

1. Технические задачки :)

- а) Величины X_1, \dots, X_{10} независимы и равномерны на $[0; 1]$. Величины Y_1, \dots, Y_{10} — это отсортированные по возрастанию квадраты X_i . В частности, $Y_1 = \min\{X_1^2, \dots, X_{10}^2\}$, и $Y_{10} = \max\{X_1^2, \dots, X_{10}^2\}$

Выпишите совместную функцию плотности Y_3 и Y_5 в точке (a, b) .

- б) Компоненты двумерного вектора X независимы и нормальны $\mathcal{N}(0; 1)$.

Как распределен квадрат косинуса угла между вектором и положительным направлением оси абсцисс?

- в) Компоненты четырёхмерного вектора X независимы и нормальны $\mathcal{N}(0; 1)$. Грета Тунберг выбрала в четырёхмерном пространстве два ортогональных двумерных плоскости. Обозначим L_1 и L_2 — квадраты длин проекций вектора X на эти две плоскости.

Как распределено отношение L_1/L_2 ?

2. Рассмотрим модель множественной регрессии, $y = X\beta + u$, где регрессоры детерминистические, а $u \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2 \cdot I)$. Параметры β и σ^2 неизвестны. Мы хотим проверить гипотезу $H_0: \sigma = 1$.

- а) Выведите формулы для статистик W, LR, LM .

- б) Сравните эти статистики между собой, если это возможно.

3. Найдите ожидаемую информацию Фишера:

- а) для классической множественной регрессии;

- б) для логистической регрессии;

4. Есть 101 наблюдение и три переменных: x_i, y_i и z_i . Вектор выборочных средних равен $(0, 1, 2)^T$, обратная матрица к выборочной ковариационной матрице равна

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 6 \\ -1 & 9 & 2 \\ 6 & 2 & 25 \end{pmatrix}$$

Найдите все коэффициенты в регрессии y_i на x_i и z_i с константой.

5. Винни-Пух знает, что мёд бывает правильный, $honey_i = 1$, и неправильный, $honey_i = 0$. Пчёлы также бывают правильные, $bee_i = 1$, и неправильные, $bee_i = 0$. По 100 своим попыткам добыть мёд Винни-Пух составил таблицу сопряженности:

	$honey_i = 1$	$honey_i = 0$
$bee_i = 1$	10	30
$bee_i = 0$	20	40

Винни-Пух использует логистическую регрессию с константой для прогнозирования правильности мёда с помощью правильности пчёл.

- Какие оценки коэффициентов получит Винни-Пух?
 - Какой прогноз вероятности правильности мёда при встрече с неправильными пчёлами даёт логистическая модель? Как это число можно посчитать без рассчитывания коэффициентов?
 - Проверьте гипотезу о том, что правильность пчёл не оказывает влияние на правильность мёда с помощью тестов LR, LM и W.
6. Как изменятся оценки МНК и классическая оценка ковариационной матрицы оценок МНК, если каждое наблюдение учесть два раза?
7. Предположим, что $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i$, наблюдения независимы и одинаково распределены, предпосылки теоремы Гаусса-Маркова выполнены.

Эконометрист Кирилл строит оценку коэффициентов следующим образом: через каждую пару точек проводит прямую, а затем усредняет угловые коэффициенты всех прямых (получает $\hat{\beta}_2$), усредняет точки пересечения с вертикальной осью всех прямых (получает $\hat{\beta}_1$).

Будут ли оценки Кирилла несмещёнными? Состоятельными?