1. Найдите SVD-разложение матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. По 200 наблюдениям эконометресса Аглая оценила две модели.

   Модель А:
   $$\hat{y}_i = \underset{(1.2)}{3.4} + \underset{(3.2)}{1.7} x_i, \quad R^2 = 0.8$$

   Модель Б:
   $$\hat{y}_i = \underset{(1.7)}{3.1} + \underset{(3.3)}{1.8} x_i + \underset{(1.9)}{2.1} z_i + \underset{(2.2)}{3.8} w_i, \quad R^2 = 0.9$$

   В скобках указаны стандартные ошибки оценок коэффициентов.

   а) Для модели А постройте 99%-й доверительный интервал для коэффициента β_x.

   б) Сравните модель А и модель Б с помощью подходящего теста при уровне значимости 1%. Аккуратно сформулируйте H_0 и H_a.

3. Рассмотрим метод главных компонент с центрированием исходных переменных. Докажите, что сумма выборочных дисперсий всех главных компонент равна сумме выборочных дисперий всех исходных переменных.

4. Истинная зависимость имеет вид $y = Z\beta + u$, $\mathrm{E}(u) = 0$, $\mathrm{Var}(u) = \sigma^2 \cdot I$. Эконометресса Аглая не знает, что y зависит от Z, и, по привычке, строит регрессию на X, то есть $\hat{y} = X\hat{\beta}$. Аглая использует обычный метод наименьших квадратов.

   Найдите $\mathrm{Var}(\hat{\beta})$, $\mathrm{E}(\hat{\beta})$, $\mathrm{E}(RSS)$, $\mathrm{Var}(\hat{y})$, $\mathrm{Cov}(\hat{u}, \hat{y})$.

5. Все переменные, и предикторы, и зависимая, центрированы. Рассмотрим задачу гребневой регрессии (ridge regression).
   $$Q(\hat{\beta}) = (y - X\hat{\beta})^T (y - X\hat{\beta}) + \lambda \hat{\beta}^T \hat{\beta} \to \min_{\hat{\beta}}$$

   а) Найдите dQ и d^2Q;

   б) Найдите явную формулу для $\hat{\beta}_{ridge}$. Докажите, что это действительно минимум.

6. Вспомнив Матрицу-Мать-Всех-Регрессий, докажите, что в регрессии

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_x x_i + \hat{\beta}_z z_i + \hat{\beta}_w w_i$$

величину R^2 можно разложить в сумму:

$$R^2 = \hat{\beta}_x \frac{\mathrm{sCov}(y, x)}{\mathrm{sVar}(y)} + \hat{\beta}_z \frac{\mathrm{sCov}(y, z)}{\mathrm{sVar}(y)} + \hat{\beta}_w \frac{\mathrm{sCov}(y, w)}{\mathrm{sVar}(y)}$$

Здесь sVar, sCov — это выборочная дисперсия и выборочная ковариация.

7. Внедрённый в глубокий тыл противника майор Пронин хочет оценить коэффициенты в регрессии $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + \hat{\beta}_3 z_i$. Однако, чтобы не привлекать внимания, майор Пронин хочет обойтись построением нескольких парных регрессий и применением теоремы Фриша-Во.

   По соображениям секретности майор Пронин не может выполнять векторных и матричных операций, а также суммирования n слагаемых. Максимум, что майор может незаметно сделать — это посчитать остатки одной регрессии и использовать их как регрессор в другой регрессии.

   а) Сколько парных регрессий ему придётся построить, чтобы оценить коэффициенты $\hat{\beta}_2$ и $\hat{\beta}_3$? Какие конкретно?

   б) Возможно ли только с помощью парных регрессий, без дополнительных арифметических действий, оценить $\hat{\beta}_1$?