Задача. Рассматривается модель линейной регрессии $Y_t = \beta t + \varepsilon_t$, $t = 1, 2$, в которой случайные ошибки удовлетворяют следующим условиям: $\mathbb{E}[\varepsilon_1] = \mathbb{E}[\varepsilon_2] = 0$, $\mathrm{D}(\varepsilon_1) = \mathrm{D}(\varepsilon_2) = 2$, $\mathrm{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -1$.

(a) Найдите МНК-оценку параметра β и её дисперсию.

(b) Найдите GLS-оценку параметра β и её дисперсию.

(c) Какая из полученных выше оценок является более эффективной?

Решение. (a) $\hat{\beta}_{\text{МНК}} = \dfrac{1 \cdot Y_1 + 2 \cdot Y_2}{1^2 + 2^2} = \frac{1}{5} Y_1 + \frac{2}{5} Y_2$,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(\hat{\beta}_{\text{МНК}}) &= \mathrm{D}(\tfrac{1}{5} Y_1 + \tfrac{2}{5} Y_2) = \tfrac{1}{25}\mathrm{D}(Y_1) + \tfrac{4}{25}\mathrm{D}(Y_2) + 2 \cdot \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{2}{5}\mathrm{cov}(Y_1, Y_2) = \\ &= \tfrac{1}{25}\mathrm{D}(\varepsilon_1) + \tfrac{4}{25}\mathrm{D}(\varepsilon_2) + 2 \cdot \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{2}{5}\mathrm{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \\ &= \tfrac{1}{25} \cdot 2 + \tfrac{4}{25} \cdot 2 + 2 \cdot \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{2}{5} \cdot (-1) = \tfrac{6}{25} = 0.24 . \end{aligned}$$

(b) Ковариационная матрица вектора $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$ равна $\mathrm{V}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Обозначим её через V. Оценка GLS имеет следующий вид:

$$\hat{\beta}_{\text{GLS}} = (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} Y ,$$

где $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ и $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$. Обратная матрица к матрице V равна $V^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Следовательно,

$$\hat{\beta}_{\text{GLS}} = \left([1 \;\; 2] \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} [1 \;\; 2] \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \left([1 \;\; 2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} [1 \;\; 2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = (14)^{-1} [4 \;\; 5] \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \tfrac{4}{14} Y_1 + \tfrac{5}{14} Y_2 ,$$

а значит,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(\hat{\beta}_{\text{GLS}}) &= \mathrm{D}(\tfrac{4}{14} Y_1 + \tfrac{5}{14} Y_2) = \tfrac{16}{196}\mathrm{D}(Y_1) + \tfrac{25}{196}\mathrm{D}(Y_2) + 2 \cdot \tfrac{4}{14} \cdot \tfrac{5}{14}\mathrm{cov}(Y_1, Y_2) = \\ &= \tfrac{16}{196}\mathrm{D}(\varepsilon_1) + \tfrac{25}{196}\mathrm{D}(\varepsilon_2) + 2 \cdot \tfrac{4}{14} \cdot \tfrac{5}{14}\mathrm{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \\ &= \tfrac{16}{196} \cdot 2 + \tfrac{25}{196} \cdot 2 + 2 \cdot \tfrac{4}{14} \cdot \tfrac{5}{14} \cdot (-1) = \tfrac{42}{196} \approx 0.21 . \end{aligned}$$

(c) Несложно проверить, что обе оценки $\hat{\beta}_{\text{МНК}}$ и $\hat{\beta}_{\text{GLS}}$ являются несмещенными. При этом $\mathrm{D}(\hat{\beta}_{\text{GLS}}) < \mathrm{D}(\hat{\beta}_{\text{МНК}})$. Стало быть, оценка $\hat{\beta}_{\text{GLS}}$ является более эффективной, чем $\hat{\beta}_{\text{МНК}}$.

□