Очевидные равенства

Винни-Пух

5/5/2017

Есть много комбинаторных равенств, в которых мелькают C_n^k. Некоторые из них становятся очевидными при правильном прочтении.

Поехали!

- Число подмножеств размера n в множестве из N элементов:

$$C_N^n = C_N^{N-n}$$

  - Слева: количество способов покрасить n шаров в белый цвет из N чёрных.
  - Справа: количество способов покрасить $N-n$ шаров в чёрный цвет из N белых.

- Число различных подмножеств в множестве из n элементов:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

  - Слева: количество подмножеств размера 0 плюс количество подмножеств размера 1 плюс …
  - Справа: включать ли первый элемент умножить на включать ли второй элемент умножить на …

- Количество подмножеств размера $n+1$ в множестве из $N+1$ элемента с выделенным «лидером»:

$$nC_N^n = NC_{N-1}^{n-1}$$

  - Слева: сначала выбрали подмножество размера n из множества в N элемент. Затем из этих n элементов выбрали лидера.
  - Справа: сначала выбрали из N элементов лидера. Затем из оставшихся $N-1$ элементов выбрали $n-1$ нелидеров.

- Количество подмножеств в множестве из N элементов с «лидером»:

$$N \cdot 2^{N-1} = 1 \cdot C_N^1 + 2 \cdot C_N^2 + \ldots + N \cdot C_N^N$$

  - Слева: сначала из N элементов выбираем лидера. Затем из оставшихся $N-1$ элемента выбираем произвольное подмножество нелидеров.
  - Справа: количество подмножеств из одного элемента помножить на один способ выбрать внутри лидера плюс количество подмножеств из двух элементов помножить на два способа выбрать внутри лидера плюс …

- Число подмножеств размера n в множестве из N элементов:

$$C_N^n = C_{N-1}^n + C_{N-1}^{n-1}$$

  - Слева: количество подмножеств размера n в множестве из N элементов.
  - Справа: первый элемент из N можно либо брать, либо не брать. Если мы не берём первый, то из $N-1$ остальных надо взять n. Если мы берём первый, то из $N-1$ остальных надо взять $n-1$.

- Число подмножеств размера n в множестве из N элементов:

$$\sum_{r=0}^{R} C_R^r C_{N-R}^{n-r} = C_N^n, \text{ если } R \le n \le N-R$$

- Слева: представим себе, что из N элементов R окрашены заранее красным, а $N - R$ — белым. Если мы выбираем из большого множества n элементов, то sr из них будут окрашены красным, а $n - r$ — белым. Перебираем все возможные значения r.
- Справа: количество подмножеств размера n в множестве из N элементов.