

Заметки к семинарам по комплексному анализу

https://github.com/bdemeshev/complan_pro

3 июля 2024 г.

Содержание

1	Графики	3
2	Геометрия	3
3	Первые функции	3
4	Решения	4
	Хэштэги	4
	Источники мудрости	4

1. Графики

1.1 Нарисуйте множества

а) $|z - 1| = 3$;

б) $|z - 1| + |z + 1| = 4$;

в) $|z - 1| - |z + 1| = 1$;

г)

2. Геометрия

Эти задачи можно легко решить с помощью комплексных чисел.

2.1 Рассмотрим произвольный треугольник $\triangle ABC$. На сторонах AB и BC отложены два квадрата, $ABDE$ и $BCFG$. Центры этих квадратов соединены отрезком. На середине отрезка отмечена точка P .

Где может быть расположена точка P в зависимости от расположения точки B исходного треугольника?

2.2 Теорема Наполена. Рассмотрим произвольный треугольник $\triangle ABC$. На сторонах треугольника отложены три равносторонних треугольника. Центры этих трёх треугольников попарно соединены.

Чему равны углы получившегося треугольника?

2.3 Рассмотрим произвольный выпуклый четырёхугольник $ABCD$. На его сторонах отложены четыре квадрата. Центры противолежащих квадратов соединены отрезками.

а) Под каким углом расположены эти отрезки?

б) Как связаны между собой длины этих отрезков?

2.4 На единичной окружности на равных расстояниях расставлены n точек. Одна из точек соединена со всеми остальными.

Чему равно произведение длин полученных отрезков?

3. Первые функции

Под записью $\log z$ мы подразумеваем все значения логарифма, а под записью $\text{Log } z$ — главное значение логарифма.

3.1 Упростите $\exp(\log z)$ и $\log(\exp(z))$.

4. Решения

1.1.

- а) окружность;
- б) эллипс;
- в) ветвь гиперболы;
- г)

2.1. Расположение точки P не зависит от расположения точки B .

2.2. 60°

2.3. Отрезки пересекаются под прямым углом, а их длины равны.

2.4. Обозначим единичные корни с помощью $z_0 = 1, z_1, \dots, z_{n-1}$. Нам нужно найти значение:

$$(z_0 - z_1)(z_0 - z_2) \dots (z_0 - z_{n-1}).$$

Вместо z_0 рассмотрим произвольную точку z :

$$(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{n-1}) = \frac{(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{n-1})}{z - z_0} = \frac{z^n - 1}{z - 1} = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$$

Остаётся устремить $z \rightarrow z_0 = 1$ и получить, что

$$(z_0 - z_1)(z_0 - z_2) \dots (z_0 - z_{n-1}) = n$$

3.1. $\exp(\log z) = z, \log(\exp(z)) = z + 2\pi i$.