1. Про законы распределения:

   а) Василий спроецировал $n$-мерный стандартный нормальный вектор $u$ на линейную оболочку независимых векторов $a$, $b$ и $c$. Квадрат длины проекции назовём буквой $Z$. Как распределена величина $Z$?

   б) Далее Василий спроецировал $u$ на линейную оболочку векторов $a$ и $b$. Квадрат длины проекции назовём буквой $W$. Как распределена величина $W$?

   в) Неугомонный Василий спроецировал $u$ на линейную оболочку векторов $d$ и $e$. Вектора $d$ и $e$ независимы и ортогональны $a$, $b$ и $c$. Квадрат длины проекции назовём буквой $Q$. Как распределена величина $Q$?

   г) Какое известное распределение можно получить из $Q/Z$? Как конкретно его получить?

   д) Какое известное распределение можно получить из $W/Z$? Как конкретно его получить?

2. Рассмотрим модель множественной регрессии, $y = X\beta + u$, где регрессоры детерминистические, а $u \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2 \cdot I)$. Величина $\sigma^2$ известна. Мы хотим проверить гипотезу $H_0$: $\beta = 0$.

   а) Выведите формулы для статистик $W$, $LR$, $LM$.

   б) Сравните эти статистики между собой.

3. Рассмотрим модель множественной регрессии, $y = X\beta + u$, где регрессоры детерминистические, а $u \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2 \cdot I)$. Величина $\sigma^2$ неизвестна и тоже оценивается. Мы хотим проверить гипотезу $H_0$: $\beta = 0$.

   а) Выведите формулы для статистик $W$, $LR$, $LM$.

   б) Сравните эти статистики между собой.

4. Сэр Томас Байес в 18 веке решил задачу, которая на современном языке формулируется так:

   Величина $R$ имеет равномерное распределение на отрезке $[0; 1]$. Мы изготавливаем монетку, выпадающую орлом с вероятностью $R$. Затем подбрасываем её $n$ раз. Из этих $n$ раз оказывается $X$ орлов и $Y$ решек.

   а) Как выглядит условная плотность величины $R$ при известных $X$ и $Y$ с точностью до константы?

   б) Какова условная вероятность того, что монетка выпадет орлом, при известных $X$ и $Y$?

   Хинт: какое там есть распределение-то на отрезке $[0; 1]$? А тут ещё две известных величины, $X$ и $Y$ завалялись :)

5. Вспомнив Матрицу-Мать-Всех-Регрессий, докажите, что в регрессии

   $$\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_x x_i + \hat{\beta}_z z_i + \hat{\beta}_w w_i$$

   величину $R^2$ можно разложить в сумму:

   $$R^2 = \hat{\beta}_x \frac{\mathrm{sCov}(y, x)}{\mathrm{sVar}(y)} + \hat{\beta}_z \frac{\mathrm{sCov}(y, z)}{\mathrm{sVar}(y)} + \hat{\beta}_w \frac{\mathrm{sCov}(y, w)}{\mathrm{sVar}(y)}$$

6. Посмотрим, кто прорешал первую кр :)

   Докажите, что в методе главных компонент с масштабированием переменных средняя величина $R^2$ по всем парным регрессиям исходных переменных на первую главную компоненту равна наибольшему сингулярному значению матрицы исходных переменных.

7. Величины $U_1$ и $U_2$ независимы и равномерны $U[0;1]$. Рассмотрим пару величин $Y_1 = R \cdot \cos\alpha$, $Y_2 = R \cdot \sin\alpha$, где $R = \sqrt{-2\ln U_1}$, а $\alpha = 2\pi U_2$.

   а) Выпишите дифференциальную форму для пары $U_1$, $U_2$;

   б) Выпишите дифференциальную форму для пары $Y_1$, $Y_2$;

   в) Найдите совместный закон распределения $Y_1$ и $Y_2$;

   г) Верно ли, что $Y_1$ и $Y_2$ независимы?

   д) Как распределены $Y_1$ и $Y_2$ по отдельности?

8. Эта задача посвящена доказательству неравенства Крамера-Рао. Суть его в том, что если мы возьмём любую несмещённую оценку, то её дисперсия будет не меньше некоторой границы. А именно, если $\hat{a}$ — любая несмещённая оценка вектора $a$, то матрица $M$,

$$M = \mathrm{Var}(s(a)) \cdot \mathrm{Var}(\hat{a}) - I_{k\times k}$$

   неотрицательно определена. В этой задаче $\hat{a}$ — произвольная несмещённая оценка, не обязательно равная $\hat{a}_{ML}$! Как обычно, $s(a)$ — градиент функции правдоподобия в истинной точке.

   а) Вспомните, чему равно $\mathrm{E}(s(a))$.

   б) Найдите скаляры $\mathrm{Cov}\left(\hat{a}_1, \frac{\partial \ell}{\partial a_1}\right)$, $\mathrm{Cov}\left(\hat{a}_1, \frac{\partial \ell}{\partial a_2}\right)$ и матрицу $\mathrm{Cov}\left(\hat{a}, s(a)\right)$.

   в) Рассмотрим два произвольных случайных вектора $r$ и $s$ и два вектора констант подходящей длины $\alpha$ и $\beta$. Найдите минимум функции $f(\alpha,\beta) = \mathrm{Var}(\alpha^T r + \beta^T s)$ по $\beta$. Выпишите явно $\beta^*(\alpha)$ и $f^*(\alpha)$.

   г) Докажите, что для произвольных случайных векторов положительно определена матрица

$$\mathrm{Var}(r) - \mathrm{Cov}(r,s)\,\mathrm{Var}^{-1}(s)\,\mathrm{Cov}(s,r)$$

   д) Завершите доказательство векторного неравенства Крамера-Рао.