Дорогой храбрый воин или храбрая воительница! Удачи тебе на большом празднике по эконометрике! Начни с того, что напиши клятву и подпишись под ней:

Я клянусь честью студента, что буду выполнять эту работу самостоятельно.

А теперь — задачки:

1. Исходная выборка y — вектор из n независимых случайных величин, равномерных на $[0;1]$. Пусть y^* — одна из бутстрэп-выборок.

   а) Найди $\mathrm{E}(y_i^*)$, $\mathrm{Var}(y_i^*)$, $\mathrm{E}(\bar{y}^*)$, $\mathrm{Var}(\bar{y}^*)$.

   б) Найди $\mathrm{Cov}(y_i, y_i^*)$, $\mathrm{Cov}(\bar{y}, \bar{y}^*)$.

   в) Что происходит с указанными величинами при $n \to \infty$?

2. Исследователь Винни-Пух использует две модели, описывающие вектор $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Одна модель подсказана Совой, вторая — Кроликом. Как известно, у Винни-Пуха опилки в голове, поэтому обе модели содержат $k = 0$ параметров.

   Величины y_i в обеих моделях и в реальности независимы и одинаково распределены.

   Рассмотрим оценку $\hat{\Delta} = (AIC_{\text{Кролик}} - AIC_{\text{Сова}})/2$ для параметра $\Delta = KL(p||p_{\text{Кролик}}) - KL(p||p_{\text{Сова}})$.

   Здесь p — реальное распределение вектора y, а $p_{\text{Кролик}}$ и $p_{\text{Сова}}$ — модельные.

   а) Верно ли, что оценка Винни-Пуха $\hat{\Delta}$ является несмещённой?

   б) Верно ли, что оценка $\hat{\Delta}$ является состоятельной? В каком смысле в данном случае корректно говорить о состоятельности?

3. Исследователь Пятачок считает, что в модели

   $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

   имеется гетероскедастичность следующего вида: $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \exp(\alpha_0 + \alpha_1 x_i)$.

   а) Скорректируйте гетероскедастичность и выведите формулу эффективной оценки в явном виде.

   б) Поясните, как построить доверительный интервал, устойчивый к гетероскедастичности, используя стандартные ошибки Уайта.

   в) Сформулируйте гипотезу о гомоскедастичности и найдите оценки неизвестных параметров в предположении о гомоскедастичности методом максимального правдоподобия.

4. Исследователь Кролик сравнивает два сорта Морковки, А и Б. Морковки сорта А имеют случайный размер $\mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A^2)$. Морковки сорта Б имеют случайный размер $\mathcal{N}(\mu_B, \sigma_B^2)$.

   У Кролика n наблюдений по морковам сорта А, a_1, ..., a_n, и ещё n наблюдений по морковкам сорта Б, b_1, ..., b_n. Все четыре параметра — неизвестные.

   а) Найдите оценки всех параметров с помощью максимального правдоподобия.
   б) Выведите явную формулу для статистики Вальда для проверки гипотезы $\mu_A = \mu_B$.

5. Исследователь Кролик сравнивает два сорта Морковки, А и Б. Вероятность того, что морковка имеет сорт А описывается функцией

$$\mathbb{P}(y_i = A \mid r_i) = \Lambda(\beta_1 + \beta_2 r_i),$$

   где r_i — размер морковки и Λ — логистическая функция.

   Выведите явную формулу для статистики множителей Лагранжа для проверки гипотезы $\beta_2 = 0$.

6. Исследователь Кролик знает, что размер сорта морковки А имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(10, 9)$. Сорт Б Кролику не знаком, поэтому он предполагает, что размер морковки сорта Б имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

   На поле равновероятно встречаются оба сорта морковки. К сожалению, определить сорт морковки по её виду Кролик не может.

   У Кролика есть 100 наблюдений r_i за размером морковки.

   а) Выпишите функцию правдоподобия для данной задачи.
   б) Выпишите условия первого порядка. Если возможно, найдите оценки правдоподобия в явном виде.