

Имя, фамилия и номер группы:

.....

1. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f2. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f3. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f4. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f5. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f6. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f7. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f8. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f9. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f10. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f11. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f12. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f13. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f14. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f15. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f16. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f17. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f18. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f19. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f20. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f21. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f22. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f23. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f24. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f25. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f26. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f27. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Удачи!

Имя, фамилия и номер группы:

.....

1. Проверяется гипотеза  $H_0: \theta = \gamma$  против альтернативной гипотезы  $H_a: \theta \neq \gamma$ , где  $\theta$  и  $\gamma$  — два неизвестных параметра.

Выберите верное утверждение о распределении статистики отношения правдоподобия,  $LR$ .

- |   |   |
|---|---|
| a) если верна $H_a$ , то $LR \sim \chi^2_2$ | d) и при $H_0$ , и при $H_a$ , $LR \sim \chi^2_2$ |
| b) если верна $H_0$ , то $LR \sim \chi^2_1$ | e) и при $H_0$ , и при $H_a$ , $LR \sim \chi^2_1$ |
| c) нет верного ответа                       | f) если верна $H_a$ , то $LR \sim \chi^2_1$       |

2. Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — выборка объема  $n$  из некоторого распределения с конечным математическим ожиданием.

Выберите несмещенную и состоятельную оценку математического ожидания.

- |                                      |  |  |
|--------------------------------------|--|--|
| a) $\frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2$ | c) $\frac{X_1}{2n} + \frac{X_2 + \dots + X_{n-2}}{n-2} + \frac{X_n}{2n}$ | e) нет верного ответа  |
| b) $\frac{X_1 + X_2}{2}$             | d) $\frac{X_1}{2n} + \frac{X_2 + \dots + X_{n-2}}{n-1} + \frac{X_n}{2n}$ | f) $\frac{X_1}{2n} + \frac{X_2 + \dots + X_{n-1}}{n-2} - \frac{X_n}{2n}$ |

3. Известно, что  $\mathbb{E}(\hat{a}) = 0.6a + 3$ , функция правдоподобия регулярна и информация Фишера равна  $I_F(a) = 1/a^2$ .

Найдите теоретическую нижнюю границу  $\text{Var}(\hat{a})$ .

- |           |              |                       |
|-----------|--------------|-----------------------|
| a) $9a^2$ | c) $0.36a^2$ | e) $0.6a^2$           |
| b) $3a^2$ | d) $a^2$     | f) нет верного ответа |

4. Длины катетов в сантиметрах прямоугольного треугольника являются модулями независимых стандартных нормальных случайных величин.

Какую пороговую длину гипотенуза этого треугольника превышает с вероятностью 0.05?

- |                       |         |         |
|-----------------------|---------|---------|
| a) нет верного ответа | c) 4.61 | e) 0.1  |
| b) 0.21               | d) 5.99 | f) 0.68 |

5. Величины  $X_i$  независимы и одинаково распределены с математическим ожиданием  $\mathbb{E}(X_i) = 2a + 9$ .

По выборке из 500 наблюдений оказалось, что  $\bar{X} = 15$ .

Найдите оценку  $\hat{a}$  методом моментов.

- |        |                       |        |
|--------|-----------------------|--------|
| a) 3.5 | c) 3                  | e) 4.5 |
| b) 4   | d) нет верного ответа | f) 2.5 |

6. Величины  $X$  и  $Y$  одинаково распределены с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 2. Вектор  $(X, Y)$  имеет многомерное нормальное распределение с корреляцией 0.7.

Найдите  $\mathbb{E}(Y \mid X = 3)$ .



- c) Машенькины интервалы всегда шире Вовочкиных
- d) Машенькины интервалы бывают как шире, так и уже Вовочкиных
- e) Машенькины интервалы всегда левее Вовочкиных
- f) Машенькины интервалы всегда уже Вовочкиных

12. Теоретическая информация Фишера о параметре  $a$  описывается функцией  $I_F(a)$ , при этом  $a = 2b$ . Какой функцией описывается теоретическая информация Фишера о параметре  $b$ ?

- a)  $2I_F(2b)$
- b)  $4I_F(2b)$
- c)  $2I_F(b/2)$
- d) нет верного ответа
- e)  $I_F(2b)$
- f)  $2I_F(b)$

13. Величины  $X_i$  независимы и равномерны на отрезке  $[-a; 2a]$ .

Оцените  $a$  методом максимального правдоподобия по выборке из трех наблюдений: -4, -2, 14.

- a) 6
- b) нет верного ответа
- c) 8
- d) 7.5
- e) 7
- f) 6.5

14. Выберите верное утверждение о предпосылках теста Стьюдента на равенство математического ожидания величин  $X_1, \dots, X_n$  некоторой константе  $\mu_0$ .

- a) величины  $X_i$  могут быть распределены произвольно, но величина  $\bar{X}$  должна быть нормально распределённой
- b) величины  $X_i$  могут быть распределены произвольно, но должны быть независимы
- c) количество наблюдений должно быть больше 30
- d) величины  $X_i$  должны быть нормально распределёнными
- e) нет верного ответа
- f) константа  $\mu_0$  должна быть больше нуля

15. Отличница Машенька получает только 8, 9 или 10. За все годы обучения Маша получила 20 восьмёрок, 50 девяток и 20 десятков.

Найдите значение статистики Пирсона для проверки гипотезы о том, все отличные оценки имеют равную вероятность.

- a) 20
- b) 40
- c) 60
- d) нет верного ответа
- e) 70
- f) 30

16. Геродот Геликарнасский проверяет гипотезу  $H_0 : \mu = 2$ . Лог-функция правдоподобия имеет вид  $\ell(\mu, \nu) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \nu - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\nu}$ .

Найдите оценка максимального правдоподобия для  $\nu$  при предположении, что  $H_0$  верна.

- a)  $\frac{\sum x_i^2 - 4 \sum x_i}{n}$
- b)  $\frac{\sum x_i^2 - 4 \sum x_i}{n} + 2$
- c) нет верного ответа
- d)  $\frac{\sum x_i^2 - 4 \sum x_i + 2}{n}$
- e)  $\frac{\sum x_i^2 - 4 \sum x_i + 4}{n}$
- f)  $\frac{\sum x_i^2 - 4 \sum x_i}{n} + 4$

17. Величина  $X$  имеет  $t$ -распределение с 2 степенями свободы.

Какое распределение имеет величина  $Y = X^2$ ?

- |              |              |                       |
|--------------|--------------|-----------------------|
| a) $F_{1,2}$ | c) $F_{2,1}$ | e) $\chi^2_2$         |
| b) $F_{2,2}$ | d) $t_4$     | f) нет верного ответа |

18. Кот Матроскин поймал 50 рыб. Совсем маленьких, весом до 1 кг, он отпустил. Оставшиеся три рыбы весили 2 кг, 3 кг и 4 кг.

Найдите значение выборочной функции распределения массы пойманных рыб в точке 2.5 кг.

- |         |                       |         |
|---------|-----------------------|---------|
| a) 0.92 | c) 0.94               | e) 0.9  |
| b) 0.88 | d) нет верного ответа | f) 0.96 |

19. По 100 наблюдениям получена оценка метода максимального правдоподобия,  $\hat{\theta} = 20$ , также известны значения лог-функции правдоподобия  $\ell(20) = -10$  и  $\ell(0) = -50$ .

С помощью критерия отношения правдоподобия,  $LR$ , проверьте гипотезу  $H_0: \theta = 0$  против  $H_0: \theta \neq 0$  на уровне значимости 5%.

- |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $LR = 40$ , $H_0$ не отвергается | d) Критерий неприменим              |
| b) нет верного ответа               | e) $LR = 60$ , $H_0$ не отвергается |
| c) $LR = 80$ , $H_0$ отвергается    | f) $LR = 40$ , $H_0$ отвергается    |

20. Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & \text{при } x \geq 0, \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases},$$

где  $\theta > 0$  — неизвестный параметр распределения.

Найдите информацию Фишера о параметре  $\theta$ , заключенную в трёх наблюдениях случайной выборки.

- |               |                 |                       |
|---------------|-----------------|-----------------------|
| a) $\theta$   | c) $1/\theta$   | e) нет верного ответа |
| b) $\theta^2$ | d) $3/\theta^2$ | f) $\theta^2/3$       |

21. По случайной выборке размером 400 студентов из всех студентов Вышки доля любителей кричать «Халява приди» равна 0.5.

Найдите правую границу 95%-й асимптотического доверительного интервала для вероятности того, что случайно выбираемый студент Вышки любит кричать «Халява приди».

- |          |          |                       |
|----------|----------|-----------------------|
| a) 0.649 | c) 0.599 | e) нет верного ответа |
| b) 0.624 | d) 0.574 | f) 0.549              |

22. Выберите верное утверждение о связи уровня значимости  $\alpha$  и  $P$ -значения.

- a)  $P$ -значение монотонно растёт с ростом  $\alpha$
- b)  $P$ -значение случайно, ожидание от него монотонно растёт с ростом  $\alpha$
- c)  $\alpha$  и  $P$ -значение не связаны
- d) нет верного ответа
- e)  $P$ -значение случайно, ожидание от него монотонно падает с ростом  $\alpha$
- f)  $P$ -значение монотонно падает с ростом  $\alpha$

23. Известно, что величины  $X_1, \dots, X_{200}$  независимы и имеют экспоненциальное распределение с интенсивностью  $\lambda$ , и  $\ln L(\lambda)$  — логарифмическая функция правдоподобия.

Найдите  $\mathbb{E} \left( \frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} \right)$ .

- a)  $200/\lambda$
- b)  $200\lambda$
- c) нет верного ответа
- d)  $200/\lambda^2$
- e)  $200\lambda^2$
- f) 0

24. Величины  $X_i$  независимы и распределены по Пуассону с параметром интенсивности  $\lambda$ .

Выберите несмещённую оценку для  $\mathbb{E}(X_i)$ .

- a)  $\sum_{i=1}^n X_i^2/n$
- b) нет верного ответа
- c)  $\sum_{i=1}^n X_i^2/(n-1)$
- d)  $\sum_{i=1}^n X_i/(n+1)$
- e)  $\sum_{i=1}^n X_i/(n-1)$
- f)  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/(n-1)$

25. Исследователь Вовочка при проверке гипотезы о равенстве математического ожидания константе по ошибке вместо  $t$ -распределения использует стандартное нормальное.

Как изменяются при этом вероятность ошибки первого рода  $\alpha$  и ошибки второго рода  $\beta$ ?

- a)  $\alpha$  падает,  $\beta$  изменяется непредсказуемо
- b)  $\alpha$  растёт,  $\beta$  растёт
- c) нет верного ответа
- d)  $\alpha$  падает,  $\beta$  падает
- e)  $\alpha$  растёт,  $\beta$  падает
- f)  $\alpha$  падает,  $\beta$  растёт

26. Исследователь Винни-Пух приступил к новому исследованию.

Нулевая гипотеза состоит в том, что количество мёда одинаково экспоненциально распределено у всех пчёл с параметром  $\lambda$ . Альтернативная гипотеза состоит в том, что параметр  $\lambda$  отличается у правильных и неправильных пчёл.

Максимум правдоподобия при верной  $H_0$  равен  $\exp(-9)$ . Максимум правдоподобия без ограничений равен  $\exp(-2)$ .

Найдите значение статистики отношения правдоподобия.

- a) 12
- b) 17
- c) 13
- d) нет верного ответа
- e) 14
- f) 18

27. Оценка  $\hat{a}_n$  неизвестного параметра  $a$  асимптотически нормальная и несмещённая. По выборке из 300 наблюдений оказалось, что  $\hat{a}_n = 5$  с оценкой дисперсии  $\widehat{\text{Var}}(\hat{a}_n) = 4$ .

Найдите правую границу симметричного двустороннего 95%-го доверительного интервала для параметра  $a$ .

a) 18.92

c) нет верного ответа

e) 16.92

b) 10.92

d) 20.92

f) 8.92