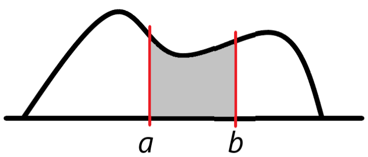
Конспектировал: Ярослав Романов.

1. Дифференциальные формы

Хорошо было бы работать не с плотностями,
а с дифференциальными формами.

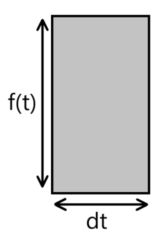


Идея: если хотим найти вероятность, что случайная величина ω примет значение от a до b, мы можем посчитать интеграл:

$$P(\omega \in [a, b]) = \int\limits_a^b f(t)dt$$

Если при этом, мы хотим произвести замену переменной $\omega = Z^3$ и найти функцию плотности распределения Z^3, то просто подставить z^3 в формулу функции распределения для ω будет некорректно.

И тут нам на помощь приходит дифференциальная форма. Идея дифференциальной формы "на пальцах" заключается в том, что нам необходимо следить не за высотой, а за прямоугольно областью (в случае одномерной случайной величины):



Значение фукции плотности $f(t)$ в данном случае отвечает за высоту, а приращение аргумента dt — за ширину нашего прямоугольника.

Пример:
Пусть имеется случайная величина $\omega \sim U[0, 1]$, $Z = \omega^3$. Требуется найти функцию плотности распределения $f_Z(t)$. Дифференциальная форма ω есть:

$$\begin{cases} 1da & \text{при } a \in [0,1] \\ 0da & \text{при } a \in [0,1] \end{cases}$$

Произведем замену $\omega = Z^{\frac{1}{3}}$ и, соответственно, $\omega = z^{\frac{1}{3}}$. Тогда для Z получим следующую дифференциальную форму: $1dz^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}dz$, в которой часть перед дифференциалом и будет искомой функцией распределения: $f_Z(z) = \frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}$.

Как будет работать данный прием в случае с совместным распределением случайных величин $f(a, b)$? Для того, чтобы удобнее оперировать дифференциальными формами в этом случае, мы будем использовать так называемое внешнее умножение, обозначаемое как $\wedge$ ("птичка"): $f(a,b) \to f(a,b)da \wedge db$ Отметим правила внешнего умножения, которыми нам помогут в дальнейших расчетах:

Правило 1: $da \wedge da = 0$

Правило 2: $da \wedge db = -db \wedge da$.

Упражнение:

Пусть есть пара случайных величин Y и ω и задана их плотность совместного распределения:

$$f(y,\omega) = \begin{cases} 4y\omega & y,\omega \in [0,1] \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Введем новые случайные величины R и S и определим соотношение с Y и ω:

$$R = Y + \omega^3,$$

$$S = 2Y + 3\omega^3$$

Требуется найти функцию плотности распределения R и S $f_{R,S}(r,s)$ Итак,

$$P(Y \in [y; y+dy], \omega \in [\omega; \omega + d\omega]) \sim 4y\omega dy \wedge d\omega$$

Сделаем замену

$$\begin{cases} r = y + \omega^3 \\ s = 2y + 3\omega^3 \end{cases}$$

тогда

$$\begin{cases} y = 3r - s \\ \omega = (s-2r)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

Из этого следует, что:

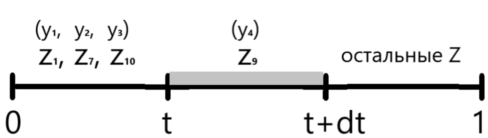
$$\begin{aligned} P(Y \in [y; y+dy], \omega \in [\omega; \omega + d\omega]) = \\ = 4(3r-s)(s-2r)^{\frac{1}{3}}(3dr - ds) \wedge (\frac{1}{3}(s-2r)^{-\frac{2}{3}}(ds - 2dr)) = \\ = 4(3r-s)(s-2r)^{-\frac{1}{3}}(3dr - ds) \wedge (ds - 2dr) = \\ = 4(3r-s)(s-2r)^{-\frac{1}{3}}(3dr \wedge ds + 2ds \wedge dr) = \\ = \frac{4}{3}(3r-s)(s-2r)^{-\frac{1}{3}} dr \wedge ds \end{aligned}$$

Таким образом, функция плотности совместного распределения R и S — это все, что находится перед дифференциалами:

$$f_{R,S}(r,s) = \frac{4}{3}(3r-s)(s-2r)^{\frac{1}{3}}$$

Упражнение:

Пусть даны случайные независимые величины $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{10}$ из равномерного распределения $U[0,1]$ Упорядочим случайные величины по возрастанию их значений и переобозначим как $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{10}$



Требуется найти функцию плотности распределения четвертой по величини случайной величины $f_{Y_4}(t)$.
Воспользуемся дифференциальными формами и попробуем найти $f_{Y_4}(t)dt + o(dt)$

$$\begin{gathered} f_{Y_4}(t)dt + o(dt) = \\ P(Y_4 \in [t; t+dt]) = \\ t^3(1-t)^6 10 C_9^3 \frac{dt}{1} + o(dt) \end{gathered}$$

Как мы уже знаем, функция плотности распределения Y_4 — это все, что находится перед дифференциалами:

$$f_{Y_4}(t) = 10 C_9^3 t^3 (1-t)^6$$

2. Распределения

Мы разобрались с удобным способом работы функциями распределений случайных величин. Теперь, пользуясь этим знанием, перейдем ближе к делу — определим некоторые распределения случайных величин

2.1. Экспоненциальное распределение

Аксиома: вероятность того, что ученик, ищущий просветления, достигнет его за малый отрезок времени, пропорциональна длине этого отрезка. Случайная величина Y обозначает время от начала познания до просветления Хотим найти: функцию плотности распределения $f(Y)$

$$P(Y \geq t + dt) = P(Y \geq t)(1 - \lambda dt - o(dt))$$

Обозначим $P(Y \geq t)$ за h_t, тогда:

$$\begin{gathered} h_{t+dt} = h_t - \lambda h_t dt - h_t o(dt), \\ h_{t+dt} - h_t = -\lambda h_t dt + o(dt), \\ \frac{h_{t+dt} - h_t}{dt} = -\lambda h_t + \frac{o(dt)}{dt} \end{gathered}$$

тогда

$$h_t = \exp(-\lambda t)$$

а искомая функция плотности распределения после взятия производной вероятности равна:

$$f(y) = \lambda \exp(-\lambda t)$$

2.2. Гамма и бета распределения

Аксиома: Тётя-Мотя печет блинчики: внуку a штук и на продажу b штук. Оборудование Тёти-Моти в процессе приготовления переводит блин из сырого состояния в готовое моментально. Вероятность испечь очередной блинчик за малый отрезок времени пропорциональна длине этого отрезка времени. Случайная величина S обозначает общее время выпечки всех блинчиков. Следовательно, S принимает значение от нуля до бесконечности Случайная величина R равна доле времени, потраченного на выпечку блинчиков для внука. Следовательно, R принимает значения от нуля до единицы. В нашем контесте S распределена по гамма-закону, а R — по бета-закону Хотим найти для R и S функции плотности их распределений $f(r)$ и $f(s)$ Заметим, что R и S независимы по смыслу, поэтому $f(r,s) = f(r)f(s)$

Случай 1:
Для начала рассмотрим простой частный случай, при котором $a = 1$ и $b = 1$.
Требуется найти $f(r), f(s)$.
Пусть Y_1 и Y_2 — время на выпечку первого и второго блина соответственно.
Мы уже знаем функцию плотности экспоненциально распределенной величины, поэтому:

$$f(y_1) = \lambda \exp(-\lambda y_1)$$

$$f(y_2) = \lambda \exp(-\lambda y_2)$$

Тогда:

$$P(Y_1 \in [y_1; y_1 + dy], Y_2 \in [y_2; y_2 + dy]) \sim \lambda \exp(-\lambda y_1) \lambda \exp(-\lambda y_2) dy_1 \wedge dy_2$$

Также по условию задачи:

$$S = Y_1 + Y_2$$

и

$$R = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2}$$

Или иначе:

$$Y_1 = RS$$

$$Y_2 = S - Y_1 = S - RS$$

Подставим полученное в формулу вероятности

$$\begin{aligned} \lambda \exp(-\lambda rs) \lambda \exp(-\lambda(s - rs)) d(rs) \wedge d(s - rs) = \\ = \lambda^2 \exp(-\lambda s) d(rs) \wedge ds = \\ = \lambda^2 \exp(-\lambda s)(sdr + rds) \wedge ds = \\ = \lambda^2 \exp(-\lambda s) sdr \wedge ds \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(r,s) = \lambda^2 \exp(-\lambda s) s \cdot 1$$

$$f(s) = \begin{cases} \lambda^2 \exp(-\lambda s) s & \text{при } s > 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f(r) = \begin{cases} 1 & \text{при } r \in [0,1] \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Случай 2:
Пусть теперь $a = 2$, а $b = 1$
Требуется найти $f(r), f(s_3)$.
Время на два блинчика (или время на блины внуку, соответственно):

$$S_2 = Y_1 + Y_2$$

а время на все три блинчика:

$$S_3 = S_2 + Y_3$$

и

$$R = \frac{Y_1}{S_2 + Y_3}$$

Тогда:

$$S_2 = RS_3$$

$$Y_3 = S_3 - RS_3$$

Посчитаем в сторонке выражение с ”птичками”:

$$\begin{aligned} ds_2 \wedge dy_3 = \\ = d(rs_3) \wedge (ds_3 - d(rs_3) = \\ = d(rs_3) \wedge ds_3 = \\ = s_3 dr \wedge ds_3 \end{aligned}$$

Посчитаем искомую вероятность:

$$\begin{aligned} P(S_2 \in [s_2; s_2 + ds_2], Y_3 \in [y_3, y_3 + dy_3]) \sim \\ \sim (\lambda^2 \exp(-\lambda s_2) s_2) \lambda \exp(-\lambda y_3) ds_2 \wedge dy_3 = \\ = \lambda^3 \exp(-\lambda s_3) r s_3^2 dr \wedge ds_3 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(r, s_3) = \lambda^3 \exp(-\lambda s_3) r s_3^2 = (\frac{1}{2} \lambda^3 \exp(-\lambda s_3) s_3^2)(2r)$$

$$f(s_3) = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda^3 \exp(-\lambda s_3) s_3^2 & \text{при } s_3 > 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f(r) = \begin{cases} 2r & \text{при } r \in [0, 1] \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Используя метод индукции и результаты, полученные ранее в частных случаях, определим математическое ожидание для изучаемых распределений.
Случайная величина S_k, имеющая гамма-распределение с параметрами λ и k, будет иметь функцию плотности распределения, пропорциональную некоторому выражению:

$$f(s_k) \propto \lambda^k \exp(-\lambda s_k) s_k^{k-1}$$

Тогда математическое ожидание величины S_k:

$$E(S_k) = \int_0^\infty s_k f(s_k) ds_k$$

либо без знания функции плотности:

$$E(S_k) = KE(Y_1) = K \int_0^\infty y_1 f(y_1) dy_1$$

либо еще круче, когда даже для Y_1 нам не известна функция плотности:

$$E(Y_1) = \mu$$

и вероятность того, что блин испечется в отрезке времени $[0, dt]$ равна $p = \lambda dt + o(dt)$

$$\mu = (1 - \lambda dt - o(dt))(dt + \mu) + (\lambda dt + o(dt))dt =$$
$$= dt - \lambda(dt)^2 + o(dt)dt + \mu - \lambda\mu dt + d(dt)\mu + \lambda dt^2 + o(dt)$$

$$dt = \lambda\mu dt + o(dt)$$
$$\frac{dt}{dt} = \frac{\lambda\mu dt}{dt} + \frac{o(dt)}{dt}, dt \to 0$$
$$1 = \lambda\mu$$
$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

Случай 3:
Еще обобщим ситуацию. Пусть теперь общее количество блинчиков $k = 3$
Требуется найти $f(r_1), f(r_2), f(s_3)$.
Время на все три блинчика:

$$S_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

и

$$R_1 = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2}$$
$$R_2 = \frac{Y_1 + Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

Тогда:

$$y_1 = r_1 r_2 s_3$$
$$y_2 = r_2 s_3 - r_1 r_2 s_3$$
$$y_3 = s_3 - r_2 s_3$$

Запишем дифференциальные формы для Y_1, Y_2, Y_3.
Но для начала посчитаем в сторонке выражение с "птичками":

$$dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 =$$
$$= d(r_1 r_2 s_3) \wedge d(r_2 s_3 - r_1 r_2 s_3) \wedge d(s_3 - r_2 s_3) =$$
$$= d(r_1 r_2 s_3) \wedge d(r_2 s_3) \wedge d(s_3 - r_2 s_3) =$$
$$= d(r_1 r_2 s_3) \wedge d(r_2 s_3) \wedge d(s_3) =$$
$$= (r_2 s_3 d(r_1) + r_1 d(r_2 s_3)) \wedge d(r_2 s_3) \wedge d(s_3) =$$
$$= r_2 s_3 s_3 dr_1 \wedge dr_2 \wedge ds_3$$

Тогда по знакомой нам схеме:

$$P(Y_1 \in [y_1, y_1 + dy_1], Y_2 \in [y_2, y_2 + dy_2], Y_3 \in [y_3, y_3 + dy_3]) =$$
$$= \lambda \exp(-\lambda y_1) \lambda \exp(-\lambda y_2) \lambda \exp(-\lambda y_3) d(y_1) \wedge d(y_2) \wedge d(y_3) =$$
$$= \lambda^3 \exp(-\lambda s_3) r_2 s_3^2 dr_1 \wedge dr_2 \wedge ds_3$$

Следовательно,

$$f(r_1, r_2, s_3) = 1 \cdot 2r_2 \cdot \frac{1}{2}\lambda^3 \exp(-\lambda s_3) s_3^2$$

И в силу независимости случайных величин R_1, R_2, S_3

$$f(s_3) = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda^3 \exp(-\lambda s_3) s_3^2 & \text{при } s_3 > 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f(r_1) = \begin{cases} 1 & \text{при } r_1 \in [0, 1] \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f(r_2) = \begin{cases} 2r_2 & \text{при } r_2 \in [0, 1] \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$