

# Матричная запись

# **Линейная комбинация и независимость**

# Краткий план:

- Линейная комбинация векторов;

# Краткий план:

- Линейная комбинация векторов;
- Зависимые и независимые наборы векторов.

# Линейная комбинация

## Определение

Вектор  $\mathbf{c}$  называется **линейной комбинацией** векторов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ , если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами  $\alpha_i$ :

$$\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

# Линейная комбинация

## Определение

Вектор  $\mathbf{c}$  называется **линейной комбинацией** векторов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ , если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами  $\alpha_i$ :

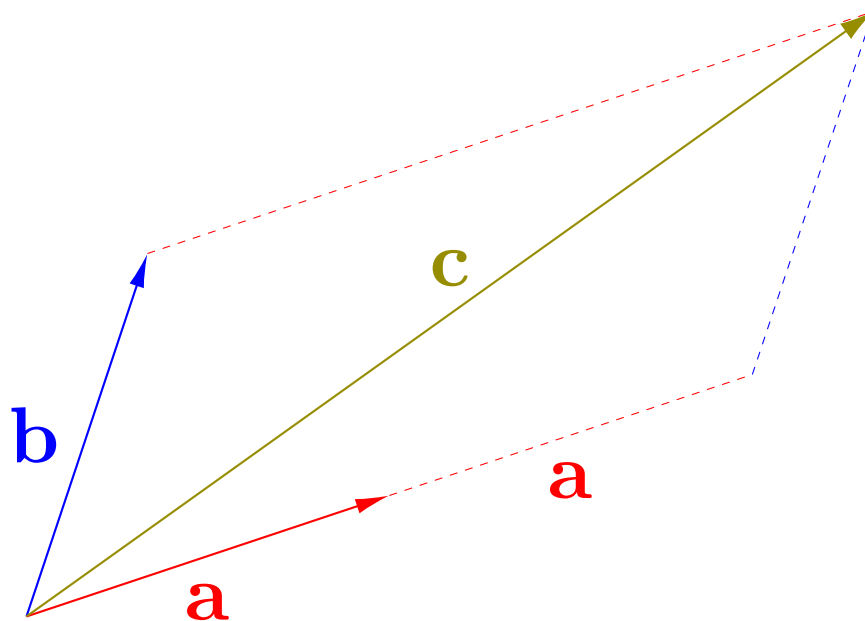
$$\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

Пример. Вектор  $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  — это линейная комбинация векторов  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Линейная комбинация: геометрия

$$c = 2 \cdot a + 1 \cdot b$$



# Любой вектор — линейная комбинация

Любой вектор  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  — линейная комбинация векторов  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



# Любой вектор — линейная комбинация

Любой вектор  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  — линейная комбинация векторов  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично, любой вектор  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  представим в виде:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

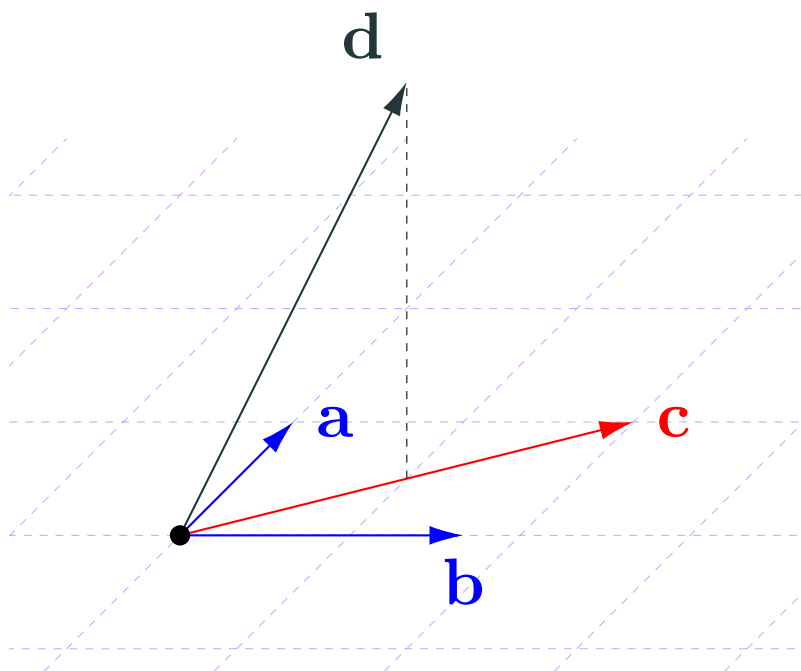
# Линейная зависимость

## Определение

Набор  $A$  из двух и более векторов называется **линейно зависимым**, если хотя бы один вектор является линейной комбинацией остальных.

Набор  $A = \{0\}$  из одного нулевого вектора также называется **линейно зависимым**.

# Линейная зависимость: геометрия



Набор  $\{a, b, c\}$  — линейно зависим.

Набор  $\{a, b, d\}$  — линейно независим.

# Линейная зависимость: примеры

Набор  $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$  — линейно независимый.

# Линейная зависимость: примеры

Набор  $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$  — линейно независимый.

Набор  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  — линейно зависимый:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Линейная зависимость: дубль два

## Эквивалентное определение

Набор векторов  $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  называется **линейно зависимым**, если можно найти такие веса  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , что

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

и при этом хотя бы одно из чисел  $\alpha_i$  отлично от 0.

# Линейная зависимость: дубль два

## Эквивалентное определение

Набор векторов  $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  называется **линейно зависимым**, если можно найти такие веса  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , что

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

и при этом хотя бы одно из чисел  $\alpha_i$  отлично от 0.

## Доказательство эквивалентности

Вектор с ненулевым коэффициентом  $\alpha_i$  перед ним можно выразить через остальные.

# Линейная зависимость: дубль два

## Эквивалентное определение

Набор векторов  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  называется **линейно зависимым**, если можно найти такие веса  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , что

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0,$$

и при этом хотя бы одно из чисел  $\alpha_i$  отлично от 0.

## Доказательство эквивалентности

Вектор с ненулевым коэффициентом  $\alpha_i$  перед ним можно выразить через остальные.

Если вектор  $v_2$  выражен через  $v_1$  и  $v_3$ ,  $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$ , то искомая нулевая линейная комбинация имеет вид:

$$\alpha_1 v_1 + (-1)v_2 + \alpha_3 v_3 = 0.$$



# Линейная оболочка

# Краткий план:

- Линейная оболочка векторов;

# Краткий план:

- Линейная оболочка векторов;
- Базис линейной оболочки векторов;

# Краткий план:

- Линейная оболочка векторов;
- Базис линейной оболочки векторов;
- Размерность линейной оболочки векторов.

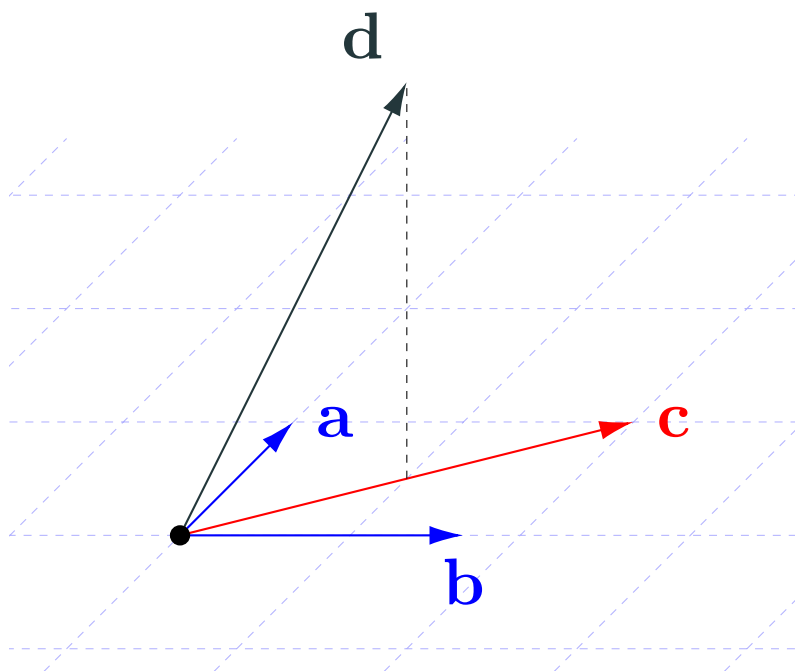
# Линейная оболочка

## Определение

Множество векторов  $M$ , содержащее все возможные линейные комбинации векторов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ , называется их **линейной оболочкой**,

$$M = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$$

# Линейная оболочка векторов: картинка



Вектор **c** лежит в плоскости  $\text{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ .

Вектор **d** не лежит в плоскости  $\text{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ .

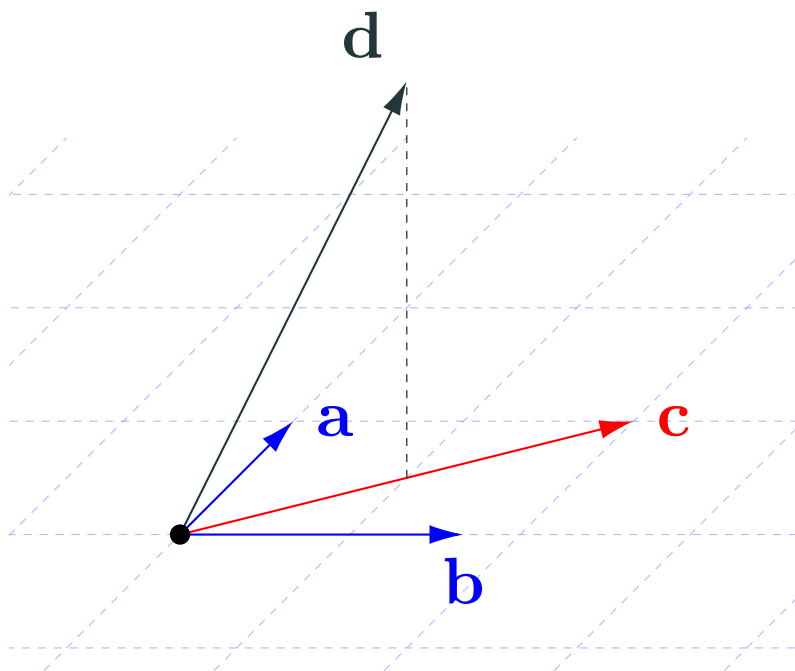
# Базис линейной оболочки

## Определение

Набор векторов  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_d\}$  называется **базисом линейной оболочки**  $\text{Span}\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ , если:

- $\text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_d\} = \text{Span}\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ;
- Набор векторов  $A$  линейно независим.

# Базис линейной оболочки: картинка



Для линейной оболочки  $\text{Span}\{a, b, c\}$  базисами будут  $A_1 = \{a, b\}$ ,  $A_2 = \{b, 2c\}$ ,  $A_3 = \{3a, 5c\}$ .



# Базис оболочки: примеры

Рассмотрим линейную оболочку

$$M = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

# Базис оболочки: примеры

Рассмотрим линейную оболочку

$$M = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Набор  $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$  — базис для  $M$ .

# Базис оболочки: примеры

Рассмотрим линейную оболочку

$$M = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Набор  $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$  — базис для  $M$ .

Набор  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$  — базис для  $M$ .

# Зачем нужен базис?

## Утверждение

Если  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d\}$  — базис линейной оболочки  $M$ , то любой вектор  $\mathbf{x} \in M$  **единственным** образом представим в виде

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_d \mathbf{v}_d$$

# Зачем нужен базис?

## Доказательство

Линейная комбинация базиса совпадает с  $M$ , значит любой вектор из  $M$  представим как линейная комбинация элементов базиса.

# Зачем нужен базис?

## Доказательство

Линейная комбинация базиса совпадает с  $M$ , значит любой вектор из  $M$  представим как линейная комбинация элементов базиса.

Если бы для некоторого  $x$  нашлось два различных представления

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_d \mathbf{v}_d = \alpha'_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha'_d \mathbf{v}_d,$$

то была бы зависимость между элементами базиса, что невозможно.

# Свойства базиса линейной оболочки

## Утверждение

Если набор векторов  $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  линейно независим, то он сам является базисом своей линейной оболочки  $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ .

# Свойства базиса линейной оболочки

## Утверждение

Если набор векторов  $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  линейно независим, то он сам является базисом своей линейной оболочки  $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ .

## Утверждение

Если наборы векторов  $A$  и  $B$  — являются базисами для линейной оболочки  $M$ , то наборы  $A$  и  $B$  содержат одинаковое количество векторов.



# Свойства базиса линейной оболочки

## Утверждение

Если набор векторов  $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  линейно независим, то он сам является базисом своей линейной оболочки  $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ .

## Утверждение

Если наборы векторов  $A$  и  $B$  — являются базисами для линейной оболочки  $M$ , то наборы  $A$  и  $B$  содержат одинаковое количество векторов.

## Утверждение

Если набор  $A$  содержит  $k$  векторов, то базис линейной оболочки  $\text{Span } A$  содержит  $k$  элементов или меньше.

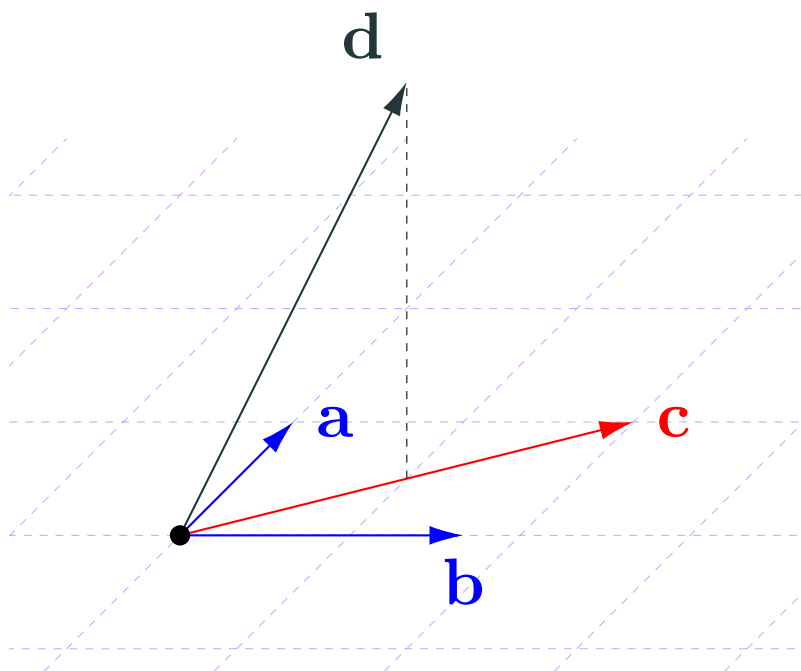
# Размерность линейной оболочки

## Определение

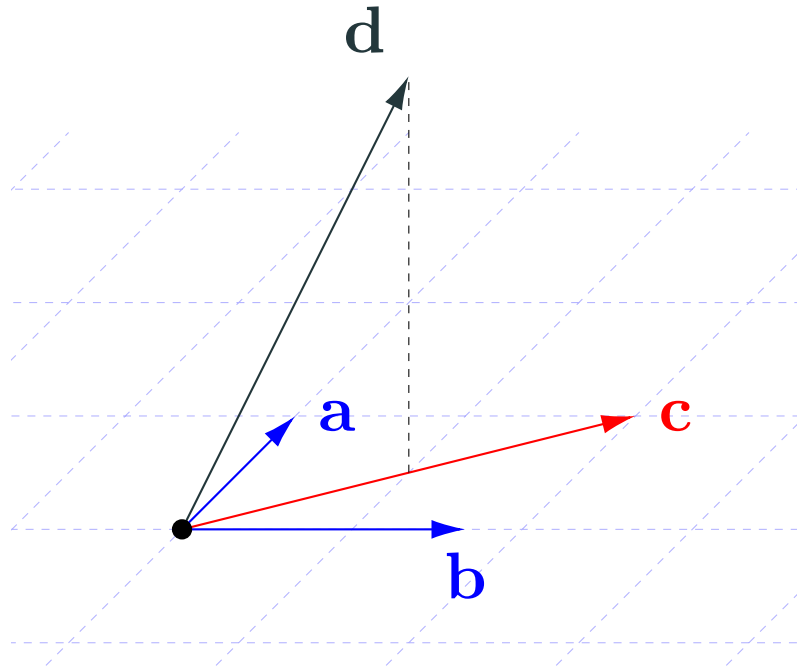
Если базис линейной оболочки  $M$  содержит  $d$  элементов, то число  $d$  называется **размерностью линейной оболочки  $M$** .

$$d = \dim M$$

# Размерность линейной оболочки: картинка

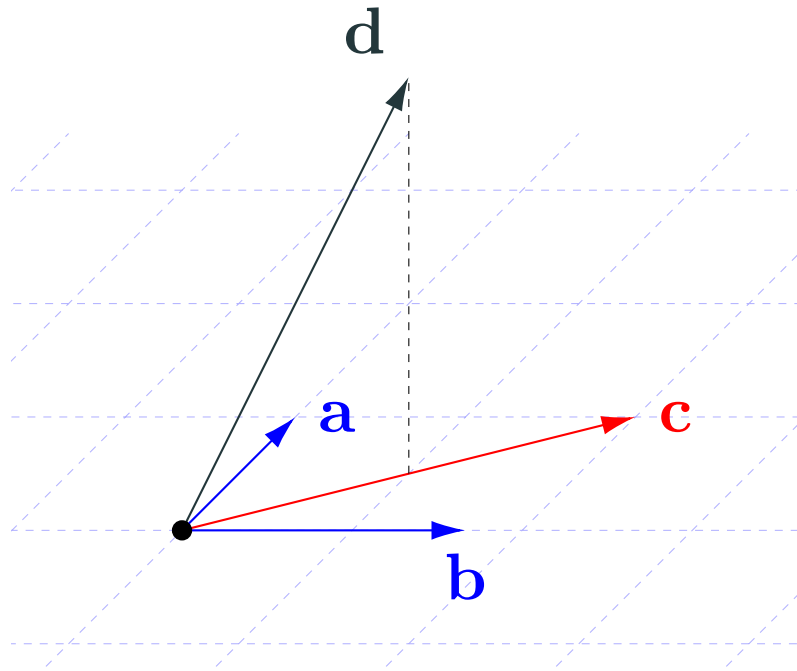


# Размерность линейной оболочки: картинка



Размерность  $\text{Span}\{a, b, c\}$  равна 2.

# Размерность линейной оболочки: картинка



Размерность  $\text{Span}\{a, b, c\}$  равна 2.

Размерность  $\text{Span}\{a, b, d\}$  равна 3.

# Пространство $\mathbb{R}^n$

## Определение

Пространство  $\mathbb{R}^n$  — множество всех возможных векторов из  $n$  чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

# Пространство $\mathbb{R}^n$

## Определение

Пространство  $\mathbb{R}^n$  — множество всех возможных векторов из  $n$  чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{R}^n = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

# Пространство $\mathbb{R}^n$

## Определение

Пространство  $\mathbb{R}^n$  — множество всех возможных векторов из  $n$  чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{R}^n = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Размерность  $\mathbb{R}^n$  равна  $n$ .



# Векторное пространство

# Краткий план:

- Векторное пространство;

# Краткий план:

- Векторное пространство;
- Базис векторного пространства;

# Краткий план:

- Векторное пространство;
- Базис векторного пространства;
- Размерность векторного пространства.

# Векторное пространство

## Определение

Множество  $V$  произвольных объектов называется **конечномерным векторным пространством**, если:

- множество  $V$  можно взаимно однозначно сопоставить пространству  $\mathbb{R}^n$ ;

Элементы векторного пространства называют **векторами**.

# Векторное пространство

## Определение

Множество  $V$  произвольных объектов называется **конечномерным векторным пространством**, если:

- множество  $V$  можно взаимно однозначно сопоставить пространству  $\mathbb{R}^n$ ;
- определено сложение двух объектов  $a$  и  $b$  из  $V$ , и оно соответствует сложению столбцов из  $\mathbb{R}^n$ ;

Элементы векторного пространства называют **векторами**.

# Векторное пространство

## Определение

Множество  $V$  произвольных объектов называется **конечномерным векторным пространством**, если:

- множество  $V$  можно взаимно однозначно сопоставить пространству  $\mathbb{R}^n$ ;
- определено сложение двух объектов  $a$  и  $b$  из  $V$ , и оно соответствует сложению столбцов из  $\mathbb{R}^n$ ;
- определено умножение объекта  $a$  из  $V$  на число  $\lambda \in \mathbb{R}$ , и оно соответствует умножению столбца  $\mathbb{R}^n$  на  $\lambda$ .

Элементы векторного пространства называют **векторами**.

# Векторное пространство

## Определение

Множество  $V$  произвольных объектов называется **конечномерным векторным пространством**, если:

- множество  $V$  можно взаимно однозначно сопоставить пространству  $\mathbb{R}^n$ ;
- определено сложение двух объектов  $a$  и  $b$  из  $V$ , и оно соответствует сложению столбцов из  $\mathbb{R}^n$ ;
- определено умножение объекта  $a$  из  $V$  на число  $\lambda \in \mathbb{R}$ , и оно соответствует умножению столбца  $\mathbb{R}^n$  на  $\lambda$ .

Элементы векторного пространства называют **векторами**.



# Векторное пространство

## Определение

Множество  $V$  произвольных объектов называется **конечномерным векторным пространством**, если:

- множество  $V$  можно взаимно однозначно сопоставить пространству  $\mathbb{R}^n$ ;
- определено сложение двух объектов  $a$  и  $b$  из  $V$ , и оно соответствует сложению столбцов из  $\mathbb{R}^n$ ;
- определено умножение объекта  $a$  из  $V$  на число  $\lambda \in \mathbb{R}$ , и оно соответствует умножению столбца  $\mathbb{R}^n$  на  $\lambda$ .

Элементы векторного пространства называют **векторами**.  
Векторное пространство также называют **линейным**.

# Многочлены

Множество  $V$  всех многочленов от  $t$  степени не выше трёх:

$$V = \{at^3 + bt^2 + ct + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

# Многочлены

Множество  $V$  всех многочленов от  $t$  степени не выше трёх:

$$V = \{at^3 + bt^2 + ct + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

Взаимно однозначное сопоставление:

$$5t^3 + 6t^2 - 3t + 2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

# Многочлены

Множество  $V$  всех многочленов от  $t$  степени не выше трёх:

$$V = \{at^3 + bt^2 + ct + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

Взаимно однозначное сопоставление:

$$5t^3 + 6t^2 - 3t + 2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Сложение двух многочленов и умножение многочлена на число соответствуют операциям над столбцами чисел.

# Пример векторного пространства

Множество  $V$  всех функций  $f(t)$  равных нулю вне двух данных точек:

$$V = \{f \mid f(t) = 0 \text{ для всех } t \neq \pm 1\}$$

# Пример векторного пространства

Множество  $V$  всех функций  $f(t)$  равных нулю вне двух данных точек:

$$V = \{f \mid f(t) = 0 \text{ для всех } t \neq \pm 1\}$$

Взаимно однозначное сопоставление:

$$f \leftrightarrow \begin{pmatrix} f(-1) \\ f(1) \end{pmatrix}.$$

# Пример векторного пространства

Множество  $V$  всех функций  $f(t)$  равных нулю вне двух данных точек:

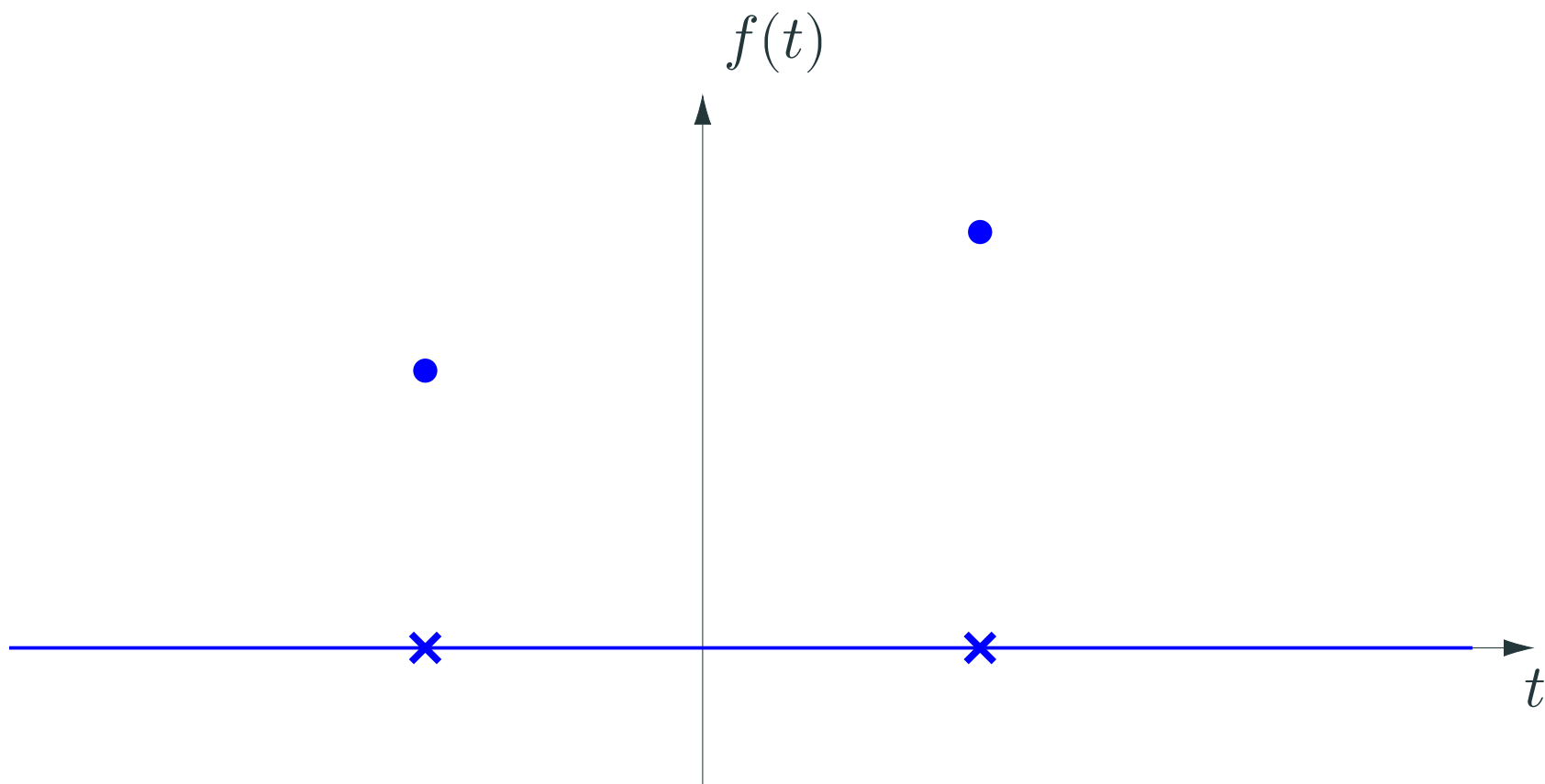
$$V = \{f \mid f(t) = 0 \text{ для всех } t \neq \pm 1\}$$

Взаимно однозначное сопоставление:

$$f \leftrightarrow \begin{pmatrix} f(-1) \\ f(1) \end{pmatrix}.$$

Сложение двух таких функций и умножение на число соответствуют операциям над столбцами чисел.

# Типичный элемент $V$





# Аналогия с $\mathbb{R}^n$

## Определение

Вектор  $\mathbf{c}$  называется **линейной комбинацией** векторов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ , если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами  $\alpha_i$ :

$$\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

# Аналогия с $\mathbb{R}^n$

## Определение

Вектор  $\mathbf{c}$  называется **линейной комбинацией** векторов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ , если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами  $\alpha_i$ :

$$\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

## Определение

Множество векторов  $M$ , содержащее все возможные линейные комбинации векторов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ , называется их **линейной оболочкой**,

$$M = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$$

# Аналогия с $\mathbb{R}^n$

## Определение

Вектор  $\mathbf{c}$  называется **линейной комбинацией** векторов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ , если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами  $\alpha_i$ :

$$\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

## Определение

Множество векторов  $M$ , содержащее все возможные линейные комбинации векторов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ , называется их **линейной оболочкой**,

$$M = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$$

Полностью аналогично определяются линейно зависимые и независимые наборы векторов.

# Базис и размерность пространства

## Определение

Базисом векторного пространства  $V$  называется любой набор  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , такой что

- $V = \text{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ;
- векторы  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  линейно независимы.

# Базис и размерность пространства

## Определение

**Базисом** векторного пространства  $V$  называется любой набор  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , такой что

- $V = \text{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ;
- векторы  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  линейно независимы.

## Определение

Число векторов в базисе,  $n$ , называют **размерностью** пространства  $V$ ,  $\dim V = n$ .

# Продолжаем аналогию

Пространство  $V$  взаимнооднозначно сопоставлено с  $\mathbb{R}^n$  и при этом сложение в  $V$  соответствует сложению в  $\mathbb{R}^n$ , а умножение на число в  $V$  соответствует умножению на число в  $\mathbb{R}^n$ .

## Утверждение

Линейная независимость в  $V$  соответствует линейной независимости в  $\mathbb{R}^n$ .

Базис в  $V$  соответствует базису в  $\mathbb{R}^n$ .

Размерность  $V$  равна размерности  $\mathbb{R}^n$ ,  $\dim V = \dim \mathbb{R}^n = n$ .

# Формальности

Мы слишком привыкли к свойствам чисел!

# Формальности

Мы слишком привыкли к свойствам чисел!

## Эквивалентное определение

Множество  $V$  называется **векторным пространством**, если выполнено восемь свойств...



# Восемь аксиом: сложение

1. При сложении можно расставлять скобки как хочешь  
(ассоциативность):

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$

2. При сложении можно путать лево и право  
(коммутативность):

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

3. Существует нулевой вектор  $\mathbf{0}$ :

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

4. Для любого вектора  $\mathbf{a}$  найдется противоположный вектор  $-\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

# Восемь аксиом: умножение

5. Умножение вектора на число **совместимо** с умножением чисел:

$$\lambda_1(\lambda_2 \mathbf{a}) = (\lambda_1 \lambda_2) \mathbf{a}$$

6. Умножение на **единицу** не меняет вектор:

$$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

7. Раскрывать скобки вокруг векторов можно (**дистрибутивность умножения**):

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$$

8. Раскрывать скобки вокруг чисел можно (**дистрибутивность умножения**):

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{a}$$

# Матрица линейного оператора

## Краткий план:

- Матрица линейного оператора;

# Краткий план:

- Матрица линейного оператора;
- Примеры;

# Краткий план:

- Матрица линейного оператора;
- Примеры;
- Обобщение на векторное пространство.

# Как записать линейный оператор?

Любой вектор  $\mathbf{v}$  представим в виде:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + v_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Как записать линейный оператор?

Любой вектор  $\mathbf{v}$  представим в виде:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + v_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

По свойству линейности

$$\mathbf{L} \mathbf{v} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \mathbf{L} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \mathbf{L} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + v_n \mathbf{L} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$



# Как записать линейный оператор?

Любой вектор  $\mathbf{v}$  представим в виде:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + v_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

По свойству линейности

$$\mathbf{L} \mathbf{v} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \mathbf{L} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \mathbf{L} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + v_n \mathbf{L} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Достаточно понять, что оператор  $\mathbf{L}$  делает с векторами, содержащими одну единицу и нули на остальных местах.

# Запишем оператор по столбцам!

Обозначим  $e_i$  — вектор, у которого на  $i$ -м месте стоит 1, а на остальных местах — 0.

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Запишем оператор по столбцам!

Обозначим  $e_i$  — вектор, у которого на  $i$ -м месте стоит 1, а на остальных местах — 0.

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Определение

**Матрицей линейного оператора**  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  назовём прямоугольную табличку чисел, в которой  $i$ -ый столбец равен  $L e_i$ .

# Растягивание компонент

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

# Растягивание компонент

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $L$  на базисных векторах  $e_1$  и  $e_2$ :

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

# Растягивание компонент

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $L$  на базисных векторах  $e_1$  и  $e_2$ :

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Матрица оператора,  $L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ .

# Перестановка компонент вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

# Перестановка компонент вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $L$  на базисных векторах  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_3$ :

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



# Перестановка компонент вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $L$  на базисных векторах  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_3$ :

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Матрица оператора,  $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

# Поворот плоскости

Оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  поворачивает плоскость на  $30^\circ$  против часовой стрелки.

$$R : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \cos 30^\circ - a_2 \sin 30^\circ \\ a_1 \sin 30^\circ + a_2 \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

# Поворот плоскости

Оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  поворачивает плоскость на  $30^\circ$  против часовой стрелки.

$$R : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \cos 30^\circ - a_2 \sin 30^\circ \\ a_1 \sin 30^\circ + a_2 \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $R$  на базисных векторах  $e_1$  и  $e_2$ :

$$R : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ \end{pmatrix}, \quad R : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\sin 30^\circ \\ \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

# Поворот плоскости

Оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  поворачивает плоскость на  $30^\circ$  против часовой стрелки.

$$R : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \cos 30^\circ - a_2 \sin 30^\circ \\ a_1 \sin 30^\circ + a_2 \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $R$  на базисных векторах  $e_1$  и  $e_2$ :

$$R : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ \end{pmatrix}, \quad R : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\sin 30^\circ \\ \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

$$\text{Матрица оператора, } R = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}.$$

# Оператор бездельника!

$$I : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

# Оператор бездельника!

$$I : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $I$  на базисных векторах  $e_1$  и  $e_2$ :

$$I : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad I : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Оператор бездельника!

$$I : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $I$  на базисных векторах  $e_1$  и  $e_2$ :

$$I : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad I : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица оператора, **единичная матрица**,  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

# Дописывание нуля

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix}$$



# Дописывание нуля

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $L$  на базисных векторах  $e_1$  и  $e_2$ :

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Дописывание нуля

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $L$  на базисных векторах  $e_1$  и  $e_2$ :

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Матрица оператора, } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица размера  $3 \times 2$  соответствует оператору  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

# Удаление компоненты вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

# Удаление компоненты вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $L$  на базисных векторах  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_3$ :

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Удаление компоненты вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $L$  на базисных векторах  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_3$ :

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица оператора,  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Матрица размера  $2 \times 3$  соответствует оператору  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

# Нумерация элементов матрицы

Сначала строки, потом столбцы!

# Нумерация элементов матрицы

Сначала строки, потом столбцы!

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Матрица  $A$  имеет размер  $2 \times 3$  и  $a_{12} = -2$ .

# Нумерация элементов матрицы

Сначала строки, потом столбцы!

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Матрица  $A$  имеет размер  $2 \times 3$  и  $a_{12} = -2$ .

Элемент матрицы  $A$ , лежащий в строке  $i$  в столбце  $j$ , обозначают  $a_{ij}$ .

Матрица имеет размер  $n \times k$ , если в ней  $n$  строк и  $k$  столбцов.



# Абстрактное определение

Пусть оператор  $L$  действует из пространства  $V$  с базисом  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  в пространство  $W$  с базисом  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ .

# Абстрактное определение

Пусть оператор  $L$  действует из пространства  $V$  с базисом  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  в пространство  $W$  с базисом  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ .

## Определение

**Матрицей  $L_{ef}$  линейного оператора  $L$**  называется табличка чисел, определяемая по следующему алгоритму:

1. Находим вектор  $L e_j \in W$ .

# Абстрактное определение

Пусть оператор  $L$  действует из пространства  $V$  с базисом  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  в пространство  $W$  с базисом  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ .

## Определение

**Матрицей  $L_{ef}$  линейного оператора  $L$**  называется табличка чисел, определяемая по следующему алгоритму:

1. Находим вектор  $L e_j \in W$ .
2. Раскладываем этот вектор по базису  $f$ :

$$L e_j = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \dots + a_{kj} f_k$$

# Абстрактное определение

Пусть оператор  $L$  действует из пространства  $V$  с базисом  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  в пространство  $W$  с базисом  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ .

## Определение

**Матрицей  $L_{ef}$  линейного оператора  $L$**  называется табличка чисел, определяемая по следующему алгоритму:

1. Находим вектор  $L e_j \in W$ .
2. Раскладываем этот вектор по базису  $f$ :

$$L e_j = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \dots + a_{kj} f_k$$

3. Помещаем числа  $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{kj}$  в столбец  $j$  таблички.

# Абстрактное определение

Пусть оператор  $L$  действует из пространства  $V$  с базисом  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  в пространство  $W$  с базисом  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ .

## Определение

**Матрицей  $L_{ef}$  линейного оператора  $L$**  называется табличка чисел, определяемая по следующему алгоритму:

1. Находим вектор  $L e_j \in W$ .
2. Раскладываем этот вектор по базису  $f$ :

$$L e_j = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \dots + a_{kj} f_k$$

3. Помещаем числа  $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{kj}$  в столбец  $j$  таблички.
4. Повторяем шаги 1, 2 и 3 для всех столбцов.

# Ранг оператора

## Краткий план:

- Множество значений оператора;

## Краткий план:

- Множество значений оператора;
- Ранг оператора.



# Множество значений оператора

Любой вектор  $\mathbf{v}$  представим в виде:

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \dots + v_n \mathbf{e}_n$$

# Множество значений оператора

Любой вектор  $\mathbf{v}$  представим в виде:

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \dots + v_n \mathbf{e}_n$$

По свойству линейности

$$\mathbf{L} \mathbf{v} = v_1 \mathbf{L} \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{L} \mathbf{e}_2 + \dots + v_n \mathbf{L} \mathbf{e}_n$$

# Множество значений оператора

Любой вектор  $\mathbf{v}$  представим в виде:

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \dots + v_n \mathbf{e}_n$$

По свойству линейности

$$L \mathbf{v} = v_1 L \mathbf{e}_1 + v_2 L \mathbf{e}_2 + \dots + v_n L \mathbf{e}_n$$

## Утверждение

Множество значений оператора  $L$  можно записать в виде линейной оболочки:

$$\text{Image } L = \text{Span}\{L \mathbf{e}_1, L \mathbf{e}_2, \dots, L \mathbf{e}_n\}$$

# Ранг оператора

## Определение

**Рангом** линейного оператора  $L$  называют размерность его образа:

$$\text{rank } L = \dim \text{Image } L = \dim \text{Span}\{L e_1, L e_2, \dots, L e_n\}$$

# Удаление компоненты вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

# Удаление компоненты вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $L$  на базисных векторах  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_3$ :

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Удаление компоненты вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $L$  на базисных векторах  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_3$ :

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Image } L = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

# Удаление компоненты вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Действие оператора  $L$  на базисных векторах  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_3$ :

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Image } L = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Базис для Image } L: \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{rank } L = \dim \text{Image } L = 2$$



# Ранг проекции

Если оператор  $H$  проецирует векторы на прямую  $\ell$ , то  $\text{Image } H = \text{Span } a$ , где  $a$  — любой ненулевой вектор, лежащий на прямой  $\ell$ .

# Ранг проекции

Если оператор  $H$  проецирует векторы на прямую  $\ell$ , то  $\text{Image } H = \text{Span } a$ , где  $a$  — любой ненулевой вектор, лежащий на прямой  $\ell$ .

Ранг оператора проецирования на прямую равен  $\text{rank } H = 1$ .

# Ранг проекции

Если оператор  $H$  проецирует векторы на прямую  $\ell$ , то  $\text{Image } H = \text{Span } a$ , где  $a$  — любой ненулевой вектор, лежащий на прямой  $\ell$ .

Ранг оператора проецирования на прямую равен  $\text{rank } H = 1$ .

Ранг оператора проецирования  $H$  равен размерности того множества, на которое проецируют.

# Ранг проекции

Если оператор  $H$  проецирует векторы на прямую  $\ell$ , то  $\text{Image } H = \text{Span } a$ , где  $a$  — любой ненулевой вектор, лежащий на прямой  $\ell$ .

Ранг оператора проецирования на прямую равен  $\text{rank } H = 1$ .

Ранг оператора проецирования  $H$  равен размерности того множества, на которое проецируют.

## Определение

Ранг оператора проецирования  $H$  также называют **следом оператора проецирования**,  $\text{tr } H = \text{rank } H$ .

# Ранг поворота

Оператор  $R$  поворачивает плоскость на  $30^\circ$  градусов против часовой стрелки.

# Ранг поворота

Оператор  $R$  поворачивает плоскость на  $30^\circ$  градусов против часовой стрелки.

Поворачивая различные векторы, можно получить любой вектор на плоскости,  $\text{Image } R = \mathbb{R}^2$ .

# Ранг поворота

Оператор  $R$  поворачивает плоскость на  $30^\circ$  градусов против часовой стрелки.

Поворачивая различные векторы, можно получить любой вектор на плоскости,  $\text{Image } R = \mathbb{R}^2$ .

Базис образа:  $\{e_1, e_2\}$ , значит  $\text{rank } R = 2$ .

# Ограничения на ранг

## Утверждение

Ранг оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  не превосходит ни  $n$ , ни  $k$ .



# Ограничения на ранг

## Утверждение

Ранг оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  не превосходит ни  $n$ , ни  $k$ .

## Доказательство

Базис во всём  $\mathbb{R}^k$  содержит  $k$  элементов, значит базис образа не больше.

# Ограничения на ранг

## Утверждение

Ранг оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  не превосходит ни  $n$ , ни  $k$ .

## Доказательство

Базис во всём  $\mathbb{R}^k$  содержит  $k$  элементов, значит базис образа не больше.

Образ получается как  $\text{Span}\{L e_1, L e_2, \dots, L e_n\}$ .

# Ранг произведения операторов

## Утверждение

Ранг произведения  $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  и  $L_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  не превосходит ранга сомножителей,  
 $\text{rank}(L_2 L_1) \leq \min\{\text{rank } L_1, \text{rank } L_2\}.$

# Ранг произведения операторов

## Утверждение

Ранг произведения  $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  и  $L_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  не превосходит ранга сомножителей,  
 $\text{rank}(L_2 L_1) \leq \min\{\text{rank } L_1, \text{rank } L_2\}.$

## Доказательство

$$\text{Image}(L_2 L_1) \subset \text{Image}(L_2)$$

# Ранг произведения операторов

## Утверждение

Ранг произведения  $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  и  $L_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  не превосходит ранга сомножителей,  
 $\text{rank}(L_2 L_1) \leq \min\{\text{rank } L_1, \text{rank } L_2\}$ .

## Доказательство

$$\text{Image}(L_2 L_1) \subset \text{Image}(L_2)$$

Если  $\text{Image } L_1 = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ , то

$$\text{Image}(L_2 L_1) = \text{Span}\{L_2 \mathbf{v}_1, L_2 \mathbf{v}_2, \dots, L_2 \mathbf{v}_p\}.$$

# Ранг матрицы

## Определение

**Рангом матрицы** называют ранг соответствующего оператора.

# Ранг матрицы

## Определение

**Рангом матрицы** называют ранг соответствующего оператора.

## Утверждение

Ранг матрицы равен максимальному количеству линейно независимых столбцов матрицы.

# Ранг матрицы

## Определение

**Рангом матрицы** называют ранг соответствующего оператора.

## Утверждение

Ранг матрицы равен максимальному количеству линейно независимых столбцов матрицы.

## Доказательство

Именно эти линейно-независимые столбцы и будут базисом в линейной оболочке  $\text{Image } L$ .



# Умножение матрицы на вектор

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

# Умножение матрицы на матрицу

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

# Три взгляда на умножение матриц

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

# Решение системы уравнений методом Гаусса

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

# Системы линейных уравнений

# Краткий план:

- Однородная система и ядро оператора;

# Краткий план:

- Однородная система и ядро оператора;
- Структура множества решений.

# Варианты записи системы

Скалярный: 
$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 + 7x_2 = 9 \end{cases}$$



# Варианты записи системы

Скалярный: 
$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 + 7x_2 = 9 \end{cases}$$

Векторный: 
$$x_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

# Варианты записи системы

Скалярный: 
$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 + 7x_2 = 9 \end{cases}$$

Векторный: 
$$x_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Матричный: 
$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

# Однородная и неоднородная системы

## Определение

Система уравнений  $Ax = 0$  называется **однородной**.

# Однородная и неоднородная системы

## Определение

Система уравнений  $Ax = 0$  называется **однородной**.

Однородная система: 
$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

# Однородная и неоднородная системы

## Определение

Система уравнений  $Ax = 0$  называется **однородной**.

Однородная система: 
$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Неоднородная система: 
$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

# Ядро оператора

## Определение

**Ядром** линейного оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  называется множество векторов, которые под действием  $L$  превращаются в  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^k$ :

$$\ker L = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid L \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

# Ядро оператора

## Определение

**Ядром** линейного оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  называется множество векторов, которые под действием  $L$  превращаются в  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^k$ :

$$\ker L = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid L \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

Чтобы найти ядро  $L$  нужно решить однородную систему  $L \mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

# Метод Гаусса

Основная идея: по очереди избавиться от всех неизвестных.



# Метод Гаусса

Основная идея: по очереди избавиться от всех неизвестных.

## Алгоритм

1. Выберем первое уравнение так, чтобы в нём была переменная  $x_1$ .

# Метод Гаусса

Основная идея: по очереди избавиться от всех неизвестных.

## Алгоритм

1. Выберем первое уравнение так, чтобы в нём была переменная  $x_1$ .
2. Вычитаем первое уравнение из остальных так, чтобы в них пропала переменная  $x_1$ .

# Метод Гаусса

Основная идея: по очереди избавиться от всех неизвестных.

## Алгоритм

1. Выберем первое уравнение так, чтобы в нём была переменная  $x_1$ .
2. Вычитаем первое уравнение из остальных так, чтобы в них пропала переменная  $x_1$ .
3. Зафиксируем первое уравнение и работаем с остальными.

# Метод Гаусса

Основная идея: по очереди избавиться от всех неизвестных.

## Алгоритм

1. Выберем первое уравнение так, чтобы в нём была переменная  $x_1$ .
2. Вычитаем первое уравнение из остальных так, чтобы в них пропала переменная  $x_1$ .
3. Зафиксируем первое уравнение и работаем с остальными.

В финальной системе в каждом следующем уравнении меньше неизвестных, чем в предыдущем.

# Ступенчатый вид

После применения метода Гаусса система примет ступенчатый вид:

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

# Ступенчатый вид

После применения метода Гаусса система примет ступенчатый вид:

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Неизвестные, лежащие в начале «ступеньки», называются **главными**, а остальные — **свободными**.

Главные переменные можно выразить через свободные.

# Количество решений

## Утверждение

Система уравнений  $Ax = b$  имеет ноль, одно или бесконечное количество решений.

# Количество решений

## Утверждение

Система уравнений  $Ax = b$  имеет ноль, одно или бесконечное количество решений.

## Доказательство

После применения метода Гаусса последнее уравнение, в котором хотя бы один коэффициент отличен от нуля, окажется одного из трёх видов:

$A : 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 7$ , нет решений.

$B : 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 5x_4 = 7$ , хотя бы одно решение.

$C : 0x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7$ , бесконечное количество.



# Количество решений

## Утверждение

Система уравнений  $Ax = b$  имеет ноль, одно или бесконечное количество решений.

## Доказательство

После применения метода Гаусса последнее уравнение, в котором хотя бы один коэффициент отличен от нуля, окажется одного из трёх видов:

$A : 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 7$ , нет решений.

$B : 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 5x_4 = 7$ , хотя бы одно решение.

$C : 0x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7$ , бесконечное количество.

В случае C мы получаем в последнем уравнении свободу выбора  $x_3$  и  $x_4$ .

# Структура множества решений

## Утверждение

Если решений бесконечное множество, то ответ можно записать в виде:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k,$$

где  $\mathbf{a}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  — конкретные векторы, а  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  — произвольные числа.

# Структура множества решений

## Утверждение

Если решений бесконечное множество, то ответ можно записать в виде:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k,$$

где  $\mathbf{a}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  — конкретные векторы, а  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  — произвольные числа.

Для однородной системы  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ , а число  $k$  является размерностью множества решений,  $k = \dim \ker A$ .

# Резюме

- Линейная комбинация и линейная оболочка.

# Резюме

- Линейная комбинация и линейная оболочка.
- Абстрактное векторное пространство.

# Резюме

- Линейная комбинация и линейная оболочка.
- Абстрактное векторное пространство.
- Матрица линейного оператора.

# Резюме

- Линейная комбинация и линейная оболочка.
- Абстрактное векторное пространство.
- Матрица линейного оператора.
- Ранг оператора.

# Резюме

- Линейная комбинация и линейная оболочка.
- Абстрактное векторное пространство.
- Матрица линейного оператора.
- Ранг оператора.
- Умножение матрицы на вектор и на матрицу.



# Резюме

- Линейная комбинация и линейная оболочка.
- Абстрактное векторное пространство.
- Матрица линейного оператора.
- Ранг оператора.
- Умножение матрицы на вектор и на матрицу.
- Решение системы методом Гаусса.

# Резюме

- Линейная комбинация и линейная оболочка.
- Абстрактное векторное пространство.
- Матрица линейного оператора.
- Ранг оператора.
- Умножение матрицы на вектор и на матрицу.
- Решение системы методом Гаусса.
- Бонус: задача о шахматной доске.

# Резюме

- Линейная комбинация и линейная оболочка.
- Абстрактное векторное пространство.
- Матрица линейного оператора.
- Ранг оператора.
- Умножение матрицы на вектор и на матрицу.
- Решение системы методом Гаусса.
- Бонус: задача о шахматной доске.

# Резюме

- Линейная комбинация и линейная оболочка.
- Абстрактное векторное пространство.
- Матрица линейного оператора.
- Ранг оператора.
- Умножение матрицы на вектор и на матрицу.
- Решение системы методом Гаусса.
- Бонус: задача о шахматной доске.

Следующая лекция: определитель и обратная матрица.

# Задача о шахматной доске

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)