

Задача. Рассматривается модель линейной регрессии $Y_t = \beta t + \varepsilon_t$, $t = 1, 2$, в которой случайные ошибки удовлетворяют следующим условиям: $\mathbb{E}[\varepsilon_1] = \mathbb{E}[\varepsilon_2] = 0$, $D(\varepsilon_1) = D(\varepsilon_2) = 2$, $\text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1$.

- (a) Найдите МНК-оценку параметра β и её дисперсию.
- (b) Найдите GLS-оценку параметра β и её дисперсию.
- (c) Какая из полученных выше оценок является более эффективной?

Решение. (a) $\hat{\beta}_{\text{МНК}} = \frac{1 \cdot Y_1 + 2 \cdot Y_2}{1^2 + 2^2} = \frac{1}{5} Y_1 + \frac{2}{5} Y_2$,

$$\begin{aligned} D(\hat{\beta}_{\text{МНК}}) &= D\left(\frac{1}{5} Y_1 + \frac{2}{5} Y_2\right) = \frac{1}{25} D(Y_1) + \frac{4}{25} D(Y_2) + 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} \text{cov}(Y_1, Y_2) = \\ &= \frac{1}{25} D(\varepsilon_1) + \frac{4}{25} D(\varepsilon_2) + 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} \text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \\ &= \frac{1}{25} \cdot 2 + \frac{4}{25} \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{14}{25} = 0.56. \end{aligned}$$

(b) Ковариационная матрица вектора $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$ равна $V(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Обозначим её

через V . Оценка GLS имеет следующий вид:

$$\hat{\beta}_{\text{GLS}} = (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} Y,$$

где $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ и $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$. Обратная матрица к матрице V равна $V^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{\text{GLS}} &= \left([1 \ 2] \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} [1 \ 2] \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \\ &= \left([1 \ 2] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} [1 \ 2] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = (6)^{-1} [0 \ 3] \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} Y_2, \end{aligned}$$

а значит, $D(\hat{\beta}_{\text{GLS}}) = D(\frac{1}{2} Y_2) = \frac{1}{4} D(Y_2) = \frac{1}{4} D(\varepsilon_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$.

(c) Несложно проверить, что обе оценки $\hat{\beta}_{\text{МНК}}$ и $\hat{\beta}_{\text{GLS}}$ являются несмещенными. При этом $D(\hat{\beta}_{\text{GLS}}) < D(\hat{\beta}_{\text{МНК}})$. Стало быть, оценка $\hat{\beta}_{\text{GLS}}$ является более эффективной, чем $\hat{\beta}_{\text{МНК}}$. \square

Задача. Рассматривается модель линейной регрессии $Y_t = \beta t + \varepsilon_t$, $t = 1, 2$, в которой случайные ошибки удовлетворяют следующим условиям: $\mathbb{E}[\varepsilon_1] = \mathbb{E}[\varepsilon_2] = 0$, $D(\varepsilon_1) = D(\varepsilon_2) = 2$, $\text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -1$.

- (a) Найдите МНК-оценку параметра β и её дисперсию.
- (b) Найдите GLS-оценку параметра β и её дисперсию.
- (c) Какая из полученных выше оценок является более эффективной?

Решение. (a) $\hat{\beta}_{\text{МНК}} = \frac{1 \cdot Y_1 + 2 \cdot Y_2}{1^2 + 2^2} = \frac{1}{5} Y_1 + \frac{2}{5} Y_2$,

$$\begin{aligned} D(\hat{\beta}_{\text{МНК}}) &= D\left(\frac{1}{5} Y_1 + \frac{2}{5} Y_2\right) = \frac{1}{25} D(Y_1) + \frac{4}{25} D(Y_2) + 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} \text{cov}(Y_1, Y_2) = \\ &= \frac{1}{25} D(\varepsilon_1) + \frac{4}{25} D(\varepsilon_2) + 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} \text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \\ &= \frac{1}{25} \cdot 2 + \frac{4}{25} \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot (-1) = \frac{6}{25} = 0.24. \end{aligned}$$

(b) Ковариационная матрица вектора $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$ равна $V(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Обозначим её

через V . Оценка GLS имеет следующий вид:

$$\hat{\beta}_{\text{GLS}} = (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} Y,$$

где $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ и $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$. Обратная матрица к матрице V равна $V^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{\text{GLS}} &= \left([1 \ 2] \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} [1 \ 2] \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \\ &= \left([1 \ 2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} [1 \ 2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = (14)^{-1} [4 \ 5] \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \frac{4}{14} Y_1 + \frac{5}{14} Y_2, \end{aligned}$$

а значит,

$$\begin{aligned} D(\hat{\beta}_{\text{GLS}}) &= D\left(\frac{4}{14} Y_1 + \frac{5}{14} Y_2\right) = \frac{16}{196} D(Y_1) + \frac{25}{196} D(Y_2) + 2 \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{5}{14} \text{cov}(Y_1, Y_2) = \\ &= \frac{16}{196} D(\varepsilon_1) + \frac{25}{196} D(\varepsilon_2) + 2 \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{5}{14} \text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \\ &= \frac{16}{196} \cdot 2 + \frac{25}{196} \cdot 2 + 2 \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{5}{14} \cdot (-1) = \frac{42}{196} \approx 0.21. \end{aligned}$$

(с) Несложно проверить, что обе оценки $\hat{\beta}_{\text{МНК}}$ и $\hat{\beta}_{\text{GLS}}$ являются несмещенными. При этом $D(\hat{\beta}_{\text{GLS}}) < D(\hat{\beta}_{\text{МНК}})$. Стало быть, оценка $\hat{\beta}_{\text{GLS}}$ является более эффективной, чем $\hat{\beta}_{\text{МНК}}$. \square

Задача. Рассматривается модель линейной регрессии $Y_t = \beta t + \varepsilon_t$, $t = 1, 2$, в которой случайные ошибки удовлетворяют следующим условиям: $\mathbb{E}[\varepsilon_1] = \mathbb{E}[\varepsilon_2] = 0$, $D(\varepsilon_1) = 2$, $D(\varepsilon_2) = 1$, $\text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -1$.

- (а) Найдите МНК-оценку параметра β и её дисперсию.
- (б) Найдите GLS-оценку параметра β и её дисперсию.
- (с) Какая из полученных выше оценок является более эффективной?

Ответы:

- (а) $\hat{\beta}_{\text{МНК}} = \frac{1}{5} Y_1 + \frac{2}{5} Y_2$, $D(\hat{\beta}_{\text{МНК}}) = \frac{2}{25} \approx 0.08$,
- (б) $\hat{\beta}_{\text{GLS}} = \frac{3}{13} Y_1 + \frac{5}{13} Y_2$, $D(\hat{\beta}_{\text{GLS}}) = \frac{1}{13} \approx 0.077$,
- (с) оценка $\hat{\beta}_{\text{GLS}}$ является более эффективной, чем $\hat{\beta}_{\text{МНК}}$.