Векторы и операторы

Вектор: длина и скалярное произведение

Краткое напутствие

Зачем нужна линейная алгебра?

- Линейная алгебра прекрасна сама по себе!

Краткое напутствие

Зачем нужна линейная алгебра?

- Линейная алгебра прекрасна сама по себе!
- Работает «под капотом» практически всех методов машинного обучения.

Краткий план:

- Вектор — это столбец чисел.

Краткий план:

- Вектор — это столбец чисел.
- Сложение двух векторов и умножение на число.

Краткий план:

- Вектор — это столбец чисел.
- Сложение двух векторов и умножение на число.
- Расстояние и косинус угла между векторами.

Вектор

Рабочее определение

Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

Вектор

Рабочее определение

Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

Идея вектора

Вектор — всё, что можно описать столбцом из нескольких чисел.

Вектор

Рабочее определение

Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

Идея вектора

Вектор — всё, что можно описать столбцом из нескольких чисел.

Мы не пишем стрелочку над вектором.

Вектор

Рабочее определение

Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

Идея вектора

Вектор — всё, что можно описать столбцом из нескольких чисел.

Мы не пишем стрелочку над вектором.

Вектор из нулей обозначаем $\mathbf{0}$.

Пространство $\mathbb{R}^n$

Определение

Пространство $\mathbb{R}^n$:

Множество всех возможных векторов из n чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Пространство $\mathbb{R}^n$

Определение

Пространство $\mathbb{R}^n$:

Множество всех возможных векторов из n чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Определение

Размерность пространства $\mathbb{R}^n$:

Количество чисел в каждом векторе, n.

Длина вектора

Евклид, около 300 лет до н.э.

wikipedia.org / общественное достояние

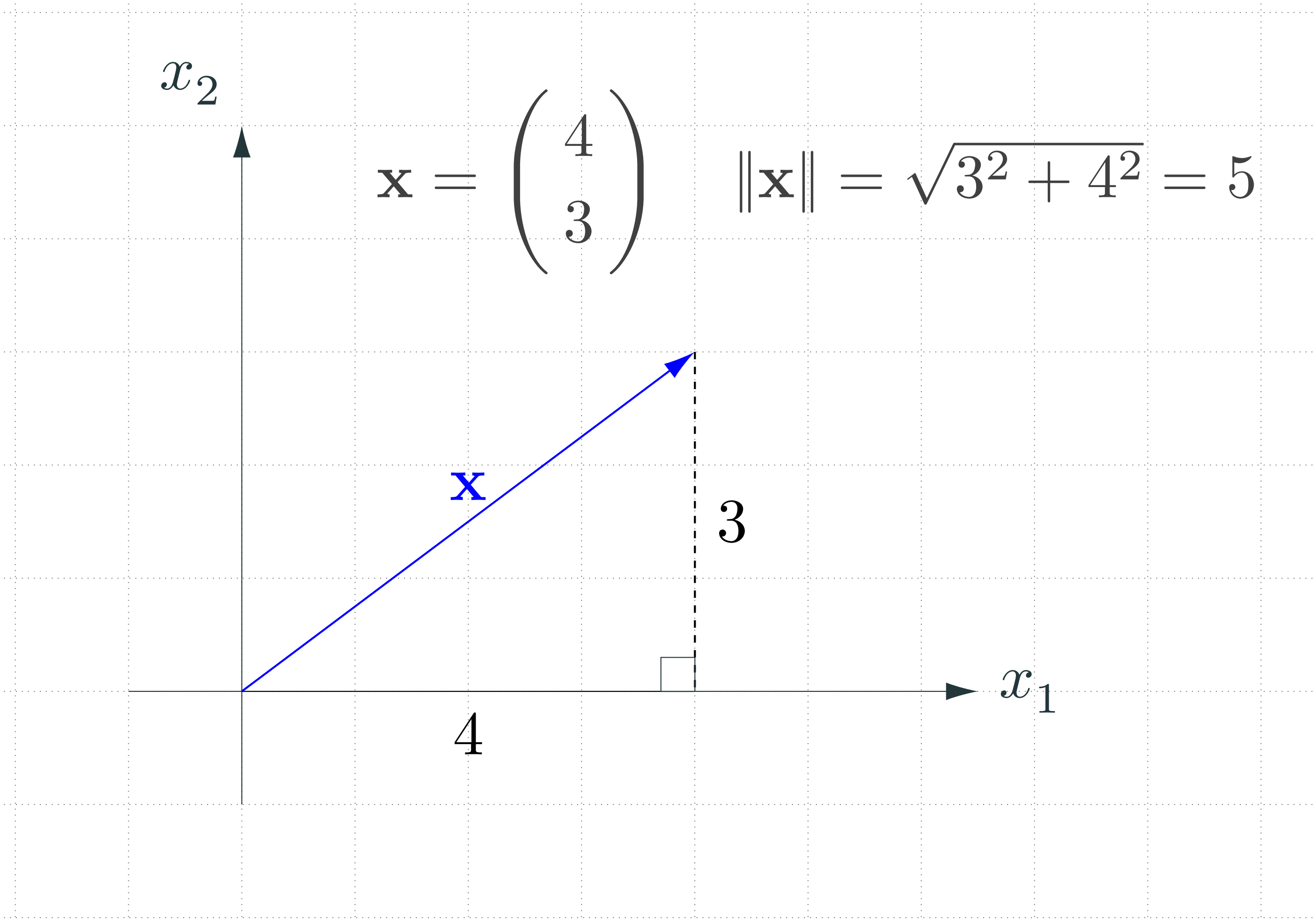
Определение

Евклидова длина или норма вектора

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Длина вектора

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

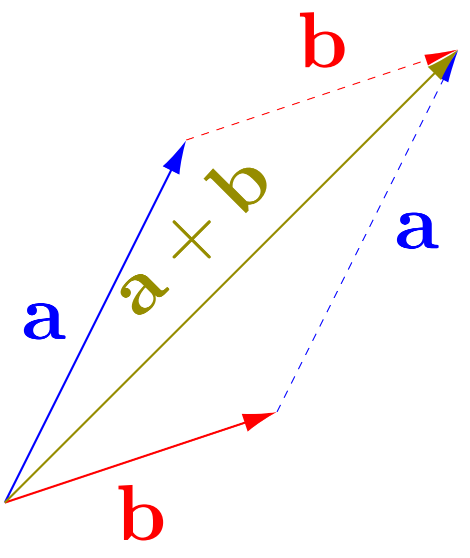


Сложение и вычитание двух векторов

Определение

Сложение и вычитание двух векторов выполняем поэлементно:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3.5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

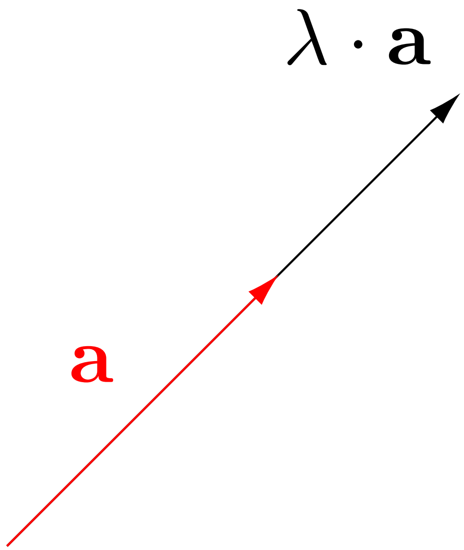


Умножение вектора на число

Определение

Умножение вектора на число выполняем поэлеметно:

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3.5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$$



Расстояние между векторами

Определение

Евклидово расстояние между векторами

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + ... + (a_n - b_n)^2}$$

Расстояние между векторами

Определение

Евклидово расстояние между векторами

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}$$

По определению, $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$.

Также говорят Евклидова метрика.

Расстояние между векторами

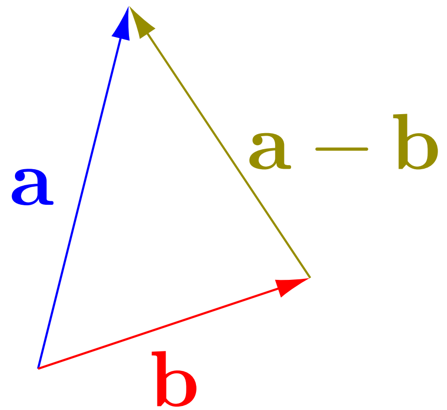
Определение

Евклидово расстояние между векторами

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}$$

По определению, $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$.

Также говорят Евклидова метрика.



Скалярное произведение и угол

Определение

Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n.$$

Скалярное произведение и угол

Определение

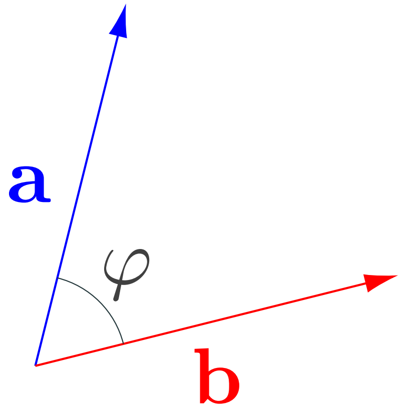
Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

Определение

Косинус угла и угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \quad \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \arccos \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$



Угол определён, если $\|\mathbf{a}\| > 0$ и $\|\mathbf{b}\| > 0$.

Свойства скалярного произведения

- Скалярное произведение вектора на себя равно квадрату длины $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$

Свойства скалярного произведения

- Скалярное произведение вектора на себя равно квадрату длины $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$
- Линейность по каждому аргументу
$\langle \lambda\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda\mathbf{b} \rangle = \lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$
$\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$

Свойства скалярного произведения

- Скалярное произведение вектора на себя равно квадрату длины $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$
- Линейность по каждому аргументу
  $\langle \lambda\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda\mathbf{b} \rangle = \lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$
  $\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$
- Симметричность
  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$

Свойства скалярного произведения

- Скалярное произведение вектора на себя равно квадрату длины $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$
- Линейность по каждому аргументу
  $\langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$
  $\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$
- Симметричность
  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$
- Скалярное произведение для ненулевых векторов
  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Скалярное произведение и проекция

Следствие формулы $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$:

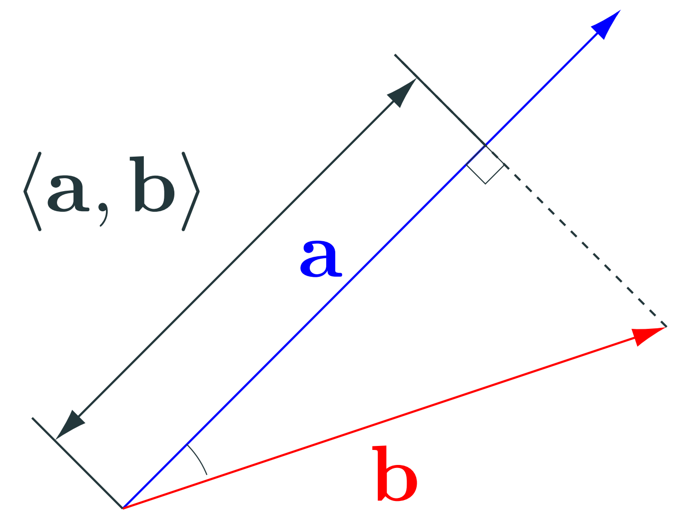
Скалярное произведение и проекция

Следствие формулы $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$:

Утверждение

Если вектор $\mathbf{a}$ имеет единичную длину, $\|\mathbf{a}\| = 1$, то

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — длина* проекции b на a.



Ортогональность векторов

Определение

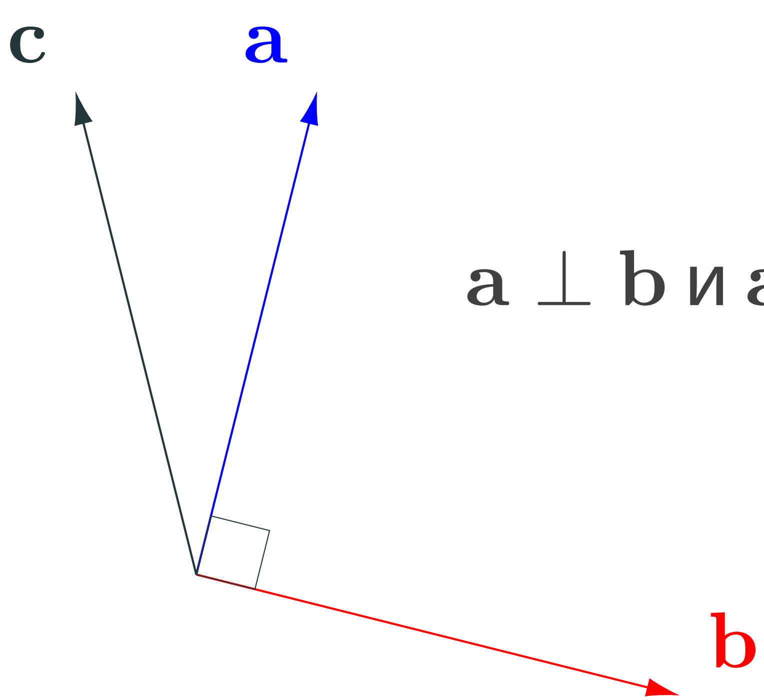
Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны (или перпендикулярны), $a \perp b$, если

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$$

Ортогональность векторов

Для ненулевых векторов $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Условие $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ превращается в $\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.



$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \not\perp \mathbf{c}$

Прямая, порожденная вектором, гиперплоскость

Краткий план:

- Да будет больше разных расстояний!

Краткий план:

- Да будет больше разных расстояний!
- Делаем из вектора прямую.

Краткий план:

- Да будет больше разных расстояний!
- Делаем из вектора прямую.
- Делаем из вектора гиперплоскость.

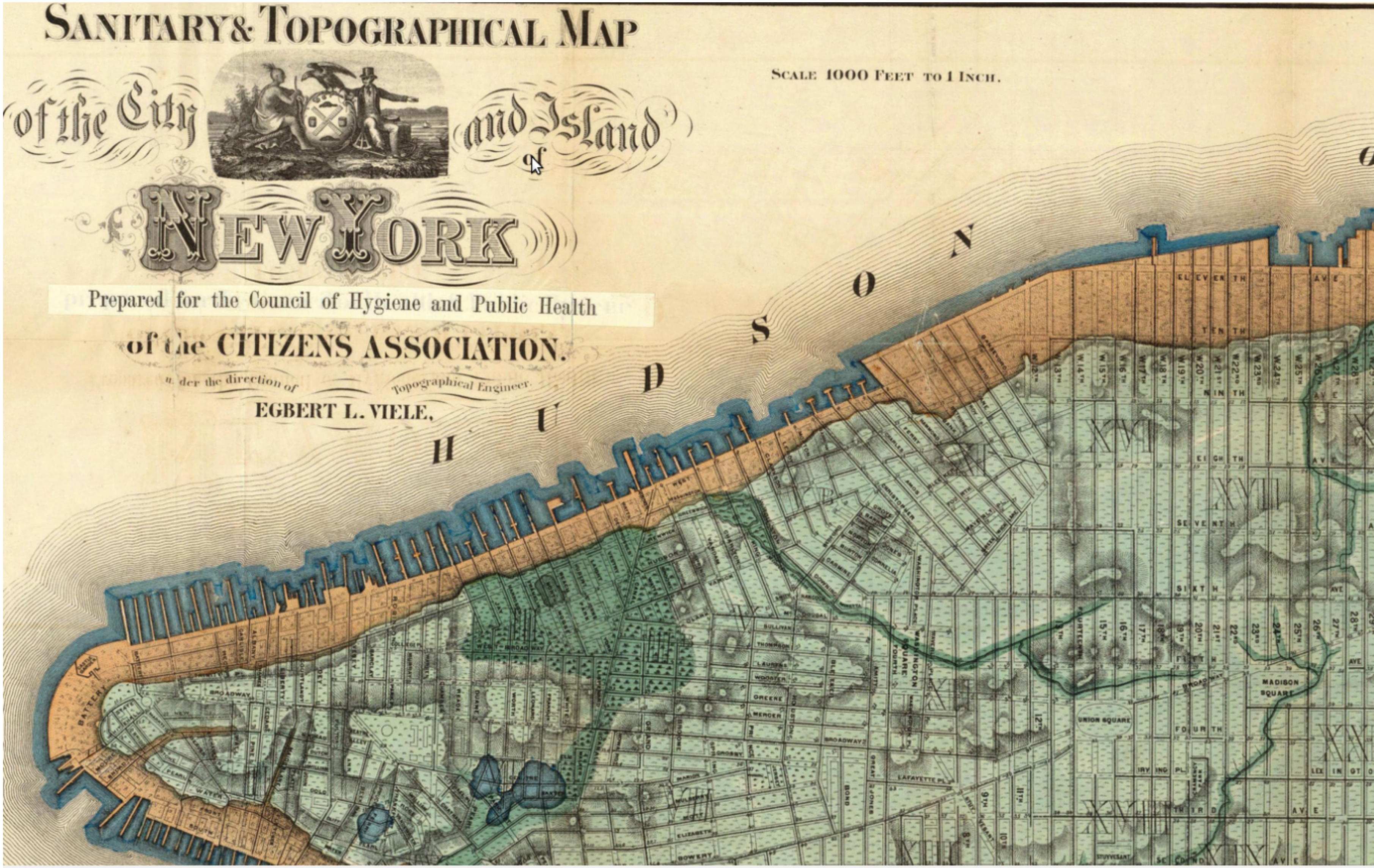
Больше метрик в студию!

Определение

Манхэттэнская метрика или расстояние по-Майкопски:

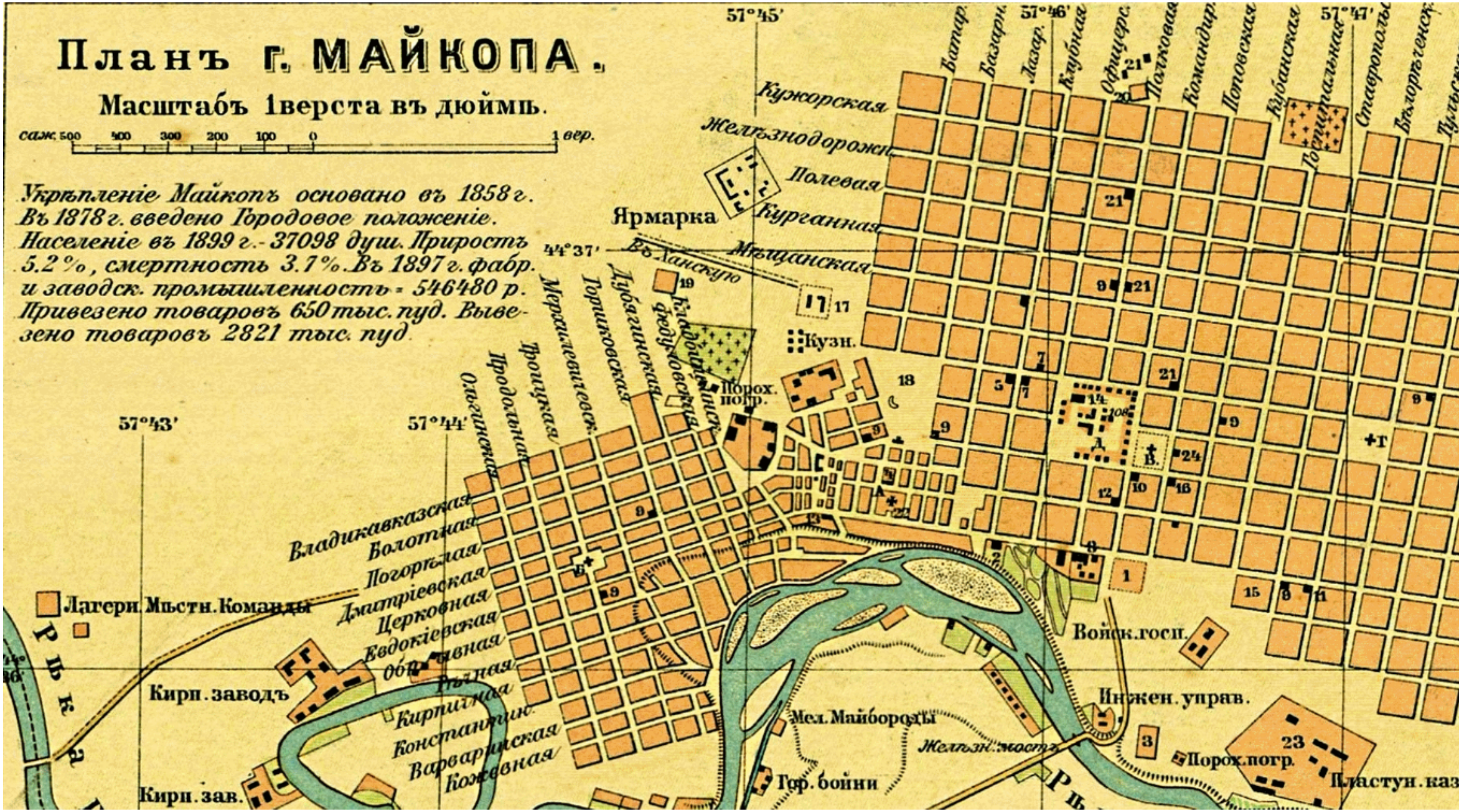
$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n|$$

У них — Манхэттэн



wikipedia.org / общественное достояние

У нас — Майкоп



wikipedia.org / общественное достояние

Ещё больше метрик!

Определение

Метрика Минковского

$$d_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|^p \right)^{1/p}$$

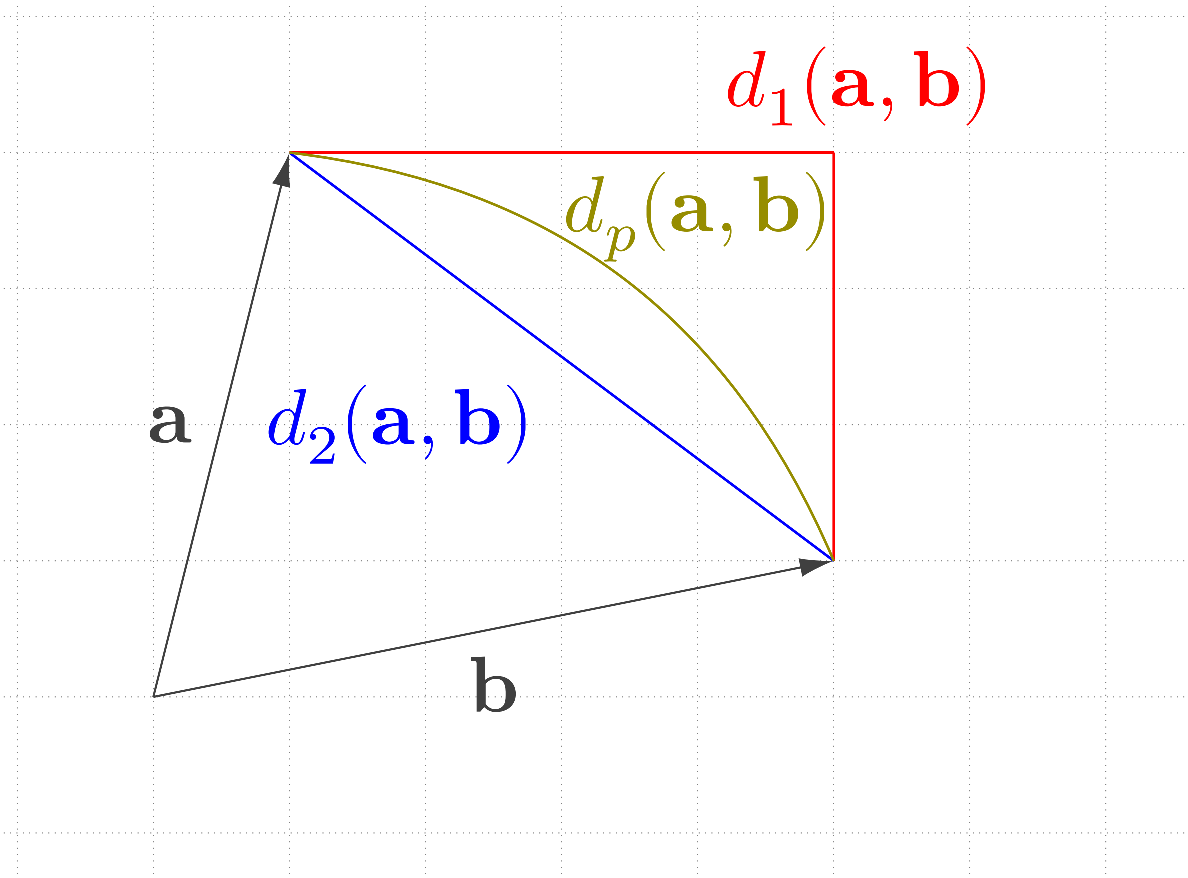
Частные случаи метрики Минковского

Евклидова метрика, $p = 2$

$$d_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + ... + (a_n - b_n)^2}$$

Манхэттэнская метрика, $p = 1$

$$d_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_n - b_n|$$



Вектор порождает прямую

Определение

Прямая порождённая вектором a, Span a

Множество векторов, получаемых при домножении вектора a на произвольное число,

$$\operatorname{Span} \mathbf{a} = \{t \cdot \mathbf{a} | t \in \mathbb{R}\}$$

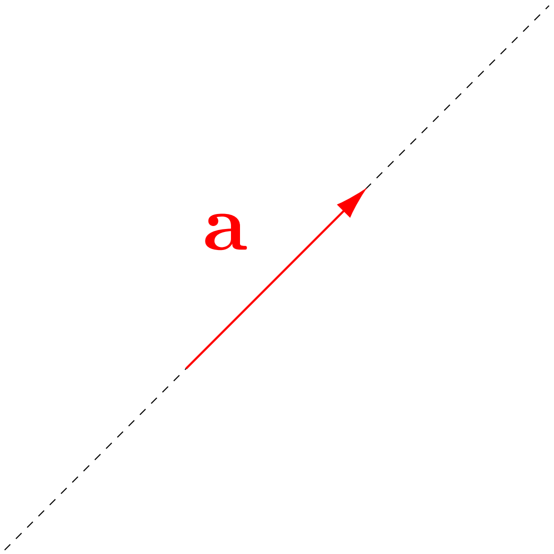
Вектор порождает прямую

Определение

Прямая порождённая вектором a, Span a

Множество векторов, получаемых при домножении вектора a на произвольное число,

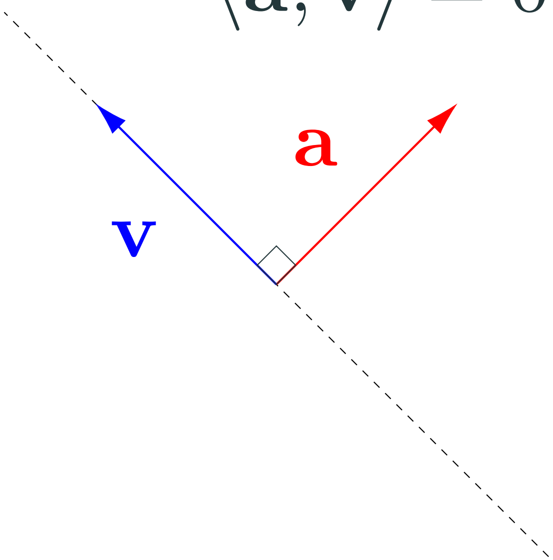
$$\operatorname{Span}\mathbf{a} = \{t \cdot \mathbf{a} | t \in \mathbb{R}\}$$



Вектор задаёт гиперплоскость

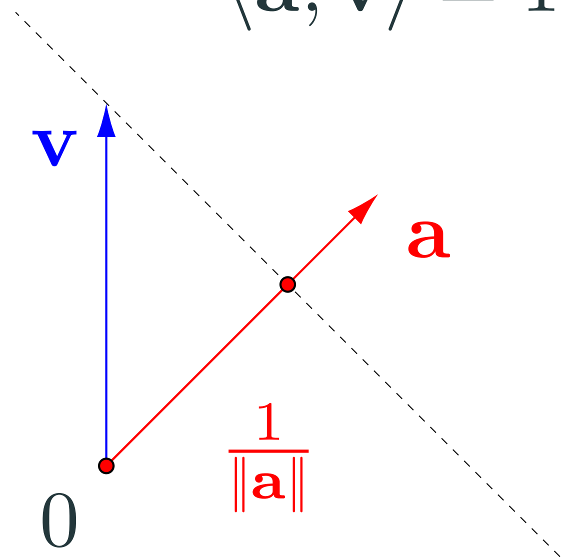
Вектор $\mathbf{a}$ фиксирован, например, $\mathbf{a} = (1, 2)$.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = 0$$



$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = 1$$



$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 1$$

Линейный оператор: определение и примеры

Краткий план:

- Определение линейного оператора.

Краткий план:

- Определение линейного оператора.
- Примеры линейных операторов.

Краткий план:

- Определение линейного оператора.
- Примеры линейных операторов.
- Как из двух операторов сделать новый оператор?

Линейный оператор

Идея линейности:

Результат действия L не изменится,

если поменять местами действие L и

- растягивание вектора, например, $\mathsf{L}(42a) = 42\,\mathsf{L}(a)$;

Линейный оператор

Идея линейности:

Результат действия L не изменится,

если поменять местами действие L и

- растягивание вектора, например, $\mathsf{L}(42a) = 42\,\mathsf{L}(a)$;
- усреднение двух векторов,
  $\mathsf{L}(0.5a + 0.5b) = 0.5\,\mathsf{L}(a) + 0.5\,\mathsf{L}(b)$.

Стандартное определение линейности

Определение

Функция L, превращающая векторы из $\mathbb{R}^n$ в векторы $\mathbb{R}^k$, называется линейным оператором если:

- для любого числа t и вектора $a \in \mathbb{R}^n$: $\mathsf{L}(ta) = t\,\mathsf{L}(a)$;

Стандартное определение линейности

Определение

Функция L, превращающая векторы из $\mathbb{R}^n$ в векторы $\mathbb{R}^k$, называется линейным оператором если:

- для любого числа t и вектора $a \in \mathbb{R}^n$: $\mathsf{L}(ta) = t\,\mathsf{L}(a)$;
- для любых двух векторов a и b из $\mathbb{R}^n$: $\mathsf{L}(a + b) = \mathsf{L}(a) + \mathsf{L}(b)$.

Стандартное определение линейности

Определение

Функция L, превращающая векторы из $\mathbb{R}^n$ в векторы $\mathbb{R}^k$, называется линейным оператором если:

- для любого числа t и вектора $a \in \mathbb{R}^n$: $\mathsf{L}(ta) = t\,\mathsf{L}(a)$;
- для любых двух векторов a и b из $\mathbb{R}^n$:
  $\mathsf{L}(a+b) = \mathsf{L}(a) + \mathsf{L}(b)$.

Стандартное определение линейности

Определение

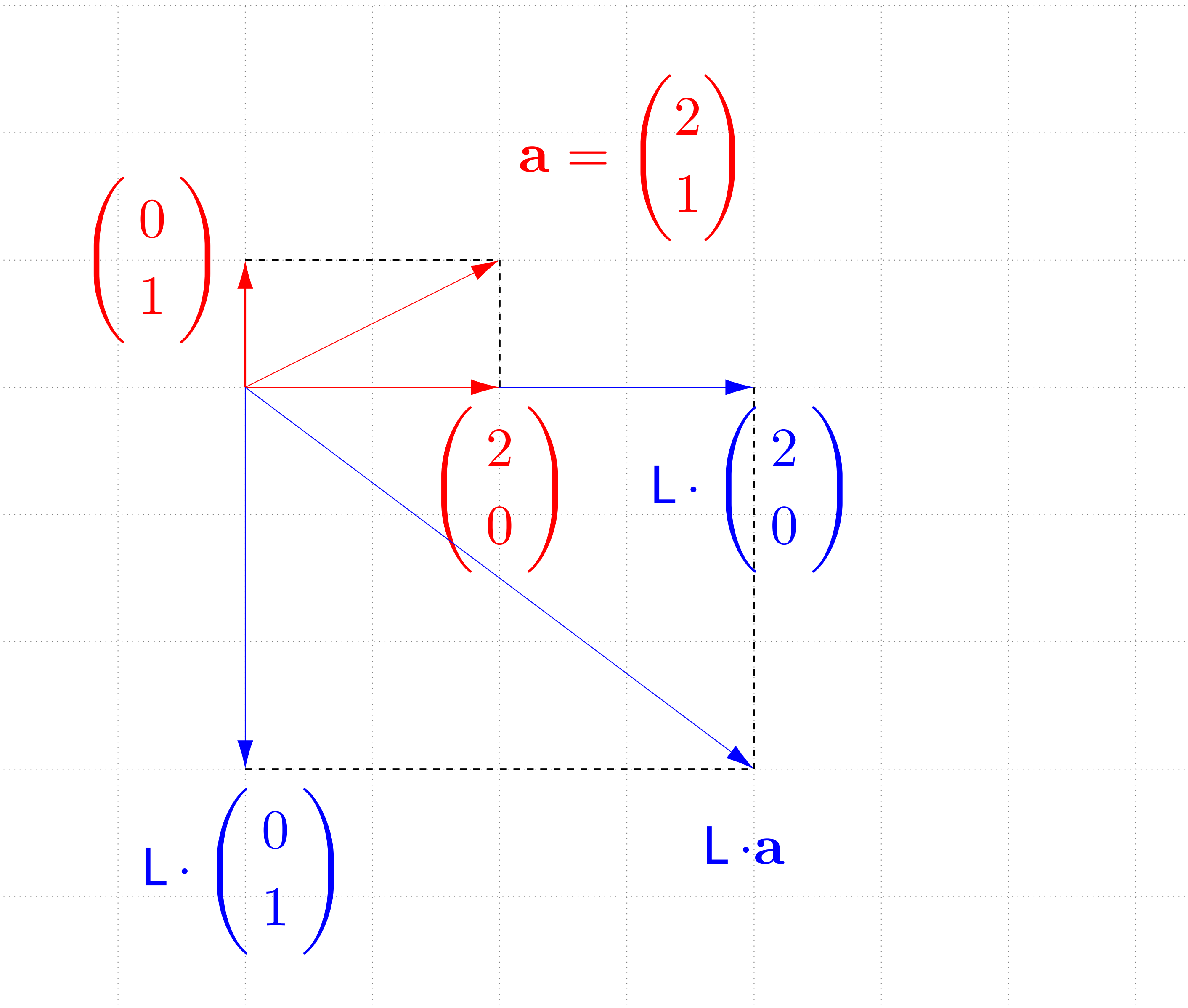
Функция L, превращающая векторы из $\mathbb{R}^n$ в векторы $\mathbb{R}^k$, называется линейным оператором если:

- для любого числа t и вектора $a \in \mathbb{R}^n$: $\mathsf{L}(ta) = t\,\mathsf{L}(a)$;
- для любых двух векторов a и b из $\mathbb{R}^n$: $\mathsf{L}(a+b) = \mathsf{L}(a) + \mathsf{L}(b)$.

Вместо скобок часто пишут знак умножения,

$\mathsf{L}(a) \equiv \mathsf{L} \cdot a \equiv \mathsf{L}\, a$.

Линейный оператор



Растягивание координат

Обобщаем умножение вектора на число!

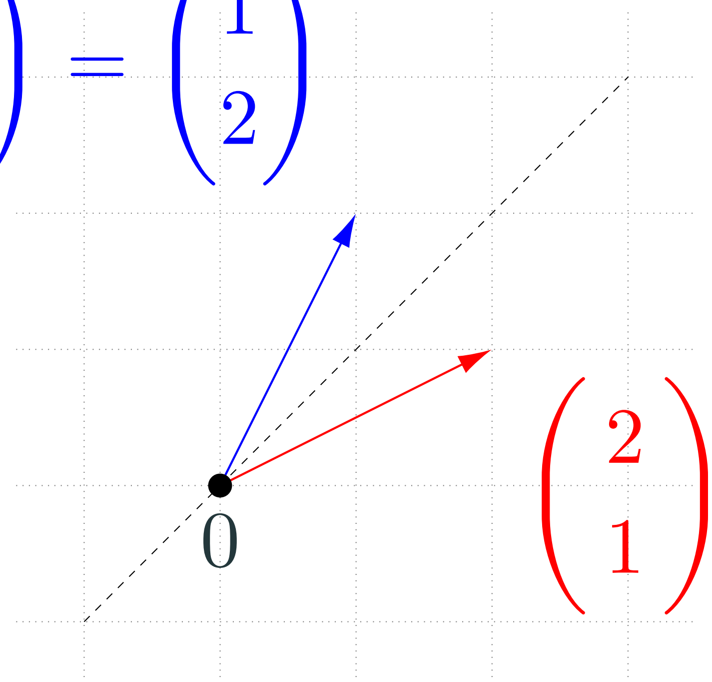
$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

Перестановка координат вектора

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Пример. Отражение относительно $x_1 = x_2$:

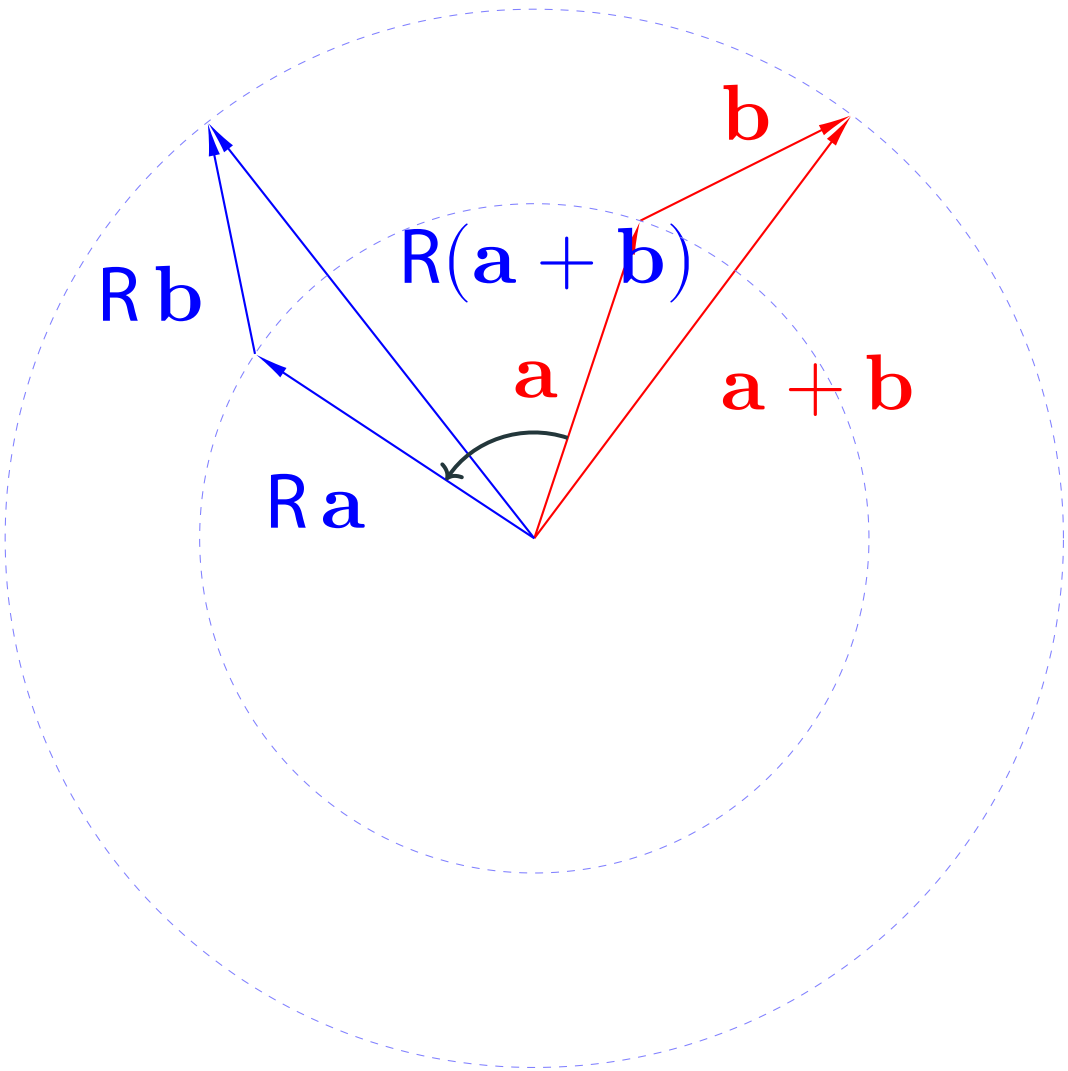
$$\mathsf{L} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Первый поворот

Поворот на 30° против часовой стрелки.

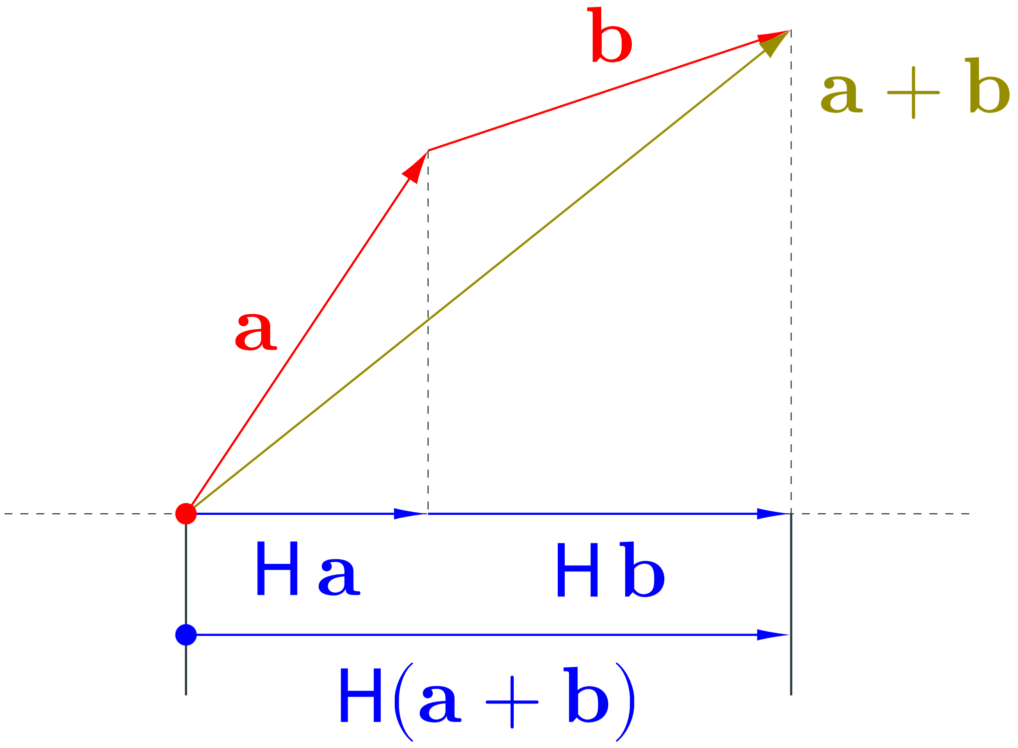
Оператор R : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.



Первая проекция

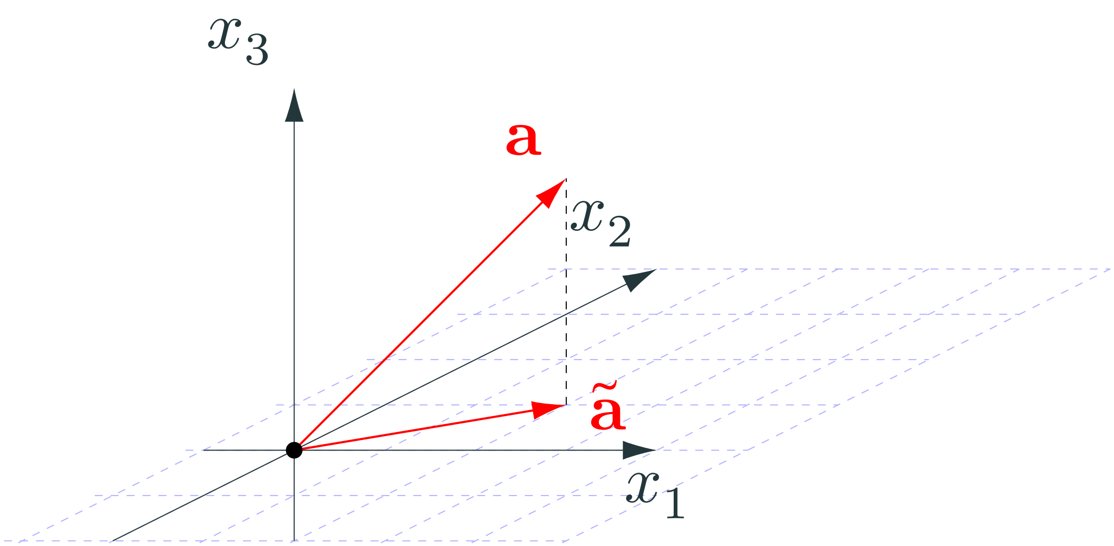
Проекция на прямую ℓ.

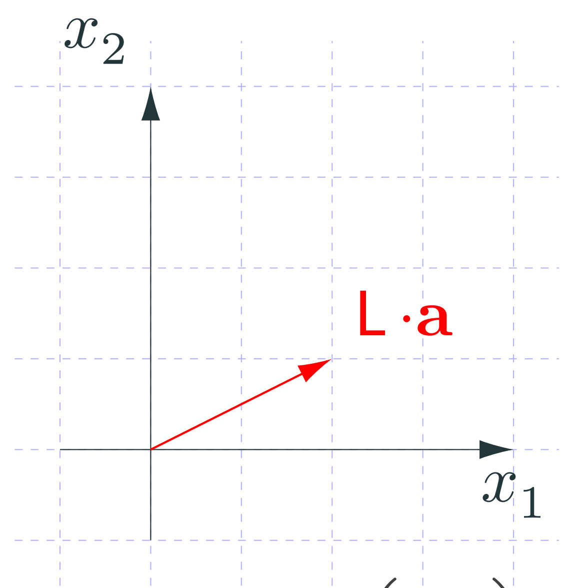
Оператор $\mathrm{H} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.



Обрезка компонент вектора

Уменьшаем размерность, $\mathsf{L}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$

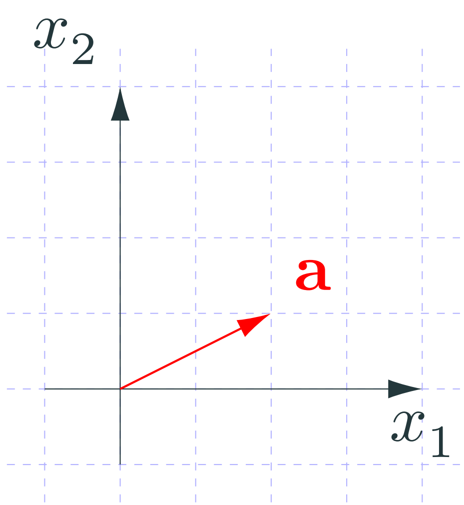




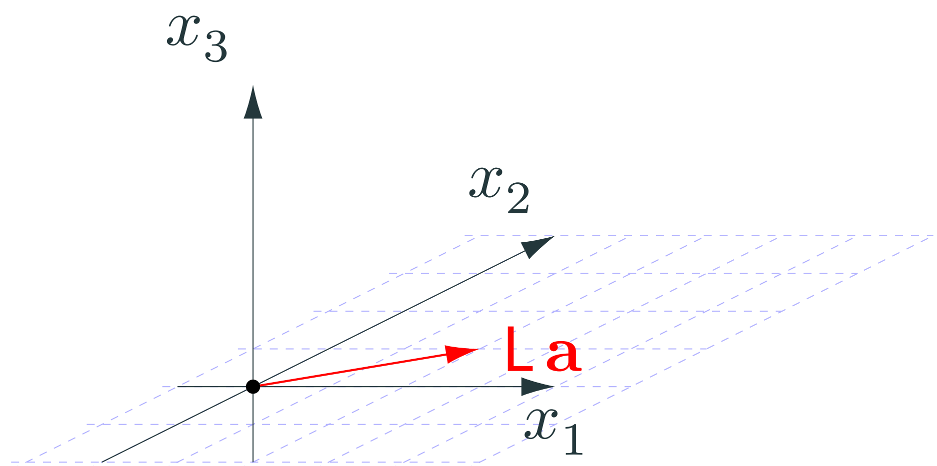
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathsf{L}\,\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Дописывание нулей

Увеличиваем размерность пространства, L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.



$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$



$$\mathsf{L}\,\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ничегонеделание

Определение

Единичный оператор, I, не меняет ни один вектор:

$$\mathsf{I}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}.$$

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

Утверждение

Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор, $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.

Оператор L называется композицией или произведением операторов L_1 и L_2, $\mathsf{L} = \mathsf{L}_2\,\mathsf{L}_1$.

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

Утверждение

Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор, $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.

Оператор L называется композицией или произведением операторов L_1 и L_2, $\mathsf{L} = \mathsf{L}_2\,\mathsf{L}_1$.

Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$.

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

Утверждение

Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор, $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.

Оператор L называется композицией или произведением операторов L_1 и L_2, $\mathsf{L} = \mathsf{L}_2\,\mathsf{L}_1$.

Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$.

Доказательство

$$\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(t\mathbf{a})) = \mathsf{L}_2(t\,\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = t\,\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}))$$

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

Утверждение

Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор, $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.

Оператор L называется композицией или произведением операторов L_1 и L_2, $\mathsf{L} = \mathsf{L}_2\,\mathsf{L}_1$.

Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$.

Доказательство

$$\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(t\mathbf{a})) = \mathsf{L}_2(t\,\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = t\,\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}))$$

$$\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}+\mathbf{b})) = \mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_1(\mathbf{b})) = \mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) + \mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{b}))$$

Сумма линейных операторов

Утверждение

Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный оператор,

$$\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}) = \mathsf{L}(\mathbf{a}).$$

Сумма линейных операторов

Утверждение

Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный оператор,

$$\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}) = \mathsf{L}(\mathbf{a}).$$

Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

Сумма линейных операторов

Утверждение

Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный оператор,

$$\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}) = \mathsf{L}(\mathbf{a}).$$

Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

Доказательство

$$\mathsf{L}_1(t\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(t\mathbf{a}) = t\,\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + t\,\mathsf{L}_2(\mathbf{a}) = t(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}))$$

Сумма линейных операторов

Утверждение

Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный оператор,

$$\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}) = \mathsf{L}(\mathbf{a}).$$

Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

Доказательство

$$\mathsf{L}_1(t\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(t\mathbf{a}) = t\,\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + t\,\mathsf{L}_2(\mathbf{a}) = t(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}))$$

$$\mathsf{L}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathsf{L}_1(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a} + \mathbf{b}) =$$

$$\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_1(\mathbf{b}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{b}) = \mathsf{L}(\mathbf{a}) + \mathsf{L}(\mathbf{b})$$

Вывод формулы поворота

видеофрагмент с прозрачной доской

В этом видео мы возьмем произвольный вектор на плоскости.

И посмотрим, что из него получится, если повернуть его на 30 градусов против часовой стрелки.

Рисуем единичную окружность, находим e на единичной окружности, поворачиваем x и e.

Смотрим на ответ и подчёркиваем его линейность по аргументам.

Вывод формулы проекции

видеофрагмент с прозрачной доской

В этом видео мы возьмем произвольный вектор x на плоскости.

И посмотрим, что из него получится, если спроецировать его на прямую, порождённую вектором $(1, 2)$.

Минимизируем квадрат расстояния между проекцией и итогом.

Смотрим на ответ и подчёркиваем его линейность по аргументам.

Обращение оператора

Обращение

Определение

Рассмотрим оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Оператор L^{-1} называют обратным оператором к L, если

$$\mathsf{L} \cdot \mathsf{L}^{-1} = \mathsf{L}^{-1} \cdot \mathsf{L} = \mathsf{I}.$$

Обращение

Определение

Рассмотрим оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Оператор L^{-1} называют обратным оператором к L, если

$$\mathsf{L} \cdot \mathsf{L}^{-1} = \mathsf{L}^{-1} \cdot \mathsf{L} = \mathsf{I}.$$

Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ при $n \neq k$ не обратим!

Обращение

Определение

Рассмотрим оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Оператор L^{-1} называют обратным оператором к L, если

$$\mathsf{L} \cdot \mathsf{L}^{-1} = \mathsf{L}^{-1} \cdot \mathsf{L} = \mathsf{I}.$$

Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ при $n \neq k$ не обратим!

Даже оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ не всегда обратим!

Обращение

Определение

Рассмотрим оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Оператор L^{-1} называют обратным оператором к L, если

$$\mathsf{L} \cdot \mathsf{L}^{-1} = \mathsf{L}^{-1} \cdot \mathsf{L} = \mathsf{I}.$$

Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ при $n \neq k$ не обратим!

Даже оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ не всегда обратим!

Для оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ в определении достаточно условия $\mathsf{L} \cdot \mathsf{L}^{-1} = \mathsf{I}$.

Обращение растягивания

Исходный оператор, L $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}.$

Обращение растягивания

Исходный оператор, L $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}.$

Обратный оператор, L^{-1} $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1 \\ \frac{1}{-3}a_2 \end{pmatrix}.$

Обращение растягивания

Исходный оператор, L $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}.$

Обратный оператор, $\mathsf{L}^{-1}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1 \\ \frac{1}{-3}a_2 \end{pmatrix}.$

$\mathsf{L}^{-1}\mathsf{L} = \mathsf{I}.$

Обращение перестановки двух компонент

Исходный оператор, L $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}.$

Обращение перестановки двух компонент

Исходный оператор, L $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}.$

Обратный оператор, L^{-1} $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}.$

Обращение перестановки двух компонент

Исходный оператор, $\mathsf{L}:\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

Обратный оператор, $\mathsf{L}^{-1}:\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

$\mathsf{L}^{-1}\mathsf{L} = \mathsf{I}$.

Обращение перестановки двух компонент

Исходный оператор, $\mathsf{L}:\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}.$

Обратный оператор, $\mathsf{L}^{-1}:\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}.$

$\mathsf{L}^{-1}\mathsf{L} = \mathsf{I}.$

Обратный оператор равен исходному, $\mathsf{L}^{-1} = \mathsf{L}.$

Обращение перестановки компонент

Исходный оператор, L $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$

Обращение перестановки компонент

Исходный оператор, L $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$

Обратный оператор, $\mathrm{L}^{-1}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix}.$

Обращение перестановки компонент

Исходный оператор, L $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$

Обратный оператор, L^{-1} $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix}.$

L^{-1}L $=$ I.

Обращение единичного оператора

Исходный оператор, I : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

Обращение единичного оператора

Исходный оператор, $\mathrm{I}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$

Обратный оператор, $\mathrm{I}^{-1}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$

Обращение единичного оператора

Исходный оператор, $\mathsf{I}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$

Обратный оператор, $\mathsf{I}^{-1}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$

$\mathsf{I}^{-1}\mathsf{I} = \mathsf{I}.$

Обращение единичного оператора

Исходный оператор, $\mathsf{I}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$

Обратный оператор, $\mathsf{I}^{-1}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$

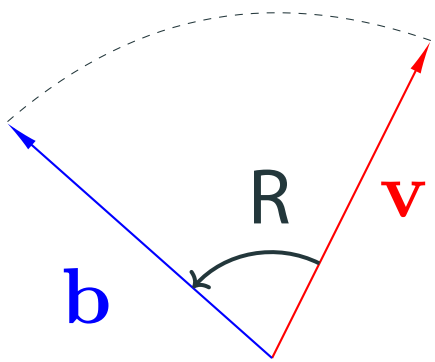
$\mathsf{I}^{-1}\mathsf{I} = \mathsf{I}.$

Обратный оператор равен исходному, $\mathsf{I}^{-1} = \mathsf{I}.$

Обращение поворота

Исходный оператор, $\mathsf{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, поворот плоскости на 30° против часовой стрелки.

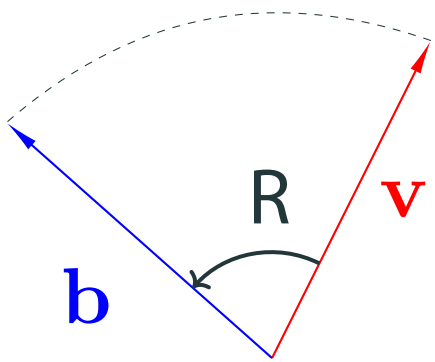
$$\mathsf{R}\,\mathbf{v} = \mathbf{b} \text{ или } \mathbf{v} = \mathsf{R}^{-1}\,\mathbf{b}$$



Обращение поворота

Исходный оператор, $\mathsf{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, поворот плоскости на 30° против часовой стрелки.

$$\mathsf{R}\,\mathbf{v} = \mathbf{b} \text{ или } \mathbf{v} = \mathsf{R}^{-1}\,\mathbf{b}$$



Обратный оператор, $\mathsf{R}^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, поворот плоскости на 30° по часовой стрелке, $\mathsf{R}^{-1}\mathsf{R} = \mathsf{I}$.

Не все действия обратимы!

По определению, исходный оператор $\mathrm{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Не все действия обратимы!

По определению, исходный оператор L $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Исходный оператор H $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, проекция на прямую ℓ.

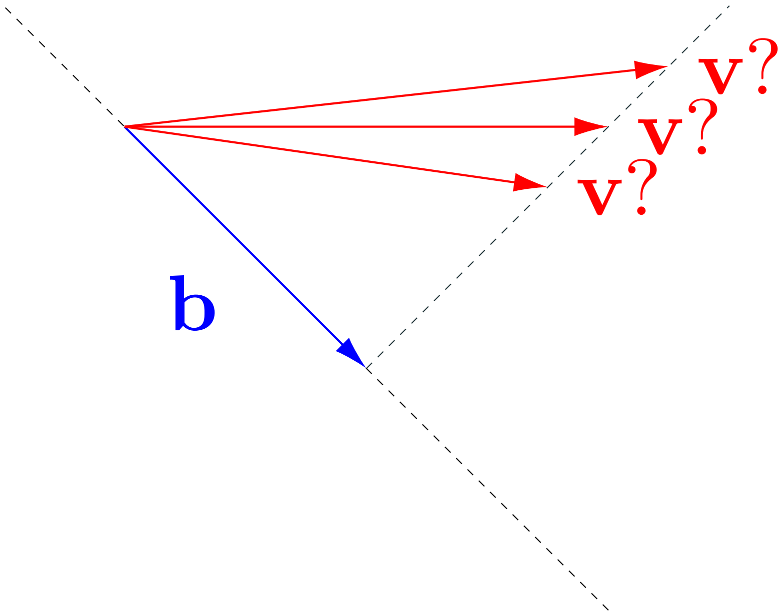
Не все действия обратимы!

По определению, исходный оператор L $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Исходный оператор H $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, проекция на прямую ℓ.

Обратный оператор H^{-1} не существует!

$$\mathrm{H}\,\mathbf{v} = \mathbf{b}$$



Транспонирование оператора и ортогональность

Транспонирование

У любого оператора L есть брат L^T.

Транспонирование

У любого оператора L есть брат L^T.

Определение

Транспонированным оператором, L^T, называется оператор, для которого

$$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle, \text{ и } \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b} \rangle = \langle \mathsf{L}^T\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

Транспонирование

Почему L и L^T операторы-«братья»?

Транспонирование

Почему L и L^T операторы-«братья»?

Утверждение

$$(\mathsf{L}^T)^T = \mathsf{L}$$

Транспонирование

Почему L и L^T операторы-«братья»?

Утверждение

$$(\mathsf{L}^T)^T = \mathsf{L}$$

Доказательство

$$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b}\rangle = \langle \mathsf{L}^T\,\mathbf{b}, \mathbf{a}\rangle = \langle \mathbf{b}, (\mathsf{L}^T)^T\mathbf{a}\rangle = \langle (\mathsf{L}^T)^T\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$$

Транспонирование

Почему L и L^T операторы-«братья»?

Утверждение

$$(\mathsf{L}^T)^T = \mathsf{L}$$

Доказательство

$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b}\rangle = \langle \mathsf{L}^T\,\mathbf{b}, \mathbf{a}\rangle = \langle \mathbf{b}, (\mathsf{L}^T)^T\mathbf{a}\rangle = \langle (\mathsf{L}^T)^T\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$

Если $\langle \mathbf{c}, \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{d}, \mathbf{b}\rangle$ для всех $\mathbf{b}$, то $\mathbf{c} = \mathbf{d}$.

Транспонирование растяжения

Исходный оператор, $\mathrm{L}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}.$

Транспонирование растяжения

Исходный оператор, $\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 2a_1b_1 - 3a_2b_2 = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b} \rangle$.

Транспонирование растяжения

Исходный оператор, $\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 2a_1b_1 - 3a_2b_2 = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b} \rangle$.

Транспонированный оператор равен исходному, $\mathsf{L}^T = \mathsf{L}$.

Транспонирование поворота

Исходный оператор L — поворот на плоскости на 30° против часовой стрелки.

Транспонирование поворота

Исходный оператор L — поворот на плоскости на 30° против часовой стрелки. Поворот не меняет длины векторов.

Транспонирование поворота

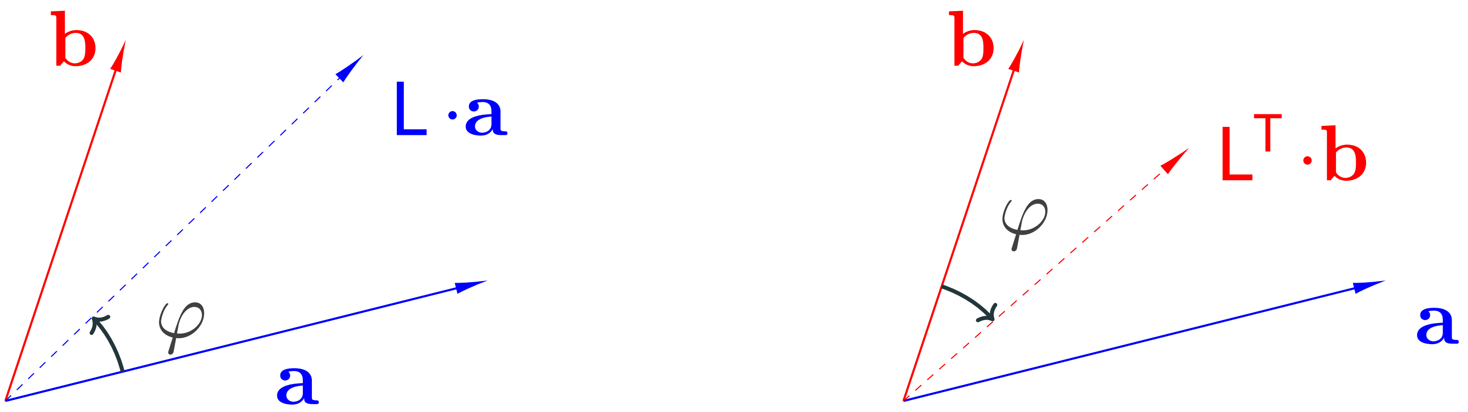
Исходный оператор L — поворот на плоскости на 30° против часовой стрелки. Поворот не меняет длины векторов.

Для равенства $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b}\rangle$ достаточно условия $\angle(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b})$.

Транспонирование поворота

Исходный оператор L — поворот на плоскости на 30° против часовой стрелки. Поворот не меняет длины векторов.

Для равенства $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b}\rangle$ достаточно условия $\angle(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b})$.

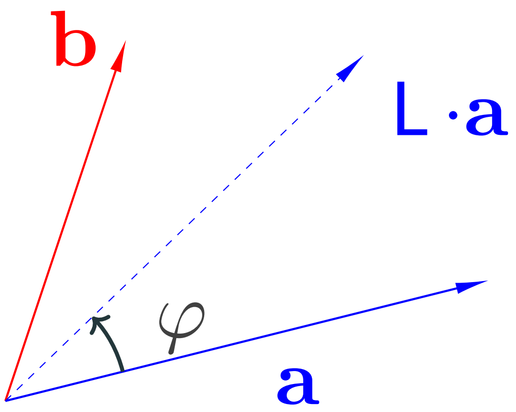


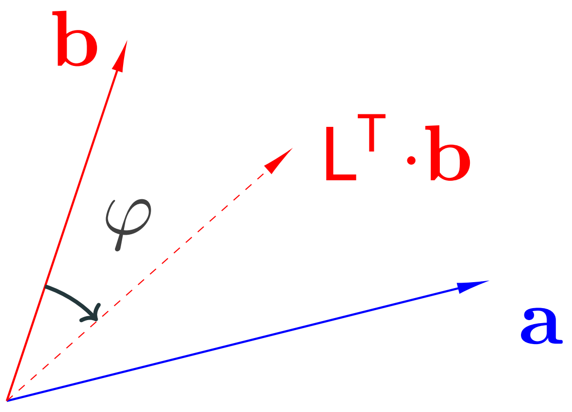
L^T — поворот на плоскости на 30° по часовой стрелке.

Транспонирование поворота

Исходный оператор L — поворот на плоскости на 30° против часовой стрелки. Поворот не меняет длины векторов.

Для равенства $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b}\rangle$ достаточно условия $\angle(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b})$.





L^T — поворот на плоскости на 30° по часовой стрелке.

Транспонированный оператор совпадает с обратным, $\mathsf{L}^T = \mathsf{L}^{-1}$

Транспонирование дописывания нуля

Исходный оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Транспонирование дописывания нуля

Исходный оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 \cdot b_3.$$

Транспонирование дописывания нуля

Исходный оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 \cdot b_3.$$

Третья компонента вектора $\mathbf{b}$ не важна!

Транспонирование дописывания нуля

Исходный оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 \cdot b_3.$$

Третья компонента вектора $\mathbf{b}$ не важна!

$\mathsf{L}^T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$\mathsf{L}^T : \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Транспонирование дописывания нуля

Исходный оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3,$

$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 \cdot b_3.$$

Третья компонента вектора $\mathbf{b}$ не важна!

$\mathsf{L}^T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,$

$$\mathsf{L}^T : \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Транспонирование дописывания нуля

Исходный оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 \cdot b_3.$

Третья компонента вектора $\mathbf{b}$ не важна!

$\mathsf{L}^T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$\mathsf{L}^T : \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

$\langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2.$

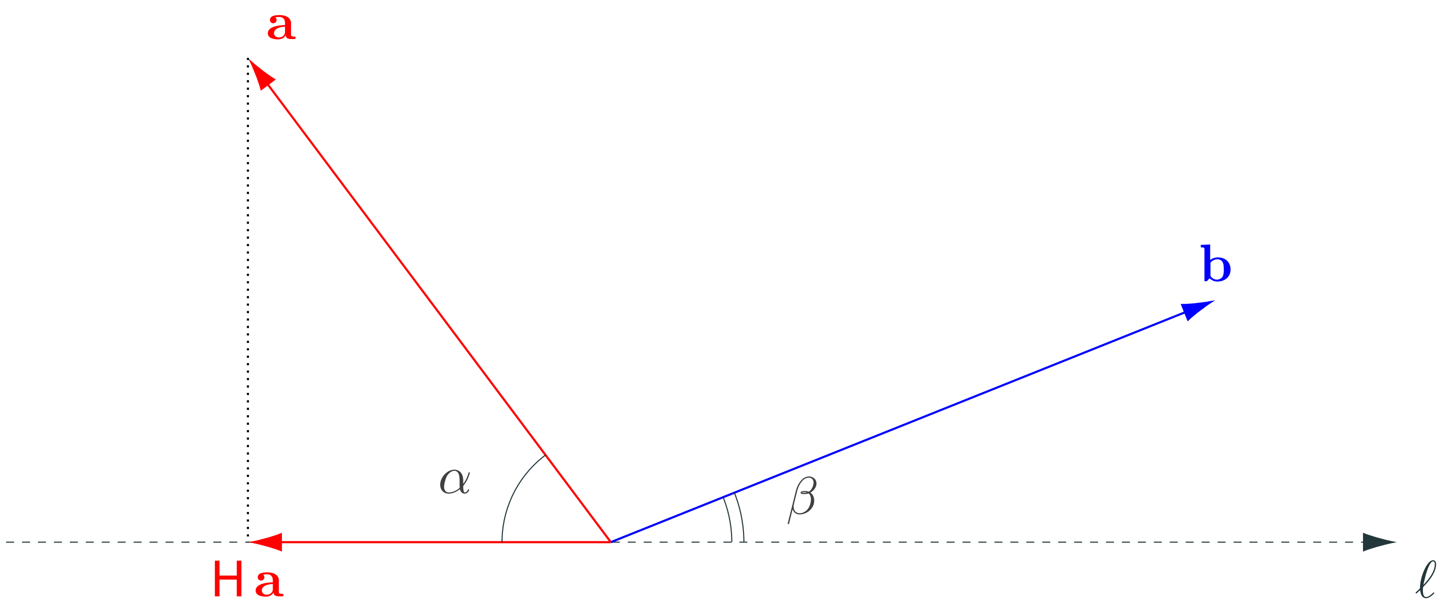
Транспонированный оператор L^T — удаление третьей компоненты вектора.

Транспонирование проекции

Исходный оператор $\mathrm{H} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, проекция на прямую ℓ.

Транспонирование проекции

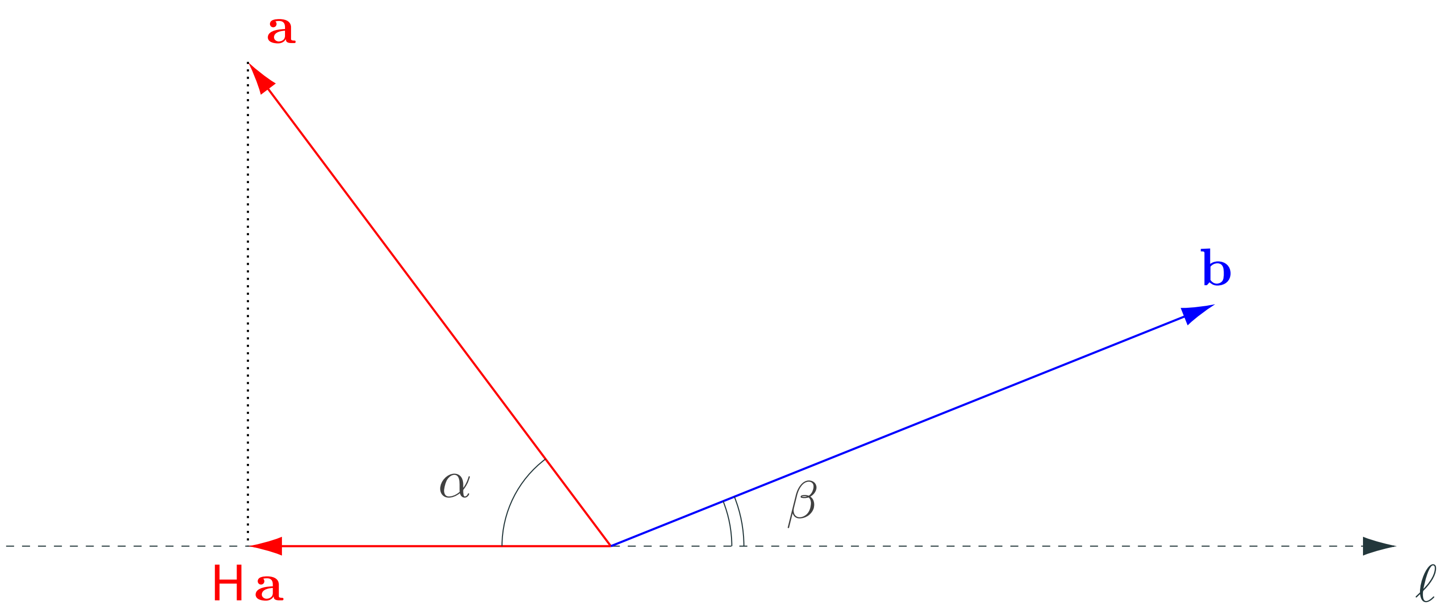
Исходный оператор H $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, проекция на прямую ℓ.



$$\langle \mathrm{H}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \|\,\mathrm{H}\,\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos(\mathrm{H}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos\alpha \cos\beta = \langle \mathbf{a}, \mathrm{H}\mathbf{b}\rangle$$

Транспонирование проекции

Исходный оператор $\mathrm{H} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, проекция на прямую ℓ.



$$\langle \mathrm{H}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\,\mathrm{H}\,\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos(\mathrm{H}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos\alpha \cos\beta = \langle \mathbf{a}, \mathrm{H}\mathbf{b} \rangle$$

Транспонированный оператор равен исходному, $\mathrm{H}^T = \mathrm{H}$.

Ортогональный оператор

Определение

Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется ортогональным, если

- оператор сохраняет длины, $\|\mathsf{L}\,\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$;
- оператор сохраняет углы, $\angle(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Ортогональный оператор

Определение

Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется ортогональным, если

- оператор сохраняет длины, $\|\mathsf{L}\,\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$;
- оператор сохраняет углы, $\angle(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Эквивалентное определение

Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется ортогональным, если

$$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

Ортогональный оператор

Определение

Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется ортогональным, если

- оператор сохраняет длины, $\|\mathsf{L}\,\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$;
- оператор сохраняет углы, $\angle(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Эквивалентное определение

Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется ортогональным, если

$$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

Эквивалентное определение

Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется ортогональным, если

$$\mathsf{L}^T = \mathsf{L}^{-1}.$$

Ортогональный оператор: примеры

- Перестановка двух компонент вектора

  $$\mathrm{L}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Ортогональный оператор: примеры

- Перестановка двух компонент вектора
  $$L: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$
- Поворот на плоскости на 30° против часовой стрелки.

Полтора доказательства эквивалентности

Утверждение

Сохранение длин и углов эквивалентно сохранению скалярного произведения.

Полтора доказательства эквивалентности

Утверждение

Сохранение длин и углов эквивалентно сохранению скалярного произведения.

Доказательство

Скалярное произведение задаёт углы и длины:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}, \quad \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

Полтора доказательства эквивалентности

Утверждение

Сохранение длин и углов эквивалентно сохранению скалярного произведения.

Доказательство

Скалярное произведение задаёт углы и длины:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}, \quad \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

Длина и угол задают скалярное произведение:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

Полтора доказательства эквивалентности

Утверждение

Условие $\mathsf{L}^T = \mathsf{L}^{-1}$ эквивалентно сохранению скалярного произведения.

Полтора доказательства эквивалентности

Утверждение

Условие $\mathsf{L}^T = \mathsf{L}^{-1}$ эквивалентно сохранению скалярного произведения.

Половина доказательства

$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^{-1}\,\mathbf{b} \rangle.$

Полтора доказательства эквивалентности

Утверждение

Условие $\mathsf{L}^T = \mathsf{L}^{-1}$ эквивалентно сохранению скалярного произведения.

Половина доказательства

$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^{-1}\,\mathbf{b}\rangle.$

Обозначаем $\mathbf{c} = \mathsf{L}^{-1}\,\mathbf{b}$ и получаем $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{c}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle$.

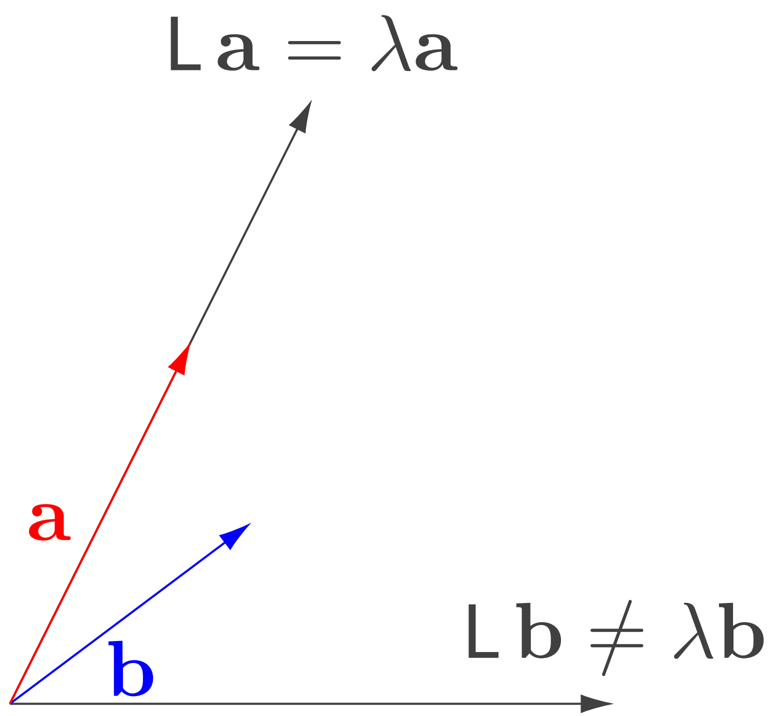
Собственные векторы и собственные числа

Собственные векторы и собственные числа

Определение

Если для оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ найдётся такой вектор v, что $\mathsf{L}\, v = \lambda \cdot v$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, то:

- вектор v называется собственным;
- число λ называется собственным.



Собственные вектора: растягивание осей

Оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Собственные вектора: растягивание осей

Оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Собственные векторы, домножаемые на $\lambda = 2$:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Собственные вектора: растягивание осей

Оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Собственные векторы, домножаемые на $\lambda = 2$:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Собственные векторы, домножаемые на $\lambda = -3$:

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Собственные вектора: перестановка a_i

Оператор L — перестановка компонент вектора:

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Собственные вектора: перестановка a_i

Оператор L — перестановка компонент вектора:

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы, домножаемые на $\lambda = 1$:

Содержат одинаковые числа на переставляемых местах,

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ x \\ a_3 \\ x \end{pmatrix}$$

Собственные векторы: поворот

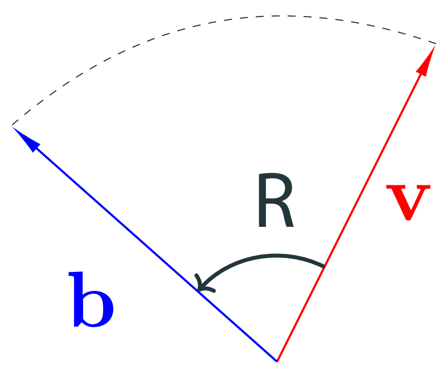
Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!

Собственные векторы: поворот

Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!

Исходный оператор $\mathrm{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, поворот на 30° против часовой стрелки.

$$\mathrm{R}\,\mathbf{v} = \mathbf{b}$$

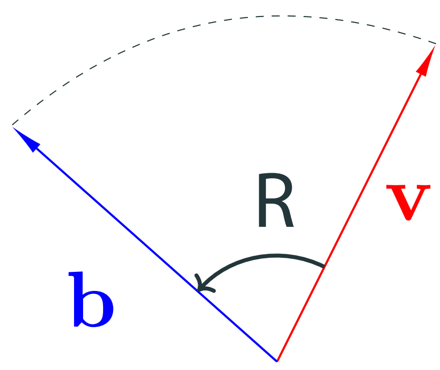


Собственные векторы: поворот

Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!

Исходный оператор $\mathrm{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, поворот на 30° против часовой стрелки.

$$\mathrm{R}\,\mathbf{v} = \mathbf{b}$$



Ни собственных векторов, ни чисел нет!

Собственные вектора: проекция

Оператор L — проекция на прямую ℓ.

Собственные вектора: проекция

Оператор L — проекция на прямую ℓ.

Собственные векторы, домножаемые на $\lambda = 1$:

Любой вектор v, лежащий на прямой ℓ.

Собственные вектора: проекция

Оператор L — проекция на прямую ℓ.

Собственные векторы, домножаемые на $\lambda = 1$:

Любой вектор v, лежащий на прямой ℓ.

Собственные векторы, домножаемые на $\lambda = 0$:

Любой вектор v, ортогональный прямой ℓ.

Резюме

- Вектор — столбец чисел.

Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.

Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.

Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.
- Примеры: поворот, проекция, перестановка компонент, растягивание осей.

Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.
- Примеры: поворот, проекция, перестановка компонент, растягивание осей.
- Обращение и транспонирование.

Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.
- Примеры: поворот, проекция, перестановка компонент, растягивание осей.
- Обращение и транспонирование.
- Собственные векторы растягиваются в собственное число раз.

Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.
- Примеры: поворот, проекция, перестановка компонент, растягивание осей.
- Обращение и транспонирование.
- Собственные векторы растягиваются в собственное число раз.
- Бонус: как выиграть в Ним?

Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.
- Примеры: поворот, проекция, перестановка компонент, растягивание осей.
- Обращение и транспонирование.
- Собственные векторы растягиваются в собственное число раз.
- Бонус: как выиграть в Ним?

Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.
- Примеры: поворот, проекция, перестановка компонент, растягивание осей.
- Обращение и транспонирование.
- Собственные векторы растягиваются в собственное число раз.
- Бонус: как выиграть в Ним?

Следующая лекция: запись оператора с помощью матрицы.

Игра Ним

это видео является бонусным, поэтому ничего нет страшного, что с ним выходит много видео, или оно будет долгое

В начале фрагмента идёт слайд с правилами затем видеофрагмент с прозрачной доской

Игра Ним

- Есть три кучки с камнями: 3, 5 и 8 камней;
- Два игрока ходят по очереди;
- За ход:

  игрок выбирает одну кучку;

  берёт из неё положительное число камней;
- Выигрывает берущий последний камень.

Какой ход сделать первому игроку?

видео с доской

Краткое содержание:

закодируем каждую кучку двоичным вектором

стоимость позиции — сумма этих двух векторов

финальная позиция имеет стоимость ноль

любой ход из нулевой позиции ведёт в положительную

Из положительной позиции можно попасть в нулевую

С помощью нижней единички убиваем остальные

Выигрышный ход: взять 2 камня из кучки в 8 камней