

Задачи

Фольклор и коллектив кафедры*

29 января 2016 г.

Аннотация

Прикольные задачи по теории вероятностей, теории игр, динамической оптимизации, а заодно и здравому смыслу!

Ключевые слова: взрыв мозга, только хардкор, слабо.

Задача 1. Злобный Дракон поймал принцесс Настю и Сашу и посадил в разные башни. Перед каждой из принцесс Злобный Дракон подбрасывает один раз правильную монетку. А дальше даёт каждой из них шанс угадать, как выпала монетка у её подруги. Если хотя бы одна из принцесс угадает, то Злобный Дракон отпустит принцесс на волю. Если обе принцессы ошибутся, то они навсегда останутся у него в заточении.

Подобная практика у Злобного Дракона исследователями была отмечена уже давно, поэтому принцессы имели достаточно времени договориться на случай вероятного похищения.

Как следует поступать принцессам при подобных похищениях?

Задача 2. Удав-Пустынник любит программировать на `python` и есть французские багеты¹. Длина французского багета равна 1 метру. За один заглот Удав-Пустынник заглатывает кусок случайной длины равномерно распределенной на отрезке $[0; 1]$. Для того, чтобы съесть весь багет удаву потребуется случайное количество N заглотов.

1. Найдите $\mathbb{E}(N)$ и $\text{Var}(N)$
2. Как поменяются ответы, если багет имеет длину 2 метра?

Задача 3. Ефросинья подкидывают правильную монетку неограниченное количество раз.

*

¹ «Удав из которого говорит кролик, — это не тот удав, который нам нужен». [Искандер, 1982]

1. Сколько в среднем нужно сделать бросков до появления последовательности ОРОР?
2. А до появления последовательности РОРР?
3. Какова вероятность того, что ОРОР появится раньше РОРР?

Задача 4. Эконометресса Барбара оценивает с помощью МНК модель $y_t = \beta x_t + \varepsilon_t$. Ошибки ε_t независимы, имеют нулевое среднее и постоянную дисперсию, регрессоры известны и равны $x_t = 1/2^t$.

1. Получит ли Барбара состоятельную оценку для β ?
2. Эконометресса Виолетта оценивает с помощью взвешенного МНК ту же модель, однако ошибочно предполагает, что имеет место гетероскедастичность вида $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 x_t^2$. Получит ли Виолетта состоятельную оценку для β ?

Задача 5. Трое заядлых игроков в покер сидят в чате. Предложите процедуру раздачи карт, при которой каждый игрок знает свои карты и не знает карт соперника. Игроки абсолютно рациональны и обладают безграничными вычислительными возможностями, поэтому использование кодов с открытым ключом (типа RSA) недопустимо. В чате можно посылать сообщения, адресованные как всем сразу, так и конкретному лицу.

Список литературы

Искандер Ф. Кролики и удавы. — Ann Arbor, 1982.