

Векторы и операторы

название лекции

Вектор: длина и скалярное произведение

название видеофрагмента

Краткое напутствие

Зачем нужна **линейная алгебра**?

- Линейная алгебра прекрасна сама по себе!

Краткое напутствие

Зачем нужна **линейная алгебра**?

- Линейная алгебра прекрасна сама по себе!
- Работает «под капотом» практически всех методов машинного обучения.

Краткий план:

- Вектор — это столбец чисел.

Краткий план:

- Вектор — это столбец чисел.
- Сложение двух векторов и умножение на число.

Краткий план:

- Вектор — это столбец чисел.
- Сложение двух векторов и умножение на число.
- Расстояние и косинус угла между векторами.

Вектор

- Рабочее определение.

Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

Вектор

- Рабочее определение.

Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

- Идея вектора. Вектор — всё, что можно описать столбцом из нескольких чисел.

Вектор

- Рабочее определение.

Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

- Идея вектора. Вектор — всё, что можно описать столбцом из нескольких чисел.
- Мы не пишем стрелочку над вектором.

Вектор

- Рабочее определение.

Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

- Идея вектора. Вектор — всё, что можно описать столбцом из нескольких чисел.
- Мы не пишем стрелочку над вектором.
- Вектор из нулей обозначаем 0.

Пространство \mathbb{R}^n

- Определение. Пространство \mathbb{R}^n :
Множество всех возможных векторов из n чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

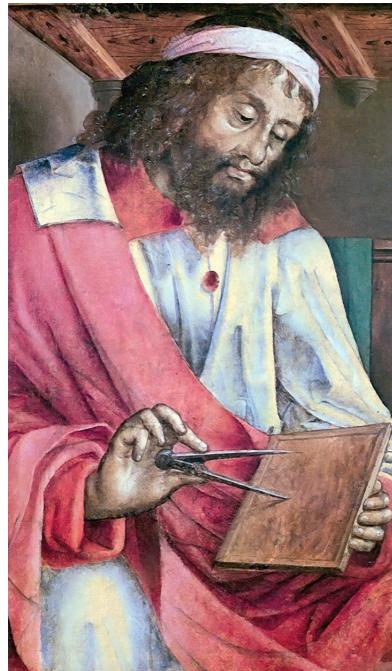
Пространство \mathbb{R}^n

- Определение. Пространство \mathbb{R}^n :
Множество всех возможных векторов из n чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

- Определение. Размерность пространства \mathbb{R}^n :
Количество чисел в каждом векторе, n .

Длина вектора

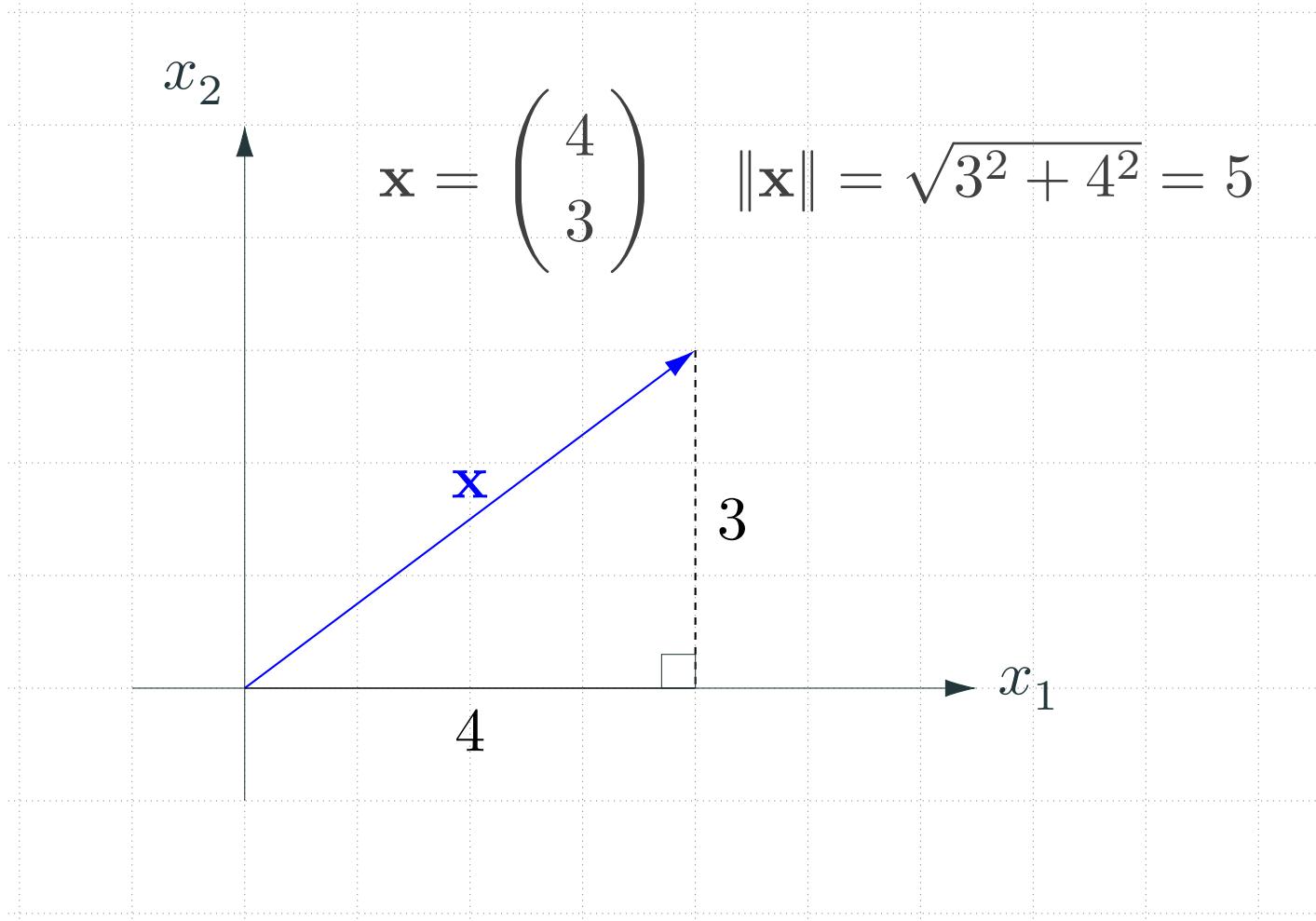


Евклид, около 300 лет до н.э.

Определение.

Евклидова длина или норма вектора

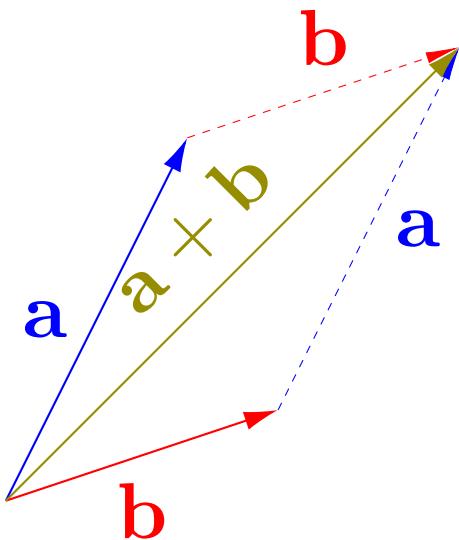
$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$



Сложение и вычитание двух векторов

Определение. Сложение и вычитание двух векторов выполняем поэлементно:

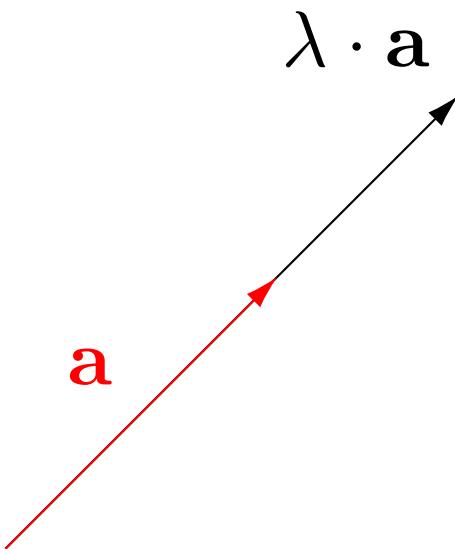
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3.5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Умножение вектора на число

Определение. Умножение вектора на число выполняем поэлементно:

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3.5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$$

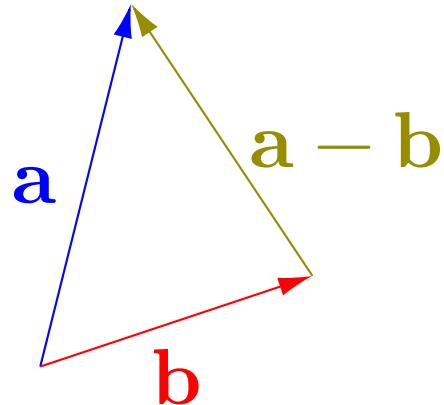


Расстояние между векторами

Определение. Евклидово расстояние между векторами

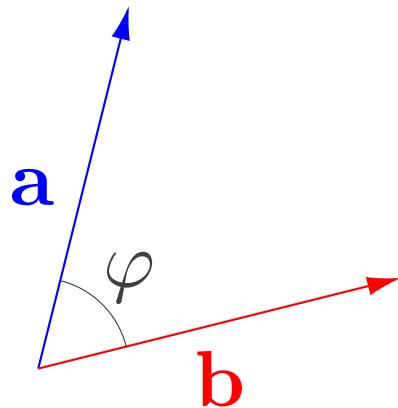
$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$$

- по определению, $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$.
- также говорят Евклидова метрика



Скалярное произведение и угол

- Определение. Скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} :
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

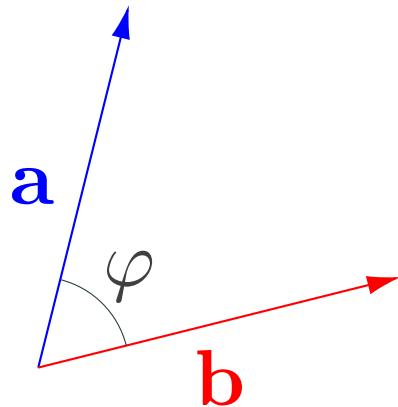


Угол определён, если $\|\mathbf{a}\| > 0$ и $\|\mathbf{b}\| > 0$.

Скалярное произведение и угол

- Определение. Скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} :
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$
- Определение. Косинус угла и угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} :

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \quad \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \arccos \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

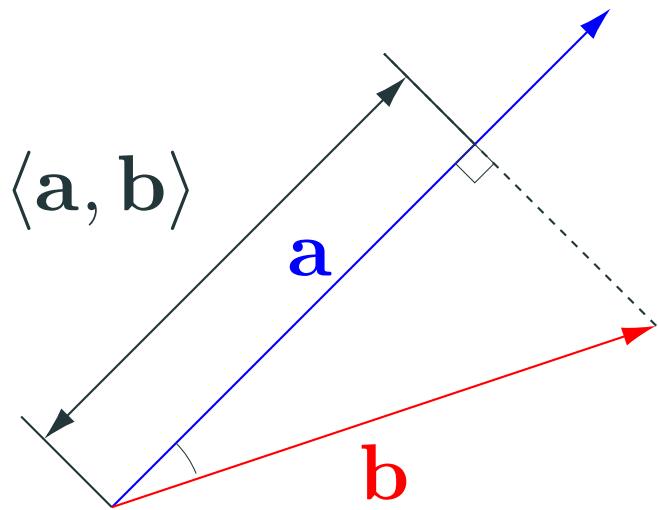


Угол определён, если $\|\mathbf{a}\| > 0$ и $\|\mathbf{b}\| > 0$.

Скалярное произведение и проекция

Если вектор a имеет единичную длину, $\|a\| = 1$, то

$\langle a, b \rangle = \|b\| \cos \phi$ — длина* проекции b на a .



Свойства скалярного произведения

- Скалярное вектора на себя равно квадрату длины
 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$

Свойства скалярного произведения

- Скалярное вектора на себя равно квадрату длины
 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$
- Линейность по каждому аргументу

$$\langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$

$$\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$$

Свойства скалярного произведения

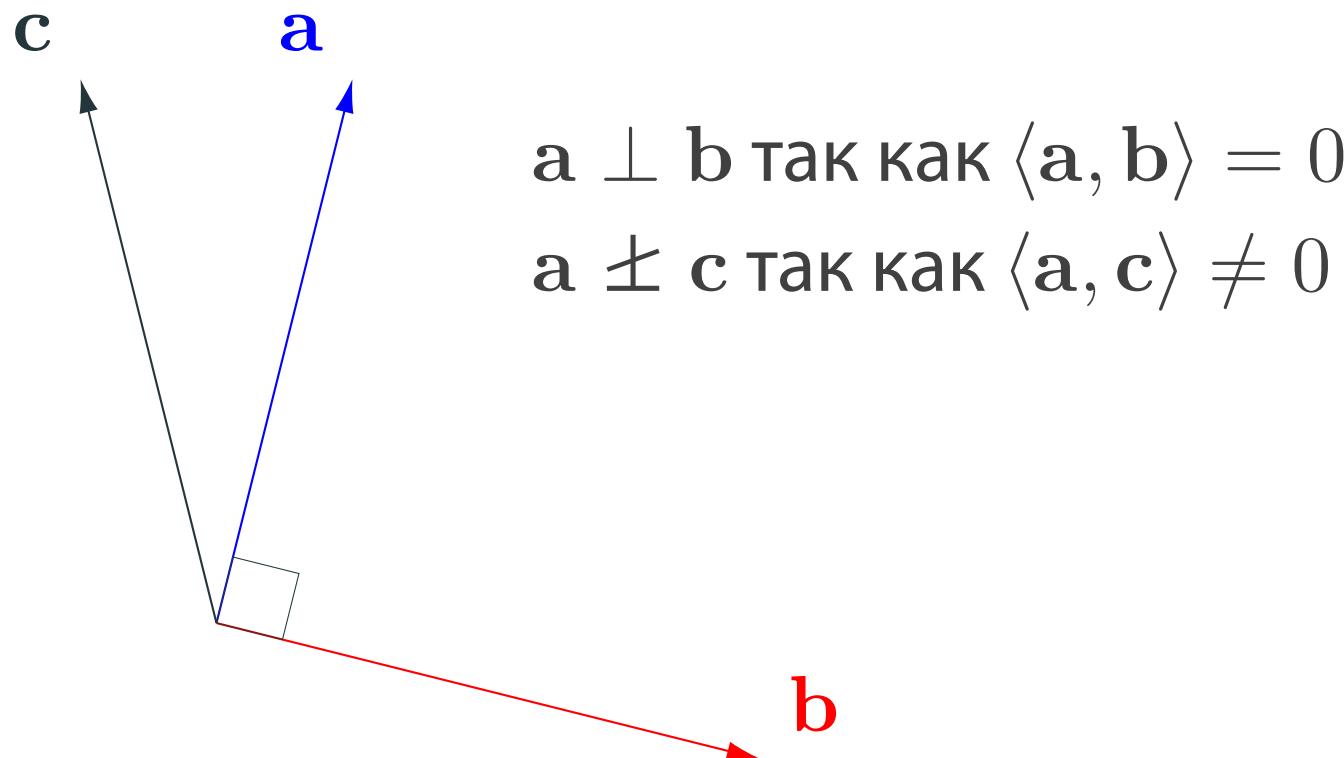
- Скалярное вектора на себя равно квадрату длины
 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$
- Линейность по каждому аргументу
 $\langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$
 $\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$
- Симметричность
 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$

Ортогональность векторов

Определение. Векторы a и b **ортогональны**, $a \perp b$, если

$$\langle a, b \rangle = 0$$

Также говорят «**перпендикулярны**».



Прямая, порожденная вектором,
гиперплоскость
название видеофрагмента

Краткий план:

- Да будет больше разных расстояний!

Краткий план:

- Да будет больше разных расстояний!
- Делаем из вектора прямую.

Краткий план:

- Да будет больше разных расстояний!
- Делаем из вектора прямую.
- Делаем из вектора гиперплоскость.

Больше метрик в студию!

Определение. Манхэттэнская метрика

Расстояние по Майкопски:

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n|$$

У НИХ — МАНХЭТТЕН

SANITARY & TOPOGRAPHICAL MAP

of the City
and Island
of



NEW YORK

Prepared for the Council of Hygiene and Public Health

of the CITIZENS ASSOCIATION.

under the direction of

Topographical Engineer.

EGBERT L. VIELE.

SCALE 1000 FEET TO 1 INCH.



У нас — Майкоп

Планъ г. МАЙКОПА.

Масштабъ 1верста въ дюймъ.

саж. 500 400 300 200 100 0 1 квр.

Ук^рпленіе Майкопъ основано въ 1858 г.
Въ 1878 г. введено Городовое положение.
Население въ 1899 г. - 37098 душ. Приростъ
5.2 %, смертность 3.1 %. Въ 1897 г. фабр.
и заводск. промышленность - 546480 р.
Привезено товаровъ 650 тыс. пуд. Выве-
зено товаровъ 2821 тыс. пуд.



Ещё больше метрик!

Определение. Метрика Минковского

$$d_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(\sum_{i=1}^n |a_i - b_i|^p \right)^{1/p}$$

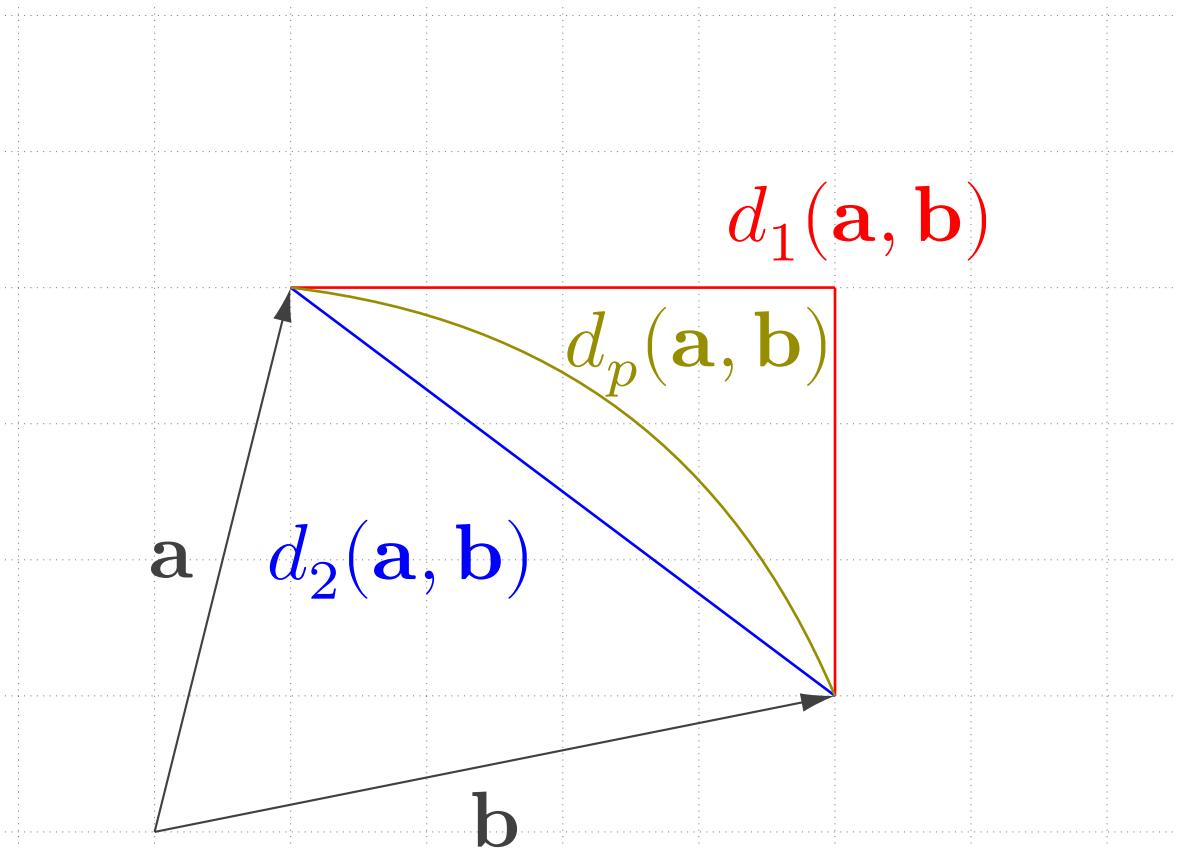
Частные случаи метрики Минковского

Евклидова метрика, $p = 2$

$$d_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$$

Манхэттэнская метрика, $p = 1$

$$d_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n|$$

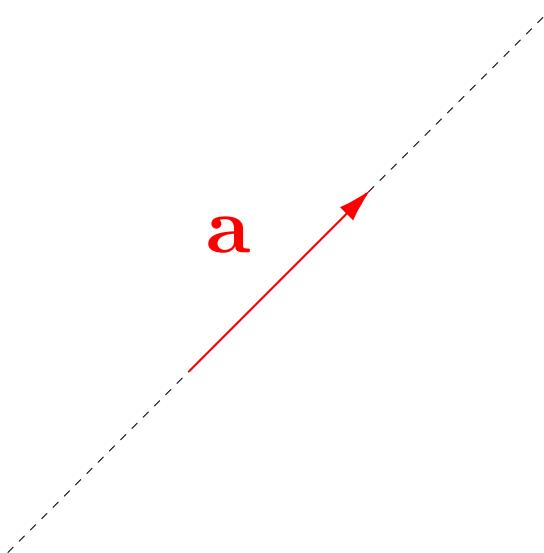


Вектор порождает прямую

Определение. Прямая порождённая вектором a , $\text{Span } a$

Множество векторов, получаемых при домножении вектора a на произвольное число,

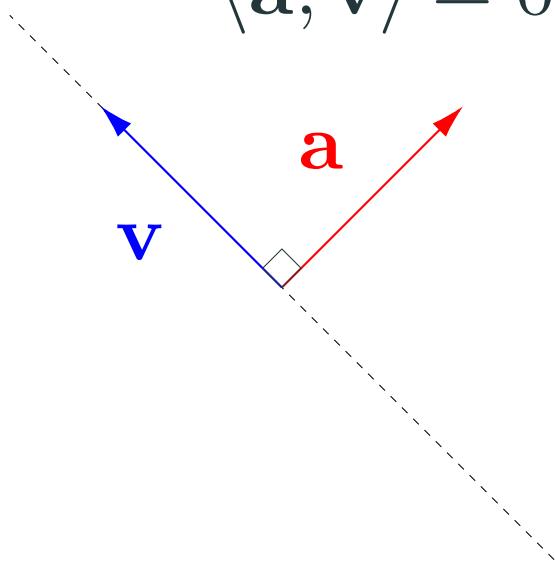
$$\text{Span } a = \{t \cdot a \mid t \in \mathbb{R}\}$$



Вектор задаёт гиперплоскость

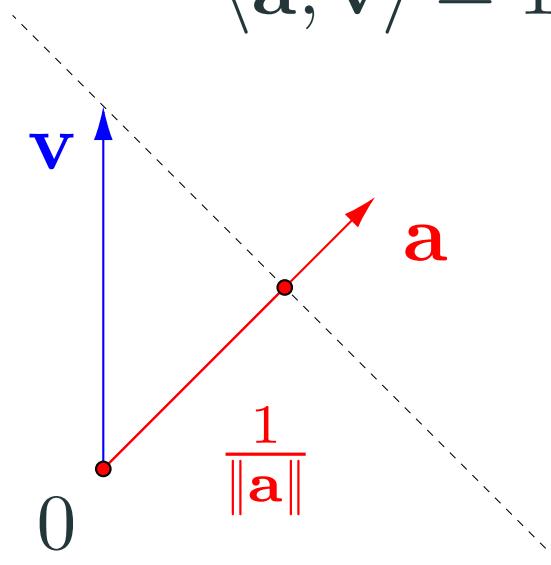
Вектор \mathbf{a} фиксирован, например, $\mathbf{a} = (1, 2)$.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = 0$$



$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = 1$$



$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 1$$

Линейный оператор: определение и примеры

название видеофрагмента

Краткий план:

- Определение линейного оператора.

Краткий план:

- Определение линейного оператора.
- Примеры линейных операторов.

Краткий план:

- Определение линейного оператора.
- Примеры линейных операторов.
- Как из двух операторов сделать новый оператор?

Линейный оператор

Идея линейности:

Результат действия не изменится,
если поменять местами действие L и

- растягивание вектора, например, $L(42a) = 42L(a)$;

Линейный оператор

Идея линейности:

Результат действия не изменится,
если поменять местами действие L и

- растягивание вектора, например, $L(42a) = 42L(a)$;
- усреднение двух векторов,
$$L(0.5a + 0.5b) = 0.5L(a) + 0.5L(b).$$

Стандартное определение линейности

Определение. **Линейный оператор** L из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^k .

- Для любого числа t и вектора $a \in \mathbb{R}^n$: $L(ta) = t L(a)$.

Стандартное определение линейности

Определение. **Линейный оператор** L из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^k .

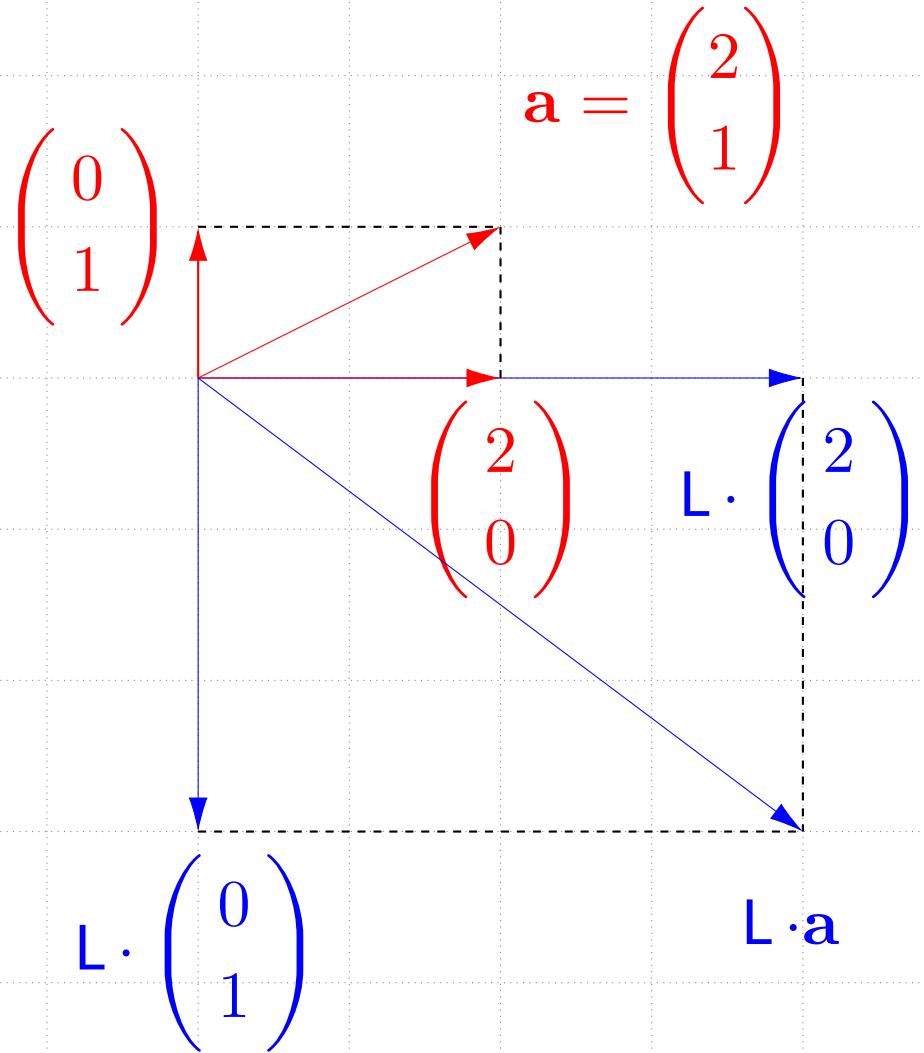
- Для любого числа t и вектора $a \in \mathbb{R}^n$: $L(ta) = t L(a)$.
- Для любых двух векторов a и b из \mathbb{R}^n :
$$L(a + b) = L(a) + L(b).$$

Стандартное определение линейности

Определение. **Линейный оператор** L из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^k .

- Для любого числа t и вектора $a \in \mathbb{R}^n$: $L(ta) = t L(a)$.
- Для любых двух векторов a и b из \mathbb{R}^n :
$$L(a + b) = L(a) + L(b).$$
- Вместо скобок часто пишут знак умножения,
$$L(a) \equiv L \cdot a \equiv L a.$$

Линейный оператор



Растягивание координат

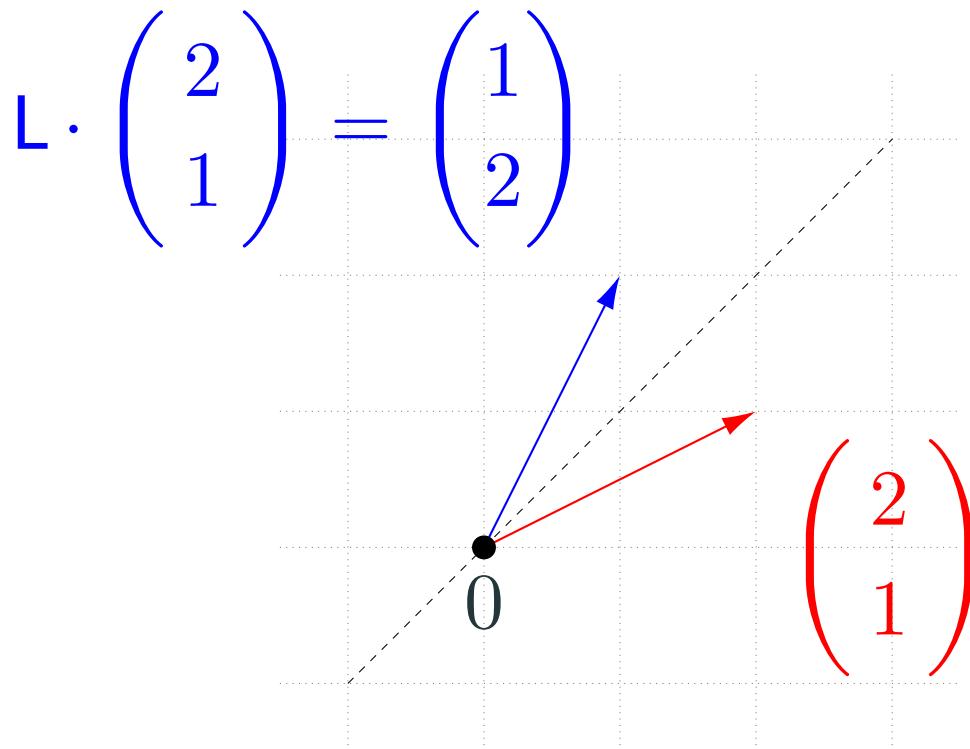
Обобщаем умножение вектора на число!

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

Перестановка координат вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

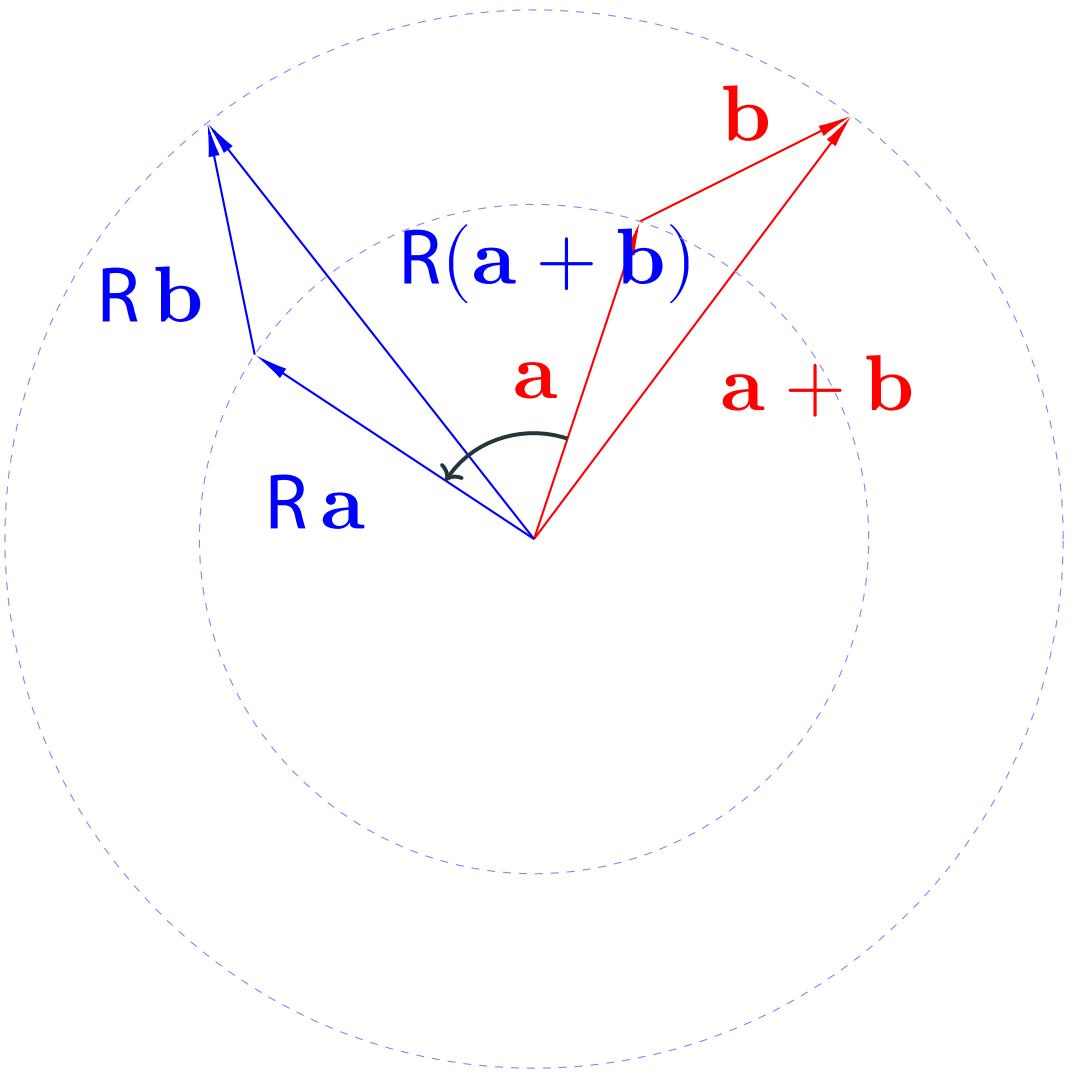
Пример. Отражение относительно $x_1 = x_2$:



Первый поворот

Поворот на 30° против часовой стрелки

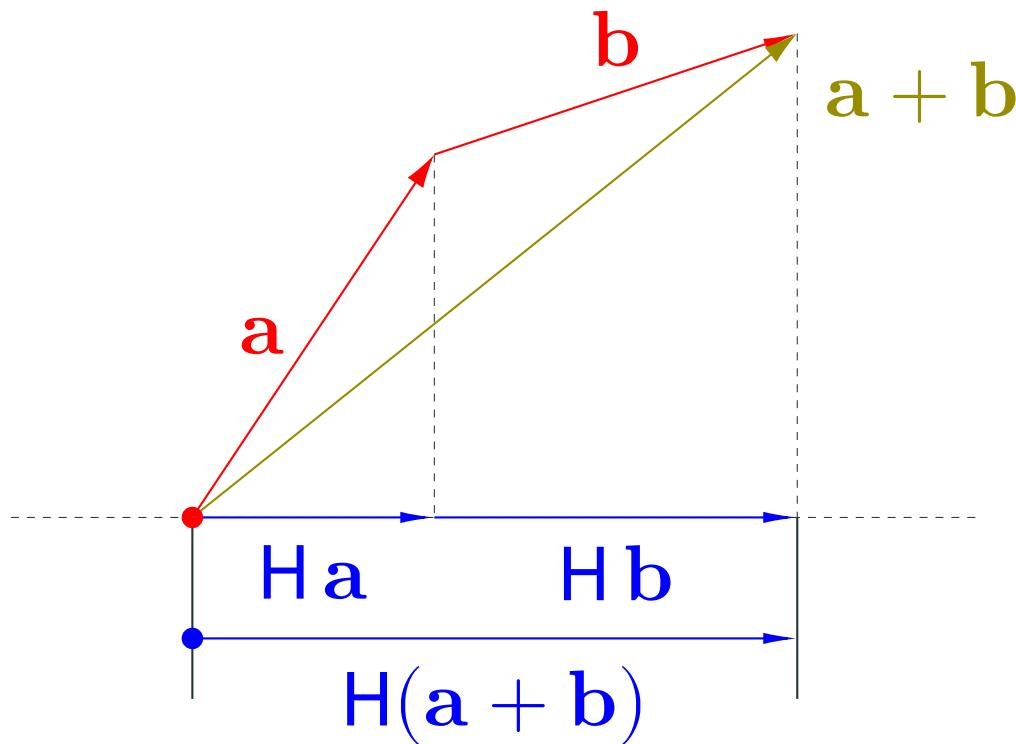
Оператор $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$



Первая проекция

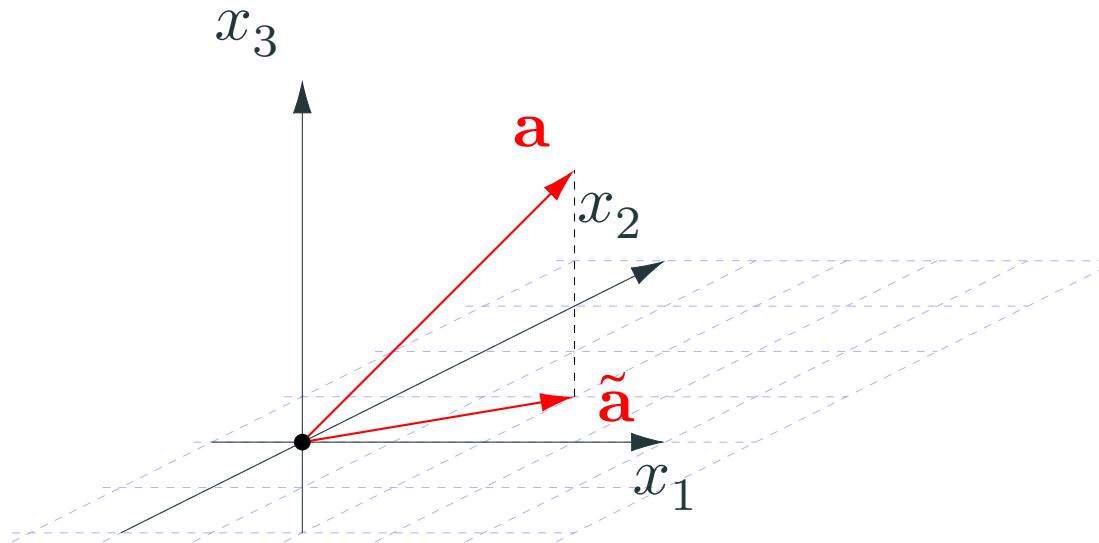
Проекция на прямую $x_1 + 2x_2 = 0$

Оператор $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

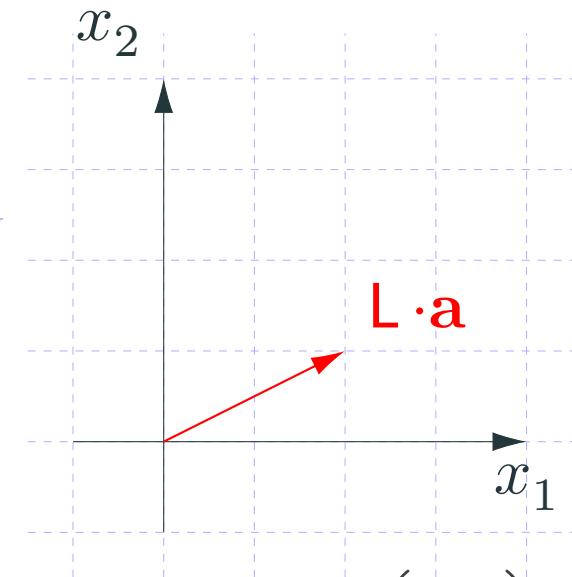


Обрезка компонент вектора

Уменьшаем размерность, $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$



$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

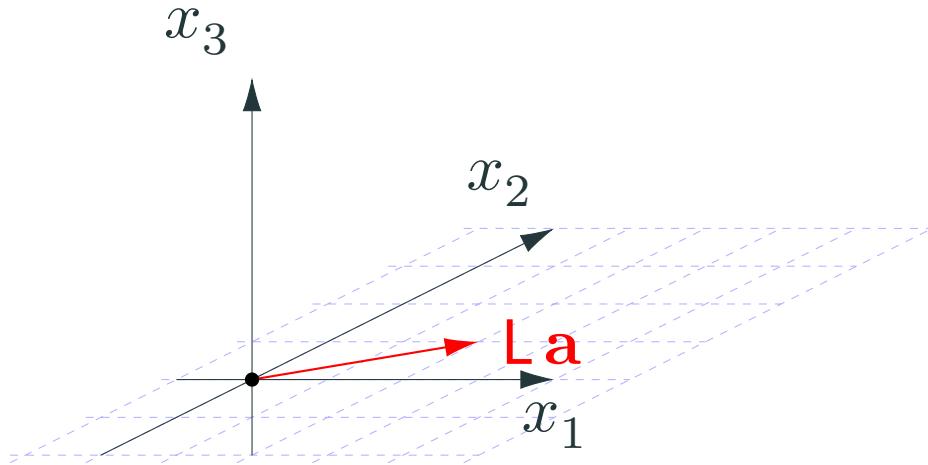
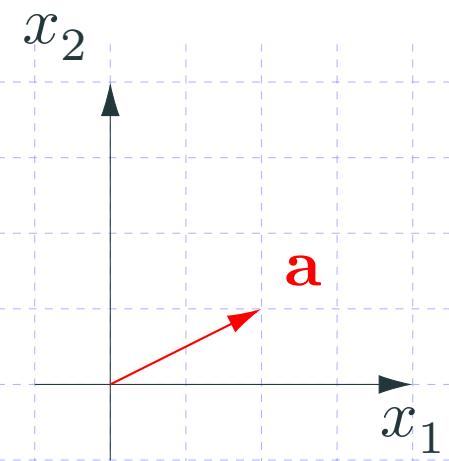


$$L \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Дописывание нулей

Увеличиваем размерность пространства, L :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$L\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ничегонеделание

Определение. Единичный оператор, I ,

$$I(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$$

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор,
 $L_2(L_1(a)) = L(a)$.

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор,
 $L_2(L_1(a)) = L(a).$
- Важно: $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, L_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^p.$

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор,
 $L_2(L_1(a)) = L(a).$
- Важно: $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, L_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^p.$
- **доказательство**

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор,
 $L_2(L_1(\mathbf{a})) = L(\mathbf{a}).$
- Важно: $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, L_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^p.$
- **доказательство**
 - $L_2(L_1(t\mathbf{a})) = L_2(tL_1(\mathbf{a})) = tL_2(L_1(\mathbf{a}))$

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор,

$$L_2(L_1(\mathbf{a})) = L(\mathbf{a}).$$

- Важно: $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $L_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^p$.
- **доказательство**

- $L_2(L_1(t\mathbf{a})) = L_2(t L_1(\mathbf{a})) = t L_2(L_1(\mathbf{a}))$

- $L_2(L_1(\mathbf{a} + \mathbf{b})) = L_2(L_1(\mathbf{a}) + L_1(\mathbf{b})) = L_2(L_1(\mathbf{a})) + L_2(L_1(\mathbf{b}))$

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор,

$$L_2(L_1(\mathbf{a})) = L(\mathbf{a}).$$

- Важно: $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $L_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^p$.

доказательство

- $L_2(L_1(t\mathbf{a})) = L_2(t L_1(\mathbf{a})) = t L_2(L_1(\mathbf{a}))$
- $L_2(L_1(\mathbf{a} + \mathbf{b})) = L_2(L_1(\mathbf{a}) + L_1(\mathbf{b})) = L_2(L_1(\mathbf{a})) + L_2(L_1(\mathbf{b}))$
- Композицию также называют умножением.

Сумма линейных операторов

- Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный линейный оператор,
 $L_1(a) + L_2(a) = L(a)$.

Сумма линейных операторов

- Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный линейный оператор,
 $L_1(\mathbf{a}) + L_2(\mathbf{a}) = L(\mathbf{a}).$
- Важно: $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, L_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k.$

Сумма линейных операторов

- Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный линейный оператор,
 $L_1(a) + L_2(a) = L(a).$
- Важно: $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, L_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k.$
- **доказательство**

Сумма линейных операторов

- Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный линейный оператор,
 $L_1(\mathbf{a}) + L_2(\mathbf{a}) = L(\mathbf{a}).$

- Важно: $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, L_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k.$
- **доказательство**

- $L_1(t\mathbf{a}) + L_2(t\mathbf{a}) = t L_1(\mathbf{a}) + t L_2(\mathbf{a}) = t(L_1(\mathbf{a}) + L_2(\mathbf{a}))$

Сумма линейных операторов

- Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный линейный оператор,

$$L_1(\mathbf{a}) + L_2(\mathbf{a}) = L(\mathbf{a}).$$

- Важно: $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $L_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$.
- **доказательство**

- $L_1(t\mathbf{a}) + L_2(t\mathbf{a}) = t L_1(\mathbf{a}) + t L_2(\mathbf{a}) = t(L_1(\mathbf{a}) + L_2(\mathbf{a}))$
- $L(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = L_1(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + L_2(\mathbf{a} + \mathbf{b}) =$
 $L_1(\mathbf{a}) + L_2(\mathbf{a}) + L_1(\mathbf{b}) + L_2(\mathbf{b}) = L(\mathbf{a}) + L(\mathbf{b})$

Вывод формулы поворота

название видеофрагмента

видеофрагмент с прозрачной доской

В этом видео мы возьмем произвольный вектор на плоскости.

И посмотрим, что из него получится, если повернуть его на 30 градусов против часовой стрелки.

Рисуем единичную окружность, находим e на единичной окружности, поворачиваем x и e .

Смотрим на ответ и подчёркиваем его линейность по аргументам.

Вывод формулы проекции

название видеофрагмента

видеофрагмент с прозрачной доской

В этом видео мы возьмем произвольный вектор x на плоскости.

И посмотрим, что из него получится, если спроектировать его на прямую, порождённую вектором $(1, 2)$.

Минимизируем квадрат расстояния между проекцией и итогом.

Смотрим на ответ и подчёркиваем его линейность по аргументам.

Обращение оператора

название видеофрагмента

Обращение

Исходный оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Определение.

Обратным оператором к L называют такой оператор L^{-1} , что $L^{-1}L = I$.

Обращение растягивания

- Исходный оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$

Обращение растягивания

- Исходный оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор: $L^{-1} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1 \\ \frac{1}{-3}a_2 \end{pmatrix}$

Обращение растягивания

- Исходный оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор: $L^{-1} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1 \\ \frac{1}{-3}a_2 \end{pmatrix}$
- $L^{-1} L = I$

Обращение перестановки двух компонент

- Исходный оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$

Обращение перестановки двух компонент

- Исходный оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор: $L^{-1} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$

Обращение перестановки двух компонент

- Исходный оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор: $L^{-1} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$
- $L^{-1} L = I$

Обращение перестановки двух компонент

- Исходный оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор: $L^{-1} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$
- $L^{-1} L = I$
- $L^{-1} = L$

Обращение перестановки компонент

- Исходный оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Обращение перестановки компонент

- Исходный оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор: $L^{-1} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix}$

Обращение перестановки компонент

- Исходный оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор: $L^{-1} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix}$
- $L^{-1} L = I$

Обращение единичного оператора

- Исходный оператор $I : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Обращение единичного оператора

- Исходный оператор $I : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор: $I : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

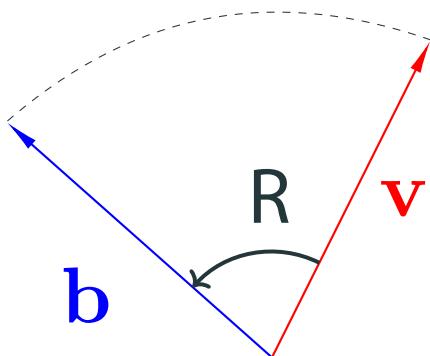
Обращение единичного оператора

- Исходный оператор $I : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор: $I : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
- $I^{-1}I = I$

Обращение поворота

- Исходный оператор $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, поворот на 30° против часовой стрелки.

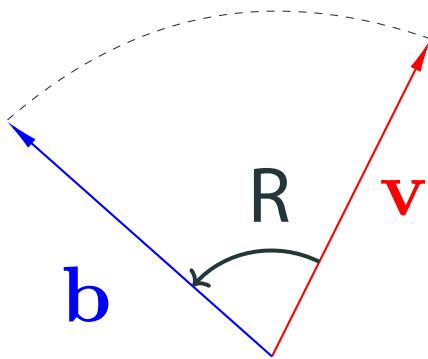
$$R v = b \text{ или } v = R^{-1} b$$



Обращение поворота

- Исходный оператор $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, поворот на 30° против часовой стрелки.
- Обратный оператор: R^{-1} , поворот на 30° по часовой стрелке.

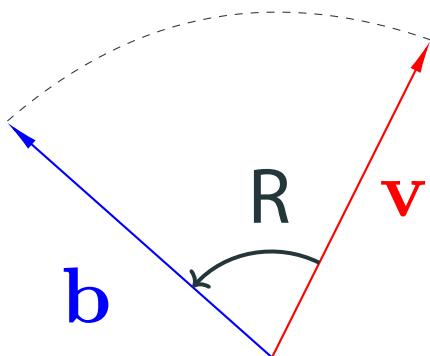
$$R v = b \text{ или } v = R^{-1} b$$



Обращение поворота

- Исходный оператор $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, поворот на 30° против часовой стрелки.
- Обратный оператор: R^{-1} , поворот на 30° по часовой стрелке.
- $R^{-1}R = I$

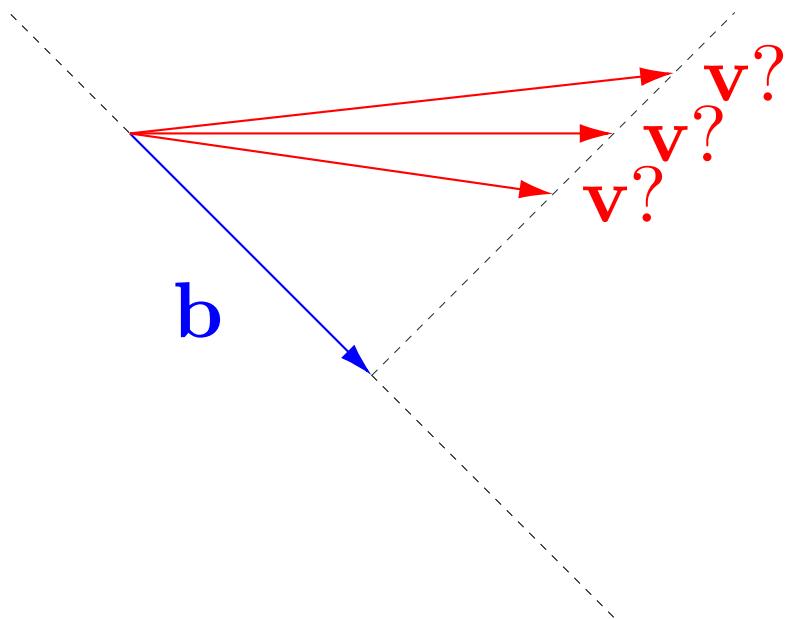
$$R v = b \text{ или } v = R^{-1} b$$



Не все действия обратимы!

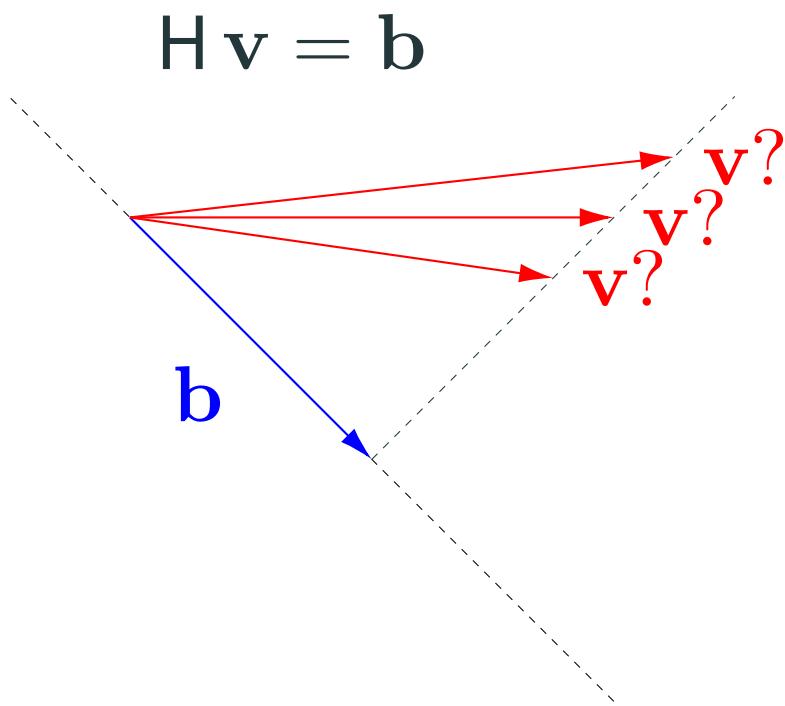
- По определению, исходный оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$Hv = b$$



Не все действия обратимы!

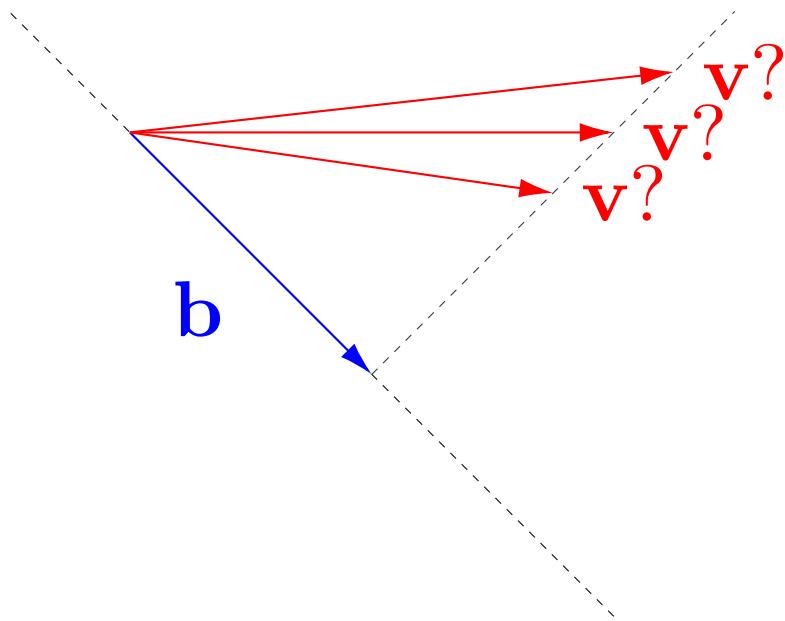
- По определению, исходный оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- Исходный оператор $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, проекция на прямую $x_1 + 2x_2 = 0$.



Не все действия обратимы!

- По определению, исходный оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- Исходный оператор $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, проекция на прямую $x_1 + 2x_2 = 0$.
- Обратный оператор H^{-1} не существует!

$$H v = b$$



Транспонирование оператора и ортогональность

название видеофрагмента

Транспонирование

У любого оператора L есть брат L^T .

Определение. Транспонированным оператором, L^T , называется оператор, для которого

$$\langle La, b \rangle = \langle a, L^T b \rangle$$

Транспонирование

Почему L и L^T братья?

- $(L^T)^T = L$

Транспонирование

Почему L и L^T братья?

- $(L^T)^T = L$
- Доказательство:

Транспонирование

Почему L и L^T братья?

- $(L^T)^T = L$
- Доказательство:
- $\langle L a, b \rangle = \langle a, L^T b \rangle$

Транспонирование

Почему L и L^T братья?

- $(L^T)^T = L$
- Доказательство:
- $\langle L a, b \rangle = \langle a, L^T b \rangle$
- $\langle a, L b \rangle = \langle L^T a, b \rangle$

Транспонирование

Почему L и L^T братья?

- $(L^T)^T = L$
- Доказательство:
- $\langle L a, b \rangle = \langle a, L^T b \rangle$
- $\langle a, L b \rangle = \langle L^T a, b \rangle$
- $\langle L^T a, b \rangle = \langle a, L b \rangle$

Транспонирование растяжения

- Исходный оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$

Транспонирование растяжения

- Исходный оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$
- $\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 2a_1 b_1 - 3a_2 b_2 = \langle \mathbf{a}, L \mathbf{b} \rangle$

Транспонирование растяжения

- Исходный оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$
- $\langle L\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 2a_1b_1 - 3a_2b_2 = \langle \mathbf{a}, L\mathbf{b} \rangle$
- $L^T = L$

Транспонирование поворота

- Исходный оператор L — поворот на плоскоти на 30° против часовой стрелки.

Транспонирование поворота

- Исходный оператор L — поворот на плоскости на 30° против часовой стрелки.
- $\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle$

Транспонирование поворота

- Исходный оператор L — поворот на плоскости на 30° против часовой стрелки.
- $\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle$
- Поворот не меняет длины.

Транспонирование поворота

- Исходный оператор L — поворот на плоскости на 30° против часовой стрелки.
- $\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle$
- Поворот не меняет длины.
- $\angle(L \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, L^T \mathbf{b})$

Транспонирование поворота

- Исходный оператор L — поворот на плоскости на 30° против часовой стрелки.
- $\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle$
- Поворот не меняет длины.
- $\angle(L \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, L^T \mathbf{b})$
- L^T — поворот на плоскости на 30° по часовой стрелке.

Транспонирование поворота

- Исходный оператор L — поворот на плоскости на 30° против часовой стрелки.
- $\langle L\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle$
- Поворот не меняет длины.
- $\angle(L\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, L^T \mathbf{b})$
- L^T — поворот на плоскости на 30° по часовой стрелке.
- $L^T = L^{-1}$

Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R}^3$:

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 b_3$

Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R}^3$:

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\langle La, b \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + 0b_3$
- Третья компонента b не важна!

Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 b_3$
- Третья компонента \mathbf{b} не важна!

- $L^T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$L : \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 b_3$
- Третья компонента \mathbf{b} не важна!

- $L^T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$L : \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

- $\langle \mathbf{a}, L \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 b_3$

- Третья компонента \mathbf{b} не важна!

- $L^T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

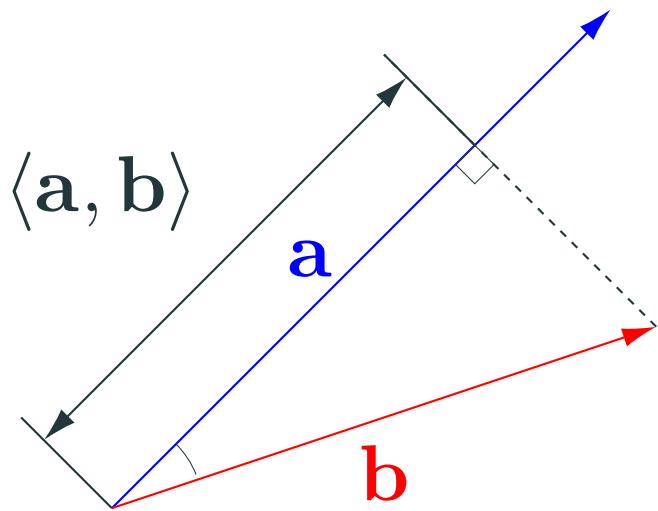
$$L : \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

- $\langle \mathbf{a}, L \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$

- L^T — удаление третьей компоненты вектора.

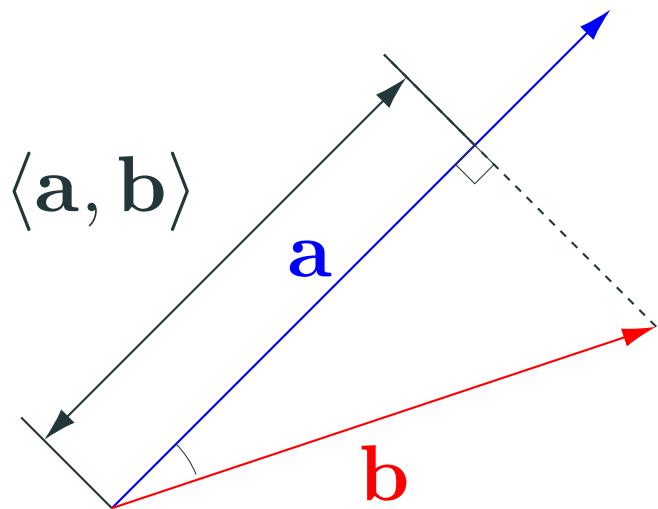
Транспонирование проекции

- Исходный оператор $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, проекция на прямую $x_1 + 2x_2 = 0$.



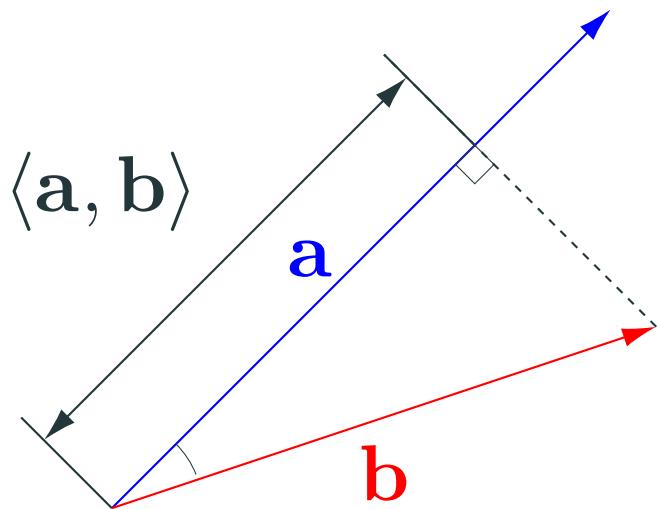
Транспонирование проекции

- Исходный оператор $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, проекция на прямую $x_1 + 2x_2 = 0$.
- Временно $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$.



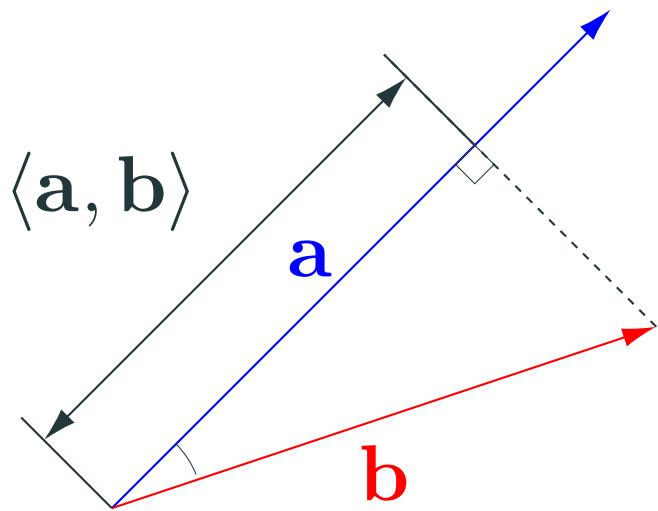
Транспонирование проекции

- Исходный оператор $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, проекция на прямую $x_1 + 2x_2 = 0$.
- Временно $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$.
- $\langle H\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, H\mathbf{b} \rangle$



Транспонирование проекции

- Исходный оператор $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, проекция на прямую $x_1 + 2x_2 = 0$.
- Временно $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$.
- $\langle H\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, H\mathbf{b} \rangle$
- $H^T = H$.



Ортогональный оператор

- Определение. Оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется **ортогональным**, если

Ортогональный оператор

- Определение. Оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется **ортогональным**, если
 - оператор сохраняет длины, $\|L\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$

Ортогональный оператор

- Определение. Оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется **ортогональным**, если
 - оператор сохраняет длины, $\|L\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$
 - оператор сохраняет углы, $\angle(L\mathbf{a}, L\mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Ортогональный оператор

- Определение. Оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется **ортогональным**, если
 - оператор сохраняет длины, $\|L\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$
 - оператор сохраняет углы, $\angle(L\mathbf{a}, L\mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
- Эквивалентное определение-2:
 $\langle L\mathbf{a}, L\mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$

Ортогональный оператор

- Определение. Оператор $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется **ортогональным**, если
 - оператор сохраняет длины, $\|L\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$
 - оператор сохраняет углы, $\angle(L\mathbf{a}, L\mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
- Эквивалентное определение-2:
 $\langle L\mathbf{a}, L\mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$
- Эквивалентное определение-3:
 $L^T = L^{-1}.$

Ортогональный оператор: примеры

- Перестановка двух компонент вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Ортогональный оператор: примеры

- Перестановка двух компонент вектора
 $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$
- Поворот на плоскости на 30° против часовой стрелки.

Полтора доказательства

- Определения 1 и 2 эквивалентны.

Полтора доказательства

- Определения 1 и 2 эквивалентны.
- Скалярное произведение задаёт углы и длины:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \quad \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

Полтора доказательства

- Определения 1 и 2 эквивалентны.
- Скалярное произведение задаёт углы и длины:
$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \quad \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$
- Длина и угол задают скалярное произведение:
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

Полтора доказательства

- Определения 1 и 2 эквивалентны.
- Скалярное произведение задаёт углы и длины:
$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle} \quad \cos \angle(a, b) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|}$$
- Длина и угол задают скалярное произведение:
$$\langle a, b \rangle = \|a\| \|b\| \cos \angle(a, b)$$
- Из определения 3 следует определение 1.

Полтора доказательства

- Определения 1 и 2 эквивалентны.
- Скалярное произведение задаёт углы и длины:
$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle} \quad \cos \angle(a, b) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|}$$
- Длина и угол задают скалярное произведение:
$$\langle a, b \rangle = \|a\| \|b\| \cos \angle(a, b)$$
- Из определения 3 следует определение 1.
- $\langle L a, b \rangle = \langle a, L^T b \rangle = \langle a, L^{-1} b \rangle$

Полтора доказательства

- Определения 1 и 2 эквивалентны.
- Скалярное произведение задаёт углы и длины:
$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \quad \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$
- Длина и угол задают скалярное произведение:
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$
- Из определения 3 следует определение 1.
- $\langle L\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^{-1} \mathbf{b} \rangle$
- $\langle L\mathbf{a}, L\mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$

Собственные векторы и собственные числа

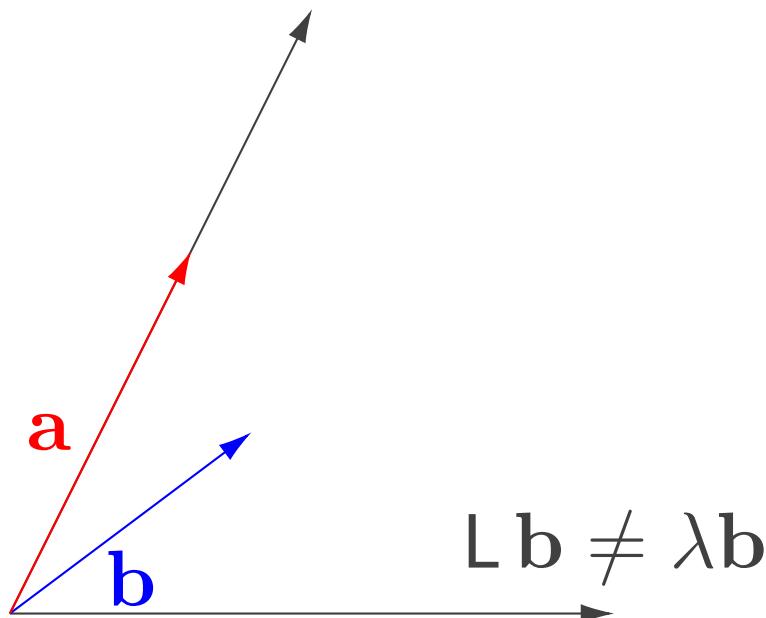
название видеофрагмента

Собственные векторы и собственные числа

Определение. Если для действия $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ найдётся такой вектор v , что $L v = \lambda \cdot v$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, то:

- вектор v называется **собственным**;
- число λ называется **собственным**.

$$L a = \lambda a$$



Собственные вектора: растягивание вдоль осей

- Оператор

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

Собственные вектора: растягивание вдоль осей

- Оператор

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

- Собственные векторы с $\lambda = 2$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Собственные вектора: растягивание вдоль осей

- Оператор

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

- Собственные векторы с $\lambda = 2$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Собственные векторы с $\lambda = -3$

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Собственные вектора: перестановка компонент

- Оператор L — перестановка компонент:

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Собственные вектора: перестановка компонент

- Оператор L — перестановка компонент:

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

- Собственные векторы с $\lambda = 1$

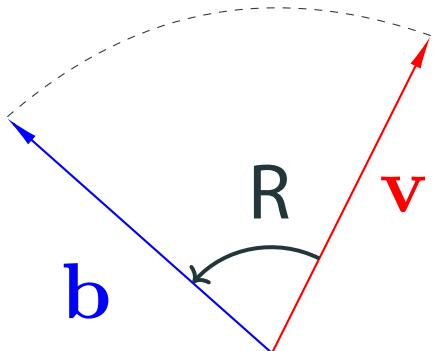
Однаковые числа на переставляемых местах:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ x \\ a_3 \\ x \end{pmatrix}$$

Собственные векторы: поворот

- Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!

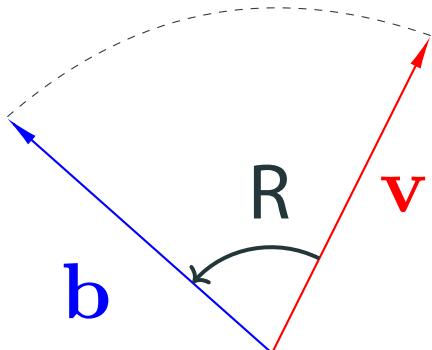
$$R v = b$$



Собственные векторы: поворот

- Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!
- По определению, $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

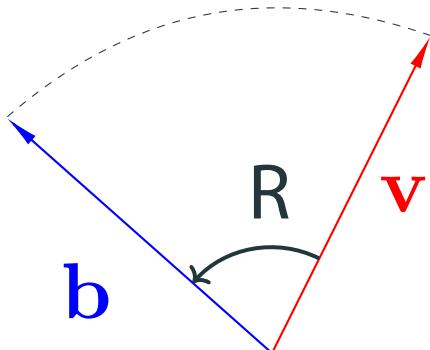
$$R v = b$$



Собственные векторы: поворот

- Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!
- По определению, $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
- Исходный оператор $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, поворот на 30° против часовой стрелки.

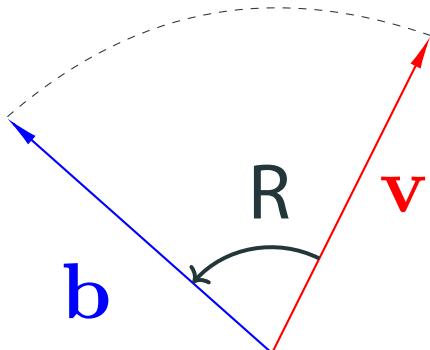
$$R v = b$$



Собственные векторы: поворот

- Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!
- По определению, $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
- Исходный оператор $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, поворот на 30° против часовой стрелки.
- Собственных векторов (и чисел) нет!

$$R v = b$$



Собственные вектора: проекция

- Оператор L — проекция на прямую $\ell : x_1 + 2x_2 = 0$.

Собственные вектора: проекция

- Оператор L — проекция на прямую $\ell : x_1 + 2x_2 = 0$.
- Собственные векторы с $\lambda = 1$
Любой вектор на прямой ℓ .

Собственные вектора: проекция

- Оператор L — проекция на прямую $\ell : x_1 + 2x_2 = 0$.
- Собственные векторы с $\lambda = 1$
Любой вектор на прямой ℓ .
- Собственные векторы с $\lambda = 0$
Любой вектор ортогональный прямой ℓ .

Игра Ним

название видеофрагмента

**это видео является бонусным, поэтому ничего нет
страшного, что с ним выходит много видео, или оно
будет долгое**

**В начале фрагмента идёт слайд с правилами затем
видеофрагмент с прозрачной доской**

Игра Ним

- Есть три кучки с камнями: 3, 5 и 8 камней;
- Два игрока ходят по очереди;
- За ход:
 - игрок выбирает одну кучку;
 - берёт из неё положительное число камней;
- Выигрывает берущий последний камень.

Какой ход сделать первому игроку?

видео с доской

Краткое содержание:

закодируем каждую кучку двоичным вектором
стоимость позиции — сумма этих двух векторов
финальная позиция имеет стоимость ноль
любой ход из нулевой позиции ведёт в положительную
Из положительной позиции можно попасть в нулевую
С помощью нижней единички убиваем остальные
Выигрышный ход: взять 2 камня из кучки в 8 камней