4.29.

Решение. 1. Запишем задачу о наименьших квадратах:

$$Q(\beta_1, \beta_2) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_1 x_{i,1} - \beta_2 x_{i,2})^2 \to \min_{\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}}.$$

Имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial \beta_1} (y_i - \beta_1 x_{i,1} - \beta_2 x_{i,2})^2 = \sum_{i=1}^{n} 2(-x_{i,1})(y_i - \beta_1 x_{i,1} - \beta_2 x_{i,2}) = 0, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial \beta_2} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial \beta_2} (y_i - \beta_1 x_{i,1} - \beta_2 x_{i,2})^2 = \sum_{i=1}^{n} 2(-x_{i,2})(y_i - \beta_1 x_{i,1} - \beta_2 x_{i,2}) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{i,1}(y_i - \beta_1 x_{i,1} - \beta_2 x_{i,2}) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i,2}(y_i - \beta_1 x_{i,1} - \beta_2 x_{i,2}) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{i,1} y_i - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i,1}^2 - \beta_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i,1} x_{i,2} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i,2} y_i - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i,1} x_{i,2} - \beta_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i,2}^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i,1}^2 + \beta_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i,1} x_{i2} = \sum_{i=1}^{n} x_{i,1} y_i, \\ \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i,1} x_{i,2} + \beta_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i,2}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_{i,2} y_i; \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{i,1}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{i,1} x_{i,2} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i,1} x_{i,2} & \sum_{i=1}^{n} x_{i,2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{i,1} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i,2} y_i \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

2. $X^T X = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{i,1}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{i,1} x_{i,2} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i,1} x_{i,2} & \sum_{i=1}^{n} x_{i,2}^2 \end{pmatrix}$, $X^T y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{i,1} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i,2} y_i \end{pmatrix}$.

3. Учитывая результаты пункта 2, равенство $(*)$ может быть переписано в требуемом виде:

$$X^T X \beta = X^T y, \qquad (**)$$

где $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$.

4. Если матица $X^T X$ не является вырожденной, т.е. если $\det X^T X \neq 0$, то существует обратная матрица $(X^T X)^{-1}$. Умножая равенство $(**)$ слева на матрицу $(X^T X)^{-1}$, получаем выражение $(X^T X)^{-1} X^T X \beta = (X^T X)^{-1} X^T y$, из которого следует требуемая формула $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$. □