Векторы и операторы

название лекции

Вектор: длина и скалярное произведение

название видеофрагмента

Краткое напутствие

Зачем нужна линейная алгебра?

- Линейная алгебра прекрасна сама по себе!

Краткое напутствие

Зачем нужна линейная алгебра?

- Линейная алгебра прекрасна сама по себе!
- Работает «под капотом» практически всех методов машинного обучения.

Краткий план:

- Вектор — это столбец чисел.

Краткий план:

- Вектор — это столбец чисел.
- Сложение двух векторов и умножение на число.

Краткий план:

- Вектор — это столбец чисел.
- Сложение двух векторов и умножение на число.
- Расстояние и косинус угла между векторами.

Вектор

- Рабочее определение.
  Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

Вектор

- Рабочее определение.
  Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

- Идея вектора. Вектор — всё, что можно описать столбцом из нескольких чисел.

Вектор

- Рабочее определение.
  Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

- Идея вектора. Вектор — всё, что можно описать столбцом из нескольких чисел.
- Мы не пишем стрелочку над вектором.

Пространство $\mathbb{R}^n$

- Определение. Пространство $\mathbb{R}^n$:

  Множество всех возможных векторов из n чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Пространство $\mathbb{R}^n$

- Определение. Пространство $\mathbb{R}^n$:
  Множество всех возможных векторов из n чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

- Определение. Размерность пространства $\mathbb{R}^n$:
  Количество чисел в каждом векторе, n.

Длина вектора

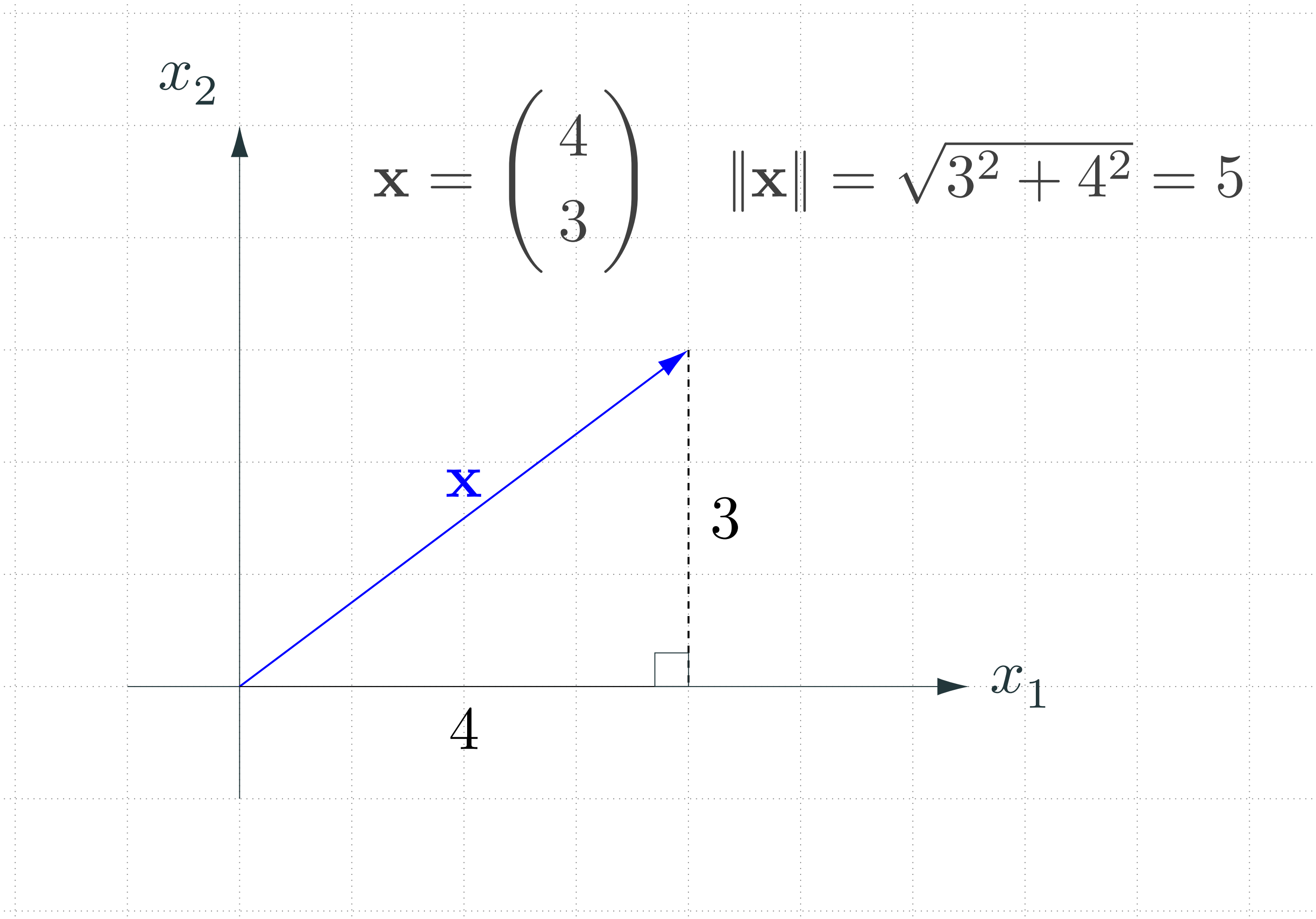
Евклид, около 300 лет до н.э.

wikipedia.org / общественное достояние

Определение.

Евклидова длина или норма вектора

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

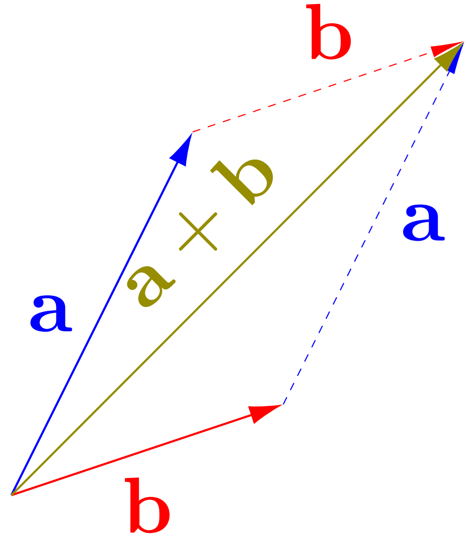


x_2
$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
$\mathbf{x}$
3
x_1
4

Сложение и вычитание двух векторов

Определение. Сложение и вычитание двух векторов выполняем поэлементно:

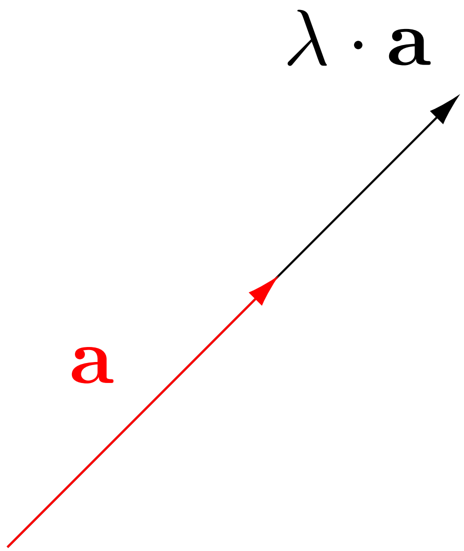
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3.5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Умножение вектора на число

Определение. Умножение вектора на число выполняем поэлеметно:

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3.5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$$

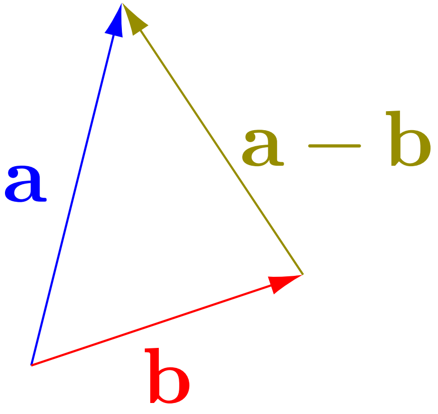


Расстояние между векторами

Определение. Евклидово расстояние между векторами

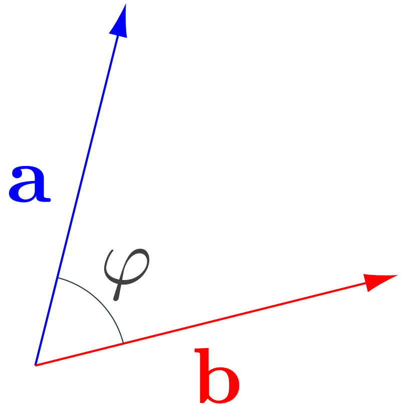
$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}$$

- по определению, $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$.
- также говорят Евклидова метрика



Скалярное произведение и угол

- Определение. Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$.

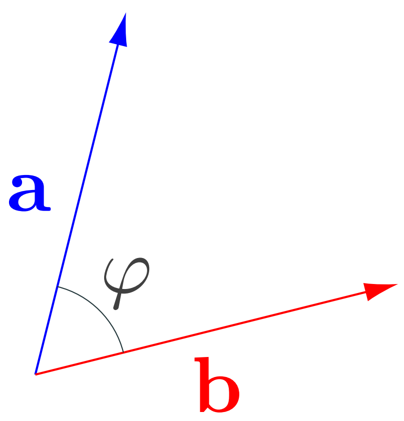


Угол определён, если $\|\mathbf{a}\| > 0$ и $\|\mathbf{b}\| > 0$.

Скалярное произведение и угол

- Определение. Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$.
- Определение. Косинус угла и угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \quad \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \arccos \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

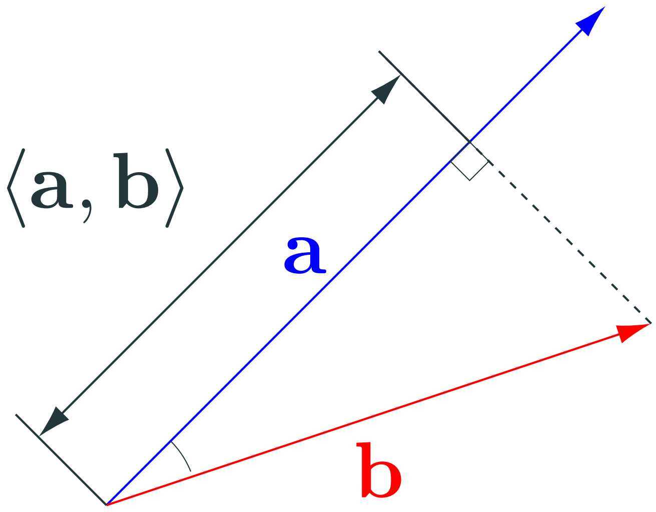


Угол определён, если $\|\mathbf{a}\| > 0$ и $\|\mathbf{b}\| > 0$.

Скалярное произведение и проекция

Если вектор $\mathbf{a}$ имеет единичную длину, $\|\mathbf{a}\| = 1$, то

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{b}\| \cos \phi$ — длина* проекции b на a.



Свойства скалярного произведения

- Скалярное вектора на себя равно квадрату длины
  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$

Свойства скалярного произведения

- Скалярное вектора на себя равно квадрату длины
  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$
- Линейность по каждому аргументу
  $\langle \lambda\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda\mathbf{b} \rangle = \lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$
  $\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$

Свойства скалярного произведения

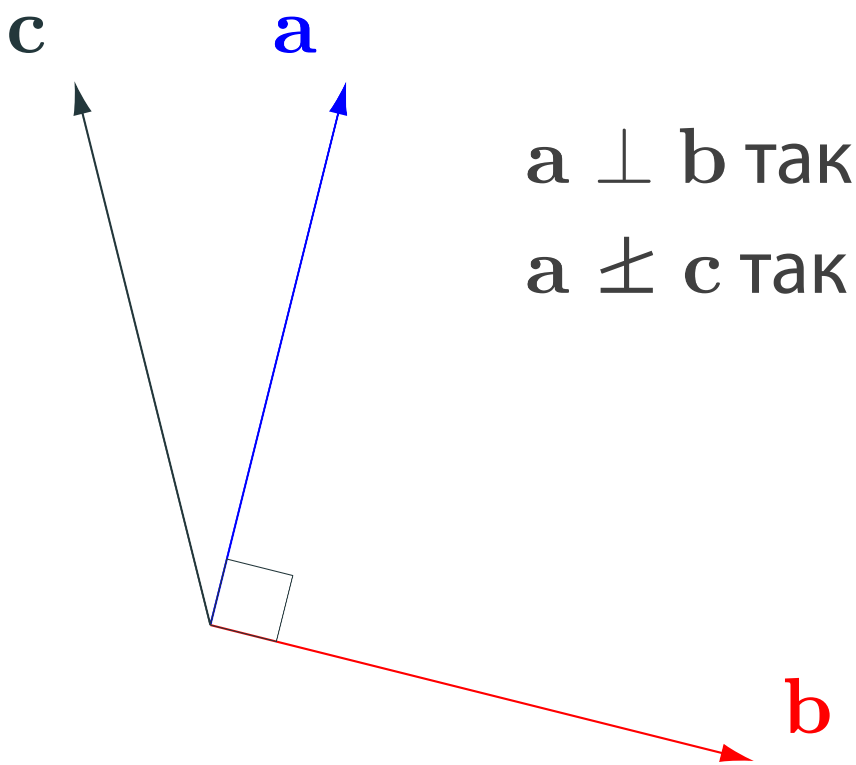
- Скалярное вектора на себя равно квадрату длины
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$$
- Линейность по каждому аргументу
$$\langle \lambda\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda\mathbf{b} \rangle = \lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$
$$\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$$
- Симметричность
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$$

Ортогональность векторов

Определение. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны, $a \perp b$, если

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$$

Также говорят «перпендикулярны».



$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ так как $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$

$\mathbf{a} \not\perp \mathbf{c}$ так как $\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \neq 0$

Прямая, порожденная вектором, гиперплоскость

название видеофрагмента

Краткий план:

- Да будет больше разных расстояний!

Краткий план:

- Да будет больше разных расстояний!
- Делаем из вектора прямую.

Краткий план:

- Да будет больше разных расстояний!
- Делаем из вектора прямую.
- Делаем из вектора гиперплоскость.

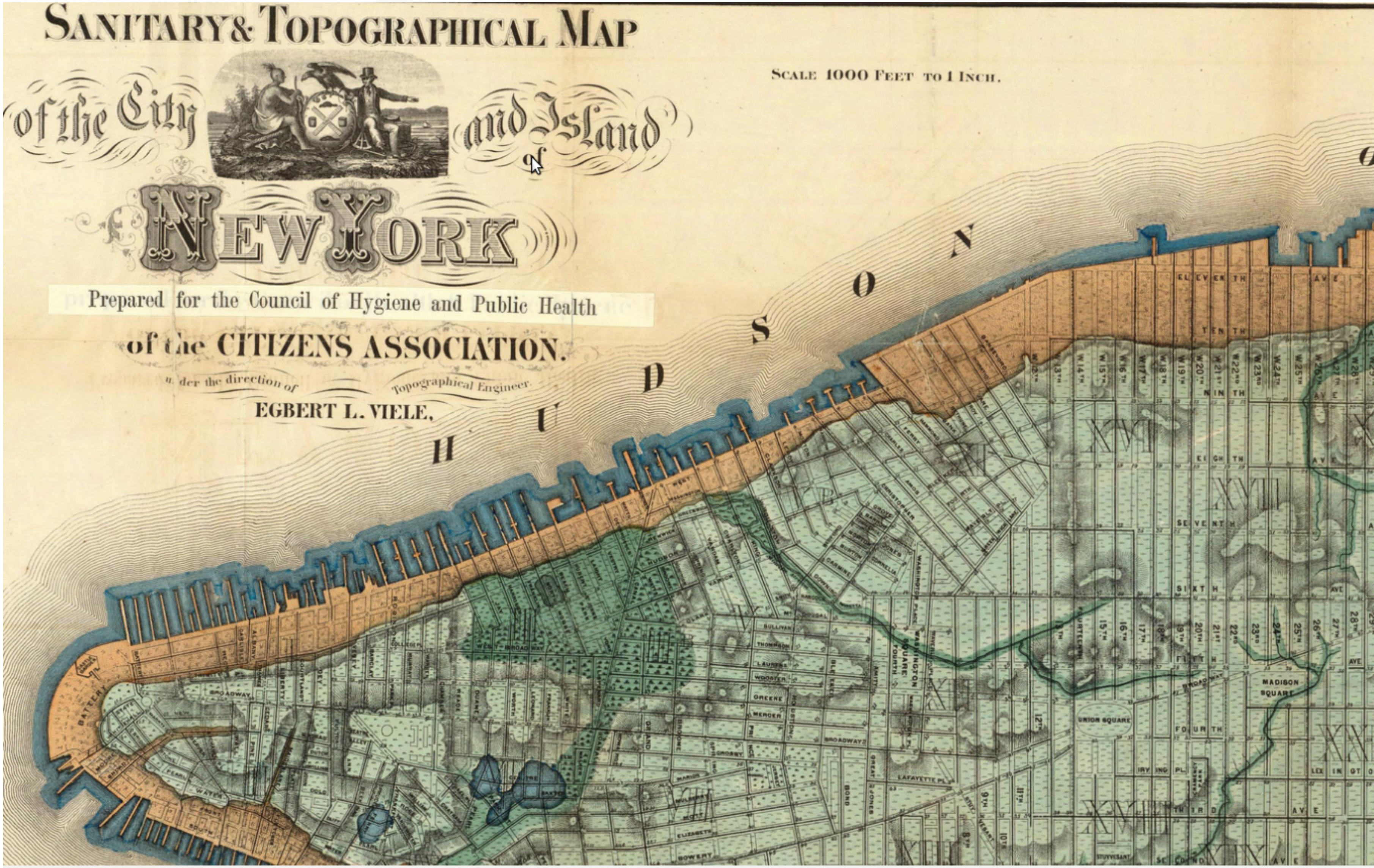
Больше метрик в студию!

Определение. Манхэттэнская метрика

Расстояние по Майкопски:

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_n - b_n|$$

У них — Манхэттэн



wikipedia.org / общественное достояние

У нас — Майкоп

wikipedia.org / общественное достояние

Ещё больше метрик!

Определение. Метрика Минковского

$$d_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|^p \right)^{1/p}$$

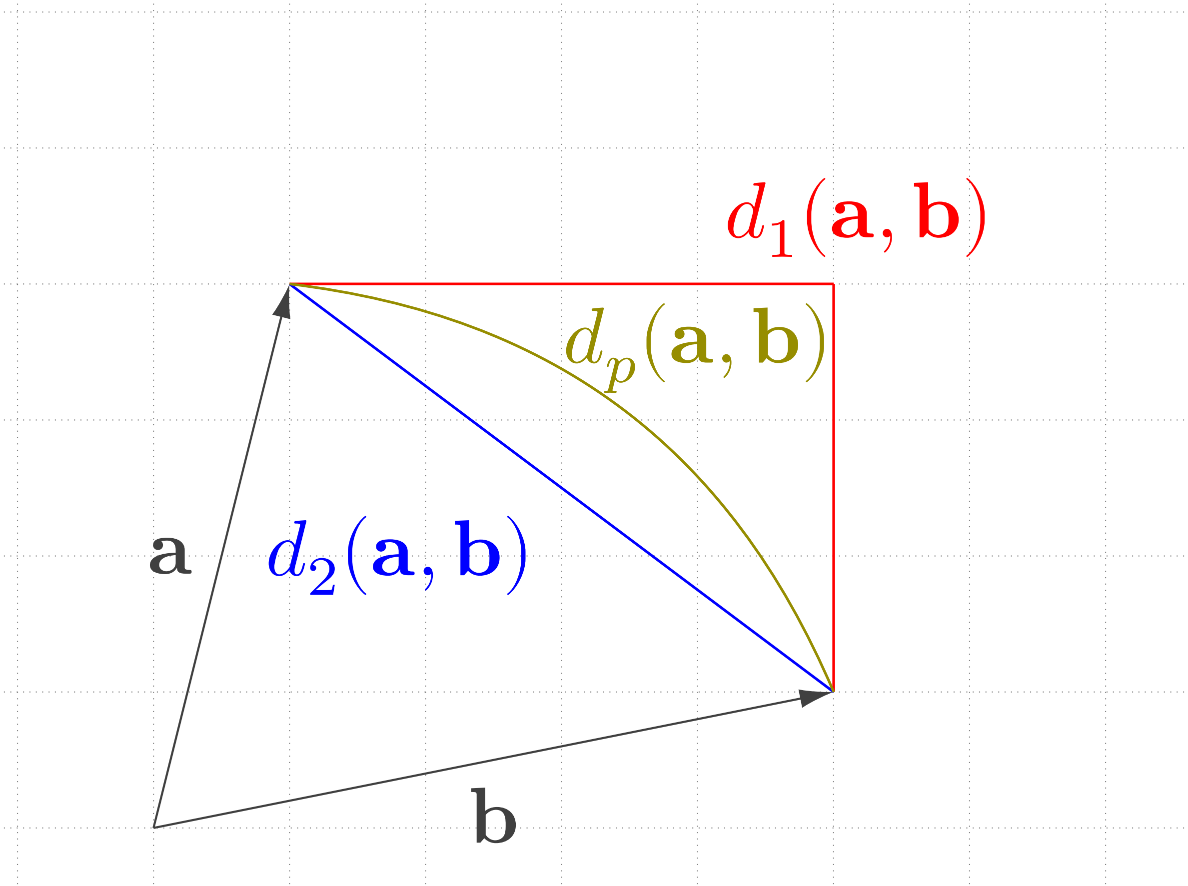
Частные случаи метрики Минковского

Евклидова метрика, $p = 2$

$$d_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}$$

Манхэттэнская метрика, $p = 1$

$$d_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n|$$

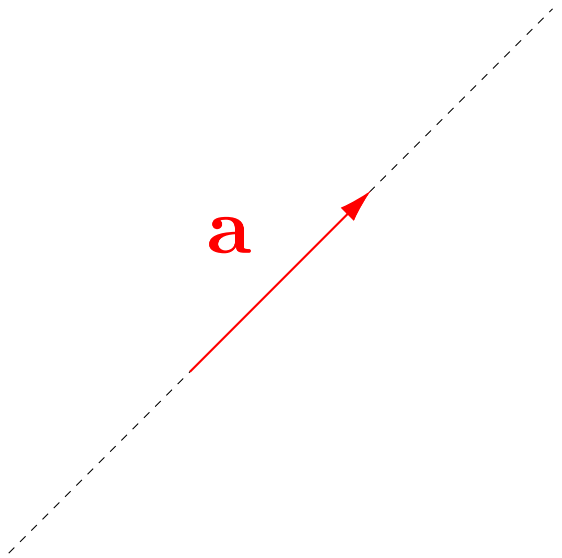


Вектор порождает прямую

Определение. Прямая порождённая вектором a, Span a

Множество векторов, получаемых при домножении вектора a на произвольное число,

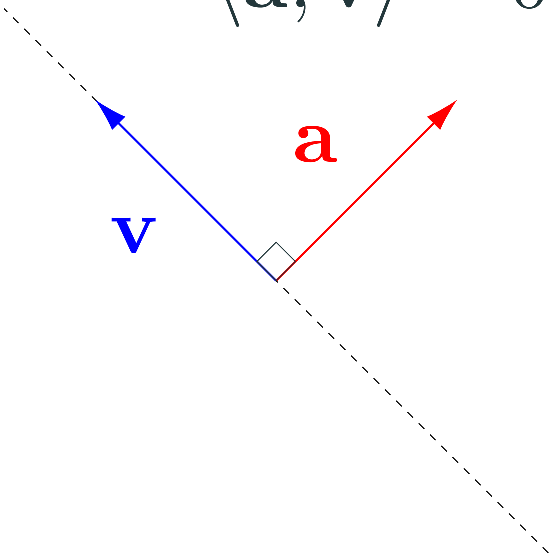
$$\mathrm{Span}\,\mathbf{a} = \{t \cdot \mathbf{a} | t \in \mathbb{R}\}$$



Вектор задаёт гиперплоскость

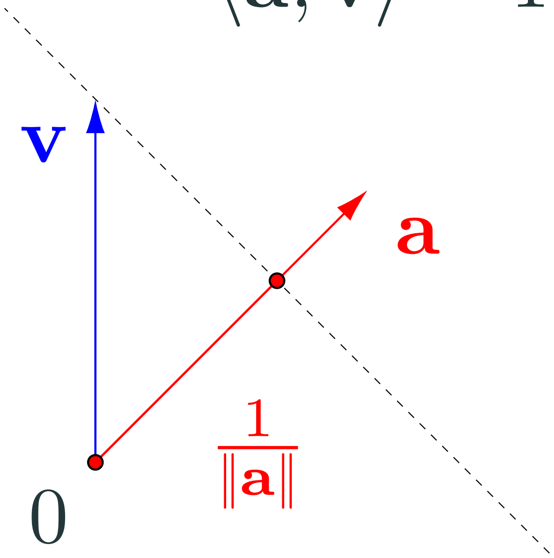
Вектор $\mathbf{a}$ фиксирован, например, $\mathbf{a} = (1, 2)$.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = 0$$



$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = 1$$



$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 1$$

Линейный оператор: определение и примеры

название видеофрагмента

Краткий план:

- Определение линейного оператора.

Краткий план:

- Определение линейного оператора.
- Примеры линейных операторов.

Краткий план:

- Определение линейного оператора.
- Примеры линейных операторов.
- Как из двух операторов сделать новый оператор?

Линейный оператор

Идея линейности:

Результат действия не изменится,

если поменять местами действие L и

- растягивание вектора, например, $\mathsf{L}(42a) = 42\,\mathsf{L}(a)$;

Линейный оператор

Идея линейности:

Результат действия не изменится,

если поменять местами действие L и

- растягивание вектора, например, $\mathsf{L}(42a) = 42\,\mathsf{L}(a)$;
- усреднение двух векторов, $\mathsf{L}(0.5a + 0.5b) = 0.5\,\mathsf{L}(a) + 0.5\,\mathsf{L}(b)$.

Стандартное определение линейности

Определение. Линейный оператор L из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$.

- Для любого числа t и вектора $a \in \mathbb{R}^n$: $\mathsf{L}(ta) = t\,\mathsf{L}(a)$.

Стандартное определение линейности

Определение. Линейный оператор L из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$.

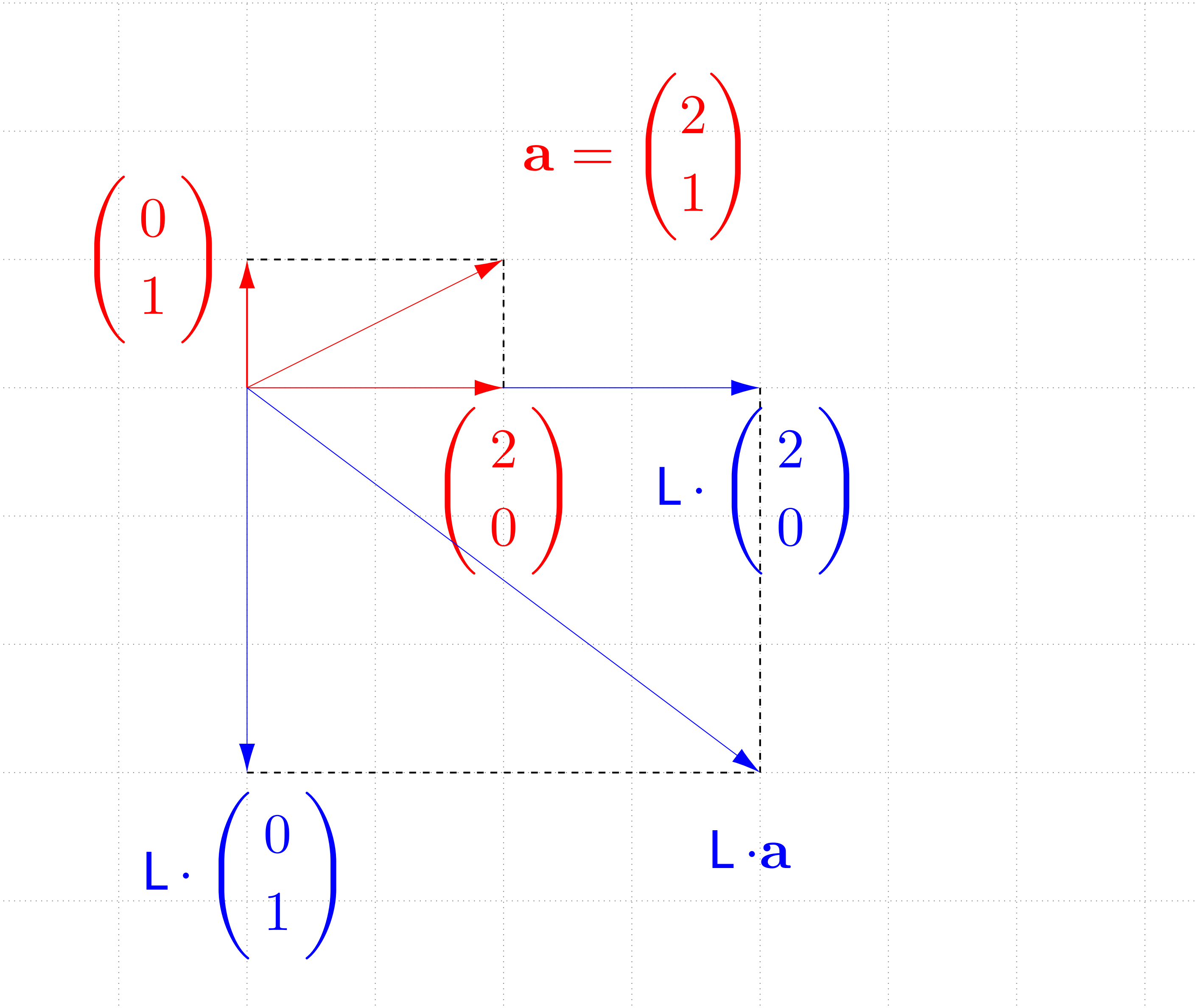
- Для любого числа t и вектора $a \in \mathbb{R}^n$: $\mathsf{L}(ta) = t\,\mathsf{L}(a)$.
- Для любых двух векторов a и b из $\mathbb{R}^n$:
  $L(a+b) = \mathsf{L}(a) + \mathsf{L}(b)$.

Стандартное определение линейности

Определение. Линейный оператор L из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$.

- Для любого числа t и вектора $a \in \mathbb{R}^n$: $\mathsf{L}(ta) = t\,\mathsf{L}(a)$.
- Для любых двух векторов a и b из $\mathbb{R}^n$: $L(a+b) = \mathsf{L}(a) + \mathsf{L}(b)$.
- Вместо скобок часто пишут знак умножения, $\mathsf{L}(a) \equiv \mathsf{L} \cdot a \equiv \mathsf{L}\,a$.

Линейный оператор



Растягивание координат

Обобщаем умножение вектора на число!

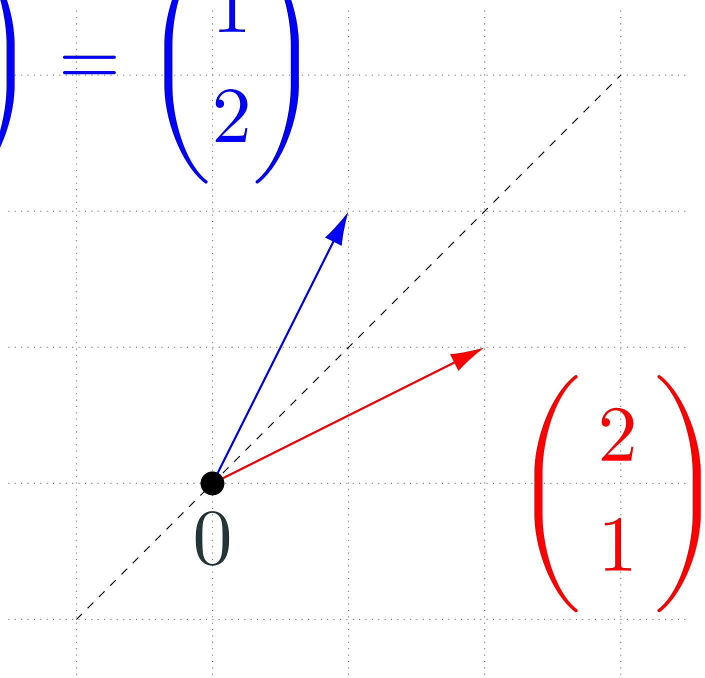
$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

Перестановка координат вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Пример. Отражение относительно $x_1 = x_2$:

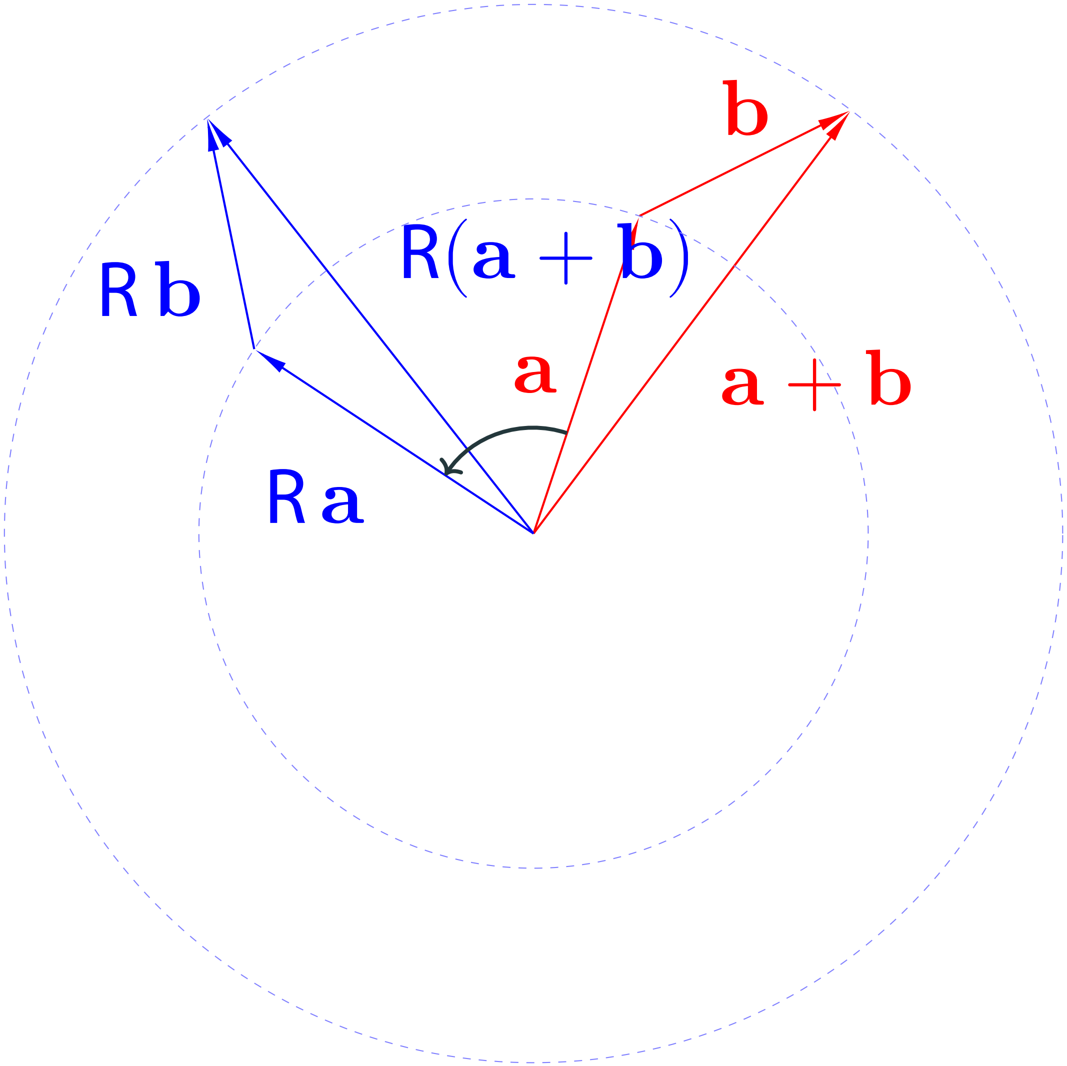
$$\mathtt{L} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Первый поворот

Поворот на 30° против часовой стрелки

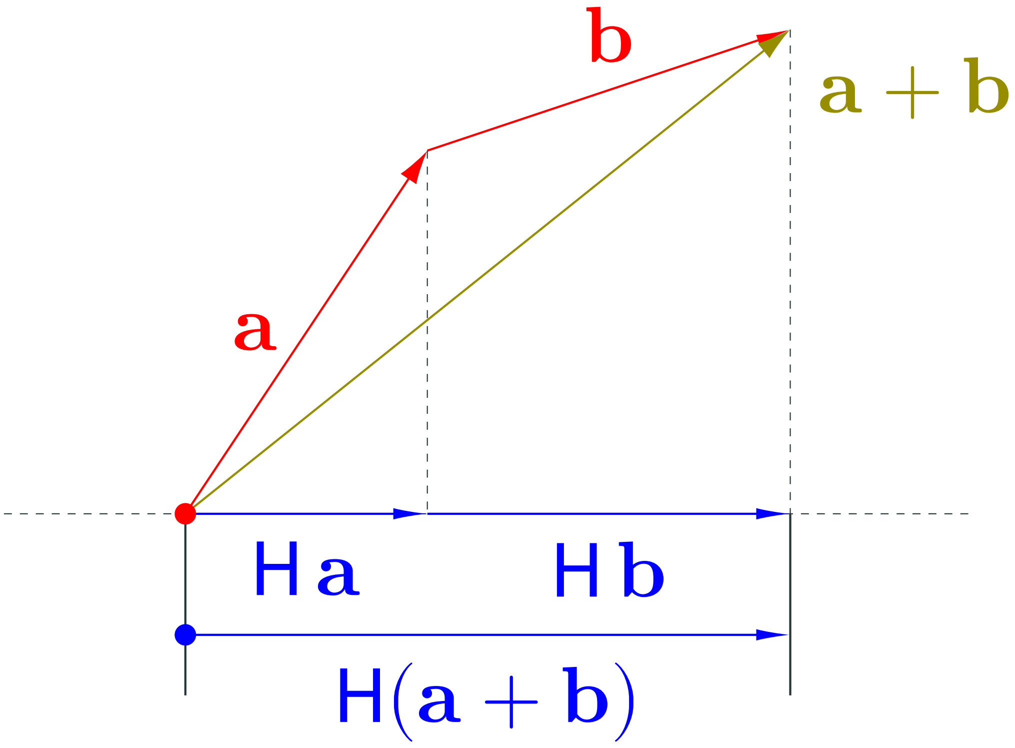
Оператор $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



Первая проекция

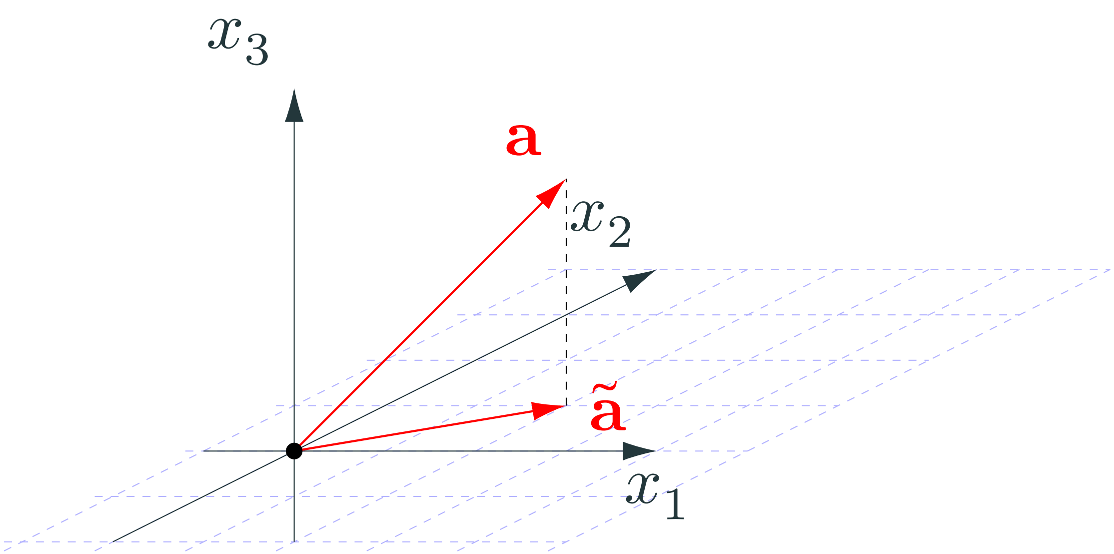
Проекция на прямую $x_1 + 2x_2 = 0$

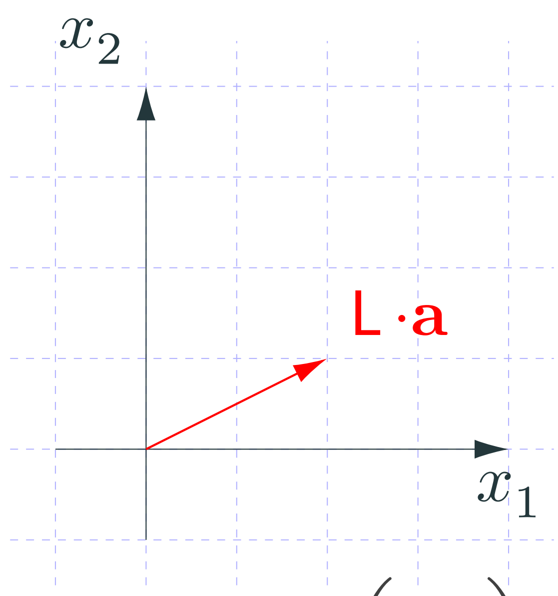
Оператор $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



Обрезка компонент вектора

Уменьшаем размерность, $\mathsf{L}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

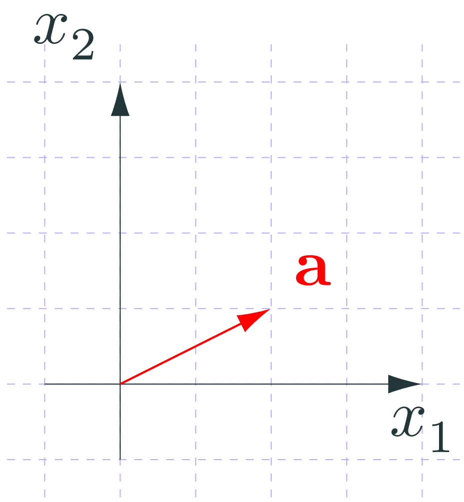


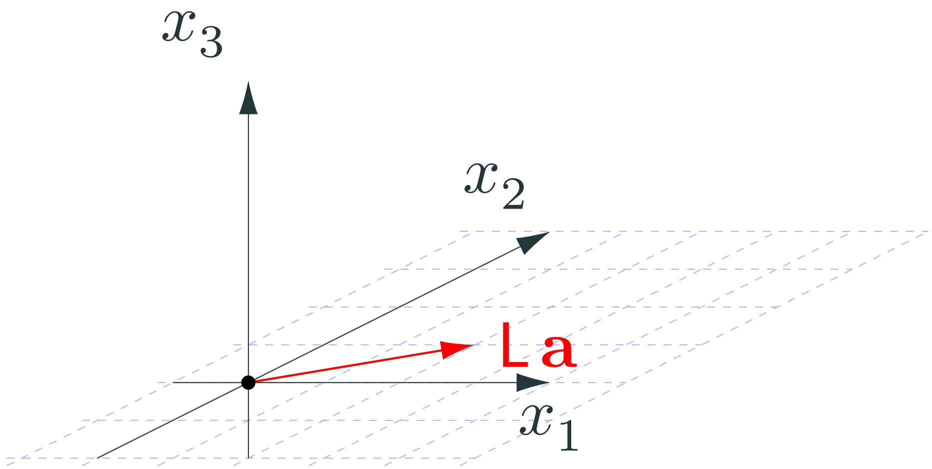


$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathsf{L}\,\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Дописывание нулей

Увеличиваем размерность пространства, $\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$





$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \mathsf{L}\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ничегонеделание

Определение. Единичный оператор, I,

$$I(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$$

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор, $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор, $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.
- Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$.

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор, $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.
- Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$.
- доказательство

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор, $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.
- Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$.
- доказательство
  - $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(t\mathbf{a})) = \mathsf{L}_2(t\,\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = t\,\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}))$

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор, $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.
- Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$.
- доказательство
  - $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(t\mathbf{a})) = \mathsf{L}_2(t\,\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = t\,\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}))$
  - $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}+\mathbf{b})) = \mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_1(\mathbf{b})) = \mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) + \mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{b}))$

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор, $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.
- Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$.
- доказательство
  - $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(t\mathbf{a})) = \mathsf{L}_2(t\,\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = t\,\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}))$
  - $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}+\mathbf{b})) = \mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_1(\mathbf{b})) = \mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) + \mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{b}))$
- Композицию также называют умножением.

Сумма линейных операторов

- Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный линейный оператор, $\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.

Сумма линейных операторов

- Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный линейный оператор, $\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.
- Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

Сумма линейных операторов

- Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный линейный оператор, $\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.
- Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.
- доказательство

Сумма линейных операторов

- Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный линейный оператор, $\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.
- Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.
- доказательство
    - $\mathsf{L}_1(t\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(t\mathbf{a}) = t\,\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + t\,\mathsf{L}_2(\mathbf{a}) = t(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}))$

Сумма линейных операторов

- Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный линейный оператор, $\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.
- Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.
- доказательство
  - $\mathsf{L}_1(t\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(t\mathbf{a}) = t\,\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + t\,\mathsf{L}_2(\mathbf{a}) = t(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}))$
  - $\mathsf{L}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathsf{L}_1(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a} + \mathbf{b}) =$ $\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_1(\mathbf{b}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{b}) = \mathsf{L}(\mathbf{a}) + \mathsf{L}(\mathbf{b})$

Вывод формулы поворота

название видеофрагмента

видеофрагмент с прозрачной доской

В этом видео мы возьмем произвольный вектор на плоскости.

И посмотрим, что из него получится, если повернуть его на 30 градусов против часовой стрелки.

Рисуем единичную окружность, находим e на единичной окружности, поворачиваем x и e.

Смотрим на ответ и подчёркиваем его линейность по аргументам.

Вывод формулы проекции

название видеофрагмента

видеофрагмент с прозрачной доской

В этом видео мы возьмем произвольный вектор x на плоскости.

И посмотрим, что из него получится, если спроецировать его на прямую, порождённую вектором $(1, 2)$.

Минимизируем квадрат расстояния между проекцией и итогом.

Смотрим на ответ и подчёркиваем его линейность по аргументам.

Обращение оператора

название видеофрагмента

Обращение

Исходный оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Определение.

Обратным оператором к L называют такой оператор L^{-1}, что $\mathsf{L}^{-1}\,\mathsf{L} = I$.

Обращение растягивания

- Исходный оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$

Обращение растягивания

- Исходный оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор: L^{-1} : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1 \\ \frac{1}{-3}a_2 \end{pmatrix}$

Обращение растягивания

- Исходный оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор: L^{-1} : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1 \\ \frac{1}{-3}a_2 \end{pmatrix}$
- $\mathsf{L}^{-1}\mathsf{L} = I$

Обращение перестановки двух компонент

- Исходный оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$

Обращение перестановки двух компонент

- Исходный оператор L $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор: L^{-1} $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$

Обращение перестановки двух компонент

- Исходный оператор L $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор: $\mathsf{L}^{-1} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$
- $\mathsf{L}^{-1}\,\mathsf{L} = I$

Обращение перестановки двух компонент

- Исходный оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор: L^{-1} : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$
- $\mathsf{L}^{-1}\mathsf{L} = I$
- $\mathsf{L}^{-1} = \mathsf{L}$

Обращение перестановки компонент

- Исходный оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Обращение перестановки компонент

- Исходный оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор: L^{-1} : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix}$

Обращение перестановки компонент

- Исходный оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор: L^{-1} : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix}$
- $\mathrm{L}^{-1}\mathrm{L} = I$

Обращение единичного оператора

- Исходный оператор I : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Обращение единичного оператора

- Исходный оператор $I: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор: $I: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

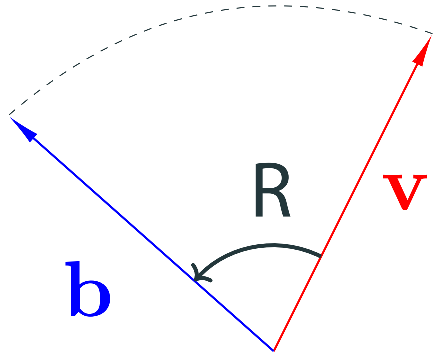
Обращение единичного оператора

- Исходный оператор $I : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
- Обратный оператор: $I : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
- $I^{-1} I = I$

Обращение поворота

- Исходный оператор $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, поворот на 30° против часовой стрелки.

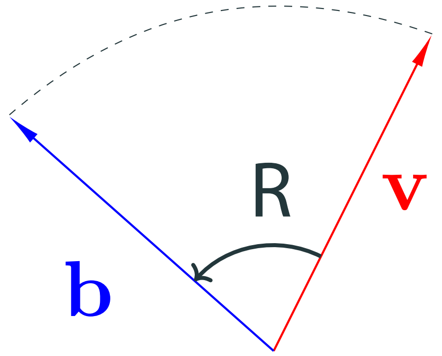
$$\mathrm{R}\,\mathbf{v} = \mathbf{b} \text{ или } \mathbf{v} = \mathrm{R}^{-1}\,\mathbf{b}$$



Обращение поворота

- Исходный оператор $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, поворот на 30° против часовой стрелки.
- Обратный оператор: R^{-1}, поворот на 30° по часовой стрелке.

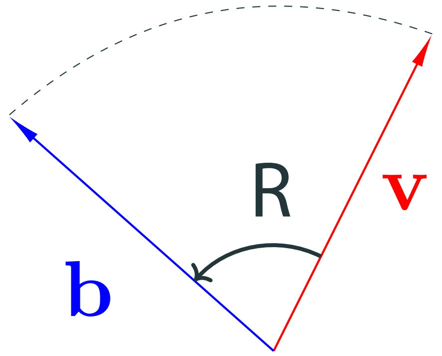
$$\mathrm{R}\,\mathbf{v} = \mathbf{b} \text{ или } \mathbf{v} = \mathrm{R}^{-1}\,\mathbf{b}$$



Обращение поворота

- Исходный оператор $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, поворот на 30° против часовой стрелки.
- Обратный оператор: R^{-1}, поворот на 30° по часовой стрелке.
- $R^{-1}R = I$

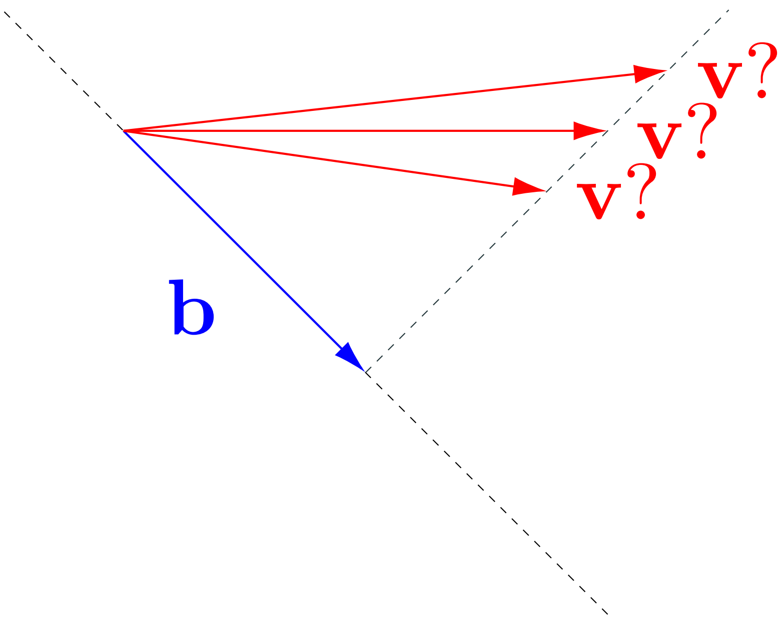
$$\mathrm{R}\,\mathbf{v} = \mathbf{b} \text{ или } \mathbf{v} = \mathrm{R}^{-1}\,\mathbf{b}$$



Не все действия обратимы!

- По определению, исходный оператор L $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

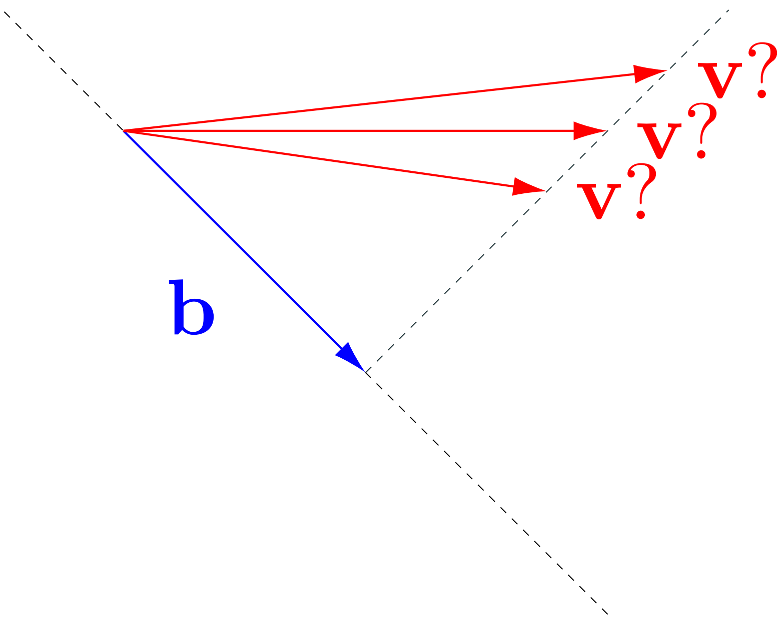
$$\mathrm{H}\,\mathbf{v} = \mathbf{b}$$



Не все действия обратимы!

- По определению, исходный оператор L $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
- Исходный оператор $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, проекция на прямую $x_1 + 2x_2 = 0$.

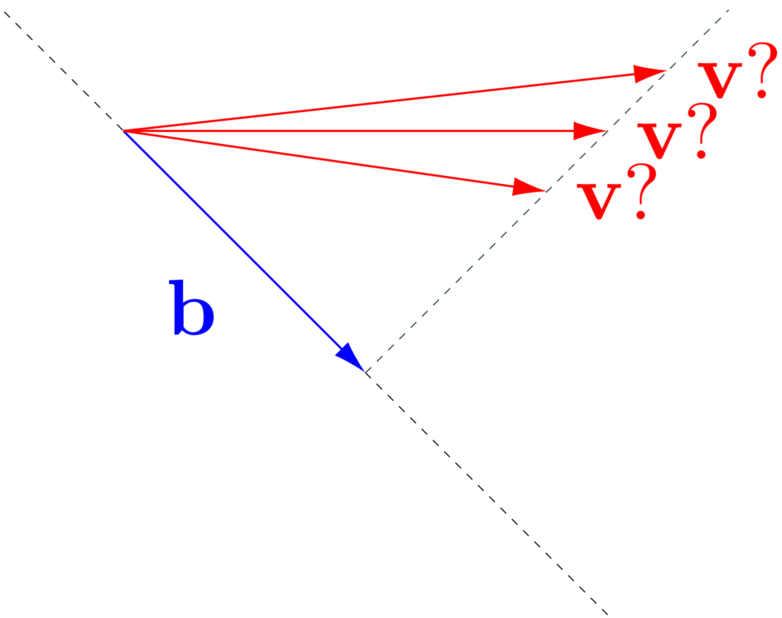
$$\mathsf{H}\,\mathbf{v} = \mathbf{b}$$



Не все действия обратимы!

- По определению, исходный оператор L $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
- Исходный оператор $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, проекция на прямую $x_1 + 2x_2 = 0$.
- Обратный оператор H^{-1} не существует!

$$\mathrm{H}\,\mathbf{v} = \mathbf{b}$$



Транспонирование оператора и ортогональность

название видеофрагмента

Транспонирование

У любого оператора L есть брат L^T.

Определение. Транспонированным оператором, L^T, называется оператор, для которого

$$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle$$

Транспонирование

Почему L и L^T братья?

- $(\mathsf{L}^T)^T = \mathsf{L}$

Транспонирование

Почему L и L^T братья?

- $(\mathsf{L}^T)^T = \mathsf{L}$
- Доказательство:

Транспонирование

Почему L и L^T братья?

- $(\mathsf{L}^T)^T = \mathsf{L}$
- Доказательство:
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle$

Транспонирование

Почему L и L^T братья?

- $(\mathsf{L}^T)^T = \mathsf{L}$
- Доказательство:
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle$
- $\langle \mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b} \rangle = \langle \mathsf{L}^T\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$

Транспонирование

Почему L и L^T братья?

- $(\mathsf{L}^T)^T = \mathsf{L}$
- Доказательство:
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle$
- $\langle \mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b} \rangle = \langle \mathsf{L}^T\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$
- $\langle \mathsf{L}^T\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b} \rangle$

Транспонирование растяжения

- Исходный оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$

Транспонирование растяжения

- Исходный оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 2a_1b_1 - 3a_2b_2 = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b} \rangle$

Транспонирование растяжения

- Исходный оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 2a_1 b_1 - 3a_2 b_2 = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b} \rangle$
- $\mathsf{L}^T = \mathsf{L}$

Транспонирование поворота

- Исходный оператор L — поворот на плоскоти на 30° против часовой стрелки.

Транспонирование поворота

- Исходный оператор L — поворот на плоскоти на 30° против часовой стрелки.
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle$

Транспонирование поворота

- Исходный оператор L — поворот на плоскоти на 30° против часовой стрелки.
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b}\rangle$
- Поворот не меняет длины.

Транспонирование поворота

- Исходный оператор L — поворот на плоскоти на 30° против часовой стрелки.
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle$
- Поворот не меняет длины.
- $\angle(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b})$

Транспонирование поворота

- Исходный оператор L — поворот на плоскоти на 30° против часовой стрелки.
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle$
- Поворот не меняет длины.
- $\angle(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b})$
- L^T — поворот на плоскоти на 30° по часовой стрелке.

Транспонирование поворота

- Исходный оператор L — поворот на плоскоти на 30° против часовой стрелки.
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle$
- Поворот не меняет длины.
- $\angle(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b})$
- L^T — поворот на плоскоти на 30° по часовой стрелке.
- $\mathsf{L}^T = \mathsf{L}^1$

Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 b_3$

Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:
  $$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 b_3$
- Третья компонента $\mathbf{b}$ не важна!

Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:
  $$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 b_3$
- Третья компонента $\mathbf{b}$ не важна!
- $\mathsf{L}^T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:
  $$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 b_3$
- Третья компонента $\mathbf{b}$ не важна!
- $\mathsf{L}^T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:

$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

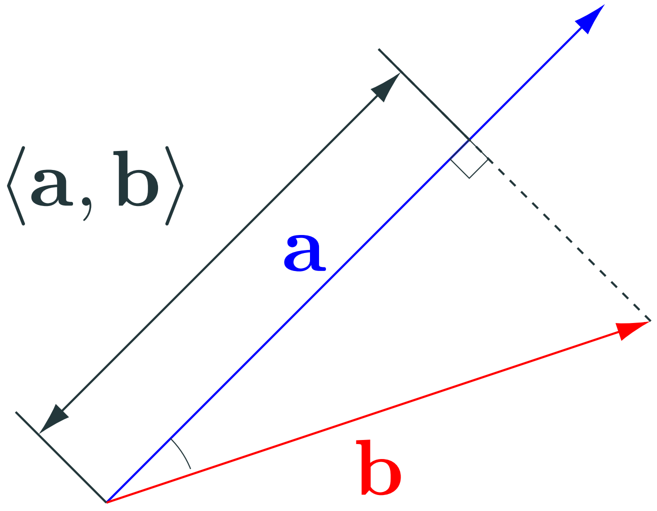
- $\langle \mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:
  $$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 b_3$
- Третья компонента $\mathbf{b}$ не важна!
- $\mathsf{L}^T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:
  $$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$
- $\langle \mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$
- L^T — удаление третьей компоненты вектора.

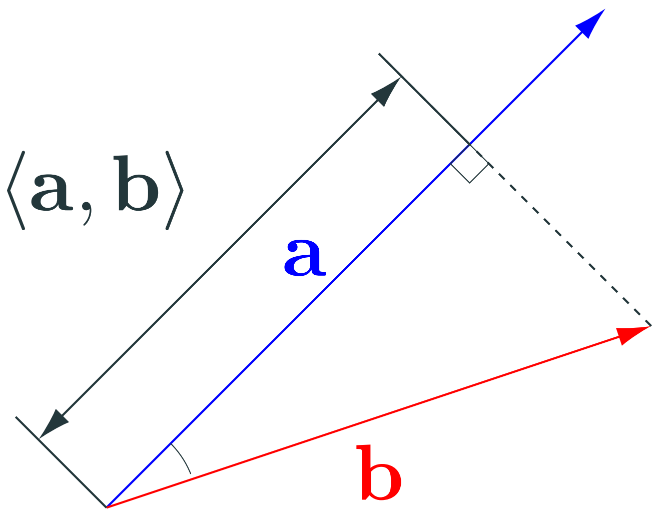
Транспонирование проекции

- Исходный оператор $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, проекция на прямую $x_1 + 2x_2 = 0$.



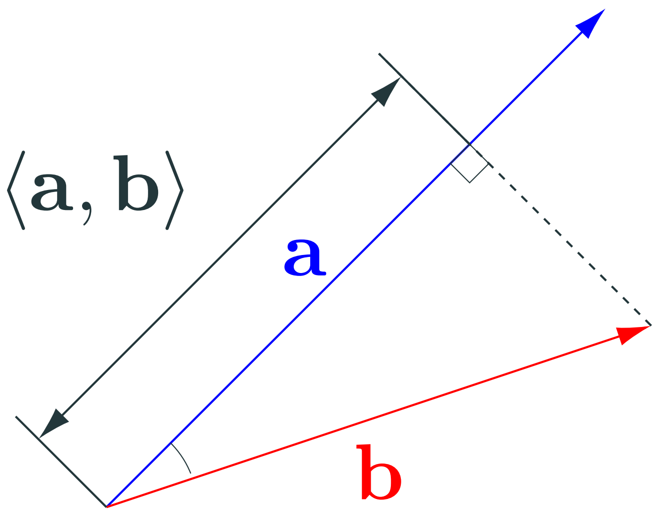
Транспонирование проекции

- Исходный оператор $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, проекция на прямую $x_1 + 2x_2 = 0$.
- Временно $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$.



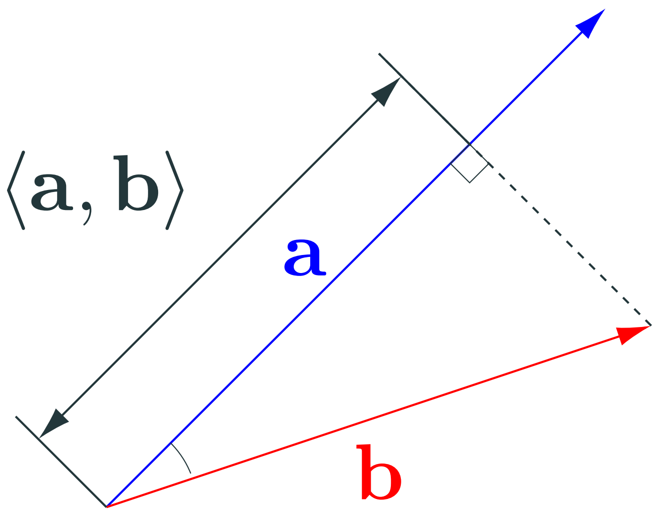
Транспонирование проекции

- Исходный оператор $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, проекция на прямую $x_1 + 2x_2 = 0$.
- Временно $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$.
- $\langle H\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{a}, H\mathbf{b}\rangle$



Транспонирование проекции

- Исходный оператор $H:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, проекция на прямую $x_1+2x_2=0$.
- Временно $\|\mathbf{a}\|=\|\mathbf{b}\|=1$.
- $\langle H\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=\langle\mathbf{a},H\mathbf{b}\rangle$
- $H^T=H$.



Ортогональный оператор

- Определение. Оператор L $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется ортогональным, если

Ортогональный оператор

- Определение. Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется ортогональным, если
  - оператор сохраняет длины, $\|\mathsf{L}\,\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$

Ортогональный оператор

- Определение. Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется ортогональным, если
  - оператор сохраняет длины, $\|\mathsf{L}\,\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$
  - оператор сохраняет углы, $\angle(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Ортогональный оператор

- Определение. Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется ортогональным, если
  - оператор сохраняет длины, $\|\mathsf{L}\,\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$
  - оператор сохраняет углы, $\angle(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
- Эквивалентное определение-2:

  $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.

Ортогональный оператор

- Определение. Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется ортогональным, если
  - оператор сохраняет длины, $\|\mathsf{L}\,\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$
  - оператор сохраняет углы, $\angle(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
- Эквивалентное определение-2:
  $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.
- Эквивалентное определение-3:
  $\mathsf{L}^T = \mathsf{L}^{-1}$.

Ортогональный оператор: примеры

- Перестановка двух компонент вектора

  $$L: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Ортогональный оператор: примеры

- Перестановка двух компонент вектора

  $$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

- Поворот на плоскости на 30° против часовой стрелки.

Полтора доказательства

- Определения 1 и 2 эквивалентны.

Полтора доказательства

- Определения 1 и 2 эквивалентны.
- Скалярное произведение задаёт углы и длины:
$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \quad \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$

Полтора доказательства

- Определения 1 и 2 эквивалентны.
- Скалярное произведение задаёт углы и длины:
  $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \qquad \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$
- Длина и угол задают скалярное произведение:
  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Полтора доказательства

- Определения 1 и 2 эквивалентны.
- Скаларное произведение задаёт углы и длины:
$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \quad \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}$
- Длина и угол задают скалярное произведение:
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
- Из определения 3 следует определение 1.

Полтора доказательства

- Определения 1 и 2 эквивалентны.
- Скалярное произведение задаёт углы и длины:
  $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \quad \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$
- Длина и угол задают скалярное произведение:
  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
- Из определения 3 следует определение 1.
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^{-1} \mathbf{b} \rangle$

Полтора доказательства

- Определения 1 и 2 эквивалентны.
- Скалярное произведение задаёт углы и длины:
  $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \qquad \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$
- Длина и угол задают скалярное произведение:
  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
- Из определения 3 следует определение 1.
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^{-1}\,\mathbf{b} \rangle$
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$

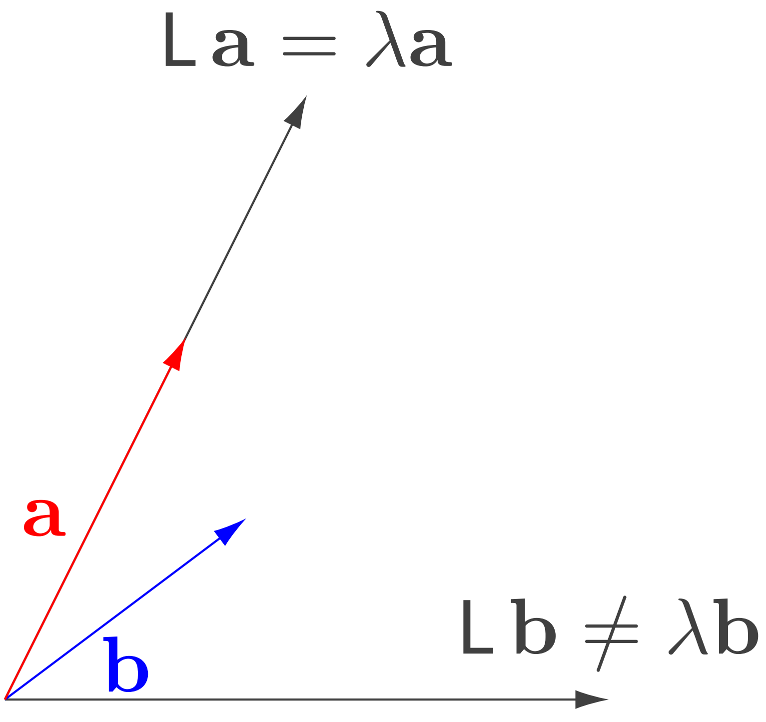
Собственные векторы и собственные числа

название видеофрагмента

Собственные векторы и собственные числа

Определение. Если для действия $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ найдётся такой вектор v, что $\mathsf{L}\, v = \lambda \cdot v$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, то:

- вектор v называется собственным;
- число λ называется собственным.



Собственные вектора: растягивание вдоль осей

- Оператор

  $$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

Собственные вектора: растягивание вдоль осей

- Оператор
  $$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$
- Собственные векторы с $\lambda = 2$
  $$v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Собственные вектора: растягивание вдоль осей

- Оператор

  $$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

- Собственные векторы с $\lambda = 2$

  $$v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Собственные векторы с $\lambda = -3$

  $$v = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Собственные вектора: перестановка компонент

- Оператор L — перестановка компонент:

$$\mathrm{L}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Собственные вектора: перестановка компонент

- Оператор L — перестановка компонент:

$$L: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

- Собственные векторы с $\lambda = 1$

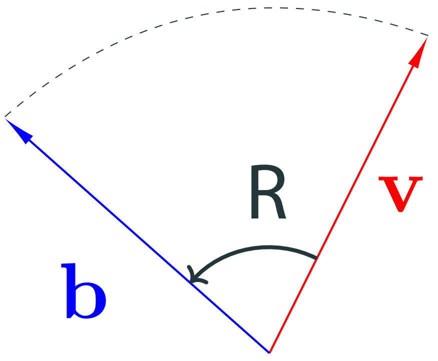
  Одинаковые числа на переставляемых местах:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ x \\ a_3 \\ x \end{pmatrix}$$

Собственные векторы: поворот

- Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!

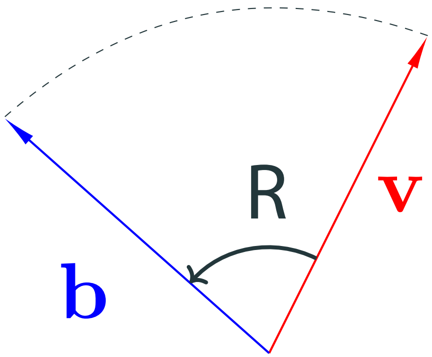
$$\mathrm{R}\,\mathbf{v} = \mathbf{b}$$



Собственные векторы: поворот

- Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!
- По определению, L $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

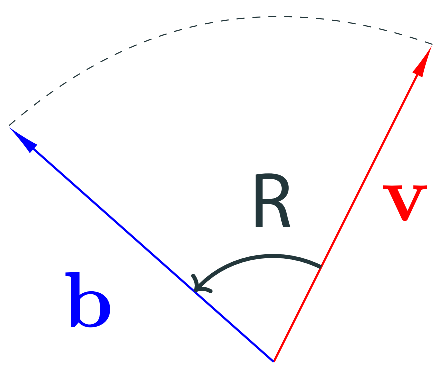
$$\mathrm{R}\,\mathbf{v} = \mathbf{b}$$



Собственные векторы: поворот

- Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!
- По определению, L $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
- Исходный оператор $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, поворот на 30° против часовой стрелки.

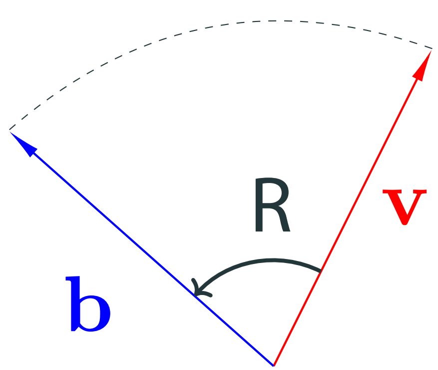
$$\mathrm{R}\,\mathbf{v} = \mathbf{b}$$



Собственные векторы: поворот

- Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!
- По определению, L $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
- Исходный оператор $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, поворот на 30° против часовой стрелки.
- Собственных векторов (и чисел) нет!

$$\mathrm{R}\,\mathbf{v} = \mathbf{b}$$



Собственные вектора: проекция

- Оператор L — проекция на прямую $\ell : x_1 + 2x_2 = 0$.

Собственные вектора: проекция

- Оператор L — проекция на прямую $\ell : x_1 + 2x_2 = 0$.
- Собственные векторы с $\lambda = 1$

  Любой вектор на прямой ℓ.

Собственные вектора: проекция

- Оператор L — проекция на прямую $\ell : x_1 + 2x_2 = 0$.
- Собственные векторы с $\lambda = 1$
  Любой вектор на прямой ℓ.
- Собственные векторы с $\lambda = 0$
  Любой вектор ортогональный прямой ℓ.

Игра Ним

название видеофрагмента

это видео является бонусным, поэтому ничего нет страшного, что с ним выходит много видео, или оно будет долгое

В начале фрагмента идёт слайд с правилами затем видеофрагмент с прозрачной доской

Игра Ним

- Есть три кучки с камнями: 3, 5 и 8 камней;
- Два игрока ходят по очереди;
- За ход:

  игрок выбирает одну кучку;

  берёт из неё положительное число камней;
- Выигрывает берущий последний камень.

Какой ход сделать первому игроку?

видео с доской

Краткое содержание:

закодируем каждую кучку двоичным вектором

стоимость позиции — сумма этих двух векторов

финальная позиция имеет стоимость ноль

любой ход из нулевой позиции ведёт в положительную

Из положительной позиции можно попасть в нулевую

С помощью нижней единички убиваем остальные

Выигрышный ход: взять 2 камня из кучки в 8 камней