

# Векторы и операторы

Вектор: длина и скалярное произведение

# Краткое напутствие

Зачем нужна **линейная алгебра**?

- Линейная алгебра прекрасна сама по себе!

# Краткое напутствие

Зачем нужна **линейная алгебра**?

- Линейная алгебра прекрасна сама по себе!
- Работает «под капотом» практически всех методов машинного обучения.

# Краткий план:

- Вектор — это столбец чисел.

# Краткий план:

- Вектор — это столбец чисел.
- Сложение двух векторов и умножение на число.

# Краткий план:

- Вектор — это столбец чисел.
- Сложение двух векторов и умножение на число.
- Расстояние и косинус угла между векторами.

# Вектор

## Рабочее определение

Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

# Вектор

## Рабочее определение

Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

## Идея вектора

Вектор — всё, что можно описать столбцом из нескольких чисел.

# Вектор

## Рабочее определение

Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

## Идея вектора

Вектор — всё, что можно описать столбцом из нескольких чисел.

Мы не пишем стрелочку над вектором.

# Вектор

## Рабочее определение

Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

## Идея вектора

Вектор — всё, что можно описать столбцом из нескольких чисел.

Мы не пишем стрелочку над вектором.

Вектор из нулей обозначаем 0.

# Пространство $\mathbb{R}^n$

## Определение

Пространство  $\mathbb{R}^n$ :

Множество всех возможных векторов из  $n$  чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

# Пространство $\mathbb{R}^n$

## Определение

Пространство  $\mathbb{R}^n$ :

Множество всех возможных векторов из  $n$  чисел.

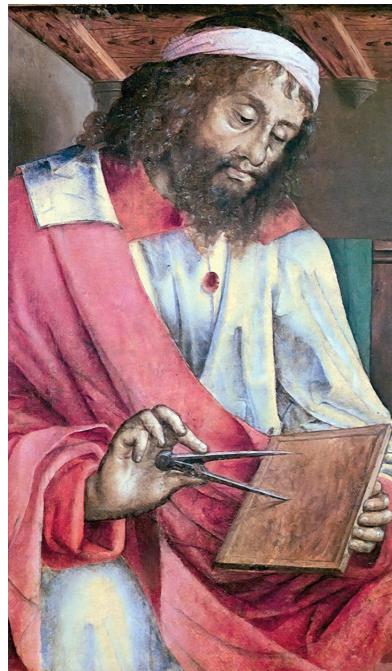
$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

## Определение

Размерность пространства  $\mathbb{R}^n$ :

Количество чисел в каждом векторе,  $n$ .

# Длина вектора



Евклид, около 300 лет до н.э.

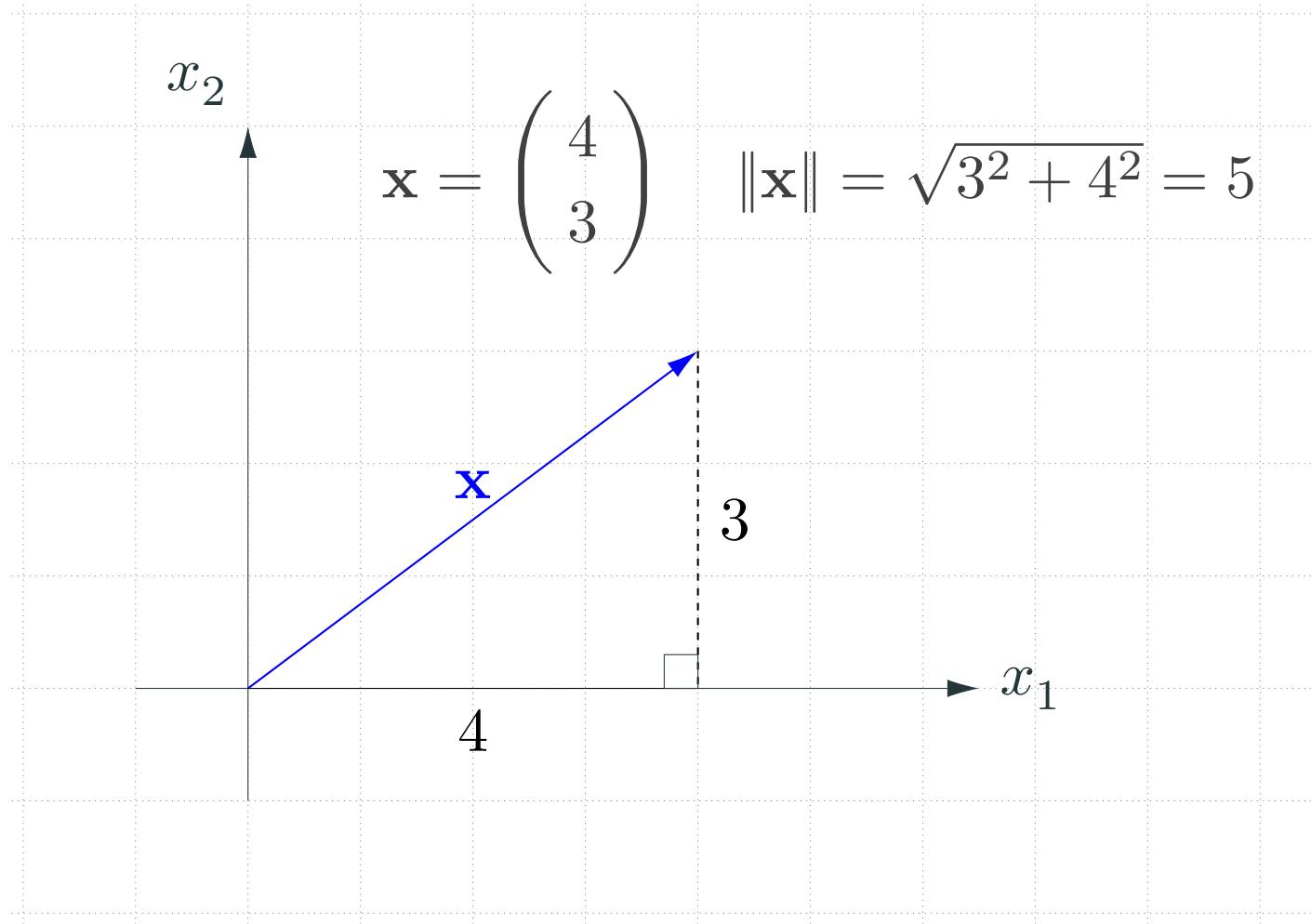
wikipedia.org / общественное достояние

## Определение

Евклидова длина или норма  
вектора

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

# Длина вектора

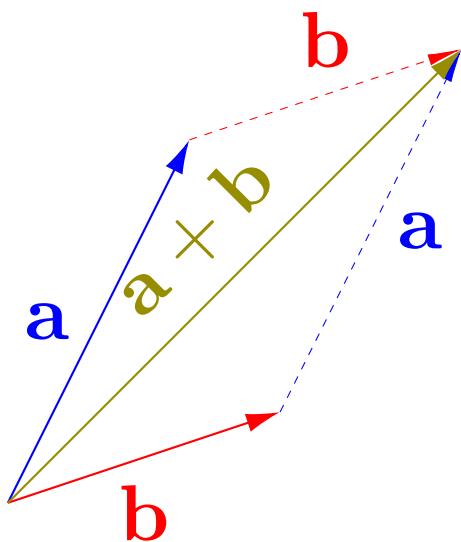


# Сложение и вычитание двух векторов

## Определение

Сложение и вычитание двух векторов выполняем поэлементно:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3.5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

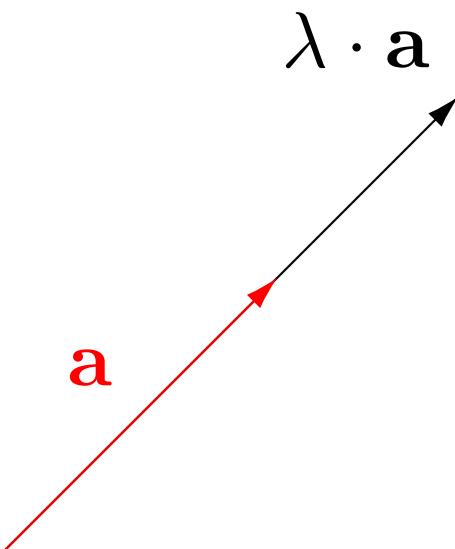


# Умножение вектора на число

## Определение

Умножение вектора на число выполняем поэлементно:

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3.5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$$



# Расстояние между векторами

## Определение

Евклидово расстояние между векторами

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$$

# Расстояние между векторами

## Определение

Евклидово расстояние между векторами

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$$

По определению,  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$ .

Также говорят Евклидова метрика.

# Расстояние между векторами

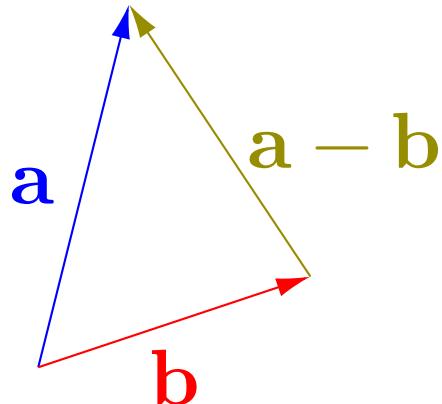
## Определение

Евклидово расстояние между векторами

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$$

По определению,  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$ .

Также говорят Евклидова метрика.



# Скалярное произведение и угол

## Определение

Скалярное произведение векторов  $a$  и  $b$ :

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

# Скалярное произведение и угол

## Определение

Скалярное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :

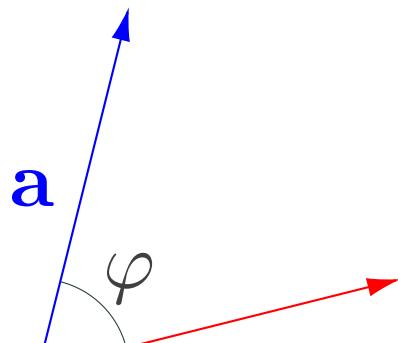
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

## Определение

Косинус угла и угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \quad \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \arccos \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

Угол определён, если  $\|\mathbf{a}\| > 0$  и  $\|\mathbf{b}\| > 0$ .



# Свойства скалярного произведения

- Скалярное произведение вектора на себя равно квадрату длины  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$

# Свойства скалярного произведения

- Скалярное произведение вектора на себя равно квадрату длины  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$
- Линейность по каждому аргументу
$$\langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$
$$\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$$

# Свойства скалярного произведения

- Скалярное произведение вектора на себя равно квадрату длины  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$
- Линейность по каждому аргументу
$$\langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$
$$\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$$
- Симметричность
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$$

# Свойства скалярного произведения

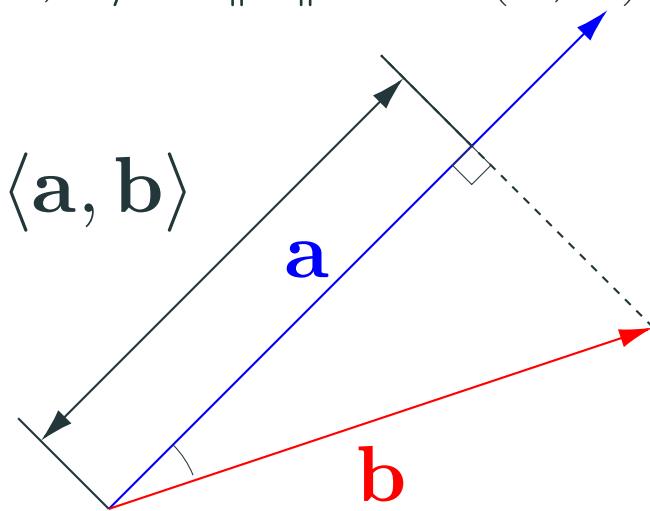
- Скалярное произведение вектора на себя равно квадрату длины  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$
- Линейность по каждому аргументу
$$\langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$
$$\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$$
- Симметричность
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$$
- Скалярное произведение для ненулевых векторов
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

# Скалярное произведение и проекция

- Следствие формулы  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

# Скалярное произведение и проекция

- Следствие формулы  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
- Если вектор  $\mathbf{a}$  имеет единичную длину,  $\|\mathbf{a}\| = 1$ , то  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  — длина\* проекции  $\mathbf{b}$  на  $\mathbf{a}$ .



# Ортогональность векторов

## Определение

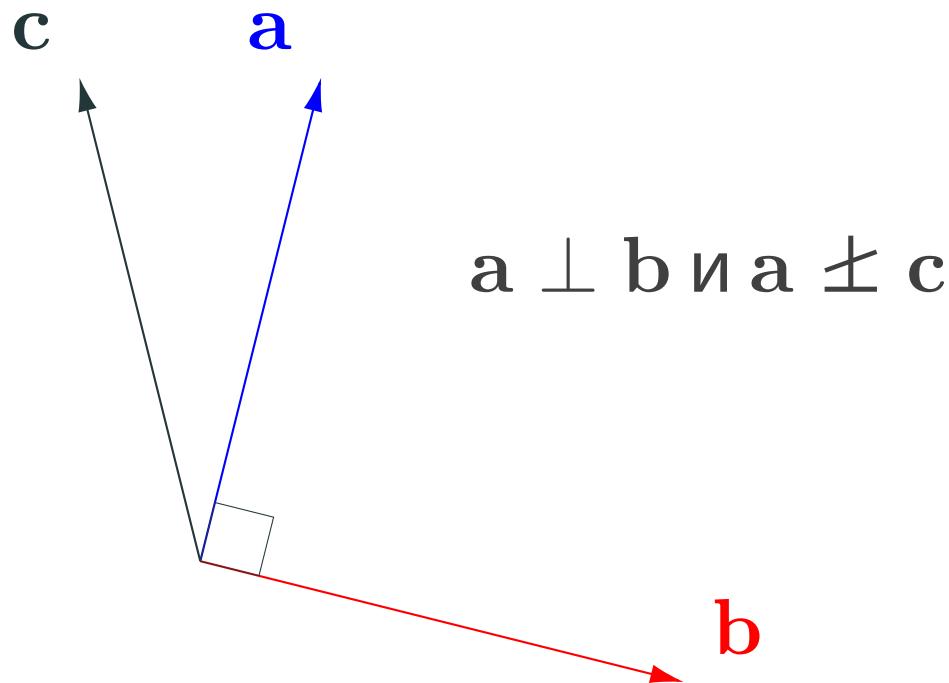
Векторы  $a$  и  $b$  **ортогональны**,  $a \perp b$ , если

$$\langle a, b \rangle = 0$$

Также говорят «**перпендикулярны**».

# Ортогональность векторов

Для ненулевых векторов  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ :



Прямая, порожденная вектором,  
гиперплоскость

## Краткий план:

- Да будет больше разных расстояний!

# Краткий план:

- Да будет больше разных расстояний!
- Делаем из вектора прямую.

# Краткий план:

- Да будет больше разных расстояний!
- Делаем из вектора прямую.
- Делаем из вектора гиперплоскость.

# Больше метрик в студию!

## Определение

Манхэттэнская метрика или расстояние по-Майкопски:

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n|$$

# У НИХ — МАНХЭТТЕН

## SANITARY & TOPOGRAPHICAL MAP

of the City  
and Island  
of



## NEW YORK

Prepared for the Council of Hygiene and Public Health

of the CITIZENS ASSOCIATION.

under the direction of

Topographical Engineer.

EGBERT L. VIELE.

SCALE 1000 FEET TO 1 INCH.



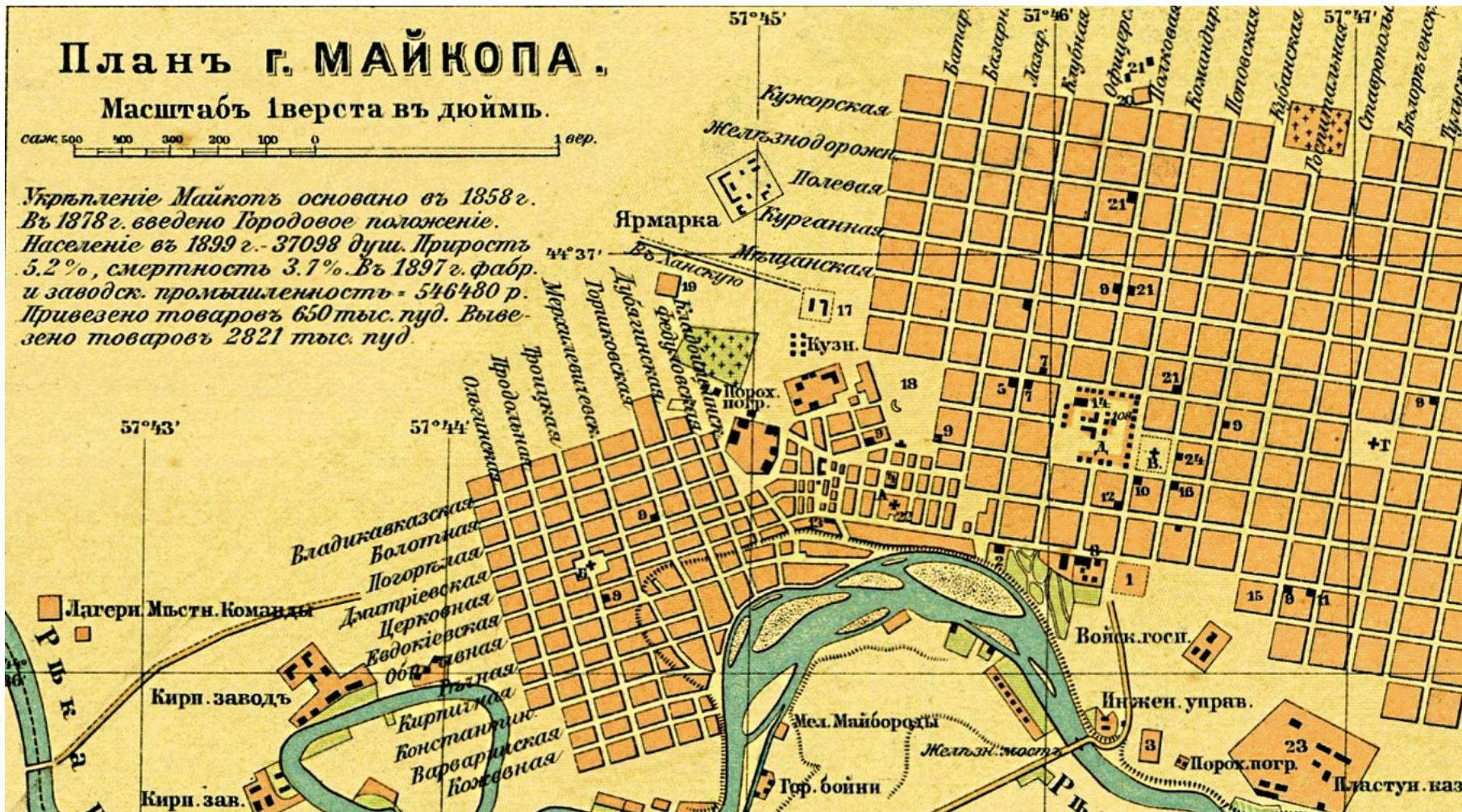
# У нас — Майкоп

## Планъ г. МАЙКОПА.

Масштабъ 1верста въ дюймъ.

Саж. 500 400 300 200 100 0 1 вер.

Уѣзженіе Майкопъ основано въ 1858 г.  
Въ 1878 г. введенъ Городовое положеніе.  
Населеніе въ 1899 г. - 37098 душ. Приростъ  
5.2 %, смертность 3.7 %. Въ 1897 г. фабр.  
и заводск. промышленность - 546480 р.  
Привезено товаровъ 650 тыс. пуд. Выве-  
зено товаровъ 2821 тыс. пуд.



# Ещё больше метрик!

## Определение

Метрика Минковского

$$d_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left( \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|^p \right)^{1/p}$$

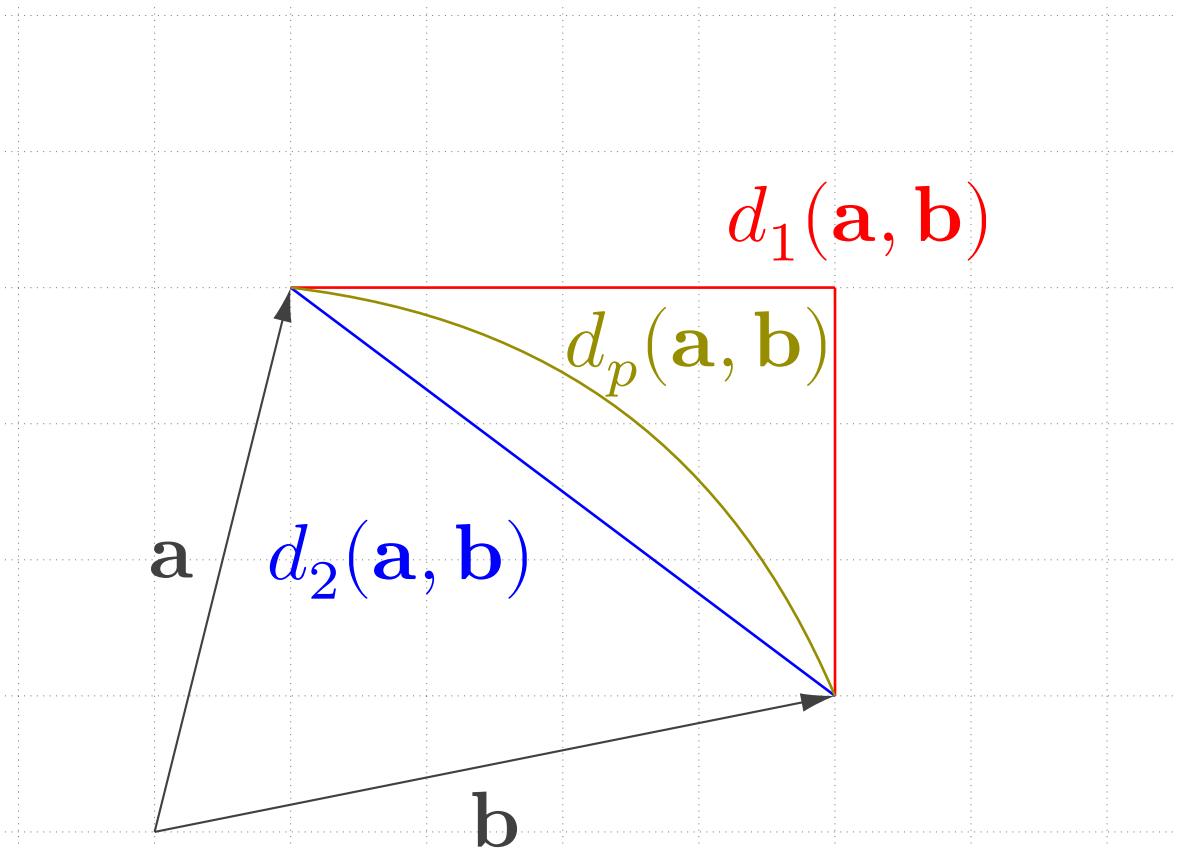
# Частные случаи метрики Минковского

Евклидова метрика,  $p = 2$

$$d_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$$

Манхэттэнская метрика,  $p = 1$

$$d_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n|$$



# Вектор порождает прямую

## Определение

Прямая порождённая вектором  $a$ ,  $\text{Span } a$

Множество векторов, получаемых при домножении вектора  $a$  на произвольное число,

$$\text{Span } \mathbf{a} = \{t \cdot \mathbf{a} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

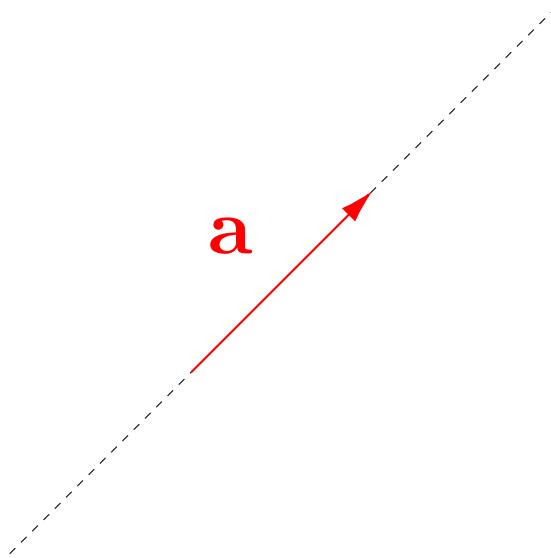
# Вектор порождает прямую

## Определение

Прямая порождённая вектором  $a$ ,  $\text{Span } a$

Множество векторов, получаемых при домножении вектора  $a$  на произвольное число,

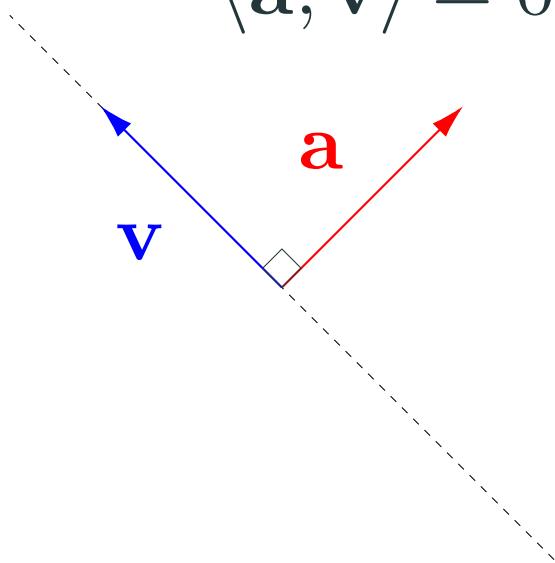
$$\text{Span } a = \{t \cdot a | t \in \mathbb{R}\}$$



# Вектор задаёт гиперплоскость

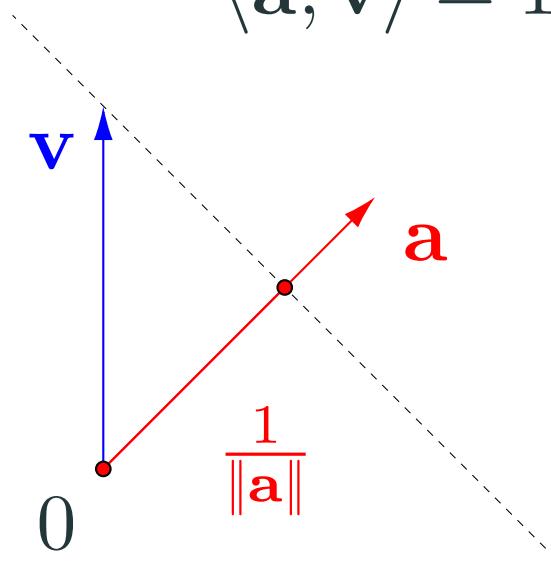
Вектор  $\mathbf{a}$  фиксирован, например,  $\mathbf{a} = (1, 2)$ .

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = 0$$



$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = 1$$



$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 1$$

# Линейный оператор: определение и примеры

# Краткий план:

- Определение линейного оператора.

# Краткий план:

- Определение линейного оператора.
- Примеры линейных операторов.

# Краткий план:

- Определение линейного оператора.
- Примеры линейных операторов.
- Как из двух операторов сделать новый оператор?

# Линейный оператор

Идея линейности:

Результат действия не изменится,  
если поменять местами действие  $L$  и

- растягивание вектора, например,  $L(42a) = 42L(a)$ ;

# Линейный оператор

Идея линейности:

Результат действия не изменится,  
если поменять местами действие  $L$  и

- растягивание вектора, например,  $L(42a) = 42 L(a)$ ;
- усреднение двух векторов,  
$$L(0.5a + 0.5b) = 0.5 L(a) + 0.5 L(b).$$

# Стандартное определение линейности

## Определение

Линейный оператор  $L$  из  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^k$ .

- Для любого числа  $t$  и вектора  $a \in \mathbb{R}^n$ :  $L(ta) = tL(a)$ .

# Стандартное определение линейности

## Определение

Линейный оператор  $L$  из  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^k$ .

- Для любого числа  $t$  и вектора  $a \in \mathbb{R}^n$ :  $L(ta) = tL(a)$ .
- Для любых двух векторов  $a$  и  $b$  из  $\mathbb{R}^n$ :  
$$L(a + b) = L(a) + L(b).$$

# Стандартное определение линейности

## Определение

Линейный оператор  $L$  из  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^k$ .

- Для любого числа  $t$  и вектора  $a \in \mathbb{R}^n$ :  $L(ta) = tL(a)$ .
- Для любых двух векторов  $a$  и  $b$  из  $\mathbb{R}^n$ :  
$$L(a + b) = L(a) + L(b).$$

# Стандартное определение линейности

## Определение

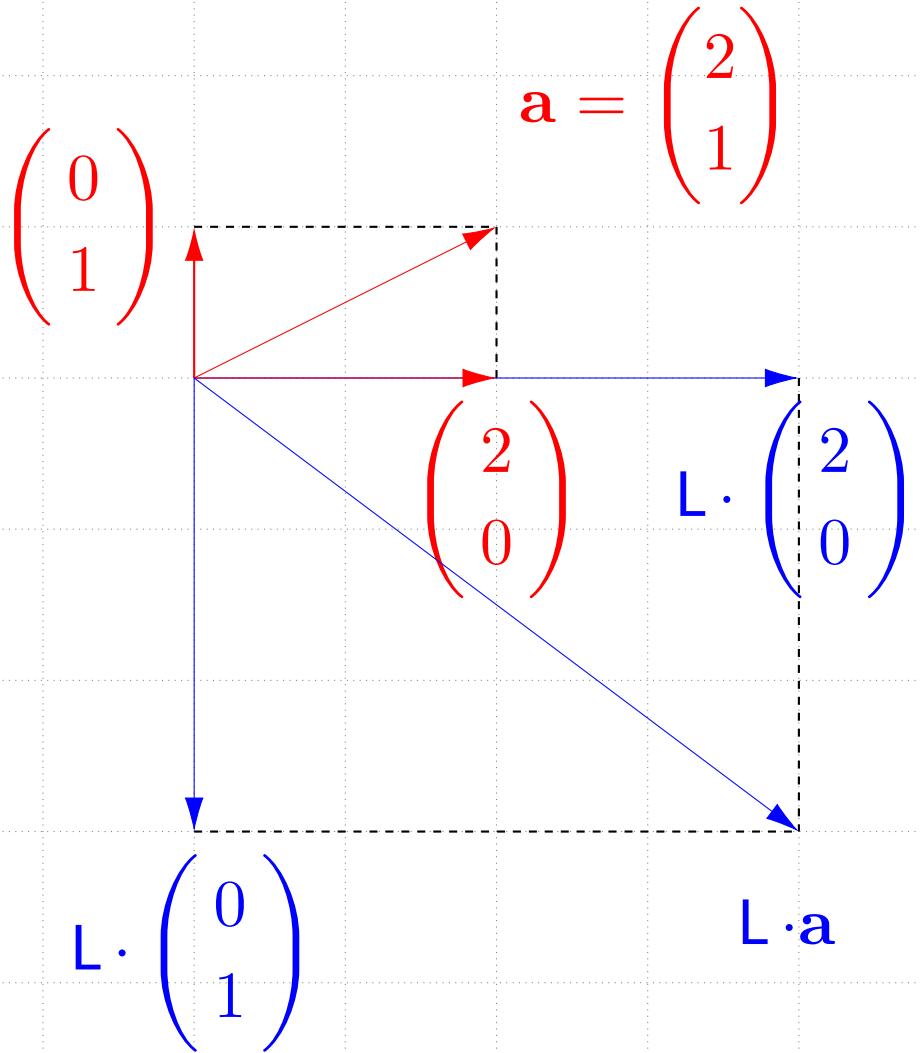
Линейный оператор  $L$  из  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^k$ .

- Для любого числа  $t$  и вектора  $a \in \mathbb{R}^n$ :  $L(ta) = tL(a)$ .
- Для любых двух векторов  $a$  и  $b$  из  $\mathbb{R}^n$ :  
$$L(a + b) = L(a) + L(b).$$

Вместо скобок часто пишут знак умножения,

$$L(a) \equiv L \cdot a \equiv La.$$

# Линейный оператор



# Растягивание координат

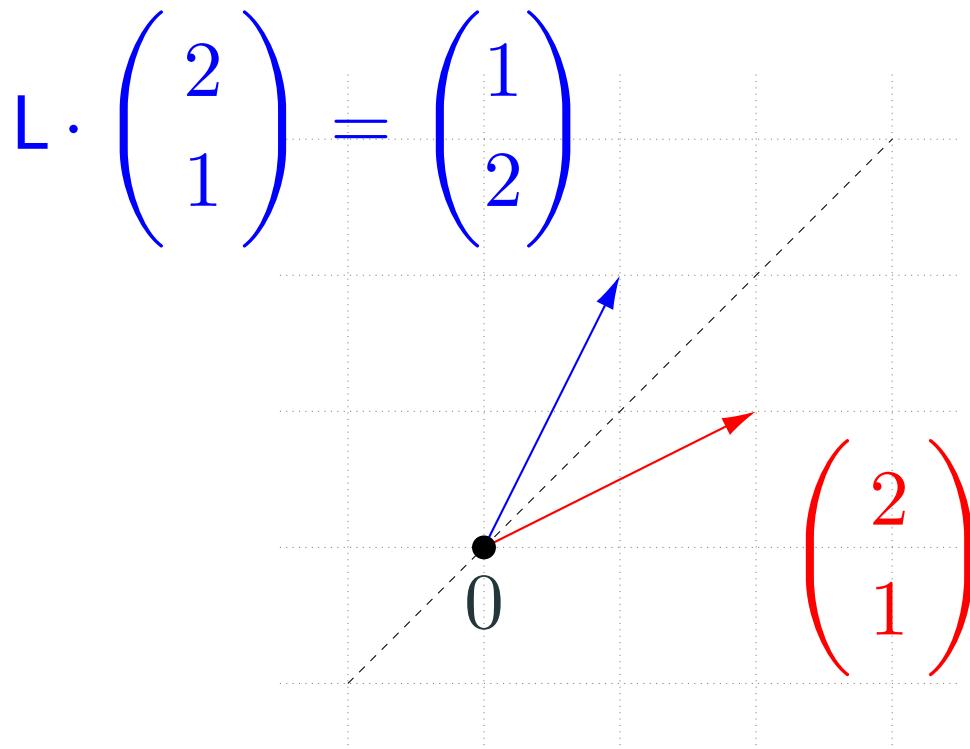
Обобщаем умножение вектора на число!

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

# Перестановка координат вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

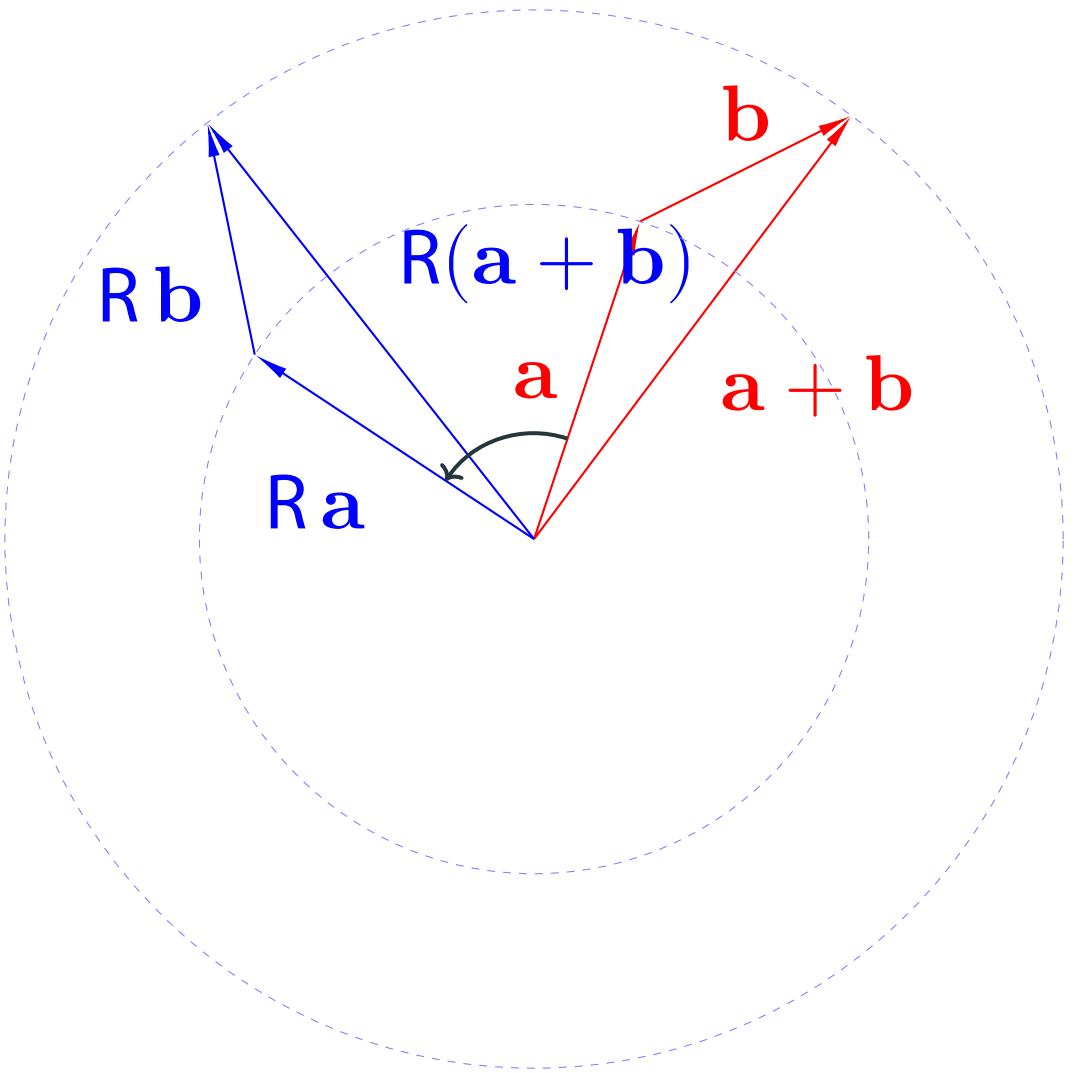
Пример. Отражение относительно  $x_1 = x_2$ :



# Первый поворот

Поворот на  $30^\circ$  против часовой стрелки

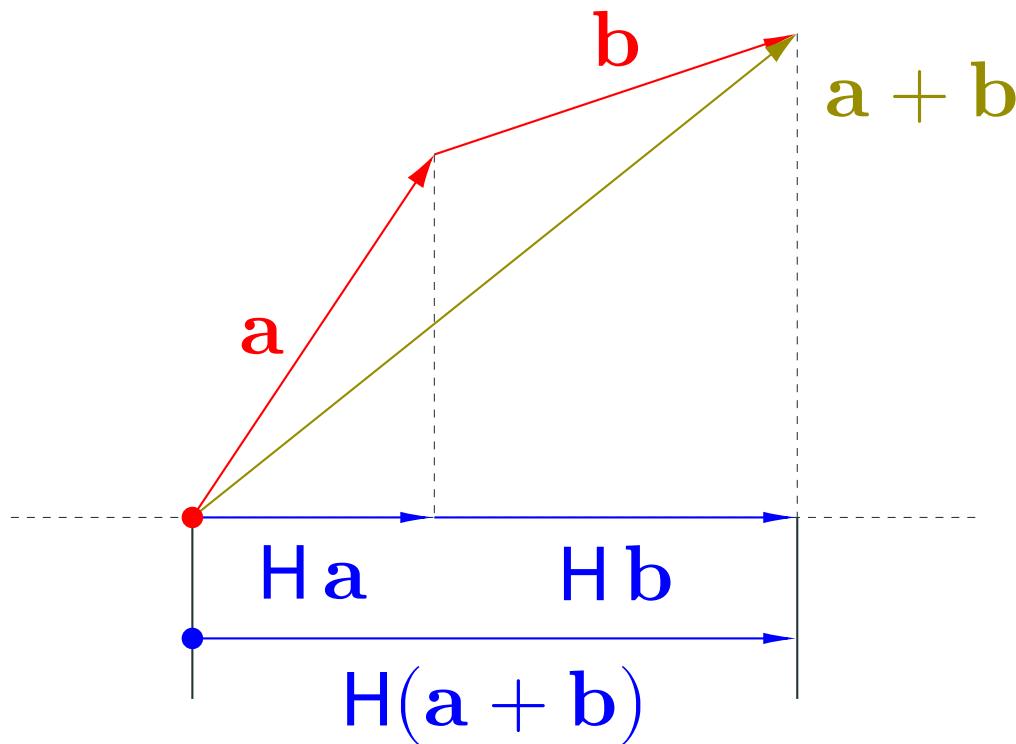
Оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$



# Первая проекция

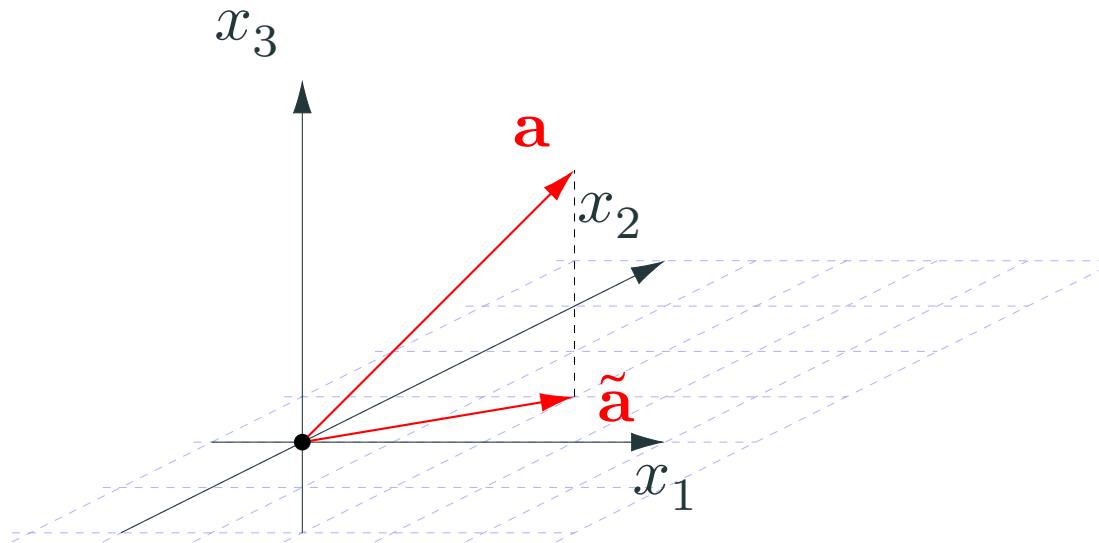
Проекция на прямую  $x_1 + 2x_2 = 0$

Оператор  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

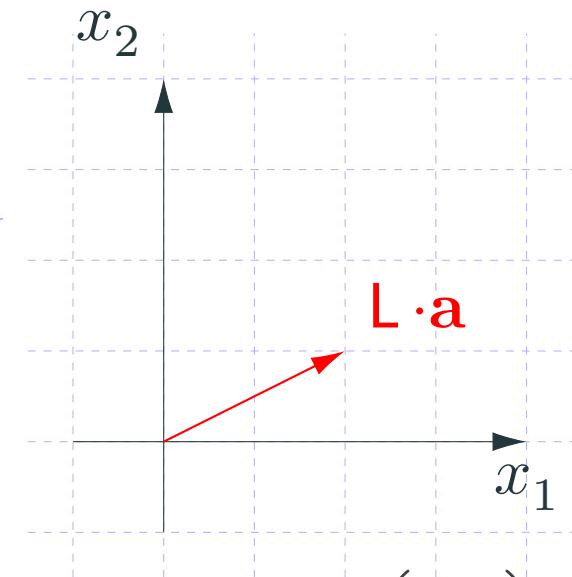


# Обрезка компонент вектора

Уменьшаем размерность,  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$



$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

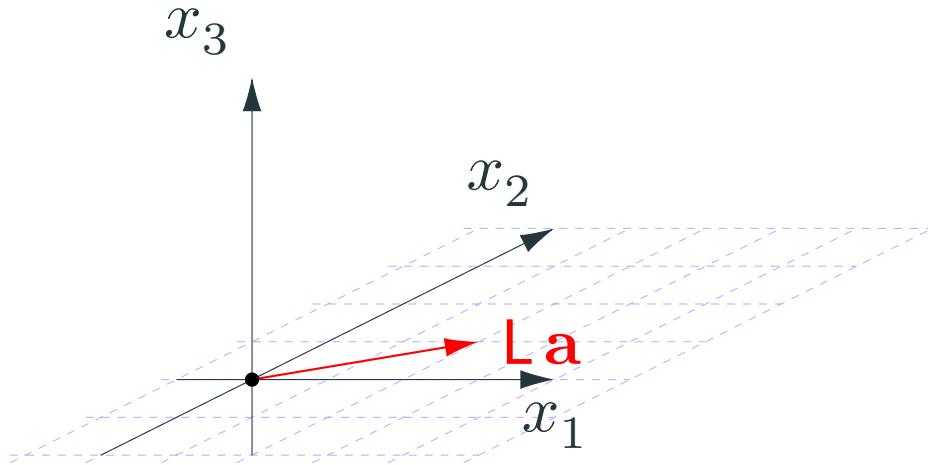
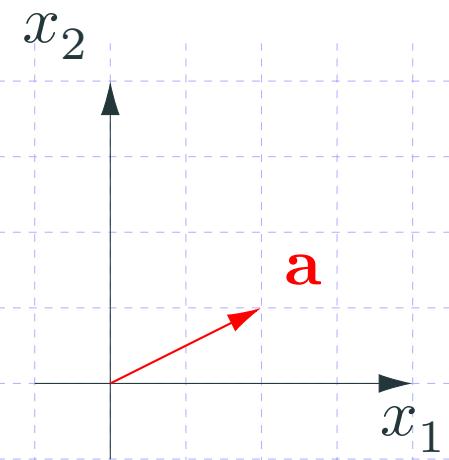


$$L \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

# Дописывание нулей

Увеличиваем размерность пространства,  $L$  :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$L\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Ничегонеделание

## Определение

Единичный оператор,  $I$ , не меняет ни один вектор:

$$I(\mathbf{a}) = \mathbf{a}.$$

# Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор,  
 $L_2(L_1(a)) = L(a)$ .

# Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор,  
 $L_2(L_1(a)) = L(a).$
- Важно:  $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, L_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^p.$

# Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор,  
 $L_2(L_1(a)) = L(a).$
- Важно:  $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, L_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^p.$
- Доказательство

# Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор,  
 $L_2(L_1(\mathbf{a})) = L(\mathbf{a}).$
- Важно:  $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, L_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^p.$
- Доказательство
  - $L_2(L_1(t\mathbf{a})) = L_2(tL_1(\mathbf{a})) = tL_2(L_1(\mathbf{a}))$

# Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор,

$$L_2(L_1(\mathbf{a})) = L(\mathbf{a}).$$

- Важно:  $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $L_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^p$ .
- Доказательство

- $L_2(L_1(t\mathbf{a})) = L_2(t L_1(\mathbf{a})) = t L_2(L_1(\mathbf{a}))$

- $L_2(L_1(\mathbf{a} + \mathbf{b})) = L_2(L_1(\mathbf{a}) + L_1(\mathbf{b})) = L_2(L_1(\mathbf{a})) + L_2(L_1(\mathbf{b}))$

# Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор,

$$L_2(L_1(\mathbf{a})) = L(\mathbf{a}).$$

- Важно:  $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $L_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

## Доказательство

- $L_2(L_1(t\mathbf{a})) = L_2(t L_1(\mathbf{a})) = t L_2(L_1(\mathbf{a}))$
- $L_2(L_1(\mathbf{a} + \mathbf{b})) = L_2(L_1(\mathbf{a}) + L_1(\mathbf{b})) = L_2(L_1(\mathbf{a})) + L_2(L_1(\mathbf{b}))$
- Композицию также называют умножением.

# Сумма линейных операторов

- Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный линейный оператор,  
 $L_1(a) + L_2(a) = L(a)$ .

# Сумма линейных операторов

- Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный линейный оператор,  
 $L_1(\mathbf{a}) + L_2(\mathbf{a}) = L(\mathbf{a}).$
- Важно:  $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, L_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k.$

# Сумма линейных операторов

- Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный линейный оператор,  
 $L_1(a) + L_2(a) = L(a).$
- Важно:  $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, L_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k.$
- Доказательство

# Сумма линейных операторов

- Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный линейный оператор,  
 $L_1(\mathbf{a}) + L_2(\mathbf{a}) = L(\mathbf{a}).$

- Важно:  $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, L_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k.$
- **Доказательство**

- $\bullet L_1(t\mathbf{a}) + L_2(t\mathbf{a}) = tL_1(\mathbf{a}) + tL_2(\mathbf{a}) = t(L_1(\mathbf{a}) + L_2(\mathbf{a}))$

# Сумма линейных операторов

- Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный линейный оператор,  
 $L_1(\mathbf{a}) + L_2(\mathbf{a}) = L(\mathbf{a}).$

- Важно:  $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, L_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k.$

- **Доказательство**

- $L_1(t\mathbf{a}) + L_2(t\mathbf{a}) = tL_1(\mathbf{a}) + tL_2(\mathbf{a}) = t(L_1(\mathbf{a}) + L_2(\mathbf{a}))$
- $L(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = L_1(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + L_2(\mathbf{a} + \mathbf{b}) =$   
 $L_1(\mathbf{a}) + L_2(\mathbf{a}) + L_1(\mathbf{b}) + L_2(\mathbf{b}) = L(\mathbf{a}) + L(\mathbf{b})$

# Вывод формулы поворота

**видеофрагмент с прозрачной доской**

**В этом видео мы возьмем произвольный вектор на плоскости.**

**И посмотрим, что из него получится, если повернуть его на 30 градусов против часовой стрелки.**

**Рисуем единичную окружность, находим  $e$  на единичной окружности, поворачиваем  $x$  и  $e$ .**

**Смотрим на ответ и подчёркиваем его линейность по аргументам.**

# Вывод формулы проекции

**видеофрагмент с прозрачной доской**

**В этом видео мы возьмем произвольный вектор  $x$  на плоскости.**

**И посмотрим, что из него получится, если спроектировать его на прямую, порождённую вектором  $(1, 2)$ .**

**Минимизируем квадрат расстояния между проекцией и итогом.**

**Смотрим на ответ и подчёркиваем его линейность по аргументам.**

# Обращение оператора

# Обращение

## Определение

Рассмотрим оператор  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Оператор  $L^{-1}$  называют **обратным оператором** к  $L$ , если

$$L \cdot L^{-1} = L^{-1} \cdot L = I.$$

# Обращение

## Определение

Рассмотрим оператор  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Оператор  $L^{-1}$  называют **обратным оператором** к  $L$ , если

$$L \cdot L^{-1} = L^{-1} \cdot L = I.$$

Мы не обращаем операторы  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  при  $n \neq k$ .

# Обращение

## Определение

Рассмотрим оператор  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Оператор  $L^{-1}$  называют **обратным оператором** к  $L$ , если

$$L \cdot L^{-1} = L^{-1} \cdot L = I.$$

Мы не обращаем операторы  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  при  $n \neq k$ .

Даже для  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  обратный оператор не всегда существует!

# Обращение

## Определение

Рассмотрим оператор  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Оператор  $L^{-1}$  называют **обратным оператором** к  $L$ , если

$$L \cdot L^{-1} = L^{-1} \cdot L = I.$$

Мы не обращаем операторы  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  при  $n \neq k$ .

Даже для  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  обратный оператор не всегда существует!

В определении достаточно потребовать  $L \cdot L^{-1} = I$ .

# Обращение растягивания

- Исходный оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$

# Обращение растягивания

- Исходный оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор:  $L^{-1} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1 \\ \frac{1}{-3}a_2 \end{pmatrix}$

# Обращение растягивания

- Исходный оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор:  $L^{-1} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1 \\ \frac{1}{-3}a_2 \end{pmatrix}$
- $L^{-1} L = I$

# Обращение перестановки двух компонент

- Исходный оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$

# Обращение перестановки двух компонент

- Исходный оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор:  $L^{-1} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$

# Обращение перестановки двух компонент

- Исходный оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор:  $L^{-1} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$
- $L^{-1} L = I$

# Обращение перестановки двух компонент

- Исходный оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор:  $L^{-1} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$
- $L^{-1} L = I$
- $L^{-1} = L$

# Обращение перестановки компонент

- Исходный оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

# Обращение перестановки компонент

- Исходный оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор:  $L^{-1} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix}$

# Обращение перестановки компонент

- Исходный оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор:  $L^{-1} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix}$
- $L^{-1} L = I$

# Обращение единичного оператора

- Исходный оператор  $I : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

# Обращение единичного оператора

- Исходный оператор  $I : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор:  $I : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

# Обращение единичного оператора

- Исходный оператор  $I : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор:  $I : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
- $I^{-1}I = I$

# Обращение поворота

- Исходный оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , поворот на  $30^\circ$  против часовой стрелки.

# Обращение поворота

- Исходный оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , поворот на  $30^\circ$  против часовой стрелки.
- Обратный оператор:  $R^{-1}$ , поворот на  $30^\circ$  по часовой стрелке,  $R^{-1}R = I$

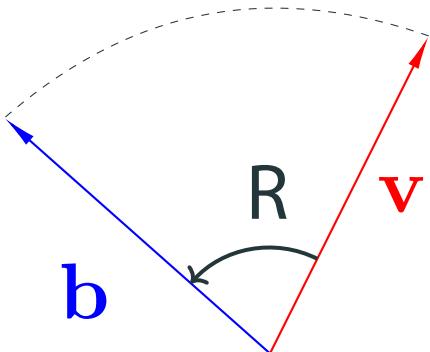
# Обращение поворота

- Исходный оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , поворот на  $30^\circ$  против часовой стрелки.
- Обратный оператор:  $R^{-1}$ , поворот на  $30^\circ$  по часовой стрелке,  $R^{-1}R = I$

# Обращение поворота

- Исходный оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , поворот на  $30^\circ$  против часовой стрелки.
- Обратный оператор:  $R^{-1}$ , поворот на  $30^\circ$  по часовой стрелке,  $R^{-1}R = I$

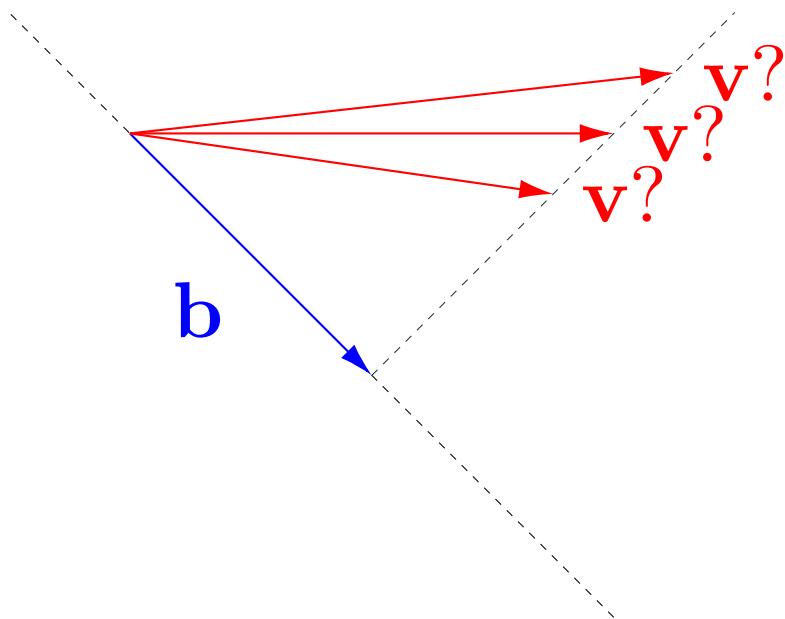
$$R v = b \text{ или } v = R^{-1} b$$



# Не все действия обратимы!

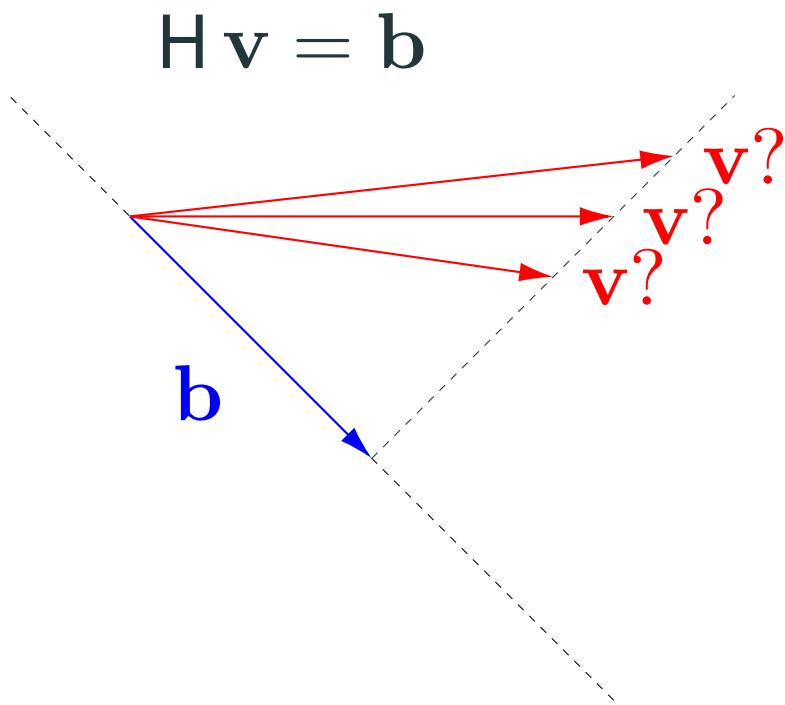
- По определению, исходный оператор  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

$$Hv = b$$



# Не все действия обратимы!

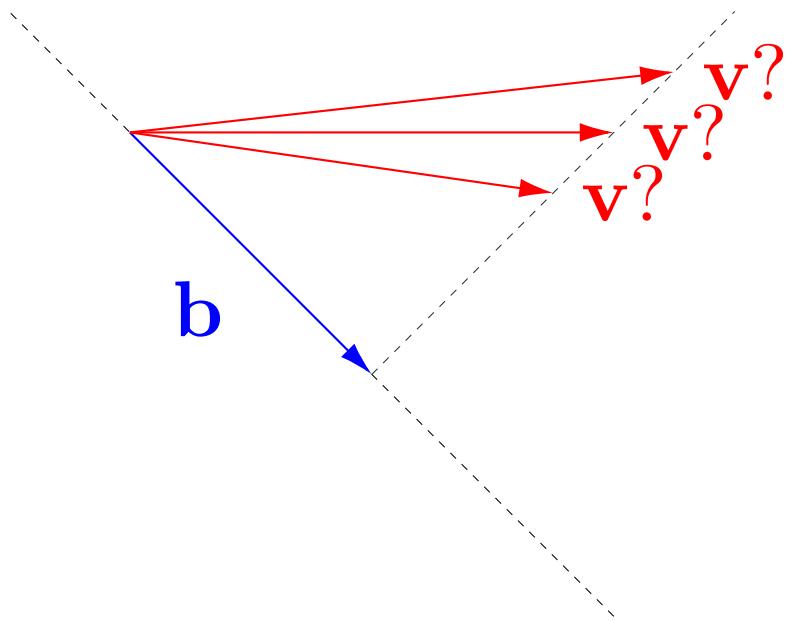
- По определению, исходный оператор  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- Исходный оператор  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , проекция на прямую  $x_1 + 2x_2 = 0$ .



# Не все действия обратимы!

- По определению, исходный оператор  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- Исходный оператор  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , проекция на прямую  $x_1 + 2x_2 = 0$ .
- Обратный оператор  $H^{-1}$  не существует!

$$H v = b$$



# Транспонирование оператора и ортогональность

# Транспонирование

У любого оператора  $L$  есть брат  $L^T$ .

## Определение

Транспонированным оператором,  $L^T$ , называется оператор, для которого

$$\langle L\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle.$$

# Транспонирование

Почему  $L$  и  $L^T$  операторы-«братья»?

# Транспонирование

Почему  $L$  и  $L^T$  операторы-«братья»?

$$(L^T)^T = L$$

# Транспонирование

Почему  $L$  и  $L^T$  операторы-«братья»?

$$(L^T)^T = L$$

Доказательство:

# Транспонирование

Почему  $L$  и  $L^T$  операторы-«братья»?

$$(L^T)^T = L$$

Доказательство:

- $\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle$

# Транспонирование

Почему  $L$  и  $L^T$  операторы-«братья»?

$$(L^T)^T = L$$

Доказательство:

- $\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle$
- $\langle \mathbf{a}, L \mathbf{b} \rangle = \langle L^T \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$

# Транспонирование

Почему  $L$  и  $L^T$  операторы-«братья»?

$$(L^T)^T = L$$

Доказательство:

- $\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle$
- $\langle \mathbf{a}, L \mathbf{b} \rangle = \langle L^T \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$
- $\langle L^T \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L \mathbf{b} \rangle$

# Транспонирование растяжения

- Исходный оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$

# Транспонирование растяжения

- Исходный оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$
- $\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 2a_1 b_1 - 3a_2 b_2 = \langle \mathbf{a}, L \mathbf{b} \rangle$

# Транспонирование растяжения

- Исходный оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$
- $\langle L\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 2a_1b_1 - 3a_2b_2 = \langle \mathbf{a}, L\mathbf{b} \rangle$
- $L^T = L$

# Транспонирование поворота

- Исходный оператор L — поворот на плоскоти на  $30^\circ$  против часовой стрелки.

# Транспонирование поворота

- Исходный оператор  $L$  — поворот на плоскости на  $30^\circ$  против часовой стрелки.
- $\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle$

# Транспонирование поворота

- Исходный оператор  $L$  — поворот на плоскости на  $30^\circ$  против часовой стрелки.
- $\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle$
- Поворот не меняет длины.

# Транспонирование поворота

- Исходный оператор  $L$  — поворот на плоскости на  $30^\circ$  против часовой стрелки.
- $\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle$
- Поворот не меняет длины.
- $\angle(L \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, L^T \mathbf{b})$

# Транспонирование поворота

- Исходный оператор  $L$  — поворот на плоскости на  $30^\circ$  против часовой стрелки.
- $\langle L\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle$
- Поворот не меняет длины.
- $\angle(L\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, L^T \mathbf{b})$
- $L^T$  — поворот на плоскости на  $30^\circ$  по часовой стрелке.

# Транспонирование поворота

- Исходный оператор  $L$  — поворот на плоскости на  $30^\circ$  против часовой стрелки.
- $\langle L\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle$
- Поворот не меняет длины.
- $\angle(L\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, L^T \mathbf{b})$
- $L^T$  — поворот на плоскости на  $30^\circ$  по часовой стрелке.
- $L^T = L^{-1}$

# Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R}^3$ :

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ :

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 b_3$

# Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ :

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 b_3$
- Третья компонента  $\mathbf{b}$  не важна!

# Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R}^3$ :

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\langle La, b \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + 0b_3$
- Третья компонента  $b$  не важна!

- $L^T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

$$L^T : \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

# Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ :

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 b_3$
- Третья компонента  $\mathbf{b}$  не важна!

- $L^T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

$$L : \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

- $\langle \mathbf{a}, L \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$

# Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ :

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 b_3$

- Третья компонента  $\mathbf{b}$  не важна!

- $L^T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

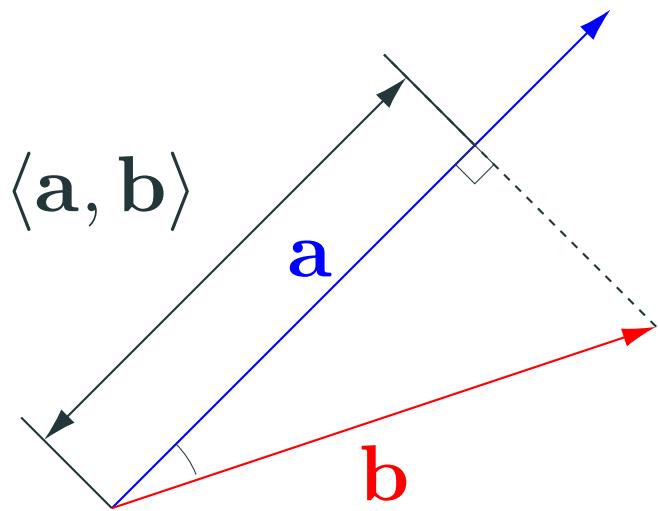
$$L : \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

- $\langle \mathbf{a}, L \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$

- $L^T$  — удаление третьей компоненты вектора.

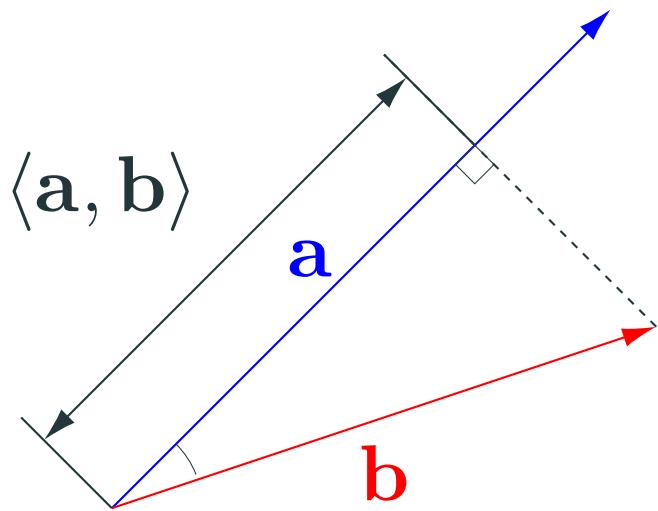
# Транспонирование проекции

- Исходный оператор  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , проекция на прямую  $x_1 + 2x_2 = 0$ .



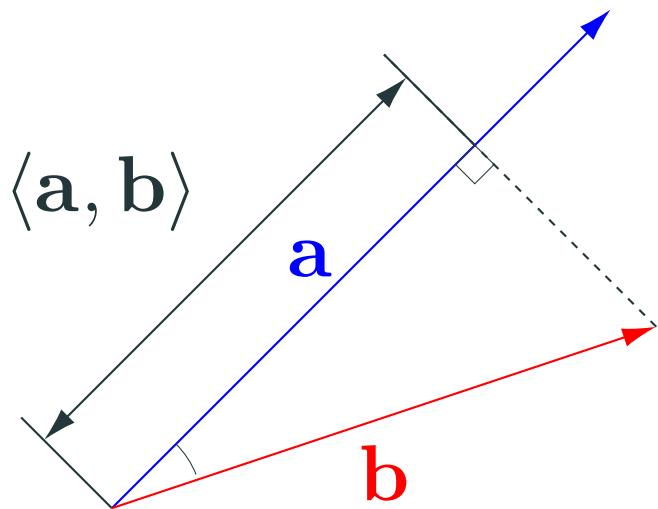
# Транспонирование проекции

- Исходный оператор  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , проекция на прямую  $x_1 + 2x_2 = 0$ .
- Временно  $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$ .



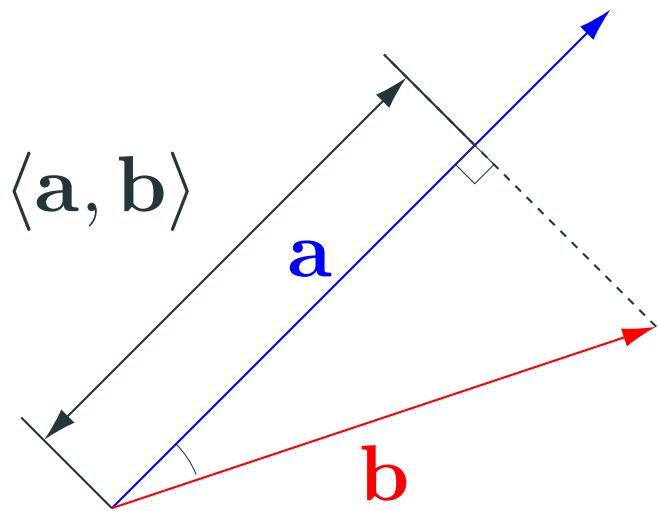
# Транспонирование проекции

- Исходный оператор  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , проекция на прямую  $x_1 + 2x_2 = 0$ .
- Временно  $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$ .
- $\langle H\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, H\mathbf{b} \rangle$



# Транспонирование проекции

- Исходный оператор  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , проекция на прямую  $x_1 + 2x_2 = 0$ .
- Временно  $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$ .
- $\langle H\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, H\mathbf{b} \rangle$
- $H^T = H$ .



# Ортогональный оператор

## Определение

Оператор  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется **ортогональным**, если

- оператор сохраняет длины,  $\|L\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$ ;
- оператор сохраняет углы,  $\angle(L\mathbf{a}, L\mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

# Ортогональный оператор

## Определение

Оператор  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется **ортогональным**, если

- оператор сохраняет длины,  $\|L\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$ ;
- оператор сохраняет углы,  $\angle(L\mathbf{a}, L\mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

## Эквивалентное определение

Оператор  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется **ортогональным**, если

$$\langle L\mathbf{a}, L\mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

# Ортогональный оператор

## Определение

Оператор  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется **ортогональным**, если

- оператор сохраняет длины,  $\|L\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$ ;
- оператор сохраняет углы,  $\angle(L\mathbf{a}, L\mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

## Эквивалентное определение

Оператор  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется **ортогональным**, если

$$\langle L\mathbf{a}, L\mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

## Эквивалентное определение

Оператор  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется **ортогональным**, если

$$L^T = L^{-1}.$$

# Ортогональный оператор: примеры

- Перестановка двух компонент вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

# Ортогональный оператор: примеры

- Перестановка двух компонент вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

- Поворот на плоскости на  $30^\circ$  против часовой стрелки.

# Полтора доказательства

Сохранение длин и углов эквивалентно сохранению скалярного произведения.

# Полтора доказательства

Сохранение длин и углов эквивалентно сохранению скалярного произведения.

- Скалярное произведение задаёт углы и длины:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \quad \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

# Полтора доказательства

Сохранение длин и углов эквивалентно сохранению скалярного произведения.

- Скалярное произведение задаёт углы и длины:

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle} \quad \cos \angle(a, b) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|}$$

- Длина и угол задают скалярное произведение:

$$\langle a, b \rangle = \|a\| \|b\| \cos \angle(a, b)$$

# Полтора доказательства

Сохранение длин и углов эквивалентно сохранению скалярного произведения.

- Скалярное произведение задаёт углы и длины:

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle} \quad \cos \angle(a, b) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|}$$

- Длина и угол задают скалярное произведение:

$$\langle a, b \rangle = \|a\| \|b\| \cos \angle(a, b)$$

# Полтора доказательства

Сохранение длин и углов эквивалентно сохранению скалярного произведения.

- Скалярное произведение задаёт углы и длины:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \quad \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

- Длина и угол задают скалярное произведение:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

Из условия  $\mathbf{L}^T = \mathbf{L}^{-1}$  следует сохранение скалярного произведения.

- $\langle \mathbf{L} \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{L}^T \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{L}^{-1} \mathbf{b} \rangle$

# Полтора доказательства

Сохранение длин и углов эквивалентно сохранению скалярного произведения.

- Скалярное произведение задаёт углы и длины:  
$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle} \quad \cos \angle(a, b) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|}$$
- Длина и угол задают скалярное произведение:  
$$\langle a, b \rangle = \|a\| \|b\| \cos \angle(a, b)$$

Из условия  $L^T = L^{-1}$  следует сохранение скалярного произведения.

- $\langle La, b \rangle = \langle a, L^T b \rangle = \langle a, L^{-1} b \rangle$
- Обозначаем  $c = L^{-1} b$  и  $\langle La, Lc \rangle = \langle a, c \rangle$

# Собственные векторы и собственные числа

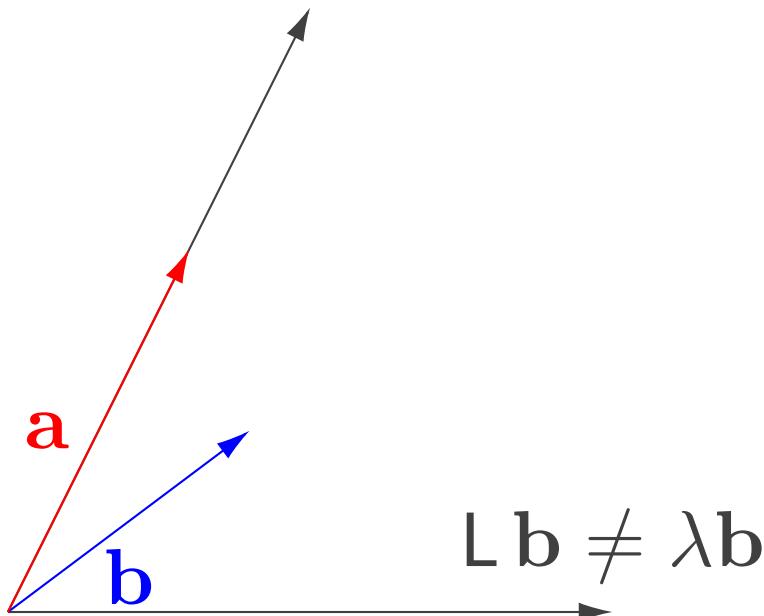
# Собственные векторы и собственные числа

## Определение

Если для действия  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  найдётся такой вектор  $v$ , что  $L v = \lambda \cdot v$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}$ , то:

- вектор  $v$  называется **собственным**;
- число  $\lambda$  называется **собственным**.

$$L a = \lambda a$$



# Собственные векторы: растягивание осей

- Оператор

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

# Собственные вектора: растягивание осей

- Оператор

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

- Собственные векторы с  $\lambda = 2$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Собственные вектора: растягивание осей

- Оператор

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

- Собственные векторы с  $\lambda = 2$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Собственные векторы с  $\lambda = -3$

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

# Собственные вектора: перестановка $a_i$

- Оператор  $L$  — перестановка компонент вектора:

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

# Собственные вектора: перестановка $a_i$

- Оператор  $L$  — перестановка компонент вектора:

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

- Собственные векторы с  $\lambda = 1$

Однаковые числа на переставляемых местах:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ x \\ a_3 \\ x \end{pmatrix}$$

# Собственные векторы: поворот

- Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!

# Собственные векторы: поворот

- Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!
- Исходный оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , поворот на  $30^\circ$  против часовой стрелки.

# Собственные векторы: поворот

- Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!
- Исходный оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , поворот на  $30^\circ$  против часовой стрелки.
- Ни собственных векторов, ни чисел нет!

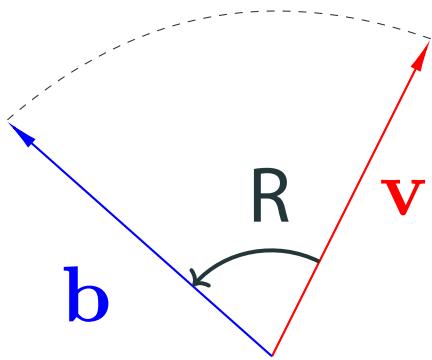
# Собственные векторы: поворот

- Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!
- Исходный оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , поворот на  $30^\circ$  против часовой стрелки.
- Ни собственных векторов, ни чисел нет!

# Собственные векторы: поворот

- Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!
- Исходный оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , поворот на  $30^\circ$  против часовой стрелки.
- Ни собственных векторов, ни чисел нет!

$$R v = b$$



# Собственные вектора: проекция

- Оператор  $L$  — проекция на прямую  $\ell : x_1 + 2x_2 = 0$ .

# Собственные вектора: проекция

- Оператор  $L$  — проекция на прямую  $\ell : x_1 + 2x_2 = 0$ .
- Собственные векторы с  $\lambda = 1$   
Любой вектор на прямой  $\ell$ .

# Собственные вектора: проекция

- Оператор  $L$  — проекция на прямую  $\ell : x_1 + 2x_2 = 0$ .
- Собственные векторы с  $\lambda = 1$   
Любой вектор на прямой  $\ell$ .
- Собственные векторы с  $\lambda = 0$   
Любой вектор ортогональный прямой  $\ell$ .

# Резюме

- Вектор — столбец чисел.

# Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.

# Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.

# Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.
- Примеры: поворот, проекция, перестановка компонент, растягивание осей.

# Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.
- Примеры: поворот, проекция, перестановка компонент, растягивание осей.
- Обращение и транспонирование.

# Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.
- Примеры: поворот, проекция, перестановка компонент, растягивание осей.
- Обращение и транспонирование.
- Собственные векторы растягиваются в собственное число раз.

# Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.
- Примеры: поворот, проекция, перестановка компонент, растягивание осей.
- Обращение и транспонирование.
- Собственные векторы растягиваются в собственное число раз.
- **Бонусное видео:** как выиграть в Ним?

## Игра Ним

**это видео является бонусным, поэтому ничего нет  
страшного, что с ним выходит много видео, или оно  
будет долгое**

**В начале фрагмента идёт слайд с правилами затем  
видеофрагмент с прозрачной доской**

# Игра Ним

- Есть три кучки с камнями: 3, 5 и 8 камней;
- Два игрока ходят по очереди;
- За ход:
  - игрок выбирает одну кучку;
  - берёт из неё положительное число камней;
- Выигрывает берущий последний камень.

Какой ход сделать первому игроку?

# видео с доской

**Краткое содержание:**

**закодируем каждую кучку двоичным вектором**  
**стоимость позиции — сумма этих двух векторов**  
**финальная позиция имеет стоимость ноль**  
**любой ход из нулевой позиции ведёт в положительную**  
**Из положительной позиции можно попасть в нулевую**  
**С помощью нижней единички убиваем остальные**  
**Выигрышный ход: взять 2 камня из кучки в 8 камней**