

1. У исследователя Василия есть мощный генератор многомерного нормального распределения  $\mathcal{N}(0; \sigma^2 I)$ , где  $I$  — единичная матрица размера  $4 \times 4$ . Других источников случайности в жизни Василия нет. Всё остальное предрешиено, а Вася — фаталист!

Василий ничего не знает про  $\pi$ ,  $e$  и эти самые функции плотности или распределения. Однако Василий понимает текстовую аксиоматику нормального распределения.

- а) Предложите Василию способ равномерно генерировать точки на трехмерной сфере.
- б) Предложите Василию способ равномерно генерировать точки на отрезке  $[0; 1]$ .
- в) Предложите Василию способ равномерно генерировать точки на квадрате  $[0; 1] \times [0; 1]$ .

2. Матрица  $X$  состоит из двух блоков,  $X = [A; B]$ . Обозначим  $H_X = X(X'X)^{-1}X'$  и  $H_A = A(A'A)^{-1}A'$ .

- а) Докажите геометрически без манипуляций с матрицами, что  $H_A = H_A H_X$ .
- б) Докажите алгебраически без геометрических образов, что  $H_A = H_A H_X$ .

3. У Василия есть три вектора  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Все вектора имеют нулевую сумму компонент и единичную длину.

Василий решает найти такой вектор  $v$ , также с нулевой суммой компонент и единичный длиной, который минимизировал бы сумму квадратов расстояний

$$\|a - v\|^2 + \|b - v\|^2 + \|c - v\|^2$$

Мария решает найти такой вектор  $m$ , также с нулевой суммой компонент и единичный длиной, который максимизировал бы сумму выборочных корреляций

$$\text{sCorr}^2(a, m) + \text{sCorr}^2(b, m) + \text{sCorr}^2(c, m)$$

Правда ли, что у Василия и Марии получится один и тот же вектор? Докажите или опровергните.

4. Рассмотрим модель  $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i$ . Ошибки  $u_i$  независимы и нормальны  $\mathcal{N}(0; 1)$ .

Мария оценивает модель с помощью МНК. Для каждой из ситуаций явно приведите подходящую последовательность  $x_i$  или докажите, что данная ситуация невозможна.

- а) Обе оценки сходятся к настоящим параметрам по вероятности:  $\hat{\beta}_1 \rightarrow \beta_1$ ,  $\hat{\beta}_2 \rightarrow \beta_2$ .
- б) Ни одна оценка не сходится к настоящему параметру по вероятности:  $\hat{\beta}_1 \not\rightarrow \beta_1$ ,  $\hat{\beta}_2 \not\rightarrow \beta_2$ .
- в) По вероятности  $\hat{\beta}_1 \rightarrow \beta_1$ ,  $\hat{\beta}_2 \not\rightarrow \beta_2$
- г) По вероятности  $\hat{\beta}_1 \not\rightarrow \beta_1$ ,  $\hat{\beta}_2 \rightarrow \beta_2$

5. Выборочная корреляционная матрица трех векторов имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & -0.2 \\ 0 & -0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

Известно, что первые две главные компоненты начинаются так:

$$pc_1 = (0.02, -0.03, \dots)$$

$$pc_2 = (-0.01, 0.02, \dots)$$

В этой задаче можно находить собственные числа и собственные вектора с помощью компьютера численно без пояснений.

- а) Найдите веса, с которыми исходные переменные входят в первые две главные компоненты.
  - б) Восстановите наилучшую аппроксимацию для первых двух наблюдений для всех исходных переменных.
6. Даша хочет проверить, правда ли, что оценка по эконометрике  $(y_i)$  одинаково зависит от количества часов  $(x_i)$ , потраченных на подготовку, для трёх групп лиц.

Даша оценила четыре регрессии  $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i$ : по всем студентам, по не пьющим кофе, по пьющим мало кофе, по пьющим много кофе.

Результаты в таблице:

выборка	уравнение	$RSS$	наблюдений
все студенты	$\hat{y}_i = 40 + 2.8x_i$	10000	750
без кофе	$\hat{y}_i = 50 + 3.2x_i$	3000	200
мало кофе	$\hat{y}_i = 37 + 1.8x_i$	2000	300
много кофе	$\hat{y}_i = 45 + 3.4x_i$	2000	250

Помогите Даше!