следовательно, стратегию третьего игрока можно заменить одним числом b_3, а стратегию первого — одной функцией $b_1(x)$.

Получаем аукцион второй цены. Игроки ориентируются на ожидаемый выигрыш. Поэтому с точки зрения третьего игрока его ценность равна 0.5. то есть равновесие Нэша имеет вид $b_3 = 0.5$; $b_1(x) = x$; $b_2(x) = x$.

4.9. Догонялка

Тем, кто по уважительной причине пропустил какую-либо из контрольных, предлагается догонялка:

1. Кнопка «Buy now!»

   Два игрока торгуются за товар на кнопочном аукционе с возможностью немедленной покупки товара. Ценности $X_i = V_i$ независимы и равномерны на $[0; 1]$. Каждый игрок знает свою ценность X_i. Продавец дает игрокам возможность купить товар немедленно по фиксированной цене a. Подробнее. В начале аукциона текущая цена равна нулю и оба игрока жмут на свои кнопки. Текущая цена растет с течением времени. Кто первый отпустил свою кнопку, тот проиграл. В этот момент аукцион заканчивается и победитель получает товар по текущей цене. Но в любой момент пока аукцион не закончился, любой игрок может сказать: «Покупаю по цене a». В этом случае ему достаётся товар по цене a и аукцион заканчивается.

   (a) Что является стратегией игрока на этом аукционе?

   (b) Найдите равновесие Нэша

   (c) Изменится ли ожидаемый доход продавца, если аукцион будет проводится по обычным правилам аукциона второй цены? Применима ли теорема об одинаковой доходности?

2. Есть шесть покупателей. У продавца две чудо-швабры. Каждый покупатель хочет только одну чудо-швабру. Продавец решил продавать эти две чудо швабры путем двух последовательных аукционов первой цены, на каждом из которых будет выставляться одна чудо-швабра. Каждый игрок знает ценность чудо-швабры для себя, $X_i = V_i$. Ценности независимы и равномерны на $[0; 1]$. Ценности не меняются со временем. Когда проводится второй аукцион известна только ставка, которую сделал победитель первого.

   (a) Что является стратегией игрока в этой игре?

   (b) Найдите равновесие Нэша

   (c) Верно ли, что средние цены на обоих аукционах равны?

(d) Какова вероятность того, что на первом аукционе цена будет больше, чем на втором?

(e) Изменится ли ожидаемый доход продавца, если чудо-швабры будут продаваться на двух последовательных аукционах второй цены? Применима ли в данном случае теорема об одинаковой доходности или её небольшая вариация?

3. В моделях аукциона первой и второй цены с независимыми, равномерными на $[0;1]$ ценностями покупателей сравните дисперсию выигрыша продавца.

4. Может ли цена расти с ростом предложения?

Рассмотрим кнопочный аукцион, в котором участвуют три игрока. Продавец продает две одинаковых чудо-швабры. Каждому игроку нужна только одна чудо-швабра. Ценность чудо-швабры для всех игроков одинакова и равна $V = X_1 + X_2 + X_3$. Каждый из игроков знает только своё X_i. Сигналы X_i независимы и имеют регулярное распределение $F(t)$ на отрезке $[0;1]$. Чудо-швабры по одной достаются тем игрокам, кто отпустил кнопку позже всех. При этом платят они за неё цену, на которой отпустил кнопку самый слабый игрок.

(a) Найдите равновесие Нэша

(b) Найдите равновесие Нэша в случае когда продаётся всего одна чудо-швабра

(c) Существует ли пример распределения $F(t)$ при котором средняя цена чудо-швабры в случае двух чудо-швабр выше, чем в случае одной чудо-швабры?

Количество чудо-швабр обозначим буквой k.

$k = 1$: $b^3(x) = 3x$, $b^2(x, p_3) = 2x + p/3$

$k = 2$. Поскольку аукцион заканчивается при выходе первого игрока, то стратегия определяется функцией $b^3(x)$.

Поскольку мы такой аукцион не решали, то используем стандартный подход с максимизацией прибыли:

$$E(Profit_1|X_1 = x, Bid_1 := b_1) = E((X_1+X_2+X_3-b(Y_2))1_{b_1>b(Y_2)}|X_1 = x, Bid_1 := \tag{129.1}$$

Чудо-замена $b_1 = b(a)$ и независимость X_i дают нам:

$$\pi_1(x, b(a)) = E((x+X_2+X_3)-b(Y_2))1_{a>Y_2}) = xP(Y_2 < a)+2E(X_2\cdot 1_{Y_2<a})-E(b(Y_2)\cdot 1 \tag{129.2}$$

Сосредоточимся на $E(X_2 \cdot 1_{Y_2<a})$:

$$E(X_2 \cdot 1_{Y_2<a}) = E(X_2 \cdot 1_{X_2 \wedge X_3 < a}) = E(X_2 \cdot 1_{X_2<a} \cdot 1_{X_2<X_3}) + E(X_2 \cdot 1_{X_3<a} \cdot 1_{X_3<X_2}) \tag{129.3}$$

5. Может ли цена расти с падением спроса?

   Рассмотрим кнопочный аукцион, в котором хотят участвовать три игрока. Продается одна чудо-швабра. Ценность чудо-швабры для всех игроков одинакова и равна $V = X_1 + X_2 + X_3$. Каждый из трёх потенциальных игроков знает только своё X_i. Сигналы X_i независимы и имеют регулярное распределение $F(t)$ на отрезке $[0; 1]$. Перед началом аукциона продавец случайным образом выбирает одного игрока и говорит: «Ты мне не нравишься, поэтому ты в аукционе не участвуешь». Оставшиеся двое участвуют в аукционе.

   (a) Найдите равновесие Нэша

   (b) Существует ли пример распределения $F(t)$ при котором средняя цена в случае удаления одного из игроков выше, чем в случае когда участвуют все трое желающих?

   Hint: Задача 7 из лекции 3

4.10. Прочие задачи

Осторожно! Эти задачи не проверялись на наличие приличного решения.

1. Сформулируйте и докажите вариант теоремы об одинаковой доходности для следующего случая. Ценности независимы. Каждый игрок знает свою ценность. Распределение ценностей регулярное. На торги выставлены $k < n$ одинаковых товаров. Каждый из игроков хочет только одну единицу товара.

2. Три игрока. Ценности V_1, V_2 и V_3 равномерны на $[0; 1]$ и независимы. Первый и второй игрок знают значение своих ценностей, то есть $X_1 = V_1$ и $X_2 = V_2$. А третий игрок ничего не знает!

   Найдите равновесие Нэша на аукционе первой, второй цены и на кнопочном аукциоен.

3. Два игрока. Ценности независимы имеют экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 1$. Сигналы совпадают с ценностями, $X_i = V_i$. Найдите равновесие Нэша на аукционе первой цены.

4. Аукцион «Все платят среднюю ставку». Покупатели одновременно делают ставки. Товар достаётся тому, кто назвал наибольшую ставку, но платят все игроки. Все игроки платят среднюю суммы ставок. Ценности товара для покупателей имеют независимое регулярное распределение с функцией распределения $F()$. Найдите оптимальные стратегии игроков, $b(x)$, средний доход продавца.

5. Сравнение правовых систем.

   Две стороны судятся по спорному вопросу. Выиграет та сторона, которая потратит больше денег на адвокатов. Не считая расходов на адвокатов, для каждой стороны победа в суде приносит выгоду X_i. Мы предполагаем, что X_i независимы и равномерны на $[0; 1]$. Предполагаем, что узнав своё X_i, каждая сторона решает сколько потратить на адвоката.

   Далее мы несколько упрощенно изложим три системы. В американской системе каждая сторона сама оплачивает издержки на адвоката независимо от исхода дела. В европейской системе проигравшая сторона платит все расходы (или фиксированный процент) выигравшей стороны. В системе предложенной Джеймсом Куэйлом (James Quayle, вице-президент США при Буше) проигравшая выплачивает выигравшей стороне сумму равную своим расходам.

   (a) Найдите равновесие Нэша в американской системе

   (b) Найдите равновесие Нэша в европейской системе

   (c) Найдите равновесие Нэша в систему Куэйла

   (d) Сравните ожидаемые расходы на адвокатов в разных системах

6. Кнопочный аукцион, 4 игрока, ценность товара для всех одинакова и равна

$$V = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 \tag{131.1}$$

   Каждый игрок знает своё X_i. Величины X_i одинаково распределены и имеют некую совместную функцию плотности.

   Найдите равновесие Нэша.

   Автор: Руслан Дурдыев

   Решение:

$$\begin{cases} b^4(x) = 4x^2 \\ b^3(x, p_4) = 3x^2 + p_4/4 \\ b^2(x, p_3, p_4) = 2x^2 + p_3/3 - p_4/4 \end{cases} \tag{131.2}$$

7. Каждый игрок знает ценность товара для себя, $V_i = X_i$. Ценности X_i независимы и равномерны на $[0,5;1,5]$. Опишите правила аукциона, равновесие Нэша в котором является решением уравнения Бернулли, то есть уравнения вида:
$$b'(x) + a(x)b(x) = c(x)b^n(x) \tag{132.1}$$

   Автор: Руслан Дурдыев

   Решение: Аукцион может, например, проходить по правилам: побеждает тот, кто сделает самую высокую ставку. Победитель платит квадрат своей ставки.

$$b'(x) + \frac{n-1}{2x}b(x) = \frac{n-1}{2}\frac{1}{b(x)} \tag{132.2}$$

   Решение уравнения, естественно, $b(x) = \sqrt{\frac{n-1}{n}x}$

8. На аукционе второй цены продаётся товар ценностью V – единой для всех покупателей, V распределено равномерно на $[1;2]$. Покупатели получают сигналы $X_i = V + R_i$, где ошибки оценивания R_i независимы и равномерны на $[-0.5;0.5]$.

   Товар достаётся тому, кто сделает наибольшую ставку, а платит он наибольшую из невыигравших ставок.

   (a) Найдите равновесие Нэша и ожидаемую выручку продавца.

   (b) Пусть есть независимый бесплатный эксперт, к которому может обратиться любой участник. Если игрок обращается к эксперту, то после этого его сигнал равен $X_i = V + aR_i$, где R_i независимы и равномерны на $[-0.5;0.5]$. Величина $a < 1$ – параметр, характеризующуй точность эксперта: чем меньше a, тем точнее эксперт.

   Игра проходит теперь в два этапа: на первом этапе игроки независимо друг от друга решают, обращаться ли им за советом к эксперту. На втором этапе проходит аукцион второй цены. Ни один игрок не знает, обращались ли другие игроки за советом к эксперту.

      i. Найдите равновесие Нэша, ожидаемую выручку продавца

      ii. Как изменится ответ, если за совет эксперт взимает плату d? Найдите ожидаемую выручку эксперта. Какое значение d максимизирует выручку эксперта при заданном a?

      iii. Что происходит в случае $a = 0$, то есть эксперт сообщает точное значение V желающим?

(c) Продавец хочет подкупить эксперта. Игроки не знают о подкупе. Сколько готов заплатить продавец эксперту за смещение сигнала, равное m? то есть игра снова проходит в два этапа, на первом этапе игроки выбирают, обращаться ли к экспреcту. Если игрок обращается к эксперту, то его сигнал будет равен $X_i = V + m + aR_i$, но игрок будет думать, что это $X_i = V + aR_i$. На втором этапе проводится аукцион второй цены.

(d) Если это все хорошо решается, то предложите и решите игру со стратегическим подкупом.

Обработка задачи, предложенной Николаем Ивановым

9. Обобщите правила кнопочного аукциона на случай продажи k одинаковых чудо-швабр в ситуации, когда каждому игроку нужно не больше одной чудо-швабры.

10. У Васи пять потенциальных невест. Каждая из них выбирает свой уровень усилий, который она прикладывает для выхода замуж за Васю. Приложившая наибольшее количество усилий получает Васю замуж. Замужество приносит невесте полезность X_i, величины X_i равномерны на $[0; 1]$ и независимы. Быть второй – самое худшее, что может быть! Вторая по усилиям претендентка страдает от зависти к первой в размере $(-X_i)$.

Найдите равновесие Нэша.

Обработка задачи, предложенной Марией Алиевой

Цитата: «Из пяти невест выбираются две с самыми большими придаными...»

11. На аукционе с двумя покупателями продаётся машина. Машина с вероятностью p окажется хорошей, а с вероятностью $1 - p$ – не очень. До покупки понять, какая она, игроки не могут. Каждый игрок знает свой сигнал X_i, сигналы независимы и равномерны на $[0; 1]$. Ценности определяются по формуле:

$$V_i = R \cdot X_i \tag{133.1}$$

Где R равна 2 с вероятностью p и 1 с вероятностью $1 - p$.

Найдите:

(a) $g(x, y)$, $R(y|x)$, $v(x, y)$

(b) Равновесие Нэша на аукционе первой цены, второй цены и на кнопочном аукционе

Обработка задачи, предложенной Вячеславом Савицким

Решение: $b^{FP}(x) = \frac{p+1}{2}x$, $b^{SP}(x) = (p+1)x$

Предметный указатель

Литература