1. По 100 наблюдениям храбрый Василий под самый Хэллоуин оценил модель $\hat{y}_i = 3.4 - 5.6x_i + 2.7z_i$. Стандартная ошибка коэффициента при x_i равна 1.1.

   а) Постройте 95% доверительный интервал для β_x.

   б) Проверьте гипотезу H_0: $\beta_x = -4$ на уровне значимости 5%.

2. Рассмотрим векторы: $x = (2, 0, 1)$, $z = (1, 0, 1)$ и $y = (1, 2, 3)$.

   а) Найдите матрицу-шляпницу, проецирующую любой вектор на линейную оболочку векторов x и z.

   б) Найдите коэффициенты в регрессии y на x и z без константы.

   в) Найдите ESS, RSS и TSS. Верно ли, что $TSS = ESS + RSS$ в этой модели?

   г) Найдите $\widehat{\mathbb{V}\mathrm{ar}}(\hat{\beta})$.

3. В рамках классической регрессионной модели $y = X\beta + u$, где $\mathbb{E}(u) = 0$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(u) = \sigma^2 \cdot I$, вектор $\hat{\beta}$ оценивается с помощью МНК. Обозначим $\hat{y} = X\hat{\beta}$, $\hat{u} = y - \hat{y}$.

   Найдите $\mathbb{E}(\hat{y})$, $\mathbb{E}(\hat{u})$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\hat{y})$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(\hat{y}, \hat{\beta})$.

4. Рассмотрим модель парной регрессии $y = \beta_1 \cdot \mathbb{1} + \beta_2 x + u$.

   а) Нарисуйте векторы x, $\mathbb{1}$, y, $\hat{y}$, $\bar{y} \cdot \mathbb{1}$.

   б) Укажите все прямые углы на рисунке.

   в) Отметьте угол, квадрат косинуса которого равен R^2.

   г) Закончите фразу так, чтобы она была корректной

      i. Вектор $y - \bar{y} \cdot \mathbb{1}$ — это проекция вектора y на ...

      ii. Вектор $\hat{\beta}_2(x - \bar{x} \cdot \mathbb{1})$ — это проекция вектора y на ...

5. Компоненты вектора $z = (z_1, z_2, z_3)$ независимы и имеют экспоненциальное распределение с $\lambda = 1$.

   Найдите совместную функцию плотности вектора $y = (z_1 z_2 z_3, z_1 z_2, z_1)$.

6. Верны ли следующие утверждения:

   а) Сумма двух независимых гамма-распределений с одинаковым λ имеет гамма-распределение;

   б) Если помножить π на гамма-распределение получится гамма-распределение;

   в) Сумма двух независимых бета-распределений имеет бета-распределение;

   г) Если помножить π на бета-распределение получится бета-распределение;

7. Компоненты вектор вектора $z = (z_1, z_2, z_3)$ независимы и имеют нормальное распределение $z_i \sim \mathcal{N}(i; 1)$.

   Настойчивый исследователь Василий проецирует вектор z на плоскость $z_1 + 2z_2 + 3z_3 = 0$ и получает вектор w. Определим $r = z - (1, 2, 3)$.

   а) Какое распределение имеет величина $|w|^2$?

   б) Какое распределение имеет $|z - w - (1, 2, 3)|^2$?

   в) Какое распределение имеет $2 \cdot |z - w - (1, 2, 3)|^2 / |w|^2$?

8. Регрессионная модель имеет вид $y_i = \beta_1 + \beta_x x_i + \beta_z z_i + \beta_w w_i + u_i$. Исследователь Феофан оценил эту модель по 20 наблюдениям и оказалось, что $R^2 = 0.9$. Феофан хочет проверить гипотезу H_0 о том, что $\beta_x = \beta_z$ и одновременно $\beta_z + \beta_w = 0$. Предпосылки теоремы Гаусса-Маркова на ошибки u_i выполнены, кроме того, u_i нормально распределены.

   а) Какую вспомогательную регрессию достаточно оценить Феофану для проверки H_0?

   б) Во вспомогательной регрессии оказалось, что $R^2 = 0.6$. Отвергается ли H_0 на 5%-ом уровне значимости?

   в) На сколько процентов изменилась несмещённая оценка дисперсии случайной ошибки при переходе ко вспомогательной регрессии?