

Задача. Рассматривается модель линейной регрессии $Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$, в которой случайные ошибки $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ являются независимыми нормально распределенными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 . Имеются следующие данные: $n = 100$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 50$, $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 112$, $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 693$.

- Запишите логарифмическую функцию правдоподобия.
- При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценки неизвестных параметров β и σ^2 .
- Найдите информационную матрицу Фишера $I_n(\theta)$, где $\theta = (\beta, \sigma^2)$.
- Найдите асимптотическое распределение вектора $\hat{\theta}_{ML} = (\hat{\beta}_{ML}, \hat{\sigma}_{ML}^2)$.
- Найдите асимптотические распределения оценок $\hat{\beta}_{ML}$ и $\hat{\sigma}_{ML}^2$.
- Постройте двусторонний 95%-ый доверительный интервал для β .
- Постройте двусторонний 95%-ый доверительный интервал для σ^2 .
- На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу $H_0: \beta = 2$ против альтернативы $H_1: \beta \neq 2$.
- На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу $H_0: \sigma^2 = 1$ против альтернативы $H_1: \sigma^2 \neq 1$.

Решение. (а) Поскольку $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, то $Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i \sim N(\beta x_i, \sigma^2)$. Значит,

$$f_{Y_i}(y_i; \beta, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_i - \beta x_i)^2}{2\sigma^2}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Стало быть, функция правдоподобия имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y_1, \dots, y_n; \beta, \sigma^2) &= f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n; \beta, \sigma^2) \stackrel{Y_1, \dots, Y_n \text{ — независимы}}{=} \\ &= \prod_{i=1}^n f_{Y_i}(y_i; \beta, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_i - \beta x_i)^2}{2\sigma^2}} = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \cdot (\sigma^2)^{-n/2} \cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \beta x_i)^2}{2\sigma^2}}, \end{aligned}$$

а значит, логарифмическая функция правдоподобия

$$l(y_1, \dots, y_n; \beta, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \beta x_i)^2}{2\sigma^2}.$$

(b) Найдем точку максимума логарифмической функции правдоподобия:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{\partial l(y_1, \dots, y_n; \beta, \sigma^2)}{\partial \beta} = 0, \\ \frac{\partial l(y_1, \dots, y_n; \beta, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial l}{\partial \beta} = -\frac{\sum_{i=1}^n 2x_i(y_i - \beta x_i)}{2\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i(y_i - \beta x_i)}{\sigma^2} = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \beta x_i)^2}{2\sigma^4} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Решением первого уравнения системы является

$$\hat{\beta}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{112}{50} = 2.24.$$

Выражая из второго уравнения системы параметр σ^2 и подставляя в полученную формулу вместо параметра β найденную выше оценку $\hat{\beta}_{ML}$, приходим к выражению для оценки параметра σ^2 :

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{ML}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_{ML} x_i)^2 = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\hat{\beta}_{ML} \sum_{i=1}^n x_i y_i + \hat{\beta}_{ML}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \right] = \\ &= \frac{1}{100} [693 - 2 \times 2.24 \times 112 + 2.24^2 \times 50] \approx 4.42.\end{aligned}$$

(с) Информационная матрица Фишера может быть найдена по формуле:

$$I_n(\theta) = -\mathbb{E} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial (\sigma^2)} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial (\sigma^2) \partial \beta} & \frac{\partial^2 l}{(\partial (\sigma^2))^2} \end{bmatrix}.$$

Найдем вторые производные логарифмической функции правдоподобия:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2} &= -\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma^2}, \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial (\sigma^2)} &= \frac{\partial^2 l}{\partial (\sigma^2) \partial \beta} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i (y_i - \beta x_i)}{\sigma^4}, \\ \frac{\partial^2 l}{(\partial (\sigma^2))^2} &= \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \beta x_i)^2}{\sigma^6}.\end{aligned}$$

Найдем теперь математические ожидания данных вторых производных:

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2} \right] &= -\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma^2}, \\ \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial (\sigma^2)} \right] &= -\frac{\sum_{i=1}^n x_i \mathbb{E}[Y_i - \beta x_i]}{\sigma^4} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i \mathbb{E}[\varepsilon_i]}{\sigma^4} = 0, \\ \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 l}{(\partial (\sigma^2))^2} \right] &= \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(Y_i - \beta x_i)^2]}{\sigma^6} = \\ &= \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\varepsilon_i^2]}{\sigma^6} = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{\sum_{i=1}^n D(\varepsilon_i)}{\sigma^6} = \\ &= \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{\sum_{i=1}^n \sigma^2}{\sigma^6} = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{n\sigma^2}{\sigma^6} = -\frac{n}{2\sigma^4}.\end{aligned}$$

Таким образом, получаем искомую информационную матрицу Фишера:

$$I_n(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{bmatrix}.$$

(d) Известно, что при выполнении некоторых условий регулярности имеет место следующее свойство асимптотической нормальности оценок максимального правдоподобия:

$$\hat{\theta}_{ML}^{\text{as}} \sim N(\theta, I_n^{-1}(\hat{\theta}_{ML})).$$

Принимая во внимание данное соотношение, а также равенство

$$I_n^{-1}(\hat{\theta}_{ML}) = \begin{bmatrix} \frac{\hat{\sigma}_{ML}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} & 0 \\ 0 & \frac{2\hat{\sigma}_{ML}^4}{n} \end{bmatrix},$$

получаем, что

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_{ML} \\ \hat{\sigma}_{ML}^2 \end{bmatrix}^{\text{as}} \sim N \left(\begin{bmatrix} \beta \\ \sigma^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\hat{\sigma}_{ML}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} & 0 \\ 0 & \frac{2\hat{\sigma}_{ML}^4}{n} \end{bmatrix} \right).$$

(е) Непосредственно из пункта (d) вытекает, что

$$\hat{\beta}_{ML}^{\text{as}} \sim N \left(\beta, \frac{\hat{\sigma}_{ML}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right) \quad \text{и} \quad \hat{\sigma}_{ML}^2 \sim N \left(\sigma^2, \frac{2\hat{\sigma}_{ML}^4}{n} \right).$$

(f) Поскольку $\hat{\beta}_{ML}^{\text{as}} \sim N \left(\beta, \frac{\hat{\sigma}_{ML}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right)$, то $\frac{\hat{\beta}_{ML} - \beta}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{ML}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}}} \sim N(0, 1)$. Значит, событие

$$-1.96 \leq \frac{\hat{\beta}_{ML} - \beta}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{ML}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}}} \leq 1.96 \quad \text{имеет вероятность приблизительно 95\%}. \text{ Решая данное}$$

неравенство относительно β , получаем требуемый доверительный интервал:

$$\hat{\beta}_{ML} - 1.96 \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{ML}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \leq \beta \leq \hat{\beta}_{ML} + 1.96 \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{ML}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}}.$$

Стало быть,

$$\underbrace{2.24 - 1.96 \sqrt{\frac{4.42}{50}}}_{\approx 1.66} \leq \beta \leq \underbrace{2.24 + 1.96 \sqrt{\frac{4.42}{50}}}_{\approx 2.82}.$$

(g) Поскольку $\hat{\sigma}_{ML}^2 \sim N \left(\sigma^2, \frac{2\hat{\sigma}_{ML}^4}{n} \right)$, то $\frac{\hat{\sigma}_{ML}^2 - \sigma^2}{\sqrt{\frac{2\hat{\sigma}_{ML}^4}{n}}} \sim N(0, 1)$. Значит, событие

$$-1.96 \leq \frac{\hat{\sigma}_{ML}^2 - \sigma^2}{\sqrt{\frac{2\hat{\sigma}_{ML}^4}{n}}} \leq 1.96 \quad \text{имеет вероятность приблизительно 95\%}. \text{ Решая данное}$$

неравенство относительно σ^2 , получаем требуемый доверительный интервал:

$$\hat{\sigma}_{ML}^2 - 1.96 \sqrt{\frac{2\hat{\sigma}_{ML}^4}{n}} \leq \sigma^2 \leq \hat{\sigma}_{ML}^2 + 1.96 \sqrt{\frac{2\hat{\sigma}_{ML}^4}{n}}.$$

Стало быть,

$$\underbrace{4.42 - 1.96 \sqrt{\frac{2 \times 4.42^2}{100}}}_{\approx 3.19} \leq \sigma^2 \leq \underbrace{4.42 + 1.96 \sqrt{\frac{2 \times 4.42^2}{100}}}_{\approx 5.65}.$$

(h) В пункте (f) мы нашли 95%-ый доверительный интервал для параметра β . Он оказался равным $[1.66; 2.82]$. Учитывая, что гипотетическое значение параметра β из гипотезы H_0 (равное 2) принадлежит данному доверительному интервалу, гипотеза H_0 не может быть отвергнута.

(i) В пункте (g) мы нашли 95%-ый доверительный интервал для параметра σ^2 . Он оказался равным $[4.42; 5.65]$. Учитывая, что гипотетическое значение параметра σ^2 из гипотезы H_0 (равное 1) не принадлежит данному доверительному интервалу, гипотеза H_0 должна быть отвергнута. \square