Конспектировала: Света Жучкова.

1. Блочные матрицы

Если размеры блоков допускают операцию умножения, то:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} AE + BG & \dots \\ \hline \dots & \dots \end{array}\right]$$

Упражнение 1.1. Блочное обращение.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}^{-1} = ?$$

Предположения: $\det A_{n\times n} \neq 0$; $\det C_{k\times k} \neq 0$.
Способы решения:

1. Интуиция.

   Если бы матрицы были числами:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ac}\begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1}_{n\times n} & -BA^{-1}C^{-1}_{n\times k} \\ 0 & C^{-1}_{k\times k} \end{pmatrix}$$

2. Метод Гаусса.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A_{n\times n} & B_{n\times k} & I & 0 \\ 0 & C_{k\times k} & 0 & I \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} I & A^{-1}B & A^{-1} & 0 \\ 0 & C & 0 & I \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} I & A^{-1}B & A^{-1} & 0 \\ 0 & I & 0 & C^{-1} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} I & 0 & A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & I & 0 & C^{-1} \end{array}\right]$$

3. Система уравнений.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

   1. $0X + CZ = 0 \Rightarrow Z = 0$
   2. $AX + BZ = I \Rightarrow X = A^{-1}$
   3. …

Утверждение. Если выполняются предпоссылки теоремы Гаусса-Маркова и $u_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, то

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} \sim t_{n-k},$$

$$\frac{(RSS_R - RSS_{UR})/(k_{UR} - k_R)}{RSS_{UR}/(n - k_{UR})} \sim F_{(k_{UR}-k_R)(n-k_{UR})}.$$

И этими статистиками можно проверять одни и те же гипотезы! Например, $H_0 : \beta_7 = 0$.
Утверждение. Если …

1. Выполняются предпоссылки теоремы Гаусса-Маркова;

2. $u_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$;
3. Оцениваются две модели:

   Неограниченная (UR): $\hat{y} = X\beta$,

   Ограниченная (R): $\hat{y} = X\beta$ при $\beta_j = 0$;
4. Проверяется гипотеза $H_0 : \hat{\beta}_j = 0$

...то $t^2 = F$.

Доказательство (для $\hat{\beta}_1$ при условии, что все регрессоры центрированы):

$$\hat{\operatorname{Var}}(\hat{\beta}) = \frac{RSS}{n-k} \cdot (X^T X)^{-1}$$

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_n \end{bmatrix}$$

$$t_1 = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k} (X^T X)^{-1}_{[1,1]}}}$$

$$t_1^2 = \frac{\hat{\beta}_1^{\,2}}{\frac{RSS}{n-k} (X^T X)^{-1}_{[1,1]}}$$

Часть в знаменателе $\dfrac{RSS}{n-k}$ нашли. Тогда осталось сравнить:

$$\frac{\hat{\beta}_1^{\,2}}{(X^T X)^{-1}_{[1,1]}} \quad vs \quad (RSS_R - RSS_{UR}),$$

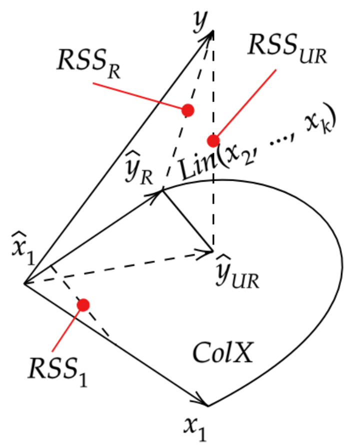
так как $k_{UR} - k_R = 1$ (проверяем гипотезу об одном коэффициенте).
Поскольку по условию все переменные центрированы:

$$(X^T X)^{-1}_{[1,1]} = \frac{1}{RSS_1},$$

где RSS_1 – RSS в регрессии первого столбца X на остальные. То есть осталось сравнить:

$$\hat{\beta}_1^{\,2} \cdot RSS_1 \quad vs \quad (RSS_R - RSS_{UR})$$

Докажем геометрически, воспользовавшись иллюстрацией.



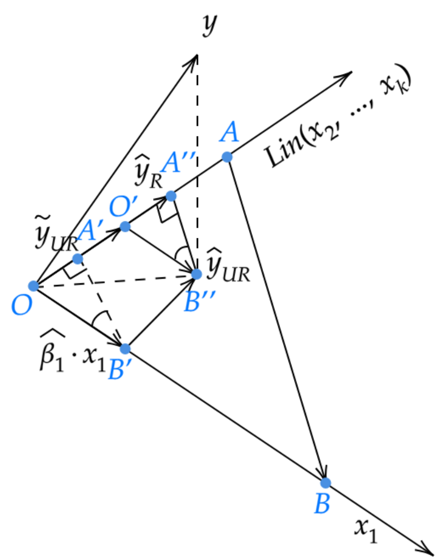
По теореме о трёх перпендикулярах:

$$(\hat{y}_{UR} - \hat{y}_R) \perp Lin(x_2, \ldots, x_n),$$
$$(x_1 - \hat{x_1}) \perp Lin(x_2, \ldots, x_n),$$
$$\hat{y}_{UR} - \hat{y}_R, x_1 - \hat{x_1} \in ColX,$$
$$\dim ColX = k = \dim Lin(x_2, \ldots, x_n) \neq 1 \Rightarrow x_1 - \hat{x_1} \parallel \hat{y}_{UR} - \hat{y}_R.$$

Введём обозначение $\tilde{y}_{UR}$:

$$\hat{y}^{UR} = X\hat{\beta}^{UR}$$
$$\hat{y}^{UR} = \hat{\beta}_1^{UR}x_1 + \hat{\beta}_2^{UR}x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k^{UR}x_k$$
$$\tilde{y}_{UR} = \hat{\beta}_2^{UR}x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k^{UR}x_k$$

Рассмотрим этот рисунок подробнее, разложив проекцию по базису и обозначив все интересующие нас треугольники.



Итак, нужно сравнить:

$$\hat{\beta}_1^2 \cdot (AB)^2 \quad vs \quad (A''B'')^2$$

1. $|A'B'| = |\hat{\beta}_1| \cdot |AB| \Rightarrow (A'B')^2 \quad vs \quad (A''B'')^2$

2. $\left.\begin{matrix} \Delta OAB \sim \Delta OA'B' \\ \Delta OA'B' = \Delta O'A''B'' \end{matrix}\right\} \Rightarrow (A'B')^2 = (A''B'')^2$

2. Состоятельность МНК-оценок

Пусть дана последовательность случайных величин $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Пределом по вероятности называют величину $\operatorname{plim}_{n\to\infty} z_n = w$ или $z_n \xrightarrow{p} w$.

Определение. $\lim_{n\to\infty} p(|z_n - w| > \epsilon) = 0$ для любого $\epsilon > 0$.

Как рассчитывать предел по вероятности:

1. Используя свойства обычных пределов;
2. Используя закон больших чисел (ЗБЧ): если $z_1, z_2, \ldots, z_n$ независимы и одинаково распределены, то $\operatorname{plim}_{n\to\infty} \bar{z_n} = \mathbb{E}(z_1)$;
3. Используя неравенство Чебышёва: если $\mathbb{E}(z_n) \to \mu$, т.е. $\lim \mathbb{E}(z_n) = 0$ и $\lim \operatorname{Var}(z_n) = 0$, то $\operatorname{plim}_{n\to\infty} z_n = \mu$.

Упражнение 2.1. Пары (z_i, w_i) одинаково распределены и независимы, т.е. сами z_i, w_i могут быть зависимы, но $z_1, \ldots, z_n$ независимы и $w_1, \ldots, w_n$ независимы. Найти предел по вероятности:

$$\operatorname{plim}_{n\to\infty} \frac{\sum (z_i - \bar{z}) \cdot (w_i - \bar{w})}{n-1} = ?$$

Решение.

$$\operatorname{plim}_{n\to\infty} \frac{\sum (z_i - \bar{z}) \cdot (w_i - \bar{w})}{n-1} =$$

$$= \operatorname{plim}_{n\to\infty} \frac{\sum z_i w_i}{n-1} - \operatorname{plim}_{n\to\infty} \frac{\bar{z}\sum w_i}{n-1} - \operatorname{plim}_{n\to\infty} \frac{\bar{w}\sum z_i}{n-1} - \operatorname{plim}_{n\to\infty} \frac{n\bar{z}\bar{w}}{n-1} =$$

$$= \mathbb{E}(z_1, w_1) - \mathbb{E}(z_1) \cdot \mathbb{E}(w_1) - \mathbb{E}(w_1) \cdot \mathbb{E}(z_1) - \mathbb{E}(w_1) \cdot \mathbb{E}(z_1) =$$

$$= \mathbb{E}(z_1, w_1) - \mathbb{E}(z_1) \cdot \mathbb{E}(w_1) = \operatorname{Cov}(z_1, w_1).$$

Упражнение 2.2. Пусть есть следующая зависимость:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i,$$

где x_i – количество съеденных студентом за семестр конфет, y_i – его оценка за курс по эконометрике. Настоящие y_i и x_i неизвестны, зато известна x_i^*:

$$x_i^* = x_i + \alpha + \nu_i,$$

где α – это константа, обозначающая национальную русскую скромность, $\alpha < 0$; ν_i – ошибка воспоминаний.

x_i, ν_i, u_i независимы.

$\mathbb{E}(x_i) = \mu_x; \mathbb{E}(u_i) = \mathbb{E}(\nu_i) = 0.$

$\operatorname{Var}(x_i) = \sigma_x^2; \operatorname{Var}(u_i) = \sigma_u^2; \operatorname{Var}(\nu_i) = \sigma_\nu^2.$

Построим регрессию и определим, будет ли оценка $\hat{\beta}_2$ состоятельной:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \cdot x_i^*.$$

Решение.

$$\text{plim}_{n\to\infty}\hat{\beta}_2 = \text{plim}_{n\to\infty}\frac{\sum (x_i^* - \bar{x^*})(y_i - y)/(n-1)}{\sum (x_i^* - \bar{x^*})^2/(n-1)} =$$

$$= \frac{\text{Cov}(x_i^*, y_i)}{\text{Var}(x_i^*)} = \frac{\text{Cov}(x_i + \alpha + \nu_i, \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i)}{\sigma_x^2 + \sigma_\nu^2} = \frac{\beta_2 \cdot \sigma_x^2}{\sigma_x^2 \cdot \sigma_\nu^2} \neq \beta_2,$$

$$0 < \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 \cdot \sigma_\nu^2} < 1.$$

Вывод: оценка не состоятельна!

Упражнение 2.3. Винни-Пух и Пятачок ходили в гости к Кролику. После нескольких визитов друзья решили оценить зависимость:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i,$$

где x_i – количество горшков, y_i – количество времени, потраченное Винни-Пухом на то, чтобы выбраться из норы Кролика.

Пятачок записывал свои наблюдения: $x_i^n = x_i + \nu_i$.

И Кролик записывал свои наблюдения: $x_i^k = x_i + \eta_i$.

Наблюдения независимы и одинаково распределены.

x_i, ν_i, η_i, u_i также независимы.

$\mathbb{E}(x_i) = \mu_x; \mathbb{E}(u_i) = \mathbb{E}(\nu_i) = \mathbb{E}(\eta_i) = 0.$

$\text{Var}(x_i) = \sigma_x^2; \text{Var}(u_i) = \sigma_u^2; \text{Var}(\nu_i) = \sigma_\nu^2; \text{Var}(\eta_i) = \sigma_\eta^2.$

Пятачок попытался построить регрессию:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_1^n + \hat{\beta}_2^n \cdot x_i^n.$$

1. Состоятельная ли оценка Пятачка? Найдём соответствующий предел по вероятности, аналогичный пределу в предыдущем задании:

$$\text{plim}_{n\to\infty}\hat{\beta}_n^2 = \beta_2 \cdot \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_\nu^2}.$$

2. Найдём ещё предел по вероятности:

$$\text{plim}_{n\to\infty}\frac{\sum(x_i^n - \bar{x}^n)(x_i^k - \bar{x}^k)}{n-1} = \text{Cov}(x_1^n, x_1^k) = \sigma_x^2.$$

3. Как скорректировать оценку, чтобы она стала состоятельна? Настоящая σ_x^2 неизвестна.

Рассмотрим варианты и для оценки Пятачка, и для оценки Кролика:

1. $\hat{\beta}_2^n$ (скорр.) = $\hat{\beta}_2^n \cdot \dfrac{\sum(x_i^n - \bar{x}^n)}{\underbrace{\sum(x_i^n - \bar{x}^n)(x_i^k - \bar{x}^k)}_{\text{коэффициент в регрессии } x_i^k \text{ на } x_i^n}} = \dfrac{\hat{\beta}_2^n}{\hat{\gamma}_2} = \dfrac{\sum(x_i^n - \bar{x}^n)(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i^n - \bar{x}^n)(x_i^k - \bar{x}^k)}.$

   Откуда взять $\hat{\gamma}_2$? Из соответствующей регрессии: $\hat{x}_i^k = \hat{\gamma}_i + \hat{\gamma}_2 \cdot x_i^n$.

2. Аналогично корректируется и оценка Кролика: $\hat{\beta}_2^k$ (скорр.) = $\dfrac{\sum(x_i^k - \bar{x}^k)(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i^n - \bar{x}^n)(x_i^k - \bar{x}^k)}$.

Упражнение 2.4. Пусть дана зависимость $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i$,

где $x_i = \begin{cases} 0, i = 1, \\ 1, i > 1. \end{cases}$

$\mathbb{E}(u_i) = 0$, $\mathrm{Var}(u_i) = \sigma^2$.

$\mathrm{Cov}(u_i, u_j) = 0$ при $i \neq j$.

Теорема Гаусса-Маркова соблюдена. Будет ли состоятельной оценка $\hat{\beta}_2$?

Решение.

$$\bar{x} = \frac{n-1}{n}$$

$$\sum(x_i - \bar{x})^2 = (n-1)\cdot(1 - \frac{n-1}{n})^2 + (\frac{n-1}{n})^2 = \frac{n-1}{n^2} + \frac{(n-1)^2}{n^2} = \frac{n(n-1)}{n^2} = \frac{n-1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} =$$

$$= \frac{\sum y_i(x_i - \bar{x}) - \bar{y}\overbrace{\sum(x_i - \bar{x})}^{=0}}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\beta_1 \overbrace{\sum(x_i - \bar{x})}^{=0} + \beta_2 \sum x_i(x_i - \bar{x}) + \sum u_i(x_i - \bar{x})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} =$$

$$= \frac{\beta_2 \sum(x_i - \bar{x})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2} + \frac{\sum u_i(x_i - \bar{x})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \beta_2 + \frac{\sum u_i(x_i - \bar{x})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \beta_2 + \frac{u_1(x_1 - \bar{x}) + \sum_{i=2}^n u_i(x_i - \bar{x})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} =$$

$$= \beta_2 + \frac{-u_1\bar{x} + (1 - \bar{x})\sum_{i=2}^n u_i}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \beta_2 + \frac{-u_1\frac{n-1}{n} + (1 - \frac{n-1}{n})\sum_{i=2}^n u_i}{\frac{n-1}{n}} = \beta_2 - u_1 + \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^n u_i.$$

$$\mathrm{plim}\,\hat{\beta}_2 = \mathrm{plim}(\beta_2 - u_1 + \overbrace{\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^n u_i)}^{\text{ЗБЧ: } \mathbb{E}(u_2)} = \beta_2 - u_1 + \overbrace{\mathbb{E}(u_2)}^{=0} = \beta_2 - u_1.$$

Вывод: оценка не состоятельна!