Задача. Рассматривается модель линейной регрессии $Y_t = \beta x_t + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_1^2)$ при $t = 1, \dots, n_1$, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_2^2)$ при $t = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$, случайные величины $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_1+n_2}$ независимы, $x_1, \dots, x_{n_1+n_2}$ — известные вещественные числа, не равные нулю одновременно, n_1 и n_2 известные натуральные числа.

(a) Выпишите логарифмическую функцию правдоподобия.

(b) Пусть $n_1 = 5$, $n_2 = 5$,

x_t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	1.43	5.89	9.11	10.17	13.20	20.90	18.35	27.89	21.67	33.48

Напишите программу в среде MATLAB и оцените с помощью неё неизвестные параметры β, σ_1^2, σ_2^2.

(c) Напишите программу в среде MATLAB и на уровне значимости 5% проведите с помощью неё тест отношения правдоподобия о гетероскедастичности случайных ошибок, т.е. протестируйте гипотезу $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Решение. (a) Имеем:

$$\mathcal{L}(y_1, \dots, y_{n_1+n_2}; \beta, \sigma_1^2, \sigma_2^2) = \prod_{t=1}^{n_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(y_t - \beta x_t)^2}{2\sigma_1^2}} \times \prod_{t=n_1+1}^{n_1+n_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(y_t - \beta x_t)^2}{2\sigma_2^2}},$$

$$l(y_1, \dots, y_{n_1+n_2}; \beta, \sigma_1^2, \sigma_2^2) =$$

$$= \sum_{t=1}^{n_1} \left[-\frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \sigma_1^2 - \frac{(y_t - \beta x_t)^2}{2\sigma_1^2} \right] + \sum_{t=n_1+1}^{n_1+n_2} \left[-\frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \sigma_2^2 - \frac{(y_t - \beta x_t)^2}{2\sigma_2^2} \right].$$

(b) Код программы в среде MATLAB:

```
function [theta_ML, LLF] = get_theta_ML(x, y, n1, n2)
fun = @(theta) get_NegLLF(theta, x, y, n1, n2);
x0 = [0, 1, 1]';
A = [];
b = [];
Aeq = [];
beq = [];
lb = [-inf, 10^(-6), 10^(-6)]';
ub = [inf,  inf,     inf]';
nonlcon = [];
options = optimset('Algorithm', 'interior-point', 'Display', 'off');
[theta_ML, NegLLF] = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options);
LLF = -NegLLF;

% Вспомогательная функция: отрицательная логарифмическая функция
правдоподобия
function [l] = get_NegLLF(theta, x, y, n1, n2)
l = 0;
for t = 1:n1
    l = l - 0.5 * log(2*pi) - 0.5 * log(theta(2)) - 0.5 * ((y(t) - theta(1) *
x(t))^2 / theta(2));
end
for t = (n1+1):(n1+n2)
    l = l - 0.5 * log(2*pi) - 0.5 * log(theta(3)) - 0.5 * ((y(t) - theta(1) *
x(t))^2 / theta(3));
end
l = -l;
```

Применяя указанную выше программу к нашим данным, получаем следующие оценки неизвестных параметров: $\widehat{\beta} \approx 2.74$, $\widehat{\sigma_1^2} \approx 0.71$, $\widehat{\sigma_2^2} \approx 20.35$.

(с) Код вспомогательной программы в среде MATLAB:

```
function [theta_ML_R, LLF_R] = get_theta_ML_R(x, y, n1, n2, R, q)
fun = @(theta) get_NegLLF(theta, x, y, n1, n2);
x0 = [0, 1, 1]';
A = [];
b = [];
Aeq = R;
beq = q;
lb = [-inf, 10^(-6), 10^(-6)]';
ub = [inf,  inf,     inf]';
nonlcon = [];
options = optimset('Algorithm', 'interior-point', 'Display', 'off');
[theta_ML_R, NegLLF_R] = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options);
LLF_R = -NegLLF_R;

% Вспомогательная функция: отрицательная логарифмическая функция
правдоподобия
function [l] = get_NegLLF(theta, x, y, n1, n2)
l = 0;
for t = 1:n1
    l = l - 0.5 * log(2*pi) - 0.5 * log(theta(2)) - 0.5 * ((y(t) - theta(1) *
x(t))^2 / theta(2));
end
for t = (n1+1):(n1+n2)
    l = l - 0.5 * log(2*pi) - 0.5 * log(theta(3)) - 0.5 * ((y(t) - theta(1) *
x(t))^2 / theta(3));
end
l = -l;
```

Код программы в среде MATLAB, выполняющей пункт (с):

```
clear; clc;
% (c)
n1 = 5; n2 = 5;
x = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]';
y = [1.43, 5.89, 9.11, 10.17, 13.20, 20.90, 18.35, 27.89, 21.67, 33.48]';
R = [0, 1, -1];
q = 0;
sign_level = 0.05;
[theta_ML_UR, LLF_UR] = get_theta_ML_R(x, y, n1, n2, [], []);
[theta_ML_R, LLF_R] = get_theta_ML_R(x, y, n1, n2, R, q);
LR_obs = -2 * (LLF_R - LLF_UR);
LR_cr = chi2inv(1 - sign_level, rank(R));
if (LR_obs < LR_cr)
    disp('Ho не отвергается');
else
    disp('Ho отвергается');
end
```

Применяя указанную выше программу к нашим данным, получаем следующие результаты:

- $\widehat{\beta}_{UR} \approx 2.74$, $\widehat{\sigma^2_{1,UR}} \approx 0.71$, $\widehat{\sigma^2_{2,UR}} \approx 20.35$;
- $\widehat{\beta}_R \approx 2.99$, $\widehat{\sigma^2_{1,R}} \approx 8.01$, $\widehat{\sigma^2_{2,R}} \approx 8.01$;

- $l(\widehat{\beta}_{UR}, \widehat{\sigma^2_{1,UR}}, \widehat{\sigma^2_{2,UR}}) = -20.87$;
- $l(\widehat{\beta}_{R}, \widehat{\sigma^2_{1,R}}, \widehat{\sigma^2_{2,R}}) = -24.59$;
- $LR_{\text{набл}} = -2(l(\widehat{\beta}_{R}, \widehat{\sigma^2_{1,R}}, \widehat{\sigma^2_{2,R}}) - l(\widehat{\beta}_{UR}, \widehat{\sigma^2_{1,UR}}, \widehat{\sigma^2_{2,UR}})) = 7.44$;
- $LR_{\text{кр}} = 3.84$;
- гипотеза H_0 отвергается в пользу гипотезы $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, т.е. тест отношения правдоподобия выявил гетероскедастичность.