Задача 5*. Рассматривается линейная регрессия $Y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$, в которой случайные ошибки $(\varepsilon_t)_{t=1}^{\infty}$ являются независимыми случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2. Являются ли МНК-оценки $\hat{\alpha}_n$ и $\hat{\beta}_n$ состоятельными оценками неизвестных параметров α и β соответственно?

Решение. Запишем уравнение регрессии в матричной форме $Y = X\theta + \varepsilon$, где

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n \end{bmatrix}, \quad \theta := \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим МНК-оценку $\hat{\theta}_n = (X^T X)^{-1} X^T Y$. Ясно, что первая и вторая координаты вектора $\hat{\theta}_n$ равны $\hat{\alpha}_n$ и $\hat{\beta}_n$ соответственно. Имеем:

$$\mathbb{E}\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_n \\ \hat{\beta}_n \end{bmatrix} = \mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \mathbb{E}\left[(X^T X)^{-1} X^T Y\right] = (X^T X)^{-1} X^T \mathbb{E}[Y] =$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T \mathbb{E}[X\theta + \varepsilon] = (X^T X)^{-1} X^T X\theta = \theta = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\mathbb{E}\left[\hat{\alpha}_n\right] = \alpha$ и $\mathbb{E}\left[\hat{\beta}_n\right] = \beta$. Далее, используя свойства ковариационных матриц, а также формулы $(AB)^T = B^T A^T$ и $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, получаем, что

$$\mathrm{V}\left(\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_n \\ \hat{\beta}_n \end{bmatrix}\right) = \mathrm{V}(\hat{\theta}_n) = \mathrm{V}\left((X^T X)^{-1} X^T Y\right) =$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T\, \mathrm{V}(Y)\left((X^T X)^{-1} X^T\right)^T =$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T\, \mathrm{V}(Y)(X^T)^T \left((X^T X)^{-1}\right)^T =$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T\, \mathrm{V}(Y) X \left((X^T X)^T\right)^{-1} =$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T\, \mathrm{V}(Y) X \left(X^T (X^T)^T\right)^{-1} =$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T\, \mathrm{V}(Y) X (X^T X)^{-1} =$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T\, \mathrm{V}(X\theta + \varepsilon) X (X^T X)^{-1} =$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T\, \mathrm{V}(\varepsilon) X (X^T X)^{-1} =$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T \sigma^2 I X (X^T X)^{-1} =$$

$$= \sigma^2 (X^T X)^{-1} \underbrace{X^T X}\,\underbrace{(X^T X)^{-1}} = \sigma^2 (X^T X)^{-1}.$$

В нашем случае $X^T X = \begin{bmatrix} n & \sum_{t=1}^n t \\ \sum_{t=1}^n t & \sum_{t=1}^n t^2 \end{bmatrix}$. Стало быть,

$$(X^T X)^{-1} = \frac{1}{n\sum_{t=1}^n t^2 - \left(\sum_{t=1}^n t\right)^2} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^n t^2 & -\sum_{t=1}^n t \\ -\sum_{t=1}^n t & n \end{bmatrix}.$$

Значит,

$$\mathrm{D}(\hat{\alpha}_n) = \sigma^2 \frac{\sum_{t=1}^n t^2}{n\sum_{t=1}^n t^2 - \left(\sum_{t=1}^n t\right)^2} \quad \text{и} \quad \mathrm{D}(\hat{\beta}_n) = \sigma^2 \frac{n}{n\sum_{t=1}^n t^2 - \left(\sum_{t=1}^n t\right)^2}.$$

Покажем, что $\mathrm{D}(\hat{\alpha}_n) \to 0$ и $\mathrm{D}(\hat{\beta}_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Для этого нам потребуются известные из школьного курса алгебры формулы

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{и} \qquad 1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{D}(\hat{\alpha}_n) = \sigma^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{t=1}^n t^2}{n\sum_{t=1}^n t^2 - \left(\sum_{t=1}^n t\right)^2} =$$

$$= \sigma^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2} \overset{\substack{\text{делим числитель} \\ \text{и знаменатель на } n^4}}{=}$$

$$= \sigma^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{n}\dfrac{n+1}{n}\dfrac{2n+1}{n}}{\dfrac{1}{6}\dfrac{n+1}{n}\dfrac{2n+1}{n} - \dfrac{1}{4}\dfrac{(n+1)^2}{n^2}} =$$

$$= \sigma^2 \frac{\dfrac{1}{6}\times 0\times 1\times 2}{\dfrac{1}{6}\times 1\times 2 - \dfrac{1}{4}\times 1} = 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{D}(\hat{\beta}_n) = \sigma^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sum_{t=1}^n t^2 - \left(\sum_{t=1}^n t\right)^2} =$$

$$= \sigma^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2} \overset{\substack{\text{делим числитель} \\ \text{и знаменатель на } n^4}}{=}$$

$$= \sigma^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{1}{6}\dfrac{n+1}{n}\dfrac{2n+1}{n} - \dfrac{1}{4}\dfrac{(n+1)^2}{n^2}} =$$

$$= \sigma^2 \frac{0}{\dfrac{1}{6}\times 1\times 2 - \dfrac{1}{4}\times 1} = 0.$$

Таким образом, мы показали, что $\mathbb{E}\left[\hat{\alpha}_n\right] = \alpha$, $\mathbb{E}\left[\hat{\beta}_n\right] = \beta$, $\mathrm{D}(\hat{\alpha}_n) \to 0$, $\mathrm{D}(\hat{\beta}_n) \to 0$ при $n \to \infty$. В силу достаточного условия состоятельности это означает, что $\hat{\alpha}_n$ и $\hat{\beta}_n$ являются состоятельными оценками параметров α и β соответственно. □