Маленький зоопарк дифференциальных уравнений.

Зверь 1. Уравнения с разделяющимися переменными.
Внешний вид: $f(x)\,dx = g(y)\,dy$.
Как решать: проинтегрировать правую и левую части.
Пример: $y' - 5y = 0$

$$y' - 5y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5y \Rightarrow \frac{1}{y}dy = 5dx \text{ или } y = 0$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 5\,dx \text{ или } y = 0 \Rightarrow \log|y| = 5x + c, c \in \mathbb{R} \text{ или } y = 0$$

Ответ: $y(x) = c \cdot e^{5x}, c \in \mathbb{R}$

Зверь 2. Линейное уравнение первой степени с ненулевой правой частью.
Внешний вид: $y' + f(x)y = g(x)$.
Как решать:
Способ 1. Educated guesswork.
Шаг 1.
Заменить в исходном уравнении правую часть на ноль.
Решить однородное уравнение $y' + f(x)y = 0$. Здесь разделяются переменные.
Получается ответ в духе $y_{hom}(x) = c \cdot \ldots$
Шаг 2.
По виду правой части угадать решение, $y_{pi}(x)$.
Если в правой части содержится $\sin(x)$, значит в решении есть $a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$.
Нюанс:
Если угадываемый вид содержится в $y_{hom}(x)$, то догадку следует домножить на x.
Записываем ответ в виде $y(x) = y_{hom}(x) + y_{pi}(x)$
Пример 1: $y' - 5y = 10$
Шаг 1.
Решаем $y' - 5y = 0$. Уже делали, $y_{hom}(x) = ce^{5x}$.
Шаг 2.
$RHS = 10$. Кто еще не в курсе, RHS - это «Right Hand Side».
10 - это константа, поэтому будем искать частное решение y_{pi} в виде $y = a$.
Тогда $y' = 0$. Подставим предположенные y и y' в уравнение.
Получаем $0 - 5a = 10$, значит $a = -2$.
Ответ: $y(x) = c \cdot e^{5x} - 2, c \in \mathbb{R}$
Пример 2: $y' - 5y = 6e^{5x}$
Шаг 1.
Решаем $y' - 5y = 0$. Уже делали, $y_{hom}(x) = ce^{5x}$.
Шаг 2.
$RHS = 6e^{5x}$.
Будем искать частное решение y_{pi} в виде $y = a \cdot e^{5x}$.
Ого! Такое уже входит в $y_{hom}(x)$. Поэтому домножаем догадку на x.
Значит $y = a \cdot x \cdot e^{5x}$, тогда $y' = a \cdot e^{5x} + 5ax \cdot e^{5x}$
Подставим предположенные y и y' в уравнение.
Получаем $a \cdot e^{5x} + 5ax \cdot e^{5x} - 5a \cdot x \cdot e^{5x} = 6e^{5x}$, после упрощения: $a \cdot e^{5x} = 6e^{5x}$, значит $a = 6$.
Ответ: $y(x) = c \cdot e^{5x} + 6xe^{5x}, c \in \mathbb{R}$
Способ 2. Variation of constant.
Метод вариации постоянной, что-то в духе «изменение неизменного»
Шаг 1.

Заменить в исходном уравнении правую часть на ноль.
Решить однородное уравнение $y' + f(x)y = 0$. Здесь разделяются переменные.
Получается ответ в духе $y_{hom}(x) = c \cdot \ldots$
Шаг 2.
Сделать вид, что c - не просто константа, а функция $c(x)$.
Подставить полученное решение в исходное уравнение и найти эту $c(x)$.
Пример: $y' - 5y = 6e^{5x}$
Шаг 1.
Решаем $y' - 5y = 0$. Уже делали, $y_{hom}(x) = ce^{5x}$.
Шаг 2.
Ищем решение в виде $y(x) = c(x)e^{5x}$
Тогда $y'(x) = 5c(x)e^{5x} + c'(x)e^{5x}$
Подставляем $y(x)$ и $y'(x)$ в исходное уравнение:

$$5x(x)e^{5x} + c'(x)e^{5x} - 5c(x)e^{5x} = 6e^{5x} \Rightarrow c'(x) = 6 \text{ или } c(x) = 6x + c$$

Ответ: $y(x) = (6x + c) \cdot e^{5x}, c \in \mathbb{R}$

Зверь 3. В полных дифференциалах.
Внешний вид: $A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy = 0$, $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$.
Как решать:«Four step procedure»

1. Сначала убедитесь, что это оно. Проверьте, что $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$

2. Представьте решение в виде $F(x,y) = \int A(x,y)\,dx + c(y)$

3. Возьмите $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ и приравняйте к $B(x,y)$.

4. Из полученного уравнения найдите $c(y)$.

Не забудьте записать ответ $F(x,y) = 0$
Пример: $(2x - y)\,dx + (2y - x)\,dy = 0$

1. Проверяем $\frac{\partial(2x-y)}{\partial y} = \frac{\partial(2y-x)}{\partial x}$. OK!

2. $F(x,y) = \int 2x - y\,dx + c(y) = x^2 - xy + c(y)$

3. $\frac{\partial(x^2-xy+c(y))}{\partial y} = 2y - x$

   Получили уравнение: $-x + c'(y) = 2y - x$

4. Решаем $c'(y) = 2y, c(y) = y^2 + c$

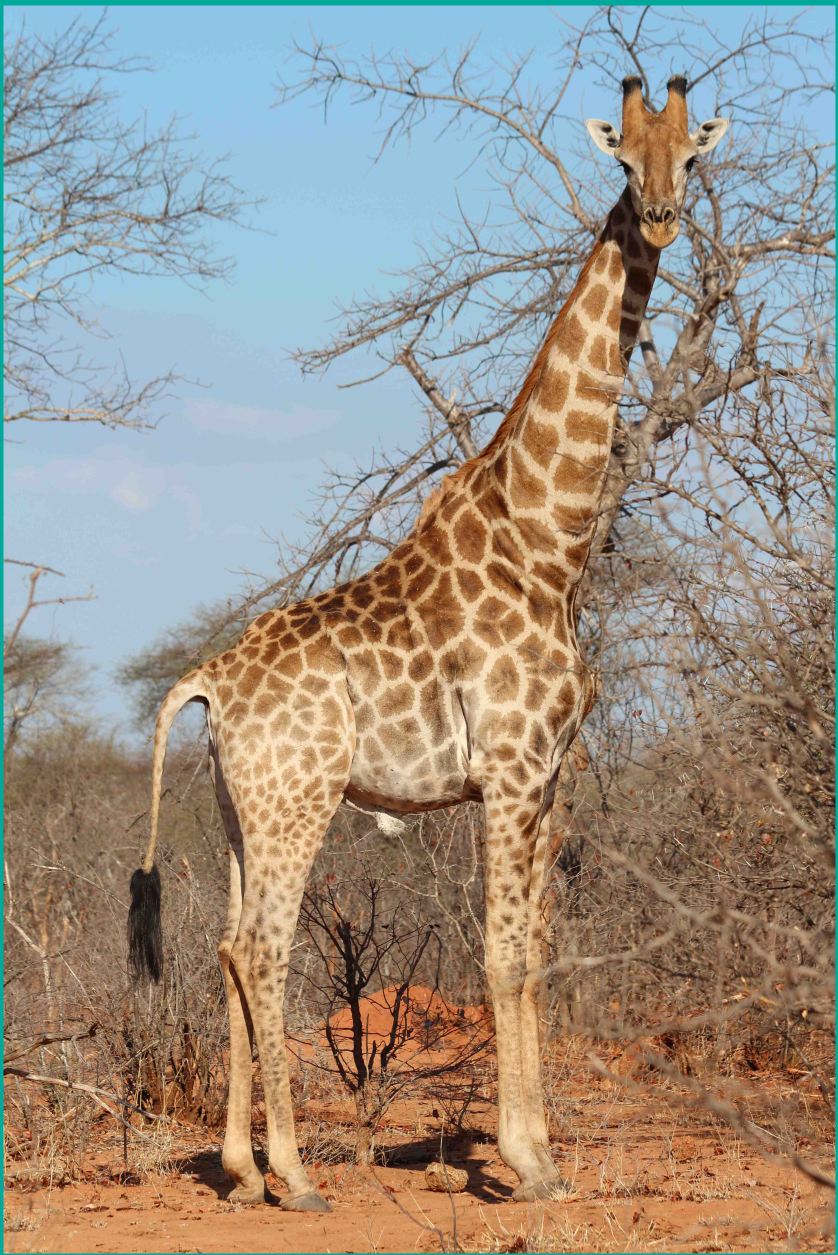
Ответ: $x^2 - xy + y^2 + c = 0, c \in \mathbb{R}$

Зверь 3, неодомашненный, дикий.
Внешний вид: $A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy = 0$, без всяких условий на $A(x,y)$ и $B(x,y)$!

Теорема об одомашнивании. Всегда найдется функция $r(x,y)$, такая, что после домножения на нее будет выполнятся условие $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$.

На практике найти этот integrating factor сложно, поэтому теорема имеет небольшой практический смысл.

Небольшое предложение: все-таки дикого зверя можно одомашнить, если он не агрессивен, - можно найти интегрирующий множитель, проверив, является ли разность производных функций-коэффициентов при dx и dy, делённая на одну из этих функций в зависимости от порядка вычитания, функцией лишь от одной переменной. Если да, то зверь не опасен.



Зверь 4. Однородное по x и y.
Внешний вид: $A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy = 0$, где $A(x,y)$ и $B(x,y)$ - однородные функции одной степени.
Как решать? Часто помогает замена $y(x) = x \cdot r(x)$.
При этому dy заменяется на $xdr + rdx$. А, кстати, почему?
Пример: $x\,dy + (y+x)\,dx = 0$
Перед dy и dx стоят однородные функции первой степени.
Делаем замену: $y(x) = xr(x), dy = xdr + rdx$

$$x(xdr + rdx) + (xr + x)dx = 0 \Rightarrow xdr + (2r+1)dx = 0$$

Тут разделяются переменные.

$$\frac{1}{2r+1}dr = -\frac{1}{x}dx \Rightarrow \frac{1}{2}\log|2r+1| = -\log|x| + c$$

Возвращаемся к y:
Ответ: $\log|2\frac{y}{x}+1| = -2\log|x| + c, c \in \mathbb{R}$

Зверь 5. Уравнение Бернулли.
Внешний вид: $y' + f(x)y = g(x)y^n$,
Как решать? Поделить уравнение на y^n и сделать замену $r(x) = \frac{1}{y(x)^{n-1}}$.
При этом, конечно, $r' = -\frac{(n-1)y'}{y^n}$.
Получается линейное уравнение.
Пример: $y' - 5y = y^6$

$$\frac{y'}{y^6} - 5\frac{1}{y^5} = 1 \text{ или } y = 0$$

$$\frac{-5y'}{y^6} + 25\frac{1}{y^5} = -5 \text{ или } y = 0$$

Делаем замену $r(x) = \frac{1}{y^5}$, при этом $r'(x) = \frac{-5y'}{y^6}$.
Получаем зверя под номером 2 — $r' + 25r = -5$
Решаем: $r(x) = ce^{-25x} - \frac{1}{5}, c \in \mathbb{R}$.
Возвращаемся к y:
Ответ: $\frac{1}{y^5} = -ce^{-25x} - \frac{1}{5}, c \in \mathbb{R}$ или $y = 0$

Зверь 6. Линейное уравнение произвольной степени с постоянными коэффициентами.
Внешний вид: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(x)$
Как решать?
Шаг 1. Заменить в исходном уравнении правую часть на ноль.
Составить характеристическое уравнение:
n-ную производную y заменить на λ^n
Найти корни: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
Записать решение однородного уравнения: $y_{hom}(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$
Шаг 2. По виду правой части угадать решение, $y_{pi}(x)$.
Записать ответ $y(x) = y_{hom}(x) + y_{pi}(x)$
Пример: $y'' - y' - 6y = 5e^{3x}$
Шаг 1.
Решаем $y'' - y' - 6y = 0$.
Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$
Находим корки: $\lambda_{1,2} = 3, -2$.
Значит $y_{hom}(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}, c_{1,2} \in \mathbb{R}$
Шаг 2.
$RHS = 6e^{5x}$.
Будем искать частное решение y_{pi} в виде $y = a \cdot e^{3x}$.
Ого! Такое уже входит в $y_{hom}(x)$, домножаем догадку на x.
Стало быть ищем решение $y_{pi}(x) = axe^{3x}$
Значит $y' = a \cdot e^{3x} + 3axe^{3x}$ и $y'' = 3ae^{3x} + (3ae^{3x} + 9axe^{3x}) = 6ae^{3x} + 9axe^{3x}$.
Подставим предположенные y, y' и y'' в уравнение.
Получаем $6ae^{3x} + 9axe^{3x} - (a \cdot e^{3x} + 3axe^{3x}) - 6axe^{3x} = 5e^{3x}$, после упрощения: $5a \cdot e^{3x} = 5e^{3x}$.
Значит $a = 1$.
Ответ: $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} + xe^{3x}, c_{1,2,3} \in \mathbb{R}$

Нюансы:
Комплексные корни. Комплексные корни ходят парами: $\lambda_1 = a + bi, \lambda_2 = a - bi$.
Им соответствует решение $(d_1 + d_2 i)e^{\lambda_1 x} + (d_1 - d_2 i)e^{\lambda_2 x}$.
Это же решение можно записать без мнимого i, зато с тригонометрией: $e^{ax}(c_1 \cos(bx) + c_2 \sin(bx))$
Кратные корни.
Если корень λ встречается несколько раз, то:
Первому $\lambda_1 = \lambda$ соответсвует решение $e^{\lambda x}$
Второму $\lambda_2 = \lambda$ соответсвует решение $xe^{\lambda x}$
Третьему $\lambda_3 = \lambda$ соответсвует решение $x^2 e^{\lambda x}$
И т.д.

Disclaimer:

Этот текст не претендует ни на полноту, ни на строгость, ни на безошибочность!

Если есть вопросы, пожелания, комментарии, сообщения об ошибках, благодарности, то пишите на roah@yandex.ru.

Борис Демешев

Благодарим Вас за посещение нашего зоопарка.