Хершел-Максвелл и нормальное распределение

Винни-Пух

2017-12-24

Содержание

Молекулы газа

В замкнутом загончике на плоскости хаотично движутся молекулы газа. Мы ловим одну из них случайно и измеряем вектор скоростей

$$V = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}.$$

Максвелл предположил, что

M1. Если мы повернём нашу картинку на произвольный угол и повторим измерения, то закон распределения нового вектора V' будет совпадать с законом распределения вектора V.

M2. Если мы знаем горизонтальную составляющую скорости, то это не даёт нам никакой информации о вертикальной составляющей, то есть случайные величины V_x и V_y независимы.

Заметим, что единицы измерения скорости мы можем выбираться произвольно, поэтому давайте дополним предположения Максвелла предположением

M3. Единицы измерения скорости выбраны так, что $\mathbb{V}ar(V_x) = 1$.

Первый поворот

Помимо горизонтальной и вертикальной составлящих вектора скорости, V_x и V_y, рассмотрим ещё две величины, U — угол с горизонтальной осью и $R = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ — скалярную скорость, длину вектора скорости.

Естественно, $V_x = R\cos U$, $V_y = R\sin U$.

- Какой вектор получится, если вектор V повернуть на 90° против часовой стрелки?

Получится вектор

$$V' = \begin{pmatrix} -V_y \\ V_x \end{pmatrix}$$

По предпосылке M1 вектор V' должен иметь такое же распределение, как вектор V.

- Чему равны $\mathbb{E}(V_x)$, $\mathbb{E}(V_y)$, $\mathbb{V}ar(V_y)$?

Раз уж $V' \sim V$, то $-V_y \sim V_x$ и $V_x \sim V_y$. Значит $\mathbb{E}(-V_y) = \mathbb{E}(V_x)$, и одновременно $\mathbb{E}(V_x) = \mathbb{E}(V_y)$. Это возможно только в случае $\mathbb{E}(V_x) = \mathbb{E}(V_y) = 0$.

Строго говоря, осталась ещё возможность, что математическое ожидание не существует.

Аналогично, $\mathbb{V}ar(V_x) = \mathbb{V}ar(V_y)$ и по предпосылке M3 $\mathbb{V}ar(V_x) = \mathbb{V}ar(V_y) = 1$.

- Как распределена величина U?

Заметим, что при повороте на произвольный угол α, этот угол прибавляется к величине U. Если при этом сумма выйдет за 2π, то нужно ещё и вычесть 2π. По предпосылке M1 функция плотности U может быть только постоянной, $f(u+\alpha) = f(u)$ при $0 \leq u + \alpha < 2\pi$.

Значит U распределена равномерно на $[0; 2\pi)$ и её функция плотности равна

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & \text{если } u \in [0; 2\pi) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Вид функции плотности $f(v_x, v_y)$

- Какой вид имеет совместная функция плотности $f(v_x, v_y)$?

По предпосылке M1 совместная функция плотности может зависить только от длины вектора скорости R, но не от угла U. Для удобства запишем её как функцию квадрата R:

$$f(v_x, v_y) = h(v_x^2 + v_y^2)$$

По предпосылке M2 компоненты V_x и V_y независимы, поэтому совместная функция плотности должна раскладываться в произведение частных плотностей. Для удобства выразим их также через квадраты составляющих скорости:

$$f(v_x, v_y) = f(v_x) \cdot f(v_y) = g(v_x^2) \cdot g(v_y^2)$$

В итоге мы получили забавное соотношение

$$h(v_x^2 + v_y^2) = g(v_x^2) \cdot g(v_y^2)$$

Функция от суммы равна произведению функций:

$$h(a+b) = g(a)g(b)$$

Дифференциальное уравнение

- Как связаны $h(a)$ и $h'(a)$?

Возьмём $b = 0$, получим, что $h(a) = g(a)g(0)$.

Возьмём производную по b:

$$h'(a+b) = g(a)g'(b)$$

Подставим $b = 0$, получим

$$h'(a) = g(a)g'(0)$$

Итого, получаем, что

$$\frac{h'(a)}{h(a)} = \frac{g'(0)}{g(0)}$$

Другими словами производная $h'(a)$ равна исходной функции $h(a)$, умноженной на константу $k = \frac{g'(0)}{g(0)}$:

$$h'(a) = h(a) \cdot k$$

Этому условию удовлетворяет только функция $h(a) = e^{ka}$ и пропорциональные ей функции, то есть

$$h(a) = c \cdot e^{ka}$$

Таким образом мы нашли вид совместной функции плотности величин V_x и V_y:

$$f(v_x, v_y) = h(v_x^2 + v_y^2) = c \cdot e^{k(v_x^2 + v_y^2)}$$

Величины V_x и V_y одинаково распределены, независимы, поэтому частная функция плотности V_x имеет вид

$$f(v_x) = \sqrt{c} \cdot e^{kv_x^2}$$

Осталось лишь найти константы c и k!

В поисках k

Прежде всего заметим, что $k < 0$. Если бы константа k была бы больше нуля, то тогда с ростом x экспонента $e^{kv_x^2}$ уходила бы на бесконечность, и площадь под функцией плотности $f(v_x)$ не равнялась бы единице.

Мы уже знаем, что $\mathbb{E}(V_x) = 0$, а единицы измерения скорости выбраны так, что $\mathbb{V}ar(V_x) = 1$. Замечаем, что в нашем случае $\mathbb{V}ar(V_x) = \mathbb{E}(V_x^2)$. Осталось решить уравнение $\mathbb{E}(V_x^2) = 1$ и найти k.

Переходим к интегралам! Мы будем брать его по частям!

$$
\mathbb{E}(V_x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 f(v_x)\,dv_x = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x \cdot v_x \cdot \sqrt{c} \cdot e^{kv_x^2}\,dv_x = \\
= v_x \cdot \sqrt{c} \cdot e^{kv_x^2} \cdot (k/2)\Big|_{v_x=-\infty}^{v_x=+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \sqrt{c} \cdot e^{kv_x^2} \cdot (1/2k)\,dv_x \quad (1)
$$

Замечаем, что уменьшаемое равно нулю:

$$
v_x \cdot \sqrt{c} \cdot e^{kv_x^2} \cdot (k/2)\Big|_{v_x=-\infty}^{v_x=+\infty} = 0.
$$

А вычитаемое можно записать через исходную функцию плотности:

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \sqrt{c} \cdot e^{kv_x^2} \cdot (1/2k)\,dv_x = \frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x)\,dx = \frac{1}{2k} \cdot 1
$$

Следовательно,

$$
\mathbb{E}(V_x^2) = -\frac{1}{2k} = 1
$$

Отсюда $k = -\frac{1}{2}$.

В поисках c

Теперь мы знаем, что совместная функция плотности величин V_x и V_y имеет вид

$$
f(v_x, v_y) = h(v_x^2 + v_y^2) = c \cdot e^{-\frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2)}
$$

- Какой вид имеет совместная функция плотности величин R и U?

Удобнее работать не с плотностями, а с дифференциальными формами

$$
\mathbb{P}(V_x \in [v_x; v_x + dv_x], V_y \in [v_y; v_y + dv_y]) \sim f(v_x, v_y) dv_x \wedge dv_y
$$

Подставим $v_x = r\cos u$ и $v_y = r\sin u$. После упрощения получим, что $dv_x \wedge dv_y = r \cdot dr \wedge du$.

$$
\mathbb{P}(R \in [r; r + dr], U \in [u; u + du]) \sim f(r\cos u, r\sin u) r \cdot dr \wedge du = c \cdot r \cdot e^{-r^2/2} \cdot dr \wedge du
$$

Следовательно, совместная функция плотности величин R и U имеет вид

$$
f(r, u) = \begin{cases} c \cdot r \cdot e^{-r^2/2}, & \text{при } r > 0, u \in [0; 2\pi) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}
$$

Заметим, что функция совместная функция плотности раскладывается в произведение $f(r, u) = f(r) \cdot f(u)$, поскольку величины R и U независимы. Вопрос лишь в том, как поделить константу c в этом разложении $f(r, u)$ на сомножетели $f(r)$ и $f(u)$.

Интеграл $\int re^{-r^2/2}dr$ легко берётся:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} re^{-r^2/2}dr = 1$$

Следовательно, $f(r) = re^{-r^2/2}$ и $f(u) = c$.

Мы уже знаем, что величина U равномерна на $[0; 2\pi]$, следовательно, $c = 1/2\pi$.

Нормальная стандартная величина

Мы пришли к выводу, что функция плотности величины V_x имеет вид

$$f(v_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}v_x^2}$$

При этом $\mathbb{E}(V_x) = 0$ и $\mathbb{V}ar(V_x) = 1$.

Величина с такой функцией плотности называется стандартной нормальной случайной величиной и обозначается $N(0; 1)$.

Другие единицы измерения скорости

Рассмотрим линейной преобразование величины V_x, $W = \mu + \sigma V_x$. Можно найти ожидаемое значение и дисперсию W, $\mathbb{E}(W) = \mu$, $\mathbb{V}ar(W) = \sigma^2$.

Найдём функцию плотности W. Естественнее работать не с плотностью, а с дифференциальной формой: достаточно подставить в неё выражение для v_x, $v_x = \frac{w-\mu}{\sigma}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_x \in [v_x; v_x + dv_x]) \sim f(v_x)dv_x = f\left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right) d\frac{w-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right) dw = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(w-\mu)^2}{2\sigma^2}} \sim \mathbb{P}(W \in [w; w + dw]) \quad (2)\end{aligned}$$

Отсюда функция плотности величины W равна

$$f(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(w-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Величина с такой функцией плотностью называется нормальной случайной величиной с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 и обозначается $N(\mu; \sigma^2)$.