Глава. Состоятельность оценок. Эндогенность

1. Элементы теории

Определение. Последовательность случайных величин $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *сходится по вероятности* к случайной величине X, если для любого $\varepsilon > 0$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\{| X_n - X | > \varepsilon\}\right) = 0 .$$

Для сходимости по вероятности используют два основных обозначения: 1) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ при $n \to \infty$, 2) $\operatorname*{plim}_{n\to\infty} X_n = X$.

Определение. Пусть Θ — множество допустимых значений неизвестного параметра θ. Оценка $\hat{\theta}_n$ называется *состоятельной оценкой* неизвестного параметра $\theta \in \Theta$, если для любого $\theta \in \Theta$ имеет место $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$ при $n \to \infty$.

Теорема (достаточное условие состоятельности оценки). Если

1) $\forall \theta \in \Theta$: $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] \to \theta$ при $n \to \infty$,

2) $\forall \theta \in \Theta$: $\mathrm{D}[\hat{\theta}_n] \to 0$ при $n \to \infty$,

то $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$ при $n \to \infty$, т.е. оценка $\hat{\theta}_n$ является состоятельной.

Теорема (Слуцкий). Если (борелевская) функция $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ и $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$, $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} b$, то $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(a,b)$.

Непосредственно из теоремы Слуцкого вытекают следствия:

- если $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a \in \mathbb{R}$, то для любой константы $c \in \mathbb{R}$ имеет место $c \cdot X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c \cdot a$;
- если $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a \in \mathbb{R}$ и $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} b \in \mathbb{R}$, то $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a + b$;
- если $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a \in \mathbb{R}$ и $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} b \in \mathbb{R}$, то $X_n Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} ab$;
- если $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a \in \mathbb{R}$, $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} b \in \mathbb{R}$ и $b \neq 0$, то $X_n / Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a / b$;
- если (борелевская) функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in \mathbb{R}$ и $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$, то $g(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(a)$.

Закон больших чисел (Хинчин). Если $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными математическими ожиданиями, то $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_i]$ при $n \to \infty$, где $\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Определение. Пусть регрессионная модель записана в матричной форме $Y = X\beta + \varepsilon$. Говорят, что в модели имеется *эндогенность*, если $\mathbb{E}[\varepsilon \mid X] \neq 0$.

В частности, в модели есть эндогенность, если существуют s, t и j, такие, что $\mathrm{cov}(X_{sj}, \varepsilon_t) \neq 0$.

2. Задачи

Задача 1. Рассматривается линейная регрессия $Y_i = \alpha + \varepsilon_i$, в которой случайные ошибки $(\varepsilon_i)_{i=1}^{\infty}$ являются независимыми случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2. Является ли в этом случае МНК-оценка $\hat{\alpha}_n := \dfrac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$ состоятельной оценкой неизвестного параметра α?

Решение. Имеем:

$$\mathbb{E}[\hat{\alpha}_n] = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Y_i]}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha}{n} = \frac{n\alpha}{n} = \alpha \underset{n\to\infty}{\to} \alpha,$$

$$\mathrm{D}(\hat{\alpha}_n) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{D}(Y_i)}{n^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{D}(\varepsilon_i)}{n^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma^2}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

В силу достаточного условия состоятельности оценок, оценка $\hat{\alpha}_n$ является состоятельной. $\square$

Задача 2. Рассматривается линейная регрессия $Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $(\varepsilon_i)_{i=1}^{\infty}$ — независимые случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2,
2) $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ — известные числа,
3) $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = \infty$.

Является ли в этом случае МНК-оценка $\hat{\beta}_n := \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ состоятельной оценкой неизвестного параметра β?

Решение. Имеем:

$$\mathbb{E}[\hat{\beta}_n] = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \mathbb{E}[Y_i]}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \beta x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \beta \underset{n\to\infty}{\to} \beta,$$

$$\mathrm{D}(\hat{\beta}_n) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2\, \mathrm{D}(Y_i)}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2\, \mathrm{D}(\varepsilon_i)}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

В силу достаточного условия состоятельности оценок, оценка $\hat{\beta}_n$ является состоятельной. $\square$

Задача 3*. Рассматривается линейная регрессия $Y_i = \beta X_i + \varepsilon_i$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) (X_i, ε_i), $i \in \mathbb{N}$, — независимые одинаково распределенные случайные векторы,
2) $0 < \mathbb{E}[X_i^2] < \infty$, $\mathbb{E}[\varepsilon_i^2] < \infty$, $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$, $i \in \mathbb{N}$,
3) $\operatorname{cov}(X_i, \varepsilon_i) = C$, $i \in \mathbb{N}$.

Рассматривается МНК-оценка $\hat{\beta}_n := \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$ неизвестного параметра β. Является ли $\hat{\beta}_n$ состоятельной оценкой при $C \neq 0$? А при $C = 0$?

Решение. Заметим, что последовательность $Z_i := X_i Y_i$, $i \in \mathbb{N}$, является последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечные математические ожидания. В самом деле, одинаковая распределенность случайных величин Z_i вытекает из одинаковой распределенности случайных векторов (X_i, ε_i) и представимости случайных величин $Z_i = g(X_i, \varepsilon_i)$ через векторы (X_i, ε_i) с помощью одной и той же функции $g(x, \varepsilon) = \beta x^2 + x\varepsilon$. Конечность математических ожиданий вытекает из следующей цепочки оценок

$$\mathbb{E}|X_i Y_i| \le |\beta| \mathbb{E}[X_i^2] + \mathbb{E}|X_i \varepsilon_i| \overset{\substack{\text{неравенство}\\ \text{Коши–Буняковского}}}{\le}$$
$$\le |\beta| \underbrace{\mathbb{E}[X_i^2]}_{<\infty} + \underbrace{\sqrt{\mathbb{E}[X_i^2]}}_{<\infty} \underbrace{\sqrt{\mathbb{E}[\varepsilon_i^2]}}_{<\infty} < \infty,$$

при выводе которой мы воспользовались неравенством Коши–Буняковского $\mathbb{E}|\xi\eta| \le \sqrt{\mathbb{E}[\xi^2]}\sqrt{\mathbb{E}[\eta^2]}$, где ξ и η — произвольные случайные величины, имеющие конечные вторые начальные моменты: $\mathbb{E}[\xi^2] < \infty$ и $\mathbb{E}[\eta^2] < \infty$. Тогда в силу закона больших чисел в форме Хинчина имеем:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_i Y_i] \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{1*}$$

Далее, легко видеть, что последовательность X_i^2, $i \in \mathbb{N}$, является последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечные математические ожидания. Стало быть, в силу закона больших чисел в форме Хинчина:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_i^2] \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{2*}$$

Тогда из $(1*)$, $(2*)$ и теоремы Слуцкого получаем, что

$$\hat{\beta}_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{\mathbb{E}[X_i Y_i]}{\mathbb{E}[X_i^2]} =$$
$$= \frac{\beta\mathbb{E}[X_i^2] + \mathbb{E}[X_i \varepsilon_i]}{\mathbb{E}[X_i^2]} = \frac{\beta\mathbb{E}[X_i^2] + \operatorname{cov}(X_i, \varepsilon_i)}{\mathbb{E}[X_i^2]} = \beta + \frac{C}{\mathbb{E}[X_i^2]}.$$

Стало быть, при $C \ne 0$ оценка $\hat{\beta}_n$ не является состоятельной, а при $C = 0$ является состоятельной. □

Задача 4*. Рассматривается линейная регрессия $Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) (X_i, ε_i), $i \in \mathbb{N}$, — независимые одинаково распределенные случайные векторы,
2) $0 < \mathbb{E}[X_i^2] < \infty$, $\mathbb{E}[\varepsilon_i^2] < \infty$, $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$, $i \in \mathbb{N}$,
3) $\operatorname{cov}(X_i, \varepsilon_i) = C$, $i \in \mathbb{N}$.

Рассматриваются две МНК-оценки $\hat{\beta}_n := \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n)}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2}$ и $\hat{\alpha}_n = \bar{Y}_n - \hat{\beta}_n \bar{X}_n$ для неизвестных параметров β и α соответственно.

(a) Является ли $\hat{\beta}_n$ состоятельной оценкой при $C \ne 0$? А при $C = 0$?

(b) Является ли $\hat{\alpha}_n$ состоятельной оценкой при $C \ne 0$? А при $C = 0$?

Решение. (a) Предварительно заметим, что

$$\tfrac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)(Y_i-\overline{Y}_n)=\tfrac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n}X_iY_i-\overline{X}_n\overline{Y}_n,$$
$$\tfrac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2=\tfrac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n}X_i^2-(\overline{X}_n)^2.$$

Далее, обратим внимание на то, что последовательность $Z_i := X_iY_i$, $i\in\mathbb{N}$, является последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечные математические ожидания. В самом деле, одинаковая распределенность случайных величин Z_i вытекает из одинаковой распределенности случайных векторов (X_i,ε_i) и представимости случайных величин $Z_i=g(X_i,\varepsilon_i)$ через векторы (X_i,ε_i) с помощью одной и той же функции $g(x,\varepsilon)=\alpha x+\beta x^2+x\varepsilon$. Конечность математических ожиданий вытекает из следующей цепочки оценок

$$\mathbb{E}|X_iY_i|\le|\alpha|\mathbb{E}|X_i\cdot 1|+|\beta|\mathbb{E}[X_i^2]+\mathbb{E}|X_i\varepsilon_i|\overset{\substack{\text{неравенство}\\ \text{Коши–Буняковского}}}{\le}$$
$$\le|\alpha|\underbrace{\sqrt{\mathbb{E}[X_i^2]}}_{<\infty}\underbrace{\sqrt{\mathbb{E}[1^2]}}_{=1<\infty}+|\beta|\underbrace{\mathbb{E}[X_i^2]}_{<\infty}+\underbrace{\sqrt{\mathbb{E}[X_i^2]}}_{<\infty}\underbrace{\sqrt{\mathbb{E}[\varepsilon_i^2]}}_{<\infty}<\infty,$$

при выводе которой мы два раза воспользовались неравенством Коши–Буняковского $\mathbb{E}|\xi\eta|\le\sqrt{\mathbb{E}[\xi^2]}\sqrt{\mathbb{E}[\eta^2]}$, где ξ и η — произвольные случайные величины, имеющие конечные вторые начальные моменты: $\mathbb{E}[\xi^2]<\infty$ и $\mathbb{E}[\eta^2]<\infty$. Тогда в силу закона больших чисел в форме Хинчина имеем:

$$\frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n}X_iY_i\xrightarrow{\mathbb{P}}\mathbb{E}[X_iY_i]\quad\text{при}\quad n\to\infty. \tag{1*}$$

Легко видеть, что последовательность X_i^2, $i\in\mathbb{N}$, является последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечные математические ожидания. Стало быть, в силу закона больших чисел в форме Хинчина:

$$\frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{\mathbb{P}}\mathbb{E}[X_i^2]\quad\text{при}\quad n\to\infty. \tag{2*}$$

Непосредственно из закона больших чисел в форме Хинчина вытекает, что

$$\overline{X}_n\xrightarrow{\mathbb{P}}\mathbb{E}[X_i]\quad\text{и}\quad\overline{Y}_n\xrightarrow{\mathbb{P}}\mathbb{E}[Y_i]\quad\text{при } n\to\infty. \tag{3*}$$

Тогда из $(1*)-(3*)$ и теоремы Слуцкого получаем, что

$$\hat{\beta}_n=\frac{\tfrac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n}X_iY_i-\overline{X}_n\overline{Y}_n}{\tfrac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n}X_i^2-(\overline{X}_n)^2}\xrightarrow{\mathbb{P}}\frac{\mathbb{E}[X_iY_i]-\mathbb{E}X_i\mathbb{E}Y_i}{\mathbb{E}[X_i^2]-[\mathbb{E}X_i]^2}= \tag{4*}$$
$$=\frac{\mathrm{cov}(X_i,Y_i)}{\mathrm{D}(X_i)}=\frac{\mathrm{cov}(X_i,\alpha+\beta X_i+\varepsilon_i)}{\mathrm{D}(X_i)}=$$
$$=\frac{\beta\,\mathrm{D}(X_i)+\mathrm{cov}(X_i,\varepsilon_i)}{\mathrm{D}(X_i)}=\beta+\frac{C}{\mathrm{D}(X_i)}.$$

Стало быть, при $C\ne0$ оценка $\hat{\beta}_n$ не является состоятельной, а при $C=0$ является состоятельной.

(b) Из формулы $(4*)$ и теоремы Слуцкого получаем, что

$$\hat{\alpha}_n=\overline{Y}_n-\hat{\beta}_n\overline{X}_n\to\mathbb{E}[Y_i]-\left(\beta+\frac{C}{\mathrm{D}(X_i)}\right)\mathbb{E}[X_i]=$$
$$=\alpha+\beta\mathbb{E}[X_i]-\left(\beta+\frac{C}{\mathrm{D}(X_i)}\right)\mathbb{E}[X_i]=\alpha-\frac{C\mathbb{E}[X_i]}{\mathrm{D}(X_i)}.$$

Значит, при $C \neq 0$ и $\mathbb{E}[X_i] \neq 0$ оценка $\hat{\alpha}_n$ не является состоятельной, а при $C = 0$ или при $\mathbb{E}[X_i] = 0$ оценка $\hat{\alpha}_n$ является состоятельной. □

Задача 5*. Рассматривается линейная регрессия $Y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$, в которой случайные ошибки $(\varepsilon_t)_{t=1}^{\infty}$ являются независимыми случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2. Являются ли МНК-оценки $\hat{\alpha}_n$ и $\hat{\beta}_n$ состоятельными оценками неизвестных параметров α и β соответственно?

Решение. Запишем уравнение регрессии в матричной форме $Y = X\theta + \varepsilon$, где

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n \end{bmatrix}, \quad \theta := \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим МНК-оценку $\hat{\theta}_n = (X^T X)^{-1} X^T Y$. Ясно, что первая и вторая координаты вектора $\hat{\theta}_n$ равны $\hat{\alpha}_n$ и $\hat{\beta}_n$ соответственно. Имеем:

$$\mathbb{E}\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_n \\ \hat{\beta}_n \end{bmatrix} = \mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \mathbb{E}\left[(X^T X)^{-1} X^T Y\right] = (X^T X)^{-1} X^T \mathbb{E}[Y] =$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T \mathbb{E}[X\theta + \varepsilon] = (X^T X)^{-1} X^T X\theta = \theta = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\mathbb{E}\left[\hat{\alpha}_n\right] = \alpha$ и $\mathbb{E}\left[\hat{\beta}_n\right] = \beta$. Далее, используя свойства ковариационных матриц, а также формулы $(AB)^T = B^T A^T$ и $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, получаем, что

$$\mathrm{V}\left(\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_n \\ \hat{\beta}_n \end{bmatrix}\right) = \mathrm{V}(\hat{\theta}_n) = \mathrm{V}\left((X^T X)^{-1} X^T Y\right) =$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T\, \mathrm{V}(Y)\left((X^T X)^{-1} X^T\right)^T =$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T\, \mathrm{V}(Y)(X^T)^T \left((X^T X)^{-1}\right)^T =$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T\, \mathrm{V}(Y) X \left((X^T X)^T\right)^{-1} =$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T\, \mathrm{V}(Y) X \left(X^T (X^T)^T\right)^{-1} =$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T\, \mathrm{V}(Y) X (X^T X)^{-1} =$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T\, \mathrm{V}(X\theta + \varepsilon) X (X^T X)^{-1} =$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T\, \mathrm{V}(\varepsilon) X (X^T X)^{-1} =$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T \sigma^2 I X (X^T X)^{-1} =$$

$$= \sigma^2 (X^T X)^{-1} \underbrace{X^T X}\,\underbrace{(X^T X)^{-1}} = \sigma^2 (X^T X)^{-1}.$$

В нашем случае $X^T X = \begin{bmatrix} n & \sum_{t=1}^n t \\ \sum_{t=1}^n t & \sum_{t=1}^n t^2 \end{bmatrix}$. Стало быть,

$$(X^T X)^{-1} = \frac{1}{n\sum_{t=1}^n t^2 - \left(\sum_{t=1}^n t\right)^2} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^n t^2 & -\sum_{t=1}^n t \\ -\sum_{t=1}^n t & n \end{bmatrix}.$$

Значит,

$$\mathrm{D}(\hat{\alpha}_n) = \sigma^2 \frac{\sum_{t=1}^n t^2}{n\sum_{t=1}^n t^2 - \left(\sum_{t=1}^n t\right)^2} \quad \text{и} \quad \mathrm{D}(\hat{\beta}_n) = \sigma^2 \frac{n}{n\sum_{t=1}^n t^2 - \left(\sum_{t=1}^n t\right)^2}.$$

Покажем, что $\mathrm{D}(\hat{\alpha}_n) \to 0$ и $\mathrm{D}(\hat{\beta}_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Для этого нам потребуются известные из школьного курса алгебры формулы

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{и} \quad 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{D}(\hat{\alpha}_n) = \sigma^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{t=1}^n t^2}{n\sum_{t=1}^n t^2 - \left(\sum_{t=1}^n t\right)^2} =$$

$$= \sigma^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2} \overset{\substack{\text{делим числитель} \\ \text{и знаменатель на } n^4}}{=}$$

$$= \sigma^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{6}\frac{1}{n}\frac{n+1}{n}\frac{2n+1}{n}}{\frac{1}{6}\frac{n+1}{n}\frac{2n+1}{n} - \frac{1}{4}\frac{(n+1)^2}{n^2}} =$$

$$= \sigma^2 \frac{\frac{1}{6}\times 0 \times 1 \times 2}{\frac{1}{6}\times 1 \times 2 - \frac{1}{4}\times 1} = 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{D}(\hat{\beta}_n) = \sigma^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sum_{t=1}^n t^2 - \left(\sum_{t=1}^n t\right)^2} =$$

$$= \sigma^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2} \overset{\substack{\text{делим числитель} \\ \text{и знаменатель на } n^4}}{=}$$

$$= \sigma^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{6}\frac{n+1}{n}\frac{2n+1}{n} - \frac{1}{4}\frac{(n+1)^2}{n^2}} =$$

$$= \sigma^2 \frac{0}{\frac{1}{6}\times 1 \times 2 - \frac{1}{4}\times 1} = 0.$$

Таким образом, мы показали, что $\mathbb{E}\left[\hat{\alpha}_n\right] = \alpha$, $\mathbb{E}\left[\hat{\beta}_n\right] = \beta$, $\mathrm{D}(\hat{\alpha}_n) \to 0$, $\mathrm{D}(\hat{\beta}_n) \to 0$ при $n \to \infty$. В силу достаточного условия состоятельности это означает, что $\hat{\alpha}_n$ и $\hat{\beta}_n$ являются состоятельными оценками параметров α и β соответственно. □