Национальный исследовательский Университет

Высшая Школа Экономики

Факультет Экономики

Профиль специальных дисциплин “Математические методы анализа экономики”

Кафедра математической экономики и эконометрики

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

“Анализ сговора участников аукциона в закрытых аукционах первой цены”

Выполнил

Студент группы № 41ММАЭ

Пузанов А.С.

Научный руководитель

Демешев Б.Б

Москва 2011

Оглавление

Введение

Аукционы – одна из самых популярных форм торговли с древних времен. Его роль для аукциониста (проводящего аукцион) – поиск покупателя, готового отдать максимальную цену за предмет торга. Интерес к аукционам в экономике заключается в возможности эффективного распределения ресурсов, когда объект продажи получает участник аукциона, для которого он наиболее ценен, то есть в поиске Парето-оптимального решения.

В мире существует множество типов аукционов с разным числом участников, правилами платежа, типами торгуемых товаров и механзмами торга. Все эти опции специфичны, и зависят от области применения и направлены на решение проблемы максимизации прибыли аукциониста. Они могут зависеть как от специфики товара, так и уязвимостей системы торговли для различных видов мошенничеств и обманов, как со стороны участников аукциона, так и самого аукциониста.

История мошенничеств на аукционах имеет не менее древнюю историю, чем сама история аукционов. Внутренние заговоры с суммированием ставок и последующей перепродажей, фальшивые участники в аукционах с открытыми ставками(известной всем участникам ставке конкретного игрока), мошенничество с товаром на интернет-аукционах и многое другое.

Данная работа посвящена анализу закрытого аукциона первой цены, с возможностью организации заговора участниками аукциона и возможностью контроля со стороны аукциониста. Актуальность работы заключается в том, что в отличии от большинства работ в области заговоров эта направлена на анализ ситуации, в которой товар (или выигрыш от победы на аукционе) могут быть разделены в любом желаемом виде.

В реальных случаях бесконечной делимости речь может идти либо о некотором товаре, который продается на аукционах исключительно партиями, и не отличается большими издержками на передачу другим покупателям в разделённом виде, либо речь может идти о перераспределении полученного выигрыша в последующих товарно-денежных потоках. В таком случае речь может идти либо о рынках с субъективными ценностями покупателей, либо о рынках с очень низкими издержками на перераспределение торгуемого товара, либо о рынках, где легко скрываются денежные потоки. Таким образом речь скорее всего идет о рынках искусства, или рынках с большими корпорациями, где транзакции могут быть скрыты в общем потоке средств . Рынки с низкими затратами на перераспределение торгуемого товара – явление довольно специфичное, в пример можно привести вычислительные мощности облачных сервисов.

В данной работе мы пытаемся показать, что существует такие внутренние значения вероятности обнаружения заговора с равным или пропорциональным (ценности) распределением выигрыша между всеми участниками заговора, где достигается максимальный ожидаемый платёж аукционисту. Работа состоит из 3 частей :

1) Анализ стратегии заговора в случае его существования
2) Анализ поведения заговорщиков при введении вероятности обнаружения
3) Вычисление ожидаемого платежа и поиск оптимальной стратегии аукциониста для различных случаев поведения игроков вне заговора.

Обзор литературы

Литература по теме аукционов довольно обширна. Данная работа во многих своих базовых предпосылках оприается на классическую работу W. Vickrey, "Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders"(1961).

Непосредственно тема обмана на аукционах рассмотрена в довольно большом количестве работ. В частности эмпирические свидетельства сговоров в английских аукционах представлены в работе Owen R. Phillips, Dale J. Menkhaus and Kalyn T. Coatney(2003) и Psendorfer(1995). Второая в частности утверждает, что более половины дел которые закончились обвинительным приговором в Антитрестовом департаменте суда были именно случаями мошенничеств со ставками на аукционах.

Большая часть работ является всё же модельно-ориентированной, в силу того что свидетельств мошенничеств на аукционах достатточно много в любой сфере.

Одним из классических исследований теоретических моделей является Daniel A. Graham; Robert C. Marshall (1987), посвященная сговору игроков на аукционах второй цены и английских аукционах. Из недавних исследований на тему английского аукциона хотелось бы упомянуть “Collusion via Resale” by Rodney J. Garratt, Thomas Tröger and Charles Z. Zheng (2009) , где представлена модель перепродажи для английского аукциона.

Большая часть работ о мошенничествах на аукционах посвящена аукционам второй цены и английским аукционам, вследствие их более высокой уязвимости для сговоров и обманов самим аукционистом (с помощью подставных участников или иных форм обмана).

Наиболее близки к теме работы “Collusion and the Choice of Auction” by Marc S. Robinson (1985) и “Comparing Competition and Collusion: A Numerical Approach” by Patrick Bajari (2000). Они посвящены сговорам, где аукционист ведет себя аналогично честному “public marketing agency” , из Нобелевской работы W.Vickery

Предпосылки модели

1) Число участников ограниченно и неизменно
2) Максимальное число участников сговора – равно числу участников аукциона, то есть достижима монополия (точнее монопсония, но мы далее будем называть её монополией) .
3) ценности участников распределены одинаково и независимо, равномерно от 0 до 1.
4) игрокам известна их собственная ценность, и распределение ценностей других игроков.
5) заговор организуется любым возможным в любом желаемом всеми участниками случае. Т.е. если всем участникам выгодна только монополия и никакая другая форма заговора, то эта монополия все равно будет достигнута.
6) в качестве сигнала о своей ценности заговор может посылать только количество участников внутри себя.
7) сокрытие информации о своей ценности внутри заговора – невозможно.
8) Более одного сговора существовать не может. Эта предпосылка является неважной на первом этапе работы, однако становится важной на этапах с введением штрафа, в силу недоказанности гипотезы для пропорционального распределения.
9) Выигрыш может делиться любым оговоренным участниками сговора образом.
10) Игроки в заговоре не могут суммировать ставки. Всё что они могут – делить выигрыш от ценности и ставки кого-то из заговора.
11) В построенной нами модели, заговорщики отклоняются только с учётом оптимальной стратегии честных игроков. У игроков есть выбор – играть честно, или в заговоре. В конце работы мы проверяем также случай, когда честные игроки узнают о заговоре и

могут изменять свою стратегию, не вступая в заговор и не зная о его стратегии. Мы считаем что заговорщики не реагируют на такое их изменение стратегии.

Последствия 11) предпосылки следующее – мы получаем игру, где игроки играют в разные игры (честные не знают о заговоре, а заговор не знает о нечестных игроках вне заговора (вводится в конце работы)). Так что ситуация а работе является равновесием именно в силу разных игр ,в которые играют её участники.

Построение модели

Введем обозначения :

N- количество участников аукциона

k-количество дополнительных участников сговора которое рассмартивает участник аукциона.

x_i – ценность торгуемого на аукционе товара для i-го участника аукциона.

$b(x_i)$ – стратегия честного игрока в зависимости от его ценности

$z(x_i)$ – стратегия игрока участвующего в заговоре, в случае если именно его ценность среди участников заговора окажется максимальной. В случае если она не максимальна – он просто получает долю от выигрыша.

W_i – Выигрыш $i -$ го участника аукциона. Определяется как разница между ценностью товара для участника аукциона и его ставкой.

U – Выигрыш аукциониста.

m- Степень переговорной силы в которую возводиться ценность игрока в общей суммы ценностей иных участников заговора (требуется для пропорционального разделения выигрыша).

h-количество честных игроков (требуется в конце работы, для анализа поведения игроков вне заговора)

Оптимальная стратегия для заговора.

1) для равного распределения прибыли между всеми участниками заговора

Будем считать, что участники аукциона и аукционист максимизируют свой ожидаемый выигрыш.

Отсортируем всех участников на две группы .участники под номерами от 1 до $(i-1)$ – честные[1] , от $i+1$ до N – заговорщики. $i-$ый игрок $-$ потенциальный заговорщик с ценностью x_i.

Согласно предпосылке 9) выигрыш делится между всеми участниками заговора.

Рассмотрим случай когда он делится <u>поровну</u>: для потенциального участника заговора с ценностью x_i, для заговора (количеством k +1 вместе с потенциальным участником) с максимальной ценностью среди участников заговора у потенциального участника (то есть он рассматривает случай, когда именно его ценность оказывается максимальной, что является очевидно всегда выполнимым сценарием[2].Наша цель в данной работе проанализировать именно гарантированный случай выигрыша в заговоре для

---

[1]Равновесная стратегия честных игроков в закрытых аукционах первой цены с ценностью ϵ $(0,1)$: $\frac{N-1}{N}x$, где x ценность индивидуального игрока. Доказательство- см. ссылку в сноске 2, или в Vickrey, "Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders"(1961) а также любом учебнике по аукционам

[2] Так же есть следующее замечание: далее мы часто используем $X -$ ценность игрока в доказательствах, хотя игрок явно будет ожидать возможности повышения полезности в заговоре (ожидание максимального значения из k участников с ценностью распределённой от 0 до 1 очевидно равно $\frac{\mathrm{k}-1}{\mathrm{k}}$. В случае когда это значение будет превышать ценность игрока, очевидно, он будет учитывать именно его в своих ожиданиях выигрыша. В случае же когда это значение меньше ценности игрока, он учитывает именно свою собственную ценность.
В любом случае, если доказательство выгодности заговора работает для ценности самого игрока, то оно работает и для потенциального улучшения , так как все получившиеся функции положительно зависят от ценности, определяющей выигрыш.

участника аукциона) уравнение ожидаемого выигрыша i-го участника будет записываться следующим образом:

$E(W_i) = \frac{1}{k+1}\left(x_i - z(x_i)\right) * P\left(z(x_i) > (b_{a=\overline{1,\imath-1}}(X_a)\right)$, где $z(x_i)$ Неизвестная пока что стратегия ставки заговорщиков зависимости от максимальной ценности игрока с наибольшей ценностью внутри заговора. Учитывая равномерность, стандартность и одинаковость равномерного распределения, а так же независимость распределений ценностей игроков , эта формула может быть записана как

$$E(W_i) = \frac{1}{k+1}\left(x_i - z(x_i)\right) * \left[P\left(z(x_i) > \frac{N-1}{N}x\right)\right]^{N-k-1} \qquad (1)$$

Чтобы найти эту стратегия воспользуемся следующим приемом: мы скажем что пусть ценность игрока это некая константа a, а стратегия задаётся от некой другой переменной x:

$$E(W_i) = \frac{1}{k+1}\left(a - z(x_i)\right) * (P\left(z(x_i) > \frac{N-1}{N}x\right))^{N-n-1} \qquad (2)$$

После всех упрощений получаем:

$$\frac{dE(U)}{dx} = -z'(x_i) * \left(\frac{N}{N-1}z(x_i)\right)^{N-n-1} + \left(a - z(x_i)\right) * \left(\frac{N}{N-1}\right)^{N-k-1} * z(x_i)^{N-k-2}z'(x_i) = 0 \qquad (2.1)$$

Наилучшей стратегия, очевидно, станет в случае, когда $x = a$, то есть когда игрок выбирает стратегию в зависимости от своей истинной ценность. Если предположить положительность $z'(x)$, неравенство нулю $z(x)$, и вышеописанную замену, то можно упростить:

$$-z(x_i) + \left(x_i - z(x_i)\right) * (N - k - 1) = 0 \qquad (3)$$

Тогда чтобы узнать вид функции при упрощении получаем:

$$z(x_i) = \frac{N-k-1}{N-k}x_i \qquad (4)$$

Результат довольно интересный: игроки ходят так как будто остальных игроков в заговоре просто нет в аукционе, без учета того что стратегия честных игроков слегка “плотнее”.

Соответственно ожидаемая функция выигрыша игрока с   приобретает вид:

$$E(x_i) = \frac{1}{k+1}\left(\frac{x_i}{N-k}\right) * \left(\frac{N}{N-1}\frac{N-k-1}{N-k}x_i\right)^{N-k-1} \quad (5)$$

Важно: целью этой части работы является доказать, что сговор выгоден при любой ценности участника аукциона. Очевидно в общем случае достаточно доказать, что для любого x_i выполняется условие о выгодности сговора. И только в случае если этот способ не работает, мы смотрим на максимальную ценность внутри сговора.

2) Для пропорционального разделения (выигрыш делится в соответствии с вкладом в суммарную ценность участников заговора)

Мы считаем, что участники заговора не могут скрывать свою ценность от других участников. Применим рассуждения аналогичные замене в уравнении (2) про замену. Ожидаемый выигрыш i-го игрока присоединяющегося к заговору из k участников:

$$E(W_i) = E\left(\frac{x_i}{\sum_{a=i+1}^{N} x_a + x_i}\right) * \left[\left(x_i - z(x_i)\right) * P\left(z(x_i) > (b_{a=\overline{1,i-1}}(X_a)\right)\right] \quad (6)$$

Такая замена корректна, так как по условию (для самого игрока его ценность известна), их ценности распределены однородно от 0 до 1, независимы, а в левой части и в правой части выражения – находятся ценности разных игроков (игрок не может быть одновременно заговорщиком и честным).

Найдем математическое ожидание доли: сумма случайных независимых равномерно распределенных на отрезке [0,1], т.е. функция плотности

$f(x) = 1$. Все x_i независимы, а ценность самого игрока ему известна так что мат.ожидание доли потенциалньего участника (i-го) заговора с ценностью равной x_iбудет выглядеть следующим образом:

$$\int_0^1 \frac{x_i^m}{kx^m + x_i^m} f(x)dx = \frac{x_i^m \ln\left(1 + \frac{k}{x_i^m}\right)}{k} \qquad (7)$$

Таким образом используя всю ту же замену аналогичную использованную в уравнении (2)

$$E(W_i) = \frac{a^m \ln\left(1+\frac{k}{a^m}\right)}{k} \left(a - z(x_i)\right) * \left(\frac{N}{N-1} z(x_i)\right)^{N-k-1} \qquad (8)$$

$$\frac{dE(W)}{dx} = \frac{a^m \ln\left(1+\frac{k}{a^m}\right)}{k} \left(-z'(x_i) * \left(\frac{N}{N-1} z(x_i)\right)^{N-k-1} + \left(a - z(x_i)\right) * \left(\frac{N}{N-1}\right)^{N-k-1} * z(x_i)^{N-k-2} z'(x_i)=0 \qquad (9)$$

Так как выражение, отвечающее за долю есть константа за скобками – решение по поиску равновесной стратегии то же самое (4)

$$z(x_i) = \frac{N-k-1}{N-k} x_i \quad \rightarrow \; E(W_i) = \frac{x_i \ln\left(1+\frac{k}{x_i}\right)}{k} \left(\frac{x_i}{N-k}\right) \left(\frac{N}{N-1} \frac{N-k-1}{N-k} x_i\right)^{N-k-1} (10)=$$

В конце выводов этих стратегий хотелось бы ещё раз напомнить, что в уравнениях заговора ценность в стратегии для игрока не обязательно равна его ценности, и в случаях, когда ожидаемая максимальная ценность внутри заговора больше ценности игрока, уже она определяет вероятность выигрыша. Мы же определяли поведение самого заговора для случая когда его максимальная ценность равна одновременно его участника с максимальной ценностью, что эквивалентно, так как участники внутри заговора не могут отклоняться. Ещё раз подчеркнём: мы не ищем ожидаемый выигрыш в случае заговора, мы смотрим на его гарантированный (потенциальный заговорщик знает свою ценность) ожидаемый выигрыш.[3] Доказательство в такой форме нам необходимо, чтобы доказать выгодность заговора для любого (меньше и больше ожидаемой максимальной ценности внтури заговора) x_i.

Доказательства превосходства монополии.

Функции имеют довольно сложный вид, и найти оптимальное количество заговорщиков аналитически может быть довольно сложно. Однако мы можем показать что монополия даёт наибольший выигрыш из всех возможных в заговоре, а потом показать что эта монополия так же выгоднее честной стратегии при определенных значениях ценности.

Итак:

1)для случая равного деления выигрыша

а) Требуется доказать превосходство монополии надо остальными вариантами заговора

из (5) Очевидно следует что при $k = N - 1$, гарантированный ожидаемый выигрыш участника с максимальной ценность среди всех участников – x_i аукциона равен $\frac{x_i}{N}$.

$$\frac{x_i}{\mathrm{N}} > \frac{1}{\mathrm{k}+1}\left(\frac{x_i}{\mathrm{N}-\mathrm{k}}\right)\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}-1}\frac{\mathrm{N}-\mathrm{k}-1}{\mathrm{N}-\mathrm{k}}\ x_i\right)^{\mathrm{N}-\mathrm{k}-1} \quad (11)$$

Так как 0<x<1 , достаточно будет доказать, что

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}-1}\frac{\mathrm{N}-\mathrm{k}-1}{\mathrm{N}-\mathrm{k}} < 1 \\ (\mathrm{k}+1)(\mathrm{N}-\mathrm{k}) > \mathrm{N} \end{cases} \quad (12)$$

Доказательство верхнего неравенства сводится к:

[3] Под гарантированным ожидаемым выигрышем мы понимаем ту минимальную ценность, которая будет определять общий выигрыш заговора.

$N(N-k-1) < (N-1)(N-k)$ (13)

Упрощая: $N^2 - Nk - N < N^2 - Nk - N + k \rightarrow k > 0$.

Доказательство нижнего неравенства:

$(k+1)(N-k) > N \rightarrow k(N-k-1) > 0$

т. к. $k > 0$ по условию, остается условие $N > k+1$.Оно верно для всех случаев кроме монополии, что и требовалось доказать.

а.1)Заметим, что так как $x \epsilon (0,1)$, то очевидно $E(x_i) > E(x_i^{N-k})$, и учитывая (12) и (13) мы получим что в случае когда ожидаемая максимальная ценность в заговоре у участника выше его ценности, условие превосходства монополии над остальным видами заговора сохраняется (1

b) Доказательство превосходства равного деления над честной стратегией:

Для i-го игрока гарантированный (так как монополия) выигрыш в случае монополии всегда больше ожидаемого выигрыша для честной стратегии.

$$\frac{x_i}{N} > \frac{{x_i}^N}{N}$$

Очевидно, выполняется для всех 0<x<1.

2) Доказательство для случая пропорционального деления(общий случай):

Доказательство превосходства монополии над остальными видами заговора

Как показано в (7) доля игрока определяется как $\frac{{x_i}^m \ln\left(1+\frac{k}{{x_i}^m}\right)}{k}$

Аналогично подставляя $k = N - 1$ в (10) мы получим гарантированный ожидаемый выигрыш игрока $\frac{x_i{}^m \ln\left(1+\frac{\mathrm{N}-1}{x_i{}^m}\right)}{\mathrm{N}-1}\ x_i$

Тогда нам надо показать что следующее равенство выполняется для любых k<N-1:

$$\frac{x_i{}^m \ln\left(1+\frac{\mathrm{N}-1}{x_i{}^m}\right)}{\mathrm{N}-1}\ x_i > \frac{x_i{}^{\mathrm{m}} \ln\left(1+\frac{\mathrm{k}}{x_i{}^{\mathrm{m}}}\right)}{\mathrm{k}}\left(\frac{x_i}{\mathrm{N}-\mathrm{k}}\right)\ \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}-1}\frac{\mathrm{N}-\mathrm{k}-1}{\mathrm{N}-\mathrm{k}}x_i\right)^{\mathrm{N}-\mathrm{k}-1} \qquad (14)$$

Как показано в (14) и (15) выражение под степенью всегда меньше 1, а так как k<N-1 , то значение логарифма в левой части неравенства также больше.

Таким образом, остаётся доказать, что

$$\mathrm{N} - 1 < \mathrm{k}(\mathrm{N} - \mathrm{k})$$

$$\text{или} - \mathrm{k}^2 + \mathrm{kN} - 1 + \mathrm{n} > 0$$

Это парабола относительно k, и выполняется это неравенство для всех

$\mathrm{k} \in \left(\frac{1}{2}(\mathrm{N} - \sqrt{\mathrm{N}^2 + 4\mathrm{N} - 4}\ );\frac{1}{2}(\sqrt{\mathrm{N}^2 + 4\mathrm{N} - 4} + \mathrm{N}\right)$. Для любого N>1верхняя граница будет больше N а нижняя меньше нуля., т.е. наше равенство выполняется для всех k<N, что удовлетворяет исходному условию о k+1<N.

Вариант, где $E(x_{i=1,k}^{max})$>x_i доказывается аналогично пункту **a.1)** для случая равного распределения выигрыша.

b) Превосходство пропорционального деления над честной стратегией:

$$\frac{x_i{}^{\mathrm{m}} \ln\left(1+\frac{\mathrm{N}-1}{x_i{}^{\mathrm{m}}}\right)}{\mathrm{N}-1}x_i > \frac{x_i{}^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}}$$

$$x_i < \sqrt[\mathrm{N}-\mathrm{m}-1]{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}-1}\ln\left(\frac{\mathrm{N}-1}{x_i{}^{\mathrm{m}}} + 1\right)} \qquad (15)$$

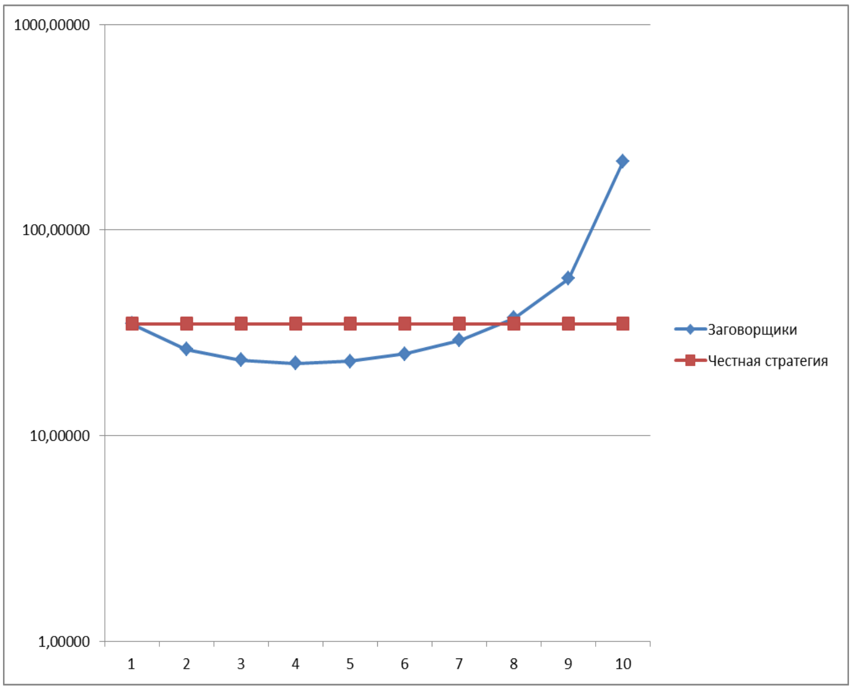
Очевидно, подкоренное выражение в правой части больше 1 для любого $N \geq 2$, и $m \epsilon [0, \mathrm{N} - 1)$, и так как $\mathrm{x} \epsilon (0,1)$, это неравенство будет выполняться всегда. Следует заметить, что если требования к N и x вполне понятны, требования к m обоснованы в несколько меньшей степени. Степень в которой учитывается ценность одного участника в общей сумме, возведенных в m значений ценностей других участников может быть истолкована как некий параметр, определяющий переговорную силу участника в зависимости от его ценности. В целом отрицательное значение m будет обозначать, что чем меньше ценность товара для игрока, тем большую переговорную силу он будет иметь, и тем большую долю выигрыша получит. *В данной работе мы не рассматриваем эти случаи, останавливаясь только на анализе пропорционального деления с m=1 .*

<u>Примеры</u>

Далее приведены несколько примеров значений функции ожидаемого выигрыша (по вертикальной оси) в зависимости от числа заговорщиков (1 заговорщик не считается заговором, по этому 1 на горизонтальной оси соответствует значение честной стратегии) и значения ожидаемого выигрыша для честной стратегии., для удобства их значения приведены в логарифмической шкале, и умножены на 1000.

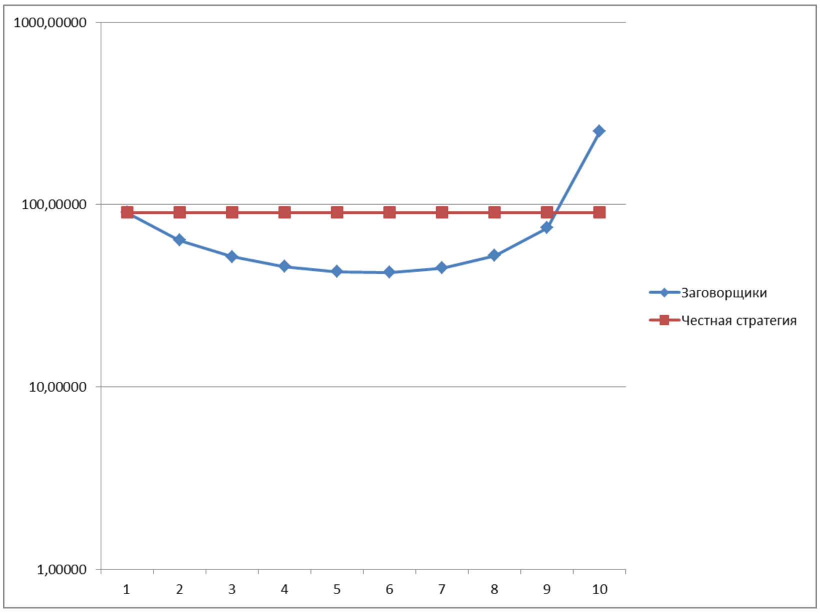
Количество участников	10
Степень переговорной силы	1
Ценность игрока	0,9

График 1



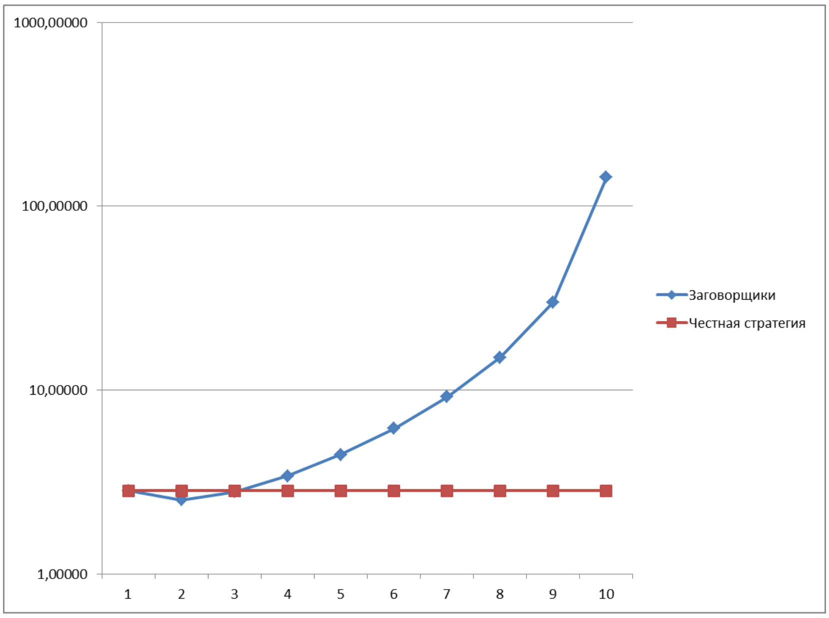
Количество участников	10
Степень переговорной силы	1
Ценность игрока	0,99

График 2



Количество участников	10
Степень переговорной силы	1
Ценность игрока	0,7

График 3



На графиках 1-3 видно, что некоторые игроки находят участие в заговоре выгодным уже при количестве заговорщиков большем 3. Также возможно существование участников аукциона, для которых только чистая монополия выгоднее, чем честная стратегия. Эти игроки будут важны в дальнейшем, когда мы попытаемся найти равновесие с учетом наличия контролирующего аукциониста.

Оптимальная стратегия заговорщиков в ответ на меры аукциониста.

Теперь допустим, что аукционист контроллер способен определённым образом контролировать взаимодействия игроков. Эти меры мы представим в виде t – вероятности обнаружения взаимодействия игроков , когда они организуют заговор. Вероятность обнаружить заговор с k+1 участниками, равна t^k. Будем считать, что в случае обнаружения заговора, участники получают нулевой выигрыш. Предполагается, что участникам заговора точно известно о значении вероятности быть обнаруженными.

Как это повлияет на оптимальную стратегию заговорщиков по ставке при их фиксированном количестве?

а) Для равного распределения выигрыша:

Рассмотрим существует ли такая вероятность быть обнаруженным t, что игрок откажется, и предпочтет честную стратегию? Назовём это ценностью отсечения c

Докажем что если распределение выигрыша равное и при заданной вероятности штрафа монополия для данного конкретного участника невыгодна, то и остальные варианты заговора невыгодны:

$$\frac{c^{n-1}x_i}{N} \leq \frac{{x_i}^N}{N} \rightarrow \text{c} \leq x \qquad (16)$$

Из этого неравенства также видно, что чем больше ценность для игрока, тем большая вероятность успешного сговора является для него неприемлемой.

Тогда для заговора с k участниками должно быть справедливо следующее неравенство:

$$\frac{{x_i}^{k}}{(k+1)}\frac{x_i}{(N-k)}\left(\frac{N}{N-1}\frac{N-k-1}{N-k}x_i\right)^{N-k-1} < \frac{{x_i}^{N}}{N}$$

Выражение в скобках $\left(\frac{N}{N-1}\frac{N-k-1}{N-k}\right)^{N-k-1}$ *очевидно <1 , то есть нам остается показать, что*

$$(k+1)(N-k) > N$$

Это равенство выполняется для всех k<N-1, что и требовалось доказать (Напомним, что k=N-1 это и есть монополия).

Здесь однако мы должны проверить, выполняется ли это условие (невыгодности остальных вариантов заговоров при невыгодности монополии) для ожидаемой максимальной ценности внутри заговора $\frac{c^{n-1}x_i}{N} \leq \frac{{x_i}^{N}}{N}$ *– в этом уравнении x слева вообще говоря не обязательно равен x справа, так как x слева – это максимальная ожидаемая ценность внутри заговора, а x может быть меньше неё.*

Очевидно, ожидаемое максимальное значение x из N-1 участников аукциона $E(x_{n-1}^{max}) = \frac{N-1}{N-2}$, *и тогда доказательства выглядит следующим образом:*

$$\frac{\sqrt[\mathrm{N-1}]{\frac{N-1}{N-2}{x_i}^{\mathrm{N}}}^{\,k}}{k+1}\left(\frac{\mathrm{x}^{max}}{\mathrm{N-k}}\right)\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N-1}}\frac{\mathrm{N-k-1}}{\mathrm{N-k}}\mathrm{x}^{max}\right)^{\mathrm{N-k-1}} < \frac{{x_i}^{N}}{N}$$

Очевидно левая часть неравенства возрастает по x^{max}, *и его максимальное значение (здесь мы пользуемся тем что* $(E(x_{n-1}^{max}) > E\left(x_{k(<n-1)}^{max}\right)$, *и так как*

$$\sqrt[\mathrm{N-1}]{\frac{N-1}{\mathrm{N-2}}}^{\,k}\frac{N}{(N-1)(N-k)}\left({x_i}^{\frac{kN}{N-1}-k}\right)\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N-1}}\frac{\mathrm{N-k-1}}{\mathrm{N-k}}\right)^{\mathrm{N-k-1}} < 1$$

Неравенство очевидно выполняется для всех k. Теперь рассмотрим случай, когда ${x_i}^{N-k} < E(x_{max}^{N-k})$*)*

$$E(x_{max}^{N-k}) = \int_0^1 x^{N-k} * (k-1)x^{k-2}\,dx = \frac{k-1}{N-1}$$

$$\frac{\sqrt[\mathrm{N-1}]{\frac{N-1}{\mathrm{N}-2}{x_i}^{\mathrm{N}}}^{k}}{k+1}\left(\frac{(k-1)/(n-1)}{\mathrm{N-k}}\right)\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}-1}\frac{\mathrm{N-k-1}}{\mathrm{N-k}}\right)^{\mathrm{N-k-1}} < \frac{{x_i}^{N}}{N}$$

$$\sqrt[\mathrm{N-1}]{\frac{N-1}{\mathrm{N}-2}}^{k}\ \frac{N}{(N-1)(N-k)}\frac{(k-1)}{(n-1)}\left({x_i}^{\frac{k}{N-1}}\right)\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}-1}\frac{\mathrm{N-k-1}}{\mathrm{N-k}}\right)^{\mathrm{N-k-1}} < 1$$

Очевидно все дроби левой части <1 , и неравенство выполняется.

b) Далее рассмотрим пропорциональное распределение выигрыша:

Ожидаемый выигрыш участника аукциона:

$$\mathrm{E}(\mathrm{W}_i) = (1-\mathrm{t})^{\mathrm{k}}\frac{x_i \ln\left(1+\frac{\mathrm{k}}{x_i}\right)}{\mathrm{k}}\left(x_i - \mathrm{z}(x_i)\right) * \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}-1}\mathrm{z}(x_i)\right)^{\mathrm{N-k-1}}$$

Используем замену которую применяли в (8):

$$\frac{\mathrm{dE(W)}}{\mathrm{dx}} = (1-\mathrm{t})^{\mathrm{k}}\frac{\mathrm{a}\ln\left(1+\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{a}}\right)}{\mathrm{k}}\left[(-\mathrm{z}'(\mathrm{x}) * \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}-1}\mathrm{z}(\mathrm{x})\right)^{\mathrm{N-k-1}} + (\mathrm{a}-\mathrm{z}(\mathrm{x})) * \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}-1}\right)^{\mathrm{N-k-1}}\mathrm{z}(\mathrm{x})^{\mathrm{N-k-2}}\mathrm{z}'(\mathrm{x}) = 0\right]$$

Так как уравнение которое требуется решить (в квадратных скобках) не меняется относительно(2.1), мы получаем ответ аналогичный полученному ранее:

$$z(x_i\ ) = \frac{\mathrm{N-k-1}}{\mathrm{N-k}} x_i$$

Решение не меняется, так как оптимизируемая функция выигрыша просто помножается на константу.

 Влияет ли введенная переменная на выбор монополии как наилучшего варианта?

Ответ – очевидно, влияет, так как параметр обозначающих вероятность успешной (необнаруженной) организации заговора также зависит от переменной количества заговорщиков.

Проблема возникает в следующем: аналитическое решение этой проблемы почти невозможно, в силу того что в силу того, что вторая производная по k нижеприведённого уравнения заняла бы 3 страницы работы, и анализ такого выражения к сожалению не привел к доказательству определенного поведения функции, так же как и попытка максимизации способом лагранжа.

$$\mathrm{E(W)} = (1-\mathrm{t})^{\mathrm{k}} \frac{x_i \ln\left(1+\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{x}}\right)}{\mathrm{k}} \left(\frac{x_i}{\mathrm{N-k}}\right) \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N-1}} \frac{\mathrm{N-k-1}}{\mathrm{N-k}} x_i\ \right)^{\mathrm{N-k-1}}$$

Иными словами , должно выполнятся следующее неравенство:

$$(1-t)^k \frac{x_i \ln\left(1+\frac{\mathrm{k}}{x_i}\right)}{\mathrm{k}} \left(\frac{x_i}{\mathrm{N-k}}\right) \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N-1}} \frac{\mathrm{N-k-1}}{\mathrm{N-k}} x_i\ \right)^{\mathrm{N-k-1}} \leq \frac{X^N}{N}$$

$$s.t. \quad \frac{(1-t)^{n-1} x_i\ ln\left(\frac{N-1}{a}+1\right)}{\mathrm{N-1}} * x_i\ \leq \frac{{x_i}^{\ N}}{N}$$

При упрощении (второе неравенство мы представляем как равенство, так как нам надо показать, что даже в случае монополии равной по ценности честной стратегии) мы получаем следующее неравенство

$$\sqrt[N-1]{\frac{(N-1){x_i}^{N-2}}{N\ln(\frac{N-1}{x_i}+1)}}^{\,k}\ \frac{x_i\ln\left(1+\frac{\mathrm{k}}{x_i}\right)}{\mathrm{k}}\left(\frac{x_i}{\mathrm{N-k}}\right)\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N-1}}\frac{\mathrm{N-k-1}}{\mathrm{N-k}}x_i\right)^{\mathrm{N-k-1}}\le\frac{{x_i}^{N}}{N}$$

К сожалению доказать это неравенство в рамках данной работы не удалось.

Для решения этой проблемы было решено написать количественную модель, и дискретно распределенными $N, k, x,$ и t , и проверить как ведет себя функция. Были проанализированы Nϵ[2,60] и переменные x и t с шагом в 0,05.

В результате было выведено следующее эмпирическое правило: В случае выгодности заговора, наилучшим ожидаемым выигрышем обладает монополия, а в случае если монополия невыгодна – невыгодны и все остальные варианты заговора (они могут быть и более выгодны относительно самой монополии, но хуже честной стратегии)

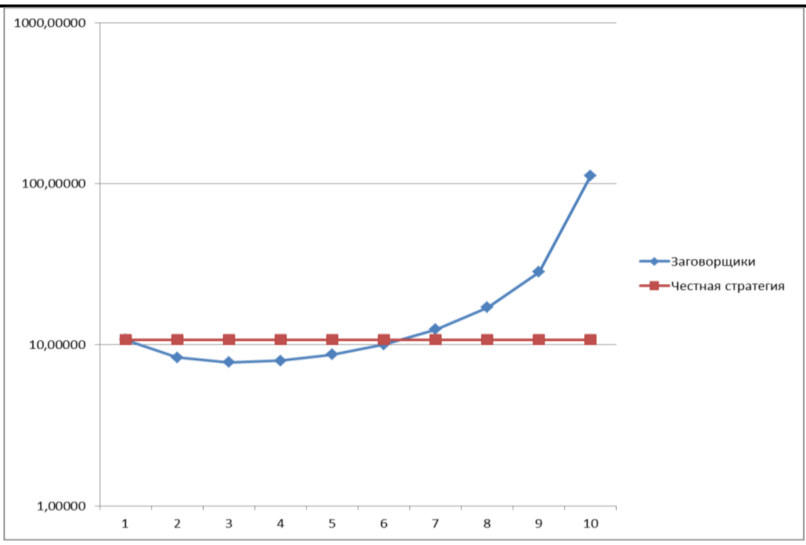
Именно опираясь на эту гипотезу, основанную на количественных оценках, мы в дальнейшем будем основывать рассуждения о действиях участников аукциона в случае пропорционального деления.

Примеры

Приведём пример из модели :

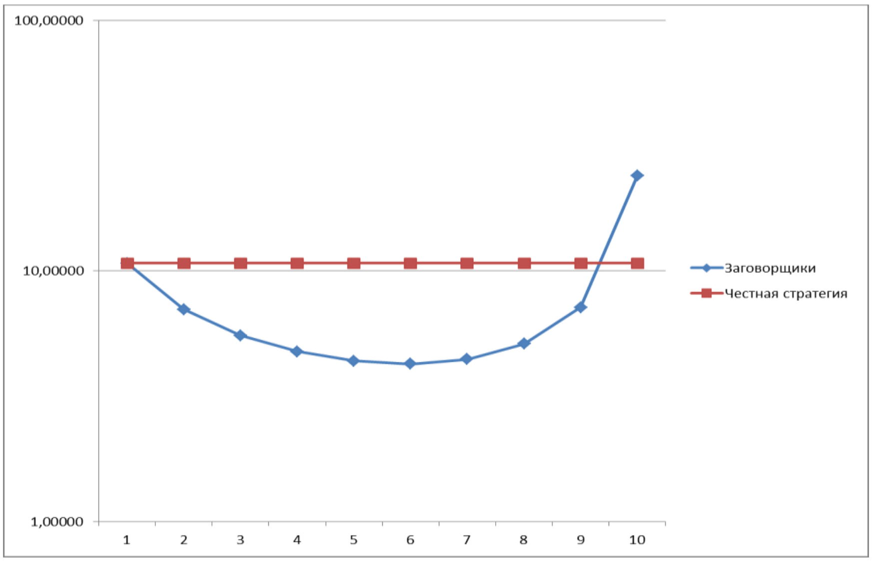
Количество участников	10
Степень	1
Ценность	0,8
Вероятность быть обнаруженным в заговоре	0,05

График 4



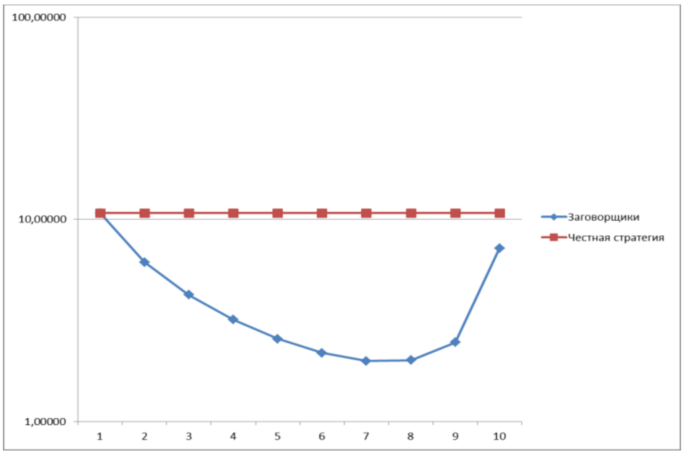
Количество участников	10
Степень переговорной силы	1
Ценность	0,8
Вероятность быть обнаруженным в заговоре	0,2

График 5



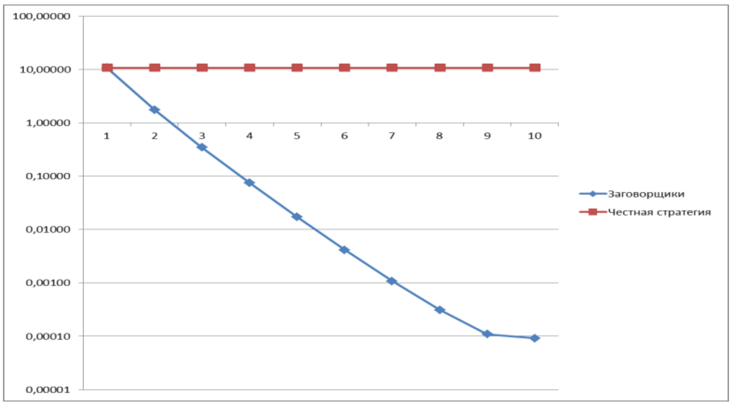
Количество участников	10
Степень переговорной силы	1
Ценность	0,8
Вероятность быть обнаруженным в заговоре	0,3

График 6



Количество участников	10
Степень переговорной силы	1
Ценность	0,8
Вероятность быть обнаруженным в заговоре	0,8

График 7



Как видно из графического анализа графиков 4-7 поведение функции в зависимости от t где t – вероятность обнаружения заговора, может быть разной, однако эмпирическое правило о выгодности заговора работает корректно.

Основываясь на нём мы зададим следующий вопрос: как поведет себя игрок, если для него монополия окажется невыгодной? Итак, имеются следующие факты: внутри уже имеющегося заговора игроки не могут скрывать свою ценность, и о своём количестве они сообщают честно. Условие о невозможности скрыть ценность внутри является предпосылкой. Условие о количестве возникает из стремления к монополии, которая если выгодна, то выгодна для всех, и выгодна наиболее всех остальных вариантов заговора.

$$\frac{(1-\mathrm{t})^{\mathrm{N}-1}\mathrm{c}}{\mathrm{N}-1}\ln\left(\frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{c}}+1\right)\mathrm{c} \le \frac{\mathrm{c}^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}}$$

Назовём c для которого данное неравенство выполняется как равенство *ценностью отсечения.*

Выразим t через c:

$$\mathrm{t} \ge 1-\sqrt[\mathrm{N}-1]{\frac{\mathrm{c}^{\mathrm{N}-2}}{\mathrm{N}}\frac{\mathrm{N}-1}{\ln\left(\frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{c}}+1\right)}} \qquad (16)$$

Рассмотрим поведение производной

$$\frac{\partial}{\partial c}\left(\left(\frac{c^{N-2}\,(N-1)}{N\log\left(\frac{N-1}{c}+1\right)}\right)^{\frac{1}{N-1}}\right) = \frac{N\,c^{1-N}\left(\frac{(N-1)c^{N-2}}{N\log\left(\frac{c+N-1}{c}\right)}\right)^{\frac{N}{N-1}}\left((N-2)\,(c+N-1)\log\left(\frac{c+N-1}{c}\right)+N-1\right)}{(N-1)^2\,(c+N-1)}$$

Очевидно её значение больше 0 при всех N≥ 2, и тогда очевидно $dt/dc\ < 0$.

В свою очередь это означает, что чем больше c, тем меньшее t требуется, чтобы выполнялось неравенство. То есть чем выше аукционист хочет поставить порог отсечения, тем меньшую вероятность поймать заговор он будет предъявлять. Есть и более интересная интерпретация: чем больше ценность игрока, тем меньше ему требуется вероятность обнаружения заговора, чтобы отказаться в нём участвовать даже на условиях монополии.

Последний пункт очень важен, так как по существу говорит о том, что желание участвовать в заговоре обратно пропорционально ценности игрока. Для нас это значит, что первыми при повышении заданной вероятности быть обнаруженным будут отказываться участвовать в монополии игроки с наибольшими ценностями.

Так же проведем следующее рассуждение для игрока с ценностью выше ценности отсечения: если ему предлагают участие в заговоре некоторое количество участников, есть ли шанс, что среди участников есть игроки с ценностью выше его ценности, причем достаточно высокой, чтобы сделать его честную стратегию выгодной? Очевидно нет, так как любой игрок с ценностью выше его также счел бы заговор такого количества участников аукциона невыгодным для себя.

Платеж аукциониста.

Вопрос, поставленный в основу работы – существует ли равновесия с положительной отличной от 0 и 1 вероятностью обнаружения заговора, при котором возможно существование монополии? Чтобы ответить на него, нам потребуется выписать функцию ожидаемого платежа аукционисту.

Механизм выглядит следующим образом: Аукционист, зная количество участников, указывает вероятность обнаружения взаимодействия между игроками. Эта вероятность одновременно является его издержками.

Таким образом его функция платежа будет иметь вид:

$$E(U(N)) = max_t E(maxb(t, x, N)) - t)$$

Где $E(max\ b(t, x, N))$ – математическое ожидание максимальной ставки в игре.

Так как t – в данном случае издержки, и заданная ценность отсечения будет выполняться участниками аукциона в случае любого t больше указанного, неравенство (16) должно выполняться как равенство.

Также можно заметить, что t не выражается однозначно через ценность отсечения, однако так как знак производной строгий, то очевидно t однозначно отображается в множество значений c.

Из этого следует, что аукционист будет максимизировать свой выигрыш по ценности отсечения, ставя ей в соответствие вероятность обнаружения заговора t.

Рассмотрим варианты событий:

Вариант №1: никто из игроков не попадает выше ценности отсечения, и итогом становится нулевой платеж аукционисту по причине образовавшейся монополии.

Вариант №2: Часть игроков организует заговор, часть оказывается выше ценности отсечения и играют честно

Вариант №3: Все игроки играют честно, так как никто из них не находит заговор выгодным.

Вспомним, что средний платеж h честных игроков находится по формуле(суммы средних платежей):

$$E[b(x_N^{\max})] = \mathrm{N}\int_0^1 \frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}}\mathrm{x}^{\mathrm{N}}\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}+1}$$

Однако в нашем случае, хотя игроки честные, и ставки делают вида $\frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}}\mathrm{x_i}$, их вероятность выигрыша записывается как $\left(\frac{\mathrm{x-c}}{1-\mathrm{c}}\right)^{\mathrm{h}-1}$, и надо учитывать, что x честных участников распределён от c до1.

$\mathrm{h}\int_{\mathrm{c}}^{1} \frac{\frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}}\mathrm{x}\left(\frac{\mathrm{x-c}}{1-\mathrm{c}}\right)^{\mathrm{h}-1}}{1-\mathrm{c}}\,\mathrm{dx} = \frac{(\mathrm{N}-1)(\mathrm{c}+\mathrm{h})}{\mathrm{N}(\mathrm{h}+1)}$(17)

Из этой формулы кстати хорошо видно следующее – даже если участники сговора обнаружены, то при наличии оснований полагать, что остальные участники честные, не стоит объявлять о сговоре до окончания аукциона, так как:

а) честные участники (а мы считаем честными всех выше ценности отсечения) в любом случае делают ставки выше

$\frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}}\mathrm{c}$ минимум если они считают что игроков N против $\frac{\mathrm{N-k}-1}{\mathrm{N-h}}\mathrm{c}$ если они считают что игроков осталось N-h.

б) Снизят свои ставки, как только узнают что остальные участники выбыли.$(N-1)/N$ в (17) будет заменено на $(k-1)/k$, что очевидно меньше.

Запишем задачу максимизации платежа для .

$$E(U(N)) = max_t E(maxb(t,x,N)) - t$$

Рассмотрим случай, когда игроки вне заговора продолжают играть честно.

$$\sum_{0}^{N} \frac{N!}{h!\,(N-h)!}(1-c)^h c^{N-h} h \int_{c}^{1} \frac{\frac{N-1}{N} x \left(\frac{x-c}{1-c}\right)^{h-1}}{1-c} dx - 1 + \sqrt[N-1]{\frac{c^{N-2}}{N} \frac{N-1}{\ln\left(\frac{N-1}{c}+1\right)}}$$

$$E(N,c) = \sum_{1}^{N} \frac{N!}{h!\,(N-h)!}(1-c)^h c^{N-h} \frac{(n-1)(c+h)}{n(h+1)} - 1 + \sqrt[N-1]{\frac{c^{N-2}}{N} \frac{N-1}{\ln\left(\frac{N-1}{c}+1\right)}}$$

Мы имеем право на такую запись первого слагаемого , так как случайные величины h и x независимы (вероятность h=n определяется по формуле c^n) вероятность x – распределена независимо от 0 до 1). Также стоит заметить, что в сумме нижним значением h(количеством честных игроков) стоит 1, так как при h=0 речь, очевидно идёт про монополию, а у неё нулевой платеж.

Существует ли внутреннее решение задачи максимизации ожидаемого платежа по ценности отсечения? Очевидно, что, существует, так как при c=0 или c=1, выражение становится отрицательным.

$$\frac{d}{dk} \frac{(n-1)(c+h)}{n(h+1)} = \frac{\big((1-c)(N-1)\big)}{(k+1)^2}$$

Производная по h второй части перового слагаемого >0.

Первая часть есть биноминальное распределение , где 1-c вероятность того что один из игроков попадёт своей ценностью на участок, где сочтет выгодным играть честно. Таким образом, увеличивая с во второй части, мы уменьшаем вероятность появления честных игроков в первой, делая более вероятными меньшее количество честных участников аукциона.

Это не является строгим доказательством, однако для N от 3 до 50 так же был проведен поиск по сетке с шагом ценности отсечения в 0.05, и после нахождения потенциального оптимума – проверка с шагом в 0.01.Два экстремума и более нигде не обнаружилось.

Эти данные здесь не приводятся, в силу объёма работы.

Так же стоит отдельно рассмотреть случай, когда честные участники в состоянии учитывать сколько "выбыло" или сколько участников в заговоре". Это может быть объяснено следующими образом – в процессе организации заговора в конечном итоге игроку предложат возможность присоединиться к максимально возможному заговору. Таким образом он знает количество участников заговоров, а учитывая открытую информацию о вероятности обнаружения заговора -   и ценность отсечения. Для
$i -$ го участника аукциона :

Проведя рассуждения аналогичные рассуждениям перед (2):

$$\mathrm{E}(W_i) = \left(x_i - \mathrm{b}(x_i)\right)\left(\frac{x_i - \mathrm{c}}{1 - \mathrm{c}}\right)^{\mathrm{h}-1} \to \max_{\mathrm{x}}$$

И введя замену получаем:

$$\frac{\partial \mathrm{E}(\mathrm{W_i})}{\partial x_i} = (\mathrm{h}-1) * \frac{(x_i - \mathrm{c})^{\mathrm{h}-2}}{(1-\mathrm{c})^{\mathrm{h}-1}} x_i - (\mathrm{h}-1) * \frac{(\mathrm{x}-\mathrm{c})^{\mathrm{h}-2}}{(1-\mathrm{c})^{\mathrm{h}-1}} \mathrm{b}(x_i) - \mathrm{b}'(x_i)(x_i - \mathrm{c}) = 0$$

$$(\mathrm{h}-1)x_i - (\mathrm{h}-1)\mathrm{b}(x_i) - \mathrm{b}'(x_i)(\mathrm{x}-\mathrm{c}) = 0$$

Это линейное дифференциальное уравнение

Решение:

$$z(x_i) = d_1(x_i \; - c)^{1-k} + \frac{x_i\;(k-1)+c}{k}$$

Каково начальное условие в этом случае? Очевидно, что при с=0 это решение должно переходить в стандартное: $\mathrm{b}(\mathrm{x_i}) = \frac{\mathrm{h}-1}{\mathrm{h}}\mathrm{x_i}$, и чтобы оно выполнялось, требуется равенство $\mathrm{d_1} = 0$. Тогда оптимальная стратегия приобретает вид $\mathrm{b}(x_i\;) = \frac{\mathrm{h}-1}{\mathrm{h}} x_i \; + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{h}}$

Отметим , что случай, когда игрок с информацией о количестве участников в заговоре остается один ($h = 1$), его платеж становится равным c . Причиной этому является что он знает только количество участников вне заговора и ценность отсечения, а предположений о стратегии заговорщиков он делать не может согласно нашим предпосылке 11).

Математическое ожидание платежа в этом случае аналогично предыдущему случаю:

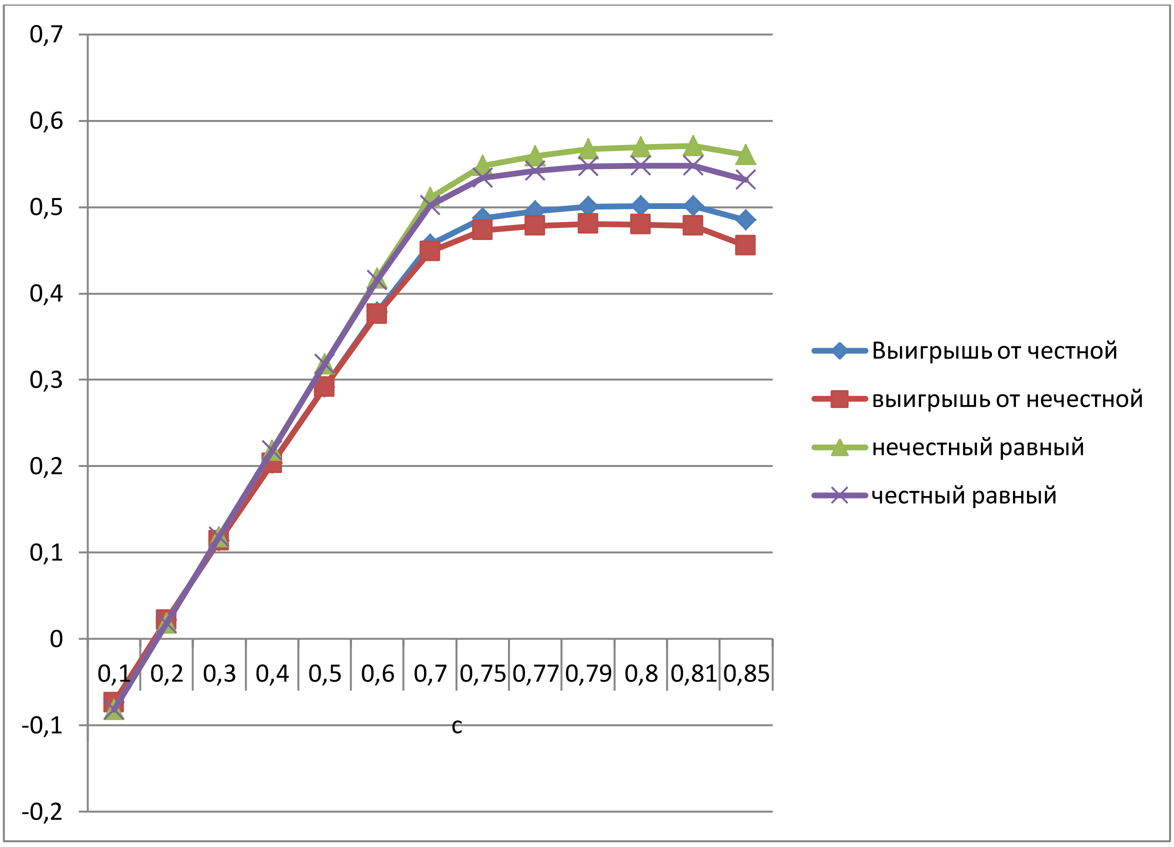
$$k\int_c^1 \left(\frac{\mathrm{h}-1}{\mathrm{h}}\mathrm{x} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{h}}\right)\frac{\left(\frac{x-c}{1-c}\right)^{k-1}}{1-c}\,dx = \frac{k-1+2c}{k+1}$$

Формула итогового платежа -

$$\mathrm{E(N,c)} = \sum_{1}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{N!}}{\mathrm{h!\,(N-h)!}}(1-\mathrm{c})^{\mathrm{h}}\mathrm{c}^{\mathrm{N-h}}\frac{k-1+2c}{k+1} - 1 + \sqrt[\mathrm{N-1}]{\frac{\mathrm{c}^{\mathrm{N-2}}}{\mathrm{N}}\frac{\mathrm{N}-1}{\ln\left(\frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{c}}+1\right)}}$$

Для примера приведём график зависимости Выигрыша аукциониста для случая N=10 для честного (без изменения стратегии) и нечестного (с изменением стратегии) вариантов действий участников аукциона вне заговора.

График 8



Как видно на этом графике поиск по сетке показывает существование максимума участке для ценности отсечения $c \in = (0{,}79; 0{,}85)$

ценности отсечения соответствует вероятность (и соответственно издержки)

Для случая пропорционального деления:

$$t = 1 - \sqrt[N-1]{\frac{c^{N-2}}{N} \frac{N-1}{\ln\left(\frac{N-1}{c} + 1\right)}} \approx 0{,}25$$

Для случая равного деления

$$t = 1 - c \approx 0{,}2$$

Также поиском по сетке установлены следующее закономерности :

Выигрыш аукциониста – растёт с ростом количества участников (причины вполне очевидны, так как каждый дополнительный участник только повышает среднюю ставку, и уменьшает вероятность монополии).

Оптимальная вероятность   лежит от $\approx 0{,}05 \mp 0{,}1$ для 150 участников, до $\approx 0{,}25 \mp 0{,}2$ для 4 участников. Небольшой разброс возникает вследствие наличия разных сценариев участников аукциона вне и внутри заговора: честный пропорциональный случай, нечестный пропорциональный, равномерный честный и равномерный нечестный. Оптимальная вероятность обнаружения заговора для всех случаев поведения игроков вне заговора – падает с общим количеством участников аукциона.

Также ожидаемый выигрыш аукциониста во всех проверенных случаях был больше в случае равного деления прибыли в заговоре, причем нечестная стратегия (с учетом количества игроков с $x >$ с и непосредственно ценности отсечения)участников даёт аукционисту наибольшей выигрыш.

Выводы работы

Для случая возможности деления выигрыша было показано существование равновесия, с вероятностью существования монопольного или частичного заговора для ситуации, когда игроки могут выбирать между честной стратегией и заговором с различными схемами распределения выигрыша.

Основной предпосылкой о заговоре является то, что его участники не реагируют, а возможное изменение стратегии игроками вне заговора в ответ на сигнал об имеющемся количестве участников заговора.

Также было проанализировано возможное изменения стратегии игроков вне заговора с учетом их поведения.

Для равного распределения выигрыша доказан общий случай корректности гипотезы о последствиях невыгодности монополии, для пропорционального по причине сложности аналитического решения – проверкой по сетке перебором для той же гипотезы.

Общим вывод работы: при делимости выигрыша и возможности введения вероятностного контроля взаимодействия заговорщиков, существует внутреннее оптимальное решение $t \in (0,1)$ по установлению , относительно небольшое (менее 30% вероятности обнаружения взаимодействия связи двух игроков из заговора) и обратно пропорциональное количеству участников.

Дальнейшие перспективы исследования:

1) Предпосылка о равномерной стандартном распределении ценностей может быть заменена на нормальное и иные типы распределения
2) Доказать гипотезу о превосходстве монополии в случае пропорционального распределения.

3) Посмотреть на изменение стратегии в случае штрафа и “переговорной силы ценности” m отличной от 1.
4) Проверить наличие равновесия между игроками знающими о заговоре и способными изменить свою стратегию соответственно и самим заговором.
5) Найти эмпирический аналог меры вероятностного обнаружения заговора , и посчитать его приблизительное значение для проверки выводов этой работы.

Список литературы

1. Bajari, Patrick **“Comparing Competition and Collusion: A Numerical Approach”** *Economic Theory*
   Vol. 18, No. 1, Symposium: Computation and Economic Theory (Jul., 2001), pp. 187-205
2. Daniel A. Graham; Robert C. Marshall **"Collusive bidding behavior at single-object second price and English auctions"** J. Political Economy, vol. 95, no. 6, Dec. 1987, pp. 1217-1239.
3. Vickerey, William **"Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders"** (Journal of Finance, vol. 16, no. 1, March 1961, pp. 8-37)
4. Garratt Rodney J., Tröger Thomas, Zheng Charles Z. “**Collusion via Resale”** *Econometrica*, Vol. 77, No. 4 (Jul., 2009), pp. 1095-1136
5. Pesendorfer Martin “**A Study of Collusion in First-Price Auctions”** *The Review of Economic Studies* Vol. 67, No. 3 (Jul., 2000), pp. 381-41
6. Phillips Owen R., Menkhaus Dale J., Coatney Kalyn T. “**Collusive Practices in Repeated English Auctions: Experimental Evidence on Bidding Rings”** *The American Economic Review*, Vol. 93, No. 3 (Jun., 2003), pp. 965-979
7. Robinson Marc S. **Collusion and the Choice of Auction** *The RAND Journal of Economics*, Vol. 16, No. 1 (Spring, 1985), pp. 141-145