Национальный Исследовательский Университет - "Высшая Школа Экономики"

Факультет Экономических Наук

Департамент прикладной экономики

Модели процентных ставок

Сравнительный анализ

Автор:
Эдуард Аюнц

Преподаватель:
Борис Борисович Демешев

6 июня 2016 г.

Содержание

1 Введение

Движения процентных ставок играют ключевое роль при принятии решений на финансовых рынках, рассмотрении инвестиционных проектов, а сами ставки являются одним из инструментов регулирования экономики Центральным Банком. Таким образом, исследования поведения процентных ставок имеет важное значение, помогая государству более взвешено подходить к монетарной политике, и частным инвесторам при сделках на финансовых рынках и совершении инвестиций. Инструментарием для таких иследований выступают однофактороные модели и их продвинутые вариации, так как позволяют предсказывать процентные ставки в зависимости от параметров и изучить их временную структуру. В данной работе будут рассматриваться различные модели для анализа ставок, разработанные во второй половине XX века. Их появление изменило коренным образом всю финансовую систему, а именно, позволило оценивать ценные бумаги и деривативы и тем самым увеличила их распространенность. В данной работе исследуются элементарные, но при этом важнейшие модели процентных ставок. Проводится сравнительный анализ на предмет точности предсказаний и чувствительности к изменению параметров. Также проделан анализ алгоритма оценки параметров моделей.

2 Общие сведения об облигациях

В данной работе рассматриваются несколько различных способов предсказания процентных ставок облигаций, а именно, их доходности к погашению, которая является одной из ключевых облигаций. Доходность к погашению, Yield To Maturity (YTM), - процентная ставка, которую зарабатывает инвестор к моменту погашения бумаги. Цена облигации в каждый момент времени $t', t \leqslant t' \leqslant T$ выражется через формулу: $p(t', T) = p(t, T)e^{(t'-t)r(t,T)}$, где $r(t, T)$ - доходность к погашению в момент времени t. Ставка процента, найденная по данной формуле, имеет несколько названий, а именно, спот-ставка, мгновенная ставка или ставка в непрерывном исчислении. [1]. Также облигации характеризуются такими параметрами как срок

[1]С. Дробышевский, Обзор современной теории временной структуры процентных ставок.Основные гипотезы и модели

до погашения и дюрация (duration) - средневзвешенное среднее промежутков времени, через которое будут получены потоки денежных средств. Важность измерения дюрации заключается в том, что она показывает чувствительность приведенного потока средств от процентной ставки - с ростом процентной ставки дюрация падает, так как падает доля дисконтированных выплат, получаемых ближе к сроку погашения облигации, в общей сумме приведенных средств к получению.

Исследовательская проблема, на решение которой нацелены различные модели оценки ставки процента, это проблема определения временной структуры процентной ставки, а именно, зависимость $r(t, T)$ от времени до погашения ценной бумаги. Еще с прошлого века предсказывается и проверяются гипотезы, призванные объяснить тот или иной характер кривой временной структуры. Роль моделей заключается в том, что с их помощью подтверждаются, опровергаются и строятся новые гипотезы.

Однофакторные модели представляются в общем виде при помощи следующего уравнения:

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t)$$

, где μ и σ - смещение и параметр диффузии соответственно, в то время как W - Броуновское движение. Модели Васичека и Кокса-Ингерсолла-Росса (CIR) являются самыми популярными, так как несмотря на множество их модификаций, они все еще пользуются большим спросом благодаря своей относительно простой трактабельности и готовым ответам для многих моделей, базирующихся на них. Цена любого финансового инструмента равняется настоящей стоимости ее ожимдаемых от нее денежных поступлений.

Процентные ставки высоко волатильными и именно поэтому при их моделировании используются стохастические методы. Первая стохастическая модель для оценки процентных ставок была предложена Мертоном в 1973 году. Тогда же была опубликована совместная работа Блэка и Шоулза "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". Вслед за данными публикациями началось бурное развитие стохастических методов оценки финансовых инструментов За ней в 1977 последовала модель Васичека и некоторые другие классические модели, такие как Dothan (1978), Cox-Ingersoll и Ross (1985), Ho-Lee (1986). Hull-White расширил модель Васичека в 1990, Black-Derman-Toy в 1990 и CIR++ в 2001.

Обозначим в качестве спот-ставки r_t предел процента по облигации стремящийся к нулю.

$$r(t) = R(t,0) = \lim_{T-t\to 0} R(t, T-t)$$

Так как на рынке не существует таких облигаций, в качестве short rate берется ставка по кредитам овернайт. Также для оценки ставки может использоваться темп роста счета в банке. Если в момент времени $t = 0$ $B(0) = 1$, то при начислении непрерывного процента в момент времени t получим $B(t) = \exp \int 0^t r_s ds$

Модели процентных ставок подразделяются на модели равновесия (equilibrium models) и модели, исключающие арбитраж.

Халл утверждает[2], что модели равновесия основываются на предположениях о переменных и описывают процесс для краткосрочных ставок. Название происходит от того факта, что эти модели направлены на достижение баланса между предложением облигаций и других производных финансовых инструментов и спросом инвесторов, то есть подразумевается общее равновесие в экономике. Параметры модели определяются эндогенно, так как будущее состояние экономики подвержено неопределенности, и поэтому стохастические свойства оцениваются на основе предыдущих данных непосредственно внутри модели. К моделям равновесия относятся модель Васичека, CIR модель, модель двухфакторного равновесия и другие. Они выражаются дифференциальными уравнениями в частных производных, которые в свою очередь являются частью моделей общего равновесия, описывающих цену облигации.[3]

3 Модель Васичека

Данная модель является одной из самых ранных, используемых для анализа процентных ставок. Она основывается на идее возврата процентной ставки к своему среднему значению с течением времени. Предпосылки данной модели следующие: 1. Движение ставки соответсвует непрерывному Марковскому процессу (процессу Орнстейна-Уленбека). 2.Цена дисконтной облигации p(t,T) на протяжении всего срока до погашения определяется оценкой в момент времени t участка стохастического процесса спот-ставки $r(\tau), t \leqslant \tau \leqslant T$. При этом важно, что все гипотезы вре-

[2]Options, Futures, and Other Derivatives. John C. Hull

[3]С. Дробышевский, Обзор современной теории временной структуры процентных ставок.Основные гипотезы и модели, Москва 1999

менной структуры, а именно рассмотренные гипотезы ожиданий и предпочтений ликвидности, соответсвуь данной предпосылки, так как предполагают временную структуру в виде $R(t,m) = E_t\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+m} r(\tau)d\tau\right) + \Phi[t,m,r(t)]$ 3. Рассматривается совершенный рынок диско нтных облигаций, и риск дефолта по ним отсутствует. То есть рынок эффективен и все инвесторы действуют рационально, а транзакционные издержки отсутствуют. Васичек предположил следующую формулу для оценки ставки:

$$dr_t = \beta(\mu - r_t)dt + \sigma dW_t, r(0) = r_0 \tag{1}$$

, где r_0, β, μ и σ - положитильные константы. μ - долгосрочное среднее, σ - волатильность краткосрочной ставки, β - параметр возврата к среднему значению. dW_t - Броуновское движение. Идея возврата к среднему заключается в том, что в долгосрочном периоде ставка процента будет приближаться к среднему значению μ, это можно увидеть из формулы 1: если $r_t > \mu$, то динамика отрицательная, иначе - положительная. Формула 1 применима только при отсутствии риска, однако в реальном мире риск существует, и его необходимо учитывать. Для этого введем следующее выражение:

$$dW^{\circ}(t) = dW(t) + \lambda r(t)dt, \tag{2}$$

из которого следует

$$dr_t = [\beta\mu - (\beta + \lambda\sigma)r(t)]dt + \sigma dW_t^{\circ} \tag{3}$$

в котором λ это новый параметр, определяемый как рыночая цена за риск. Согласно Brigo и Mercurio, рыночная цена риска может быть объяснена как разница в доходности с безрисковой инвестицией.

В **??** предполагается, что $\lambda(t) = \lambda r(t)$. Однако это может варьироваться в разных моделях и единого мнения на этот счет не существует. В данной работе положим $\lambda = 0$, так как это общепринятая практика. В модели Васичека предполагается, что в каждый момент времени изменение спот-ставки в течение последующего интервала времени зависит лишь от значения ставки в этот момент времени, то есть можно запистъ стоимость облигации как функцию от спот-ставки $p(t,T) = p[t,T,r(t)]$. Интересной особенностью данной модели является тот факт, что для построения временной структуры процентных ставок достаточно лишь

2 облигаций разного срока погашения. Это следует из взаимного коррелированниости процентных ставок. Построим точное и оценочное распредление будущих процентных ставок в зависимости от ставки на данный момент. Для точной оценки известно, что в момент времени t процентная ставка имеет нормальное распределение

$$r_t \sim N(r_s e^{-\beta(t-s)} + \mu(1 - e^{\beta}(t-s), \frac{\sigma^2}{2\beta}[1 - e^{2\beta(t-s)}]$$

со средним значением

$$E(r(t)) = r(s)e^{-\beta(t-s)} + \mu(1 - e^{-\beta(t-s)})$$

и дисперсией $Var(r(t)) = \frac{\sigma^2}{2\beta}[1 - e^{-2\beta(t-s)}]$ Следовательно, мы можем воспользоваться рекурсией для оценки $r_(t+1)$ на моменты времени $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$:

$$r_{t_{t+1}} = \exp^{-\beta(t_{i+1}-t_i} r_{t_i} + \mu\ (1 - \exp^{-\beta(t_{i+1}-t_i}) + \sigma\sqrt{\frac{1}{2\beta}(1 - \exp^{-2\beta(t-s)})} Z_{i+1},$$

где Z - вектор независимо распределенных случайных величин.

Выразим динамику $\frac{\dot{p}}{p}$ цены облигации $p(t,T,r)$. Необходимо применить правила дифференцирования согласно лемме Ито, и в результате получится стохастическое дифференциальное уравнения в частных производных $\frac{\partial p}{\partial t} + [\alpha(\gamma - r) + \sigma\lambda]\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} - rp$ Ниже приведен код в R для точного оценивания процентной ставки.

```
Vasicek_simul_exact<- function(para,r0,n,dt,d){
# exact simulation of n paths of the short rate process
# Short rate path is returned as a matrix
# para ... parameters of the Vasicek model
# r0 ... starting value of the interest rate process
# n ... number of paths that are generated
# dt ... length of time step (in years)
# d ... number of time steps that should be generated
mu=para[1]
beta=para[2]
sigma= para[3]
```

```
r=matrix(nrow=n,ncol=d)
r[,1]=r0
for(i in 1:(d-1))
r[,i+1]= r[,i]*exp(-beta*dt) + mu*(1-exp(-beta*dt))+(
sigma*sqrt((1-exp(-2*beta*dt))/(2*beta))*rnorm(n))
r
}
```

Если не известны параметры распределения процесса из формулы 1, то можно воспользоваться схемой Эйлера для симуляции неизвестного процесса. Для этого нужно заменить dt в формуле 1 короткими временными отрезками δt, и dW_t - $N(0,1)$. После такого преобразования стохастическое дифференциальное уравнение может быть записано для модели Васичека может быть записано в виде

$$r_{t+\Delta t} - r_t = \beta(\mu - \mu_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z$$

Для балансирования погрешностей симуляции и дискретизации выбирается число временных интервалов d, равняющееся квадратному корню от размера выборки n. Далее представлена функция в R для симуляции по рассмотренному алгоритму.

```
[language=R]
Vasicek_simul_euler <- function(para,r0,n,dt,d,exact=T){
# approximate simulation of n paths of the short rate process
# Short rate path is returned as a matrix
# para ... parameters of the Vasicek model
# r0 ... starting value of the short rate process
# n ... number of paths that are generated
# dt ... length of time step (in years)
# d ... number of time steps that should be generated
mu=para[1]
beta=para[2]
sigma= para[3]
r=matrix(nrow=n,ncol=d)
r[,1]=r0
```

```
for(i in 1:(d-1))
r[,i+1]= r[,i] + beta*(mu-r[,i])*dt+ sigma*sqrt(dt)*rnorm(n)
r
}
```

Рассмотрим пример использования данных алгоритмов. В качестве параметров модели будем использовать $\mu = 0.052, \beta = 0.181, \sigma = 0.017$, так как именно эти значения применяются для оценки процентных ставок в США. Если построить функции плотности для приблизительной и точкой оценки, можно будет увидеть, что уже при 100 шагах они отличаются очень незначительно, что говорит о том, что приближение Эйлера оценивает ставку с достаточной точностью. Оценка ставки в модели Васичека стремится к своему заданному среднему значению, скорость этого процесса зависит от параметра β. Важно отметить, что теоретически модель Васичека может предсказывать отрицательные процентные ставки в определенные моменты времен, это является одним из основных недостатков данной модели.

3.1 Калибрация параметров модели Васичека

Рассмотрим оценку параметров модели Васичека при помощи метода максимального правдоподобия с использованием исторической информации. Для начала приведем математический аппарат и выведем формулы для оценки параметров в общем виде.

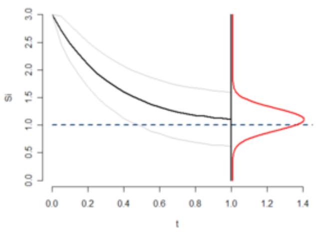


Рис. 1: Ставка в будущий момент времени имеет нормальную функцию плотности

Функция плотности ставки r_{i+1}, при условии, что известны параметри модели и ставка r_i имеет следующий вид:

$$f(r_{i+1}|r_i; \mu, \lambda, \hat{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}} e^{-\frac{(r_i - r_{i-1}e^{-\beta\delta} - \mu(1-e^{-\beta\delta}))^2}{2\hat{\sigma}^2}}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\beta\delta}}{2\beta}$$

Для оценки параметров воспользуемся функцией наибольшего правдоподобия на множестве наблюдений $(r_0, r_1, ...r_n)$. Выведем функциию $\mathcal{L}$ из функции условной плотности:

$$\mathcal{L}(\mu, \beta, \hat{\sigma}) = \sum_{i=1}^{n} lnf(r_i, r_{i-1}, \mu, \beta, \sigma) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \ln(\hat{\sigma}) - \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(r_i - r_{i-1}e^{-\beta\delta} - \mu(1 - e^{-\beta\delta}))$$

Максимум данной функции найдем, приравняв все частные производные к нулю.

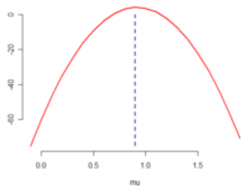


Рис. 2: Значение функции $\mathcal{L}(\mu)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mu, \beta, \hat{\sigma})}{\partial \mu} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}[r_i - r_{i-1}e^{-\beta\delta} - \mu(1 - e^{-\beta\delta})]$$

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n}[r_i - r_{i-1}e^{-\beta\delta}]}{n(1 - e^{-\beta\delta})}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mu, \beta, \hat{\sigma})}{\partial \beta} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\delta e^{-\beta\delta}}{\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}[(r_i - \mu)(r_{i-1} - \mu) - e^{-\beta\delta}(r_i - \mu)^2]$$

$$\beta = -\frac{1}{\delta}\ln\frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i - \mu)(r_{i-1} - \mu)}{\sum_{i=1}^{n}(r_{i-1} - \mu)^2}$$

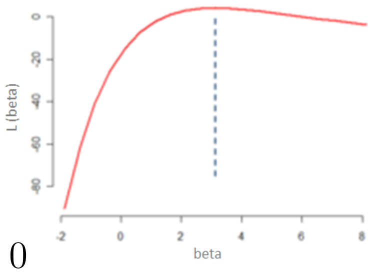


Рис. 3: Значение функции $\mathcal{L}(\beta)$.

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mu, \beta, \hat{\sigma})}{\partial \hat{\sigma}} = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{\hat{\sigma}} - \frac{1}{\hat{\sigma}^3}\sum_{i=1}^{n}[r_i - \mu - e^{-\beta\delta}(r_{i-1} - \mu]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[r_i - \mu - e^{-\beta\delta}(t_{i-1} - \mu)]$$

Сложность нахождения параметров заключается в том, что они зависимы друг от друга. Однако, параметры β и μ независимы от σ, поэтому зная один из параметров β или μ можно оценить все остальные. Введем следующие обозначения:

$$r_x = \sum_{i=1}^{n} r_{i-1}, r_y = \sum_{i=1}^{n} r_i, r_{xx} = \sum_{i=1}^{n} r_{i-1}^2, r_{xy} = \sum_{i=1}^{n} r_{i-1}r_i, t_{yy} = \sum_{i=1}^{n} r_i^2$$

$$\mu = \frac{r_y - e^{-\beta\delta} r_x}{n\left(1 - e^{-\beta\delta}\right)}$$

$$\lambda = -\frac{1}{\delta}\ln\frac{r_{xy} - \mu r_x - \mu r_y + n\mu^2}{r_{xx} - 2\mu r_x + n\mu^2}$$

Проведя замену, получим:

$$n\mu = \frac{r_y - r_x(\frac{r_{xy} - \mu r_x - \mu r_y + n\mu^2}{r_{xx} - 2\mu r_x + n\mu^2})}{1 - (\frac{r_{xy} - \mu r_x - \mu r_y + n\mu^2}{r_{xx} - 2\mu r_x + n\mu^2})}$$

Избавившись от знаменателей:

$$n\mu = \frac{r_y(r_{xx} - 2\mu r_x + n\mu^2) - r_x(r_{xy} - \mu r_x - \mu r_y + n\mu^2}{(r_{xx} - 2\mu r_x + n\mu^2) - (r_{xy} - \mu r_x - \mu r_y + n\mu^2)}$$

$$n\mu = \frac{(r_y r_{xx} - r_x r_{xy}) + \mu(r_x^2 - r_x r_y) + \mu^2 n(r_y - r_x}{(r_{xx} - r_{xy}) + \mu(r_y - r_x)}$$

$$n\mu(r_{xx} - r_{xy}) - \mu(r_x^2 - r_x r_y) = r_y r_{xx} - r_x r_{xy}$$

Итоговые результаты:

Среднее:

$$\mu = \frac{r_y r_{xx} - r_x r_{xy}}{n(r_{xx} - r_{xy}) - (r_x^2 - r_x r_y)}$$

Средний темп возврата к среднему значению:

$$\beta = -\frac{1}{\delta}\ln\frac{r_{xy}\mu r_x - \mu r_y + n\mu^2}{r_{xx} - 2\mu r_x + n\mu^2}$$

Дисперсия:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}[r_{yy} - 2\alpha r_{xy} + \alpha r_{xx} - 2\mu(1-\alpha)(r_y - \alpha r_x) + n\mu^2(1-\alpha)^2]$$

$$\sigma^2 = \hat{\sigma}^2 \frac{2\lambda}{1-\alpha^2}$$

Алгоритм для оценки данных параметров в R приведен ниже.

```
[language=R]

Vasicek_MLE<-function(data,dt = 1/12){
#returns a vector with the estimates for the parameters mu, lambda and
#sigma of the Vasicek model
#data ... vector of short rate data
#dt ... time interval (in years) between the data points given in data
N = length(data)
rate <- data[2:N]
lagrate<- data[1:(N-1)]
alpha<-(N*sum(rate*lagrate) - sum(rate)*sum(lagrate))/
(N*sum(lagrate^2)- sum(lagrate)^2)
beta_hat = -log(alpha)/dt
mu_hat = sum(rate-alpha*lagrate ) / (N*(1-alpha))
v2hat<-sum((rate-lagrate*alpha-mu_hat*(1-alpha))^2)/N
sigma_hat<-sqrt(2*beta_hat*v2hat/(1-alpha^2))
c(mu_hat,beta_hat,sigma_hat)
}
```

В качестве исходных данных были взяты исторические средние за ставки на на облигации Казначейства США сроком погашения в 10 лет за каждый месяц с 1962 года по апрель 2016. По этим данным были получены следующие оценки параметров:

$$\mu = 5.481, \quad \beta = 0.045, \quad \hat{\sigma} = 0.995$$

Стоит отметить, что параметры, найденные из такой большой выборки могут отличаться от тех, которые будут получены на основе более узкой выборки, начинающейся, например, с 1990-ых. Проверив данную гипотезу, убедимся что это действительно так, получены следующие значения параметров:

$$\mu = .47, \quad \beta = 0.1, \quad \hat{\sigma} = 0.772$$

3.1.1 Оценка облигаций

Используя модель Васичека, можно провести анализ облигации и выяснить, не является ли ее стоимость завышенной. Известно, что стоимость облигации в момент времени t вычисляется по формуле:

$$P(t,T) = E_t\text{“}e^{-\int_t^T r_s ds}\text{”}$$

Аналитически, модель с применением идеи Васичека выглядит следующим образом:

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r_t},$$

где

$$A(t,T) = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2\lambda^2})[B(t,T)-T+t]-\frac{\sigma^2}{4\lambda}B(t,T)}$$

$$B(t,T) = \frac{1}{\lambda}[1-e^{-\lambda(T-t)}]$$

Пользуяюсь данной формулой, можно зная только параметры модели Васичека, срок истечения облигации и текущую ставку предсказать кривую доходности, которая будет выражаться функцией:

$$R(t,T) = \frac{(r(t)B - \log(A))}{(T-t)}$$

Код в R для аналитического оценивания стоимости облигации, при применении модели Васичека.

```
VasicekPriceYield<-function(r,tau=1,Param,priceyn=F){
# r ... r(t) current value of short rate
# tau ...(T-t), time to maturity
# Param ... vector holding the parameters of the Vasicek model
mu =Param[1]
beta =Param[2]
```

```
sigma =Param[3]
B=(1-exp(-beta*tau))/beta
A=((B-tau)*(beta^2*mu-0.5*sigma^2)/beta^2 - sigma^2*B^2/(4*beta))
if(priceyn){
if(tau==0) return(1) #price is par-value(1) at maturity
else return(exp(A-B*r))
}else return((r*B-A)/tau)
}
```

Использовав данный алгоритм, получим значение стоимости облигации Для оценки при помощи метода Монте -Карло с использованием модели Васичека, необходимо использовать приведенный ранее алгоритм для симуляции процесса, с введением параметров $dt = 1/360, d = 360$, так как ставка меняется каждый день, и в качестве результата берется средняя ставка за год. В качестве параметров модели взяты значения μ, β и σ, полученные методом наибольшего правдоподобия на основе данных о среднемесячных ставках 10-летних облигациях США с 1962 года по март 2016.

```
[language=R]
res=Vasicek_simul_exact(para=c(5.4816579, 0.0450853, 0.9948379),r0=0.025,n=1
y=exp(rowSums(-res)/360)
mean(y)
1.96*sd(y)/sqrt(1000)
```

Оценка моделью Васичека дала следующий результат: среднее приведенное значение стоимости облигации 1.022589 с 95% доверительным интервалом

$$0.8920674 < \mu < 1.153111$$

3.2 CIR модель

Модель CIR (Cox, Ingersoll и Ross) была создана с учетом недостатков модели Васичека, а именно, вероятность получить отрицательную процентную ставку устранена. С этой целью введен корень из процентной ставкой перед параметром σ. Данная модель в течение многих лет служила аналитическим бенчмарком, так как удобна в использовании и подгонке в разных задачах и моделях. При условии отсутствия риска модель имеет вид

$$dr(t) = \beta(\mu - r(t))d(t) + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), r(0) = r_0,$$

где r_o, μ, σ положительные константы. при этом должно соблюдаться условие $2\beta\mu > \sigma^2$, чтобы гарантировать положительность процентной ставки.

3.2.1 Симулирование спот-ставки в модели Кокса-Ингерсолла-Росса

Параметры модели CIR распределены согласно χ^2 квадрат распределению. Данная модель также обладает свойством возвращения к своему среднему значению. Более формально, функция переходной плотности $r(t)$ может быть записана как

$$r(u) = \frac{\sigma^2(1 - e^{-\beta(t-u)})}{4\beta}\chi^2_d(\frac{4\beta e^{-\beta(t-u)}}{\sigma^2(1 - e^{-beta(t-u)})}r(u)), t > u$$

, где $d = \frac{4\mu\beta}{\sigma^2}$ - число степеней свободы, а $\lambda = \frac{4\beta e^{-k(t-u}}{\sigma^2(1-e^{-\beta(t-u)})}r(u)$ - параметр смещенности относительно нуля. Таким образом, для симулирования спот-ставки r_t в моменты времени $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$, нужно воспользоваться рекурсией

$$r(t_{i+1}) = \frac{\sigma^2(1 - e^{-\beta(t-u)})}{4\beta}\chi^2_d(\frac{4\beta e^{-\beta(t-u)}}{\sigma^2(1 - e^{-beta(t-u)})}r(t_i))$$

Функция для симулирования модели CIR в R:

```
CIR_simul_exact <- function(para,r0,n,dt,d,exact=T){
# exact simulation of n paths of the short rate process
# para ... parameters of the CIR model
# r0 ... starting value of the interest rate process
# n ... number of paths that are generated
```

```
# dt ... length of time step (in years)
# d ... number of time steps that should be generated
# c... multiplying term for the chi-square distribution
# df... degree of freedom
# ncp... non-centrality parameter
mu=para[1]
beta=para[2]
sigma= para[3]
c= sigma^2*(1-exp(-beta*dt))/(4*beta)
df= 4*mu*beta/sigma^2
r=matrix(nrow=n,ncol=d)
r[,1]=r0
for(i in 1:(d-1)){
ncp= r[,i]*exp(-beta*dt)/c
r[,i+1] = c*rchisq(n,df=df,ncp=ncp)
}
r
}
```

Как и в случае с моделью Васичека, можно снова воспользоваться приближением Эйлера для приближенного прогноза ставки процента. Дискретизация Эйлера для уравнения $dr(t) = \beta(\mu - r(t))d(t) + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$в моменты времени $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$ выглядит следующим образом:

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + \beta(\mu - r(t_i))[t_{i+1} - t_i] + \sigma\sqrt{r(t_i)}\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1},$$

где $Z_1, ..., Z_m$ независимые, нормально распределенные $N(0,1)$ случайные величины. Ниже представлена функция для подсчета приближенной спот-ставки в R для рассматриваемой модели:

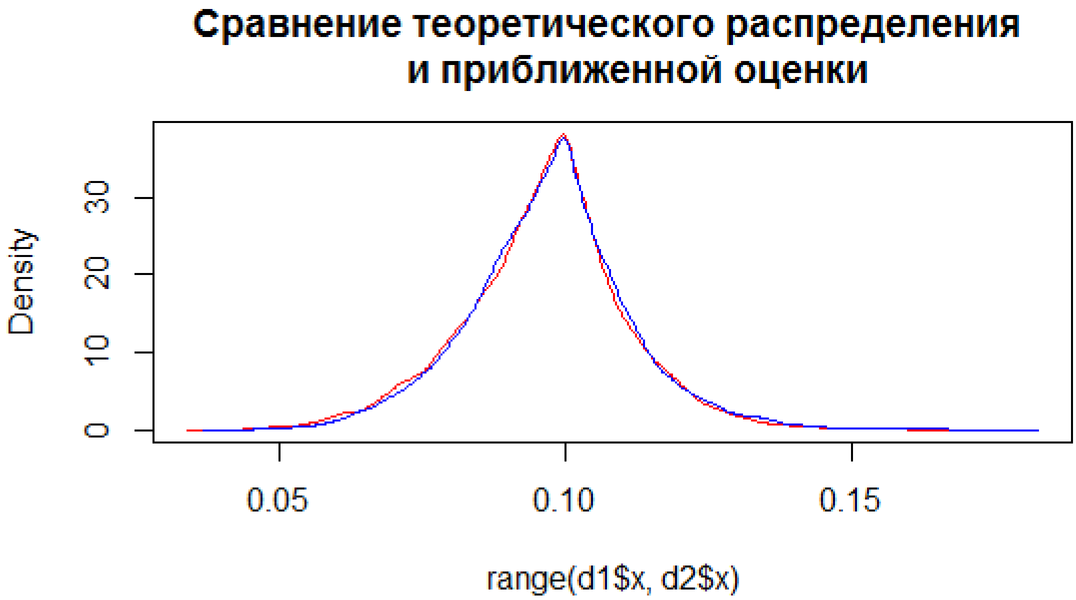
```
CIR_simul_euler<- function(para,r0,n,dt,d){
# approximate simulation of n paths of the short rate process
# para ... parameters of the CIR model
# r0 ... starting value of the interest rate process
# n ... number of paths that are generated
```

```
# dt ... length of time step (in years)
# d ... number of time steps that should be generated
# c... multiplying term for the chi-square distribution
# df... degree of freedom
# ncp... non-centrality parameter
mu=para[1]
beta=para[2]
sigma= para[3]
c= sigma^2*(1-exp(-beta*dt))/(4*beta)
df= 4*mu*beta/sigma^2
r=matrix(nrow=n,ncol=d)
r[,1]=r0
for(i in 1:(d-1))
r[,i+1]=r[,i]+beta*(mu-r[,i])*dt+sigma*sqrt(r[,i]*dt)*rnorm(n)
r
}
```

Сравнение данного алгоритма с теоретически предсказанным алгоритмом дало следующие результаты:

```
para7 <-c(0.052, 0.128,0.066)
d1 <- density(CIR_simul_exact(para7,0.1, 1000, 0.001, 1000)) # returns the d
d2 <- density(CIR_simul_exact(para7,0.1, 1000, 0.001, 1000)) # returns the d
plot(range(d1$x, d2$x), range(d1$y, d2$y), type = "n",
     ylab = "Density", main = "Сравнение теоретического распределения
     и приближенной оценки")
lines(d1, col = "red")
lines(d2, col = "blue")
```

Для симуляции были взяты значения параметров, равные $\mu = 0.052, \beta = 0.128, \sigma = 0.066$, из работы Dagistan, в которой они приводятся как найденные при помощи метода наибольшего правдоподобия на основе данных о процентных ставках, устанавливаемых в США Федрезервом с 1960 года. Количество итераций равнялось 1000, начальная процентная ставка $r_0 = 1\%$, число временных интервалов также равняется 1000. По графику видно, что при совершенном числе ите-



раций разница в распределении предсказаний модели минимальна, поэтому приближенная по методу Эйлера может быть использована для оценки спот-ставок в данной модели.

3.2.2 Оценка параметров модели CIR

В данной модели, в отличие от модели Васичека, в которой процентная ставка имеет нормальное распределение, распределение имеет вид χ^2, в связи с чем выразить явно значения параметров невозможно.(ссылка на dagistan) Однако тем не менее эти параметры можно оценить методом наибольшего правдоподия или методом наименьших квадратов, если все параметры модели положительны и соблюдается неравенство $2\beta\mu \geqslant \sigma^2$, что гарантирует, что прогнозируемая ставка не будет равняться нулю. Зная выражение для плотности спот-ставки, равное $r(u) = \frac{\sigma^2(1-e^{-\beta(t-u)})}{4\beta}\chi_d^2(\frac{4\beta e^{-\beta(t-u)}}{\sigma^2(1-e^{-beta(t-u)})}r(u)), t > u$, можем записать функцию распределения $r(t)$:

$$P(r(t) \leqslant y|r(u)) = F_{\chi^2_{d,\lambda}}\left(\frac{4\beta y}{\sigma^2\left(1-e^{-\beta(t-u)}\right)}\right),$$

где $d = \frac{4\mu\beta}{\sigma^2}$, $\lambda = \frac{4\beta e^{-k(t-u)}}{\sigma^2\left(1-e^{-\beta(t-u)}\right)}$. Тогда функция плотности равняется $P_{r(t)}(y|r(u)) = cp_{\chi^2_{d,\lambda}}(cy)$, где $p_{\chi^2_{d,\lambda}}$ плотность смещенной chi^2 распределенной случайной величины, а $c = \frac{4\beta}{\sigma^2\left(1-e^{-\beta(t-u)}\right)}$. Из этого можем записать функцию правдоподобия как:

$$\mathcal{L}(\mu,\beta,\sigma;y) = \prod_{i=2}^{n} cp_{\chi^2_{(d,\lambda)}}(cy_i|y_{i-1})$$

$$l(\mu,\beta,\sigma;y) = \sum_{i=2}^{n}\log(c) + \sum_{i=2}^{n}\log\left(p_{\chi^2_{(d,\lambda)}}(cy_i|y_{i-1})\right),$$

где $y = r_1, r_2, ...r_n$. dt равняется интервалу времени, в течение которог происходит изменение. Код для вычисления значения логарифмической функци правдоподобия в R представлен ниже.

```
\begin{tiny}
CIRloglike<-function(param,data,times,test=F,addsign=T){
# CIR log-likelihood Function
# para ... parameters of the CIR model
# dt ... time interval (in years) between the data points given in data
# c... multiplying term for the chi-square distribution
# df... degree of freedom
```

```
# ncp... non-centrality parameter
mu=param[1]
beta=param[2]
sigma=param[3]
N<-length(data)
if(test==T)
dt=times
else
dt<-diff(times,1)
rate=data[1:(N-1)]
lagrate=data[2:N]
ncp= rate*((4*beta*exp(-beta*dt)) / (sigma^2*(1-exp(-beta*dt))))
d= 4*mu*beta/sigma^2
c= 4*beta/(sigma^2*(1-exp(-beta*dt)))
res<- sum(dchisq(c*lagrate,df=d,ncp=ncp,log=TRUE)+log(c))
if(addsign)
return(-res)
else
return(res)
}
\end{tiny}
```

3.3 Модель Дотана

Ключевым отличием модели Дотана от других является тот факт, что в нем отсутствует дрейф, то есть уравнение нейтрального к риску процесса в частных производных выглядит следующим образом:

$$dr = \sigma r dz,$$

где σ - константа, а dz - Винеровский процесс. Распределение спот-ставки будет иметь логнормальный вид, из чего следует, что ставка будет всегда положительна. Однако в записи отсутствует параметр, отвечающий за скорость возвращения к среднему. Это существенный недостаток, так как на реальных данных наблюдается цикличность изменения процентных ставок. Однако впоследствиее Дотан, осознав данный недочет, внес изменения в изначальную версию модели, добавив в нее слагаемое $ar(t)dt$, где а - константа, и таким образом, она стала вариантом модели Ренделмана и Барттера для непрерывного случая. Проинтегрировав уравнение динамики, получим:

$$r(t) = r(s)exp\{(a - \frac{\sigma^2}{2})(t-s) + \sigma(W(t) - W(s))\}, s < t$$

. Таким образом, $r(t)$ распределен логнормально при условии $\mathcal{F}_s$. Математическое ожидание: $\mathcal{E}r(t)|\mathcal{F}_s = r(s)e^{a(t-s)}$,, дисперсия - $r^2(s)e^{2a(t-s)}(e^{\sigma^2(t-s)} - 1)$

При условии отсутствии арбитража дифференциальное уравнения выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r^2 \frac{\partial^2 p}{\partial p^2} - \sigma^2 \gamma r \frac{\partial p}{\partial r} - rp - \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

$$\gamma = \frac{\lambda}{\sigma}$$

Параметр λ демонстрирует рыночную цену риска, в данной модели она является константой. Дифференциальное уравнение решается при условиях[4]

$$p(r, 0) = 1$$

$$p(0, t) = 1$$

[4]МФТИ 1999

$$p(\infty, t) = 0, t > 0$$

и имеет вид:

$$p(r,t) = \frac{1}{\pi^2} x^u \int_0^\infty \sin(2x^{\frac{1}{2}} \sin ha) \int_0^\infty e^{-\frac{(4u^2+\mu^2)s}{4}} \mu \cosh \frac{\pi\mu}{2} |\Gamma(-u+i\frac{\mu}{2})|^2 sin(\mu a) d\mu da +$$

$$+\frac{2}{\Gamma(2u)} x^u K_{2u}(2\sqrt{x})$$

$$x = \frac{2}{\sigma^2} r$$

$$s = \frac{\sigma^2}{2} t$$

$$u = \frac{1}{2} + \gamma$$

Модель Дотана является единственной из всех логнормальных моделей краткосрочных ставок, которая, выражает цену дисконтной облигации в явном виде.

4 Заключение

У каждой из рассмотренных моделей есть как свои преимущества и недостатки. В модели Васичека плюсом является то, что процесс, согласно которому меняется ставка, имеет свойство возврата к среднему, также большим преимуществом Васичека является тот факт, что что он прост в использовании в техническом плане, его легко примеить для аналитической оценки дисконтных облигаций. В то же время у него имеются такие очевидные недостатки, как ненулевая вероятность получить отрицательную процентную ставки, а также сущесвтенным ограничением для применения модели является то, что волатильность шума в ней постоянна, что ограничивает применение в условиях реальной экономики.

По сравнению с моделью Васичека, модель Кокса, Ингерсолла и Росса лишена вероятности спрогнозировать отрицатеьную ставку процента, потому что ставка в нее входит под знаком квадратного корня. Модель также обладает свойством возвращения к своему среднему значению. Еще одним недостатком этой модели является факт, что дисперсия будет расти при росте самой ставки. В модели Васичека такая проблема также есть, только в другом виде - там дисперсия постоянна, то есть никак не зависит от значения спот-ставки.

В модели Дотана процентная ставка распределена логнормально, из чего следует что она всегда положительна, однако у нее есть такой существенный недостаток, как неуклонный рост процентной ставка[5], в результате чего модель может предсказывать бесконечное математическое ожидание доходности. Что касается возвращения к среднему значению, то изначально это не было предусмотрено в рамках модели, однако позже автор модфицировал ее, добавив соответсвующий параметр. Рассмотренные в данной работе процентные ставки, относящиеся к категории моделей общего равновесия, были исследованы в 1980-1990 годах на примере реальных данных и были получены противоречивые результаты касательно их применения, так как каждая модель на одном рынке оказывалась пригодной для применения, а на других нет. Современное состояние рассматриваемой области таково, что пока не разработано модели, способной точно моделировать временную структуру процентной ставки, и исследования активно ведутся и по сей день.

[5]Damiano Brigo, Fabio Mercurio. Interest Rate Models – Theory and Practice With Smile, Inflation and Credit

Список литературы

[1] Damiano Brigo, Fabio Mercurio. Interest Rate Models – Theory and Practice With Smile, Inflation and Credit

[2] S. Zeytun, A. Gupta. A Comparative Study of the Vasicek and the CIR Model of the Short Rate

[3] Cagatay Dagistan.Quantifying the interest rate risk of bonds by simulation.

[4] Matteo Buzzacchi, Jonathan J. Forster. Estimating the parameters of the Vasicek model with aggregate data and serial correlation

[5] Estimating Parameters of Short-Term Real Interest Rate Models. IMF Working Paper. Prepared by Vadim Khramov