



Маленький зоопарк дифференциальных уравнений.



Зверь 1. Уравнения с разделяющимися переменными.

Внешний вид: $f(x) dx = g(y) dy$.

Как решать: проинтегрировать правую и левую части.

Пример: $y' - 5y = 0$

$$y' - 5y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5y \Rightarrow \frac{1}{y} dy = 5 dx \text{ или } y = 0$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 5 dx \text{ или } y = 0 \Rightarrow \log |y| = 5x + c, c \in \mathbb{R} \text{ или } y = 0$$

Ответ: $y(x) = c \cdot e^{5x}, c \in \mathbb{R}$



Зверь 2. Линейное уравнение первой степени с ненулевой правой частью.

Внешний вид: $y' + f(x)y = g(x)$.

Как решать:

Способ 1. Educated guesswork.

Шаг 1.

Заменить в исходном уравнении правую часть на ноль.

Решить однородное уравнение $y' + f(x)y = 0$. Здесь разделяются переменные.

Получается ответ в духе $y_{hom}(x) = c \cdot \dots$

Шаг 2.

По виду правой части угадать решение, $y_{pi}(x)$.

Если в правой части содержится $\sin(x)$, значит в решении есть $a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$.

Нюанс:

Если угадываемый вид содержится в $y_{hom}(x)$, то догадку следует домножить на x .

Записываем ответ в виде $y(x) = y_{hom}(x) + y_{pi}(x)$

Пример 1: $y' - 5y = 10$

Шаг 1.

Решаем $y' - 5y = 0$. Уже делали, $y_{hom}(x) = ce^{5x}$.

Шаг 2.

$RHS = 10$. Кто еще не в курсе, RHS - это «Right Hand Side».

10 - это константа, поэтому будем искать частное решение y_{pi} в виде $y = a$.

Тогда $y' = 0$. Подставим предположенные y и y' в уравнение.

Получаем $0 - 5a = 10$, значит $a = -2$.

Ответ: $y(x) = c \cdot e^{5x} - 2$, $c \in \mathbb{R}$

Пример 2: $y' - 5y = 6e^{5x}$

Шаг 1.

Решаем $y' - 5y = 0$. Уже делали, $y_{hom}(x) = ce^{5x}$.

Шаг 2.

$RHS = 6e^{5x}$.

Будем искать частное решение y_{pi} в виде $y = a \cdot e^{5x}$.

Ого! Такое уже входит в $y_{hom}(x)$. Поэтому домножаем догадку на x .

Значит $y = a \cdot x \cdot e^{5x}$, тогда $y' = a \cdot e^{5x} + 5ax \cdot e^{5x}$

Подставим предположенные y и y' в уравнение.

Получаем $a \cdot e^{5x} + 5ax \cdot e^{5x} - 5a \cdot x \cdot e^{5x} = 6e^{5x}$, после упрощения: $a \cdot e^{5x} = 6e^{5x}$, значит $a = 6$.

Ответ: $y(x) = c \cdot e^{5x} + 6xe^{5x}$, $c \in \mathbb{R}$

Способ 2. Variation of constant.

Метод вариации постоянной, что-то в духе «изменение неизменного»

Шаг 1.

Заменить в исходном уравнении правую часть на ноль.

Решить однородное уравнение $y' + f(x)y = 0$. Здесь разделяются переменные.

Получается ответ в духе $y_{hom}(x) = c \cdot \dots$

Шаг 2.

Сделать вид, что c - не просто константа, а функция $c(x)$.

Подставить полученное решение в исходное уравнение и найти эту $c(x)$.

Пример: $y' - 5y = 6e^{5x}$

Шаг 1.

Решаем $y' - 5y = 0$. Уже делали, $y_{hom}(x) = ce^{5x}$.

Шаг 2.

Ищем решение в виде $y(x) = c(x)e^{5x}$

Тогда $y'(x) = 5c(x)e^{5x} + c'(x)e^{5x}$

Подставляем $y(x)$ и $y'(x)$ в исходное уравнение:

$$5x(x)e^{5x} + c'(x)e^{5x} - 5c(x)e^{5x} = 6e^{5x} \Rightarrow c'(x) = 6 \text{ или } c(x) = 6x + c$$

Ответ: $y(x) = (6x + c) \cdot e^{5x}, c \in \mathbb{R}$



Зверь 3. В полных дифференциалах.

Внешний вид: $A(x, y) dx + B(x, y) dy = 0$, $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$.

Как решать: «Four step procedure»

1. Сначала убедитесь, что это оно. Проверьте, что $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$
2. Представьте решение в виде $F(x, y) = \int A(x, y) dx + c(y)$
3. Возьмите $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ и приравняйте к $B(x, y)$.
4. Из полученного уравнения найдите $c(y)$.

Не забудьте записать ответ $F(x, y) = 0$

Пример: $(2x - y) dx + (2y - x) dy = 0$

1. Проверяем $\frac{\partial(2x-y)}{\partial y} = \frac{\partial(2y-x)}{\partial x}$. OK!
2. $F(x, y) = \int 2x - y dx + c(y) = x^2 - xy + c(y)$
3. $\frac{\partial(x^2 - xy + c(y))}{\partial y} = 2y - x$

Получили уравнение: $-x + c'(y) = 2y - x$

4. Решаем $c'(y) = 2y$, $c(y) = y^2 + c$

Ответ: $x^2 - xy + y^2 + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$

Зверь 3, неодомашненный, дикий.

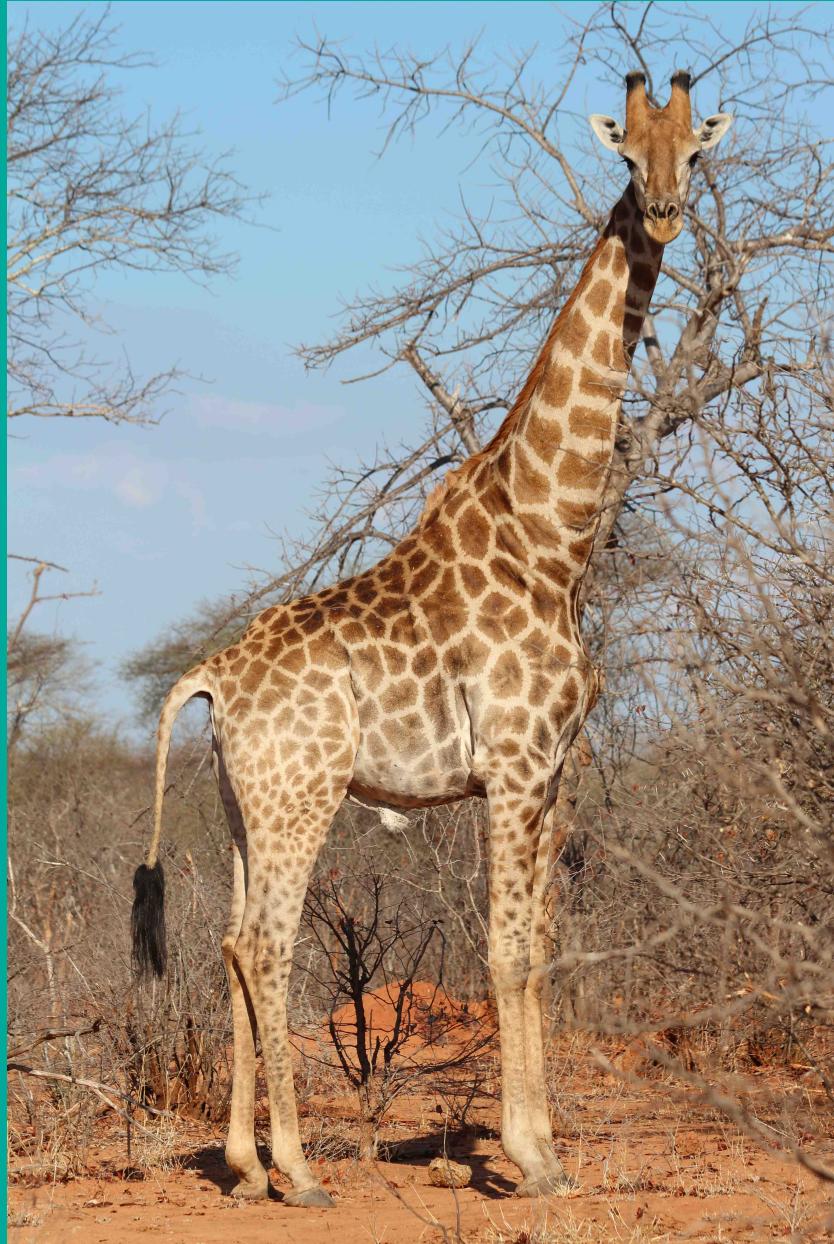
Внешний вид: $A(x, y) dx + B(x, y) dy = 0$, без всяких условий на $A(x, y)$ и $B(x, y)$!

Небольшое предложение: все-таки дикого зверя можно одомашнить, если он не агрессивен, - можно найти интегрирующий множитель, проверив, является ли разность производных функций-коэффициентов при dx и dy , делённая на одну из этих функций в зависимости от порядка вычитания, функцией лишь от одной переменной. Если да, то зверь не опасен.



Теорема об одомашнивании. Всегда найдется функция $r(x, y)$, такая, что после домножения на нее будет выполняться условие $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$.

На практике найти этот integrating factor сложно, поэтому теорема имеет небольшой практический смысл.



Зверь 4. Однородное по x и y .

Внешний вид: $A(x, y) dx + B(x, y) dy = 0$, где $A(x, y)$ и $B(x, y)$ - однородные функции одной степени.
Как решать? Часто помогает замена $y(x) = x \cdot r(x)$.

При этом dy заменяется на $xdr + rdx$. А, кстати, почему?

Пример: $x dy + (y + x) dx = 0$

Перед dy и dx стоят однородные функции первой степени.

Делаем замену: $y(x) = xr(x)$, $dy = xdr + rdx$

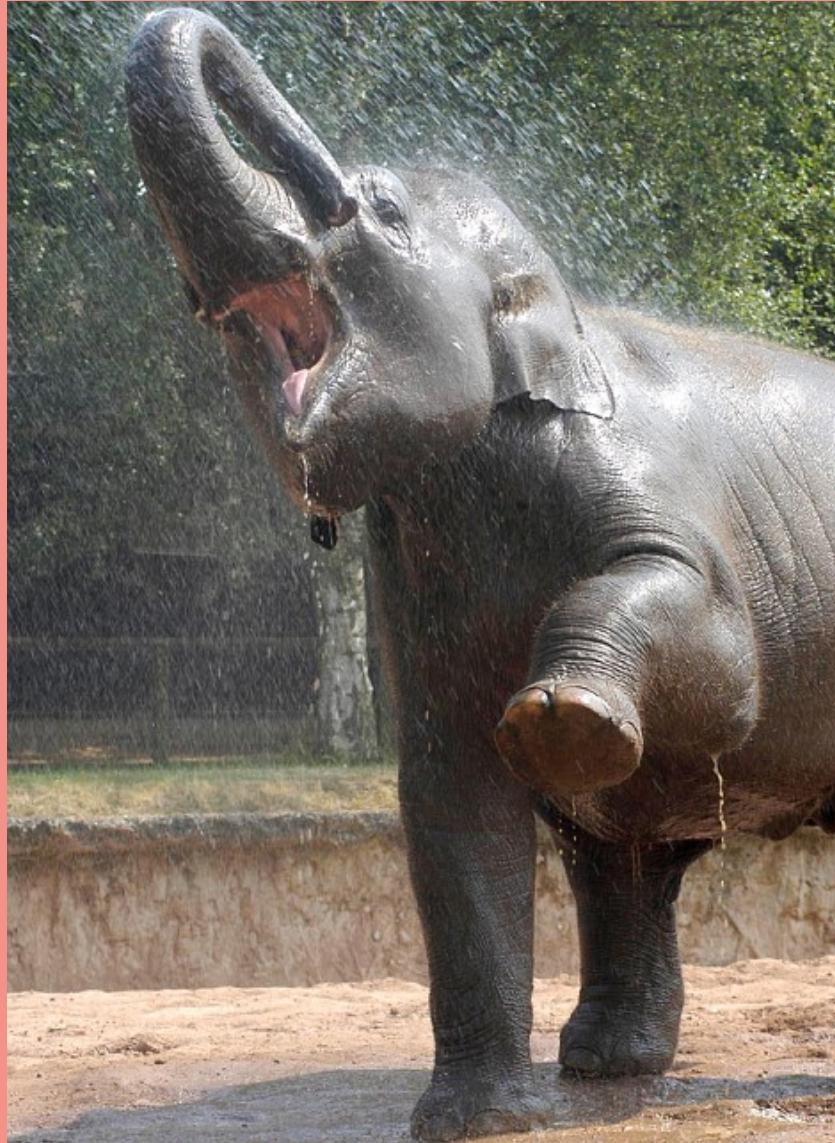
$$x(xdr + rdx) + (xr + x)dx = 0 \Rightarrow xdr + (2r + 1)dx = 0$$

Тут разделяются переменные.

$$\frac{1}{2r+1} dr = -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \frac{1}{2} \log |2r+1| = -\log |x| + c$$

Возвращаемся к y :

$$\text{Ответ: } \log |2\frac{y}{x} + 1| = -2 \log |x| + c, c \in \mathbb{R}$$



Зверь 5. Уравнение Бернулли.

Внешний вид: $y' + f(x)y = g(x)y^n$,

Как решать? Поделить уравнение на y^n и сделать замену $r(x) = \frac{1}{y(x)^{n-1}}$.

При этом, конечно, $r' = -\frac{(n-1)y'}{y^n}$.

Получается линейное уравнение.

Пример: $y' - 5y = y^6$

$$\frac{y'}{y^6} - 5 \frac{1}{y^5} = 1 \text{ или } y = 0$$

$$\frac{-5y'}{y^6} + 25 \frac{1}{y^5} = -5 \text{ или } y = 0$$

Делаем замену $r(x) = \frac{1}{y^5}$, при этом $r'(x) = \frac{-5y'}{y^6}$.

Получаем зверя под номером 2 — $r' + 25r = -5$

Решаем: $r(x) = ce^{-25x} - \frac{1}{5}$, $c \in \mathbb{R}$.

Возвращаемся к y :

Ответ: $\frac{1}{y^5} = -ce^{-25x} - \frac{1}{5}$, $c \in \mathbb{R}$ или $y = 0$



Зверь 6. Линейное уравнение произвольной степени с постоянными коэффициентами.

Внешний вид: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = g(x)$

Как решать?

Шаг 1. Заменить в исходном уравнении правую часть на ноль.

Составить характеристическое уравнение:

n -ную производную y заменить на λ^n

Найти корни: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Записать решение однородного уравнения: $y_{hom}(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$

Шаг 2. По виду правой части угадать решение, $y_{pi}(x)$.

Записать ответ $y(x) = y_{hom}(x) + y_{pi}(x)$

Пример: $y'' - y' - 6y = 5e^{3x}$

Шаг 1.

Решаем $y'' - y' - 6y = 0$.

Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$

Находим корни¹: $\lambda_{1,2} = 3, -2$.

Значит $y_{hom}(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}, c_{1,2} \in \mathbb{R}$

Шаг 2.

$RHS = 5e^{3x}$.

Будем искать частное решение y_{pi} в виде $y = a \cdot e^{3x}$.

Ого! Такое уже входит в $y_{hom}(x)$, домножаем догадку на x .

Стало быть ищем решение $y_{pi}(x) = axe^{3x}$

Значит $y' = a \cdot e^{3x} + 3axe^{3x}$ и $y'' = 3ae^{3x} + (3ae^{3x} + 9axe^{3x}) = 6ae^{3x} + 9axe^{3x}$.

Подставим предположенные y, y' и y'' в уравнение.

Получаем $6ae^{3x} + 9axe^{3x} - (a \cdot e^{3x} + 3axe^{3x}) - 6axe^{3x} = 5e^{3x}$, после упрощения: $5a \cdot e^{3x} = 5e^{3x}$.

Значит $a = 1$.

Ответ: $y(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x} + xe^{3x}, c_{1,2,3} \in \mathbb{R}$

Нюансы:

Комплексные корни. Комплексные корни ходят парами: $\lambda_1 = a + bi, \lambda_2 = a - bi$.

Им соответствует решение $(d_1 + d_2i)e^{\lambda_1 x} + (d_1 - d_2i)e^{\lambda_2 x}$.

Это же решение можно записать без мнимого i , зато с тригонометрией: $e^{ax}(c_1 \cos(bx) + c_2 \sin(bx))$

Кратные корни.

Если корень λ встречается несколько раз, то:

Первому корню $\lambda_1 = \lambda$ соответствует решение $e^{\lambda x}$

Второму корню $\lambda_2 = \lambda$ соответствует решение $xe^{\lambda x}$

Третьему корню $\lambda_3 = \lambda$ соответствует решение $x^2e^{\lambda x}$

И так далее

¹Здесь была прикольная опечатка: «Находим корки»



Disclaimer:

Этот текст не претендует ни на полноту, ни на строгость, ни на безошибочность!

Если есть вопросы, пожелания, комментарии, сообщения об ошибках, благодарности, то пишите на boris.demeshev@gmail.com.

Борис Демешев

Благодарим Вас за посещение нашего зоопарка.