1. Исследователь Вениамин наблюдает стационарный процесс y_t с $\mathbb{C}\mathrm{ov}(y_t, u_{t+h}) = 0$ при $h > 0$ и уравнением
$$y_t = \alpha u_{t-1} + u_t,$$
где u_t — ненаблюдаемый белый шум с $\mathbb{E}(u_t) = 0$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(u_t) = \sigma^2$ и $\mathbb{C}\mathrm{ov}(u_t, u_{t+h}) = 0$ при $h > 0$.

   У Вениамина есть три наблюдения, y_1, y_2, y_3.

   а) Найдите ковариационную матрицу вектора $y = (y_1, y_2, y_3)$;

   б) Предполагая совместную нормальность u_t, выпишите логарифмическую функцию правдоподобия для оценки данной модели.

   в) Для $\alpha = 1$ постройте автокорреляционную и частную автокорреляционную функцию.

2. Рассмотрим центрированные вектора y и x_1, x_2, ..., x_k. Существует разложение R^2 в регрессии y на все (x_j):
$$\hat{\beta}_1\hat{\gamma}_1 + \hat{\beta}_2\hat{\gamma}_2 + \ldots + \hat{\beta}_k\hat{\gamma}_k = R^2,$$
где $\hat{\beta}_j$ — это коэффициент перед x_j в регрессии y на все (x_j), и $\hat{\gamma}_j$ — коэффициент в регрессии x_j на y.

   Некоторые авторы склонны интепретировать это как вклад каждого фактора в R^2. Осознавая спорность этой интерпретации, докажите данное разложение.

   Хинт-вопрос: что получится если j-ую строку обратной матрицы помножить на j-ый столбец исходной? Осталось только вспомнить, что там, в этих матрицах :)

3. Во многих учебниках пишут, что процесс $y_t = 2y_{t-1} + u_t$ нестационарный. Давайте разберёмся и аккуратнее рассмотрим уравнение
$$y_t = 2y_{t-1} + u_t,$$
где u_t — ненаблюдаемый белый шум с $\mathbb{E}(u_t) = 0$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(u_t) = \sigma^2$ и $\mathbb{C}\mathrm{ov}(u_t, u_{t+h}) = 0$ при $h > 0$.

   а) Приведите пример y_0 такого, что получающийся процесс y_t будет нестационарным.

   б) Постройте явно стационарный y_t, удовлетворяющий данному уравнению. То есть выразите y_t через белый шум (u_t).

   в) Выполнено ли для построенного примера условие $\mathbb{C}\mathrm{ov}(y_t, u_{t+h}) = 0$ при $h > 0$?

   г) Чему в построенном примере равно y_0?

4. Рассмотрим задачу логистической регрессии
$$\begin{cases} y_i^* = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + u_i; \\ y_i = \begin{cases} 1, \text{ если } y_i^* \geq 0; \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \end{cases}$$

   а) Выпишите функцию правдоподобия для данной модели;

   б) Найдите квадратичную аппроксимацию функции правдоподобия в окрестности $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$;

   в) Какие оценки $\hat{\beta}$ получатся, если максимизировать квадратичную аппроксимацию функции правдоподобия?

5. Величины X_1, X_2, ...независимы и нормальны $\mathcal{N}(0;\sigma^2)$. Известно, что по 1000 наблюдений оказалось, что $\sum X_i^2 = 1100$.

   а) Постройте оценку $\hat{\sigma}^2$ методом максимального правдоподобия;

   б) Проведите LM, LR и тест Вальда для гипотезы H_0: $\sigma^2 = 1$ на уровне значимости $\alpha = 0.05$.

6. Рассмотрим классическую задачу линейной регрессии $y = X\beta + u$ с нормальными ошибками $u_i \sim \mathcal{N}(0;\sigma^2)$. Для удобства будем считать, что единичный столбец отсутствует, а все регрессоры предварительно центрированы.

   а) Выведите формулу для LM, LR и теста Вальда для гипотезы H_0: $\beta = 0$.

   б) Какая статистика скрывается за формулой nR^2?

   в) На какую из полученных формул больше всего похожа F-статистика для проверки данной гипотезы? В чём состоит отличие?

7. Заброшенный в глубокий тыл противника майор Пронин в целях конспирации строит только простейшие регрессии вида $\hat{y}_i = \hat{\beta}x_i$.

   а) Сколько конспиративных регрессий ему придётся построить чтобы оценить все коэффициенты модели $y_i = \beta_1 x_i + \beta_2 z_i + \beta_3 w_i$.

   б) Сформулируйте и докажите теорему Фриша-Во-Ловела алгебраически в общем виде.