

Геометрия хи-квадрат распределения

Винни-Пух

2018-02-17

Содержание

Вступление	1
Пространства и подпространства	1
Проекция	2
Хи-квадрат распределение	3
Связь со стандартным определением	4
Определение в матрицах	5
Выборочная дисперсия — геометрия	7
Ковариационная матрица спроецированного вектора	8
Хи-квадрат тест Пирсона, геометрия	9
Выборочная дисперсия — явно скалярно	11
Выборочная дисперсия — матрицы	13
Сумма квадратов остатков - геометрия	14
Сумма квадратов остатков - матрицы	14
Про t и F отдельно :)	15
Пояснительная записка	15

Вступление

Из этих заметок любопытный читатель узнает, что:

- квадрат длины проекции стандартного нормального вектора на произвольное подпространство имеет хи-квадрат распределение;
- число степеней свободы — это размерность подпространства, на которое проецируют;
- сумма $\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2$ — это квадрат длины проекции вектора исходных наблюдений z на подпространство ортогональное вектору из единиц $(1, 1, 1, \dots, 1)$;
- критерий хи-квадрат Пирсона — это квадрат длины проекции нормального стандартного вектора на подпространство ортогональное вектору $(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_r})$;
- RSS — это квадрат длины проекции исходного вектора y на подпространство ортогональное столбцам-регрессорам;

Пространства и подпространства

Если говорить совсем просто, то пространство \mathbb{R}^n — это все столбики, состоящие из n действительных чисел. А если вспоминать определение, то линейное пространство — это такой набор векторов, в котором:

1. Разрешено складывать два любых вектора и результат остаётся внутри набора;

2. Разрешено умножать любой вектор на любое число и результат остаётся внутри набора;
3. Сложение векторов и умножение вектора на число согласованы между собой.

Подпространство — это часть набора, которая сама по себе является пространством. Есть два популярных способа описать подпространство внутри \mathbb{R}^n :

1. Линейная оболочка некоторого набора векторов.

Например, внутри \mathbb{R}^3 есть два вектора $x = (1, 1, 1)$ и $y = (1, 0, 0)$ и подпространство V , образованное ими

$$V = \text{Lin}(x, y),$$

то есть это все вектора вида $\alpha x + \beta y$, где α и β — произвольные числа.

2. Ортогональное дополнение к набору векторов.

Например, внутри \mathbb{R}^3 есть два вектора $x = (1, 1, 1)$ и $y = (1, 0, 0)$ и подпространство W всех векторов, перпендикулярным им обоим

$$W = \text{Lin}^\perp(x, y).$$

Напомним, два вектора a и b в пространстве \mathbb{R}^n перпендикулярны, если их скалярное произведение $\langle a, b \rangle$ равно нулю. Поэтому подпространство W можно также описать системой уравнений.

Подпространство W состоит из всех векторов $w = (w_1, w_2, w_3)$, удовлетворяющих системе:

$$\begin{cases} w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 1 = 0 \\ w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 0 + w_3 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

Если вектора a_1, \dots, a_k линейно независимы и лежат внутри \mathbb{R}^n , то размерности описанных нами подпространств равны

$$\dim \text{Lin}(a_1, \dots, a_k) = k$$

$$\dim \text{Lin}^\perp(a_1, \dots, a_k) = n - k$$

Упражнения

1. Лежит ли вектор $a = (1, 2, 3)$ в подпространстве $\text{Lin}((1, 1, 1), (0, 2, 4))$?
2. Найдите базис в ортогональном дополнении подпространства $\text{Lin}((1, 2, 3))$.
3. Найдите размерность пространств $\text{Lin}((1, 2, 3, 4))$, $\text{Lin}((1, 2, 3), (1, 2, 1))$, $\text{Lin}^\perp((1, 2, 3, 4, 5))$.

Проекции

Проекцией вектора a на подпространство L называется вектор \hat{a} , лежащий в L и ближайший к a .

Есть два популярных способа найти проекцию:

1. Решить задачу минимизации расстояния

$$\min_{\hat{a} \in L} \|a - \hat{a}\|$$

2. Потребовать, чтобы разность $a - \hat{a}$ была перпендикулярна любому вектору из L :

$$a - \hat{a} \in L^\perp$$

Упражнения:

- Спроецируйте вектор $z = (1, 2, 5, 4)$ на подпространство, порождённое вектором $(1, 1, 1, 1)$. Найдите квадрат длины проекции.
- Спроецируйте произвольный вектор z на прямую, порождённую вектором $b = (1, 1, 1, 1)$. Найдите косинус угла между исходным вектором и проекцией.
- Спроецируйте вектор $z = (1, 2, 5, 4, 3)$ на ортогональное дополнение к вектору $(1, 1, 1, 1, 1)$.
- Спроецируйте вектор $z = (1, 1, 2, 2, 2)$ на вектор единичной длины $v = (0.5, 0.5, 0.5, 0.3, 0.4)$.
- Спроецируйте вектор $z = (1, 1, 2, 2, 2)$ на пространство $\text{Lin}^\perp(v)$, где $v = (0.5, 0.5, 0.5, 0.3, 0.4)$ — вектор единичной длины. Найдите квадрат длины проекции.
- Спроецируйте произвольный вектор z на произвольный вектор v единичной длины.

Хи-квадрат распределение

Определение. Пусть компоненты n -мерного вектора z имеют стандартное нормальное распределение, $z_i \sim \mathcal{N}(0; 1)$ и независимы. Рассмотрим произвольное фиксированное k -мерное подпространство L . Абсолютно любое. Обозначим проекцию вектора z на подпространство L буквой \hat{z} , а квадрат длины проекции — буквой Q :

$$Q = \|\hat{z}\|^2 = \langle \hat{z}, \hat{z} \rangle = \hat{z}' \hat{z}$$

Закон распределения случайной величины Q называется хи-квадрат распределением с k -степенями свободы.

Пример. Вектор $z \in R^3$, компоненты $z_i \sim \mathcal{N}(0; 1)$ и независимы. Найдите явную формулу для величины Q , квадрата длины проекции исходного вектора z на плоскость $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Какое распределение имеет Q ?

Пример. Вектор $z \in R^3$, компоненты $z_i \sim \mathcal{N}(0; 1)$ и независимы. Найдите явную формулу для величины Q , квадрата длины проекции исходного вектора z на прямую, порождённую вектором $a = (1, 1, 1)$. Какое распределение имеет Q ?

Пример. Вектор $z \in R^7$, компоненты $z_i \sim \mathcal{N}(0; 1)$ и независимы. Какое распределение имеет величина Q , квадрат длины проекции исходного вектора z на подпространство, задаваемое системой уравнений

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 + z_7 = 0 \\ z_1 + 2z_2 + 3z_3 + 4z_4 + 5z_5 + 6z_6 + 7z_7 = 0 \end{cases}$$

Пример. Вектор $z \in \mathbb{R}^4$, компоненты $z_i \sim \mathcal{N}(7; 1)$ и независимы. Какое распределение имеет величина Q , квадрат длины проекции исходного вектора z на подпространство, ортогональное прямой, порождаемой вектором $a = (1, 1, 1, 1)$?

Связь со стандартным определением

Если взять практически любой учебник, то там будет дано другое определение χ^2 -распределения. Величина Q имеет χ^2 -распределение с k степенями свободы, если она представима в виде

$$Q = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_k^2,$$

где z_i независимы и стандартны нормальны, $z_i \sim \mathcal{N}(0; 1)$.

Сначала заметим, что стандартное определение из учебника — частный случай нашего. Что получится, если вектор $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, лежащий в \mathbb{R}^n , спроецировать на k -мерное подпространство V всех векторов, у которых первые k координат произвольные, а остальные — нули?

Получится вектор $\hat{z} = (z_1, z_2, \dots, z_k, 0, 0, \dots, 0)$. И квадрат длины проекции будет равен

$$Q = \|\hat{z}\|^2 = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_k^2.$$

А наше новое определение допускает проецирование на любое k -мерное подпространство :)

Возникает естественный вопрос, а вдруг, если спроецировать на какое-то хитрое подпространство, скажем $\text{Lin}(a, b, c) \cap \text{Lin}^\perp(d, e, f)$, эквивалентность определений нарушится?

Вдруг возможно, что квадрат длины проекции вектора z на подпространство размерности k не будет представляться в виде суммы k независимых стандартных нормальных величин?

Оказывается два определения полностью эквивалентны в силу двух фактов:

1. Закон распределения вектора z не изменится, если вектор z повернуть в любом направлении на произвольный угол;
2. Любое k -мерное подпространство всегда можно повернуть так, чтобы оно совпало с подпространством V всех векторов, у которых первые k координат произвольные, а остальные — нули.

Идеи доказательства:

1. Функция плотности z имеет вид:

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) = f(z_1) \cdot f(z_2) \cdot \dots \cdot f(z_n) \propto e^{-z_1^2/2} e^{-z_2^2/2} \dots e^{-z_n^2/2} = e^{-\frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2)};$$

Мы видим, что значение функции плотности в произвольной точке z зависит только от расстояния от z до нуля, но не от угла.

2. Рассмотрим стандартный базис e_1, e_2, \dots, e_n в \mathbb{R}^n . Рассмотрим k -мерное подпространство $V \subset \mathbb{R}^n$. Выберем в подпространстве V произвольный ортогональный базис из k векторов: v_1, \dots, v_k . Сначала повернём V так, чтобы v_1 совпал с e_1 . Затем будем поворачивать так, чтобы v_1 не трогать, а v_2 повернуть до совпадения с e_2 . И так далее.

Определение в матрицах

Зафиксируем k линейно-независимых векторов x_1, x_2, \dots, x_k . Для удобства занесём их столбцами в матрицу X . То есть x_j — это j -ый столбец матрицы X . Введём два обозначения.

Линейная оболочка всех столбцов матрицы X :

$$\text{col}X = \mathcal{L}in(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Ортогональное дополнение всех столбцов матрицы X :

$$\text{col}^\perp X = \mathcal{L}in^\perp(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Проецирование — это линейное преобразование векторов:

1. Если вектор растянуть в α раз, то проекция растянется в α раз;
2. Проекция суммы двух векторов равна сумме проекций каждого вектора по отдельности.

Поэтому проецирование вектора z на пространство $\text{col}X$ можно записать в виде его умножения на некую матрицу H :

$$\hat{z} = H \cdot z$$

Мы называем матрицу H матрицей-шляпницей (hat-matrix), потому что она навешивает шляпку на z .

Естественно матрица H зависит от того подпространства $\text{col}X$ на которое мы проецируем. Осталось найти эту связь. Заметим, что вектор $z - \hat{z}$ перпендикулярен пространству $\text{col}X$. То есть

$$z - \hat{z} \perp X$$

Столбцы X перпендикулярны вектору \hat{z} , только если скалярное произведение \hat{z} с каждым столбцом X равно нулю:

$$X' \cdot (z - \hat{z}) = 0$$

Вектор \hat{z} лежит в подпространстве $\text{col}X$, поэтому он должен выражаться через столбцы матрицы X :

$$\hat{z} = X \cdot \alpha$$

Получаем уравнение на веса α :

$$X'(z - X\alpha) = 0$$

После раскрытия скобок имеем:

$$X'X\alpha = X'z$$

Временно предположим, что матрица $X'X$ обратима:

$$\alpha = (X'X)^{-1}X'z$$

И наконец,

$$Hz = \hat{z} = X\alpha = X(X'X)^{-1}X'z$$

Таким образом, проецирование на линейное подпространство $\text{col}X$ можно задать в виде умножения на матрицу

$$H = X(X'X)^{-1}X'$$

У матрицы-шляпницы H много приятных свойств. Например, необходимое и достаточное условие, чтобы некая матрица H задавала проецирование:

$$\begin{cases} H' = H \\ H^2 = H \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация:

1. $H' = H$. Для любых двух векторов x и y скалярное произведение спроецированного x на исходный y равно скалярному произведению исходного x на спроецированный y .

$$\langle Hx, y \rangle = (Hx)'y = x'H'y = x'(H'y) = x'(Hy) = \langle x, Hy \rangle$$

2. $H^2 = H$. Проецирование два раза эквивалентно проецированию один раз.

Другое необходимое и достаточное условие:

$$\begin{cases} H' = H \\ \text{Все собственные числа } H \text{ равны } 0 \text{ или } 1 \end{cases}$$

Если спроецировать нормальный стандартный вектор z на $\text{col}X$, то мы получим вектор $\hat{z} = Hz$. И квадрат длины \hat{z} будет равен

$$Q = \|\hat{z}\|^2 = (Hz)'Hz = z'H'Hz = z'Hz$$

Поэтому можно дать определение:

Величина Q имеет хи-квадрат распределение с k степенями свободы, если она представима в виде

$$Q = z'Hz,$$

где z — нормальный стандартный вектор, а H — матрица, проецирующая на k -мерное подпространство, то есть $H' = H$, $H^2 = H$, $\text{trace}H = \text{rank}H = k$.

По сути это определение просто переводит на язык матриц идею проецирования. Не стоит бояться матриц! Весь смысл матриц в том, чтобы записать формально геометрическую идею!

У матрицы-шляпницы ранг и след совпадают, так как ранг — это количество ненулевых собственных чисел, след — это сумма собственных чисел, а собственные числа — нули или единицы.

С матрицами снова можно доказать эквивалентность нового определения и традиционного:

1. У матрицы H собственные числа равны 0 или 1, так как $H^2 = H$.
2. Матрица H симметричная и допускает разложение $H = PDP'$, где P — матрица из собственных векторов единичной длины, а D — диагональная матрица из собственных чисел. На диагонали D стоят нули и единицы, пусть для определенности единицы идут сначала, а нули потом.
3. Случайная величина Q допускает разложение:

$$Q = z'H z = z'PDP'z = (Pz)' \cdot D \cdot (Pz) = a'Da = \sum_{i=1}^k a_i^2$$

4. Замечаем, что компоненты вектора $a = Pz$ имеют:

- нулевое математическое ожидание: у компонент вектора z нулевое ожидание;
- единичную дисперсию: каждая величина a_j равен столбцу матрицы P домноженному на вектор z , а столбец матрицы P имеет единичную длину;
- независимы: столбцы матрицы P ортогональны, поэтому дают нулевую ковариацию между a_j и a_k ;

Проецирование на линейное пространство $\text{col}^\perp X$ можно задать в виде умножения на матрицу $M = I - H$. Поэтому квадрат длины проекции стандартного нормального вектора z на подпространство $\text{col}^\perp X$ записывается как

$$S = \|Mz\|^2 = (Mz)'Mz = z'M'Mz = z'(I - H)z$$

И, конечно, величина S имеет хи-квадрат распределение с $n - k$ степенями свободы.

Выборочная дисперсия — геометрия

Начнём с упражнения. Пусть z — вектор из \mathbb{R}^n , а $\mathbb{1}$ — вектор из единиц. Чему равен квадрат длины проекции z на $\text{Lin}^\perp(\mathbb{1})$? Чему равна проекция вектора $\mathbb{1}$ на $\text{Lin}^\perp(\mathbb{1})$?

Сначала спроецируем вектор z на $\text{Lin}(\mathbb{1})$. Получаем вектор $\bar{z} \cdot \mathbb{1} = (\bar{z}, \bar{z}, \dots, \bar{z})$. Поэтому проекция z на $\text{Lin}^\perp(\mathbb{1})$ равна $z - \bar{z} \cdot \mathbb{1} = (z_1 - \bar{z}, z_2 - \bar{z}, \dots, z_n - \bar{z})$.

Вектор из единиц ортогонален пространству $\text{Lin}^\perp(\mathbb{1})$, поэтому вектор $\mathbb{1}$ проецируется в нулевой вектор.

Поэтому для стандартного нормального вектора z величина $\sum (z_i - \bar{z})^2$ имеет хи-квадрат распределение с $n - 1$ -ой степенью свободы.

А теперь замечаем, что выборочная дисперсия вектора x — это квадрат длины проекции делённый на размерность подпространства!

$$s\text{Var}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{1}{n - 1} \cdot \|x - \bar{x} \cdot \mathbb{1}\|^2$$

Осталось добавить предположения:

Пусть x_i независимы и одинаково распределены $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Заметим, что вектор x можно представить в виде

$$x = \mu \cdot \mathbb{1} + \sigma z,$$

где z — стандартный нормальный вектор.

Проекция x на $\mathcal{Lin}^\perp(\mathbb{1})$ совпадает с проекцией σz на $\mathcal{Lin}^\perp(\mathbb{1})$. Вектор $\mathbb{1}$ проецируется в нулевой. А проекция σz в σ раз длиннее, чем проекция z . Поэтому:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)s\text{Var}(x)}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

Ковариационная матрица спроецированного вектора

Тут хорошо бы максимально просто доказать, что если $\hat{z} = Hz$, и z — стандартный нормальный вектор, то $\text{Var}(\hat{z}) = H$. Хорошо бы без матриц :)

Ковариационная матрица вектор y определяется как

$$\text{Var}(y) = \mathbb{E}[(y - \mu)(y - \mu)'],$$

где $\mu = \mathbb{E}(y)$.

Эквивалентно дисперсию можно определить как

$$\text{Var}(y) = \mathbb{E}(yy') - \mathbb{E}(y)\mathbb{E}(y)'$$

Посмотрим, чему равна $\text{Var}(Ay)$:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Ay) &= \mathbb{E}((Ay)(Ay)') - \mathbb{E}(Ay)\mathbb{E}(Ay)' = \mathbb{E}(Ayy'A') - A\mathbb{E}(y)(A\mathbb{E}(y))' = \\ &= A\mathbb{E}(yy')A' - A\mathbb{E}(y)\mathbb{E}(y)'A' = A\text{Var}(y)A' \end{aligned}$$

В силу этого мы находим ещё одно шикарное свойство матрицы-шляпницы! Пусть z — стандартный нормальный вектор, $z \sim \mathcal{N}(0; I)$. В частности, $\text{Var}(z) = I$.

Найдём ковариационную матрицу проекции \hat{z} :

$$\text{Var}(\hat{z}) = \text{Var}(Hz) = H\text{Var}(z)H' = H \cdot I \cdot H' = HH' = H^2 = H$$

Матрица-шляпница H является ковариационной матрицей спроецированного вектора!

Хи-квадрат тест Пирсона, геометрия

Ковариация двух биномиальных распределений

Начнём с задачки!

Василий решил за день поймать n покемонов. С вероятностью 0.2 ему попадаются бульбазавры, с вероятностью 0.7 — чармандеры, а с вероятностью 0.1 — сквиртлы.

Чему равна дисперсия числа бульбазавров, дисперсия числа чармандеров и ковариация их количеств?

Решение легко получить, если помнить, что у биномиального распределения $Bin(n, p)$ дисперсия равна $np(1 - p)$.

Обозначим количество бульбазавров буквой X , а количество чармандеров буквой Y . Каждый покемон либо бульбазавр, либо нет, поэтому их количество X распределено биномиально. Следовательно, $\mathbb{V}ar(X) = n \cdot 0.2 \cdot 0.8$. С чармандерами получается аналогично, $\mathbb{V}ar(Y) = n \cdot 0.7 \cdot 0.3$.

Заметим, что чармандеров и бульбазавров можно объединить в один тип, назвав его чармазаврами. Количество чармазавров, $X + Y$, также распределено биномиально. Чармазавры встречаются с вероятностью 0.9, потому $\mathbb{V}ar(X + Y) = n \cdot 0.9 \cdot 0.1$.

По свойству дисперсии $\mathbb{V}ar(X + Y) = \mathbb{V}ar(X) + \mathbb{V}ar(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$. Мы знаем все дисперсии и легко найдём ковариацию:

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2}(\mathbb{V}ar(X + Y) - \mathbb{V}ar(X) - \mathbb{V}ar(Y)) = \dots = -n \cdot 0.2 \cdot 0.7$$

Задачу можно обобщить на случай произвольных вероятностей бульбазавров и чармандеров, p_1 и p_2 . В этом случае окажется, что

$$\text{Cov}(X, Y) = -np_1p_2$$

Проекция на пространство перпендикулярное вектору

Решим ещё одну подготовительную задачку.

Спроецируем стандартный нормальный вектор z на $\mathcal{L}in^\perp(v)$, где v — вектор единичной длины. При этом мы получим вектор $\hat{z} = (I - H) \cdot z$:

$$\hat{z} = (I - vv') \cdot z$$

По нашему определению квадрат длины \hat{z} имеет хи-квадрат распределение со степенями свободы равными размерности подпространства $\mathcal{L}in^\perp(v)$. А размерность пространства $\mathcal{L}in^\perp(v)$ на единицу меньше размерности исходного пространства.

Ковариационная матрица вектора \hat{z} имеет именно такой же вид:

$$\mathbb{V}ar(\hat{z}) = (I - vv')$$

Запомним эту ковариационную матрицу! И запомним, что она возникает у проекции на ортогональное дополнение к вектору v ! А теперь вернёмся к покемонам!

Доказательство критерия Пирсона

Каждый отловленный покемон может быть одного из r видов. Виды покемонов встречаются с вероятностью p_1, \dots, p_r . Всего мы ловим n покемонов, величина ν_j — количество покемонов вида j .

Замечаем, что количество покемонов ν_j имеет биномиальное распределение $\text{Bin}(n, p_j)$. В частности, $\mathbb{E}(\nu_j) = np_j$ и $\text{Var}(\nu_j) = np_j(1 - p_j)$. И как мы обнаружили на более простой задаче,

$$\text{Cov}(\nu_j, \nu_i) = -np_i p_j$$

Мы немного необычным образом отнормируем эти количества ν_j : вычтем математическое ожидание и поделим на корень из математического ожидания!

$$\nu_j^* = \frac{\nu_j - np_j}{\sqrt{np_j}}$$

При этом окажется, что: $\mathbb{E}(\nu_j^*) = 0$, $\text{Var}(\nu_j^*) = 1 - p_j$, $\text{Cov}(\nu_i, \nu_i) = -\sqrt{p_i}\sqrt{p_j}$.

Заметим, что по центральной предельной теореме $\nu_j^* \rightarrow \mathcal{N}(0; 1 - p_j)$.

Присмотримся повнимательнее!

$$\text{Var}(\nu^*) = \begin{pmatrix} 1 - p_1 & -\sqrt{p_1}\sqrt{p_2} & -\sqrt{p_1}\sqrt{p_3} & \dots \\ -\sqrt{p_2}\sqrt{p_1} & 1 - p_2 & -\sqrt{p_2}\sqrt{p_3} & \dots \\ -\sqrt{p_3}\sqrt{p_1} & -\sqrt{p_3}\sqrt{p_2} & 1 - p_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{p_1}\sqrt{p_1} & \sqrt{p_1}\sqrt{p_2} & \sqrt{p_1}\sqrt{p_3} & \dots \\ \sqrt{p_2}\sqrt{p_1} & \sqrt{p_2}\sqrt{p_2} & \sqrt{p_2}\sqrt{p_3} & \dots \\ \sqrt{p_3}\sqrt{p_1} & \sqrt{p_3}\sqrt{p_2} & \sqrt{p_3}\sqrt{p_3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Выходит, что ковариационная матрица нового вектора ν^* представима в виде:

$$\text{Var}(\nu^*) = I - vv',$$

где вектор v состоит из корней вероятностей, $v = (\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_r})$. Длина вектора v равна единице:

$$\|v\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_r^2 = p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$$

То есть ковариационная матрица вектора ν^* совпадает с ковариационной матрицей проекции вектора z из \mathbb{R}^r на подпространство $\mathcal{Lin}^\perp(v)$. Закон распределения многомерного нормального вектора однозначно определяется вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей.

Следовательно, сумма $\sum_{j=1}^r (\nu_j^*)^2$ распределена при больших n также, как квадрат длины проекции z на $\mathcal{Lin}^\perp(v)$.

Поэтому

$$\sum_{j=1}^r (\nu_j^*)^2 = \sum_{j=1}^r \frac{(\nu_j - np_j)^2}{np_j} \rightarrow \chi_{r-1}^2$$

Недостатки доказательства:

1. Строго говоря, ЦПТ гарантирует, что каждый ν_j^* в отдельности имеет асимптотически нормальное распределение, а здесь требуется асимптотическая нормальность вектора ν^* , то есть требуется ЦПТ в векторной форме.
2. Деление на корень из математического ожидания выглядит магией, которая потом раскрывается, а хотелось бы раскрыть её по ходу.

Аналогичное доказательство можно найти в курсе Panchenko [Pan05].

Выборочная дисперсия — явно скалярно

Мы помним, что $\sum (z_i - \bar{z})^2$ — это квадрат длины проекции вектора z на подпространство $\mathcal{L}in^\perp(\mathbb{1})$. Сама проекция вектора z на $\mathcal{L}in^\perp(\mathbb{1})$ на примере $z \in \mathbb{R}^5$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} z_1 - \bar{z} \\ z_2 - \bar{z} \\ z_3 - \bar{z} \\ z_4 - \bar{z} \\ z_5 - \bar{z} \end{pmatrix}$$

Мы легко можем выбрать ортогональный базис в подпространстве $\mathcal{L}in^\perp(\mathbb{1})$ явно. Явный базис:

$$\mathcal{L}in^\perp(\mathbb{1}) = \text{col} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Действительно, давайте проверим:

1. Каждый столбец ортогонален вектору $\mathbb{1} = (1, 1, 1, 1, 1)$.
2. Столбцы ортогональны между собой.
3. Столбцов четыре :)

Поэтому столбцы задают базис в подпространстве $\mathcal{L}in^\perp(\mathbb{1})$.

Нам нужно спроецировать вектор z сначала на подпространство, а потом проекцию \hat{z} раскладывать по базису в подпространстве. Наш базис ортогональный, поэтому фактически на втором шаге мы проецируем вектор \hat{z} на базисные векторы. По теореме о трёх перпендикулярах можно сразу проецировать z на базисные векторы :)

Как бы нам найти проекцию \hat{z} произвольного вектора z на известный вектор v ?

Вспомним, что скалярное произведение $v'z$ — это произведение длин $\|v\|$ и $\|z\|$ на косинус угла между ними. Другими словами, $v'z$ — это произведение длины $\|v\|$ на длину проекции вектора z на вектор v :

$$v'z = \|v\| \cdot \|z\| \cdot \cos(v, z) = \|v\| \cdot \|\hat{z}\|$$

Длина проекции \hat{z} вектора z равна:

$$\|\hat{z}\| = \frac{v'z}{\|v\|}$$

Осталось домножить длину проекции на вектор единичной длины в нужном направлении:

$$\hat{z} = \frac{v}{\|v\|} \cdot \|\hat{z}\| = \frac{v}{\|v\|} \cdot \frac{v'z}{\|v\|} = \frac{v'z}{v'v} \cdot v$$

Например, проекция z на $(1, 1, -2, 0, 0)$ равна:

$$\frac{v'z}{v'v} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{z_1 + z_2 - 2z_3}{2 + 2^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

А квадрат длины проекции \hat{z} вектора z на вектор v равен:

$$\|\hat{z}\|^2 = \left(\frac{v'z}{\|v\|} \right)^2 = \frac{(v'z)^2}{v'v}$$

Например, квадрат длины проекции z на $(1, 1, -2, 0, 0)$ равен:

$$(z_1 + z_2 - 2z_3)^2 / (2 + 2^2);$$

Мы разложили проекцию \hat{z} на сумму проекций!

$$\begin{pmatrix} z_1 - \bar{z} \\ z_2 - \bar{z} \\ z_3 - \bar{z} \\ z_4 - \bar{z} \\ z_5 - \bar{z} \end{pmatrix} = \frac{z_1 - z_2}{1 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{z_1 + z_2 - 2z_3}{2 + 2^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{z_1 + z_2 + z_3 - 3z_4}{3 + 3^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4 - 4z_5}{4 + 4^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Раз уж мы проецировали на ортогональные векторы, то по теореме Пифагора, квадрат длинны всей проекции \hat{z} раскладывается на сумму квадратов отдельных составляющих:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^5 (z_i - \bar{z})^2 &= \\ &= \frac{(z_1 - z_2)^2}{1 + 1^2} + \frac{(z_1 + z_2 - 2z_3)^2}{2 + 2^2} + \frac{(z_1 + z_2 + z_3 - 3z_4)^2}{3 + 3^2} + \frac{(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 - 4z_5)^2}{4 + 4^2}\end{aligned}$$

В общем случае мы получим формулу:

$$\begin{aligned}\sum (z_i - \bar{z})^2 &= \\ &= \frac{(z_1 - z_2)^2}{1 + 1^2} + \frac{(z_1 + z_2 - 2z_3)^2}{2 + 2^2} + \frac{(z_1 + z_2 + z_3 - 3z_4)^2}{3 + 3^2} + \dots + \frac{(z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_{n-1} - (n-1)z_n)^2}{(n-1) + (n-1)^2}\end{aligned}$$

В этом разложении явно видна сумма $(n-1)$ слагаемого. Каждое слагаемое является квадратом нормальной стандартной случайной величины и слагаемые независимы.

Можно и без геометрических соображений просто раскрыть скобки и по индукции доказать равенство правой и левой части. Но там скучно :)

Выборочная дисперсия — матрицы

Вектор средних

Вектор средних в матричном виде записывается так:

$$\hat{z} = \begin{pmatrix} \bar{z} \\ \bar{z} \\ \bar{z} \\ \bar{z} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = Hz = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix}$$

Здесь \hat{z} — это проекция z на подпространство $\mathcal{L}in((1, 1, 1, 1, 1))$. В данном случае ранг матрицы H равен 1, в ней одна строка повторяется кучу раз. Поэтому квадрат длины проекции, $\|\hat{z}\|^2$, имеет хи-квадрат распределение с одной степенью свободы:

$$\|\hat{z}\|^2 = n(\bar{z})^2 \sim \chi_1^2$$

Вектор отклонений от среднего

Вектор средних в матричном виде записывается так:

$$z - \hat{z} = \begin{pmatrix} z_1 - \bar{z} \\ z_2 - \bar{z} \\ z_3 - \bar{z} \\ z_4 - \bar{z} \\ z_5 - \bar{z} \end{pmatrix} = (I - H)z = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix}$$

Здесь $z - \hat{z}$ — это проекция z на подпространство $\mathcal{Lin}^\perp((1, 1, 1, 1, 1))$. В данном случае ранг матрицы $I - H$ равен $(n - 1)$. Вместо ранга легче посчитать след — сумму диагональных элементов. Поэтому квадрат длины проекции, $\|\hat{z}\|^2$, имеет хи-квадрат распределение с одной степенью свободы:

$$\|z - \hat{z}\|^2 = \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

Сумма квадратов остатков - геометрия

Для максимальной доступности доказательства мы проведём его для двух регрессоров. Случай k регрессоров ничем с геометрической точки зрения не отличается.

Пусть $y = \beta_x x + \beta_z z + u$, где u — нормальный вектор, $u \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2 I)$.

Метод наименьших квадратов проецирует y на подпространство регрессоров $\mathcal{Lin}(x, z)$. Поэтому:

- вектор прогнозов \hat{y} — проекция y на $\mathcal{Lin}(x, z)$;
- вектор ошибок $\hat{u} = y - \hat{y}$ — проекция y на $\mathcal{Lin}^\perp(x, z)$;

Сумма квадратов остатков $RSS = \sum \hat{u}^2$. По смыслу RSS — это квадрат длины проекции вектора y на $\mathcal{Lin}^\perp(x, z)$. Замечаем, что проекция x и z на $\mathcal{Lin}^\perp(x, z)$ равна нулю, поэтому RSS — это проекция u на $\mathcal{Lin}^\perp(x, z)$.

Чтобы сделать из вектора u стандартный нормальный вектор, достаточно поделить его на σ . При этом квадрат длины проекции поделится на σ^2 . Мы увидели, что RSS/σ^2 — это квадрат длины проекции стандартного нормального вектора на подпространство $\mathcal{Lin}^\perp(x, z)$ размерности $(n - 2)$. Итого, по определению $RSS/\sigma^2 \sim \chi_{n-2}^2$.

Сумма квадратов остатков - матрицы

Для полноты картины осталось лишь сказать, что вектор прогнозов представим в виде:

$$\hat{y} = Hy = \beta_x Hx + \beta_z Hz + Hu = \beta_x x + \beta_z z + Hu,$$

где $H = X(X'X)^{-1}X'$, а матрица X имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & z_n \end{pmatrix}$$

А вектор остатков, соответственно, представим в виде:

$$\hat{u} = (I - H)y = (I - H)u,$$

где $H = X(X'X)^{-1}X'$.

И сумма квадратов остатков, по-прежнему, есть квадрат длины вектора \hat{u} , и может быть записана в матрицах как:

$$RSS = \hat{u}'\hat{u} = ((I - H)u)'(I - H)u = u'(I - H)'(I - H)u = u'(I - H)u,$$

Ранг матрицы $M = I - H$ равен её следу, так как матрица $M = I - H$ тоже проецирует векторы. Осталось найти размерность подпространства:

$$\text{rank} H = \text{trace}(I - H) = n - \text{trace} H = n - \text{trace}(X(X'X)^{-1}X') = n - \text{trace}((X'X)^{-1}X'X) = n - \text{trace}(I_{2 \times 2}) = n - 2$$

Про t и F отдельно :)

Раз уж хи-квадрат — это квадрат длины проекции, то с точностью с домножения на размерность подпространства окажется, что t -распределение — это тангенс, а F -распределение — квадрат тангенса угла.

Но об этом подробнее в продолжении :)

Пояснительная записка

Сразу скажем, что этот подход не нов. Например, он обсуждается в статье Cobb [Cob11]. Однако аккуратного изложения его на русском я не знаю, поэтому и появилась эта заметка :)

Достоинство подхода с определением через квадрат длины проекции состоит в том, что доказательство многих теорем значительно облегчается. Да и геометрическая мотивация лучше просто формулы!

Возникает разумный вопрос, почему-бы не дать стандартное определение и дополнить его теоремой о том, что квадрат длины проекции имеет хи-квадрат распределение? На мой взгляд, это лучше, чем текущее положение дел, но всё равно неидеально. При подходе “стандартное определение + теорема” получается, что даётся определение, которое не используется. Поэтому определять хи-квадрат распределение нужно как квадрат длины проекции нормального стандартного вектора. А дальше доказывать непротиворечивость этого определения для желающих.

Список литературы

- [Cob11] George W Cobb. “Teaching statistics: Some important tensions”. В: *Chilean Journal of Statistics* 2.1 (2011). Преподавание эконометрики, последовательность изложения, геометрический смысл., с. 31—62.
- [Pan05] Dmitry Panchenko. *18.650 Statistics for Applications (Fall 2006)*. Отличный курс по статистике. В более поздних версиях вместо заметок к лекциям появились слайды. Симпатичнее, но некоторые доказательства в них исчезли. 2005. URL: <https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-443-statistics-for-applications-fall-2006/>.