1. Найдите SVD-разложение матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. В каких границах могут лежать диагональные элементы матрицы-шляпницы H? Чему равно их среднее значение?

3. Найдите дифференциал $d\frac{r^T A r}{r^T r}$, где $A^T = A$ — это матрица констант.

4. Постройте регрессию вектора $y = (4, 2, -2)^T$ на вектора $x = (1, 0, -1)^T$ и $z = (0, 1, 2)^T$ без константы. Найдите RSS, TSS, ESS. Верно ли в данной регрессии, что $TSS = ESS + RSS$ и почему?

5. Известно, что $y = x + 2z$. Храбрый исследователь Василий построил парные регрессии y на x и x на y. Нам частично известны результаты этих регрессий, $\hat{y}_i = \hat{\alpha}_1 + 16x_i$, $\hat{x}_i = \hat{\beta}_1 + 0.01y_i$.

   Найдите коэффициент $\hat{\gamma}_2$ в регрессии $\hat{x}_i = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 z_i$.

6. Докажите, что в методе главных компонент с масштабированием переменных средняя величина R^2 по всем парным регрессиям исходных переменных на первую главную компоненту равна наибольшему сингулярному значению матрицы исходных переменных.

7. Поделим выборку на обучающую (X, y) и тестовую (X_{test}, y_{test}). Регрессоры X и X_{test} будем считать нестохастическими, а предпосылки теоремы Гаусса-Маркова — выполненными на всей исходной выборке.

   Найдите $\mathrm{Var}(\hat{y}_{test})$, $\mathrm{Cov}(\hat{\beta}, \hat{y}_{test})$.