

Случайная перестановка (рабочее название)

Борис Демешев*

12 января 2016 г.

Аннотация

Случайная перестановка

Ключевые слова: задача, случайная перестановка, киллер.

1 Классные свойства случайных перестановок

здесь про $E()$, $\text{Var}()$ и т.д.

<https://terrytao.wordpress.com/2011/11/23/the-number-of-cycles-in-a-random-permutation/>

Утверждения

Случайная перестановка.

Случайная величина C_k — количество циклов длины k .

Случайная величина C — количество циклов произвольной длины

1. Пусть $A_k(i)$ — элемент i входит в цикл длины заданной k . $\mathbb{P}(A_k(i) = 1/n$
2. Какова вероятность того, что a, b и c лежат в одном цикле?

Начинаем идти по циклу от a . Рано или поздно цикл «вонзится» в множество $A = \{a, b, c\}$. Нам надо пройти сквозь b или c , отсюда $2/3$. Допустим, прошли сквозь b . Идём по циклу дальше, он снова рано или поздно вонзится в A . Нам надо пройти сквозь c , отсюда $1/2$. При следующем прохождении цикла через множество A мы обязательно попадаем в a .

$$\frac{2}{3} \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

3. Какова вероятность того, что a, b и c лежат в одном цикле длины $m \geq 3$?
4. Назовём цикл «длинным», если его длина больше $n/2$. Какова вероятность того, что существует длинный цикл длины m ?
Доказательство
5. Какова вероятность того, что существует хотя бы один длинный цикл?
Ответ: $\approx \ln 2 \approx 0.69$
6. Какова ожидаемая длина цикла, в котором лежит элемент i ?
 $(N + 1)/2$

*НИУ ВШЭ, Москва.

7. $\mathbb{E}(C_k) = 1/k$

Доказательство:

Рассмотрим случайную величину kC_k — это количество элементов, входящих в циклы длины k . Разложим это количество в сумму индикаторов, $kC_k = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Здесь X_i — входит ли элемент i в цикл длины k . Следовательно, $\mathbb{E}(kC_k) = \mathbb{P}(X_1 = 1) + \dots + \mathbb{P}(X_n = 1) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$.

<http://math.stackexchange.com/questions/306977/cycles-permutation-random-probability>

— доказательство через производящие функции

8. $\mathbb{E}(C) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

Доказательство $\mathbb{E}(C) = \mathbb{E}(C_1) + \mathbb{E}(C_2) + \dots + \mathbb{E}(C_n)$

9. $\mathbb{E}(C_{C_k}^j) = 1/k^j j!$

10. обобщение предыдущей

11. Асимптотически C_k имеет пуассоновское распределение с $\lambda = 1/k$

12. Асимптотически количества циклов разных длин независимы

<http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1175278>

13. $\mathbb{E}(m^C) = C_n^{m+m-1}$

https://en.wikipedia.org/wiki/Random_permutation_statistics

<http://www.inference.phy.cam.ac.uk/itila/cycles.pdf>

2 Задачи

2.1 Сумасшедшая старушка

В самолете 100 мест и все билеты проданы. Первой в очереди на посадку стоит Сумасшедшая Старушка. Сумасшедшая Старушка очень переживает, что ей не хватит места, врывается в самолёт и несмотря на номер по билету садиться на случайно выбираемое место. Каждый оставшийся пассажир садится на своё место, если оно свободно, и на случайное выбираемое место, если его место уже кем-то занято.

1. Какова вероятность того, что последний пассажир сядет на своё место?
2. Чему примерно равно среднее количество пассажиров севших на свои места?

2.2 Судьба Дон-Жуана

У Дон-Жуана n знакомых девушек, и их всех зовут по-разному. Он пишет им n писем, но по рассеянности раскладывает их в конверты наугад. Случайная величина X обозначает количество девушек, получивших письма, адресованные лично им.

1. Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\text{Var}(X)$
2. Какова при большом n вероятность того, что хотя бы одна девушка получит письмо, адресованное ей?

2.3 Киллер

Правила игры «Киллер» просты. Игроки пишут на бумажках, как их зовут, и кладут бумажки в шляпу. Каждый тянет из шляпы имя своей первой жертвы. Если первой жертвой игрока является он сам, то он совершает «самоубийство» и дальше

не играет¹. Чтобы убить жертву, надо остаться с ней наедине и сказать: «Ты убит!». Убийца забирает себе все бумажки, набранные убитым, и начинается охотиться за тем, за кем охотился убитый. Побеждает тот, кто наберёт больше всех бумажек к концу игры. Заметим, что в «Киллере» каждый игрок оказывается втянут в одну из нескольких цепочек.

В «Киллера» играют 30 человек, из них 20 девушек.

1. Какова вероятность того, что в цепочке, начинающейся с Маши Сидоровой ровно 5 человек?
2. Какова вероятность того, что в цепочке, начинающейся с Маши Сидоровой ровно 5 девушек?
3. Какова вероятность того, что все девушки попадают в одну цепочку убийц и жертв?
4. Какова вероятность того, что все игроки попадают в общую цепочку?
5. Сколько в среднем цепочек в «Киллере»?
6. Сколько в среднем «самоубийц»?

2.4 Ключи и копилки

На столе стоят n свиной-копилок. Достать содержимое копилки можно двумя способами: либо разбить копилку, либо открыть дно специальным ключиком. К каждой копилке подходит единственный ключ. Мы раскладываем ключи по копилкам наугад, один ключ в одну копилку. Затем разбиваем k копилок и получаем хранящиеся в них ключи. Далее мы будем копилки только открывать ключами.

1. Какова вероятность того, что мы сможем достать все ключи?
2. Какая доля ключей в среднем будет найдена?

2.5 Задача о макаронах

В тарелке запутавшись лежат $n \gg 0$ макаронин. Я по очереди связываю попарно все торчащие концы макаронин.

1. Какова примерно вероятность того, что я свяжу все макаронины в одно большое кольцо?
2. Сколько в среднем колец образуется?
3. Каково среднее число колец длиной в одну макаронину?

2.6 Задача о 100 заключенных

У ста узников тюрьмы есть последний шанс на спасение. В комнате стоит шкаф в котором сто занумерованных ящичков. Палач кладёт в каждый ящичек бумажку с номером ровно одного из заключенных в случайном порядке и задвигает все ящички. Узники заходят в комнату один за другим. Каждый узник может открыть любые 50 ящичков. После каждого узника все ящички задвигаются в исходное положение. Если каждый узник находит свой номер, то все узники будут помилованы. Если хотя бы один из узников не найдёт свой номер, то все будут казнены.

Узники могут предварительно договориться о стратегии.

¹ В некоторых вариантах правил, если игрок вытянул из шляпы своё имя, то он должен вытянуть другую бумажку.

1. Какова оптимальная стратегия?
2. Какую вероятность выигрыша она обеспечивает?

2.7 Три игрока и три вопроса

2.8 что-то про детерминант?