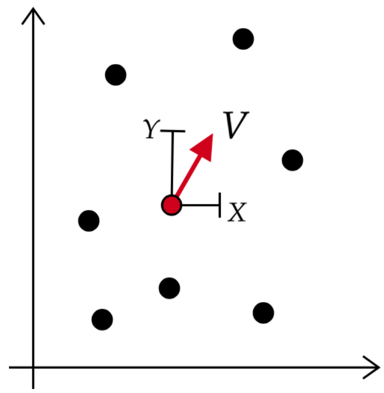
Конспектировала: Мария Щеголева.

1. Нормальное распределение

Путь через теорему Хершела-Максвелла: *Если распределение случайного вектора с независимыми компонентами инвариантно к повороту, то компоненты вектора распределены нормально* .



Аксиома 1. Закон распределения вектора скорости $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ не зависит от направления, а только от длины: $f(x, y) = h(x^2 + y^2)$

Аксиома 2. Компоненты скорости X и Y независимы: $f(x, y) = g_X(x) \cdot g_Y(y)$

Аксиома 3. Нормировка: $\mathrm{Var}(X) = 1$

Свойства:

Пусть вектор V' получен поворотом вектора V. По Аксиоме (1) операция поворота не меняет распределение вектора $V \quad \Rightarrow \quad V' \sim V$:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \xrightarrow{\circlearrowleft 180^\circ} \begin{pmatrix} -X \\ -Y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X \sim -X \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}(X) = 0$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \xrightarrow{\circlearrowleft 90^\circ} \begin{pmatrix} Y \\ -X \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X \sim Y,\ Y \sim -X \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 0; \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X) = 1$$

Определение. Вектор $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ имеет *стандартное нормальное распределение*, если верны Аксиомы (1)–(3).

Доказательство.

По Аксиоме (1): $f(x, y) = h(x^2 + y^2)$. По Аксиоме (2) компоненты вектора V независимы, а из полученных свойств имеют одинаковое распределение ($X \sim Y \Rightarrow g_X = g_Y$), следовательно функция плотности совместного распределения может быть представлена как произведение функций плотности маргинальных:

$$f(x, y) = g(x^2) \cdot g(y^2)$$

$$h(x^2+y^2)=g(x^2)\cdot g(y^2)$$

$$\begin{cases} h'(x^2+y^2)=g'(x^2)\cdot g(y^2) \\ h(x^2+y^2)=g(x^2)\cdot g(y^2) \end{cases} \xrightarrow{x=0} \begin{cases} h'(y^2)=g'(0)\cdot g(y^2) \\ h(y^2)=g(0)\cdot g(y^2) \end{cases}$$

$$h'(t)=\frac{g'(0)}{g(0)}h(t) \quad \Rightarrow \quad h'(t)=k\cdot h(t) \quad \Rightarrow \quad h(t)=c\cdot e^{kt}$$

$$f(x,y)=c\cdot e^{k(x^2+y^2)}=\sqrt{c}\cdot e^{kx^2}\cdot\sqrt{c}\cdot e^{ky^2}=g(x)\cdot g(y)$$

- $k-?$

$$\mathrm{E}(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\sqrt{c}\cdot e^{kx^2}dx=1$$

Интегрируем по частям:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\sqrt{c}\cdot x\cdot e^{kx^2}dx = x\cdot\sqrt{c}\cdot e^{kx^2}\cdot\frac{k}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{c}\cdot e^{kx^2}\cdot\frac{1}{2k}dx=-\frac{1}{2k}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{c}\cdot e^{kx^2}=-\frac{1}{2k}$$

$$-\frac{1}{2k}=1 \quad \Rightarrow \quad k=-\frac{1}{2}$$

- $c-?$

$$f(x,y)=c\cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

Объем под функцией плотности:

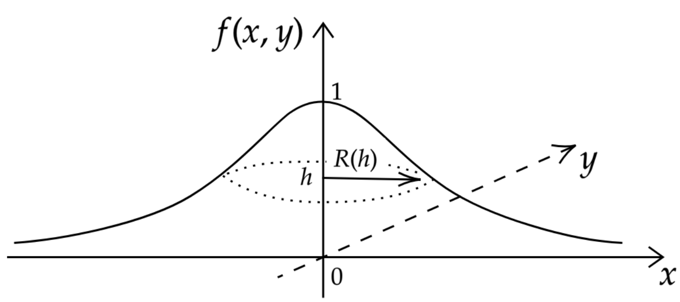
$$I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} c\cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy=1$$

Способ 1: Перейти к полярным координатам

$$dx\wedge dy=d(r\cos\phi)\wedge d(r\sin\phi)=rd\phi\wedge d\phi$$

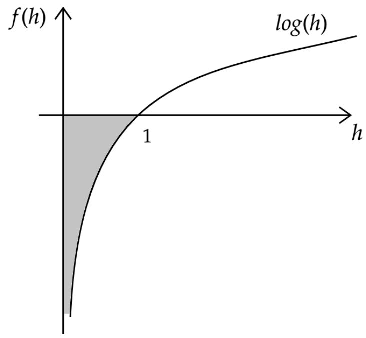
Способ 2:(почти устно) Найти объем

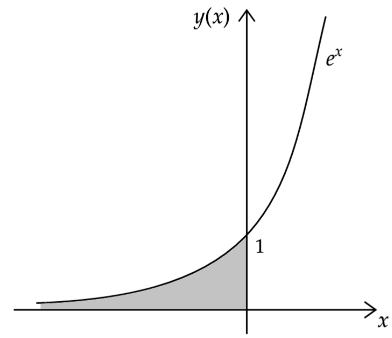
Принцип Кавальери:



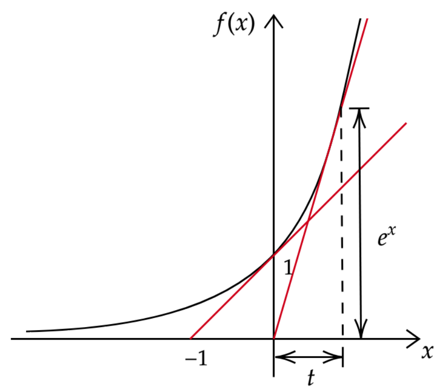
$$I=c\int\limits_0^1 \pi R^2(h)dh=\left[h=e^{-\frac{1}{2}R^2(h)} \ \Rightarrow \ R^2(h)=-2\log(h)\right]=c\int\limits_0^1 -2\pi\log(h)dh$$

Замена переменной и пределов интегрирования: $I = -2\pi \cdot c \int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx$





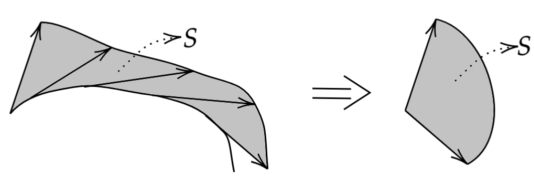
Геометрическое свойство экспоненты:



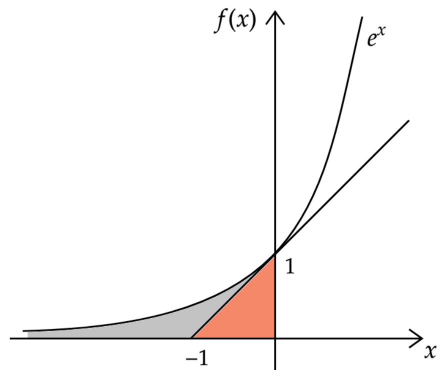
$$(e^x)' = e^x \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\alpha = e^x \;\Rightarrow\; \frac{e^x}{t} = e^x \;\Rightarrow\; t = 1$$

Принцип Мамикона:

Площадь S, закрашиваемая касательными при движении вдоль кривой, равна площади, закрашиваемой касательными, если только поворачивать их, но не перемещать вдоль кривой, независимо от формы исходной кривой.



Площадь фигуры, которую закрашивают касательные при движении по кривой e^x от $-\infty$ до 0, по принципу Мамикона равна $\frac{1}{2}$. Тогда $\int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx$ равен сумме площади серой фигуры, закрашенной касательными, и площади треугольника ($S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1$):



$$I = -2\pi \cdot c \int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx = -2\pi \cdot c \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1 \;\; \Rightarrow \;\; c = -\frac{1}{2\pi}$$

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \;\; \Rightarrow \;\; X \sim \mathcal{N}(0, 1), Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Замечание: Без Аксиомы (3) X, Y имеют нормальное распределение $\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. □

2. χ^2-распределение

Определение. Если вектор $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ имеет стандартное нормальное распределение ($y_i \sim \mathcal{N}(0, 1), y_i$ — независимы), V — k-мерное подпространство, $\hat{y}$ — проекция y на V и $q = \|\hat{y}\|^2$ — квадрат длины проекции, то q имеет χ^2-распределение с k степенями свободы.

Классическое определение. Случайная величина q имеет χ^2_k-распределение, если q представима в виде $q = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_k^2$, где $z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и независимы.

Эквивалентность: если $n = k$ и V — все пространство, тогда $y = \hat{y}$ и $q = \|\hat{y}\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_k^2$

Упражнение. Вектор $(y_1, y_2, y_3)^T$ имеет стандартное нормальное распределение; $V = \{y_1 + y_2 = y_3\}$ — двумерное подпространство.

Найдите вектор $\hat{y}$, проекцию вектора y на пространство V, и квадрат длины этой проекции.

$$\hat{y} = Hy; \qquad H = (X^T X)^{-1} X^T y$$

Базисные векторы подпространства V: $\quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X^T X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (X^T X)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2y_1 - y_2 + y_3) \\ \frac{1}{3}(-y_1 + 2y_2 + y_3) \\ \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + 2y_3) \end{pmatrix}$$

$$q = \left(\frac{2y_1 - y_2 + y_3}{3}\right)^2 + \left(\frac{-y_1 + 2y_2 + y_3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2 + 2y_3}{3}\right)^2$$

По классическому определению: $q \sim \chi^2_2$

Теорема. Если $y = X\beta + u$; $u_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ и независимы, то $\frac{RSS}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k}$

Доказательство.

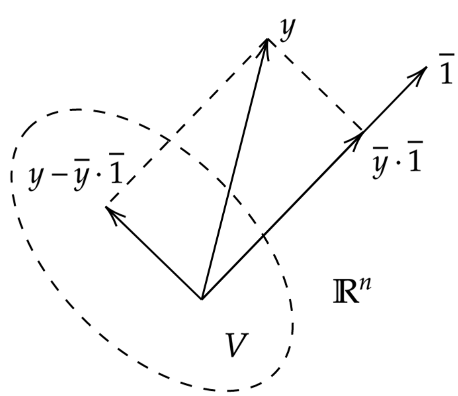
$\hat{y}$ — проекция y на $\mathrm{col}(X)$ — пространство столбцов X. $\dim(\mathrm{col}(X)) = k$.
Пространство $V = \mathrm{col}^{\perp}(X)$ — ортогональное дополнение к $\mathrm{col}(X)$. $\dim(V) = n - k$.
Матрица $(I - H)X\beta$ — проекция $X\beta$ на V. Заметим, что $X\beta \perp V$, следовательно $(I - H)X\beta = 0$.
$\hat{u}$ — проекция u на V, поэтому $\hat{u} = (I - H)y = (I - H)(X\beta + u) = (I - H)u$.

По условию: $u_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{u_i}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Тогда по определению: $\dfrac{RSS}{\sigma^2} = \dfrac{\|(I - H)u\|^2}{\sigma^2} = \left\|(I - H)\dfrac{u}{\sigma}\right\|^2 \sim \chi^2_{n-k}$, где $\left\|(I - H)\dfrac{u}{\sigma}\right\|^2$ — длина проекции $\left\{\dfrac{u_i}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)\right\}_n$ на подпространство V. □

Упражнение. Вектор $y = u$. Вектор u имеет нормальное распределение: $u_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ и независимы. Оценивается модель $\hat{y} = X\hat{\beta}$ по МНК.

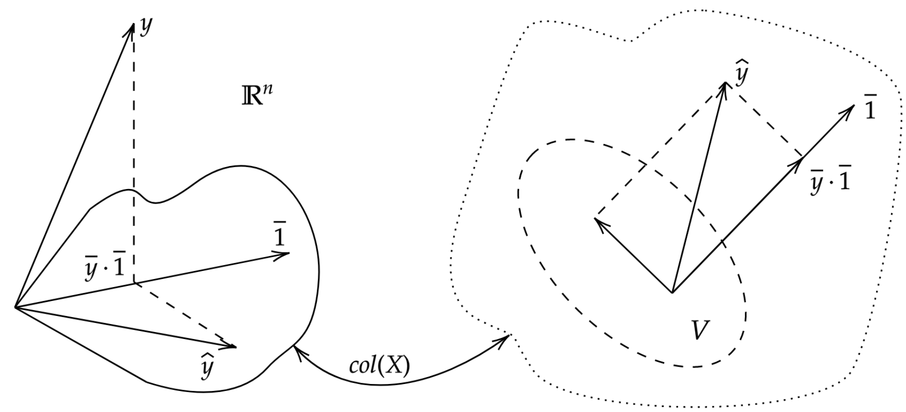
- $TSS = \sum (y_i - \bar{y})^2$



$TSS = \|y - \bar{y} \cdot \bar{1}\|^2$ — длина проекции y на подпространство $V = \mathrm{Lin}^{\perp}\,\bar{1}$ — ортогональное дополнение к $\bar{1}$ из $\mathrm{col}(X)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, поэтому $\dim V = n - 1$

$$\frac{TSS}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

- $ESS = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2$



$ESS = \|\hat{y} - \bar{y}\cdot\bar{1}\|^2$ — длина проекции y на подпространство $V = \mathrm{Lin}^{\perp}\,\bar{1} \cap \mathrm{col}(X)$ — ту часть $\operatorname{col} X$, которая лежит в ортогональном дополнении к $\bar{1}$, поэтому $\dim V = k-1$

$$\frac{ESS}{\sigma^2} \sim \chi^2_{k-1}$$

Удобное следствие. Аксиома (1) + Аксиома (2) = длины проекций на ортогональные подпространства независимы.

Доказательство.

$y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ $y_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ и независимые.
W, V — подпространства в $\mathbb{R}^n$; $V \perp W$ (не обязательно покрывают все $\mathbb{R}^n$)

Повернем систему так, чтобы первые координаты отвечали за координаты в W:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{\circlearrowleft}{\to} \begin{pmatrix} \updownarrow \text{координаты в } W \\ \hline \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{\circlearrowleft}{\to} \begin{pmatrix} \updownarrow \text{координаты в } W \\ \hline \updownarrow \text{координаты в } V \\ \hline \vdots \end{pmatrix} : y^* = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

y^* — координаты y в новом базисе.

y_i независимые, следовательно, w и v независимые. □