

Доказательство от принцессы

Борис Демешев*

1 июля 2016 г.

Аннотация

Доказательство от принцессы — частный случай доказательства от противного

Ключевые слова: доказательство от противного, принцесса, доказательство.

Как печальна принцесса. . . Что бы значило это?
Ее губы поблекли; сердце скорбью одето:
улыбается грустно; вздох уныл и глубок. . .
В золотом ее кресле с ней тоска неразлучна,
и замолк клавесина аккорд полнозвучный,
и цветок позабытый увядает у ног.

Сонатина, Рубен Дарио

1 Доказательство от противного

Как устроено классическое доказательство от противного? Берём кого-нибудь противного, и пусть он доказывает. Допустим нам нужно доказать, что утверждение A верно. Мы, наоборот, предполагаем, что A неверно. Далее каким-нибудь образом приходим к противоречию и, таким образом, получаем вывод, что наше допущение A было ложно.

Довольно часто доказательство от противного используется для того, чтобы доказать, что какой-нибудь объект X не существует. В этом случае очень удобно использовать предлагаемое доказательство от принцессы. Мы представляем себе принцессу, которая замуж не хочет, а по традиции должна объявить конкурс для претендентов руку и сердце. И она объявляет: «Тот, кто принесёт мне X , сможет на мне жениться!». А дальше остаётся объяснить, как она будет аргументированно отказывать каждому претенденту.

2 Пара примеров

Классический пример доказательства от принцессы — доказательство того, что максимальное простое число не существует. Принцесса объявляет: «Тот, кто принесёт мне самое большое простое число во Вселенной, получит меня в жёны!». И к примеру

*НИУ ВШЭ, Москва.

приходит принц и приносит ей p_n . А она ему в ответ: «Не пойду я за тебя замуж, ведь простое число $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ больше чем ты принёс!» Так принцесса отказывает всем ухажёрам, а, следовательно, наибольшего простого числа не существует.

Идея доказательства от принцессы возникла так. Я иногда веду вводный курс стохастического анализа для экономистов. Если требуется и позволяет время, то рассказываю про мощности множеств и, в частности, про то, что множество последовательностей из 0 и 1 несчётное. И в нём есть один тонкий момент. Если проводить доказательство в общем виде с произвольными буквами, то оно слишком тяжеловесно. Если проводить на конкретном примере, то возникает вопрос, а почему это доказательство. И принцесса замечательно решает проблему доказательства на частном примере!

Принцесса объявляет: «Тот, кто занумерует натуральными числами все бесконечные последовательности из 0 и 1, получит меня в жёны». И, к примеру, приходит принц датский и говорит: «Я занумеровал!» И предъявляет листочек, на котором все последовательности занумерованы:

1. 000000000...
2. 011001010...
3. 101000000...
4. 010011010...
- ...

Как принцессе отказать принцу датскому? Она выбирает диагональные элементы этих последовательностей 0110... Затем меняет 0 на 1, а 1 на 0, получая 1001... И спрашивает принца датского: «А последовательность 1001... у Вас под каким номером?» И принц датский начинает перебирать. Под первым номером не может идти, так как первой цифрой отличается, под вторым номером не может идти, так как вторым номером отличается... И принц датский трагично вынужден признать, что эту последовательность он забыл занумеровать. И подобным образом принцесса сможет отказать всем претендентам, а значит множество последовательностей несчётно.