

Векторы и операторы

Вектор: длина и скалярное произведение

Краткое напутствие

Зачем нужна **линейная алгебра**?

- Линейная алгебра прекрасна сама по себе!

Краткое напутствие

Зачем нужна **линейная алгебра**?

- Линейная алгебра прекрасна сама по себе!
- Работает «под капотом» практически всех методов машинного обучения.

Краткий план:

- Вектор — это столбец чисел.

Краткий план:

- Вектор — это столбец чисел.
- Сложение двух векторов и умножение на число.

Краткий план:

- Вектор — это столбец чисел.
- Сложение двух векторов и умножение на число.
- Расстояние и косинус угла между векторами.

Вектор

Рабочее определение

Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

Вектор

Рабочее определение

Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

Идея вектора

Вектор — всё, что можно описать столбцом из нескольких чисел.

Вектор

Рабочее определение

Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

Идея вектора

Вектор — всё, что можно описать столбцом из нескольких чисел.

Мы не пишем стрелочку над вектором.

Вектор

Рабочее определение

Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

Идея вектора

Вектор — всё, что можно описать столбцом из нескольких чисел.

Мы не пишем стрелочку над вектором.

Вектор из нулей обозначаем 0.

Пространство \mathbb{R}^n

Определение

Пространство \mathbb{R}^n :

Множество всех возможных векторов из n чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Пространство \mathbb{R}^n

Определение

Пространство \mathbb{R}^n :

Множество всех возможных векторов из n чисел.

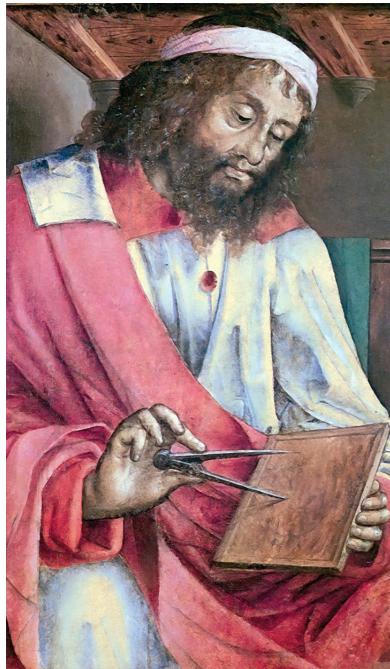
$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Определение

Размерность пространства \mathbb{R}^n :

Количество чисел в каждом векторе, n .

Длина вектора



Евклид, около 300 лет до н.э.

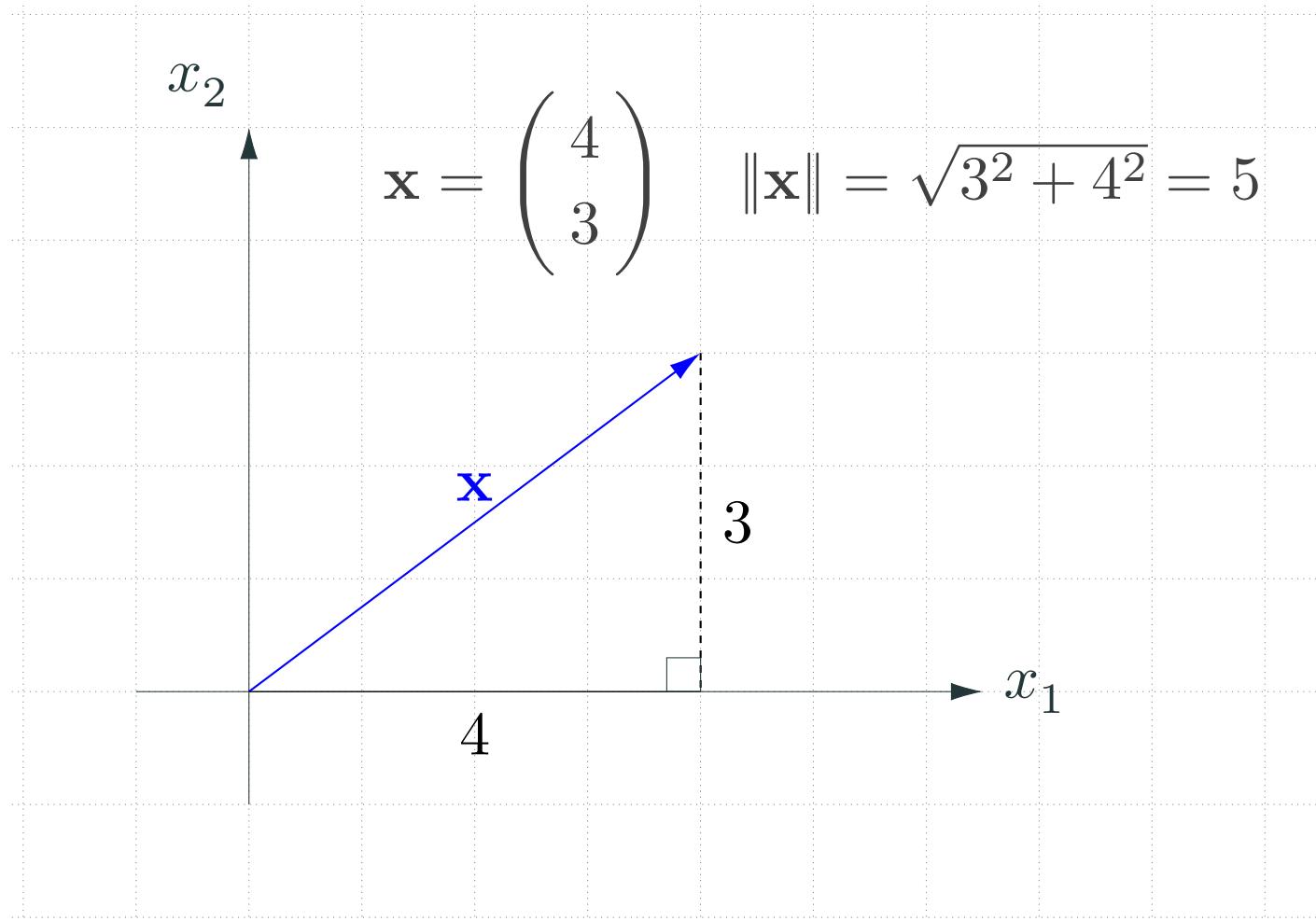
wikipedia.org / общественное достояние

Определение

Евклидова длина или норма
вектора

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Длина вектора

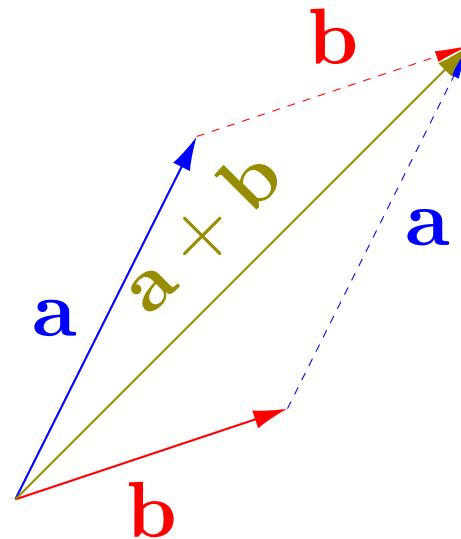


Сложение и вычитание двух векторов

Определение

Сложение и вычитание двух векторов выполняем поэлементно:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3.5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

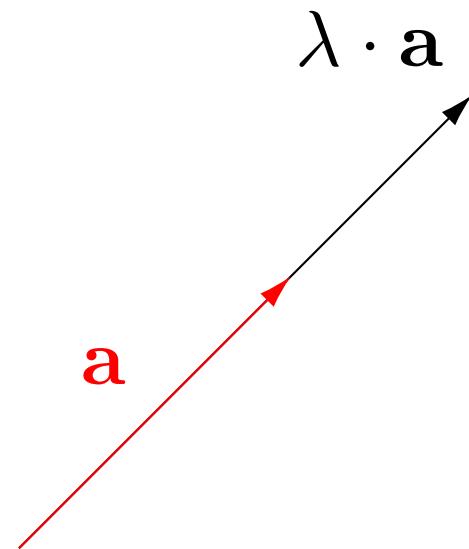


Умножение вектора на число

Определение

Умножение вектора на число выполняем поэлементно:

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3.5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$$



Расстояние между векторами

Определение

Евклидово расстояние между векторами

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$$

Расстояние между векторами

Определение

Евклидово расстояние между векторами

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$$

По определению, $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$.

Также говорят Евклидова метрика.

Расстояние между векторами

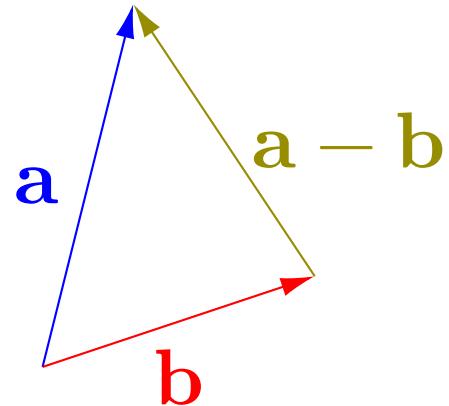
Определение

Евклидово расстояние между векторами

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$$

По определению, $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$.

Также говорят Евклидова метрика.



Скалярное произведение и угол

Определение

Скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} :

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Скалярное произведение и угол

Определение

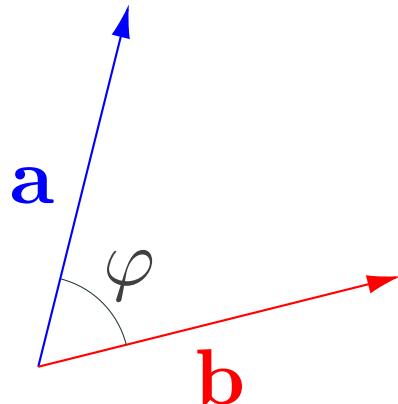
Скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} :

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Определение

Косинус угла и угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} :

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \quad \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \arccos \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$



Угол определён, если $\|\mathbf{a}\| > 0$ и $\|\mathbf{b}\| > 0$.

Свойства скалярного произведения

- Скалярное произведение вектора на себя равно квадрату длины $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$

Свойства скалярного произведения

- Скалярное произведение вектора на себя равно квадрату длины $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$
- Линейность по каждому аргументу
$$\langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$
$$\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$$

Свойства скалярного произведения

- Скалярное произведение вектора на себя равно квадрату длины $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$
- Линейность по каждому аргументу
$$\langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$
$$\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$$
- Симметричность
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$$

Свойства скалярного произведения

- Скалярное произведение вектора на себя равно квадрату длины $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$
- Линейность по каждому аргументу
$$\langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$
$$\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$$
- Симметричность
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$$
- Скалярное произведение для ненулевых векторов
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

Скалярное произведение и проекция

Следствие формулы $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$:

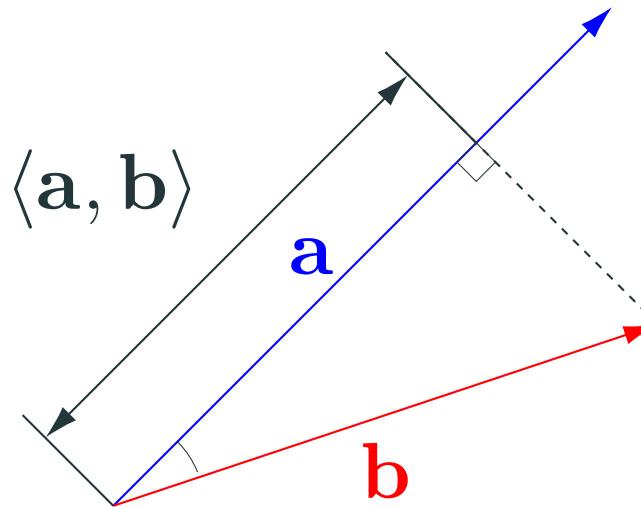
Скалярное произведение и проекция

Следствие формулы $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$:

Утверждение

Если вектор \mathbf{a} имеет единичную длину, $\|\mathbf{a}\| = 1$, то

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — длина* проекции \mathbf{b} на \mathbf{a} .



Ортогональность векторов

Определение

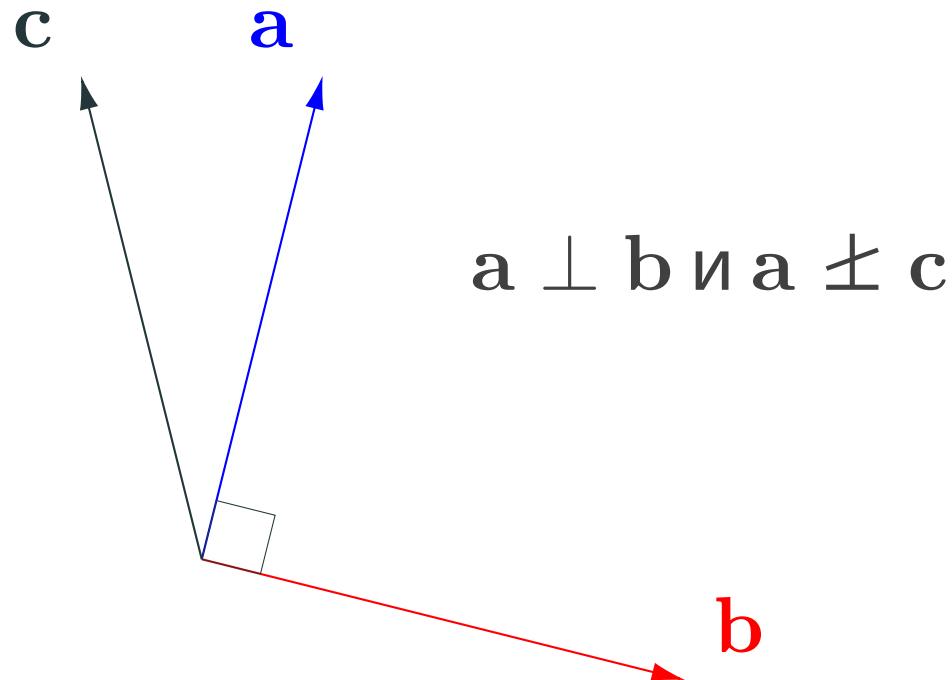
Векторы a и b **ортогональны** (или **перпендикулярны**), $a \perp b$, если

$$\langle a, b \rangle = 0$$

Ортогональность векторов

Для ненулевых векторов $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Условие $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ превращается в $\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.



Прямая, порожденная вектором, гиперплоскость

Краткий план:

- Да будет больше разных расстояний!

Краткий план:

- Да будет больше разных расстояний!
- Делаем из вектора прямую.

Краткий план:

- Да будет больше разных расстояний!
- Делаем из вектора прямую.
- Делаем из вектора гиперплоскость.

Больше метрик в студию!

Определение

Манхэттэнская метрика или расстояние по-Майкопски:

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n|$$

У НИХ — МАНХЭТТЭН

SANITARY & TOPOGRAPHICAL MAP

The image shows a decorative banner or scrollwork design. On the left, the words "of the City" are written in a stylized, flowing font. In the center is a black and white engraving of two figures: one appears to be a Native American in a canoe, and the other is a man in a top hat and coat standing on shore. Between them is a large circular object with a cross on it, resembling a shield or a wheel. On the right, the words "mid Island" are written in a similar flowing font. The entire design is framed by decorative scrollwork.



NEW YORK

Prepared for the Council of Hygiene and Public Health

of the CITIZENS ASSOCIATION.

under the direction of

Topographical Engineer.

EGBERT L. VIELE,

SCALE 1000 FEET TO 1 INCH.



У нас — Майкоп



Ещё больше метрик!

Определение

Метрика Минковского

$$d_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(\sum_{i=1}^n |a_i - b_i|^p \right)^{1/p}$$

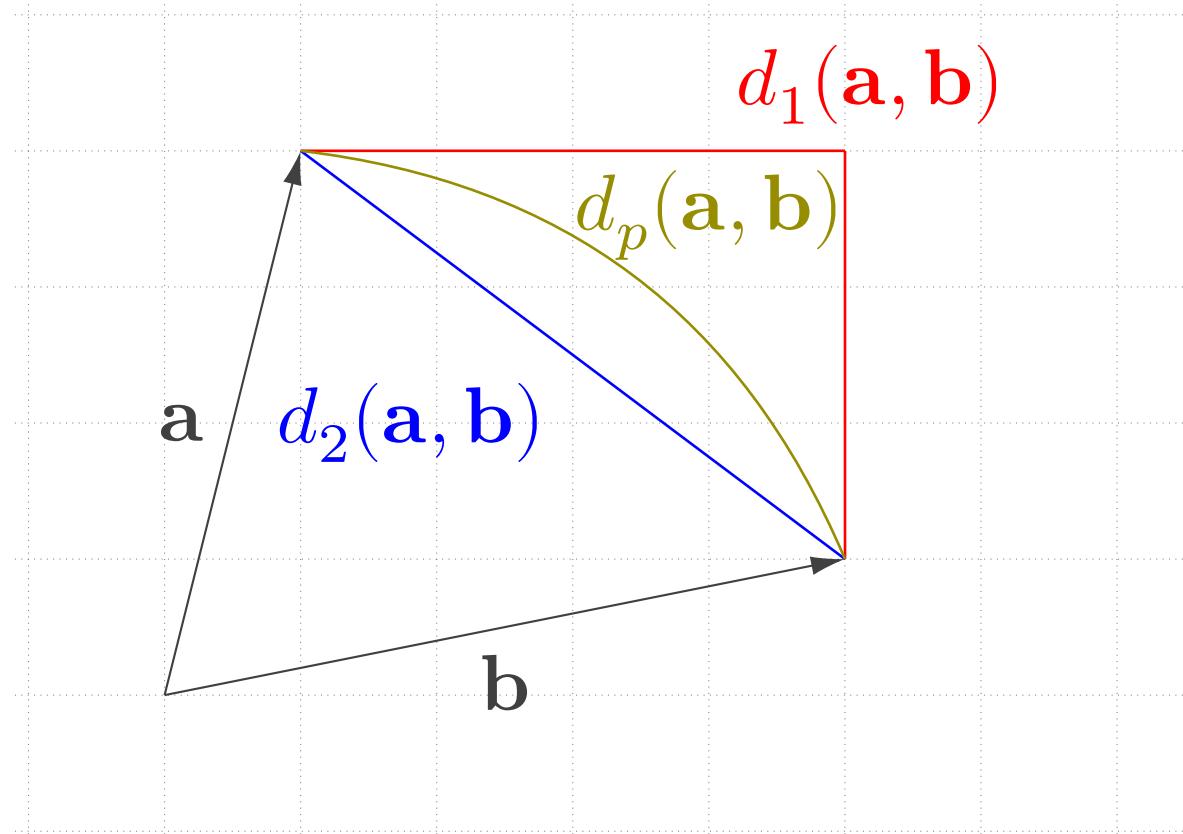
Частные случаи метрики Минковского

Евклидова метрика, $p = 2$

$$d_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$$

Манхэттэнская метрика, $p = 1$

$$d_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n|$$



Вектор порождает прямую

Определение

Прямая порождённая вектором a , $\text{Span } a$

Множество векторов, получаемых при домножении вектора a на произвольное число,

$$\text{Span } \mathbf{a} = \{t \cdot \mathbf{a} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

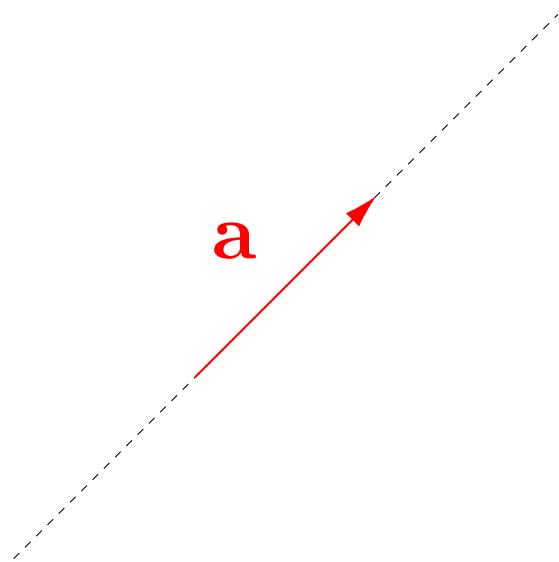
Вектор порождает прямую

Определение

Прямая порождённая вектором a , $\text{Span } a$

Множество векторов, получаемых при умножении вектора a на произвольное число,

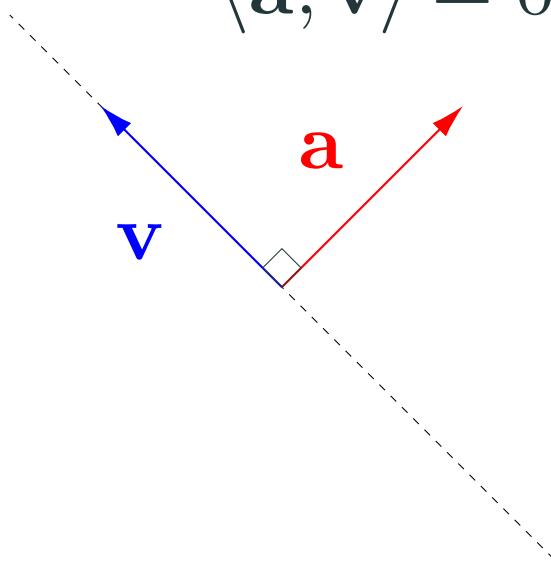
$$\text{Span } a = \{t \cdot a | t \in \mathbb{R}\}$$



Вектор задаёт гиперплоскость

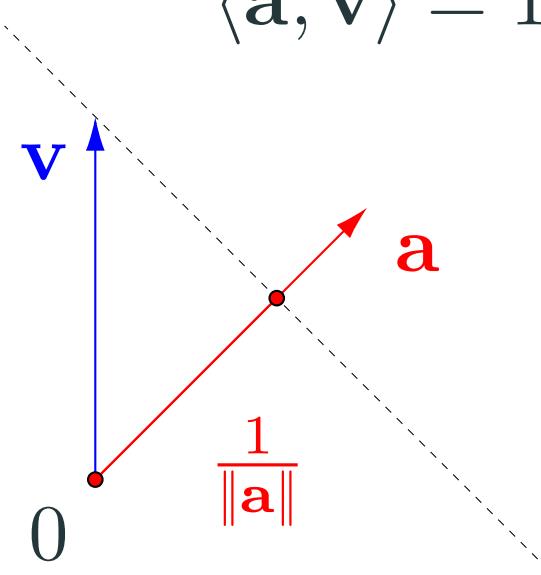
Вектор \mathbf{a} фиксирован, например, $\mathbf{a} = (1, 2)$.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = 0$$



$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = 1$$



$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 1$$

Линейный оператор: определение и примеры

Краткий план:

- Определение линейного оператора.

Краткий план:

- Определение линейного оператора.
- Примеры линейных операторов.

Краткий план:

- Определение линейного оператора.
- Примеры линейных операторов.
- Как из двух операторов сделать новый оператор?

Линейный оператор

Идея линейности:

Результат действия L не изменится,

если поменять местами действие L и

- растягивание вектора, например, $L(42a) = 42L(a)$;

Линейный оператор

Идея линейности:

Результат действия L не изменится,

если поменять местами действие L и

- растягивание вектора, например, $L(42a) = 42 L(a)$;
- усреднение двух векторов,
 $L(0.5a + 0.5b) = 0.5 L(a) + 0.5 L(b)$.

Стандартное определение линейности

Определение

Функция L , превращающая векторы из \mathbb{R}^n в векторы \mathbb{R}^k , называется **линейным оператором** если:

- для любого числа t и вектора $a \in \mathbb{R}^n$: $L(ta) = t L(a)$;

Стандартное определение линейности

Определение

Функция L , превращающая векторы из \mathbb{R}^n в векторы \mathbb{R}^k , называется **линейным оператором** если:

- для любого числа t и вектора $a \in \mathbb{R}^n$: $L(ta) = t L(a)$;
- для любых двух векторов a и b из \mathbb{R}^n :
$$L(a + b) = L(a) + L(b).$$

Стандартное определение линейности

Определение

Функция L , превращающая векторы из \mathbb{R}^n в векторы \mathbb{R}^k , называется **линейным оператором** если:

- для любого числа t и вектора $a \in \mathbb{R}^n$: $L(ta) = t L(a)$;
- для любых двух векторов a и b из \mathbb{R}^n :
$$L(a + b) = L(a) + L(b).$$

Стандартное определение линейности

Определение

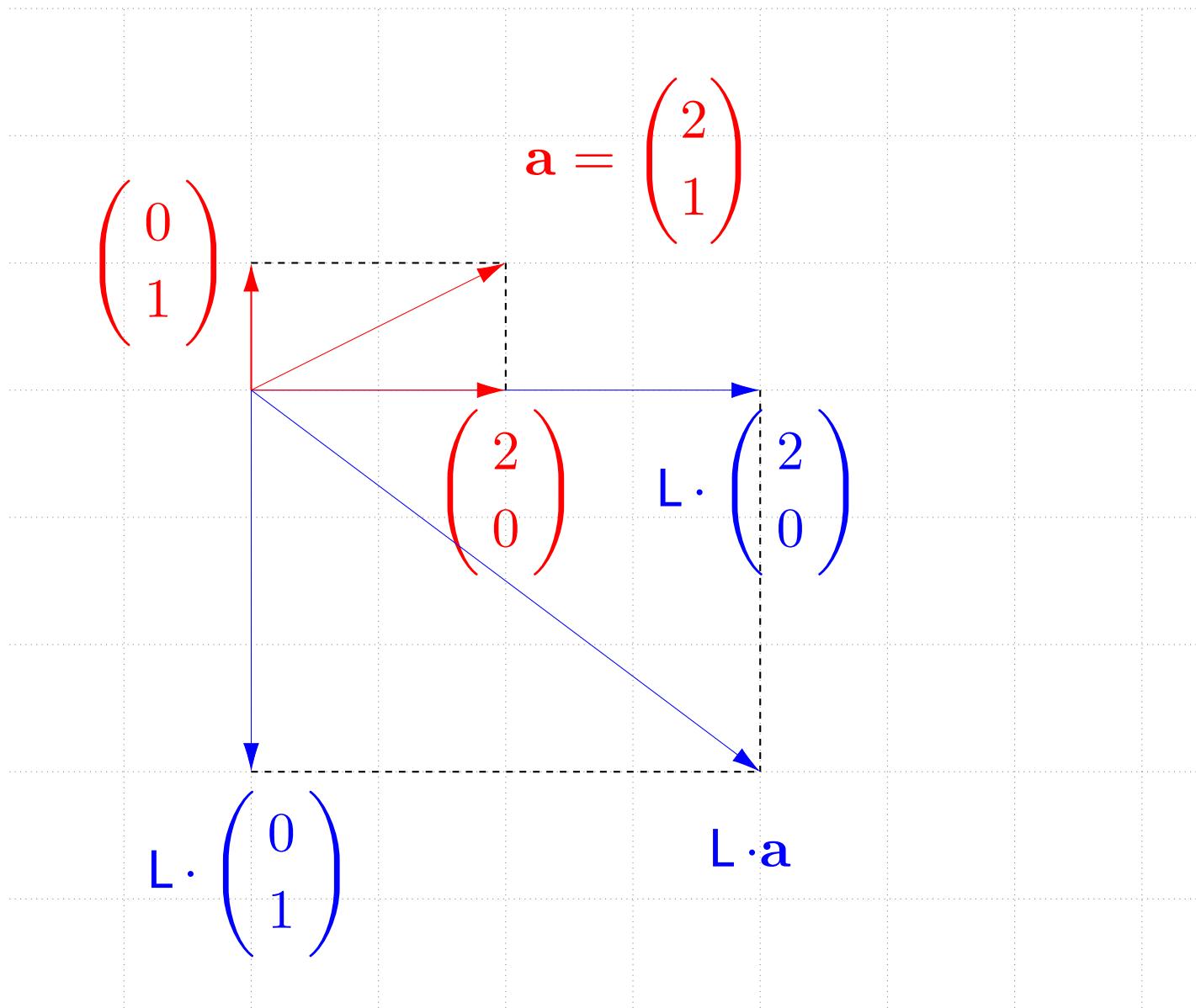
Функция L , превращающая векторы из \mathbb{R}^n в векторы \mathbb{R}^k , называется **линейным оператором** если:

- для любого числа t и вектора $a \in \mathbb{R}^n$: $L(ta) = t L(a)$;
- для любых двух векторов a и b из \mathbb{R}^n :
$$L(a + b) = L(a) + L(b).$$

Вместо скобок часто пишут знак умножения,

$$L(a) \equiv L \cdot a \equiv L a.$$

Линейный оператор



Растягивание координат

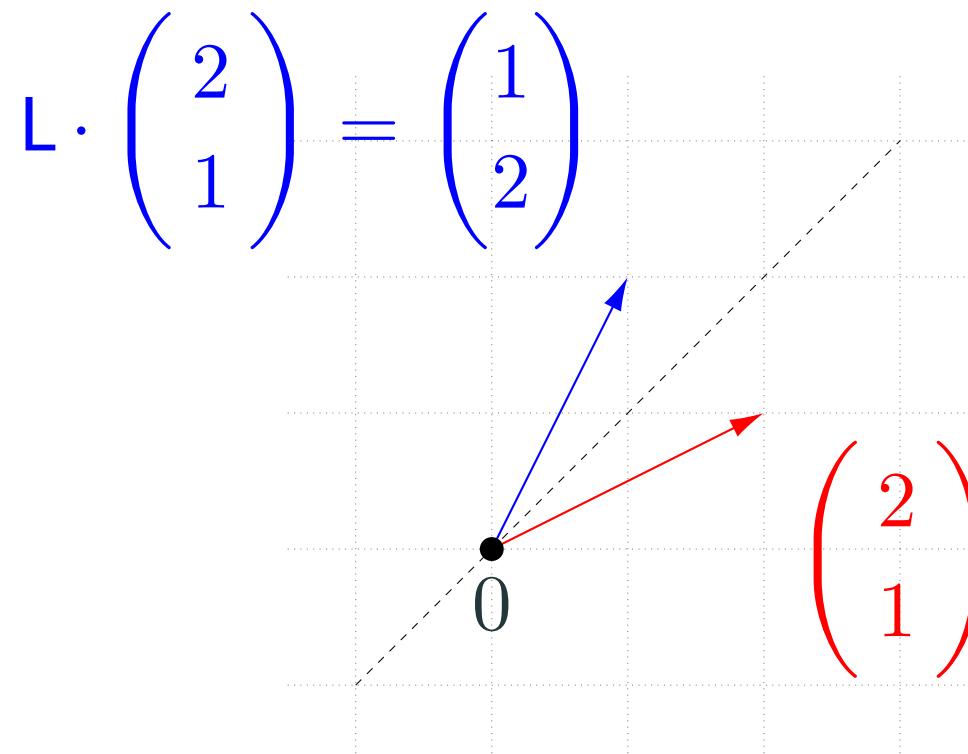
Обобщаем умножение вектора на число!

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

Перестановка координат вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

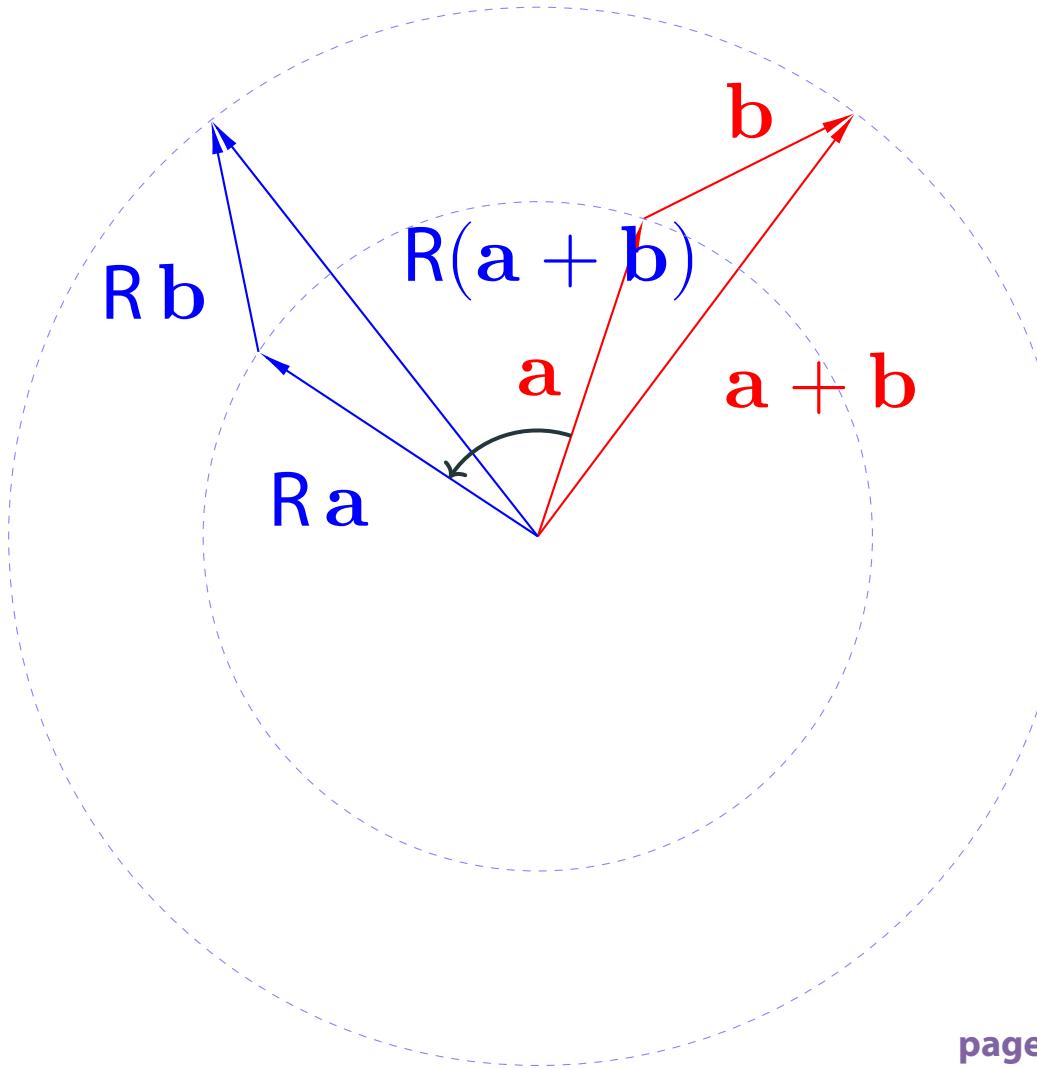
Пример. Отражение относительно $x_1 = x_2$:



Первый поворот

Поворот на 30° против часовой стрелки.

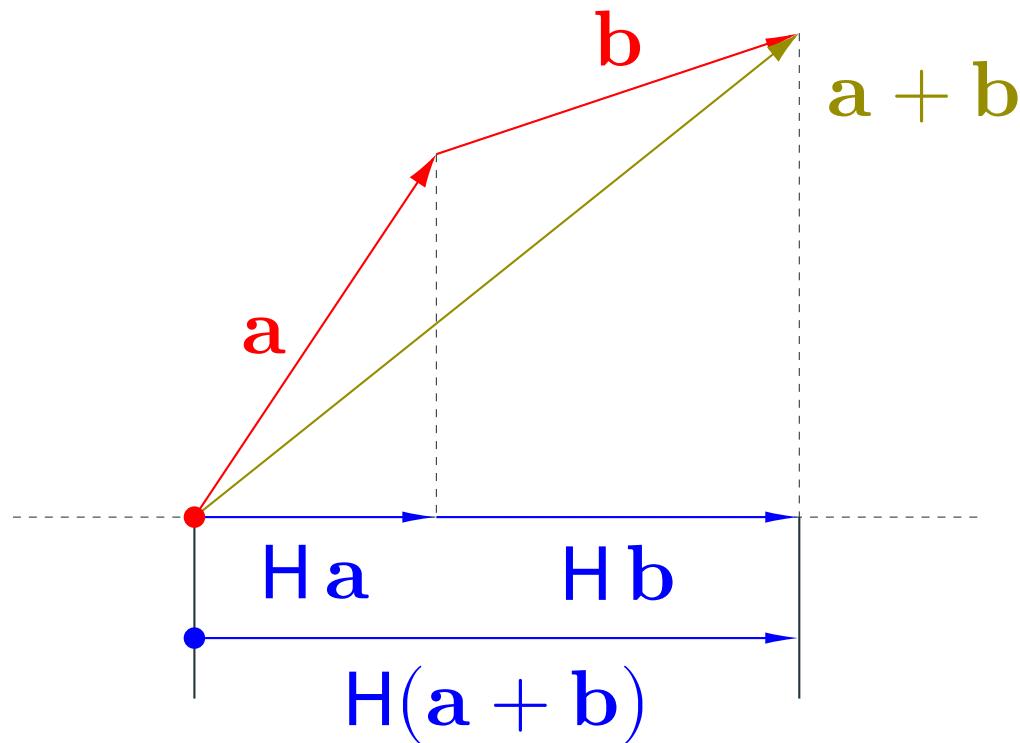
Оператор $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.



Первая проекция

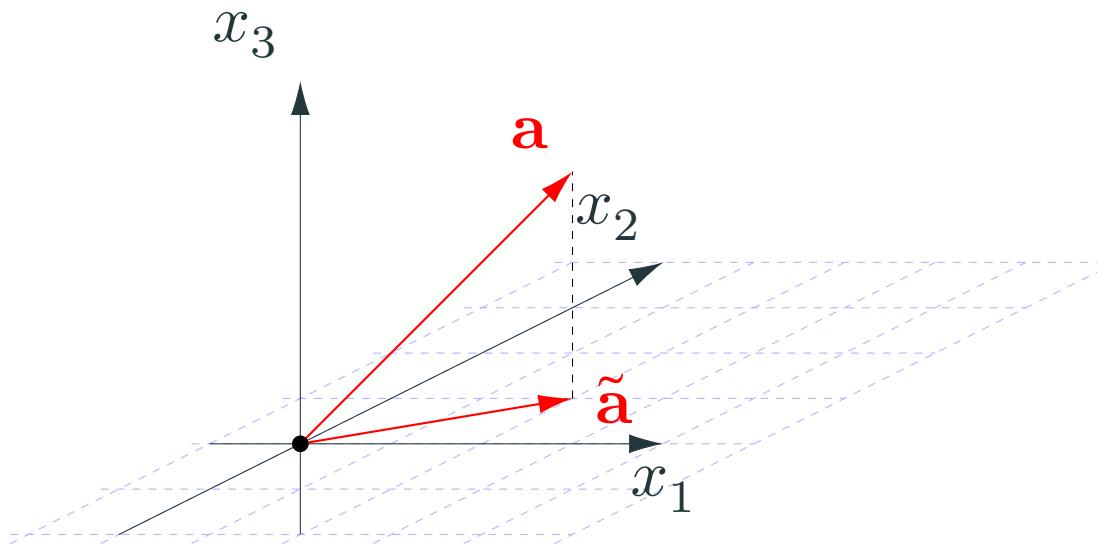
Проекция на прямую ℓ .

Оператор $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

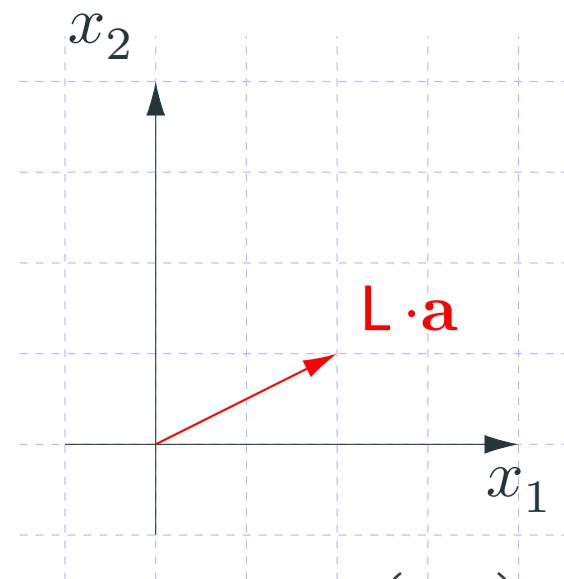


Обрезка компонент вектора

Уменьшаем размерность, $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.



$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

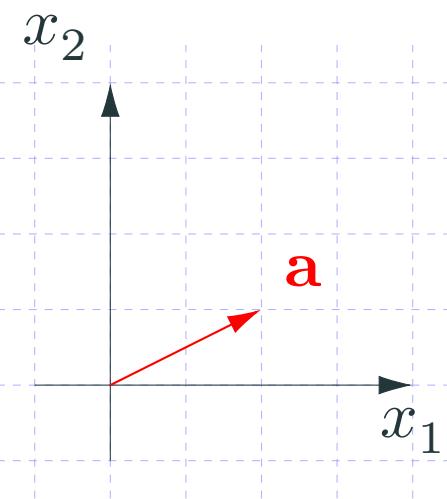


$$L \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

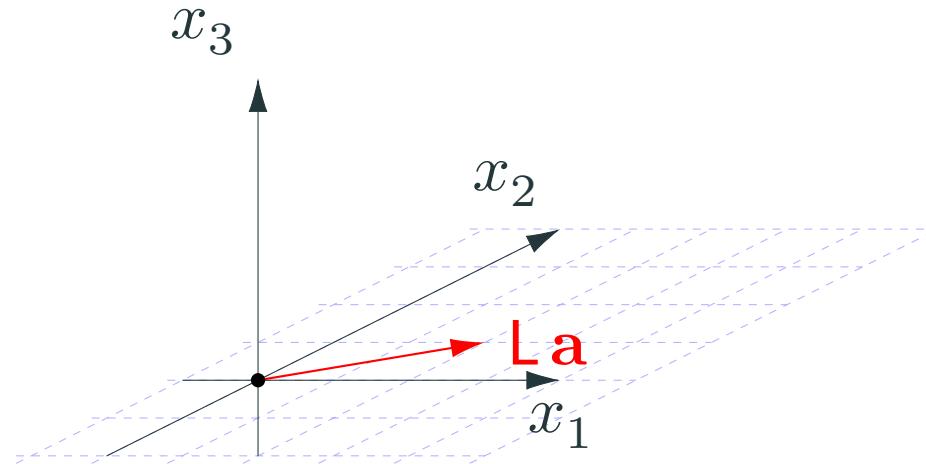
Дописывание нулей

Увеличиваем размерность пространства, L :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$



$$L \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ничегонеделание

Определение

Единичный оператор, I , не меняет ни один вектор:

$$I(\mathbf{a}) = \mathbf{a}.$$

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

Утверждение

Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор, $L_2(L_1(a)) = L(a)$.

Оператор L называется **композицией** или **произведением** операторов L_1 и L_2 .

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

Утверждение

Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор, $L_2(L_1(a)) = L(a)$.

Оператор L называется **композицией** или **произведением** операторов L_1 и L_2 .

Важно: $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $L_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

Утверждение

Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор, $L_2(L_1(\mathbf{a})) = L(\mathbf{a})$.

Оператор L называется **композицией** или **произведением** операторов L_1 и L_2 .

Важно: $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $L_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Доказательство

$$L_2(L_1(t\mathbf{a})) = L_2(t L_1(\mathbf{a})) = t L_2(L_1(\mathbf{a}))$$

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

Утверждение

Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор, $L_2(L_1(\mathbf{a})) = L(\mathbf{a})$.

Оператор L называется **композицией** или **произведением** операторов L_1 и L_2 .

Важно: $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $L_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Доказательство

$$L_2(L_1(t\mathbf{a})) = L_2(t L_1(\mathbf{a})) = t L_2(L_1(\mathbf{a}))$$

$$L_2(L_1(\mathbf{a} + \mathbf{b})) = L_2(L_1(\mathbf{a}) + L_1(\mathbf{b})) = L_2(L_1(\mathbf{a})) + L_2(L_1(\mathbf{b}))$$

Сумма линейных операторов

Утверждение

Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный оператор,

$$L_1(a) + L_2(a) = L(a).$$

Сумма линейных операторов

Утверждение

Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный оператор,

$$L_1(\mathbf{a}) + L_2(\mathbf{a}) = L(\mathbf{a}).$$

Важно: $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $L_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Сумма линейных операторов

Утверждение

Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный оператор,

$$L_1(\mathbf{a}) + L_2(\mathbf{a}) = L(\mathbf{a}).$$

Важно: $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $L_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Доказательство

$$L_1(t\mathbf{a}) + L_2(t\mathbf{a}) = tL_1(\mathbf{a}) + tL_2(\mathbf{a}) = t(L_1(\mathbf{a}) + L_2(\mathbf{a}))$$

Сумма линейных операторов

Утверждение

Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный оператор,

$$L_1(\mathbf{a}) + L_2(\mathbf{a}) = L(\mathbf{a}).$$

Важно: $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $L_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Доказательство

$$L_1(t\mathbf{a}) + L_2(t\mathbf{a}) = tL_1(\mathbf{a}) + tL_2(\mathbf{a}) = t(L_1(\mathbf{a}) + L_2(\mathbf{a}))$$

$$L(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = L_1(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + L_2(\mathbf{a} + \mathbf{b}) =$$

$$L_1(\mathbf{a}) + L_2(\mathbf{a}) + L_1(\mathbf{b}) + L_2(\mathbf{b}) = L(\mathbf{a}) + L(\mathbf{b})$$

Вывод формулы поворота

видеофрагмент с прозрачной доской

В этом видео мы возьмем произвольный вектор на плоскости.

И посмотрим, что из него получится, если повернуть его на 30 градусов против часовой стрелки.

Рисуем единичную окружность, находим e на единичной окружности, поворачиваем x и e .

Смотрим на ответ и подчёркиваем его линейность по аргументам.

Вывод формулы проекции

видеофрагмент с прозрачной доской

В этом видео мы возьмем произвольный вектор x на плоскости.

И посмотрим, что из него получится, если спроектировать его на прямую, порождённую вектором $(1, 2)$.

Минимизируем квадрат расстояния между проекцией и итогом.

Смотрим на ответ и подчёркиваем его линейность по аргументам.

Обращение оператора

Обращение

Определение

Рассмотрим оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Оператор L^{-1} называют **обратным оператором** к L , если

$$L \cdot L^{-1} = L^{-1} \cdot L = I.$$

Обращение

Определение

Рассмотрим оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Оператор L^{-1} называют **обратным оператором** к L , если

$$L \cdot L^{-1} = L^{-1} \cdot L = I.$$

Операторы $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ при $n \neq k$ не обратимы!

Обращение

Определение

Рассмотрим оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Оператор L^{-1} называют **обратным оператором** к L , если

$$L \cdot L^{-1} = L^{-1} \cdot L = I.$$

Операторы $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ при $n \neq k$ не обратимы!

Даже оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ не всегда обратим!

Обращение

Определение

Рассмотрим оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Оператор L^{-1} называют **обратным оператором** к L , если

$$L \cdot L^{-1} = L^{-1} \cdot L = I.$$

Операторы $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ при $n \neq k$ не обратимы!

Даже оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ не всегда обратим!

Для оператора $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ в определении достаточно условия $L \cdot L^{-1} = I$.

Обращение растягивания

Исходный оператор, L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Обращение растягивания

Исходный оператор, L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Обратный оператор, L^{-1} : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1 \\ \frac{1}{-3}a_2 \end{pmatrix}$.

Обращение растягивания

Исходный оператор, $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Обратный оператор, $L^{-1} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1 \\ \frac{1}{-3}a_2 \end{pmatrix}$.

$$L^{-1} L = I.$$

Обращение перестановки двух компонент

Исходный оператор, $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

Обращение перестановки двух компонент

Исходный оператор, L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

Обратный оператор, L^{-1} : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

Обращение перестановки двух компонент

Исходный оператор, $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

Обратный оператор, $L^{-1} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

$$L^{-1} L = I.$$

Обращение перестановки двух компонент

Исходный оператор, $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

Обратный оператор, $L^{-1} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

$$L^{-1} L = I.$$

Обратный оператор равен исходному, $L^{-1} = L$.

Обращение перестановки компонент

Исходный оператор, L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

Обращение перестановки компонент

Исходный оператор, L :
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Обратный оператор, L^{-1} :
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Обращение перестановки компонент

Исходный оператор, L :
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Обратный оператор, L^{-1} :
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

$$L^{-1} L = I.$$

Обращение единичного оператора

Исходный оператор, I : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

Обращение единичного оператора

Исходный оператор, I : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

Обратный оператор, I^{-1} : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

Обращение единичного оператора

Исходный оператор, I : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

Обратный оператор, I^{-1} : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

$$I^{-1}I = I.$$

Обращение единичного оператора

Исходный оператор, $I : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

Обратный оператор, $I^{-1} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

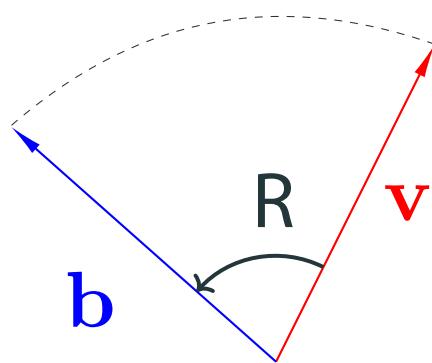
$$I^{-1}I = I.$$

Обратный оператор равен исходному, $I^{-1} = I$.

Обращение поворота

Исходный оператор, $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, поворот плоскости на 30° против часовой стрелки.

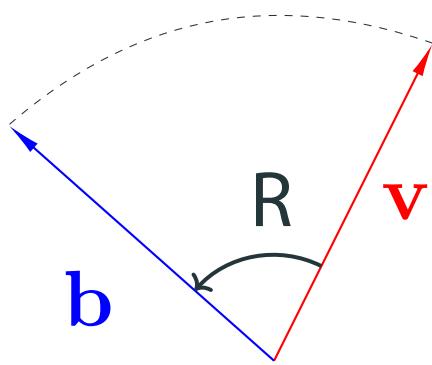
$$R v = b \text{ или } v = R^{-1} b$$



Обращение поворота

Исходный оператор, $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, поворот плоскости на 30° против часовой стрелки.

$$R v = b \text{ или } v = R^{-1} b$$



Обратный оператор, $R^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, поворот плоскости на 30° по часовой стрелке, $R^{-1}R = I$.

Не все действия обратимы!

По определению, исходный оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Не все действия обратимы!

По определению, исходный оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Исходный оператор $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, проекция на прямую ℓ .

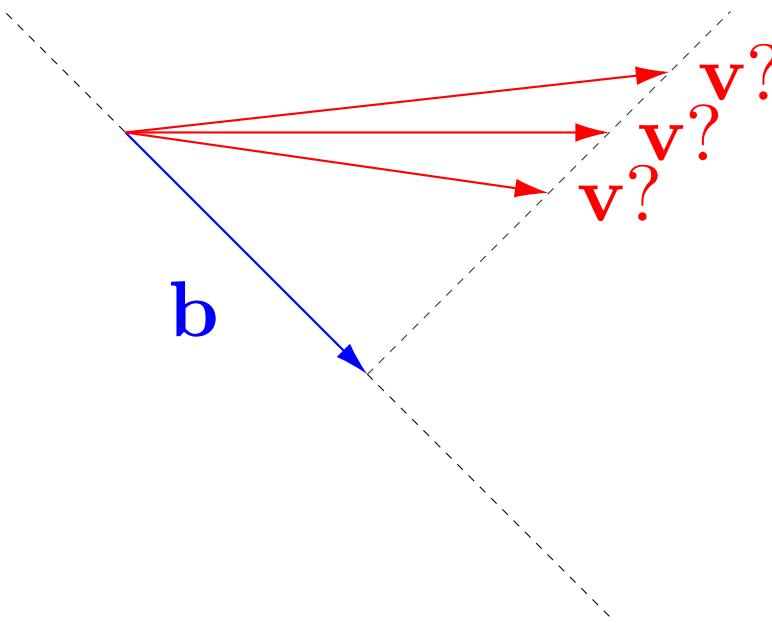
Не все действия обратимы!

По определению, исходный оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Исходный оператор $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, проекция на прямую ℓ .

Обратный оператор H^{-1} **не существует!**

$$H v = b$$



Транспонирование оператора и ортогональность

Транспонирование

У любого оператора L есть брат L^T .

Транспонирование

У любого оператора L есть брат L^T .

Определение

Транспонированным оператором, L^T , называется оператор, для которого

$$\langle La, b \rangle = \langle a, L^T b \rangle, \text{ и } \langle a, L b \rangle = \langle L^T a, b \rangle.$$

Транспонирование

Почему L и L^T операторы-«братья»?

Транспонирование

Почему L и L^T операторы-«братья»?

Утверждение

$$(L^T)^T = L$$

Транспонирование

Почему L и L^T операторы-«братья»?

Утверждение

$$(L^T)^T = L$$

Доказательство

$$\langle La, b \rangle = \langle a, L^T b \rangle = \langle L^T b, a \rangle = \langle b, (L^T)^T a \rangle = \langle (L^T)^T a, b \rangle$$

Транспонирование

Почему L и L^T операторы-«братья»?

Утверждение

$$(L^T)^T = L$$

Доказательство

$$\langle La, b \rangle = \langle a, L^T b \rangle = \langle L^T b, a \rangle = \langle b, (L^T)^T a \rangle = \langle (L^T)^T a, b \rangle$$

Если $\langle c, b \rangle = \langle d, b \rangle$ для всех b , то $c = d$.

Транспонирование растяжения

Исходный оператор, $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Транспонирование растяжения

Исходный оператор, $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

$$\langle L\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 2a_1b_1 - 3a_2b_2 = \langle \mathbf{a}, L\mathbf{b} \rangle.$$

Транспонирование растяжения

Исходный оператор, $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

$$\langle L\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 2a_1b_1 - 3a_2b_2 = \langle \mathbf{a}, L\mathbf{b} \rangle.$$

Транспонированный оператор равен исходному, $L^T = L$.

Транспонирование поворота

Исходный оператор L — поворот на плоскости на 30° против часовой стрелки.

Транспонирование поворота

Исходный оператор L — поворот на плоскости на 30° против часовой стрелки. Поворот не меняет длины векторов.

Транспонирование поворота

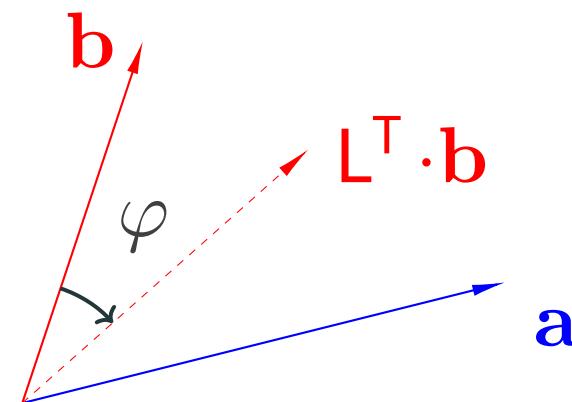
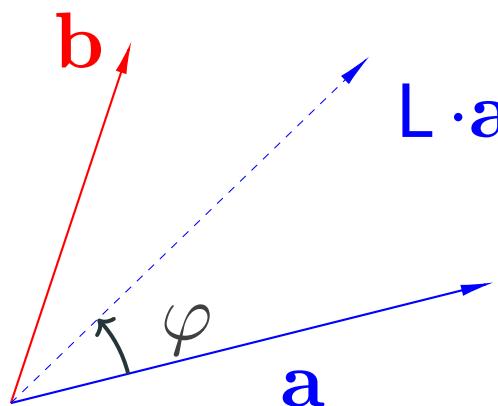
Исходный оператор L — поворот на плоскости на 30° против часовой стрелки. Поворот не меняет длины векторов.

Для равенства $\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle$ достаточно условия $\angle(L \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, L^T \mathbf{b})$.

Транспонирование поворота

Исходный оператор L — поворот на плоскости на 30° против часовой стрелки. Поворот не меняет длины векторов.

Для равенства $\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle$ достаточно условия $\angle(L \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, L^T \mathbf{b})$.

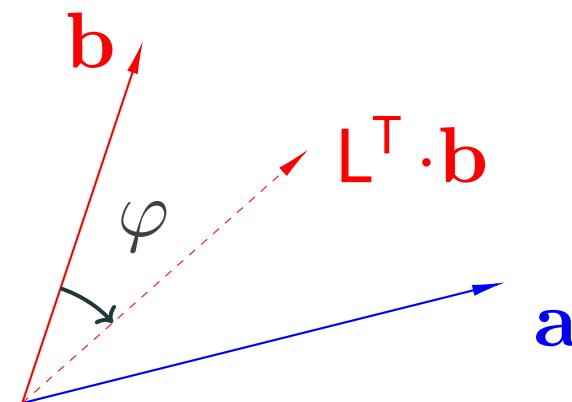
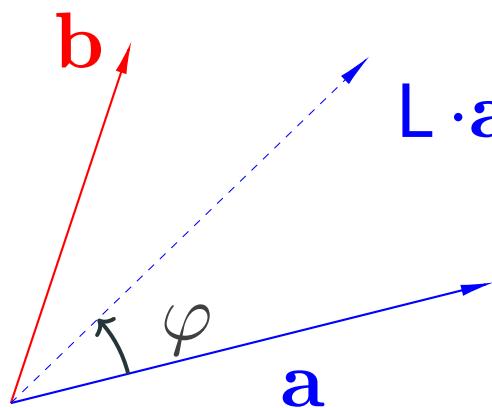


L^T — поворот на плоскости на 30° по часовой стрелке.

Транспонирование поворота

Исходный оператор L — поворот на плоскости на 30° против часовой стрелки. Поворот не меняет длины векторов.

Для равенства $\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle$ достаточно условия $\angle(L \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, L^T \mathbf{b})$.



L^T — поворот на плоскости на 30° по часовой стрелке.

Транспонированный оператор совпадает с обратным,
 $L^T = L^{-1}$

Транспонирование дописывания нуля

Исходный оператор $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}^2$, $b \in \mathbb{R}^3$,

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Транспонирование дописывания нуля

Исходный оператор $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3,$

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 \cdot b_3.$$

Транспонирование дописывания нуля

Исходный оператор $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R}^3,$

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\langle La, b \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 \cdot b_3.$$

Третья компонента вектора b не важна!

Транспонирование дописывания нуля

Исходный оператор $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R}^3,$

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\langle La, b \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 \cdot b_3.$$

Третья компонента вектора b не важна!

$$L^T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$L : \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Транспонирование дописывания нуля

Исходный оператор $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3,$

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\langle L\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + 0 \cdot b_3.$$

Третья компонента вектора \mathbf{b} не важна!

$$L^T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$L : \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

$$\langle \mathbf{a}, L\mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Транспонирование дописывания нуля

Исходный оператор $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3,$

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\langle L\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + 0 \cdot b_3.$$

Третья компонента вектора \mathbf{b} не важна!

$L^T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2,$

$$L : \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

$$\langle \mathbf{a}, L\mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = a_1b_1 + a_2b_2.$$

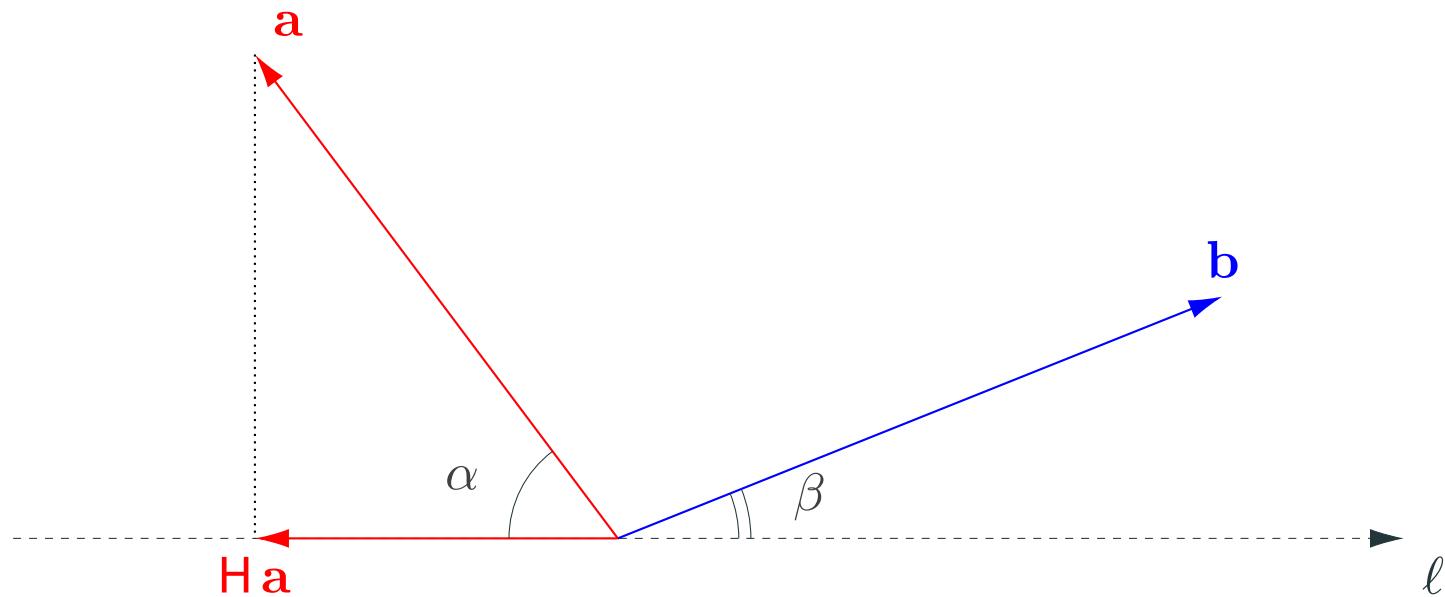
Транспонированный оператор L^T — удаление третьей компоненты вектора.

Транспонирование проекции

Исходный оператор $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, проекция на прямую ℓ .

Транспонирование проекции

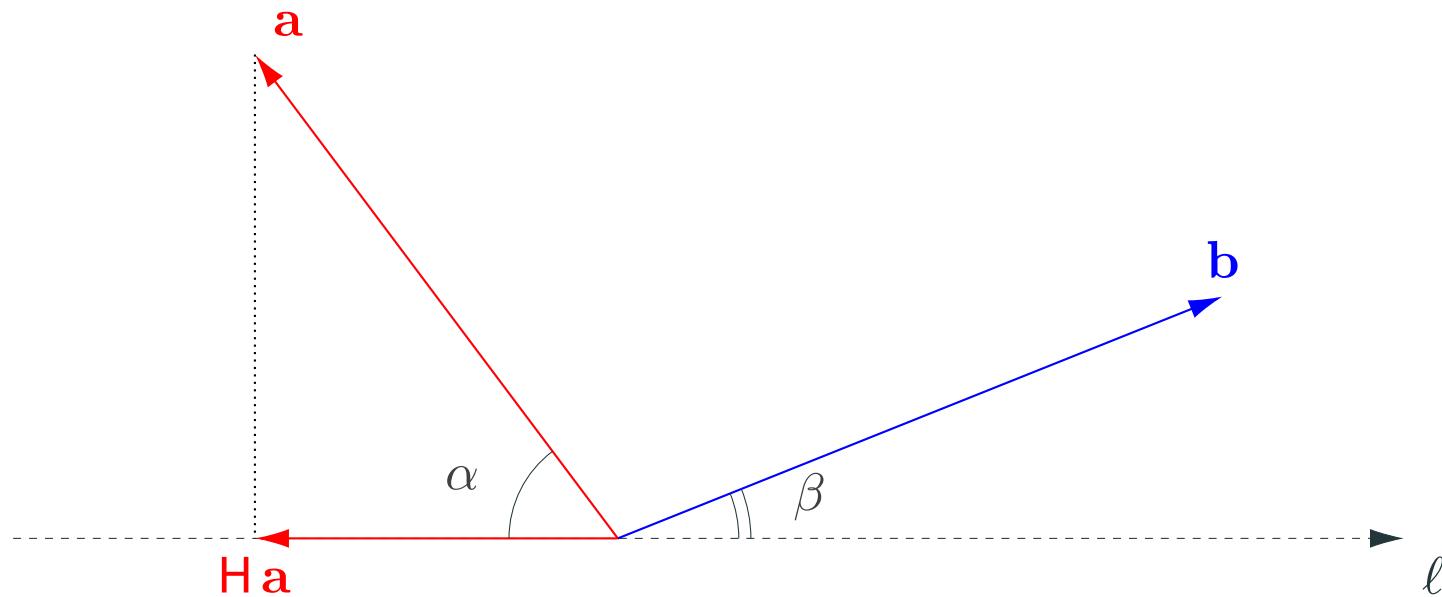
Исходный оператор $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, проекция на прямую ℓ .



$$\langle Ha, b \rangle = \|Ha\| \cdot \|b\| \cdot \cos(\langle Ha, b \rangle) = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos \alpha \cos \beta = \langle a, Hb \rangle$$

Транспонирование проекции

Исходный оператор $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, проекция на прямую ℓ .



$$\langle Ha, b \rangle = \|Ha\| \cdot \|b\| \cdot \cos(\langle Ha, b \rangle) = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos \alpha \cos \beta = \langle a, Hb \rangle$$

Транспонированный оператор равен исходному, $H^T = H$.

Ортогональный оператор

Определение

Оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется **ортогональным**, если

- оператор сохраняет длины, $\|L\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$;
- оператор сохраняет углы, $\angle(L\mathbf{a}, L\mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Ортогональный оператор

Определение

Оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется **ортогональным**, если

- оператор сохраняет длины, $\|L\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$;
- оператор сохраняет углы, $\angle(L\mathbf{a}, L\mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Эквивалентное определение

Оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется **ортогональным**, если

$$\langle L\mathbf{a}, L\mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

Ортогональный оператор

Определение

Оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется **ортогональным**, если

- оператор сохраняет длины, $\|L\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$;
- оператор сохраняет углы, $\angle(L\mathbf{a}, L\mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Эквивалентное определение

Оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется **ортогональным**, если

$$\langle L\mathbf{a}, L\mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

Эквивалентное определение

Оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется **ортогональным**, если

$$L^T = L^{-1}.$$

Ортогональный оператор: примеры

- Перестановка двух компонент вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Ортогональный оператор: примеры

- Перестановка двух компонент вектора
 $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}.$
- Поворот на плоскости на 30° против часовой стрелки.

Полтора доказательства эквивалентности

Утверждение

Сохранение длин и углов эквивалентно сохранению скалярного произведения.

Полтора доказательства эквивалентности

Утверждение

Сохранение длин и углов эквивалентно сохранению скалярного произведения.

Доказательство

Скалярное произведение задаёт углы и длины:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}, \quad \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

Полтора доказательства эквивалентности

Утверждение

Сохранение длин и углов эквивалентно сохранению скалярного произведения.

Доказательство

Скалярное произведение задаёт углы и длины:

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}, \quad \cos \angle(a, b) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|}$$

Длина и угол задают скалярное произведение:

$$\langle a, b \rangle = \|a\| \|b\| \cos \angle(a, b)$$

Полтора доказательства эквивалентности

Утверждение

Условие $L^T = L^{-1}$ эквивалентно сохранению скалярного произведения.

Полтора доказательства эквивалентности

Утверждение

Условие $L^T = L^{-1}$ эквивалентно сохранению скалярного произведения.

Половина доказательства

$$\langle La, b \rangle = \langle a, L^T b \rangle = \langle a, L^{-1} b \rangle.$$

Полтора доказательства эквивалентности

Утверждение

Условие $L^T = L^{-1}$ эквивалентно сохранению скалярного произведения.

Половина доказательства

$$\langle La, b \rangle = \langle a, L^T b \rangle = \langle a, L^{-1} b \rangle.$$

Обозначаем $c = L^{-1} b$ и получаем $\langle La, L c \rangle = \langle a, c \rangle$.

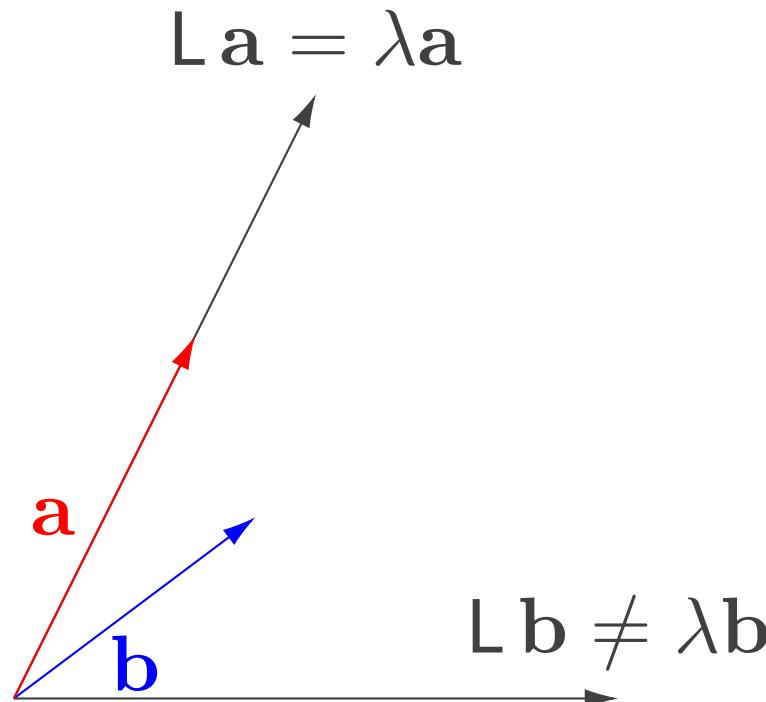
Собственные векторы и собственные числа

Собственные векторы и собственные числа

Определение

Если для оператора $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ найдётся такой вектор v , что $L v = \lambda \cdot v$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, то:

- вектор v называется **собственным**;
- число λ называется **собственным**.



Собственные векторы: растягивание осей

Оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Собственные вектора: растягивание осей

Оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Собственные векторы, домножаемые на $\lambda = 2$:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Собственные вектора: растягивание осей

Оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Собственные векторы, домножаемые на $\lambda = 2$:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Собственные векторы, домножаемые на $\lambda = -3$:

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Собственные вектора: перестановка a_i

Оператор L — перестановка компонент вектора:

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Собственные вектора: перестановка a_i

Оператор L — перестановка компонент вектора:

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы, домножаемые на $\lambda = 1$:

Содержат одинаковые числа на переставляемых местах,

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ x \\ a_3 \\ x \end{pmatrix}$$

Собственные векторы: поворот

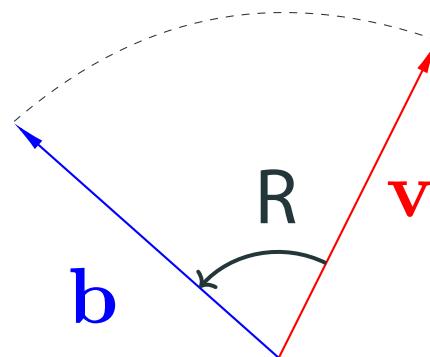
Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!

Собственные векторы: поворот

Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!

Исходный оператор $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, поворот на 30° против часовой стрелки.

$$R v = b$$

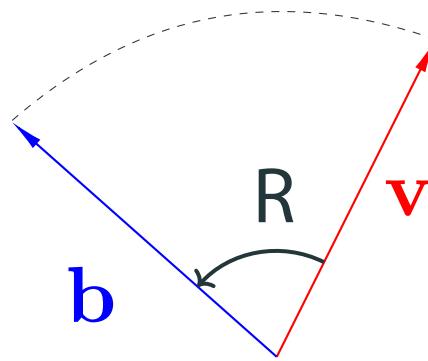


Собственные векторы: поворот

Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!

Исходный оператор $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, поворот на 30° против часовой стрелки.

$$R v = b$$



Ни собственных векторов, ни чисел нет!

Собственные вектора: проекция

Оператор L — проекция на прямую ℓ .

Собственные вектора: проекция

Оператор L — проекция на прямую ℓ .

Собственные векторы, домножаемые на $\lambda = 1$:

Любой вектор v , лежащий на прямой ℓ .

Собственные вектора: проекция

Оператор L — проекция на прямую ℓ .

Собственные векторы, домножаемые на $\lambda = 1$:

Любой вектор v , лежащий на прямой ℓ .

Собственные векторы, домножаемые на $\lambda = 0$:

Любой вектор v , ортогональный прямой ℓ .

Резюме

- Вектор — столбец чисел.

Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.

Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.

Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.
- Примеры: поворот, проекция, перестановка компонент, растягивание осей.

Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.
- Примеры: поворот, проекция, перестановка компонент, растягивание осей.
- Обращение и транспонирование.

Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.
- Примеры: поворот, проекция, перестановка компонент, растягивание осей.
- Обращение и транспонирование.
- Собственные векторы растягиваются в собственное число раз.

Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.
- Примеры: поворот, проекция, перестановка компонент, растягивание осей.
- Обращение и транспонирование.
- Собственные векторы растягиваются в собственное число раз.
- Бонус: как выиграть в Ним?

Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.
- Примеры: поворот, проекция, перестановка компонент, растягивание осей.
- Обращение и транспонирование.
- Собственные векторы растягиваются в собственное число раз.
- Бонус: как выиграть в Ним?

Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.
- Примеры: поворот, проекция, перестановка компонент, растягивание осей.
- Обращение и транспонирование.
- Собственные векторы растягиваются в собственное число раз.
- Бонус: как выиграть в Ним?

Следующая лекция: запись оператора с помощью матрицы.

Игра Ним

**это видео является бонусным, поэтому ничего нет
страшного, что с ним выходит много видео, или оно
будет долгое**

**В начале фрагмента идёт слайд с правилами затем
видеофрагмент с прозрачной доской**

Игра Ним

- Есть три кучки с камнями: 3, 5 и 8 камней;
- Два игрока ходят по очереди;
- За ход:
 - игрок выбирает одну кучку;
 - берёт из неё положительное число камней;
- Выигрывает берущий последний камень.

Какой ход сделать первому игроку?

видео с доской

Краткое содержание:

закодируем каждую кучку двоичным вектором

стоимость позиции — сумма этих двух векторов

финальная позиция имеет стоимость ноль

любой ход из нулевой позиции ведёт в положительную

Из положительной позиции можно попасть в нулевую

С помощью нижней единички убиваем остальные

Выигрышный ход: взять 2 камня из кучки в 8 камней