Задачи 1-6 оцениваются в 10 баллов, задачи 7 и 8 — в 20 баллов. При получении 40 баллов оценка за контрольную работу будет гарантированно не меньше 6 баллов. Границы для оценки выше 6 баллов определяются по результатам контрольной работы.

1. Найдите первую вариацию функционала $v[y] = \int_{-1}^{1} y'^2 + 2y^3y' + y\sin t\,dt$
2. Найдите допустимую экстремаль функционала $v[y] = \int_0^2 y'^2 + 3yy' + 4y^2 + 4ye^{2t}\,dt$, при $y(0) = -1$, $y(2) = 2(e^4 - e^{-4})$
3. Найдите допустимую экстремаль функционала $v[y] = \int_0^{3\pi/2} y'^2 - y\cos t - 2y\sin 2t\,dt$, при $y(0) = 1$
4. Исследуйте на экстремум функционал $v[y] = \int_0^1 e^t\left(y^2 + y'^2/2\right)\,dt$, при $y(0) = 1$, $y(1) = e$
5. Исследуйте на экстремум функционал $v[y] = \int_0^1 3y'^4 - 5y'^3 + 25y'^2 - 7y' - 6e^t\cos 3t\,dt$, при $y(0) = 2$, $y(1) = 4$
6. Найдите экстремаль функционала $v[y] = \int_3^5 t^2y'^2\,dt - \frac{2}{3}(y(3))^2 + 4y(5)$
7. Найдите допустимую экстремаль функционала $v[y] = \int_0^T yt - y'^2\,dt$ при $y(T) = -1$
8. Найдите кратчайшее расстояние и соответствующую траекторию между окружностью $t^2 + y^2 = 1$ и прямой $t + y = 4$, используя только вариационное исчисление.

Шпаргалка

1. Позор джунглям! $\sin'(x) = \cos(x)$ и $\cos'(x) = -\sin(x)$
2. Уравнение Эйлера-Пуассона
$$F_y - \frac{d}{dt}F_{y'} + \frac{d^2}{dt^2}F_{y''} + \ldots + (-1)^n\frac{d^n}{dt^n}F_{y^{(n)}} = 0$$
3. Для автономной системы $v[y] = \int_a^b F(y, y')\,dt \to extr$ уравнение Эйлера приводится к виду $y'F_{y'} - F = const$
4. Условие трансверсальности
$$[F - y'F_{y'}]_{t=T}\cdot\Delta T + [F_{y'}]_{t=T}\cdot\Delta y_T = 0$$
5. Условие трансверсальности для задачи Больца
$$\begin{cases} F_{y'}\big|_{t_0} = G_{y(t_0)} \\ F_{y'}\big|_{t_1} = -G_{y(t_1)} \end{cases}$$
6. Решение линейных дифференциальных уравнений
   (a) Общее решение однородного уравнения $y^{(n)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0$
      i. Вещественный корень λ кратности k: $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$, $t^2e^{\lambda t}$, …, $t^{k-1}e^{\lambda t}$
      ii. Пара комплексных корней $\lambda = a \pm bi$ кратности k:
      $e^{at}\cos(bt)$, $te^{at}\cos(bt)$, $t^2e^{at}\cos(bt)$, …, $t^{k-1}e^{at}\cos(bt)$
      $e^{at}\sin(bt)$, $te^{at}\sin(bt)$, $t^2e^{at}\sin(bt)$, …, $t^{k-1}e^{at}\sin(bt)$
   (b) Частное решение неоднородного уравнения $y^{(n)} + \ldots + a_1y' + a_0y = f(t)$
      i. Если $f(t) = e^{at}P_n(t)$, то найдётся решение $y_0(t) = t^ke^{at}R_n(t)$, где k — кратность корня a
      ii. Если $f(t) = e^{at}(P_n(t)\cos(bt) + Q_n(t)\sin(bt))$, то найдётся решение $y_0(t) = t^ke^{at}(R_n(t)\cos(bt) + S_n(t)\sin(bt))$, где k — кратность корня $a + bi$

Задачи 1-6 оцениваются в 10 баллов, задачи 7 и 8 — в 20 баллов. При получении 40 баллов оценка за контрольную работу будет гарантированно не меньше 6 баллов. Границы для оценки выше 6 баллов определяются по результатам контрольной работы.

1. Найдите первую вариацию функционала $v[y] = \int_{-1}^{1} y'^2 - 4y^3y' + y\cos t\,dt$
2. Найдите допустимую экстремаль функционала $v[y] = \int_0^2 y'^2 - 5yy' + 9y^2 + 9ye^{3t}\,dt$, при $y(0) = -1$, $y(2) = 3(e^6 - e^{-6})$
3. Найдите допустимую экстремаль функционала $v[y] = \int_0^{3\pi/2} y'^2 + 2y\cos t + 4y\sin 2t\,dt$, при $y(0) = 1$
4. Исследуйте на экстремум функционал $v[y] = \int_0^1 e^t\,(y^2 + y'^2/2)\,dt$, при $y(0) = 1$, $y(1) = e$
5. Исследуйте на экстремум функционал $v[y] = \int_0^1 3y'^4 + 4y'^3 + 36y'^2 - 7y' - 2e^t\sin 3t\,dt$, при $y(0) = 3$, $y(1) = 2$
6. Найдите экстремаль функционала $v[y] = \int_1^4 t^2y'^2\,dt - \frac{4}{3}(y(1))^2 + 8y(4)$
7. Найдите допустимую экстремаль функционала $v[y] = \int_0^T yt - y'^2\,dt$ при $y(T) = -1$
8. Найдите кратчайшее расстояние и соответствующую траекторию между окружностью $t^2 + y^2 = 1$ и прямой $t + y = 4$, используя только вариационное исчисление.

Шпаргалка

1. Позор джунглям! $\sin'(x) = \cos(x)$ и $\cos'(x) = -\sin(x)$
2. Уравнение Эйлера-Пуассона

$$F_y - \frac{d}{dt}F_{y'} + \frac{d^2}{dt^2}F_{y''} + \ldots + (-1)^n\frac{d^n}{dt^n}F_{y^{(n)}} = 0$$

3. Для автономной системы $v[y] = \int_a^b F(y, y')\,dt \to extr$ уравнение Эйлера приводится к виду $y'F_{y'} - F = const$
4. Условие трансверсальности

$$[F - y'F_{y'}]_{t=T}\cdot\Delta T + [F_{y'}]_{t=T}\cdot\Delta y_T = 0$$

5. Условие трансверсальности для задачи Больца

$$\begin{cases} F_{y'}\big|_{t_0} = G_{y(t_0)} \\ F_{y'}\big|_{t_1} = -G_{y(t_1)} \end{cases}$$

6. Решение линейных дифференциальных уравнений
   (a) Общее решение однородного уравнения $y^{(n)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0$
      i. Вещественный корень λ кратности k: $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$, $t^2e^{\lambda t}$, …, $t^{k-1}e^{\lambda t}$
      ii. Пара комплексных корней $\lambda = a \pm bi$ кратности k:
      $e^{at}\cos(bt)$, $te^{at}\cos(bt)$, $t^2e^{at}\cos(bt)$, …, $t^{k-1}e^{at}\cos(bt)$
      $e^{at}\sin(bt)$, $te^{at}\sin(bt)$, $t^2e^{at}\sin(bt)$, …, $t^{k-1}e^{at}\sin(bt)$
   (b) Частное решение неоднородного уравнения $y^{(n)} + \ldots + a_1y' + a_0y = f(t)$
      i. Если $f(t) = e^{at}P_n(t)$, то найдётся решение $y_0(t) = t^ke^{at}R_n(t)$, где k — кратность корня a
      ii. Если $f(t) = e^{at}(P_n(t)\cos(bt) + Q_n(t)\sin(bt))$, то найдётся решение
      $y_0(t) = t^ke^{at}(R_n(t)\cos(bt) + S_n(t)\sin(bt))$, где k — кратность корня $a + bi$

Задачи 1-6 оцениваются в 10 баллов, задачи 7 и 8 — в 20 баллов. При получении 40 баллов оценка за контрольную работу будет гарантированно не меньше 6 баллов. Границы для оценки выше 6 баллов определяются по результатам контрольной работы.

1. Найдите первую вариацию функционала $v[y] = \int_{-1}^{1} y'^2 + 6y^3y' - 2y\sin t\,dt$
2. Найдите допустимую экстремаль функционала $v[y] = \int_0^2 y'^2 + 4yy' + y^2 + ye^t\,dt$, при $y(0) = -1$, $y(2) = e^2 - e^{-2}$
3. Найдите допустимую экстремаль функционала $v[y] = \int_0^{3\pi/2} y'^2 + 4y\cos t - 8y\sin 2t\,dt$, при $y(0) = 1$
4. Исследуйте на экстремум функционал $v[y] = \int_0^1 e^t\left(y^2 + y'^2/2\right)\,dt$, при $y(0) = 1$, $y(1) = e$
5. Исследуйте на экстремум функционал $v[y] = \int_0^1 -3y'^4 + 4y'^3 - 16y'^2 - 21y' + e^t\sin 3t\,dt$, при $y(0) = -1$, $y(1) = 2$
6. Найдите экстремаль функционала $v[y] = \int_2^4 t^2y'^2\,dt - \frac{4}{3}(y(2))^2 + 6y(4)$
7. Найдите допустимую экстремаль функционала $v[y] = \int_0^T yt - y'^2\,dt$ при $y(T) = -1$
8. Найдите кратчайшее расстояние и соответствующую траекторию между окружностью $t^2 + y^2 = 1$ и прямой $t + y = 4$, используя только вариационное исчисление.

Шпаргалка

1. Позор джунглям! $\sin'(x) = \cos(x)$ и $\cos'(x) = -\sin(x)$
2. Уравнение Эйлера-Пуассона

$$F_y - \frac{d}{dt}F_{y'} + \frac{d^2}{dt^2}F_{y''} + \ldots + (-1)^n\frac{d^n}{dt^n}F_{y^{(n)}} = 0$$

3. Для автономной системы $v[y] = \int_a^b F(y, y')\,dt \to extr$ уравнение Эйлера приводится к виду $y'F_{y'} - F = const$
4. Условие трансверсальности

$$[F - y'F_{y'}]_{t=T}\cdot\Delta T + [F_{y'}]_{t=T}\cdot\Delta y_T = 0$$

5. Условие трансверсальности для задачи Больца

$$\begin{cases} F_{y'}\big|_{t_0} = G_{y(t_0)} \\ F_{y'}\big|_{t_1} = -G_{y(t_1)} \end{cases}$$

6. Решение линейных дифференциальных уравнений
   (a) Общее решение однородного уравнения $y^{(n)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0$
      i. Вещественный корень λ кратности k: $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$, $t^2e^{\lambda t}$, $\ldots$, $t^{k-1}e^{\lambda t}$
      ii. Пара комплексных корней $\lambda = a \pm bi$ кратности k:
      $e^{at}\cos(bt)$, $te^{at}\cos(bt)$, $t^2e^{at}\cos(bt)$, $\ldots$, $t^{k-1}e^{at}\cos(bt)$
      $e^{at}\sin(bt)$, $te^{at}\sin(bt)$, $t^2e^{at}\sin(bt)$, $\ldots$, $t^{k-1}e^{at}\sin(bt)$
   (b) Частное решение неоднородного уравнения $y^{(n)} + \ldots + a_1y' + a_0y = f(t)$
      i. Если $f(t) = e^{at}P_n(t)$, то найдётся решение $y_0(t) = t^ke^{at}R_n(t)$, где k — кратность корня a
      ii. Если $f(t) = e^{at}(P_n(t)\cos(bt) + Q_n(t)\sin(bt))$, то найдётся решение
      $y_0(t) = t^ke^{at}(R_n(t)\cos(bt) + S_n(t)\sin(bt))$, где k — кратность корня $a + bi$