**Правительство Российской Федерации**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования   
"Национальный исследовательский университет   
"Высшая школа экономики"**

Факультет Экономики

**Программа дисциплины**

**«Динамическая оптимизация в экономике и финансах»**

для направления 080100.62 "Экономика" подготовки бакалавра

Автор программы:

Пильник Н.П., к.э.н., npilnik@hse.ru

Одобрена на заседании кафедры "Математической экономики и эконометрики» «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 20 г

Зав. кафедрой Г.Г. Канторович

Рекомендована секцией УМС [Введите название секции УМС] «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 20 г

Председатель [Введите И.О. Фамилия]

Утверждена УС факультета Экономики «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_20 г.

Ученый секретарь [Введите И.О. Фамилия] \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ [подпись]

Москва, 2013

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.*

# Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления FILLIN \\* MERGEFORMAT 080100.62 "Экономика" подготовки бакалавра, изучающих дисциплину «Динамическая оптимизация в экономике и финансах».

Программа разработана в соответствии с:

* Стандартом НИУ ВШЭ: https://www.hse.ru/data/2010/09/15/1224180539/econ.pdf;
* Образовательной программой направления FILLIN \\* MERGEFORMAT FILLIN \\* MERGEFORMAT 080100.62 "Экономика" подготовки бакалавра.
* Рабочим учебным планом университета по направлению FILLIN \\* MERGEFORMAT FILLIN \\* MERGEFORMAT 080100.62 "Экономика" подготовки бакалавра. утвержденным в 2013г.

# Цели освоения дисциплины

Целями дисциплины «Динамическая оптимизация в экономике и финансов» являются освоение обучающимися навыков формулировки и решения экономических задач оптимизации и динамики в рамках развитого аппарата математических моделей.

# Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

* Знать основные понятия оптимального управления, методы решения задач динамической оптимизации.
* Уметь применять стандартные методы и модели к решению экономических задач, сформулированных в терминах динамических задач и оптимального управления.
* Владеть основными принципами и методами численного и аналитического решения задач динамической оптимизации, навыками применения математических пакетов программ для решения задач на ПЭВМ*.*

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

| Компетенция | Код по ФГОС/ НИУ | Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата) | Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции |
| --- | --- | --- | --- |
| Общенаучная | ОНК-1 | Готовность использовать основные законы научных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в экономике | Посещение лекций, работа на семинарских занятиях (в том числе в компьютерных классах), выполнение домашних заданий, самостоятельная работа |
| Инструментальная | ИК-1 | Способность самостоятельно работать на компьютере с использованием современного  общего и профессионального прикладного ПО | Работа на семинарских занятиях в компьютерных классах, выполнение компьютерных домашних заданий |
| Социально-личностная и общекультурная | СЛК-1 | Владение культурой критического мышления, способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения | Все виды работы на лекциях и семинарах |
| Профессиональная в аналитической, научно-исследовательской деятельности | ПК-4 | Умение осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных экономических задач | Работа на семинарских занятиях (в том числе в компьютерных классах), выполнение домашних заданий, самостоятельная работа |
| Профессиональная в аналитической, научно-исследовательской деятельности | ПК-5 | Способность выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в  соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и  обосновать полученные выводы | Работа на семинарских занятиях (в том числе в компьютерных классах), выполнение домашних заданий, самостоятельная работа |
| Профессиональная в аналитической, научно-исследовательской деятельности | ПК-7 | Способность анализировать и интерпретировать данные отечественной и зарубежной статистики о социально-экономических процессах и явлениях, выявлять тенденции изменения социально-экономических показателей | Работа на семинарских занятиях (в том числе в компьютерных классах), выполнение домашних заданий, самостоятельная работа |
| Профессиональная в аналитической, научно-исследовательской деятельности | ПК-10 | Способность использовать для решения аналитических и исследовательских задач современные технические средства и информационные технологии | Работа на семинарских занятиях (в том числе в компьютерных классах), выполнение домашних заданий, самостоятельная работа |

# Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к циклу математических и естественно научных дисциплин и блоку дисциплин, обеспечивающих базовую профессиональную подготовку бакалавра экономики.

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

* Математический анализ
* Линейная алгебра
* Методы оптимальных решений
* Теория игр

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

* Микроэкономика
* Макроэкономика
* Динамические модели общего вычислимого равновесия
* Математическая экономика
* Модели финансовых рынков

# Тематический план учебной дисциплины

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Название темы | Всего часов | Аудиторные часы | | Самостоя­тельная работа |
| Лекции | Семинары |
| 1 | Вариационное исчисление. Уравнения Эйлера | 58 | 12 | 12 | 34 |
| 2 | Оптимальное управление. Принцип максимума Понтрягина | 48 | 8 | 8 | 32 |
| 3 | Динамическое программирование. Принцип Беллмана | 56 | 12 | 12 | 32 |
|  | Итого | 162 | 32 | 32 | 98 |

# Формы контроля знаний студентов

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Тип контроля | Форма контроля | Параметры | | |
| 1 | 2 |  |
| Текущий (неделя) | Контрольная работа | 8 |  | Письменная работа 120 минут |
| Домашнее задание |  | 6 | 6 компьютерных задач |
| Итоговый (модуль) | Экзамен |  | 2 | Письменная работа 120 минут |

# Содержание дисциплины

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | **Тема 1. Вариационное исчисление. Уравнения Эйлера** | Всего часов | Аудиторные часы | | Самостоя­тельная работа |
| Лекции | Семинары |
| 1 | Основные понятия динамической оптимизации. Метод вариации в задачах с неподвижными границами | 8 | 2 | 2 | 4 |
| 2 | Необходимые условия экстремума функционала. Уравнение Эйлера | 10 | 2 | 2 | 6 |
| 3 | Вариационные задачи с подвижными границами. Условие трансверсальности | 10 | 2 | 2 | 6 |
| 4 | Достаточные условия экстремума функционала | 10 | 2 | 2 | 6 |
| 5 | Условный экстремум. Функционал Лагранжа | 10 | 2 | 2 | 6 |
| 6 | Динамическая оптимизация стохастических процессов | 10 | 2 | 2 | 6 |
|  | Всего часов по теме: | 58 | 12 | 12 | 34 |

***Литература по теме 1:***

Основная:

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

Дополнительная:

1. Тракимус Ю.В. Основы вариационного исчисления в примерах и задачах: Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011.
2. Л. Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М. Эдиториал УРСС, 2000.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | **Тема 2. Оптимальное управление. Принцип максимума Понтрягина** | Всего часов | Аудиторные часы | | Самостоя­тельная работа |
| Лекции | Семинары |
| 1 | Фазовые координаты. Управляющие параметры. Общая задача оптимального управления | 14 | 2 | 2 | 10 |
| 2 | Функция Гамильтона. Вспомогательные переменные. Принцип максимума | 18 | 3 | 3 | 12 |
| 3 | Модель Рамсея: межвременное размещение ресурсов | 16 | 3 | 3 | 10 |
|  | Всего часов по теме: | 48 | 8 | 8 | 32 |

***Литература по теме 2:***

Основная:

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

Дополнительная:

1. Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. Оптимизация: теория, примеры, задачи. – М. Эдиториал УРСС, 2000.
2. Alpha C. Chiang. Elements of Dynamic Optimization. 1992.

Alpha C. Chiang. Elements of Dynamic Optimization. 1992.Alpha C. Chiang. Elements of Dynamic Optimization. 1992.Alpha C. Chiang. Elements of Dynamic Optimization. 1992.Alpha C. Chiang. Elements of Dynamic Optimization. 1992.Alpha C. Chiang. Elements of Dynamic Optimization. 1992.Конец формы

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | **Тема 3. Динамическое программирование. Принцип Беллмана** | Всего часов | Аудиторные часы | | Самостоя­тельная работа |
| Лекции | Семинары |
|  | Основные понятия задач динамического программирования. Уравнение Беллмана | 12 | 2 | 2 | 8 |
|  | Принцип Беллмана для задач в дискретном времени | 16 | 4 | 4 | 8 |
|  | Принцип Беллмана для задач в непрерывном времени | 12 | 2 | 2 | 8 |
|  | Экономические приложения. Стохастическая модель банка. Модель односекторной экономики с рынком труда | 16 | 4 | 4 | 8 |
|  | Всего часов по теме: | 56 | 12 | 12 | 32 |

***Литература по теме 3:***

Основная:

1. Беленький В.З. Оптимизационные модели экономической динамики: понятийный аппарат; одномерные модели. Центр. экон.-мат. ин-т. – М.: Наука, 2007.

Дополнительная:

1. Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. Оптимизация: теория, примеры, задачи. – М. Эдиториал УРСС, 2000.
2. Alpha C. Chiang. Elements of Dynamic Optimization. 1992.

# Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

## Тематика заданий текущего контроля (примерные задания)

1) Найти первую вариацию функционала .

Решение. Имеем:

Ответ:

2) Найти допустимую экстремаль функционала .

Оценив приращение функционала, определить, какой из экстремумов достигается на экстремали (максимум или минимум).

Решение.

.

Вывод: седловая точка – нет экстремума.

3) Найти допустимую экстремаль функционала .

Решение. Уравнение Эйлера: .

Из условия следует .

Из условия трансверсальности при закрепленном конечном времени и свободном правом конце (вертикальная конечная линия) следует: .

Ответ: .

4) Исследовать на экстремум функционал .

Решение: Поскольку подынтегральная функция не зависит от *t*, то из уравнения Эйлера следует:

.

. Из граничных условий находим: .

Экстремаль: . Условие Якоби выполняется. Центральное поле экстремалей: . Поскольку на кривых, близких к экстремали и при любых , то на экстремали достигается сильный минимум.

5) Исследовать на экстремум функционал .

Решение. Экстремаль y=t+2. Условие Якоби выполняется. Собственное поле экстремалей: y=x+C. Поскольку на экстремали, то достигается слабый минимум.

6) Найти экстремаль функционала

## Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

**1. Основы вариационного исчисления**

1.1. Метод вариаций в задачах с неподвижными границами.

1.1.1. Понятие функционала. Линейные функционалы.

1.1.2. Вариация и ее свойства. Непрерывность функционала. Слабый и строгий экстремум функционала.

1.1.3. Уравнение Эйлера.

1.1.4. Функционалы вида .

1.1.5. Функционалы вида . Уравнение Эйлера-Пуассона.

1.1.6. Функционалы вида . Уравнение Остроградского.

1.2. Вариационные задачи с подвижными границами. Условие трансверсальности.

1.3. Достаточные условия экстремума функционала.

1.4. Вариационные задачи на условный экстремум.

*1.5. Экономические приложения.*

1.5.1. Модель Эванса максимизации прибыли монополистом. Связь эластичности прибыли по цене со скоростью изменения цены.

1.5.2. Инфляция и безработица: динамическая модель.

1.5.3. Динамическая оптимизация в инвестиционных моделях.

1.5.4. Динамическая модель спроса фирмы на труд (модель Хаммермеша).

1.5.5. Экономика истощаемых ресурсов (модель Хотеллинга оптимального режима выработки ресурса). Консервация ресурсов.

1.5.6. Модель Рамсея: межвременное размещение ресурсов.

**2. Оптимальное управление. Принцип максимума**

2.1. Фазовые координаты. Управляющие параметры. Общая задача оптимального управления.

2.2. Функция Гамильтона. Вспомогательные переменные. Принцип максимума.

2.2.1. Динамическая модель фирмы, максимизирующей выручку от продаж (модель Леланда).

2.3. Связь с задачами вариационного исчисления.

## Примеры заданий промежуточного /итогового контроля

1. Имеется пять станков, которые должны быть распределены между тремя предприятиями. Заданы функции дохода предприятий в зависимости от количества выделенных станков:

Найти оптимальное распределение станков по предприятиям, при котором суммарный доход будет максимальным. Чему равен этот доход?

Решение.

2. Найти оптимальное управление *u*, фазовую траекторию *y* и вспомогательную переменную в задаче

Выяснить, выполнены ли достаточные условия максимума (условия Мангасаряна).

Решение.

1.*a*) Функция Гамильтона: . Из принципа максимума имеем: .

Уравнение для :

Условие трансверсальности:

Управление: .

Уравнение для фазовой переменной *y*: .

С учетом начального условия получим: .

Окончательно получим: .

Достаточные условия выполнены (функция F вогнута по совокупности переменных (*y,u*), а функция *f* линейна по ним).

3. Решить задачу №2 при условии .

4. Найти оптимальное управление и фазовую траекторию в задаче

Выяснить, выполнены ли достаточные условия максимума.

# Порядок формирования оценок по дисциплине

*Оценка по дисциплине (2 модуль – экзамен)*

*Онакопленный* = *0,6·Ок/р + 0,4·Одз*

*Одисциплина = 0,5·Оэкзамен +0,5·Онакопленный*

Способ округления результирующей оценки по учебной дисциплине – арифметический.

# Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

## Базовый учебник

Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

## Основная литература

Беленький В.З. Оптимизационные модели экономической динамики: понятийный аппарат; одномерные модели. Центр. экон.-мат. ин-т. – М.: Наука, 2007.

## Дополнительная литература

Тракимус Ю.В. Основы вариационного исчисления в примерах и задачах: Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011.

Л. Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М. Эдиториал УРСС, 2000.

Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. Оптимизация: теория, примеры, задачи. – М. Эдиториал УРСС, 2000.

Alpha C. Chiang. Elements of Dynamic Optimization. 1992.

## Программные средства

Для успешного освоения дисциплины, студент может использовать следующие программные средства: Excel, R, Maple.

## Дистанционная поддержка дисциплины

Для взаимодействия со студентами создан Блог <http://pokrovka11.wordpress.com/>

В данном блоге выложены

* Электронные версии задачников
* Варианты домашних заданий

При проведении контрольных работ, вывешиваются их результаты.

# Материально-техническое обеспечение дисциплины

Часть семинарских занятий проходит в компьютерных классах с использованием компьютеров и проектора.