

Имя, фамилия и номер группы:

.....

1. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
2. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
3. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
4. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
5. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
6. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
7. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
8. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
9. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
10. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
11. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
12. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
13. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
14. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

15. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
16. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
17. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
18. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
19. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
20. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
21. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
22. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
23. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
24. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
25. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
26. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f
27. ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Удачи!

Имя, фамилия и номер группы:

.....

1. Величины X и Y одинаково распределены с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 7. Вектор (X, Y) имеет многомерное нормальное распределение с корреляцией 0.4.

Найдите $\mathbb{E}(Y \mid X = 2)$.

- a) 0.8 c) 0 e) 0.4
b) нет верного ответа d) 0.84 f) 5.88

2. Пусть X_1, \dots, X_n — выборка объема n из некоторого распределения с конечным математическим ожиданием.

Выберите несмещенную и состоятельную оценку математического ожидания.

- a) $\frac{X_1}{2n} + \frac{X_2 + \dots + X_{n-2}}{n-1} + \frac{X_n}{2n}$ c) нет верного ответа e) $\frac{X_1}{2n} + \frac{X_2 + \dots + X_{n-1}}{n-2} - \frac{X_n}{2n}$
b) $\frac{X_1}{2n} + \frac{X_2 + \dots + X_{n-2}}{n-2} + \frac{X_n}{2n}$ d) $\frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2$ f) $\frac{X_1 + X_2}{2}$

3. Пусть X_1, \dots, X_n — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & \text{при } x \geq 0, \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases},$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр распределения.

Найдите информацию Фишера о параметре θ , заключенную в трёх наблюдениях случайной выборки.

- a) $1/\theta$ c) $\theta^2/3$ e) $3/\theta^2$
b) θ^2 d) нет верного ответа f) θ

4. Величина X имеет F -распределение с 2 и 11 степенями свободы.

Какое распределение имеет величина $Y = X^{-1}$?

- a) χ_{13}^2 c) $F_{11,2}$ e) нет верного ответа
b) $F_{1/11,1/2}$ d) $F_{2,11}$ f) $F_{1/2,1/11}$

5. Каждое утро в 8:00 Иван Андреевич Крылов, либо завтракает, либо уже позавтракал. В это же время кухарка либо заглядывает к Крылову, либо нет.

По таблице сопряженности вычислите статистику χ^2 Пирсона для тестирования гипотезы о том, что визиты кухарки не зависят от того, позавтракал ли уже Крылов или нет.

	Кухарка заходит	Кухарка не заходит
Крылов завтракает	200	40
Крылов уже позавтракал	25	100

- a) 39 c) нет верного ответа e) 139
b) 100 d) 79 f) 179

6. По случайной выборке размером 100 студентов из всех студентов Вышки доля любителей кричать «Халява приди» равна 0.5.

Найдите правую границу 95%-й асимптотического доверительного интервала для вероятности того, что случайно выбираемый студент Вышки любит кричать «Халява приди».

- a) нет верного ответа c) 0.748 e) 0.798
b) 0.698 d) 0.598 f) 0.648

7. Проверяется гипотеза $H_0: \theta = \gamma$ против альтернативной гипотезы $H_a: \theta \neq \gamma$, где θ и γ — два неизвестных параметра.

Выберите верное утверждение о распределении статистики отношения правдоподобия, LR .

- a) если верна H_a , то $LR \sim \chi_2^2$ d) если верна H_0 , то $LR \sim \chi_1^2$
b) и при H_0 , и при H_a , $LR \sim \chi_1^2$ e) нет верного ответа
c) если верна H_a , то $LR \sim \chi_1^2$ f) и при H_0 , и при H_a , $LR \sim \chi_2^2$

8. Исследователи Машенька и Вовочка, не зная друг о друге, каждый день по всем правилам статистики строят 95%-й доверительные интервалы для математического ожидания μ .

Выборка у них общая на двоих, и каждый день — новая. При этом Машенька знает истинную дисперсию, а Вовочка — нет. Все наблюдения одинаково нормально распределены и независимы.

Выберите верное утверждение.

- a) Машенькины интервалы всегда шире Вовочкиных
b) Машенькины интервалы всегда левее Вовочкиных
c) Машенькины интервалы бывают как шире, так и уже Вовочкиных
d) Машенькины интервалы всегда уже Вовочкиных
e) нет верного ответа
f) Машенькины интервалы всегда правее Вовочкиных

9. Величины X_i независимы и распределены по Пуассону с параметром интенсивности λ .

Выберите несмещённую оценку для $\mathbb{E}(X_i)$.

- a) $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (n - 1)$ c) $\sum_{i=1}^n X_i / (n + 1)$ e) $\sum_{i=1}^n X_i / (n - 1)$
b) нет верного ответа d) $\sum_{i=1}^n X_i^2 / (n - 1)$ f) $\sum_{i=1}^n X_i^2 / n$

10. Исследователь Винни-Пух приступил к новому исследованию.

Нулевая гипотеза состоит в том, что количество мёда одинаково экспоненциально распределено у всех пчёл с параметром λ . Альтернативная гипотеза состоит в том, что параметр λ отличается у правильных и неправильных пчёл.

Максимум правдоподобия при верной H_0 равен $\exp(-9)$. Максимум правдоподобия без ограничений равен $\exp(-1)$.

Найдите значение статистики отношения правдоподобия.

- | | | |
|-----------------------|-------|-------|
| a) 14 | c) 20 | e) 15 |
| b) нет верного ответа | d) 16 | f) 19 |

11. Оценка \hat{a}_n неизвестного параметра a асимптотически нормальная и несмещённая. По выборке из 300 наблюдений оказалось, что $\hat{a}_n = 4$ с оценкой дисперсии $\widehat{\text{Var}}(\hat{a}_n) = 4$.

Найдите правую границу симметричного двустороннего 95%-го доверительного интервала для параметра a .

- | | | |
|----------|-----------------------|----------|
| a) 11.92 | c) нет верного ответа | e) 15.92 |
| b) 7.92 | d) 13.92 | f) 19.92 |

12. Известно, что $\mathbb{E}(\hat{a}) = 0.7a + 3$, функция правдоподобия регулярна и информация Фишера равна $I_F(a) = 1/a^2$.

Найдите теоретическую нижнюю границу $\text{Var}(\hat{a})$.

- | | | |
|--------------|-----------------------|-----------|
| a) $0.7a^2$ | c) a^2 | e) $3a^2$ |
| b) $0.49a^2$ | d) нет верного ответа | f) $9a^2$ |

13. Отличница Машенька получает только 8, 9 или 10. За все годы обучения Маша получила 60 восьмёрок, 30 девяток и 40 десятков.

Найдите значение статистики Пирсона для проверки гипотезы о том, все отличные оценки имеют равную вероятность.

- | | | |
|----------|-----------------------|----------|
| a) 40.77 | c) нет верного ответа | e) 60.77 |
| b) 70.77 | d) 10.77 | f) 50.77 |

14. Величины X и Y одинаково распределены с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 5. Вектор (X, Y) имеет многомерное нормальное распределение с корреляцией 0.5.

Найдите $\text{Var}(Y \mid X = 2)$.

- | | | |
|---------|-----------------------|------|
| a) 3.75 | c) 0.75 | e) 1 |
| b) 0.5 | d) нет верного ответа | f) 5 |

15. Геродот Геликарнасский проверяет гипотезу $H_0 : \mu = 2$. Лог-функция правдоподобия имеет вид $\ell(\mu, \nu) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \nu - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\nu}$.

Найдите оценка максимального правдоподобия для ν при предположении, что H_0 верна.

- a) $\frac{\sum x_i^2 - 4 \sum x_i}{n} + 4$ c) $\frac{\sum x_i^2 - 4 \sum x_i + 2}{n}$ e) $\frac{\sum x_i^2 - 4 \sum x_i}{n} + 2$
b) нет верного ответа d) $\frac{\sum x_i^2 - 4 \sum x_i + 4}{n}$ f) $\frac{\sum x_i^2 - 4 \sum x_i}{n}$

16. Длины катетов в сантиметрах прямоугольного треугольника являются модулями независимых стандартных нормальных случайных величин.

Какую пороговую длину гипотенуза этого треугольника превышает с вероятностью 0.05?

- a) 0.1 c) нет верного ответа e) 0.68
b) 5.99 d) 4.61 f) 0.21

17. Известно, что величины X_1, \dots, X_{300} независимы и имеют экспоненциальное распределение с интенсивностью λ , и $\ln L(\lambda)$ — логарифмическая функция правдоподобия.

Найдите $\mathbb{E} \left(\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} \right)$.

- a) нет верного ответа c) 0 e) $300\lambda^2$
b) 300λ d) $300/\lambda$ f) $300/\lambda^2$

18. Кот Матроскин поймал 20 рыб. Совсем маленьких, весом до 1 кг, он отпустил. Оставшиеся три рыбы весили 2 кг, 3 кг и 4 кг.

Найдите значение выборочной функции распределения массы пойманных рыб в точке 3.5 кг.

- a) 0.8 c) 0.95 e) 0.75
b) 0.85 d) 0.9 f) нет верного ответа

19. Выберите верное утверждение о предпосылках теста Стьюдента на равенство математического ожидания величин X_1, \dots, X_n некоторой константе μ_0 .

- a) количество наблюдений должно быть больше 30
b) величины X_i могут быть распределены произвольно, но величина \bar{X} должна быть нормально распределённой
c) величины X_i могут быть распределены произвольно, но должны быть независимы
d) нет верного ответа
e) величины X_i должны быть нормально распределёнными
f) константа μ_0 должна быть больше нуля

20. Величины X_i независимы и равномерны на отрезке $[-a; 2a]$.

Оцените a методом максимального правдоподобия по выборке из трех наблюдений: -7, -5, 11.

- a) 8 c) 7 e) нет верного ответа
b) 7.5 d) 6.5 f) 6

21. Величина X имеет t -распределение с 5 степенями свободы.

Какое распределение имеет величина $Y = X^2$?

- | | | |
|--------------|--------------|-----------------------|
| a) $F_{1,5}$ | c) $F_{5,1}$ | e) нет верного ответа |
| b) $F_{5,5}$ | d) t_{25} | f) χ_5^2 |

22. Выберите верное утверждение о связи уровня значимости α и P -значения.

- a) P -значение случайно, ожидание от него монотонно растёт с ростом α
- b) α и P -значение не связаны
- c) P -значение случайно, ожидание от него монотонно падает с ростом α
- d) P -значение монотонно растёт с ростом α
- e) нет верного ответа
- f) P -значение монотонно падает с ростом α

23. Исследователь Вовочка при проверке гипотезы о равенстве математического ожидания константе по ошибке вместо t -распределения использует стандартное нормальное.

Как изменяются при этом вероятность ошибки первого рода α и ошибки второго рода β ?

- | | |
|------------------------------------|---|
| a) α растёт, β растёт | d) α падает, β растёт |
| b) α падает, β падает | e) α падает, β изменяется непредсказуемо |
| c) α растёт, β падает | f) нет верного ответа |

24. По 100 наблюдениям получена оценка метода максимального правдоподобия, $\hat{\theta} = 20$, также известны значения лог-функции правдоподобия $\ell(20) = -10$ и $\ell(0) = -50$.

С помощью критерия отношения правдоподобия, LR , проверьте гипотезу $H_0: \theta = 0$ против $H_0: \theta \neq 0$ на уровне значимости 5%.

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $LR = 40$, H_0 отвергается | d) $LR = 60$, H_0 не отвергается |
| b) $LR = 40$, H_0 не отвергается | e) $LR = 80$, H_0 отвергается |
| c) Критерий неприменим | f) нет верного ответа |

25. Рассмотрим хи-квадрат случайную величину с n степенями свободы. Укажите множество всех возможных значений, принимаемых данной случайной величиной с ненулевой вероятностью:

- | | | |
|---|-----------------------|-------------------------|
| a) $\{x \in R : \sum_{i=1}^n x^2 = 1\}$ | c) нет верного ответа | e) $\{0, 1, \dots, n\}$ |
| b) $[0, n^2]$ | d) $[0, n]$ | f) $(0, \infty)$ |

26. Теоретическая информация Фишера о параметре a описывается функцией $I_F(a)$, при этом $a = 4b$. Какой функцией описывается теоретическая информация Фишера о параметре b ?

- | | | |
|-----------------------|----------------|---------------|
| a) $I_F(4b)$ | c) $16I_F(4b)$ | e) $4I_F(4b)$ |
| b) нет верного ответа | d) $4I_F(b/4)$ | f) $4I_F(b)$ |

27. Величины X_i независимы и одинаково распределены с математическим ожиданием $\mathbb{E}(X_i) = 2a + 1$.

По выборке из 500 наблюдений оказалось, что $\bar{X} = 18$.

Найдите оценку \hat{a} методом моментов.

a) 9.5

b) 10

c) нет верного ответа

d) 9

e) 8

f) 8.5