Задачник для тигров

Тигр и все-все-все

9 ноября 2019 г.

Содержание

1. Введение

Задачи взяты из различных источников, по возможности, указан автор.
В коллекцию (Леша разрешил!) перекочевали задачи из «Большого Задачника Игр» (С. Коковин, А. Тонис, А. Савватеев и др.). Эти задачи отмечены так «БЗИ».
Если есть вопросы по этой коллекции — boris.demeshev@gmail.com

1.1. Цитаты

Воцарилось молчание, во время которого Карлсон дожёвывал свой шоколад. Потом он сказал:
- Но раз ты такой лакомка, такой обжора, лучше всего будет по-братски поделить остатки. У тебя ещё есть конфеты?
Малыш пошарил в карманах.
- Вот, три штуки. - И он вытащил два засахаренных орешка и один леденец.
- Три пополам не делится, - сказал Карлсон, - это знают даже малые дети. - И, быстро схватив с ладони Малыша леденец, проглотил его. - Вот теперь можно делить, - продолжал Карлсон и с жадностью поглядел на оставшиеся два орешка: один из них был чуточку больше другого. - Так как я очень милый и очень скромный, то разрешаю тебе взять первому. Но помни: кто берёт первым, всегда должен брать то, что поменьше, - закончил Карлсон и строго взглянул на Малыша.
Малыш на секунду задумался, но тут же нашёлся:
- Уступаю тебе право взять первым.
- Хорошо, раз ты такой упрямый! - вскрикнул Карлсон и, схватив больший орешек, мигом засунул его себе в рот.
Малыш посмотрел на маленький орешек, одиноко лежавший на его ладони.
- Послушай, - сказал он, - ведь ты же сам говорил, что тот, кто берёт первым, должен взять то, что поменьше.
- Эй ты, маленький лакомка, если бы ты выбирал первым, какой бы орешек ты взял себе? - Можешь не сомневаться, я взял бы меньший, - твёрдо ответил Малыш.
- Так что ж ты волнуешься? Ведь он тебе и достался!
Малыш вновь подумал о том, что, видимо, это и есть то самое разрешение спора словами, а не кулаками, о котором говорила мама. *Карлсон, который живёт на крыше, А. Линдгрен*

There are two important concepts in economics. The first is «Buy low, sell high», which is self-explanatory. The second is opportunity cost, the highest valued alternative that must be sacrificed to attain something or otherwise satisfy a want. I discovered this concept as an undergraduate at Caltech. I was never very in to computer games, but I found myself randomly playing tetris. Out of the blue I was struck by a revelation: «I could be having sex right now.» I haven't played a computer game since.
Introduction to Methods of Applied Mathematics, Sean Mauch

Бюджетное ограничение следует называть принципом кота Матроскина: «Чтобы продать что-нибудь ненужное, надо сначала купить что-нибудь ненужное».

идея Юры Автономова

Правильно хватать самый маленький кусок торта! Его можно съесть раньше, чем сестры доедят свои куски, и тогда успеешь взять еще и второй!
по мотивам «Делим по справедливости», Брамс

In mastering the material in this book, you are going to have to do a lot of work. This will consist mainly of chewing a pencil or pen as you struggle to do some sums. Maths is like that. Hours of your life will pass doing this, when you could be watching the X-files or playing basketball, or whatever.
Michael D. Alder, An Introduction to Complex Analysis for Engineers

Well of course I didn't do any at first ... then someone suggested I try just a little sum or two, and I thought «Why not? ... I can handle it». Then one day someone said «Hey, man, that's kidstuff - try some calculus» ... so I tried some differentials ... then I went on to integrals ... even the occasional volume of revolution ... but I can stop any time I want to ... I know I can. OK, so I do the odd bit of complex analysis, but only a few times ... that stuff can really screw your head up for days ... but I can handle it ... it's OK really ... I can stop any time I want ...
tim@bierman.demon.co.uk (Tim Bierman)

1.2. О чём это всё

Задачник не вызывает сонливости и не имеет противопоказаний.
В случае крайне маловероятной посадки на воду задачник может быть использован в качестве спасательного средства.
Задачник оборудован тремя аварийными выходами: в передней, средней и хвостовой частях.
Отпускается без рецепта.
Срок годности не ограничен.
Не содержит мелких деталей, которые могут быть проглочены детьми до 3-х лет.

Предисловие:
Задачи упорядочены только по типу!
Условия задач кроме составителя комментировал Тигр - тотем теории игр.
Краткий словарь:
Nash Equilibrium, NE - равновесие по Нэшу. В задачнике этот термин используется максимально широко, в том числе и для игр с неполной информацией.
Subgame Perfect Nash Equilibrium, SPNE - равновесие по Нэшу, совершенное на подыграх
Weak Sequential Equilibrium - слабое секвенциальное равновесие
Sequential Equilibrium, SE - секвенциальное равновесие
Common knowledge of information - всеобщность знания
Correlated Equilibrium - Коррелированное равновесие
Многие задачи можно решать, руководствуясь только здравым смыслом. Т.е. если Вы все-таки так и не поняли, что такое равновесие по Нэшу, попытайтесь ответить на вопрос «Как бы я играл в эту игру?»
По умолчанию предполагается, что все сказанное в условии является всеобщим знанием.
Что означают пометки у задач?
[Т] - Трудная задача
[О] - Особенная задача. У особенной задачи может быть смешное условие, а ее решение может кардинально изменить геополитическую обстановку в мире.

2. Поиск выигрышной стратегии

Победит тот, кто ходит первым, стратегии особой не надо
Неизвестный участник XXVI Турнира имени Ломоносова
Сослаться на теорию вероятностей?
Здесь собраны задачи, связанные с нахождением оптимальной стратегии в играх с совершенной информацией, но без применения метода обратной индукции.
Парадоксы Филатова-Поддьякова (написать Филатову) (‼!)

Задача 2.1. Джордж и Усама
Усама бин Ладен (Usama bin Laden) прячется в одной из ста пещер, расположенных в одну линию. Каждую ночь он меняет пещеру, в которой находится, на одну из двух соседних. Джордж Буш младший (George Bush-jr) не видит перемещёний Усамы. Каждый день Буш может направить отряд спецназа в одну из пещер.
Тигр: По-моему, это задача про ограниченную рациональность...

1. Конечны ли множества стратегий игроков?
2. Может ли Буш гарантировать поимку Усамы? Если Вы считаете, что да, то укажите оптимальную стратегию; если нет, то докажите.

Задача 2.2. Джордж и Саддам
Для того, чтобы создать завод для производства оружия массового поражения, инженеры Саддама должны работать 3 дня на одном месте (возможно с перерывами). Каждый день Саддам выбирает место, где будет работать команда инженеров. Каждую ночь Джордж выбирает одно из мест для бомбардировки. Все потенциальные места постройки завода прекрасно просматриваются со спутника. При бомбардировке недостроенный завод полностью уничтожается. Ни один пилот не отправиться бомбить завод в ночь 13-го числа любого месяца.
Саддам выигрывает, если ему удается построить завод по производству оружия массового уничтожения. Джордж выигрывает, если не допустит этого. Может ли Саддам построить завод? Если да, то за какое время?

Задача 2.3. «Шестиугольники»
Тигр: у студентов английское название «Hex» почему-то вызывает нездоровую реакцию...
Игровое поле поделено на правильные шестиугольники. Белые и черные ходят по очереди, занимая своей фишкой любой незанятый шестиугольник. Белые выигрывают, если им удается соединить непрерывной линией из своих фишек левую и правую сторону доски. Черные выигрывают, если им удается соединить верх и низ. Если правила остались неясны, можно попробовать поиграть на http://www.mazeworks.com/hex7/

1. Докажите, что ничья в этой игре невозможна.
2. У какого игрока имеется выигрышная стратегия?
3. Никто на Земле не знает, как выглядит выигрышная стратегия в «шестиугольниках». Нашедшему — 10 баллов по теории игр *Тигр: плюс престижная премия!*.

Задача 2.4. Задача про выборы в совет директоров.
Источник: Григорий Хацевич, Алексей Киселев, https://iloveeconomics.ru/zadacha/aleksei_kiselev/vybory_v_sovet_direktorov
Акционерное общество, капитал которого разделен на N обыкновенных акций, проводит выборы совета директоров, в который войдут D человек. Выборы проходят по кумулятивной системе: владелец n акций получает при голосовании $n \cdot D$ голосов, которые он в любых пропорциях распределяет между теми кандидатами, которых он хочет видеть в совете директоров. Можно передавать

кандидатам дробное количество голосов. После голосования составляется рейтинг кандидатов по убыванию количества набранных ими голосов, и в совет директоров попадают первые D человек по рейтингу. При этом если на последние несколько мест претендует большее число кандидатов, набравших одинаковое количество голосов, то эти несколько мест распределяются между такими кандидатами случайным образом.

1. Сколько акций нужно иметь некоторому акционеру, чтобы гарантированно (вне зависимости от действий остальных акционеров) провести в совет директоров d своих кандидатов?

2. Как изменится ответ, если акционер может передать кандидату только целое количество голосов?

3. Чему равно минимальное число акций при $N = 100$, $D = 15$, $d = 5$?

Задача 2.5. Очередь гномов
Злобный дракон поймал n гномов. Шляпы k цветов. На этот раз гномы выстроены в ряд друг за другом. Каждый гном видит цвета шляп впереди стоящих гномов. Начиная с последнего, каждый гном называет цвет своей шляпы. Если он угадал, то он спасен. Перед игрой гномы могут договориться о стратегии игры.
Как следует играть гномам? Сколько гномов можно гарантированно спасти? *Тигр: Кто последний к дракону?*

Задача 2.6.
Вася и Петя поступили на испытательный срок на одну работу. Они не могут координировать свои действия. У Васи 4 разные рубашки, причем два раза подряд он в одной не ходит, у Пети 5 рубашек, причем 4 точно такие же, как у Васи. Петя не хочет появиться в такой же рубашке, как и Вася. Как ему себя вести?

Задача 2.7. В несколько раз больше! [О]
Источник: [3.7.18][4]
Васе предлагают две шкатулки. И обещают, что в одной из них денег в два раз больше, чем в другой. Вася открывает наугад одну из них — в ней a рублей. Вася может либо взять деньги, либо взять оставшуюся шкатулку.

1. Правильно ли Вася считает, что ожидаемое количество денег в неоткрытой шкатулке равно $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a\right) + \frac{1}{2}(2a) = 1\frac{1}{4}a$, и, поэтому нужно изменить свой выбор?

2. Пусть в пару шкатулок кладут 3^k и 3^{k+1} рублей с вероятностью $p_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Вася выбирает наугад одну из шкатулок. Стоит ли ему изменить свой выбор, после того, как он открыл первую? Почему?

3. За обратной индукцией. Комбинаторные игры

Комбинаторная теория игр занимается играми двух игроков, где игроки ходят по очереди, с полной совершенной информацией без случайных ходов. Например, шахматами. В комбинаторных играх чаще всего бывает не более трех исходов: ничья, победа первого игрока, победа второго игрока. Как правило, комбинаторная игра обязательно оканчивается за конечное число ходов. В комбинаторной игре с обычными правилами выигрывает игрок, сделавший последний ход. В комбинаторных «поддавках» игрок, сделавший последний ход, проигрывает. В случае возникновении ничьи указывается, выгодна ли она первому или второму игроку.
В задачах этого раздела по умолчанию проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 3.1. Разные игроки
В кучке 121 камень. Игроки ходят по очереди. Первый игрок за один ход может взять 1 или 3 камня, а второй — 2 или 3 камня. Проигрывает тот, кто не может сделать ход по правилам. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 3.2. Тамерлан
В кучке лежит 45 камней. Вася и Петя забирают камни из кучки по очереди. За один ход можно взять два, три или четыре камня. Вася ходит первым. Почетное прозвище «Тамерлан» получает взявший последний камень. Если в кучке остался один камень (ход по правилам сделать невозможно), то игра оканчивается ничьей.
Тигр: А в жизни выигрывает тот, у кого куча камней больше, и совсем другим способом...

1. Классифицируйте эту игру: статическая или динамическая, с полной или неполной информацией, с совершенной или несовершенной информацией;

2. Конечны ли множества стратегий игроков?

3. Укажите верхнюю границу для числа стратегий игроков. Любители комбинаторики могут попытаться указать точное число стратегий.

4. Кто станет Тамерланом при правильной игре?

5. Кто станет Тамерланом, если это почетное прозвище получает игрок, не взявший последний камень (при отсутствии ничьей)?

Задача 3.3. Скрытый Тамерлан.
Два игрока стоят на расстоянии 1111 шагов. Они по очереди делают шаги навстречу друг другу. Вася может делать либо два, либо три шага, а Петя — либо три, либо четыре. Тот, кто первым не может сделать ход, проиграл. Начинает Вася.
Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 3.4. Вариант игры Баше.
Источник: БЗИ, NES
В игре участвуют двое, ходя по очереди (первый, второй, первый и т. д.). На столе лежит n камней. В свой ход каждый из участников может изъять 2^k камней ($k = 0, 1, 2, \ldots$; естественно, нельзя снять со стола больше, чем там есть). Выигрывает тот, кто своим ходом оставляет пустой стол.

1. Пользуясь принципом Цермело, определите выигрышные и проигрышные позиции в игре. Для этого, например, можно исследовать несколько первых позиций и угадать закономерность. Обязательно обоснуйте свой ответ.

2. Опишите выигрышную стратегию игрока (в случае, если она у него есть). Когда выигрывает первый, а когда второй?

3. Пусть $n = 50$ и Вам ходить. Ваши действия?

Задача 3.5. Игра Баше
Источник: [31], задача 22
В 1612 г. в Лионе появилась книга поэта и математика Баше де Мезирьяка (Claude Gaspar Bachet de Méziriac[1]) «Занимательные и приятные числовые задачи» (Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres). В ней была предложена следующая игра. Двое по очереди называют числа от 1 до 10, выигрывает тот, кто первым доведет сумму до 100. В чью пользу эта игра?

[1] Баше де Мезирьяк перевел с греческого на латынь Арифметику Диофаната, на полях которой Ферма сформулировал свою великую теорему.

Задача 3.6. Набери чет
В кучке 135 камней, двое по очереди забирают себе от 1 до 4 камней. Выигрывает тот, кто к концу игры наберет четное число камней. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 3.7. Вариация на тему игры Баше.
Источник: [33]
В игре участвуют двое, ходя по очереди (первый, второй, первый,...). На столе лежит n камней. В свой ход каждый из участников может взять либо столько же камней, сколько было взято его партнером на предыдущем ходу, либо на один больше. На первом ходу можно брать один или два камня. Кто не может продолжать игру по правилам (из-за недостатка камней), тот проиграл.

1. Опишите процесс последовательного определения выигрышных и проигрышных позиций в этой игре. Найдите выигрышные стратегии для малых n.

2. Пусть $n = 14$ и ваш ход. Как надо играть?

3. Тот же вопрос, если $n = 18$.

4. Замечание. В данной задаче авторам неизвестно короткое доказательство для расположения выигрышных и проигрышных позиций при произвольном n. Восполните пробел!

3.1. Две кучки камней

Задача 3.8. Забери камень-2
В первой кучке — 6 камней, во второй — 7 камней. За один ход можно взять два камня или пять камней из любой кучки.

1. Какой игрок выигрывает, первый или второй, если цель игры — сделать ход последним?

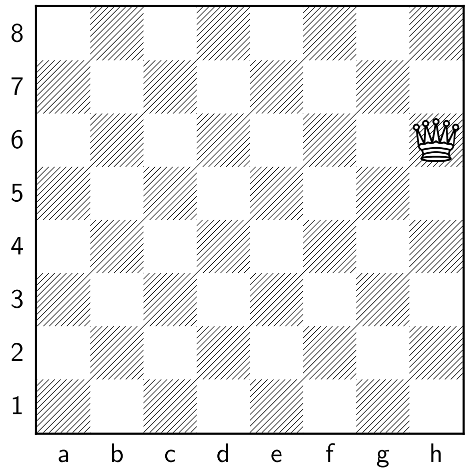
2. Какой игрок выигрывает, если цель игры — не сделать ход последним?

Задача 3.9. Цзяньшинцзы «Выбирание камней»
Древний Китай. Две кучки камней. Игроки ходят по очереди. За один ход можно забрать либо произвольное число камней из одной кучки, либо одинаковое число камней из обеих. В одной кучке 5, а в другой — 7 камней. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 3.10. Одинокий ферзь
Шахматная доска, одинокий раненый ферзь стоит на h6. Раненый ферзь как и ферзь может двигаться на любое число клеток, но только влево или вниз, или влево-вниз. Двое игроков ходят по очереди и тот, кто поставит ферзя на a1, выигрывает.

1. В чью пользу эта игра? Если в пользу первого, то с какого хода следует начать игру?

2. Найдите 10 отличий игры «Одинокий ферзь» от игры «Цзяньшинцзы»



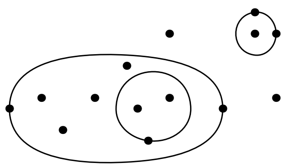
Подсказка: попробуйте обратную индукцию на шахматной доске.

Задача 3.11. Разделяй и опустошай!
Есть две коробочки. В каждой из них лежит некоторое количество фишек. Игроки ходят по очереди. За один ход игрок выбрасывает содержимое одной из коробочек, и затем делит содержимое другой между двумя коробочками (как минимум одна фишка должна оставаться в каждой коробочке). Проигрывает тот, кто не может сделать ход по правилам. Найдите все выигрышные позиции.

Задача 3.12. Rayles
На плоскости нарисованы точки. За один ход разрешается провести замкнутую кривую, проходящую через одну или две из отмеченных точек, но не пересекающую и не касающуюся уже проведенных кривых. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

1. Докажите, что эта игра эквивалентна в каком смысле? игре с кучками камней по правилам: За один ход можно брать из кучки один или два камня, и, при желании, разделять ее на две кучки.

2. Определите правильный ход в ситуации:



3.2. Теорема Шпрага-Гранди

Задача 3.13. Функция Шпрага-Гранди (Sprague-Grundy function, Nim-value)
Автор: Эта большая задача предназначена для тех, кто хочет познакомиться с комбинаторной теорией игр.
Тигр: И для тех, кто хочет научиться быстро находить выигрышную позицию с помощью заклинания Шпрага-Гранди.
Назовем *схемой игры* ориентированный граф, необязательно дерево, где узлы изображают возможные позиции в игре, а ребра поясняют, из какой позиции в какую можно попасть. Схема игры не совпадает с деревом игры! Схема игры, в отличие от дерева, не сохраняет путь, следуя которому, игроки попали в заданную позицию!

1. Пусть у одного из игроков есть выигрышная стратегия (стратегия — это предписание, какой ход делать в зависимости от того, какие ходы были сделаны до этого). Докажите, что у него

есть выигрышная стратегия, которая является функцией только от текущей позиции, и не учитывает того, каким путем она была достигнута.

Обозначим через P позицию, выигрышную для игрока, чей ход предшествовал этой позиции (Previous player), N — позицию, выигрышную для игрока, который ходит из этой позиции (Next player).

2. В кучке лежит 10 камней. За один ход можно забрать 1 или 3 камня. Изобразите схему игры. Найдите P–позиции и N–позиции.

3. Докажите, что при обычных правилах в комбинаторной игре верно три утверждения.

   1. Любая терминальная позиция является P–позицией.

   2. Любая позиция, предшествующая P–позиции, является N–позицией.

   3. Любая позиция, следующая за P–позицией, является N–позицией.

   Итак, магическое заклинание! Фунция Шпрага-Гранди! $g\left(x\right)$!

   В конечной игре функция Шпрага-Гранди присваивает каждому узлу целое неотрицательное число. Всем терминальным узлам присваивается ноль. Если у всех позиций, следующих за позицией x, функция уже посчитана, то значение функции в позиции x равно минимальному целому числу, не равному последующим значениям. Например, за x следуют четыре позиции, на которых функция Шпрага-Гранди равна 0, 1, 2 и 5 соответственно. Тогда $g\left(x\right) = 3$. Формально, если $F\left(x\right)$ — множество узлов, следующих за узлом x, то $g\left(x\right) = \min\left\{n \in \mathrm{N} \cup \{0\} : n \notin g(F(x))\right\}$.

4. Посчитайте функцию Шпрага-Гранди для пункта 2;

5. Докажите, что функция Шпрага-Гранди равна нулю в P–позициях и отлична от нуля в N–позициях. В доказательстве можно воспользоваться результатами пункта 3;

6. Верно ли, что любой ход из N–позиции уменьшает функцию Шпрага-Гранди?

7. Верно ли, что в любой N–позиции существует такой ход, который понижает функцию Шпрага-Гранди на любое возможное натуральное число?

   Если есть несколько комбинаторных игр, то их можно сложить!

   Игроки ходят по очереди. Ход в игре-сумме заключается в том, что игрок выбирает любую из игр-слагаемых и делает в ней один ход. При обычных правилах проигрывает тот, кто не может сделать ход ни в одной из игр-слагаемых.

8. Пример игры-суммы. Имеется три кучки — по 5, 7 и 9 камней. Из первой можно брать 1 или 2 камня, из второй — 2 или 3 камня, из третьей — 3 или 4 камня. За один ход камни можно брать только из одной кучки. Игроки ходят по очереди. Данная игра является суммой трех игр. Догадайтесь, каких! Для каждой из игр-слагаемых рассчитайте функцию Шпрага-Гранди.

   Функция xor означает «исключающее или» в двоичной записи. Пример:

$$91\ xor\ 21 = 1011011_{(2)}\ xor\ 0010101_{(2)} = 1001110_{(2)} = 78.$$

9. Вычислите $17\ xor\ 9$, $6\ xor\ 5$ и $7\ xor\ 19$.

   Позиция в игре-сумме определяется позицией в каждой из игр-слагаемых.

   <u>Теорема Шпрага-Гранди</u>. В игре-сумме функция Шпрага-Гранди однозначно определяется функциями Шпрага-Гранди игр-слагаемых по правилу: $g\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = g_1\left(x_1\right)\ xor\ g_2\left(x_2\right)\ xor\ \ldots\ x$

10. Пользуясь теоремой и зная значения функции Шпрага-Гранди в играх-слагаемых, найдите значение функции Шпрага-Гранди в игре из пункта 8; Отлично ли оно от нуля? Кто выигрывает, первый или второй игрок?

11. Найдите выигрышный ход. Воспользуйтесь тем, что выигрышный ход должен переводить $N-$позицию в $P-$позицию, т.е. обнулять значение функции Шпрага-Гранди.

Задача 3.14.
Структурировать доказательство иначе! Доказательство теоремы Шпрага-Гранди [T]
Теорема:
В игре-сумме функция Шпрага-Гранди однозначно определяется функциями Шпрага-Гранди игр-слагаемых по правилу: $g\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = g_1\left(x_1\right) \quad xor \quad g_2\left(x_2\right) \quad xor \quad \ldots \quad xor \quad g_n\left(x_n\right)$.
Доказательство:
Пусть $g\left(.\right)$ — функция в игре-сумме, определяемая согласно теореме.

1. Докажите, что в терминальных узлах игры-суммы функция $g\left(x\right)$ действительно равна нулю. Пусть x — некая позиция в игре-сумме, т.е. $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ и $g\left(x\right) = b$. Рассмотрим произвольное число $a < b$. Нужно доказать, что за позицией x существует позиция x', такая что $g\left(x'\right) = y$ что за y?. Так как $a < b$, то двоичная запись этих чисел различна. Пусть первое различие в двоичной записи находится на k-ом месте.

2. Рассмотрите число $d = a \ xor \ b$. Что там находится на k -ом месте? Какова длина двоичной записи этого числа? Чему равно $d \ xor \ b$?

3. По определению $b = g_1\left(x_1\right) \ xor \ g_2\left(x_2\right) \ xor \ \ldots \ xor \ g_n\left(x_n\right)$. Так как на k -ом месте в числе b содержится 1, то существует такая игра, что $g_i\left(x_i\right)$ в двоичной записи содержит 1 на k -ом месте. Для простоты пусть $i = 1$. Докажите, что $d \ xor \ g_1\left(x_1\right) < g_1\left(x_1\right)$.

   Следовательно, в этой игре существует ход, переводящий позицию x_1 в такую позицию x_1', что $g_1\left(x_1'\right) = d \ xor \ g_1\left(x_1\right)$.

4. Тогда $g\left(x_1', x_2, \ldots, x_n\right) = g_1\left(x_1'\right) \ xor \ g_2\left(x_2\right) \ xor \ \ldots \ xor \ g_n\left(x_n\right) = \ldots = \ldots = a$ объяснить!. Заполните пропуск. Т.е. у любой позиции есть следующая с любым меньшим значением функции $g\left(.\right)$.

5. Докажите самостоятельно, что ни у одной позиции нет следующей с таким же значением функции $g\left(.\right)$.

   Теорема доказана!

Тигр: Во многих последующих задачах этого раздела шаманам придется потрясти бубном и произнести заклинания Шпрага-Гранди!

Задача 3.15. Очень простая задача?
Есть кучка из n камней. За ход ее можно разделить на две непустые кучки. Старые кучки сохраняются. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

1. Кто выигрывает при правильной игре в зависимости от n?

2. Является ли в этой игре функция Шпрага-Гранди периодической? Хотим ли мы оставлять функцию Ш-Г? ????

   Тигр: Осенью 2004 года эта задача была по ошибке объявлена очень трудной (якобы ее решение вообще не было известно), было обещано 10 баллов за её решение. Никто даже не попытался...

3. Попытайтесь ответить на вопросы «а» и «б» в том варианте задачи, когда делить можно на две непустые неравные кучки.

   Автор: Именно решение пункта «в» неизвестно ни одному из нескольких миллиардов жителей планеты Земля...

3.3. Ним

Задача 3.16. Ним Ласкера.
Решите задачу, предложенную Эммануилом Ласкером, чемпионом мира по шахматам с 1894-го по 1921 годы, в книге [30] . *Тигр: Не будем смешивать шахматы и теорию игр! Автор: а ещё он был известным алгебраистом!*
Есть несколько кучек камней. За ход разрешается: либо взять любое положительное количество камней из одной кучки, либо поделить любую кучку на две новые непустые кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

1. Постройте функцию Шпрага-Гранди для одной кучки из n камней;

2. Определите выигрышный ход в ситуации с тремя кучками из 2, 5 и 7 камней.

Задача 3.17. Rim.
На плоскости нарисовано n точек. За один ход разрешается провести замкнутую кривую, проходящую через несколько отмеченных точек, но не пересекающую и не касающуюся уже проведенных кривых. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
Кто выигрывает на рисунке задачи 3.12 ? Если первый игрок, то определите выигрышный ход. подробнее "В эту игру" и.т.п.

Задача 3.18. Ним.[2]
Классические правила игры Ним просты. Есть несколько кучек камней. За ход можно взять любое количество камней из одной кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

1. Кто выигрывает, если имеется две кучи из 11 и 22 камней?

2. Кто выигрывает, если имеется 5 куч камней из 6, 7, 8, 9 и 10 камней?

3. Докажите что любая сумма конечных комбинаторных игр — это Ним с определенным количеством кучек!!! Количество кучек равно количеству слагаемых. Чему соответствует количество камней в кучках?

Задача 3.19. Ним на лестнице
Источник: [23]??
На ступеньках лестницы лежат камни. За один ход разрешается переместить любое количество камней с одной ступеньки на ступеньку ниже. Камни, попадающие на землю (ступенька номер ноль) изымаются из игры. Игроки ходят по очереди и игрок, сделавший последний ход, выигрывает.

1. Докажите, что данная игра эквивалентна игре Ним (см. задачу ???3.18), где кучкам камней соответствуют ступеньки с нечетными номерами. *Тигр: А что, четные вообще никак не влияют?!*

2. Кто выигрывает в позиции [6, 7, 5, 0, 4, 1]? (На первой ступеньке лежит 6 камней, на второй — 7 камней и т.д.)

---

[2]Игра «Ним», вероятно, появилась в Китае, однако название считается немецким (от глагола nimm — «брать»). Первое европейское упоминание относится к 15 веку.

3. Кто выигрывает в позиции [1, 0, 0, 2, 4, 0, 5]?

Задача 3.20. Вариация на тему игры Ним.
Источник: [33]
На столе лежат две кучки камней (n камней в первой кучке и m во второй). В свой ход игрок может взять сколько угодно камней из одной кучки, либо по одному камню из обеих. Надо обязательно взять хотя бы один камень. Выигрывает тот, кто своим ходом оставляет пустой стол.

1. Пользуясь принципом Цермело, определите выигрышные и проигрышные позиции в игре. Для этого, например, можно исследовать несколько первых позиций и угадать закономерность. Обязательно обоснуйте свой ответ.

2. Опишите выигрышную стратегию игрока (в случае, если она у него есть). Когда выигрывает первый, а когда второй?

3. Пусть $n = 98$, $m = 100$ и вам ходить. Ваши действия?

Задача 3.21. Зерна на шахматной доске.
На клетках шахматной доски лежат зерна. В одной клетке может лежать несколько зерен. Игроки ходят по очереди, за один ход можно перенести одно зерно на одну клетку вниз, или на любое количество клеток влево. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает.
В начале игры по одному зерну лежит на каждой из восьми клеток самой верхней линии.
Кто выигрывает в этой игре?
Тигр: Спонсор задачи РосАгроПром!

Задача 3.22. Загонщик овец.
Трех овец нужно загнать в хлев. За один ход можно подвинуть одну любую овцу по стрелочке один раз. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
Кто выигрывает, если изначально овцы расположены так:
картинка!!!!!

Задача 3.23. Строим город.
Два игрока по очереди строят город. За один ход можно построить один дом. Дом — это одна или две соседних клеточки. Два дома не должны иметь общих сторон и углов. То есть если один игрок построил одноклеточный дом, то 8 соседних клеток занимать нельзя. Город закончен тогда, когда больше нет места для домов. Выигрывает тот, кто закончит строительство города.
Кто выигрывает, если место для города — это прямоугольник 3×6?

Задача 3.24. Разделяй и властвуй!
Два игрока по очереди строят стены. Стена — это вертикальная или горизонтальная линия толщиной в одну клеточку. Стену можно строить только на ещё незастроенном пространстве. Стена должна идти от «упора» до «упора». За один ход можно построить только одну стену. Игра оканчивается, когда все свободное место занято.
Кто выигрывает на поле размера 2×6, первый или второй игрок?
Если выигрывает первый, то укажите выигрышный ход.

Задача 3.25. Ним со спорным камнем.
Два игрока играли-играли и вдруг обнаружили, что стоят три кучки, в которых 3, 5 и 7 камней, но ровно между кучками 3 и 5 лежит один камень. К какой кучке, 3 или 5, относился этот камень, не понятно. Поэтому игроки решили поступить со спорным камнем так: его можно брать, только если брать камни из кучки 3 или 5. Например, если игрок решил делать ход из кучки 5, то он может взять из нее от 1 до 5 камней и дополнительно, по желанию, взять спорный камень. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Статические игры с полной информацией

Парето-оптимальный исход — это платеж, обладающий каким-либо свойством.

Из работы на пересдаче теории игр

Игрой в нормальной форме называется тройка (N, S, U), где $N = \{1, \ldots, n\}$ — множество игроков, $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ — множество исходов, т.е. стратегических игроков, $U : S \to \mathbb{R}^n$ — заданные выигрыши игроков.

Профилем стратегий или *исходом* называется любой набор стратегий $(s_1, \ldots, s_n) \in S$. Для удобства записи, часто этот набор записывают в виде (s_i, s_{-i}), подразумевая, что $s_i \in S_i$ — стратегия игрока i, в то время как $s_{-i} \in S_{-i}$ — набор стратегий всех игроков, кроме игрока i.

В принципе, выигрыши не всегда принимают численные значения: можно просто задать упорядочение на множестве профилей стратегий: к примеру в дуэли трёх лиц или в мафии лучше выжить, чем умереть: в игре «Угадай число» лучше угадать число, чем не угадать, и.т.п.

Говорят, что стратегия $s_i \in S_i$ *слабо доминируется* стратегией $s_i^* \in S_i$, если для каждого набора стратегий остальных игроков s_{-i} выполнено неравенство $u_i(s_i, s_{-i}) \leqslant u_i(s_i^*, s_{-i})$. В этом случае стратегия s_i называется *слабо доминируемой* посредством s_i^*. Говорят также, что стратегия s_i^* *слабо доминирует* стратегию s_i Эквивалентные стратегии запретим?.

Стратегия $s_i \in S_i$ *сильно или строго доминируется* стратегией $s_i^* \in S_i$, если для каждого набора стратегий остальных игроков s_{-i} выполнено неравенство $u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(s_i^*, s_{-i})$. В этом случае стратегия s_i называется *строго (сильно) доминируемой* посредством s_i^*. Говорят также, что стратегия s_i^* *строго (сильно) доминирует* стратегию s_i.

Будем называть стратегию $s_i \in S_i$ *слабо/ (строго или сильно) доминируемой*, если она слабо / (строго или сильно) доминируется посредством какой-то другой стратегии i-ого игрока.

Стратегия $s_i \in S_i$ называется *слабо / (строго или сильно) доминирующей/доминантной*, если она слабо / (строго или сильно) доминирует все остальные стратегии i-ого игрока.

Задача 4.1.
Докажите, что:

1. Набор слабо доминантных стратегий игроков является равновесием по Нэшу.

2. При удалении слабо доминируемых стратегий множество равновесий по Нэшу может либо не измениться, либо сократиться.

3. Удаление строго доминируемых стратегий не меняет множества равновесий по Нэшу.

Набор стратегий $(s_1, \ldots, s_n)$ называется *равновесием по Нэшу* (*равновесием Нэша*), если никакому игроку $i \in N$ невыгодно отклоняться от стратегии s_i, если остальные игроки придерживаются своих стратегий. Более формально: для каждого i и для любой стратегии $s_i' \in S_i$ выполнятся неравенство $u_i(s_i, s_{-i}) \geqslant u_i(s_i', s_{-i})$.

Игра называется *биматричной*, если в ней участвуют два игрока, то есть $N = \{1, 2\}$. В этом случае игра задаётся матрицей выигрыша A размера $|S_1| \times |S_2|$. Считается, что первый игрок выбирает строку (стратегию из S_1), второй — столбец (стратегию из S_2), причём в каждой ячейке a_{s_1, s_2} записано два числа: сначала выигрыш первого игрока, затем второго.

Стратегия игрока называется *полностью смешанной (completely mixed)*, если каждая чистая стратегия играется со строго положительной вероятностью.

Игрой с нулевой суммой или *антагонистической игрой* называется игра двух игроков, в которой сумма выигрышей игроков от любого профиля стратегий равна 0, то есть $u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0$ для всех $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$.

4.1. Доминируемые стратегии?

Задача 4.2. Конструктор-4
Придумайте биматричную игру размером (4×4), в которой с помощью вычеркивания строго доминируемых стратегий можно оставить ровно один исход, причем существует единственная последовательность вычеркиваний.

Задача 4.3. Конструктор-3
Придумайте биматричную игру размером (3×3), в которой с помощью вычеркивания нестрого доминируемых стратегий можно оставить ровно один исход, причем результат зависит от порядка вычеркивания.

Задача 4.4. Студенты и волшебная шкатулочка
Вася и Петя нашли волшебную шкатулочку. Если в нее положить деньги и сказать «Ахалай Махалай», то сумма, лежащая в шкатулке увеличивается в полтора раза. Один недостаток: работает только раз! Петя и Вася решили поступить так: каждый положит в шкатулку сколько хочет, потом они скажут «Ахалай Махалай» и поделят всю сумму поровну.

1. Представьте эту игру в нормальной форме. Можно ли ее представить в матричной форме? Почему?

2. Найдите равновесие по Нэшу. Является ли оно равновесием в строго доминирующих стратегиях?

Задача 4.5. Фанаты и просто любители футбола
На футбольный матч пришли фанаты вместе с главарем и просто любители футбола. Главарю абсолютно все равно, как смотреть футбол: стоя или сидя. Остальные фанаты получают более высокую полезность, когда повторяют действия главаря. Любой просто любитель футбола хочет смотреть футбол сидя, но если человек перед ним встанет и закроет обзор, то просто любителю тоже лучше встать, чтобы лучше видеть. Фанаты с главарем заняли весь первый ряд, на остальных рядах сидят просто любители.
Формализуйте эту ситуацию как игру и найдите все равновесия по Нэшу.

Задача 4.6. Детские игры [7]
Пусть задана ***детская*** игра (детерминистическая игра двух игроков с полной и совершенной информацией, в которой игроки ходят строго по очереди, а ничья исключена; например, Ним, правила которого изложены в задаче 3.18). Запишем эту игру в матричной форме. Выигрыш первого игрока равен единице, если он выигрывает и минус единице, если проигрывает. Будем проводить вычеркивание стратегий по раундам. Один раунд означает вычеркивание нестрого доминируемых стратегий сначала за первого, затем за второго игрока.

1. Докажите, что, либо у первого, либо у второго игрока есть выигрышная стратегия, т.е. стратегия, гарантирующая выигрыш вне зависимости от действий другого игрока.

2. Сколько раундов вычеркивания потребуется, чтобы матрица платежей оказалась заполнена равными числами? (либо только единицами, либо только минус единицами — в зависимости от того, у кого есть выигрышная стратегия);

3. Пусть в детской игре допускается ничья. Докажите, что после двух раундов вычеркиваний матрица платежей будет заполнена равными числами (на этот раз вся матрица может быть заполнена единицами, минус единицами или нулями).

   Тигр: Дилемма заключенного — это недетская игра!

4. А если в детской игре n возможных исходов, то сколько раундов потребуется?

Задача 4.7. Парадокс председателя приемной комиссии
В приемной комиссии три человека, включая председателя. Обсуждается, что поставить по теории игр тунеядцу Сидорову. Члены комиссии одновременно предлагают оценку. Ставится оценка, получившая наибольшее число голосов. Если ни одна из оценок не получила большинства голосов, то председатель ставит оценку по своему желанию.
Предпочтения членов комиссии выглядят следующим образом: Председатель: $2 \succ 3 \succ 4$. Двоечник он, и точка! *Тигр: Зараза!*
Второй член комиссии: $4 \succ 2 \succ 3$. Да он знает на четверку! Если что, пересдаст на четыре!
Третий член комиссии: $3 \succ 4 \succ 2$. Нормальная тройка, ну чуть ближе к четверке.

1. Найдите все равновесия по Нэшу в этой игре; *Тигр: Обрадуйтесь!*

2. Существуют ли порядки вычеркивания нестрого доминируемых стратегий, приводящие к разным итоговым профилям? Проверить на корректность

Задача 4.8.
Источник: [33]
Паша, Саша и Наташа решают, куда сходить в поход: в Московскую Область (МО), в Тверскую Область (ТО) или в Республику Марий-Эл (МЭ). С точки зрения Паши, в порядке предпочтения идут МО-ТО-МЭ; с точки зрения Саши ТО-МЭ-МО, и наконец, с точки зрения Наташи — МЭ-МО-ТО. Голосуют одновременно, и решают по большинству. Если у всех разное, решает Паша (он — их командир). Решить игру по доминированию.

Задача 4.9. Курно и вычеркивание стратегий
Получите результат дуополии Курно вычеркиванием нестрого доминируемых стратегий.
Верно ли, что равновесие по Нэшу в модели Курно с тремя олигополистами также получается путем последовательного вычеркивания нестрого доминируемых стратегий?

Задача 4.10. Вычеркивание стратегий и строгое доминирование
Пусть в матричной игре $(a) \succ (b)$, означает, что стратегия (a) одного игрока строго доминирует стратегию (b). Из матрицы вычеркнули стратегию (c), причем неизвестно, чья это стратегия: того же игрока, или другого. Верно ли, что в сокращенной матрице всё ещё $(a) \succ (b)$?

Задача 4.11. Президент
Два гражданина борются за пост президента страны. Каждый из них выбирает свою политическую позицию. Под позицией мы будем понимать натуральное число от 1 до 99, где число один означает крайне левую позицию, а 99 — крайне правую. Если оба гражданина занимают одну политическую позицию, то голоса делятся поровну. Если позиции различны, то каждый житель (в стране 99 жителей, занимающих места от 1 до 99) выбирает того кандидата, к которому он ближе расположен. Если жителю все равно, то его голос делится поровну между кандидатами.
Найдите все исходы, которые остаются в результате последовательного вычеркивания нестрого доминируемых стратегий.

Задача 4.12.
Два игрока одновременно называют числа от 1 до 100. Пусть это числа a_1 и a_2. Если $a_1 + a_2 \leqslant 100$, тогда каждый игрок i получает a_i рублей. Если $a_1 + a_2 > 100$ и $a_i < a_j$, то игрок i получает a_i рублей, а игрок j получает $(100 - a_i)$ рублей. Если $a_1 + a_2 > 100$ и $a_i = a_j$, то игроки получают по 50 рублей.
Если коротко, то платежи определяются так: игроки всегда получают в сумме не более 100 рублей, самый нежадный получает то, что просит.

1. Найдите все исходы, которые остаются в результате последовательного вычеркивания нестрого доминируемых стратегий.

2. Найдите равновесие по Нэшу.

Задача 4.13.
Придумайте игру двух игроков с матрицей (2×2), в которой вычеркивание нестрого доминируемых стратегий приводит к потере одного из двух равновесий по Нэшу.

Задача 4.14.
Придумайте биматричную игру, в которой у первого игрока две стратегии (a и b) и у второго игрока две стратегии (c и d), со следующими свойствами: стратегия a строго доминирует стратегию b, стратегия c строго доминирует стратегию d. Исход (b, d) доминирует по Парето исход (a, c).

Задача 4.15.
Источник: БЗИ
Решите по доминированию игру с матрицей выигрышей

$$\begin{bmatrix} 5,2 & 2,6 & 1,4 & 0,3 \\ 4,1 & 3,4 & 2,1 & 1,2 \\ 1,0 & 1,1 & 1,5 & 5,1 \\ 2,3 & 0,1 & 0,2 & 4,4 \end{bmatrix}$$

Задача 4.16. Итерационные игры.
Источник: БЗИ
Играют n участников. Функция полезности участника с номером k имеет вид $u_k(s_1, \ldots, s_k)$. Можно ли решить игру по доминированию? Если надо, сделайте какие-нибудь разумные дополнительные предположения. *Автор: Это равновесие будет ещё и сильным!*

4.2. Чистые и смешанные равновесия по Нэшу

Задача 4.17. Студенты и экзамен [O]
Петя и Вася прогуляли экзамен...Они знали, что профессор очень любит путешествия, и придумали для него историю про то, как они отправились в автомобильное путешествие по России и очень хотели вернуться в день экзамена, но по дороге обратно у них сломалось колесо...Профессор согласился дать им отдельный экзамен. Он посадил их по разным аудиториям и задал один и тот же вопрос: «Какое колесо сломалось?»

1. Представьте эту игру в нормальной форме;

2. Сколько равновесий по Нэшу существует в данной игре?

   Тигр: Это по правде было?

   Автор: Почти! Мне студент сказал, что застрял в лыжном походе!

Задача 4.18. Дуополия Бертрана
Две фирмы назначают цены на свою продукцию. Предельные издержки обеих фирм равны нулю. Рыночный спрос описывается функцией $Q = \max\{a - bP, 0\}$, где $a > 0$ и $b > 0$. Весь спрос достается фирме, назначившей наименьшую цену; если фирмы назначили одинаковую цену, то спрос делится между ними поровну.
Изобразите на плоскости стратегии, равновесные по Нэшу, а также Парето-оптимальные точки.

Задача 4.19. Дуополия Бертрана с компенсацией. [O]
Грандиозное предложение! Фирмы снова одновременно назначают цены, но каждая фирма обязуется вернуть покупателю разницу в цене товара, если конкурент продает дешевле. Покупатель прекрасно осведомлен о ценах.
Как изменятся множества равновесных по Нэшу стратегий и Парето оптимальных точек?

Задача 4.20.
Петя задумывает одно из чисел от 1 до 5. Вася пробует угадать. Если Вася угадал, то Петя выплачивает ему соответствующее количество золотых монет (например, за угаданное число 5 платится 5 золотых монет).
Найдите равновесие по Нэшу.

Задача 4.21. Кто где...[T]
Два игрока, Иван Далекий и Василий Близкий, называют одновременно любое число из отрезка $[0;1]$. Выигрыш Ивана Далекого (проигрыш Василия Близкого) — это расстояние между числами.

1. Существуют ли равновесия по Нэшу в чистых стратегиях?

2. Найдите все равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях. *Автор: то есть «в плотностях».*

Задача 4.22. Делим пирог
Мама спрашивает двух братьев, какую часть пирога каждый хотел бы получить. Братья получают то, что попросили, если пирога хватает. Если братья вместе запросили больше, чем целый пирог, то они не получают ничего.

1. Представьте игру в нормальной форме;

2. Найдите все равновесия по Нэшу в чистых стратегиях.

Задача 4.23. Около среднего
Источник: [6]??
Три игрока одновременно называют любое число из отрезка $[0;1]$. Выигрыш в сто рублей получает тот, чье число окажется ближе всего к среднему. Если несколько игроков оказались одинаково близки к среднему, то они делят выигрыш поровну.

1. Представьте игру в нормальной форме;

2. Найдите все равновесия по Нэшу в чистых стратегиях;

3. Найдите все равновесия в смешанных стратегиях, если игроки могут называть только концы отрезка (числа 0 и 1);

4. Найдите все равновесия по Нэшу в чистых стратегиях, если выигрывает тот, кто назовет число, наиболее удаленное от среднего.

Задача 4.24. Камень-Ножницы-Бумага1. Представьте игру «Камень-Ножницы-Бумага» в нормальной форме. *Тигр: Те, кто не знают правила, автоматом получают «незачет». Я попрошу в деканате.*

2. Найдите наилучший ответ первого игрока на стратегии второго $\sigma_{II}=(0,0,1)$, $\sigma_{II}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$, $\sigma_{II}=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ и $\sigma_{II}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

3. Найдите все равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

Задача 4.25. Три игрока
Три игрока одновременно называют одно из чисел: ноль или один. Если все трое называют единицу, то их выигрыш равен 10, если все трое называют ноль, то их выигрыш равен 5, иначе все получают 0.

1. Найдите все равновесия по Нэшу в чистых стратегиях;

2. Найдите все равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

Задача 4.26. Где равновесие
Источник: [19]??

1. Придумайте игру (2×2) двух игроков, в которой ни у одного из игроков нет доминируемой стратегии (даже нестрого), причем равновесие по Нэшу (среди как чистых, так и смешанных профилей стратегий) единственно.

2. Докажите, что в такой игре равновесие всегда будет реализовано во вполне смешанных стратегиях у обоих игроков.

Задача 4.27. Continuous Colonel Blotto
Два генерала располагают войсками одинаковой численности. Предстоят три сражения, в каждом из которых побеждает тот, кто сражается большим количеством войск. Победит тот, кто одержит победу не менее, чем в двух битвах. Генералы одновременно принимают решение о распределении войск на три битвы.

1. Играя за одного из игроков, какую стратегию вы выберете? Что за вопрос???

2. Правда ли, что в любом смешанном равновесии по Нэшу количество солдат в каждом сражении будет одинаковым? А что за смешанное равновесие? Это же плотность!

   Битвы будут происходить одновременно

Задача 4.28. О, донна Анна!
Братья Антонио и Джованни познакомились с тремя доннами: блондинкой Анной и брюнетками Изабеллой и Марией. Каждый из братьев истинный джентльмен, и будет ухаживать только за одной особой. Если оба выберут одну и ту же особу, то их судьбу решит дуэль на шпагах.

	A	I	M
A	$\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$	$(a; 1)$	$(a; 1)$
I	$(1; a)$	$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$	$(1; 1)$
M	$(1; a)$	$(1; 1)$	$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Параметр $a \in (0; +\infty)$ отражает предпочтения Антонио и Джованни.

1. Найдите равновесия по Нэшу в чистых стратегиях в зависимости от a;

2. [T] Найдите все равновесия по Нэшу в зависимости от a;

3. [T] Как зависят от a вероятности исходов в этой игре?

Задача 4.29.
Источник: [22] Проверить ссылку!
Петя выбирает место, где спрятаться, внутри круга единичного радиуса. Одновременно Вася выбирает место, где будет искать Петю. Вася замечает Петю, если расстояние между ними не превосходит половины радиуса. Если Вася нашел Петю, то Петя платит Васе рубль. Если Вася не нашел Петю, то Вася — Пете.

1. Найдите равновесие по Нэшу и цену игры.

2. Решите задачу, если игроки прячутся на отрезке длины 2 (Вася замечает Петю, если расстояние меньше $\frac{1}{2}$).

Задача 4.30. Экология
Источник: [10, 6.5]
Три фирмы, использующие воду из одного озера, одновременно решают, очищать ли им сточные воды, сбрасываемые в то же озеро. Очистка воды означает издержки, равные единице. Если воду не очищают две или три фирмы, то каждая из трех фирм несет дополнительные издержки в размере трех единиц. Найдите все равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

Задача 4.31.
Источник: LSE exam, 2002
Рассмотрим статическую игру двух игроков с конечным множеством стратегий. Известно, что чистая стратегия a первого игрока является наилучшим ответом на некоторую полностью смешанную стратегию второго игрока. Может ли стратегия a нестрого доминироваться другой стратегией первого игрока?

Задача 4.32. Что предложил Warren Buffet?
Источник: [14, p.50]
Парламент поделен на две партии: республиканцы и демократы. Для принятия реформы необходима ее поддержка обеими партиями. Реформа безразлична обеим партиям. Warren Buffet предложил, чтобы какой-нибудь миллиардер выступил со следующим обещанием: Если реформа не будет принята, то партия, поддержавшая реформу во время голосования, получит 1000000000$ (Один миллиард долларов). Партии голосуют одновременно (можно проголосовать только за или против реформы). Каждая партия хотела бы получить деньги и не хотела бы, чтобы деньги достались конкурентам. Партии верят заявлению миллиардера.

1. Представьте игру в нормальной форме.

2. Найдите равновесие по Нэшу;

Тигр: сам Buffet с подобным заявлением не выступил!

Задача 4.33. Президент в непрерывном случае
Два гражданина борются за пост президента страны. Каждый из них выбирает свою политическую позицию. Под позицией мы будем понимать число из отрезка $[0;1]$, где число ноль означает крайне левую позицию, а один — крайне правую. Если оба гражданина занимают одну политическую позицию, то голоса делятся поровну. Если позиции различны, то каждый житель (в стране континуум жителей) выбирает того кандидата, к которому он ближе расположен. Другими словами, доля голосов, поданных за кандидата, это длина отрезка жителей, расположенных ближе к нему, чем к его конкуренту.

1. Найдите равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.

2. Найдите равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях.

Задача 4.34. «Реже, но лучше»
Источник: [10, 6.4]
Теннисист, делающий подачу, может бросить мяч либо под правую руку (forehand) соперника, либо под левую руку (backhand) соперника. Если принимающий подачу заранее угадывает место падения мяча, то у него больше шансов отразить мяч. С другой стороны, мяч под правую руку отражается легче, чем мяч под левую руку (это может быть связано как непосредственно с легкостью приема мяча справа, так и с трудностью подачи под правую руку). Вероятности отразить мяч занесены в таблицу (подающий соответствует строке, а отражающий столбцу) :

	$forehand$	$backhand$
$forehand$	$0,9$	$0,3$
$backhand$	$0,2$	a

Т.е. если подача идет под правую руку, а принимающий подачу игрок ожидает подачи под левую, то вероятность отражения мяча равна 0,3.

1. Найдите равновесия по Нэшу при $a = 0,6$;

2. Найдите равновесия по Нэшу при произвольном a;

3. Как зависит от a вероятность того, что подача будет осуществляться под правую руку? Прокомментируйте;

4. Как зависит от a вероятность того, что подача будет отражена?

Задача 4.35. «Своя игра»
Источник: [22] Точно ли?
В финал «Своей игры» вышло 3 участника. *Тигр: Я не знаю правил.... Автор: Я тоже....* У них на руках соответственно $a > b > c > 0$ очков. Для нормировки предположим, что $a = 1$. Сейчас игроки независимо и одновременно определяют размер своей ставки (размер ставки не может превосходить имеющегося количества очков). После того, как игроки выберут свои ставки, им будет предложен один вопрос. Предположим, что каждый игрок независимо от других, ответит на этот вопрос с вероятностью p. Игрок, правильно ответивший на вопрос, получает обратно свою ставку в удвоенном размере. Игрок, набравший больше всех очков, получает Очень Большой Приз, остальные игроки получают столько денег, сколько очков они набрали. Предположим, что в игре нет однозначного лидера (т.е. $a < 2b$).
Исследуйте эту игру:

1. Почему важно сравнение $\left(\frac{2}{3}a\right) \vee b$?

2. Верно ли, что ожидаемый выигрыш игрока положительно зависит от его очков?

3. Найдите оптимальные стратегии игроков;

4. Решите задачу для двух игроков.

Задача 4.36. Бар в Бобруйске
В Бобруйске можно смотреть на звезды...А ещё в Бобруйске есть очень маленький бар «Для двоих». Там хорошо быть одному или вдвоем. *Тигр: полное официальное название бара ООО «Для не больше, чем двоих».* Три жителя Бобруйска одновременно решают, как им провести вечер. Примем звезды за точку отсчета. *Тигр: то есть полезность звезды равна 0?*. Чтобы добраться до бара, надо воспользоваться трамваем, билет стоит две единицы. Полезность от бара равна шести, если там не больше двух человек, и единице, если там больше двух человек.

1. Найдите все равновесия по Нэшу в чистых стратегиях;

2. Найдите все равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях;

3. Найдите средний выигрыш игроков в равновесии в смешанных стратегиях и объясните, почему бар в Бобруйске не нужен;

   А равновесие одно?

4. Верно ли, что назначив определенную плату за вход в бар, можно добиться увеличения общественного благосостояния трех жителей Бобруйска?

Задача 4.37. Два тигра
Источник: [10, 6.2]
Два тигра заметили двух антилоп. Маленькую, весом в один условный килограмм, и большую, весом в $a > 1$ условных килограммов. Они одновременно принимают решение, за какой антилопой погнаться. Тигры всегда догоняют антилоп. *Тигр: Если хотят, то конечно.* Если тигры выберут одну антилопу, то они поделят ее поровну.

1. Запишите игру в матричной форме;

2. Найдите все равновесия по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях, в зависимости от значения параметра a.

   Тигр: Очень важная задача!

4.3. Симметричные игры

Задача 4.38. Limbo.
До весны 2007 года в Швеции существовала необычная лотерея «Limbo». Правила выглядят следующим образом. Вы можете выбрать любое натуральное число. Победителем объявляется тот, кто назвал самое маленькое число, никем более не названное. Например, если игроки назвали числа 1, 3, 1, 2, 4, то победителем будет тот, кто назвал число 2. Если наименьшего никем более не названного числа нет, то приз остается у организаторов.

1. Предположим сначала, что выбираемое число не превосходит 3. Какие в этом случае имеются равновесия по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях?

2. Опишите все равновесия по Нэшу в чистых стратегиях для n игроков;

3. Найдите симметричное равновесие для трех игроков (т.е. равновесие, в котором все игроки используют одинаковые стратегии); Прямо для $\mathbb{N}$?

4. Почему была закрыта эта лотерея?

   Подсказка для 3: какие есть известные законы распределения на $\mathbb{N}$?

Задача 4.39. Воробьи и Толстый кот
Толстый кот спрятался за деревом и изготовился к прыжку...Стайка из n воробушков клюет хлебные крошки. Каждый из воробушков иногда отрывается от завтрака и оглядывается. Если хотя бы один заметит выпрыгивающего кота, то вся стайка успеет улететь. Если кот успеет выпрыгнуть незамеченным, то он схватит первого попавшегося воробья, а остальные улетят. Верно ли, что каждому воробью выгодно добровольно отвлекаться от еды и иногда оглядывать окрестности? Более формально...Для упрощения рассмотрим эту игру как статическую. Удовольствие кота от пойманного воробья равно $b > 0$, неудовольствие от потраченного впустую прыжка равно $p > 0$ (Здесь $b > \frac{1}{2} > p$?). Выберем единицы измерения так, чтобы $b + p = 1$. У кота две стратегии: выпрыгивать или не выпрыгивать. Ценность собственной жизни для воробья равна единице. У каждого воробья две стратегии: наблюдать или кушать. Издержки наблюдения равны $c > 0$. Смешанная стратегия означает, что время на еду и наблюдение распределяется пропорционально вероятностям.

1. Формализуйте игру как игру в нормальной форме.

2. При каких условиях на исходные параметры существует квази-симметричное[3] равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях (каждый воробей наблюдает с вероятностью μ, а Толстый кот выпрыгивает с вероятностью σ)?

[3]квази-..., потому что кот тут отдельно.

3. Найдите это равновесие и определите, как в нём μ и σ зависят от параметров задачи. Прокомментируйте;

4. Что изменится, если шансы быстро улететь при обнаружении выпрыгивающего Толстого кота будут равны α в случае если не заметили? ?

5. У воробьев новая опасность. На этот раз за деревом притаился Хулиган Вася. *Тигр: прогнав при этом кота!* Отличие Хулигана Васи от Толстого кота состоит в том, что у Васи заготовлена сеть, и в случае удачи он поймает сразу всю стайку. Ответьте на вопросы 2, 3 и 4.

Задача 4.40. Две вороны
Двум воронам где-то бог послал по кусочку сыра. Вороны взгромоздились на соседние ветки ели, и одновременно выбирают: либо позавтракать своим кусочком, либо провести стремительное нападение на соседку и, похитив ее кусочек сыра, в дополнении к своему, позавтракать в другом месте...

	$blitz\ krieg$	$breakfast$
$blitz\ krieg$	$(-a;-a)$	$(2;0)$
$breakfast$	$(0;2)$	$(1;1)$

1. Найдите все равновесия по Нэшу в этой игре;

2. Каким образом зависят от параметра a вероятности блицкрига и завтрака в смешанном равновесии?

   АС: блицкриг/завтрак - поменять названия?

Задача 4.41.
Человеку плохо. Рядом на остановке стоит n человек. Каждый из них может либо вызвать скорую с помощью мобильного, либо дождаться троллейбуса и уехать. Если никто не вызовет скорую, то человек умрет. Если человек умирает, то полезность каждого равна 0, если человек остается в живых, то полезность каждого равна 1. Издержки телефонного звонка равны $c \in (0;1)$.

1. Найдите все равновесия по Нэшу в чистых стратегиях;

2. Найдите симметричное равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях (все игроки используют одну и ту же стратегию);

3. Как зависит от n вероятность оказания помощи отдельным прохожим?

4. Как зависит от n вероятность получения помощи?

Задача 4.42. Поиск Истины
Собрались n Мудрых тараканов и решили одновременно искать Истину. Каждый может добросовестно искать или отдыхать. Если Мудрый таракан ищет Истину, то он находит ее независимо от других с вероятностью a. Если Истина будет найдена хотя бы одним Мудрым тараканом, то он расскажет ее всем, и все получат полезность +1. Поиск Истины связан с издержками $c \in (0;a)$.

1. Будет ли одинокий Мудрый таракан искать истину ($n = 1$)?

2. Найдите равновесие по Нэшу в чистых стратегиях для произвольного n;

3. Найдите симметричное равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях для любого n;

4. Как зависит от n доля Мудрых тараканов, ищущих Истину?

5. Как зависит от n вероятность того, что Истина будет найдена?

Задача 4.43. Аукцион печенья.
Источник: БЗИ, NES
Имеется пакет с печеньем, который нужно поделить между n участниками. Количество печенья в пакете всем известно. Каждый участник тайно от других пишет на листке бумаги свое имя и сколько продукта он хотел бы получить. Все заявки упорядочиваются по возрастанию, после чего ведущий по очереди выдает каждому запрошенное им количество, начиная с самых «скромных». Если в некоторый момент печенье кончается, то заявившие слишком много, увы, остаются ни с чем (если оставшегося печенья оказывается недостаточно, чтобы обслужить несколько одинаковых заявок, то печенье делится между ними поровну). Если же остались лишние печенья, их съедает ведущий.

1. Найдите все симметричные равновесия в чистых стратегиях. Дискретностью печенья можно пренебречь.

2. Есть ли в этой игре несимметричные чистые равновесия? Если есть, приведите пример, а если нет, то объясните, почему.

Задача 4.44. В погоне за призом
Источник: [33]
Газета объявила, что выставит ящик водки (1000 рублей) одному или по ящику каждому из двух людей, приславших ей «запрос». Стоимость конверта для высылания запроса равна 1. Участвуют 1002 человека, и каждый решает, прислать ли запрос. Если приславших более двух, никто ничего не получает.

1. Найдите все чистые равновесия Нэша;

2. Найдите симметричное смешанное равновесие Нэша.

Задача 4.45. Мусоросжигательный завод
[T]
В стране n городов. Около одного из них нужно построить большой мусоросжигательный завод. Предположим, что ущерб от мусоросжигательного завода для жителей каждого города — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0;1]$. Каждый видит своё? В тему "Аукционы", игры с неполной информацией? Каждый город объявляет компенсацию, требуемую за постройку мусоросжигательного завода поблизости. Завод строят около города, запросившего наименьшую компенсацию. Деньги выплачивают остальные города в равной пропорции.

1. Найдите симметричное равновесие по Нэшу в чистых стратегиях. Байесово или нет?

2. А если выплачивают пропорционально запрошенным компенсациям?

Задача 4.46. Футбол
Четыре команды играют в футбол. Сначала проводится полуфинал (первая команда играет со второй, третья — с четвертой), затем две команды-победительницы участвуют в финале. Выигравшая чемпионат команда получает приз, равный S. Перед началом чемпионата каждая команда выбирает затраты на тренировки a (неотрицательное число). Если встречаются команды с затратами a и b, то вероятность выигрыша первой равна $\frac{a}{a+b}$.
Тигр: А может быть, это фирмы дают взятки чиновникам?

1. Найдите симметричное чистое равновесие по Нэшу (т.е. равновесие, в котором все команды выбирают одинаковый уровень усилий);

2. Пусть команд будет восемь, а игра проходит по схеме четвертьфинал-полуфинал-финал. Докажите, что симметричного чистого равновесия по Нэшу не существует.

   Тигр: А если вторая производная окажется равной нулю?

   Автор: Тсс!

   АС: надо вспомнить, что за вторая производная...

3. Докажите, что симметричное чистое равновесие по Нэшу отсутствует, если число туров превышает два.

4. [Т] Докажите, что если число туров превышает два, то в любом чистом равновесии по Нэшу найдется команда с нулевым уровнем тренировки.

   Тигр: Среди кандидатов в президенты есть те, кто не надеется победить, среди студентов есть те, кто не готовится к экзамену...Все это звенья одной цепи! АС: а есть ли равновесие в плотностях?

Задача 4.47.
Предположим, что платежи в биматричной игре выбираются случайным образом. Каждый выигрыш нормально распределен с матожиданием 0 и дисперсией 1. Каково ожидаемое количество равновесий по Нэшу в чистых стратегиях? Дисперсия? АС: Как это решить?

Задача 4.48. Мост
Из пункта A в пункт D можно попасть двумя путями — через B или через C. Если по дороге AB едет x машин, то время в пути каждой из них будет равно $f_{AB}(x) = x + 32$. Для других отрезков пути функции времени доставки таковы: $f_{BD}(x) = 5x + 1$, $f_{CD}(x) = x + 32$ и $f_{AC}(x) = 5x + 1$. Каждое утро из города A в город D едет 6 машин.

1. Сколько машин и по какой дороге едет в равновесии по Нэшу? Сколько им требуется времени, чтобы добраться из A в D?

2. Как изменятся ответы, если между городами B и C построен удобный мост, такой что $f_{BC} = 0$?

Задача 4.49.
В городке две школы, которые никак не отличаются по качеству образования. Отличие между ними состоит в том, что одна школа — бесплатная, а другая — платна и оплата равна $c > 0$. По уровню интеллекта школьники городка равномерно распределены на отрезке $[0; 1]$.
Если школьник с интеллектом x выбирает бесплатную школу, то его полезность равна $u_f = (1 + x)(1 + \bar{x}_f)$, где $\bar{x}_f$ — средний интеллект школьников, выбравших бесплатную школу.
Если же школьник с интеллектом x выбирает платную школу, то его полезность равна $u_p = (1 + x)(1 + \bar{x}_p) - c$, где $\bar{x}_p$ — средний интеллект школьников, выбравших платную школу.

1. Рассмотрим Машеньку и Вовочку, с уровнями интеллекта $x_m > x_v$. Возможно ли, что в равновесии по Нэшу Машенька идет в бесплатную школу, а Вовочка — в платную?

2. Найдите все равновесия по Нэшу в зависимости от c.

Задача 4.50.
Два человека пришли в кабак. У одного из них 10 золотых, у второго — 6 золотых. Каждый может тратить деньги на выпивку или на музыку. Музыка является общественным благом — ее слышат все. Выпивка — частным. Полезности равны $u_1 = (m_1 + m_2)d_1$ и $u_2 = (m_1 + m_2)d_2$, где m_i и d_i — расходы i-го человека на музыку и выпивку. Предположим, что деньги бесконечно делимы.

1. Найдите равновесие по Нэшу;
2. Что изменится в случае, если у второго 2 золотых?
3. Являются ли эти равновесия оптимальными по Парето?

Задача 4.51. Поиск функции плотности
Два спортсмена готовятся к соревнованиям. Каждый из них выбирает свой уровень усилий $e_i \in [0;1]$. Побеждает тот, кто приложил больше усилий при подготовке. Если оба приложили одинаковое количество усилий, то не побеждает никто. Победитель получает платеж, равный 1. Издержки по приложению усилий равны $C_i = 2e_i^2$ для каждого игрока.

1. Существует ли равновесие по Нэшу в чистых стратегиях?
2. Найдите равновесие по Нэшу, в котором уровень усилий каждого из игроков является вероятностным распределением с функцией плотности $p(t)$, отличной от нуля на $[a;b]$

Задача 4.52. Компенсация ущерба
Источник: [9, 1.2C]
Простая модель арбитража: потерпевший называет свою оценку ущерба h, адвокат ответчика одновременно с этим предлагает свою оценку l. Затем арбитр выбирает тот вариант, который ему кажется наиболее справедливым, ближе к некоторому идеальному x. Арбитр знает x, стороны — не знают.

1. Найдите равновесие по Нэшу, если $x \sim U\,[0;1]$;
2. Найдите равновесие по Нэшу, если $x \sim N\left(\mu;\sigma^2\right)$.

Задача 4.53.
В осях (λ, p) изобразите все точки, для которых стратегия первого игрока $pL + (1-p)R$ является равновесной в следующей игре:

	L	R
L	2,3	0,2
R	1,4	3λ,2λ

4.4. Матричные игры и вопросы

Задача 4.54.
Пачка типовых биматричных игр
Автор: Эх, кто из нынешних бакалавров знает разницу между корешком и пачкой?
Тигр: *Корешок — это сто купюр, обернутых ленточкой, пачка — десять корешков, упакованных в целлофан. Кстати, зачем так много?* Автор: *Распространите среди жильцов нашего подъезда! А если не будут брать? А если не будут брать — отключим газ!* АС: выкинуть половину диалога; проверить нет ли повторов игр В каждой игре найдите:
Равновесия по Нэшу в чистых стратегиях;
Множество возможных платежей, если игроки используют смешанные стратегии;
Парето-оптимальные исходы в чистых стратегиях;

Все равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях;
Парето-оптимальные точки в смешанных стратегиях [T];
Строго и нестрого доминируемые стратегии.
Тигр: Найдите и перепрячьте!

1. 1. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (3;2) & (2;0) \\ l_2 & (1;0) & (3;5) \\ \hline\end{array}$; 2. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (-1;0) & (2;1) \\ l_2 & (1;6) & (1;5) \\ \hline\end{array}$; 3. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (-1;4) & (2;5) \\ l_2 & (1;1) & (1;0) \\ \hline\end{array}$; 4. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (2;6) & (2;0) \\ l_2 & (0;0) & (1;1) \\ \hline\end{array}$

2. 1. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (-1;6) & (2;7) \\ l_2 & (-2;3) & (3;1) \\ \hline\end{array}$; 2. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (2;1) & (2;0) \\ l_2 & (3;0) & (1;1) \\ \hline\end{array}$; 3. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (2;2) & (2;3) \\ l_2 & (1;3) & (3;2) \\ \hline\end{array}$; 4. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (-2;6) & (2;0) \\ l_2 & (0;-1) & (1;1) \\ \hline\end{array}$

3. 1. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (-2;6) & (2;6) \\ l_2 & (0;1) & (1;-1) \\ \hline\end{array}$; 2. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (1;1) & (1;1) \\ l_2 & (-1;1) & (2;2) \\ \hline\end{array}$; 3. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (2;0) & (0;0) \\ l_2 & (0;1) & (1;2) \\ \hline\end{array}$; 4. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (1;3) & (3;3) \\ l_2 & (2;2) & (2;1) \\ \hline\end{array}$

4. 1. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (1;3) & (0;1) \\ l_2 & (2;2) & (1;3) \\ \hline\end{array}$; 2. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (1;3) & (3;0) \\ l_2 & (2;2) & (2;1) \\ \hline\end{array}$; 3. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (3;3) & (3;0) \\ l_2 & (2;2) & (2;1) \\ \hline\end{array}$; 4. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (1;0) & (2;3) \\ l_2 & (2;1) & (1;2) \\ \hline\end{array}$

д) 1. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (3;-1) & (1;3) \\ l_2 & (0;1) & (2;1) \\ \hline\end{array}$; 2. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (1;1) & (0;0) \\ l_2 & (2;2) & (-1;2) \\ \hline\end{array}$; 3. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (-1;3) & (2;3) \\ l_2 & (2;0) & (0;1) \\ \hline\end{array}$; 4. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (1;1) & (3;0) \\ l_2 & (1;0) & (2;1) \\ \hline\end{array}$

е) 1. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (1;3) & (3;3) \\ l_2 & (1;2) & (0;3) \\ \hline\end{array}$; 2. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (2;3) & (1;3) \\ l_2 & (2;2) & (3;2) \\ \hline\end{array}$; 3. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (1;1) & (-1;1) \\ l_2 & (2;-2) & (-1;2) \\ \hline\end{array}$; 4. $\begin{array}{|c|cc|}\hline & t_1 & t_2 \\ \hline l_1 & (0;3) & (1;3) \\ l_2 & (0;2) & (2;1) \\ \hline\end{array}$

Задача 4.55.
Дана игра со следующей матрицей платежей:

	t_1	t_2	t_3
l_1	$(0;0)$	$(0;0)$	$(0;0)$
l_2	$(0;0)$	$(1;-3)$	$(-3;1)$
l_3	$(0;0)$	$(-3;1)$	$(1;-3)$

Найдите все равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

Задача 4.56. Оптимальный ответ

В игре

	t_1	t_2	t_3
l_1	$(2;8)$	$(1;4)$	$(9;20)$
l_2	$(7;7)$	$(6;8)$	$(2;4)$

1. Найдите все смешанные стратегии (смешиваются t_2 и t_3), которые строго доминируют чистую стратегию t_1.

2. Какая стратегия является оптимальным ответом второго игрока на стратегию l_2?

3. Какая стратегия является оптимальным ответом второго игрока на стратегию $\frac{1}{3}l_1 + \frac{2}{3}l_2$?

Задача 4.57. Доминирование
Рассмотрим следующую игру:

	t_1	t_2	t_3
l_1	$(2;9)$	$(1;4)$	$(9;20)$
l_2	$(7;5)$	$(6;8)$	$(2;4)$

1. Рассчитайте платежи от пары смешанных стратегий $\frac{1}{3}t_1 + \frac{2}{3}t_2$, $\frac{1}{4}t_1 + \frac{2}{4}t_2 + \frac{1}{4}t_3$;

2. Укажите все смешанные стратегии, доминирующие чистую стратегию t_1;

3. Найдите все равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

Задача 4.58. Доминирование-2

	t_1	t_2	t_3
l_1	$(2;x)$	$(1;4)$	$(9;20)$
l_2	$(7;y)$	$(6;8)$	$(2;4)$

1. Пусть $y = 5$. При каких x существует смешанная стратегия, строго доминирующая чистую стратегию t_1?

2. Изобразите на плоскости множество таких пар (x, y), при которых существует чистая стратегия, строго доминирующая стратегию t_1;

3. Изобразите на плоскости множество таких пар (x, y), при которых существует смешанная стратегия, строго доминирующая стратегию t_1.

Задача 4.59. Всеобщность знания
В уездном городе N живут игроки двух типов: «безумцы» и рациональные. При встрече в городе N принято играть в следующую игру:

	s	c
s	(1;1)	(-2;-1)
c	(-1;-2)	(-1;-1)

Рациональные игроки пытаются найти и сыграть стратегию, приносящую наибольший платеж, а безумцы — стратегию c. АС: смешанные стратегии тоже есть, да?
Как-то случилось Пете попасть в этот город и встретится с одним рациональным аборигеном. Они никогда раньше не виделись и никогда больше не увидятся. Петя знает, что абориген — рационален. Абориген знает, что Петя — рационален. Петя ошибочно полагает, что абориген считает его безумцем. Абориген знает о Петиной ошибке.
Найдите все равновесия по Нэшу в этой матрице. Какое из них будет сыграно? АС: Строго говоря, матрица уже совсем другая (точнее, это не Нэш)

4.5. Может или не может?

Задача 4.60. Эквивалентность стратегий
Рассмотрим некоторую игру двух лиц. Дано: с точки зрения первого игрока стратегии a и b полностью эквивалентны, т.е. вне зависимости от действий другого игрока они приносят одинаковый выигрыш. С точки зрения второго игрока стратегии c и d полностью эквивалентны.
Возможно ли, что исход (a, c) лучше исхода (b, d) для обоих игроков?

Задача 4.61.
Можно ли придумать такую матрицу игры, чтобы в ней можно было вычеркнуть одну стратегию так, чтобы все старые равновесия по Нэшу остались, и ещё одно равновесие по Нэшу появилось?

Задача 4.62. Несколько простых вопросов:1. Может ли игра в развернутой форме быть антагонистической?

2. Сколько смешанных стратегий у первого игрока, если у первого игрока две чистых стратегии, а у второго — три чистых стратегии?

3. Может ли быть исключенной Парето-оптимальная точка при вычеркивании строго доминируемых стратегий?

4. Может ли в игре двух игроков с бесконечным количеством стратегий не быть Парето-оптимальных точек?

Задача 4.63.
Платон мне друг, но Истина дороже
Докажите или опровергните следующие утверждения:

1. При вычеркивании строго доминируемых стратегий результат не зависит от порядка вычеркивания.

2. При вычеркивании нестрого доминируемых стратегий результат не зависит от порядка вычеркивания.

3. Если в результате вычеркивания строго доминируемых стратегий остается ровно один исход, то при вычеркивании стратегий, не являющихся наилучшим ответом, также остается ровно один исход.

4. Если в конечной игре двух игроков некоторая чистая стратегия не является наилучшим ответом ни на какую смешанную стратегию, то существует смешанная стратегия доминирующая эту чистую.

5. Множество стратегий остающиеся в результате вычеркивания строго доминируемых стратегий совпадает со множеством стратегий, остающихся в результате вычеркивания стратегий, не являющихся наилучшим ответом ни на какую стратегию.

6. Если в результате вычеркивания строго доминируемых стратегий остается ровно один исход, то он является равновесием по Нэшу.

7. Равновесие по Нэшу рационализуемо, то есть получается как результат удаления стратегий, которые не являются наилучшим ответом ни на какую стратегию.

8. В конечной игре в смешанных стратегиях существует равновесие по Нэшу.

9. В любой игре существует хотя бы одно равновесие по Нэшу.

10. В любой игре существует хотя бы одна Парето-оптимальная точка.

11. Хотя бы одна из Парето-оптимальных точек в любой игре является равновесием по Нэшу.

Задача 4.64. Абстрактная «биматричная» игра.
Источник: БЗИ, НГУ
Каждый из 2-х игроков имеет 3 стратегии: $a_i, b_i, c_i \ (i = 1, 2)$. Взяв свое имя как бесконечную последовательность символов типа «иваниваниван...», задайте выигрыши первого игрока так: $u_1(a_1, a_2)$ =«и», $u_1(a_1, b_2)$ =«в», $u_1(a_1, c_2)$ =«а», $u_1(b_1, a_2)$ =«н», $u_1(b_1, b_2)$ =«и», $u_1(b_1, c_2)$ =«в», $u_1(c_1, a_2)$ =«а», $u_1(c_1, b_2)$ =«н», $u_1(c_1, c_2)$ =«и».
Подставьте вместо каждой буквы имени число = ее номер в алфавите. Аналогично используя свою фамилию, задайте выигрыши второго игрока $u_2(.)$. Найти все известные вам типы некооперативных решений в нормальной форме: DE, MM, NE, StE, SE, NE_m (для NE_m, для простоты

решения, превратите игру в антагонистическую, заменив выигрыши второго игрока выигрышами первого с обратным знаком), а из кооперативных концепций — сильную и слабую Парето-границы P, P' и обычное C-ядро (за уровень полезности достижимый индивидуально, возьмите максимально-гарантированный выигрыш).
(Сокращения: DE – Dominant Equilibrium, MM – MaxiMin, NE — Nash Equilibrium, StE – Stackelberg Equilibrium, SE – Sophisticated Equilibrium АС: что это?, NE_m – Nash Equilibrium in Mixed stratagies.)

Задача 4.65. Пионерлагерь, или вор и сторож
Источник: БЗИ, Savvateev
Играют сторож колхозного поля и вор. На поле можно забраться 4 путями: A,B,C,D, удаленными от сторожки на расстояния, соответственно, 2, 4, 6, 8 (сот метров). В случае поимки вора,сторож ожидает с него штраф \$10, а неприятность каждой сотни метров ходьбы от сторожки для себя оценивает в \$1. Хоть один из путей сторож обязан покараулить в любом случае. Найти все смешанные равновесия Нэша: будет ли вор пользоваться в разные дни разными путями, и разные ли пути будет караулить сторож?

Задача 4.66. Лыжники.
Источник: БЗИ, NES
Двое бегут по лыжной трассе навстречу друг другу. У каждого две стратегии: уступить или не уступить (для определенности предположим, что лыжники руководствуются принципом правостороннего движения). Уступивший дорогу теряет на этом 2 сек., а если столкнулись, то будут распутываться 10 сек.

1. Найдите все (и чистые, и смешанные) равновесия в данной игре, предполагая, что проигрыш участников определяется потерянным временем. Какие из равновесий являются эффективными (оптимальными по Парето в сильном или слабом смысле)?

2. Решить задачу 1 в предположении, что можно ещё уступить половину лыжни — мы ведь бегаем классикой! При этом теряется 1 сек. (в дополнение к возможным десяти). Сколько будет равновесий? Что на сей раз можно сказать об их эффективности?

Задача 4.67. Торговцы на станции.
Источник: БЗИ, NES
На станции Тайга трое местных предпринимателей, Александр, Василий и Семен (A, B, C), промышляют тем, что продают пассажирам, соответственно, пиво, воблу и соленые орешки. Утром приходят сразу два поезда, поэтому каждый спешит поставить свою торговую точку на первой или второй платформе. Если торговец работает на платформе в одиночку, его выручка (в рублях) от продажи товаров пассажирам соответствующего поезда определяется из таблицы:

Платформа	A	B	C
1	80	60	60
2	100	40	40

Если в одном месте продаются и пиво, и закуска, то этих товаров удается продать на 50% больше из-за эффекта дополняемости. Впрочем, если продавцы закуски находятся на одной платформе (АС: вне зависимости от того, есть ли пиво? Уточнить!), то вследствие конкуренции оба выручают вдвое меньше, чем когда они на разных платформах.

1. Формализуйте взаимодействие торговцев как игру в нормальной форме, предполагая, что до установки торговой точки никто из них не может получить информацию о том, где будут другие.

2. Найдите все чистые и смешанные равновесия Нэша в этой игре.

3. Что изменится, если Александр будет в одиночку зарабатывать на второй платформе не 100, а 60 рублей?

Задача 4.68. «Гладкая» игра.
Источник: БЗИ, NES
Играют двое. Стратегии игроков задаются вещественными параметрами s и t ($s, t \in [-1, 1]$). Выигрыши равны, соответственно, $2\alpha st - s^2$ и $t^3 - 3st$. Изобразите кривые реакции обоих участников (если возможно, разными цветами или стилями линий) и найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях для $\alpha = -\frac{3}{4}$, $\alpha = \frac{1}{4}$ и $\alpha = 2$.

Задача 4.69. Продавцы мороженого на пляже.
Источник: БЗИ, NES
На городском пляже стоят два ларька (A и B), торгующие мороженым. Продавцы независимо устанавливают цены $p_A, p_B \in [0, \infty)$; издержками пренебрегаем. Все выглядит примерно так:

$$A \circ \!\longleftrightarrow\! \circ\, B$$
1км
п л я ж

Народ равномерно распределился по пляжу и загорает. В этот день очень жарко, поэтому каждый из отдыхающих готов переплатить за лакомство рубль, только бы не идти лишние 100м по раскаленному песку.

1. Предположим, что каждый, во что бы то ни стало, стремится приобрести себе стаканчик мороженого. Полностью опишите отображения наилучшего ответа, изобразите на плоскости (p_A, p_B) кривые реакции и найдите все равновесия Нэша. Естественно, все в чистых стратегиях;

2. Выполните задание п. 1 в предположении, что ценность стаканчика мороженого составляет $v \geqslant 0$, т. е. каждый потребитель был бы готов заплатить за мороженое цену v, если бы оно продавалось рядом (как нетрудно видеть, в п. 1 $v = \infty$). Рассмотрите все возможные случаи. Указание: чтобы избежать лишней возни с несущественными кусками кривых, можете исключить что-нибудь по доминированию АС: слабому и сильному?.

Задача 4.70. Продавцы мороженого в Игарке.
Источник: БЗИ, NES
Город Игарка весь расположен вдоль одной улицы длиной 3 км. Два конкурирующих продавца мороженого независимо выбирают места для своих торговых точек. Покупатели, естественно, идут к ближайшему ларьку (в Игарке -50^oC). Если расстояния до ларьков одинаковы (в частности, если ларьки находятся в одной точке), то место покупки мороженого выбирается покупателем случайно и равновероятно.

1. Пусть цена мороженого фиксирована и все хотят его купить. Найти все равновесия в чистых стратегиях;

2. Предположим, что в задаче 1 покупатели из-за риска замерзнуть не ходят дальше 1 км от дома. Найдите все равновесия;

3. А что будет, если в задаче 1 продавцов не два, а три?

4. Решить задачу 3, предполагая, что три продавца выбирают свое местоположение вдоль Московской кольцевой автомобильной дороги.

Задача 4.71. Дуополия с дифференцированными товарами.
Источник: БЗИ, NES

Две фирмы производят два различных товара. Эти товары частично взаимозаменяемы и спрос на них формируется по закону

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \max\left\{\tfrac{1-2p_1+p_2}{3}, 0\right\};\\
q_2 &= \max\left\{\tfrac{1+p_1-2p_2}{3}, 0\right\},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $p_1, p_2 \geqslant 0$ — цены, а $q_1, q_2 \geqslant 0$ — выпуски. Затраты на производство единицы продукции составляют, соответственно, c_1 и c_2 ($c_1, c_2 \geqslant 0$).

1. Пусть фирмы независимо устанавливают свои цены, после чего удовлетворяют возникший на рынке спрос. При каких c_1 и c_2 реализуется равновесие с положительными ценами и выпусками? Найдите для этого случая равновесные p_1, p_2, q_1, q_2;

2. А теперь, наоборот, пусть фирмы выбирают, сколько они будут производить, а цены на рынке формируются в соответствии с законом, обратным к закону спроса (1) (если правая часть какой-либо из получающихся формул отрицательна, то считаем соответствующую цену нулевой). Ответьте на те же вопросы, что в п. 1;

3. Сравните равновесия, реализующиеся при ценовой и количественной конкуренции. Отдельно рассмотрите случай $c_1 = c_2$.

Задача 4.72.
Существует ли последовательная игра двух игроков с полной совершенной информацией, матрица нормальной формы которой имела бы следующий вид

	t_1	t_2	t_3
l_1	$(0;0)$	$(0;0)$	$(0;0)$
l_2	$(0;0)$	$(1;-3)$	$(-3;1)$
l_3	$(0;0)$	$(-3;1)$	$(1;-3)$

Если Ваш ответ «да», то постройте дерево, а если «нет», то докажите.

4.6. Игры с нулевой суммой

Задача 4.73. Примеры игр с нулевой суммой.
Источник: БЗИ, NES
Найти максимин α и минимакс β в чистых стратегиях, а также все седловые точки (они же равновесия Нэша) и цену игры в смешанных стратегиях для следующих игр:

1.
$$
\begin{bmatrix}
-1 & 2 & -2\\
5 & -1 & 1\\
2 & 1 & 3
\end{bmatrix}
$$

2.
$$
\begin{bmatrix}
1 & 3 & 2 & 0 & 4\\
4 & 1 & 1 & 5 & 0\\
6 & 0 & 4 & 9 & -3
\end{bmatrix}
$$

Задача 4.74. Два пальца (или «тюремный покер»).
Источник: БЗИ, NES
Есть такая замечательная игра. Участники одновременно показывают один или два пальца. Потом считают сумму s (она может получиться от двух до четырех). Если s четно, то второй игрок

выиграл у первого s долларов, если же s нечетно то есть $s = 3$, то наоборот, s долларов выиграл первый.

1. Найдите седловую точку в смешанных стратегиях и цену игры. Справедлива ли игра, и, если нет, то «кому лучше играется», первому и второму?

2. Те же вопросы для игры «три пальца» (можно выбрасывать от одного до трех пальцев).

Задача 4.75. Ещё одна игра «на пальцах».
Источник: БЗИ, NES
Двое играют на деньги. Участники одновременно показывают сколько-то пальцев (от 1 до n). Если оказалось поровну, то ничья. Если число пальцев, показанных одним и другим игроком, отличается на 1, то тот, у кого меньше, выигрывает $\$2$. В остальных случаях тот, у кого больше, выигрывает $\$1$.

1. Можно ли, не производя никаких вычислений, определить цену игры в смешанных стратегиях? Приведите соображения, обосновывающие ваш ответ;

2. Пусть $n = 3$. Как надо играть?

3. Верно ли, что при любом n в игре имеется ровно одно смешанное равновесие?

Задача 4.76. Инвесторы.
Источник: [8]??
Два инвестора соревнуются. Организатор выдает каждому один рубль. Инвесторы одновременно выбирают способ вложения своего рубля. Каждый инвестор может выбрать себе любую случайную величину X с $E(X) = 1$ в качестве результата инвестирования. Победитель (тот, у кого окажется больше денег после инвестирования) получает от проигравшего 1 рубль, результаты инвестирования достаются организаторам. АС: Что за страшное пространство выбора? Есть ограничения на дисперсию, и.т.д.?
Как выглядит оптимальная АС: что значит оптимальная - тут доминирование? стратегия, если:

1. Результат инвестирования может принимать отрицательные значения?

2. Результат инвестирования не может принимать отрицательных значений?

3. Что изменится, если результат инвестирования может принимать значения на отрезке $[0; b]$, где $b > 1$, а победитель в качестве выигрыша получает результат инвестиций проигравшего?

Задача 4.77. Гипербола.
На плоскости (x, y) нарисуйте точки, при которых существует смешанная стратегия вида $s = p \cdot a + (1 - p) \cdot b$, строго доминирующая стратегию c в антагонистической игре:

	d	e	f
a	5	x	2
b	3	5	5
c	4	4	y

Задача 4.78.
Задана антагонистическая игра

	t_1	t_2
s_1	1	6
s_2	5	7
s_3	1	7
s_4	5	6

1. Найдите равновесия по Нэшу в чистых стратегиях;
2. Найдите равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях;
3. Найдите Парето-оптимальные точки в чистых стратегиях;
4. Найдите Парето-оптимальные точки в смешанных стратегиях.

Тигр: Кто-то за эту задачу незачет получил...

Задача 4.79.
Имеется антагонистическая игра с матрицей A.
Найдите все равновесия по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях и цену игры, если:

1. $a_{i,j} = i - j$;
2. $a_{i,j} = f(i) \cdot g(j)$, где f и g — положительные функции;
3. $a_{i,j} = f(i) + g(j)$, где f и g — произвольные функции;
4. $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$

Задача 4.80.
Имеется антагонистическая игра $2 \times n$ (две стратегии у первого игрока и n — у второго), где $n \geqslant 2$. Всегда ли можно вычеркнуть стратегии так, чтобы игра превратилась в игру 2×2, а цена игры при этом не изменилась?

Задача 4.81. Саша и Алеша.
Источник: [8]?
У Маши два поклонника — Саша и Алеша. Маша прилетает в аэропорт в свой родной город в произвольный момент времени на отрезке [12:00,13:00] (момент прилёта распределён равномерно на этом отрезке). Саша и Алеша независимо друг от друга выбирают, когда приехать ее встречать. Каждый ухажер нетерпелив, поэтому, приехав в аэропорт, он либо сразу забирает Машу, которая уже прилетела; либо сразу уезжает, если Маши нет (она могла ещё не прилететь или ее мог забрать другой ухажер). Получивший Машу получает $+1$, проигравший -1; если Маша не досталась никому, то 0:0. Если Саша и Алеша приезжают одновременно — 0:0. Если до 13:00 Машу никто не встретит, она уедет на такси.
Найдите равновесие по Нэшу.

Задача 4.82. КНБ-2.
Источник: Луркморье, статья Дворовые
«Камень-ножницы-бумага и колодец тоже надо. Раз-два-три!» Два игрока одновременно показывают ладонью одну из четырех фигур: камень, ножницы, бумагу или колодец. Ножницы режут бумагу, тупятся об камень и тонут в колодце. Бумага побеждает камень (т.к. камень можно завернуть в бумагу), закрывает колодец (опять же побеждает). Камень тонет в колодце. Если игроки показали одну и ту же фигуру, то ничья. Найдите равновесие Нэша.

Задача 4.83. Monty-Hall — игровая версия.
Есть три шкатулки, А, Б, и В. Ведущий прячет в одну из них 100 рублей в тайне от игрока. Затем игрок выбирает одну из шкатулок. После этого ведущий открывает пустую шкатулку, не выбранную игроком (Если таких шкатулок две, то ведущий может открыть любую из них). Найдите равновесие Нэша.

5. Статические игры с неполной информацией

5.1. Равновесия Байеса-Нэша

Задача 5.1. Вариант «Битвы полов»
Саша не совсем уверен, предпочитает ли Маша его компанию, или склонна избегать его. С точки зрения Саши:

с вероятностью $\frac{2}{3}$ игра имеет вид:

	F	T
F	$(2;1)$	$(0;0)$
T	$(0;0)$	$(1;2)$

с вероятностью $\frac{1}{3}$ игра имеет вид:

	F	T
F	$(2;0)$	$(0;2)$
T	$(0;1)$	$(1;1)$

Маша в отличие от Саши точно знает, в какую игру она играет. *Тигр: Да, с такими Машами опасно играть!*
В матрицах платеж Саши указан первым.

1. Укажите количество типов каждого игрока;
2. Сформулируйте чистые стратегии Саши и Маши;
3. Найдите равновесие Байеса-Нэша в чистых стратегиях;
4. И в смешанных!

Задача 5.2. Без слов
АС: предыдущая задача, но с другими цифрами.
Природа выбирает матрицу игры. *Тигр: Я даже знаю, как зовут эту Природу!*

С вероятностью $\frac{3}{5}$ матрица имеет вид:

	F	T
F	$(1;2)$	$(-1;3)$
T	$(3;5)$	$(1;1)$

С вероятностью $\frac{2}{5}$ матрица имеет вид:

	F	T
F	$(2;-1)$	$(4;6)$
T	$(3;1)$	$(2;2)$

Первый игрок знает, какую матрицу выбрала природа, второй — нет.

1. Укажите количество типов каждого игрока;
2. Сформулируйте чистые стратегии игроков;
3. Найдите равновесие Байеса-Нэша в чистых стратегиях;
4. И в смешанных!

Задача 5.3. Байесовский семейный спор или «капризная жена».
Источник: БЗИ, NES
Муж и жена решают, куда пойти — на футбол (F) или на балет (B). Все осложняется тем обстоятельством, что жена может находиться в хорошем настроении (и тогда стремится быть вместе с мужем), а может и в плохом (и тогда видеть его не может). Короче, вот таблица игры. Строки соответствуют мужу, а столбцы — жене, чей выигрыш зависит от её настроения (хорошее, плохое):

	F	B
F	3; 2,0	1; 1,3
B	0; 0,2	2; 3,1

Найдите все байесовские равновесия, предполагая, что хорошее и плохое настроения наступают с равными вероятностями. Не забудьте про смеси. АС: Объединить с Битвой полов

Задача 5.4. Непрерывный вариант
Рассмотрим предыдущую задачу с параметрами θ_1, θ_2. При этом значение θ_1 известно первому игроку, а значение θ_2 — второму. Найдите равновесие Байеса-Нэша при заданных матрице выигрыша и распределениях.

1.

	F	T
F	$(3; 2+\theta_2)$	$(2; 1)$
T	$(1; 0)$	$(4+\theta_1; 1)$

.

При этом общеизвестно, что $\theta_1 \sim U[0; 2]$, $\theta_2 \sim U[1; 2]$.

2.

	F	T
F	$(0; 2)$	$(2; 3+\theta_2)$
T	$(1+\theta_1; 0)$	$(1; 1)$

.

При этом общеизвестно, что $\theta_1 \sim U[1; 3]$, $\theta_2 \sim U[0; 2]$.

Задача 5.5. Инвестиции.
Два партнера инвестируют x_1 и x_2 в совместное предприятие. Значение случайной величины θ_1 известно первому игроку, а значение θ_2 — второму. Оба игрока знают, что $\theta_1 \sim U[0; 1]$, $\theta_2 \sim U[0; 1]$. Полезности игроков имеют вид $U_1 = \theta_1 x_1 x_2 - x_1^3$ и $U_2 = \theta_2 x_1 x_2 - x_2^3$.
Найдите равновесие Байеса-Нэша, в котором стратегии игроков имеют вид $x_i(\theta_i) = a_i + b_i\sqrt{\theta_i}$, где a_i и b_i — некоторые константы.

Задача 5.6. Конверты...[O].
Источник: Janssen??, HSE-exam
В пяти конвертах спрятаны суммы в 10$, 20$, 40$, 80$ и 160$. Случайным образом выбираются два конверта с соседними суммами и выдаются игрокам. *Тигр: А в конвертах — это взятки?* Каждый игрок открывает свой конверт и выбирает, хочет ли он оставить себе сумму или хочет обменяться. Обмен происходит, если оба игрока согласны обменяться.

1. Сколько чистых стратегий у каждого игрока?

2. Найдите все равновесия Байеса-Нэша в чистых и смешанных стратегиях.

Задача 5.7.
Величины X и Y независимы и распределены равномерно на отрезке $[0; 1]$. Вася узнает предлагаемый ему приз X, Петя узнает предлагаемый ему приз Y. Дальше каждый из игроков решает: брать свой приз, или претендовать на приз противника. Игрок, выбравший свой приз, немедленно получает его.

1. Придумайте смысловой текст (АС: ко всем вариантам!). Во всех пунктах найдите равновесие Байеса-Нэша.

2. Вариация в0

   Если оба игрока решили претендовать на приз противника, то никто ничего не получает. Если первый игрок решил взять свой приз, а второй решил претендовать на приз противника, то оба получают сумму, на которую согласился первый игрок.

3. Вариация в1

   Если оба игрока решили претендовать на приз противника, то каждый получает приз противника. Если один игрок решил взять свой приз, а второй решил претендовать на приз противника, то претендующий на приз противника не получает ничего.

4. Вариация в2

   Если игроки выбрали разные призы, то они получают их. Если игроки выбрали один и тот же приз, то они делят его поровну.

5. Вариация в3

   Если игроки выбрали один и тот же приз, то они получают его (каждый в полном объеме). Если игроки выбрали разные призы, то они не получают ничего.

Задача 5.8. Рынок «лимонов»
Источник: [21, 1.7]
Встречаются два игрока: продавец и покупатель машины. Машина может быть хорошего качества («персик», для продавца ценность такой машины равна 3000 у.е., а для покупателя — 4000 у.е.) с вероятностью p и плохого качества («лимон», для продавца ценность такой машины равна 0, а для покупателя — 1000 у.е.) с вероятностью $(1-p)$. Продавец знает качество машины, а покупатель — нет. Похожая машина, судя по объявлениям в газете, была продана за сумму v. Продавец и покупатель одновременно принимают решение: соглашаться ли на сделку по сумме v. Сделка происходит только в том случае, если обе стороны согласны.
Найдите равновесие Байеса-Нэша в зависимости от p и v, и определите вероятности торговли «лимонами» и «персиками» в найденном равновесии. АС. Уточнить: если лимон, то какова Prob(торговли)? Если персик, то какова?

Задача 5.9. На рынке корову старик продавал...
Источник: Sloth
Покупатель и продавец одновременно называют цены p_b и p_s. Если $p_b \leqslant p_s$, то обмен происходит по цене $\frac{p_b+p_s}{2}$; если нет, то обмена не происходит. Ценность коровы для покупателя и продавца — независимые случайные величины v_b и v_s, распределенные равномерно на $[0;1]$. Если обмен произошел по цене p, то выигрыши равны $u_s = p - v_s$ и $u_b = v_b - p$. Пусть q — константа из отрезка $[0;1]$. Рассмотрим следующую пару стратегий: продавец называет цену q, если $v_s < q$, и 1, иначе; покупатель называет цену q, если $v_b > q$, и 0, иначе.

1. При каких q такая пара стратегий будет равновесием Байеса-Нэша?

2. В осях $(v_s; v_b)$ нарисуйте множество, для которого обмен происходит. С какой вероятностью происходит обмен? Всегда ли происходит обмен в случае $v_s < v_b$?АС: в найденном равновесии?

3. Как зависят ожидаемые выигрыши покупателя и продавца от q?

   Пусть теперь игроки используют линейные стратегии $p_b(v_b) = k_b v_b + c_b$ и $p_s(v_s) = k_s v_s + c_s$.

4. Найдите равновесие по Нэшу в случае линейных стратегий;

5. В осях $(v_s; v_b)$ нарисуйте множество, для которого обмен происходит. С какой вероятностью происходит обмен? Всегда ли происходит обмен в случае $v_s < v_b$?

Задача 5.10. Две игры
Источник: [19]??

Игроки будут играть в одну из двух игр. С вероятностью β в игру

	t_1	t_2
l_1	$(x;0)$	$(0;y)$
l_2	$(0;x)$	$(y;0)$

, а с вероятностью $(1-\beta)$ — в игру

	t_1	t_2
l_1	$(0;x)$	$(x;0)$
l_2	$(y;0)$	$(0;y)$

.

Известно, что $0 < y < x$.

1. Найдите все равновесия по Нэшу в каждой из игр;

2. Пусть оба игрока не знают, в какую игру они играют. Найдите все равновесия Байеса-Нэша в зависимости от параметра β;

3. Пусть только второй игрок точно знает матрицу игры. Представьте эту игру как статическую игру с неполной информацией: сколько типов у каждого игрока? сколько стратегий? Найдите все равновесия по Нэшу для каждого β. Представьте эту игру, как динамическую игру с несовершенной информацией. (АС: это ниже, раздел 9)

4. Найдите все равновесия по Нэшу для каждого β, если первый игрок точно знает матрицу игры, а второй строит догадки $\beta : (1-\beta)$.

Задача 5.11. Выкуп доли

Доля Маши в ЗАО «Красивое платье» составляет s, а доля Кати составляет $(1-s)$. Маша и Катя решили отказаться от дальнейшего сотрудничества. У ЗАО должна быть одна владелица! Ценность ЗАО для каждой владелицы — случайная величина ν_i, равномерно распределенная на $[0;1]$. АС: уточнить, что реализации разные!

1. Маша и Катя решили попробовать аукцион. Оба игрока одновременно называют цену ЗАО. Тот, кто назвал более высокую цену, должен выкупить акции партнера по предложенной им самим цене (более высокой). Найдите равновесие Байеса-Нэша в линейных стратегиях, когда предлагаемая каждым игроком цена должна иметь вид $b_i = \beta\nu_i$, где v_i — его оценка стоимости ЗАО, а β — константа. Не забудьте про случай $s = 0$, т.е. Маша продавец, а Катя — покупатель. Возможно ли, что акции достанутся тому, кто их меньше ценит?

2. Маша и Катя снова экспериментируют. Оба игрока называют цену ЗАО. Тот, кто назвал более высокую цену, должен выкупить акции партнера по предложенной партнером цене (более низкой). Найдите равновесие по Нэшу в линейных стратегиях более общего вида, когда предлагаемая каждым игроком цена должна иметь вид $b_i = \alpha + \beta\nu_i$, где v_i — его оценка стоимости ЗАО, а α и β — константы. Возможно ли, что акции достанутся тому, кто их меньше ценит?

Задача 5.12. Простой покер, непрерывная версия.

Юля и Петя делают ставку по 1$. Далее каждый из них тайно от противника узнает свое число. Числа, получаемые Юлей и Петей, независимы и равномерно распределены на отрезке от нуля до единицы. Затем Юля и Петя одновременно выбирают, доложить ли ещё по 5$, или сбросить карты. Если оба игрока сбросили карты, то оба теряют свою первоначальную ставку в пользу казино; если один сбросил, а другой увеличил ставку, то увеличивший забирает себе 1$ другого (и свое берет назад); если оба игрока увеличили ставку, то победителем считается тот, у кого число больше. Найдите равновесия Байеса-Нша в этой игре (для простоты можно исключить нестрого доминируемые стратегии).

Задача 5.13. Простой покер, дискретная версия.

Юля и Петя делают ставку по 1$. Далее они по очереди тянут из шляпы бумажки с числами. В шляпе лежат натуральные числа от 1 до N. Затем Юля и Петя одновременно выбирают, доложить

ли ещё по 5$, или сбросить карты. Если оба игрока сбросили карты, то оба теряют свою первоначальную ставку в пользу казино; если один сбросил, а другой увеличил ставку, то увеличивший забирает себе 1$ другого (и свое берет назад);; если оба игрока увеличили ставку, то победителем считается тот, у кого число больше. А если одинаково, то ничья?
Найдите все равновесия по Нэшу в этой игре для $N = 3$.

Задача 5.14. Издержки в секрете.
Источник: [13]
Рассмотрите следующий вариант модели Курно. Функция спроса имеет вид $P = a - bQ$, где $Q = q_1 + q_2$. Предельные издержки обоих фирм — независимые одинаково распределенные случайные величины: $P(c_i = \bar{c}) = P(c_i = \underline{c}) = \frac{1}{2}$, где $\bar{c} > \underline{c}$.

1. Пусть и свои, и чужие предельные издержки известны обеим фирмам.

   Найдите равновесие по Нэшу в этой игре;

2. Пусть теперь каждая фирма наблюдает реализацию только своих предельных издержек. Найдите равновесие Байеса-Нэша ;

3. Сравните матожидание и дисперсию равновесного выпуска в обоих случаях.

   АС: надо ли рассматривать 4 разных варианта?

Задача 5.15. Непрерывная игра с неполной информацией
Два игрока одновременно выбирают действительные числа x_1 и x_2, соответственно. Платежные функции имеют вид
$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1^2 + 2x_2x_1 + \theta_1 x_1 \\ -x_2^2 + 4x_1x_2 + 2\theta_2 x_2 \end{pmatrix}$, где $\theta_1 \sim U[0;2]$, $\theta_2 \sim U[1;2]$ Значение θ_1 известно первому игроку, а значение θ_2 — второму.
Найдите равновесие Байеса-Нэша в чистых стратегиях.

Задача 5.16. Коррелированное равновесие
Рассмотрим повнимательнее игру, которая играется один раз:

	c	d
a	$(1;5)$	$(4;4)$
b	$(0;0)$	$(5;1)$

1. Найдите равновесия по Нэшу;

2. Найдите вероятности каждого из четырех исходов в равновесиях;

3. Изобразите на плоскости множество возможных платежей и множество равновесных платежей.

   Допустим, перед началом игры оба игрока наблюдают результат подбрасывания монетки. АС: И что дальше делают? Неясно, что имеется ввиду.

4. Как изменится множество стратегий игроков?

5. Как изменятся ответы на пункты а, б и в? АС: по Байесу-Нэшу или как-то иначе?

   Допустим, что перед началом игры происходит одно из трех равновероятных событий A, B или C. Первый игрок знает, произошло ли A, или нет. Второй игрок знает, произошло ли B. АС: и тут тоже туманно

6. Ответьте на аналогичные вопросы для новой игры.

Задача 5.17.
Два игрока одновременно выбирают действительные числа x_1 и x_2, соответственно. Платежные функции могут иметь один из двух видов:
$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1^2 + x_2 x_1 \\ -x_2^2 + x_1 x_2 + 4x_2 \end{pmatrix}$, с вероятностью $\frac{7}{10}$
$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1^2 + 4x_2 x_1 \\ -x_2^2 \end{pmatrix}$, с вероятностью $\frac{3}{10}$
Первый игрок точно знает, какой вид имеют платежные функции, второй знает только закон распределения.

1. Найдите равновесие Байеса-Нэша в чистых стратегиях;

2. Предположим, что первый игрок до того, как второй игрок сделает свой ход, может послать ему один из двух сигналов «А» или «Б» (не обязательно достоверный!). Найдите равновесие Байеса-Нэша в таком варианте игры.

Задача 5.18. Меньше знаешь — крепче спишь

Матрица игры имеет один из двух видов (вероятность каждого вида равна 0,5):

	k	l	m
a	$(1; 2/3)$	$(1; 0)$	$(1; 1)$
b	$(2; 2)$	$(0; 0)$	$(0; 3)$

или

	k	l	m
a	$(1; 2/3)$	$(1; 1)$	$(1; 0)$
b	$(2; 2)$	$(0; 3)$	$(0; 0)$

.

Первый игрок знает матрицу игры, второй — нет.

1. Найдите равновесие Байеса-Нэша и выигрыш второго игрока;

2. Допустим, что второй игрок также знает матрицу игры. Найдите новое равновесие. АС: точнее, 4 новых равновесия, да?;

3. Почему не срабатывает рассуждение «второй игрок может отказаться от лишней информации, поэтому его платеж не может упасть»? АС: рациональность, да?
Тигр: Многие знания означают многия печали.

Задача 5.19. Rendez-vous-1.
Источник: БЗИ, NES
Александра и Виктор живут на одной улице (считаем, что их места жительства являются случайными точками, равномерно и независимо распределенными на отрезке $[-1, 1]$). Для того, чтобы договориться о встрече, они сообщают друг другу, где живут, и встречаются ровно посередине между названными точками. Сообщения делаются одновременно и независимо и необязательно правдивы (но все же в пределах $[-1, 1]$). Полезность каждого из участников равна пройденному расстоянию, взятому со знаком «минус».

1. Найдите оптимальный ответ Александры на правдивую стратегию Виктора (когда он в любом случае сообщает свое фактическое место жительства).

2. Докажите, что если каждый из участников будет играть, как Александра в п. 1, то получится байесово равновесие. Будет ли оно эффективным?

3. [T] Разработайте механизм наподобие схемы Гровса, делающий равновесие ex-post эффективным.

Задача 5.20.
В Антинаучно-Исследовательском Университете — Самая Маленькая Академия есть место только для одного студента. На это место претендуют два абитуриента: Петя и Вася.
Вступительные испытания проходят в два этапа: первый – обязательный, второй – по желанию абитуриента. Узнав свой результат после первого этапа, каждый абитуриент решает, идти ли ему на второй этап или нет. При принятии решения ни один абитуриент не знает чужого результата. Итоговым результатом является последний результат Т.е. это "пересдача"?.
В АИУ-СМА зачисляется абитуриент с самым высоким итоговым результатом. Петя и Вася – последние двоечники, поэтому все их результаты – независимые равномерные на $[0;1]$ случайные величины.

1. Найдите равновесие Байеса-Нэша;
2. Найдите равновесие Байеса-Нэша, если после первого этапа абитуриенты узнают и свой, и чужой результаты;
3. В каком случае в АИУ-СМА будет больше ожидаемый итоговый результат?

5.2. Аукционы

— Фигура, изображающая правосудие! — провозгласил аукционист. Бронзовая. В полном порядке. Пять рублей. Кто больше?

Задача 5.21. Общее решение аукциона первой цены
Ценность лота для каждого из n покупателей v_i — случайная величина, имеющая функцию плотности $f(t)$. Игроки одновременно подают заявки с указанием цены покупки b_i. Лот достается тому, кто указал наибольшую цену. Выигравший аукцион платит названную им цену.
Найдите симметричное равновесие Байеса-Нэша

Задача 5.22.
Рассмотрим аукцион, где побеждает назвавший наибольшую ставку и платит среднее арифметическое всех остальных ставок. Ценности (оценки лота участниками) равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Найдите симметричное равновесие Байеса-Нэша, а также наилучший ответ на стратегию «назвать свою истинную оценку».

Задача 5.23.
Рассмотрим аукцион N игроков. На аукционе продаётся картина. Ставка B_i для каждого игрока определяется ценностью V_i, причём V_i равномерно распределены на отрезке $[0; 1]$, а $B_i = f(V_i)$ (функция f одинакова для всех игроков).
There is an auction with N players. Some painting is saling by auction. B is a bet for each player and this bet depends on player's value V, i.e. Vi   V[0;1] and B = f(Vi)
АС: К чему сей сон? Что надо найти? Удалить нафиг?

Задача 5.24. Василий, покажите публике «Правосудие»
В пассаже на Петровке на аукцион выставлена «Фигура, изображающая правосудие» (бронзовая, в полном порядке). *Тигр: Я в полный рост с весами в лапе.* Ценность фигуры для каждого из двоих покупателей v_i — случайная величина, распределенная равномерно на отрезке $[0; 1]$. Игроки одновременно подают заявки с указанием цены покупки b_i. Фигура достается тому, кто указал наибольшую цену АС: за какую цену?. Если игроки указали одинаковую цену b, то их платежи равны $\frac{1}{2}(v_i - b)$.

1. Пусть первый игрок использует линейную стратегию $b_1(v_1) = kv_1 + l$. Найдите ожидаемый выигрыш второго игрока, при условии, что индивидуальная оценка «Правосудия» для него равна v_2, а указал он цену b_2;

2. Найдите равновесие Байеса-Нэша, в котором оба игрока используют одинаковую линейную стратегию. Укажите среднюю выручку продавца в этом равновесии.

Задача 5.25. Аукцион второй цены
За право купить стулья работы мастера Гамбса на аукционе столкнулись n покупателей. Для покупателя i ценность стульев равна v_i, причем $v_1 > v_2 > \ldots > v_n > 0$.АС: Это изначальное предположение? Аукцион проходит по следующим правилам: покупатели одновременно предлагают цены, товар получает тот, кто назовет наибольшую цену. При этом победитель аукциона платит наивысшую цену, названную остальными (!) игроками (не ту, что назвал он сам!). Так, например, если были предложены цены 4, 2, 7, 1, 3, 5, то стулья достаются покупателю, назвавшему цену 7, а платит он 5.
Где распределены v_i? АС: Это же теперь известнейший сюжет!? Уточнение:
Если наивысшая цена была названа сразу несколькими игроками, то товар получает один из них равновероятно, а платит он эту самую наивысшую цену.

1. Представьте эту игру нормальной форме. Классифицируйте ее. Что это значит?

2. Докажите, что стратегия $s_i = \nu_i$ (декларировать свою истинную ценность стульев) нестрого доминирует остальные стратегии покупателя i;

3. Найдите как минимум 3 различных равновесия Байеса-Нэша в чистых стратегиях.

АС: Надо просто без раздела "Аукционы" дать 3-4 разных аукционных формата на исследование!!

Задача 5.26. Аукцион первой и второй цены.
Источник: БЗИ, NES
На аукционе, в котором участвуют два покупателя, продается картина. Ценность ее для покупателя i составляет x_i, $i = 1, 2$, где x_1, x_2 — независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$. Информация о точном значении x_i становится доступна только i-му участнику. Игрок i тайно заявляет цену b_i и запечатывает заявку в конверт, на котором пишет свою фамилию.

1. Пусть картина достается тому, кто назвал наибольшую цену, каковую он и платит. Предполагая стратегии игроков такими, что размер заявки пропорционален субъективной ценности картины, найти байесовское равновесие. Будут ли игроки декларировать свои истинные оценки картины? АС: тоже подслучай?

2. Тот же вопрос для аукциона «второй цены», когда картина достается тому, кто назвал наибольшую цену, но платит он цену, заявленную проигравшим аукцион.

5.3. Коррелированное равновесие

Задача 5.27. Лыжники-2
Источник: [33]
Двое бегут друг навстречу другу по лыжне. Можно либо уступить пол-лыжни, либо не уступать вовсе. Решение принимается одновременно. Если вы уступили, а вам — нет, то вы вынуждены быстренько уступить ещё и вторую половину, и ваш выигрыш от этого равен 0, а выигрыш наглеца равен 3. Если оба вежливо уступили, то обоим по 2; если оба наглецы, то столкнулись, и обоим по (-1). Осознав, что в игре существуют два несимметричных равновесия, а наилучший исход недостижим при некооперативном поведении, игроки решили использовать «коррелированные» смешанные стратегии. А именно, они пригласили арбитра, продиктовали ему вероятности всех четырёх исходов, предложили ему разыграть в тайне от них соответствующую лотерею,

и каждому игроку на ушко шепнуть, как ему ходить. Дальше, разумеется, каждый волен решать, следовать ли ему полученному предписанию. Возможно ли таким образом добиться чего-либо большего, чем просто кидая монетку, и в случае решки разыгрывая одно из равновесий Нэша, а при орле — другое? Какие выигрыши достижимы при таком механизме?

Задача 5.28. Примеры на коррелированные равновесия.
Источник: БЗИ
Изобразить на плоскости (u_1, u_2) область коррелированных равновесий для следующих игр:

1. Семейный спор:
$$\begin{bmatrix} (4,3) & (2,2) \\ (0,0) & (3,4) \end{bmatrix};$$

2. Преследование:
$$\begin{bmatrix} (2,0) & (0,1) \\ (0,1) & (2,0) \end{bmatrix}.$$

Задача 5.29. Возможности необязывающих соглашений.
Источник: БЗИ
Имеются два участника, каждый из которых может вести себя эгоистически (E) или кооперативно (K). Если оба играют K, то оба получают по c. Если один играет E, а другой K, то выигрыши составляют, соответственно, a и b ($0 < b < c < a$). Если оба эгоисты, то по нулям.

1. С какими весами надо смешивать исходы игры, чтобы получилось коррелированное равновесие? Задайте ответ в виде выпуклой оболочки нескольких наборов весов;

2. Найдите максимально возможный суммарный выигрыш, реализуемый в коррелированных равновесиях. В каких случаях он превышает то, что достижимо в равновесиях Нэша?

6. Динамические игры общего вида

6.1. Начнем с конца!

Задача 6.1. Добрые пираты
Источник: [35, Глава 2, пример 7]
Полный золота торговый корабль был захвачен $n \geqslant 3$ абсолютно рациональными пиратами.
У пиратов есть строгая иерархия: капитан, первый помощник капитана, второй помощник и т.д.
Пираты делят золото так: сначала капитан предлагает свой вариант дележа, затем пираты голосуют за или против: если дележ одобрен более чем половиной пиратов (включая предложившего дележ), то он принимается, а если нет, то капитана убивают, и дележ предлагает первый помощник...
Каждый пират хочет остаться в живых и получить побольше золота. При одинаковых выгодах для себя пират голосует за тот вариант, где в живых остается больше сотоварищей.
Какой дележ будет реализован (предположим, что золото бесконечно делимо)?

Задача 6.2. Злые пираты
Источник: https://omohundro.files.wordpress.com/2009/03/stewart99_a_puzzle_for_pirates.pdf
Торговый корабль с сотней золотых монет был захвачен пятистами абсолютно рациональными пиратами.
У пиратов есть строгая иерархия: капитан, первый помощник капитана, второй помощник и т.д.
Пираты делят золото так: сначала капитан предлагает свой вариант дележа, затем пираты голосуют за или против: если дележ одобрен более чем половиной пиратов, то он принимается, а если нет, то капитана убивают, и дележ предлагает первый помощник...

Каждый пират хочет остаться в живых и получить побольше золота. При прочих равных пираты жаждут крови — чем больше других выбросят за борт, тем лучше!
Какой дележ будет реализован (предположим, что золотую монету не делят на меньшие части)?

Задача 6.3. Развод
Источник: Брамс
Джон и Бэтти нужно поделить виллу, яхту, неделимые акции (*Тигр: Контрольный пакет акций свечного заводика в Самаре*) и машину. Они условились на следующей процедуре дележа: каждый забирает себе один предмет согласно некоторой очерёдности. Предпочтения выглядят так (в порядке убывания ценности):
Бэтти: яхта, вилла, акции, машина. Джон: вилла, акции, машина, яхта.

1. Найдите равновесие, совершенное на подыграх, если очередность:

   - Бэтти-Джон-Бэтти-Джон;

   - Джон-Бэтти-Джон-Бэтти;

   - Джон-Бэтти-Бэтти-Джон;

   - Бэтти-Джон-Джон-Бэтти;

2. Изменим процедуру дележа. Джон и Бэтти одновременно называют предмет. Если их выборы различны, то они получают то, что назвали; если нет, то предмет называется спорным и откладывается в особую кучу. Джон и Бэтти называют предметы до тех пор, пока остаются неподеленные предметы. Спорные предметы делят, как в предыдущем пункте, забирая по очереди. Найдите равновесия, совершенные на подыграх, для тех же четырех вариантов очередности.

3. Во время дележа имущества Джон и Бэтти помирились, и решили культурно отдохнуть.

   Предпочтения (снова в порядке убывания ценности).

   Бэтти: театр, казино, бассейн, футбол. Джон: футбол, бассейн, казино, театр. Они по очереди вычеркивают нежелательную альтернативу, до тех пор, пока не останется только одна. Найдите равновесия по Нэшу, совершенные на подыграх, для тех же четырех вариантов очередности (фактически последний выбирающий не важен).

Задача 6.4. Рулетки [О]
Источник: [4, 2.6.23]
Есть три рулетки: на первой равновероятно выпадают числа 2, 4 и 9; на второй — числа 1, 6 и 8; на третьей — числа 3, 5 и 7. Сначала первый игрок выбирает рулетку себе, затем второй игрок выбирает рулетку себе из двух оставшихся. После этого рулетки, выбранные игроками, запускаются, и случай определяет победителя. Победителем считается тот, чья рулетка покажет большее число. Победитель получает от проигравшего 100 рублей.

1. Нарисуйте дерево игры (можно со случайным ходом природы, можно и без — с усредненным выигрышем);

2. Найдите совершенное на подыграх равновесие по Нэшу;

3. Каким игроком лучше быть в этой игре? Почему?

Тигр: сыр съедает вторая мышка?

Задача 6.5. Рулетки
Источник: [4, 2.6.25]
Снова три рулетки, на этот раз «четверные» с числами, соответственно: 2, 4, 6 и 9; 1, 5, 6 и 8; 3, 4,

5 и 7. Игроки по очереди выбирают себе рулетки. Выигрывает, тот, чья рулетка покажет большее число. Если выпадает одинаковое число, то рулетки крутятся снова.
Найдите совершенное на подыграх равновесие по Нэшу.

Задача 6.6.
В игре два игрока. Сначала первый игрок выбирает $x \in R$, затем второй игрок, зная выбор первого, выбирает $y \in R$. Функции выигрыша имеют вид: $u_I = -x^2 + xy + 9x$, $u_{II} = -y^2 - 4xy + 6y + 5x$.

1. Что представляет собой стратегия второго игрока?

2. Найдите равновесие по Нэшу, совершенное на подыграх;

3. Найдите хотя бы одно равновесие по Нэшу, не являющееся совершенным на подыграх.

Задача 6.7. Cheese-problem
В выборах участвуют n человек. Каждый из них по очереди выбирает свою предвыборную позицию, число $a_i \in [0; 1]$, или отказывается от участия в выборах. Ноль означает крайне левую позицию, а единица — крайне правую. После того, как каждый выбрал свою позицию, определяется победитель (возможно несколько). Каждый избиратель выбирает того кандидата, ближе к которому находится. Доля голосующих за кандидата определяется как длина отрезка его сторонников. Если несколько кандидатов заняли одинаковую позицию, то доля голосующих делится между ними поровну. Участие в выборах приводит к небольшим издержкам.

1. Найдите все равновесия по Нэшу, совершенные на подыграх, для $n = 2$.

2. Попробуйте $n = 3$!

3. [Т] И, наконец, произвольное n.

Тигр: первый, кто решит пункт «в», получит в качестве приза головку сыра или 10 баллов — на выбор.
Автор: вот такие сюрпризы есть у модели линейного города.

Задача 6.8. Кортес [О]
Кортес с бандой головорезов высадился на берегу. Кортес выбирает, нападать ли на деревушку или нет. Местная деревушка может либо сразу перейти в подчинение Кортеса, либо принять бой. Если деревушка примет бой, то выбор появится у Кортеса: либо драться до победного конца, либо после первых потерь бежать на кораблях обратно. Ценность деревушки для Кортеса — одна единица, ценность собственных головорезов — 2 единицы. Если Кортес будет драться до конца, то деревушка будет взята, но большинство головорезов погибнет в бою. Для жителей деревушки — главное остаться в живых, но и сохранить при этом независимость, конечно, желательно.

1. Нарисуйте дерево игры и найдите обратно-индукционный исход.

2. Нарисуйте дерево игры и найдите обратно-индукционный исход в случае, если Кортес ограничил свои возможности — сжег корабли.

3. Объясните, почему ограничение собственных возможностей приводит к таким последствиям

Задача 6.9. «Лохотрон-??»
Источник: [20]
Несколько (n) игроков участвуют в аукционе. По очереди они могут повышать последнюю названную цену на натуральное число рублей или отказываться от дальнейшей игры. Игра заканчивается, когда ни один игрок не хочет повышать цену. Приз ценностью v рублей получает игрок, предложивший наибольшую цену. Деньги платят *два* игрока: игрок, назвавший наибольшую цену, и

игрок, назвавший вторую по величине цену. У каждого игрока в распоряжении только b рублей. Для однозначности предположим, что игрок предпочитает просто потерять x рублей, нежели заплатить $(x+b)$ рублей и выиграть b рублей.

1. Найдите равновесие по Нэшу, совершенное на подыграх, для $v = 10$, $b = 30$ и $n = 2$;

2. Найдите равновесие по Нэшу, совершенное на подыграх для произвольных v, b и n.

Задача 6.10. Добрая мама
Источник: [10, 5.16]
У мамы и у дочки есть в распоряжении суммы денег 100 и 10, соответственно. Дочка выбирает текущий объем потребления $d - s$, все остальное s она кладет в банк под ставку $r = 10\%$ и получает деньги в следующем периоде. В следующем периоде расходы на потребление дочки складываются из её сбережений и трансферта t от её мамы, размер которого определяет мама. Личная полезность дочери имеет вид $U_d = \ln(d - s) + 0.7 \cdot \ln(s \cdot (1 + r) + t)$, где 0.7 — это дисконт фактор. Личная полезность мамы имеет вид: $U_m = ln(100 - t) + \alpha \cdot U_d$, где $\alpha > 0$ — альтруистичность матери.

1. Найдите t и s, если решение о величине t и s мама и дочка принимают одновременно.

2. Являются ли найденные s и t Парето-оптимальными?

3. Найдите t и s, если сначала дочь принимает решение о значении s, а затем, во втором периоде, мама, зная размер s, выбирает t.

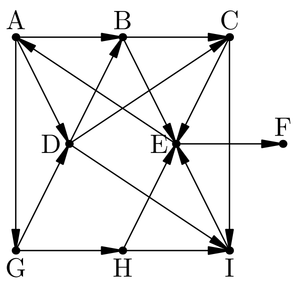
4. Являются ли новые s и t Парето-оптимальными?

Hint: для проверки оптимальности можно рассмотреть градиенты полезностей

Задача 6.11.
Источник: [22]
Два игрока играют в теннис. Сейчас счет «ровно» $(40 : 40)$. Т.е. партия будет продолжаться до тех пор, пока один игрок не наберет отрыв в два очка. Победитель партии получит приз, равный единице. При каждой подаче игроки одновременно выбирают уровень усилий. Если первый игрок выбрал уровень усилий $a \geqslant 0$, а второй игрок — уровень $b \geqslant 0$, то первый игрок выигрывает подачу с вероятностью $\frac{a}{a+b}$. Уровень усилий вычитается из полезности игрока. Дисконтирование отсутствует.

1. Найдите оптимальные стратегии.

2. Обобщите игру на случай необходимости отрыва в n очков.



Задача 6.12.
Первоначально фишка расположена в узле A. Игроки по очереди могут двигать фишку на один ход в направлении, указанном стрелочкой. Тот, кто не сможет сделать очередной ход, проиграл. Кто выигрывает (первый или второй игрок) при правильной игре?

Задача 6.13. Волшебная шкатулка-?
(где начало) **Источник**: [16, 2.111]??
Количество денег в волшебной шкатулке постоянно увеличивается! Время дискретно. В момент времени $t \in \{1; 2; 3; \ldots; 100\}$ там находится $2 \cdot t$ рублей. Каждый из двух игроков решает, когда ему потребовать деньги. Тот кто потребует деньги первым — получает сумму полностью, тот, кто потребует вторым — не получает ничего. Если требования поступают одновременно, то игроки делят сумму в шкатулке поровну. Если никто не потребует деньги к моменту $t = 100$, то деньги сгорают. Найдите равновесия по Нэшу, совершенные на подыграх.

Задача 6.14.
Счет в банке растет. В момент времени t ($t = 0, 1, \ldots, T$) его величина составляет $2t$ рублей. В каждый момент времени Муж и Жена независимо друг от друга выбирают, потребовать ли деньги, или нет. Если требует только один игрок, то он (она) забирает весь вклад. Если требуют оба, то вклад делится поровну. Если не потребовал никто, то начинается следующий период. Если никто так и не потребовал деньги к моменту T, то каждый получает по T рублей. Найдите SPNE.

Задача 6.15. Тигры и волшебная антилопа
Источник: forum on www.wilmott.com, brainteasers
На острове живут 99 тигров и одна вкусная волшебная антилопа.
Если тигр съест волшебную антилопу, то он сам превратится в волшебную антилопу. Мясо волшебной антилопы настолько вкусно, что любой тигр готов ради его вкуса на превращение в антилопу. Но ни один тигр не готов полностью расстаться с жизнью ради мяса антилопы. Тигры охотятся только в одиночку.
Что будет происходить на этом острове?

Задача 6.16.
Ребенок выбирает действие $x \in \mathbb{R}_+$. Доходы ребенка и родителей определяются этим действием, обозначим их $q(x)$ и $p(x)$, соответственно. Далее родители определяют величину трансферта t. Полезность ребенка определяется как $q(x) + t$, полезность родителей, как $\min\{q(x) + t, p(x) - t\}$, т.е. родители заботятся и о доходе ребенка.
Верно ли, что в равновесии по Нэшу, совершенном на подыграх, оптимальный выбор ребенка максимизирует семейное благосостояние?

Задача 6.17. Народ и правительство [O], Il faut que j'y songe encore
На первом шаге правительство обещает уровень инфляции π^d в следующем году. Затем народ определяет свои ожидания инфляции π^e. *Тигр: Что больше π^e или e^π?*
На третьем этапе правительство выбирает уровень инфляции π. Функция полезности правительства $U = -c\pi^2 - (y - y^p)^2$, где y^p — потенциальный уровень выпуска. *Тигр: А я и не знал, что правительство такое благородное!*
Совокупное предложение задано функцией $u = ay^p + b(\pi - \pi^e)$. Константы a, b и c — положительные.
Найдите равновесие по Нэшу и платежи, получаемые игроками, в следующих ситуациях:

1. Население верит правительству, а правительство не обязано исполнять свои обязательства.

2. Население верит правительству, а правительство исполняет свои обязательства.

3. Функция полезности населения имеет вид $U = -(\pi - \pi^e)^2$, а правительство исполняет свои обязательства.

4. Функция полезности населения имеет вид $U = -(\pi - \pi^e)^2$, а правительство не обязано исполнять свои обязательства.

5. Какой должна быть величина штрафа за неисполнение обязательств, чтобы в пункте 4 правительство было заинтересовано в их исполнении?

6. Сравните выигрыш правительства в случаях «в» и «г». Обратите внимание на то, что в случае «в» у правительства нет возможности нарушать обещание, а в случае «г» такая возможность появляется.

Задача 6.18. Труэль

[T] Три человека решили стреляться. Они одновременно делают выстрел, каждый сам выбирает, в кого целиться. Если после первого выстрела в живых осталось больше одного человека, то выжившие снова одновременно стреляют недруг в недруга. Труэль продолжается до тех пор, пока в живых не останется один человек или пока все не погибнут. Первый попадает с вероятностью 0,9, второй — с вероятностью 0,5, третий — с вероятностью 0,1.

1. В кого кому следует стрелять, чтобы максимизировать вероятность своей победы?

2. Найдите вероятность победы каждого игрока.

Задача 6.19. Дуэль.

Источник: [33]

Трое захотели в жёны одну и ту же девушку. Решили драться на дуэли. Дуэль протекает так: каждый период времени каждый из дуэлянтов выбирает, стрелять ли в воздух, либо в одного из своих соперников (т.е. 3 стратегии у каждого). Первый промахивается с вероятностью α, второй — с вероятностью β, третий — с вероятностью γ. Если после пальбы остался в живых более, чем один человек, то дуэль продолжается. Падший мёртвым получает 0, единственный живой — 1. Найдите равновесие, совершенное на подыграх. Может ли быть задача разрешена по доминированию? При каких значениях параметров? (Это очень громоздкая и сложная задача. Частичные решения будут частично оценены, конечно.)

Задача 6.20. Последовательная труэль

Стреляются трое: Афанасий (А), Борис (В) и Станислав (С). Вероятность попадания: А — 50%, В — 80%, С — 100%. Очередность стрельбы В-А-С-В-А-С-В-А-С... Т.е. сначала В стреляет в кого хочет, потом — А, если жив, стреляет в кого хочет, потом — С, если жив, стреляет в кого хочет и т.д. Труэль продолжается до тех пор, пока в живых не останется ровно один. Предположим, что специально стрелять в воздух никто не будет.

1. Как будут вести себя А, В и С, если каждый хочет выиграть?

2. Какие при этом будут вероятности выиграша для каждого игрока?

Задача 6.21. Ковбои

Ковбои в количестве n человек выстроились по окружности. Ковбои стреляют по очереди по часовой стрелке друг за другом (сначала стреляет ковбой номер один, затем ближайший живой и т.д.). Ковбой сам выбирает, в кого стрелять. Можно стрелять в воздух. Если ковбою безразлично в кого стрелять, то он стреляет равновероятно в одну из потенциальных жертв. Ковбои стреляют без промаха, но у каждого только один патрон. Каждый ковбой хочет остаться в живых и при прочих равных убить побольше других ковбоев.

1. Кто в кого будет стрелять? Чему будет равна вероятность погибнуть для каждого?

2. Изменится ли ответ, если стрелять в воздух нельзя?

3. Как изменится ответ, если вероятность попадания равна p?

Т Как изменится ответ, если патроны не ограничены?

Задача 6.22.
Источник: Коковин
Налоговая инспекция (или преступная группировка) (*Тигр: надо бы определиться!*) выбирает размер налога τ на объем продаж. Фирма выбирает объем продаж y. Выигрыш фирмы определяется по формуле $u_{firm} = (1-\tau)y - y^2$, выигрыш налоговой инспекции $u_{tax} = \tau y$.

1. Определите выигрыши игроков, если они принимают решения одновременнно.

2. Определите выигрыши игроков, если сначала принимает решение налоговая инспекция, а затем — фирма.

3. Найдите Парето-оптимальную точку. Прокомментируйте.

Задача 6.23. Передача информации в модели Курно.
Две фирмы по очереди выбирают объемы производства. Вторая фирма при выборе своего объема производства не знает объема, выбранного первой фирмой. После того, как обе фирмы произвели товар, рынок определяет цены в соответствии с функцией спроса $P(Q) = 1 - Q$, где $Q = q_1 + q_2$.

1. Что представляет собой стратегия второй фирмы? Найдите равновесие по Нэшу. Совпадает ли оно с равновесием по Нэшу совершенным на подыграх?

2. Предположим теперь, что первая фирма честно декларирует выбранный ею объем выпуска. Что представляет собой стратегия второй фирмы? Найдите равновесие по Нэшу, совершенное на подыграх. Будут ли другие равновесия по Нэшу?

3. Сравните платежи второй фирмы в обоих вариантах модели. Почему наличие дополнительной информации снижает платеж второй фирмы?

Задача 6.24. Сжигаем деньги
Сначала первый игрок выбирает, а не сжечь ли ему 10 рублей...
Тигр автору: Вы уверены, что он рациональный?
Второй игрок наблюдает действия первого, а затем игроки играют в одновременную игру:

	a	b
a	$(-100; -100)$	$(100; 0)$
b	$(0; 100)$	$(0; 0)$

1. Найдите все равновесия по Нэшу в одновременной игре;

2. Сформулируйте все стратегии игроков для игры в целом;

3. Найдите все равновесия по Нэшу;

4. Верно ли, что среди равновесий, совершенных на подыграх, будет равновесие, в котором первый игрок сжигает деньги?

Задача 6.25. Обещания
Сначала первый игрок выбирает, будет ли он правдиво декларировать свой будущий ход или не будет обещать ничего. После правдивой декларации или ее отсутствия первый и второй игроки играют в одновременную игру:

	a	b
a	$(1; 1)$	$(-1; 0)$
b	$(0; -1)$	$(0; 0)$

1. Найдите все равновесия по Нэшу в одновременной игре;

2. Сформулируйте все стратегии игроков для игры в целом;

3. Найдите все равновесия по Нэшу;

4. Найдите все равновесия, совершенные на подыграх

Задача 6.26. Две сверхдержавы
Две сверхдержавы играют в одновременную игру и выбирают, нажимать ли красную кнопку запуска стратегических ядерных ракет, или нет. *Тигр: Они доиграются...* Матрица игры имеет вид:

	$press$	not
$press$	$(-a; -a)$	$(1; -a)$
not	$(-a; 1)$	$(0; 0)$

1. Найдите все равновесия по Нэшу в этой игре;

2. Допустим, обе сверхдержавы создали системы раннего обнаружения запуска ядерных ракет. Если одна из сверхдержав не запустила ракеты, а другая — запустила, у незапустившей появляется возможность изменить свою решение. Отменить запуск по-прежнему нельзя. Сформулируйте новую игру и найдите в ней равновесия по Нэшу, совершенные на подыграх;

3. Найдите равновесие в том случае, когда систему раннего обнаружения использует только одна из стран.

Задача 6.27. Дуэль-1
Два мушкетера сражаются на шпагах за Прекрасную Даму. Лишний раунд означает дополнительные издержки, равные 1. Дисконт-фактор равен δ. Полезность от Дамы равна $v > 1$ для обоих претендентов. Если мушкетер решает покинуть поле боя в момент времени t при условии, что его конкурент готов продолжить бой, то полезности равны:
$L = -(1 + \delta + \delta^2 + \ldots + \delta^{t-1})$ — для покидающего;
$W = -(1 + \delta + \delta^2 + \ldots + \delta^{t-1}) + v$ — для готового продолжить схватку.
Если оба решают покинуть поле боя одновременно, то каждый получает платеж L (Прекрасную Даму нельзя ни делить пополам, ни дисконтировать!)

1. Рассмотрим профиль стратегий, в котором первый игрок не вступает в бой, а другой никогда первым не покидает поле боя. Является ли он равновесием по Нэшу, совершенным на подыграх? Просто равновесием по Нэшу?

2. Найдите симметричное равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях и проверьте, является ли оно совершенным на подыграх.

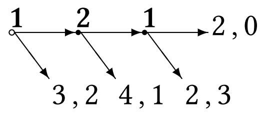
Коммент: Позвольте Вас отдисконтировать?
Тигр: Зачем второму дама, если он никогда не покидает поле боя?

Задача 6.28. Русская рулетка.
Источник: БЗИ, NES
Два офицера русской армии повздорили из-за одной барышни. Порешили так: в барабан шестизарядного револьвера случайным образом помещается одна пуля. После чего они по очереди пытаются выстрелить в себя. Впрочем, можно и спасовать, отказавшись тогда от притязаний на невесту. Выигравший идет делать предложение, проигравший остается лежать убитым, спасовавший возвращается в свой полк, что, конечно, для него предпочтительней.

1. Формализуйте этот конфликт как игру с совершенной информацией, т. е., без информационных множеств. При этом считайте, что застрелившийся получает полезность -1, спасовавший — 0, а выигравший — соответственно, a или b, т. е. участники по-разному оценивают качества будущей спутницы жизни. Предполагается, что $a > 0$ и $b > 0$.

2. Решите игру по доминированию, используя алгоритм Цермело — Куна. Какими будут равновесные стратегии в зависимости от параметров a и b? Удобно дать ответ в виде диаграммы в координатах (a, b), на которой указаны соответствующие области. Граничные случаи (когда кому-то все равно, как действовать) рассматривать не надо. *Тигр: Настоящего джентльмена, конечно, интересует настоящая дама,* $a \gg 1, b \gg 1$.

Задача 6.29. Когда алгоритм Цермело работает плохо.
Источник: БЗИ, NES
Найдите все совершенные по подыграм равновесия в игре. Не забыли про смеси?



Задача 6.30. Трагедия общины: динамическая модель (поход без завхоза)
Источник: БЗИ, NES

Имеется некий объем частных благ (например, запас продуктов питания в походе), который может потребляться T периодов. Полезность от разового потребления c единиц продукта составляет $\sqrt{c}$. Индивидуум ценит будущее потребление наравне с настоящим, т. е. дисконтирование отсутствует. Как известно, в этом случае он стремится разделить продукт поровну между T периодами. Предположим теперь, что участников два, а не один, и потребляют они из одного запаса. В каждом периоде потребление происходит одновременно, т. е. игроки независимо выбирают, сколько съесть (но не более половины от имеющегося).

1. Представьте это в виде игры в развернутой форме. Как устроено дерево?

2. Как бы вы искали совершенное по подыграм равновесие в этой игре? Указание: изобретите что-нибудь типа функций Беллмана, найдите равновесные стратегии потребления и выведите рекуррентные соотношения на параметры. Является ли равновесие оптимальным по Парето?

3. Пусть $T = 3$ и вначале имеется 290 единиц продукта. Какими будут равновесные траектории потребления?

Задача 6.31. Делим пирог.
Источник: БЗИ
Рассмотрим две модели «справедливой» дележки пирога между двумя соискателями.

1. Один режет пирог на две части, другой выбирает себе любую из них. Описать развернутую и нормальную форму. Каков наиболее вероятный исход игры? В каком смысле?

2. Один режет пирог на две части и пишет на них «1» и «2». Другой в это время, отвернувшись, говорит, какую часть ему выдать. Описать развернутую и нормальную форму. Как вы думаете, может ли произойти неравный раздел? Для кого из них? Risk neutrality? Как-нибудь обоснуйте свой ответ.

Задача 6.32. Крестики и нолики.
Источник: БЗИ
Рассматривается игра в обычные «крестики-нолики» (3×3). Для нас сейчас неважно, кто и когда

в ней выигрывает, нас интересуют лишь различные формы, в которых может быть представлена игра. Для простоты можете считать, что терминальными позициями являются только те, в которых все 9 клеток заполнены, т. е. игра продолжается даже в том случае, когда уже кто-то выиграл.

1. Сколько *позиций* имеет игра, иными словами, сколько существует расстановок крестиков и ноликов, которые могут возникнуть по ходу игры (и в ее конце)?

2. Сколько вершин в дереве игры (в развернутой форме)? Сравните с п. 1.

3. Подсчитайте, хотя бы приблизительно, сколько стратегий имеется у каждого участника в каждом из рассмотренных (позиционного и развёрнутого) представлений игры (см. пп. 1 и 2).

Задача 6.33. Захват рынка.
Источник: БЗИ
Две фирмы A и B производят некоторый товар. В каждый момент времени $t = 1, \ldots, 5$ каждая фирма может произвести единицу товара либо ничего не производить. Затраты на производство равны 3, а цена продажи определяется числом n активных фирм на рынке и составляет $6 - 2n$.

1. Опишите развернутую форму этой игры, стратегии участников и функции выигрыша. Сколько стратегий у каждой фирмы?

2. Те же вопросы, если, однажды выйдя с рынка, фирма уже не может вернуться.

3. Найдите равновесия по Нэшу, совершенные на подыграх.

Задача 6.34. Рабочий и управляющий.
Источник: БЗИ
В игре имеются два участника: рабочий и управляющий. Если рабочий работает, он теряет 1, а управляющий получает 3. Иначе рабочий ничего не теряет, а управляющий теряет 1. Управляющий назначает рабочему зарплату w.

1. Пусть рабочий и управляющий принимают свои решения одновременно. Нарисовать развернутую и нормальную форму. Внимание: правильно понять и формализовать игру — входит в задание!

2. Тот же вопрос для случая, когда рабочему известно, сколько ему будут платить. Как Вы думаете, чем кончится игра и кто сколько выиграет?

3. Найдите равновесие по Нэшу, совершенное на подыграх в этой игре.

Задача 6.35.
Источник: БЗИ
Веревки Одиссея: «commitment», мультиперсонное представление, иррациональность. Одиссей подплывая на корабле к острову Сирен, хотел послушать их сладкое пение, но знал, что всякий слушающий бросается в воду, плывет к ним и не возвращается. Этого он не хотел. Он приказал матросам залепить уши воском, а его самого привязать к мачте. Так он услышал Сирен, но остался капитаном.
Составить игру, годящуюся для объяснения этой ситуации.
Это какой-то бред. Я ничего не понял

Задача 6.36. Игра входа в отрасль.
Источник: БЗИ, НГУ
Пусть есть отрасль с функцией обратного спроса (ценой от суммарного объема) вида $p(Y) = 9 - Y$ и монополистом — старожилом в этой отрасли, с постоянными предельными издержками

$\dot{c}_1(y_1) = 1$ (проверьте, что монопольная цена $p^M = 5$). Пусть потенциальный новичок, входя в отрасль, должен сделать невозвратные начальные капиталовложения $K = 1$, и ожидает предельные издержки $\dot{c}_2(y_2) = 2$. Пусть отрасль может просуществовать два периода (можно обобщить на n) и дисконта нет: прибыли сегодня и завтра равноценны, альтернативное вложение капитала K невозможно. Старожил обещает новичку в случае входа добиться (повышением выпуска) снижения цены достаточно низко (< 2), чтобы заставить новичка прекратить производство, предполагая, что после этого новичок банкрот и во втором периоде можно сохранять монополию. Если же новичок войдет, то ожидается решение Штакельберга (т.е. $\text{SPE}_{Old,New}$): лидер-старожил установит выпуск раньше. Стоит ли верить этой угрозе или он блефует и можно входить? Обобщите задачу для различных $\dot{c}_2(y_2) \neq 2,\ K \neq 1$.

Задача 6.37. Игра «Возьми или оставь» («сороконожка» — повтор????)
Источник: БЗИ, НГУ
Пусть первый из двух игроков (Анна) может взять 4/5 общей прибыли (то есть \$4 из \$5 на ветви $take_{a1}$) на шаге 1, тогда игра закончится, а второму — Виктору — останется \$1. Либо можно оставить банк на столе ($leave_{a1}$). На шаге 2 прибыль удваивается (например, ведущим), и черед 2-го выбирать: взять ли 4/5 прибыли (то есть \$8 из \$10-и) и закончить тем самым игру, или оставить, и т.д. Предсказывая исход для конечной (скажем, по 3 хода каждого) игры по принципу SPE, PBE, или THPE Уточнить аббревиатуру, мы увидим, что игра тривиально закончится на 1-м шаге $take_{a1}$ с выигрышами (1,4). А по принципу решения $PBE(\varepsilon)$ она может дойти до конца с большой суммой прибыли. (Здесь $\varepsilon-$ вероятность не ниже которой ожидается от любого хода, благодаря случайному поведению типа иррациональности).
Надо сделать QRE и с рисунком. Где КАРТИНКА????

1. Покажите, что $\varepsilon > 1/7$ достаточно для продолжения игры до конца (точнее, продолжения рациональных ходов до узла V_3). Какое ε необходимо для этого же?

2. Пусть ситуация изменилась: игрок Victor слышал, что Анна в подобной игре из 10-ти ходов сделала 1 иррациональный (невыгодный, ошибочный), и ожидает, соответственно, вероятность иррациональности около $\alpha = 1/10$. Аналогично, Анна слышала, что Виктор в подобной игре из 30-ти ходов сделал 2 иррациональных хода, она ожидает вероятность иррациональности $\beta = 2/30$ (это окажется не то же, что 1/15!). Предположим, игроки считают рациональным *брать* банк, когда вероятность ошибки партнера больше 1/7 и ожидают от партнера такого же мнения. Очевидно, при такой «простоватой» рациональности, Анна на первом ходу ВОЗЬМЕТ (если не ошибется). Но если она ошибется, возьмет ли Виктор? Он может интерпретировать *оставление* Анной как ошибку, и тогда подправить свою субъективную вероятность ошибок А до величины (1+1)/(10+1)=2/11. Либо считать случившееся *оставление* рациональным ходом, и сделать отсюда вывод о текущих гипотезах ($\beta =?$) Анны относительно себя (Виктора). Независимо от того, верны ли эти гипотезы, выгодно ли теперь Виктору *оставлять* и пойдет ли игра до узла V_3?

3. По сравнению с предыдущей ситуацией, оставим Виктора «простым», а первого игрока предположим способным рассчитать предыдущую ситуацию. Станет ли он на первом шаге ОСТАВЛЯТЬ, независимо от своих гипотез о партнере (БЛЕФОВАТЬ)? Пойдет ли игра до 6-го хода?

4. Что если теперь оба игрока «сложные», и Виктор просчитывает возможность блефа первого (считающего второго простым), изменит ли это результат? И далее до бесконечености ассиметричное знание

Задача 6.38.
Либо переформулировать, либо выкинуть **Источник:** БЗИ, НГУ
В задаче «террорист» из учебника, рассмотрим, как выглядит SPE в более сложном случае: при

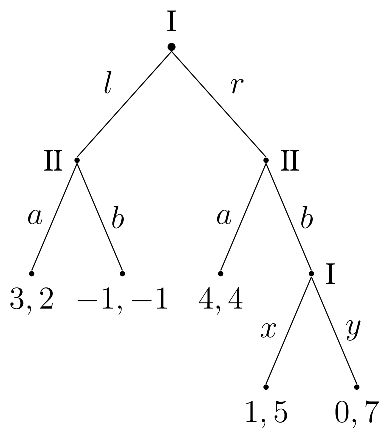
совпадении некоторых значений выигрышей и/или при несовершенной информации о ходах. Случай «C» описанной игры возможен, если террорист — психически особенный человек (что с ними бывает): ему все равно, жить или нет, но приятнее умереть или жить на Кубе. Тогда возникает много равновесий SPE (все стратегии), но ни одного SE, поскольку множество IND итерационно (слабо) недоминируемых стратегий включает неэквивалентные исходы: $IND = \{(N_Y, NB) \Rightarrow (2, 1);\ (N_Y, B) \Rightarrow (0, 1)\}$.

```
C. Case, when second          D. Case, when second player
can understand,         player can not understand, what the
1-st move was:       what the 1-st move was:
   Pilot   .  2                    Pilot   .   2
          / \ 1                          / \ 0.5
      N-Y /   \ Cuba            2, 0 N-Y /   \ Cuba 1  0
  2  0  /     \  1  0        0.5,1    /     \    2, 0
   1, 1.      . 2, 2    Terr-st      \ldots \ldots \ldots
 NoBomb/ \B  NB/ \Bombing            NB/ \B  NB/ \Bombing
      /   \   /   \                  /   \   /   \
UP=  2     0 1     0           UP=  2     0 1     0
UT=  1     1 2     2           UT=  0.5   1 2     0
(perfect information)       (imperfect information on moves)
```

Рис. 1: «Camicadze».

В случае «D» выигрыши различны, но неинформированность террориста позволяет ожидать от него любых ходов. В результате много равновесий SPE (все стратегии), но ни одного SE, поскольку множество IND итерационно (слабо) недоминируемых стратегий включает неэквивалентные исходы: $IND = \{(N_Y, NB) \Rightarrow (2, 0.5);\ (N_Y, B) \Rightarrow (0, 1)\}$.

Задача 6.39.
Вариация на тему игры с гранатой



1. Укажите, сколько стратегий у каждого игрока;

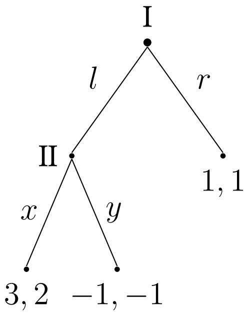
2. Приведите пример профиля стратегий, приводящего к игре $R - B - Y$, $L - A$ и $L - B$.

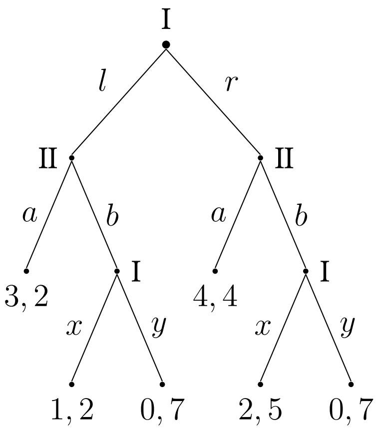
3. Переведите игру в матричную форму;

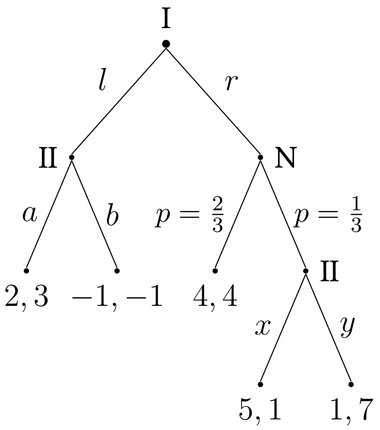
4. Найдите равновесия по Нэшу;

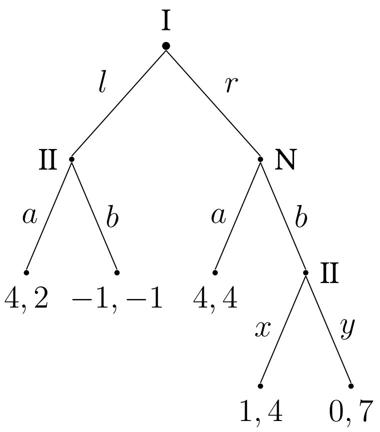
5. Укажите, какие из найденных равновесий по Нэшу являются совершенными на подыграх.

Задача 6.40.
В саду растут четыре дерева:





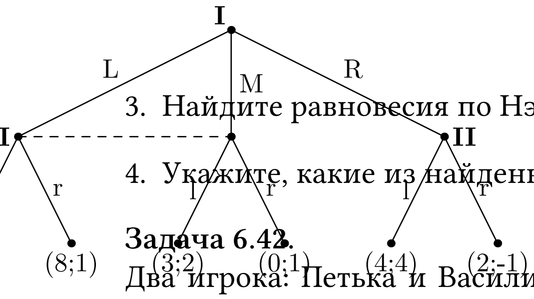




Найдите все равновесия по Нэшу;
Найдите все равновесия по Нэшу, совершенные на подыграх;

Задача 6.41. Меньше подыгр — легче считать! 1. Укажите, сколько стратегий у каждого игрока;

2. Переведите игру в матричную форму;



3. Найдите равновесия по Нэшу;

4. Укажите, какие из найденных равновесий по Нэшу являются совершенными на подыграх.

Задача 6.42.
Два игрока: Петька и Василий Иванович. ещё есть очень большая куча спичек, откуда игроки вытаскивают случайным образом спички по одной. Длина спичек равномерно распределена на отрезке $[0; 1]$. Игроки ходят по очереди: сначала Петька, затем Василий Иванович. Делая свой ход, каждый игрок знает всю предысторию игры. Ход игрока состоит в следующем: сначала игрок тянет одну спичку. Узнав её длину, он решает, тянуть ли ему вторую. Результат игрока — суммарная длина вытянутых им спичек, если она не больше единицы и ноль — иначе. Сначала Петька тянет одну или две спички, а затем В.И., зная результат Петьки, тянет одну или две спички. В игре побеждает игрок с наибольшим результатом.

1. Найдите равновесие Нэша, совершенное на подыграх.

2. [T] Решите задачу для случая трёх игроков, для n игроков Очень сложная??.

6.2. Вопросы для «любителей»

Задача 6.43. Быть или не быть?
Приведите пример игры с полной и совершенной информацией, в которой вычеркивание нестрого доминируемых стратегий может привести к потере равновесия совершенного на подыграх.

Задача 6.44. Обратно-индукционный исход и доминирование стратегий
Есть дерево игры с полной совершенной информацией. К нему применили обратно индукционный метод и получили множество A обратно индукционных исходов. Затем это дерево перевели в матричную форму и оказалось, что последовательным вычеркиванием строго доминируемых стратегий можно оставить только один исход b.
Возможно ли, что $b \notin A$? Возможно ли, что $b \neq A$?

Задача 6.45.
Источник: БЗИ, НГУ
Построить пример игры в развернутой и/или в нормальной форме, где $INDW \not\subseteq SPE$ или доказать, что это невозможно.

6.3. Доллар Рубинштейна

Задача 6.46. Равновесия по Нэшу в модели Рубинштейна.
Саша и Маша делят доллар по Рубинштейну. Т.е. сначала Маша предлагает свой вариант дележа, затем Саша соглашается или нет. Если он соглашается, то игра заканчивается, иначе Саша предлагает свой вариант и т.д. Доллар можно поделить в любой пропорции.

1. Приведите примеры равновесий по Нэшу, в которых:

- Маша предлагает поделить доллар поровну на первом шаге, а Саша соглашается;
- Маша предлагает весь доллар Саше на первом шаге, а Саша соглашается;
- Игра оканчивается на втором шаге.

2. Какие из Ваших примеров являются равновесиями, совершенными на подыграх?

Задача 6.47. Делим неделимый доллар! [O]
Источник: [4, 5.9.26]
Рассмотрите модель Рубинштейна с неделимым долларом (дисконт факторы игроков могут быть различными). Теперь либо весь доллар достается Саше (второму игроку), либо весь — Маше.
Постройте примеры совершенных подыгровых равновесий по Нэшу, в которых:
- Доллар достается Маше на первом шаге
- Доллар достается Саше на первом шаге
- Доллар достается Саше на втором шаге

Задача 6.48. Делим чуть-чуть делимый доллар.
Рассмотрите модель Рубинштейна, в которой доллар можно поделить только в пропорциях $(1:0)$, $(0:1)$, $(0,7:0,3)$ и $(0,4:0,6)$.
Постройте примеры совершенных подыгровых равновесий по Нэшу, в которых:
- Доллар будет поделен в соотношении $(0,7:0,3)$ на первом шаге
- Доллар будет поделен в соотношении $(0,4:0,6)$ на первом шаге
- Доллар будет поделен в соотношении $(0,7:0,3)$ на втором шаге

Задача 6.49.
Источник: [LSE, 1998]
Саша и Маша делят доллар Рубинштейна. Сначала вариант дележа предлагает Саша, если Маша не согласна, то предлагает она. Если и Саша не одобряет машин дележ, то оба игрока получают нулевые платежи. Маша нетерпелива, ее дисконт фактор равен $\frac{2}{3}$ (У Саши дисконта нет).

1. Найдите равновесие по Нэшу, совершенное на подыграх;
2. Найдите все равновесия по Нэшу;
3. Решите задачу в предположении, что на своем ходу Маша не может запросить себе долю больше той, что Саша запросил себе на первом ходу.

Задача 6.50.
Рассмотрите следующий вариант модели Рубинштейна.
У обоих игроков одинаковый дисконт-фактор. Число периодов неограничено. Если игрок соглашается с предлагаемым дележом, то игра окончена. Если игрок не соглашается с предлагаемым дележом, то с вероятностью $1 > p > 0$ игра оканчивается и никто не получает ничего, а с вероятностью $(1-p)$ — продолжается.
Найдите равновесие по Нэшу, совершенное на подыграх.

Задача 6.51. SPE в непрерывной игре: Дележ убывающего пирога
Источник: БЗИ, НГУ, (A.Rubinstein, 1959?1982?)

Уезжая из дома, мать оставила двум жадным сыновьям пирог, с таким условием. Сначала Андрей предложит дележ $a_1 \in [0,1]$ (свою долю), если Борис согласен, то так и будет, иначе через час Борис предложит дележ $b_2 \in [0,1]$ (свою долю). Если Андрей не согласен, он через час предложит новый дележ $a_3 \in [0,1]$, и так далее. Но с каждым часом полезность пирога убывает (возможно, от нетерпения и от засыхания пирога) с некоторым темпом, то есть через час остается $\alpha \in (0,1)$

для Андрея и $\beta \in (0,1)$ для Бориса. То есть, если, скажем, на третьей итерации они согласились на дележ (a_3, b_3); $a_3 + b_3 = 1$, то полезность Андрея от него будет $A(a_3) = \alpha^3 a_3$, а для Бориса она будет $B(b_3) = \beta^3 b_3$. Зная конечный период T, в течение которого пирог остается съедобен, нужно предсказать, на какой итерации и как (рациональные и жадные) братья договорятся (подобная игра очень типична в ситуации, когда две фирмы способны осуществить взаимовыгодный проект, но надо договориться о разделе прибыли, а время переговоров означает упущенную прибыль).
Для простоты будем считать $\alpha = \beta = 1/2$, T=4, и нарисуем дерево (если можно так выразиться) этой непрерывной по стратегиям игры:
Решение игры в конечном простом случае (общий случай, а также и бесконечный вариант игры рассмотрите самостоятельно) легко найти с помощью ступенчатой диграммы уровней полезностей, алгоритмом обратной индукции.
Упражнение. Предположите, что дисконты («коэффициенты терпения») Андрея α и Бориса β разные. Как и в чью пользу (терпеливого ли игрока) изменится решение? Обобщите решение для произвольного числа периодов T, и для бесконечного $T = \infty$, например, переходом к пределу. (Проверьте, что $A = (1-\beta)/(1-\alpha\beta)$, $B = (1-\alpha)\beta/(1-\alpha\beta)$.)

Задача 6.52.
Источник: [33]
Мама испекла пирог, и оставила его в духовке своим двум сыновьям. Потом она ушла в магазин на 3 часа, и наказала: каждые полчаса, начиная с момента закрытия за ней двери, пытаться делить пирог по принципу «один делит, другой одобряет». Если не одобряет, то пирог полчаса остывает в печи, а потом снова. Начинает предлагать старший сын, затем — по очереди. За время получаса пирог сохраняет долю α своих замечательных вкусовых свойств с точки зрения старшего брата, и β — с точки зрения младшего. Эти параметры общеизвестны. Если мама пришла, и обнаружила неподеленный пирог (в момент прихода мамы уже делить нельзя), то она его сходу съедает сама.

1. Найти равновесие, совершенное на подыграх;

2. Что, если мама ушла навсегда?

6.4. Разработка механизмов

Задача 6.53. Система наказаний
Источник: [14, p.60]
На маленькой фирме работает 10 человек. Каждый из них может работать либо старательно, либо «спустя рукава». Ни один работник не хотел бы быть уволенным. Работодатель видит качество работы каждого сотрудника и заинтересован в том, чтобы все работали старательно. Проблема заключается в том, что уволить можно не более чем одного сотрудника. Этот факт прекрасно известен работникам, они понимают, что если все будут плохо работать, то уволят только одного. Как построить систему угроз увольнений, чтобы каждый работал старательно? Недоформулировано! Дискретно ли?Можно ли смешанные стратегии? Какие выигрыши от них?

Задача 6.54. О Попе и работнике его Балде
Поп нанял Балду, чтобы тот предсказал ему погоду. Дождь будет с вероятностью p. Благодаря народным приметам Балда точно знает p. Поп величину p не знает. Балда выдает Попу свою оценку $\hat{p}$ вероятности дождя завтра.

1. Как будет вести себя Балда, если Поп выплачивает ему награждение по принципу: если дождь действительно был, то выплачивается $\hat{p}$, если дождя не было, то $1 - \hat{p}$?

2. Поп решил заставить Балду выдавать точные оценки. В случае дождя Поп платит $f(\hat{p})$, и $f(1-\hat{p})$ в случае сухой погоды. Какую f следует выбрать Попу?

Подсказка: при решении задачи Поп столкнется со странным дифференциальным уравнением, у которого много решений, но 9-ти классов церковно-приходской школы ему вполне должно хватить для подбора частного решения.

Задача 6.55. Заработок короля.
В стране n жителей, каждый из которых получает заработную плату в одну монету. Когда в стране победила демократия, король потерял свою власть, даже был лишен права голоса. Единственное, что он может — так это предлагать перераспределение заработной платы. Зарплата каждого жителя должна выражаться неотрицательным количеством монет, в сумме все зарплаты должны равняться n. Когда король предлагает перераспределение зарплаты, каждый житель, кроме самого короля, может проголосовать за, против или вообще не приходить на голосование. Новое распределение одобряется, если число голосов «за» строго больше числа голосов «против».
Каждый житель эгоистичен, голосует «за», если в новом проекте его зарплата растет, «против», если падает, и не приходит на голосование, если ему предлагается предыдущая зарплата.
Какую зарплату в результате получит хитрый король и сколько голосований ему потребуется?
Надо более чётко сформулировать всю задачу!

Задача 6.56.
Андрей, Вася и Боря хотят найти среднее арифметическое их зарплат, не раскрывая информацию о своих зарплатах друг другу. Найдите способ это сделать.

Задача 6.57. Покер в чате
Трое заядлых игроков в покер сидят в чате. Предложите процедуру раздачи карт, при которой каждый игрок знает свои карты и не знает карт соперника. Игроки абсолютно рациональны и обладают безграничными вычислительными возможностями, поэтому использование кодов с открытым ключом (типа RSA) недопустимо. В чате можно посылать сообщения, адресованные как всем сразу, так и конкретному лицу.

Задача 6.58. Пираты делят золото
Источник: [5]
Есть золотой песок и три пирата, но нет весов.
Предпочтения пиратов субъективны (действительно равные кучи могут казаться пирату неравными). Но предпочтения стабильны: если пират считал две кучи равными, и видит, что к первой досыпали песок, то он будет считать первую кучу большей. Каждый пират может делить кучу песка на равные кучи, сравнивать несколько куч, отсыпать из большей кучи песок так, чтобы она сравнялась с меньшей.
Предложите конечную процедуру справедливого дележа, при которой у пиратов не было бы зависти (каждый считал бы, что его часть не меньше, чем у других).[4]

---

[4] Комментарий: Для двух пиратов процедура выглядит так: первый делит кучи пополам по своему мнению, второй выбирает себе б**о**льшую по своему мнению, первый забирает оставшуюся. Каждый пират может гарантировать себе не меньше половины по своему мнению.

Примо Леви «Воспоминания смертника» пишет, что именно так делились пайки хлеба в концентрационном лагере «Аушвиц» в Польше во время Второй Мировой войны.

Гесиод в книге «Теогония» (700 лет до н.э.) описывает именно такой способ деления куска мяса между Прометеем и Зевсом (Прометей делил, Зевс выбирал).

Тигр: А у нас верхняя палата вносит законопроект, потом нижняя голосует, какой ей больше нравится...

Кодекс поведения пиратов обычно включал принцип «нет жертвы — нет платы». Заранее оговаривались доли, которые получал каждый член команды.

Сначала оплачивали работу хирурга (200-250 песо), корабельного плотника (100-150 песо), компенсации за увечья (600 песо за потерю правой руки, 500 — за потерю левой руки или правой ноги, 400 — за левую ногу и 100 — за глаз или палец). Остальное делилось на равные доли, причем капитан получал 5-6 долей, помощник — 2 доли, рядовые члены команды — по одной доли, юнга — половину доли.

Попытки присвоить сверх своей доли строго карались [32].

Задача 6.59.
Есть три брата и куча рутинной работы по дому, определенная мамой. Здесь работа — антиблаго. Придумайте процедуру дележа, при которой ни один брат не завидовал бы ни одному другому. Зависть появляется, если брат считает, что у другого работы меньше, чем у него самого.
Уточнения:
Мнения братьев субъективны (т.е. даже дележ, где каждый получает ровно по одной третьей работы, может вызывать зависть у каждого брата). Мнения братьев рациональны (часть меньше целого, транзитивность).
Каждый брат умеет:

1. делить работу на любое количество равных (по своему мнению) частей;

2. сравнивать объемы работ (по своему мнению);

3. при наличии двух неравных объемов работ — от большего объема работ отделять часть так, чтобы он сравнялся с меньшим [18].

Задача 6.60. Одновременный выстрел
Источник: Максим Петроневич
В шеренге бок о бок стоят n солдат. В ружье у каждого из них один патрон. В произвольный момент времени один из солдат получает приказ о том, что нужно всем одновременно выстрелить вверх. Для определенности будем считать, что время дискретно, т.е. поделено на отдельные моменты. Общаться солдаты могут очень ограниченным образом: в каждый момент времени солдат может коснуться плеча соседа слева, справа, обоих или никого. Каждый солдат может запомнить только ограниченный объем информации.
Верно ли, что существует некий минимальный объем запоминаемой солдатом информации, который позволяет выполнить приказ для любого n? Если да, то придумайте соответствующий алгоритм, если нет, то докажите. Ок, но лучше ещё уточнить

6.5. Повторяющиеся игры

- Доктор, доктор, мы его потеряли!!!
- Ну, не надо так переживать, у нас их ещё целая палата.

Задача 6.61. Двукратное повторение.
Источник: БЗИ
Рассмотрим одновременную игру G_0 с матрицей выигрышей

	X	Y
x	(5,5)	(1,6)
y	(6,1)	(0,0)

Представим теперь, что эта игра повторяется дважды. Все, что происходило в первом периоде, становится общим знанием во втором. Выигрыши первого и второго периодов суммируются (без дисконтирования). Обозначим эту двухпериодную игру через G.

1. Как устроено дерево этой игры? Как задаются стратегии участников?

2. Сколько имеется чистых совершенных по подыграм равновесий в G? Указание: нужно перебрать всевозможные варианты равновесий на подыграх второго периода, для каждого из них прибавить выигрыши к выигрышам первого периода и исследовать полученную однопериодную игру (будем обозначать ее за $\tilde{G}$).

3. Обратимся к смешанному расширению игры G (в поведенческих стратегиях). Пусть равновесные исходы подыгр второго периода зафиксированы и, таким образом, игра сведена к некоторой однопериодной игре $\tilde{G}$. Может ли профиль чистых стратегий, неравновесный в исходной игре G_0, участвовать на первом шаге в совершенном равновесии игры G? Может ли в одной и той же игре $\tilde{G}$ быть более одного равновесия, обладающего таким свойством?

4. Более сложный вопрос: сколько всего чистых и смешанных совершенных равновесий в игре G? Указание: достаточно выяснить, какие из игр $\tilde{G}$ имеют более одного равновесия. В этом может помочь пункт 3.

Задача 6.62. Достижимые платежи.

Матрица базовой игры имеет вид:

	t_1	t_2
l_1	$(4;1)$	$(4;0)$
l_2	$(6;5)$	$(3;1)$

. Выигрыш в повторяемой игре — сумма выигрышей за периоды? Решать через SPNE?

1. Изобразите графически, какие платежи достижимы в повторяемой игре;

2. Определите, являются ли достижимыми платежи $(4;2)$, $(3,5;0,5)$, $(5;2)$ и $(5;3)$.

3. Какие из указанных платежей могут быть реализованы на множестве смешанных стратегий?

4. [Т] Для каждого достижимого платежа придумайте «умную» стратегию, которая реализует данный платеж. *Тигр: Насколько умную?*

Задача 6.63. Средний и дисконтированный платежи.

Рассмотрим повторяемую игру, в которой базовая игра задана матрицей

	c	d
a	$(2;1)$	$(4;-4)$
b	$(-6;5)$	$(3;1)$

.

Дисконт-фактор $\delta = \frac{1}{3}$. Запишем несколько стратегий игроков:
A : в любой партии делать ход a;
C : в любой партии делать ход c;
AB : в партиях с нечетными номерами делать ход a, в партиях с четными номерами делать ход b;
DC : в партиях с нечетными номерами делать ход d, в партиях с четными номерами делать ход c.

Определите дисконтированный и средний платеж первого и второго игроков для следующих профилей: $(A;DC)$, $(AB;C)$ и $(AB;DC)$.

Задача 6.64. Повторяемая дуополия Бертрана

Дуополия Бертрана (т.е. фирмы назначают цену) повторяется бесконечное число раз. Предельные издержки обеих фирм равны нулю. Рыночный спрос описывается функцией $Q = \max\{a - bP, 0\}$, где $a > 0$ и $b > 0$. Весь спрос достается фирме, назначающей наименьшую цену; если фирмы назначили одинаковую цену, то спрос делится между ними поровну.

1. Найдите все значения дисконт-фактора δ, при которых монопольная цена может быть реализована с помощью стратегий переключения;

2. Как изменится ответ, если число фирм будет равно n?

Задача 6.65. Стратегии переключения и кнута и пряника

Матрица базовой игры имеет вид: (1)

	c	d
a	$(2;1)$	$(4;0)$
b	$(1;5)$	$(3;4)$

. (2)

	c	d
a	$(1;2)$	$(10;0)$
b	$(-2;4)$	$(7;3)$

.

Заметим, что хотя в базовой игре a, b, c и d являются стратегиями игроков, в повторяемой игре это не стратегии, а всего лишь ходы!

1. Сформулируйте стратегии переключения для обоих игроков;

2. Сформулируйте стратегии кнута и пряника для обоих игроков Лучше определения дать самим;

3. Найдите, при каких значениях дисконт-фактора стратегии переключения будут составлять совершенное подыгровое равновесие по Нэшу;

4. Найдите, при каких значениях дисконт-фактора стратегии кнута и пряника будут составлять совершенное подыгровое равновесие по Нэшу;

5. Найдите, при каких значениях дисконт-фактора стратегия кнута и пряника первого игрока и стратегия переключения второго игрока будут составлять совершенное подыгровое равновесие по Нэшу.

Задача 6.66. Повторяемая игра

	A	B	C
A	$(3;3)$	$(3;5)$	$(0;0)$
B	$(5;3)$	$(2;2)$	$(0;0)$
C	$(0;0)$	$(0;0)$	$(1;1)$

Стратегия $AB - C$ формулируется так:
Играть ход A в четных партиях и ход B — в нечетных до тех пор, пока исходом игры является $(A;B)$ или $(B;A)$. Если произойдет исход, отличный от $(A;B)$ или $(B;A)$, то далее всегда играть ход C.
Стратегия $BA - C$ формулируется так:
Играть ход B в четных партиях и ход A — в нечетных до тех пор, пока исходом игры является $(A;B)$ или $(B;A)$. Если произойдет исход, отличный от $(A;B)$ или $(B;A)$, то далее всегда играть ход C.

1. При каких значениях дисконт-фактора пара стратегий $(AB - C; BA - C)$ является равновесием по Нэшу?

2. Совершенным подыгровым равновесием по Нэшу?

Задача 6.67. Коровы
В деревне живут пять крупных фермеров. Каждый фермер решает, сколько коров купить. *Тигр: Как специалист, уверяю: коровы бесконечно делимы, непрерывны, а, если помыть лапы перед обедом, то и всюду дифференцируемы!* Коровы пасутся на общем Большом Пастбище. Если на пастбище пасется более ста коров, то ни одна корова не дает молока. Если пасется N коров, $N < 100$, то каждая приносит $M_i = 10 - 0,1N$ литров молока.

1. Найдите равновесие по Нэшу и оптимальные по Парето точки в этой игре;

2. Пусть данная игра повторяется каждый год. При каких значениях дисконт-фактора Парето-оптимальный исход, в котором фермеры получают одинаковую выручку, может быть реализован в каждой игре?

3. Существует ли такой дисконт фактор и совершенное подыгровое равновесие по Нэшу, что каждый год только один из фермеров покупает коров?

   Тигр: Редактор сказал, что дисконт-фактор пишется через дефис.

   Автор: Пусть сам задачник составляет!

Задача 6.68. Как велик соблазн?
Проверить: во второй раз первый игрок не играет l_1? Как во второй раз он может сыграть l_4?
Рассмотрим следующую матричную игру (величина $p > 3$):

	t_1	t_2	t_3	t_4
l_1	$(3;3)$	$(0;p)$	$(0;0)$	$(-1;0)$
l_2	$(p;0)$	$(1;1)$	$(0;0)$	$(-1;0)$
l_3	$(0;-1)$	$(0;-1)$	$(1;0)$	$(-1;-1)$
l_4	$(0;0)$	$(0;0)$	$(0;0)$	$(0;1)$

Найдите все равновесия по Нэшу в чистых стратегиях в базовой игре;
Пусть теперь данная игра повторяется два раза и первый игрок придерживается стратегии:

$$s_1\left(h^t\right) = \begin{cases} l_1, & t=1 \\ l_3, & t=2,\ a^1 \in \{(l_1,t_2);(l_1,t_3);(l_1,t_4)\} \\ l_4, & t=2,\ a^1 \in \{(l_2,t_1);(l_3,t_1);(l_4,t_1)\} \\ l_2, & \end{cases}$$

Второй игрок придерживается стратегии:
В первой партии сыграть t_1. Если в первой партии был сыгран исход $(l_1;t_1)$ или оба игрока отклонились от стратегий этого исхода, то сыграть t_2. Если в первой партии от исхода $(l_1;t_1)$ отклонился первый игрок, то сыграть t_4. Если в первой партии от исхода $(l_1;t_1)$ отклонился второй игрок, то сыграть t_3.

1. Формализуйте стратегию второго игрока (по примеру стратегии первого);

2. При каких p Здесь всё ещё $p > 3$? указанная пара стратегий будет совершенным подыгровым равновесием по Нэшу? Просто равновесием по Нэшу?

Задача 6.69. Фиктивная игра (fictitious play) [TO]
Источник: Sloth
Рассмотрим игру:

	m_1	m_2
l_1	$(2;0)$	$(0;2)$
l_2	$(0;1)$	$(1;0)$

1. Найдите все равновесия по Нэшу в этой игре.

   Для краткости будем обозначать стратегии игроков одним числом — вероятностью выбора первой стратегии. Т.е. профиль стратегий задается парой чисел $a = (x;y)$, где x — вероятность, с которой первый игрок выбирает стратегию l_1, а y — вероятность выбора стратегии m_1 вторым игроком. Функции наилучшего ответа обозначим через $b_1(y)$ и $b_2(x)$, соответственно (если игрок безразличен между двумя стратегиями, то положим значение функции равным $\frac{1}{2}$Это ещё почему). Назовем *начальной теорией игры* профиль $t^0 = (x^0;y^0) = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. *Тигр: Не знаешь, как сыграть — подбрось монетку.*

2. Найдите наилучший ответ каждого игрока на данную теорию игры.

   Обозначим этот ответ $b(t^0)$. *Теорией игры после первого раунда* (one-round updated theory) назовем среднее между начальной теорией и наилучшим ответом на нее. Так могут думать игроки после первого опыта игры: $t^1 = \frac{1}{2}t^0 + \frac{1}{2}b(t^0)$. Аналогично, *теория игры после k-го раунда* формируется по принципу: $t^k = \frac{k}{k+1}t^{k-1} + \frac{1}{k+1}b\left(t^{k-1}\right)$. Игроки придают больший вес более длительному прошлому и делают поправку на оптимальный ответ.

3. Сходится ли последовательность $\left\{t^k\right\}$? Если да, то к чему?

4. К чему будет сходиться $\{t^k\}$ при других начальных теориях игры?

5. Пусть стратегия i-го игрока $t_i^\infty = \lim_{k\to\infty} t_i^k$ приписывает положительный вес чистой стратегии a_i. Докажите, что a_i — наилучший ответ на бесконечное количество теорий t_{-i}^k. Т.е. существует подпоследовательность теорий, такая, что a_i — наилучший ответ на любую из них.

6. Пользуясь предыдущим результатом, докажите, что a_i — наилучший ответ на t_{-i}^∞. Верно ли, что из этого следует, что t^∞ — равновесие по Нэшу?

7. Обобщите Ваше доказательство на случай произвольной игры (2×2).

8. Рассмотрите игру (Shapley's Shimmy)

	m_1	m_2	m_3
l_1	$(0;0)$	$(0;1)$	$(1;0)$
l_2	$(1;0)$	$(0;0)$	$(0;1)$
l_3	$(0;1)$	$(1;0)$	$(0;0)$

. Нарушается ли сходимость в данном случае? Почему?

Задача 6.70. Какая стратегия лучше?
С помощью компьютера проведите симуляцию, определяющую, какая стратегия в классической дилемме заключенного лучше, «Зуб за зуб», стратегия переключения, стратегия кнута и пряника, случайная стратегия и т.д. Имеется поле размером некоторого размера (например, 100×100), в каждой ячейке которого живет индивид, играющий определенную стратегию. Между индивидом и его соседями проводятся фиктивные партии, и определяется победитель, получивший наибольший дисконтированный платеж. Индивид перенимает стратегию самого удачного своего соседа. По очереди перебираются все клетки и начинается следующий раунд.
В начале игры стратегии предписываются случайным образом.
Мелкие детали, отсутствующие в условии, придумайте самостоятельно.
Тигр: А лично мне интересно — кто же, все-таки, победил в битве полов? Автор: а что это за битва?

Задача 6.71.
В задачи на придумать?
Придумайте минимум пять стратегий в бесконечно повторяемой игре, не совпадающих со стратегией переключения.

Задача 6.72.
Источник: LSE, 1996
Базовая игра повторяется два раза без дисконтирования. Может ли платеж $(4;4)$ быть получен в первой партии в совершенном подыгровом равновесии по Нэшу? Если да, то укажите соответствующий профиль стратегий.

	a	b	c
a	$(3;1)$	$(0;0)$	$(5;0)$
b	$(2;1)$	$(1;2)$	$(3;1)$
c	$(1;2)$	$(0;1)$	$(4;4)$

Задача 6.73.
Источник: LSE, 2002
Следующая базовая игра повторяется неограниченное число раз с дисконт-фактором δ, одинаковым для обоих игроков:

	a	b	c
a	$(9;9)$	$(0;0)$	$(0;0)$
b	$(12;0)$	$(6;5)$	$(0;0)$
c	$(0;5)$	$(0;0)$	$(1;2)$

Стратегия Q
Начать игру в *фазе 1*:
Сделать ход a. Если исходом партии стал $(a;a)$, то вернуться к фазе 1, иначе перейти к фазе 2
Фаза 2: Играть ход b в каждой партии.
Стратегия P
Начать игру в *фазе 1*:
Сделать ход a. Если исходом партии стал $(a;a)$, то вернуться к фазе 1, иначе перейти к фазе x.
Фаза x :
Сделать ход c. Если исходом партии стал $(c;c)$, то вернуться в фазу 1, иначе перейти к фазе 2. *Фаза 2*: Играть ход b в каждой партии.

1. При каких δ профиль стратегий $(Q;Q)$ — равновесие по Нэшу, совершенное на подыграх?

2. При каких δ профиль стратегий $(P;P)$ — равновесие по Нэшу, совершенное на подыграх?

Задача 6.74.
Рассмотрим повторяемую игру с общим дисконт-фактором δ и матрицей базовой игры вида

	c	d
c	$(2;6)$	$(-1;3)$
d	$(4;2)$	$(1;5)$

Перенести перед первой задачей данного раздела Комментарий: c и d — это ходы, а не стратегии; стратегия в повторяемой игре — это указание игроку, какой ход делать в партии с номером n в зависимости от того, что случилось в предыдущих партиях. Подыгра — это все партии, следующие за заданной предысторией. Дисконтированные платежи игроков в подыгре обычно рассчитывают на момент вступления игроков в подыгру.
Петя (первый игрок) использует следующую стратегию: В 1-ой партии сделать ход c;
В n-ой партии $(n \geqslant 2)$
— сделать ход c, если n — нечетное число;
— скопировать ход противника в $(n-1)$ -ой партии, если n — четное число.
Вася (второй игрок) использует следующую стратегию:
В 1-ой партии сделать ход d; Во 2-ой партии сделать ход c.
В n-ой партии $(n \geqslant 3)$ скопировать ход противника в $(n-2)$-ой партии.

1. Выпишите исходы первых девяти партий. Найдите дисконтированный платеж первого игрока в игре в целом.

2. Допустим, что игра была начата другими игроками, которые сыграли в первых трех партиях последовательность исходов $\{(AA), (cd), (cc)\}$. Петя и Вася продолжают игру начиная с 4-ой партии, используя свои стратегии. Какие исходы будут сыграны в партиях №4-9?

3. Как сыграют Петя и Вася в подыгре, начинающейся после $\{(dd), (dd)\}$? Выпишите исходы партий №3-9. Найдите дисконтированный платеж Васи в подыгре.

4. Как сыграют Петя и Вася в подыгре с предысторией $\{(dd), (cc), (dd)\}$? Найдите дисконтированный платеж Пети в подыгре.

   Комментарий: вопросы «б» и «в» спрашивают об одном и том же, просто по-разному сформулированы. Почему?

Задача 6.75.
Рассмотрим повторяемую игру с дисконт-фактором $\delta = 0,5$ и матрицей базовой игры вида

	c	d
c	$(2; 2)$	$(-1; 2)$
d	$(2; -1)$	$(0; 0)$

Петя (первый игрок) и Вася (второй игрок) используют одинаковую стратегию: В 1-ой партии сделать ход c;
В n-ой партии ($n \geqslant 2$):
— сделать ход c, если во всех предыдущих партиях противник делал ход c;
— сделать ход d, если хотя бы в одной предыдущей партии противник сделал ход d;
Эта стратегия называется «*наивной стратегией переключения*» («*naive grim trigger*»).

1. Какие исходы будут происходить в партиях? Рассчитайте платежи игроков.
2. Может ли Петя, используя другую стратегию, получить больший платеж?
3. Верно ли, что указанная пара стратегий является равновесием по Нэшу (не обязательно совершенным на подыграх)?
4. Как сыграют Петя и Вася в подыгре с предысторией $\{(cc), (cd), (cc)\}$?
5. Рассчитайте платежи игроков в этой подыгре.
6. Может ли Вася увеличить свой выигрыш в рассматриваемой подыгре?
7. Является ли указанная пара стратегий равновесием по Нэшу, совершенным на подыграх? при условии именно таких стратегий?

Задача 6.76.
Рассмотрим повторяемую игру G с дисконт-фактором δ и матрицей базовой игры вида

	c	d
c	$(2; 2)$	$(-1; 3)$
d	$(3; -1)$	$(0; 0)$

Петя (первый игрок) использует следующую стратегию: В 1-ой партии сделать ход c;
В n-ой партии ($n \geqslant 2$):
— сделать ход c, если во всех предыдущих партиях был сыгран исход (cc);
— сделать ход d, если хотя бы в одной предыдущей партии не был сыгран исход (cc);
Эта стратегия называется «*стратегией мгновенного переключения*» («*grim trigger*»).
Вася (второй игрок) также использует стратегию мгновенного переключения.
Рассмотрим три подыгры: G_1 — подыгру с предысторией $\{(cc), (cd), (cc)\}$, G_2 — подыгру с предысторией $\{(dd), (cc), (cc), (cc)\}$ и G_3 — подыгру с предысторией $\{(cc), (cc), (cc)\}$.

1. Какие исходы будут происходить в самой игре G?
2. Какие исходы будут происходить в подыгре G_3?
3. Какие исходы будут происходить в подыгре G_1?
4. Выгодно ли Пете в одиночку использовать другую стратегию в подыгре G_1? Васе?
5. Какие исходы будут происходить в подыгре G_2?

6. Выгодно ли Пете в одиночку использовать другую стратегию в подыгре G_2? Васе?

   Пункты выше очевидны и похожи на предыдущие задачи!!!

Т?? Для данной игры докажите следующее утверждение: Если при данном δ пара стратегий переключений равновесна по Нэшу, то она также является равновесием по Нэшу, совершенным на подыграх. разобрать!

Задача 6.77.
Рассмотрим повторяемую игру G с дисконт-фактором δ и матрицей базовой игры вида

	c	d
c	$(2;2)$	$(-1;3)$
d	$(3;-1)$	$(0;0)$

Некоторые стратегии можно записывать в алгоритмической форме. Рассмотрим пример. Стратегия первого игрока имеет вид:
Начать 1-ую партию в состоянии 1.
В состоянии 1 сделать ход c.
Из состояния 1 перейти в:
- состояние 2, если был сыгран исход (cc);
- состояние 1, если был сыгран исход (cd);
- состояние 1, если был сыгран исход (dc);
— состояние 2, если был сыгран исход (dd);
В состоянии 2 сделать ход d.
Из состояния 2 перейти в:
- состояние 1, если был сыгран исход (cc);
- состояние 2, если был сыгран исход (cd);
- состояние 2, если был сыгран исход (dc);
— состояние 1, если был сыгран исход (dd);
Алгоритм первого игрока можно коротко записать табличкой:

	Состояние 1	Состояние 2
Ход	c	d
при (cc)	2	1
при (cd)	1	2
при (dc)	1	2
при (dd)	2	1

Алгоритм второго игрока имеет вид Лучше — картинка!!!:

	Состояние 1	Состояние 2
Ход	c	d
при (cc)	1	2
при (cd)	1	2
при (dc)	1	2
при (dd)	2	1

Второй игрок, также как и первый, начинает 1-ую партию в состоянии 1.

1. Какие исходы будут сыграны в игре G?

2. В каком состоянии оказались бы игроки, если бы в первой партии был сыгран исход (cd)?

   Комментарий: сами игроки, конечно, такой исход бы в 1-ой партии не сыграли.

3. В каком состоянии оказались бы игроки, если бы в первых двух партиях были сыграны исходы $\{(cd), (dd)\}$?

4. Какие исходы будут сыграны в подыгре с предысторией $\{(cd), (dc), (cc)\}$?

5. Какие исходы будут сыграны в подыгре с предысторией $\{(cd), (dc), (cc), (dd)\}$?

Задача 6.78.
Запишите в алгоритмическом виде (с помощью таблички) следующие стратегии:

1. Стратегию «Всегда делать ход c».

2. Наивную мгновенную стратегию переключения;

3. Стратегию переключения;

Задача 6.79.
Как-то конспективно слишком. Выкинуть? В чём задача? Поиск NE, SPNE в бесконечно повторяемой игре:
Стратегия:
В первой партии игреать с (можно менять)
В n-ой партии:
Если в предыстории только (c, c), то сыграть c;
Если в предыстории только (c, d) или (d, c), (только из этой пары или только одно из них? то играть c в четной партии и d в нечетной партии;
Иначе играть d.
Стратегия антипереключения:
В первой партии сыграть d;
Если в предыстории только (d, d), то играть d;
Иначе сыграть c.

Задача 6.80.
Рассмотрим антагонистическую игру G:

	a	b
a	G	2
b	-1	10

Если происходит исход (a, b), (b, b) или (b, a), то игра сразу заканчивается.
Если оба игрока выбирают a, то игра начинается заново. Но платежи дисконтируются с коэффициентом $\delta = 0.5$. Если исход (a, a) выбирается ещё раз, то игра опять начинается заново, и платежи дисконтируются повторно, уже с дисконтом 0.25, и. т.д. Если оба игрока выбирают a бесконечное количество раз, то каждый получает полезность 0.
Найдите равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях.
Hint: предположите, что у игры существует цена v...

Задача 6.81. Суперравновесия.
Источник: БЗИ
Рассмотрим игру с матрицей выигрышей

	a	b
A	(0,2)	(2,3)
B	(1,0)	(3,1)

1. Пусть каждый участник применяет стратегию наказания Nash reversion («один раз отклонишься — впредь буду всегда играть равновесие Нэша»). Какие профили *коррелированных* выигрышей можно реализовать таким образом как равновесия в бесконечно повторяющейся игре?

2. Изобразите на плоскости множество коррелированных выигрышей, достижимых в суперравновесиях в силу Народной теоремы.

3. Рассмотрим такую попытку реализовать выигрыши $(2, 3)$: в начальный момент играется (A, b), а далее игрок 1 играет A, если на предыдущем ходу игрок 2 сыграл b и B, если a; игрок 2 действует симметричным образом: a, если B и b, если A. Является ли эта пара стратегий равновесием Нэша в бесконечно повторяющейся игре (при δ, достаточно близком к 1)? Если да, то является ли равновесие совершенным по подыграм?

Задача 6.82. Затянувшийся семейный спор.
Источник: [33]
Рассмотрим стандартный семейный спор, когда ФФ=(3,2); ФТ=(1,1); ТФ=(0,0); ТТ=(2,3). Возможно ли, что при его многократном (но конечном) повторении совершенное на подыграх равновесие будет таким, что:

1. в первом периоде будет сделан ход ФТ;

2. в первом периоде будет сделан ход ТФ?

Опишите пример, или докажите обратное.

6.6. Динамические игры с несовершенной информацией

You might ask, «Will reading this book help me make money?» A true game-theoretic answer might be that since you have probably already bought this book, I don't really care what benefit you would receive from reading it, so why should I bother answering the question?
James Miller, Game theory at work [14]

Задача 6.83. Судья и потерпевший
Ущерб — случайная величина v, равновероятно принимающая любое значение из $\{0; 1; \ldots; 99\}$. Потерпевший точно знает величину ущерба v, а судья знает лишь распределение. Потерпевший выбирает один из двух вариантов: честно задекларировать величину ущерба или не говорить ничего. Судья выбирает величину компенсации R.
Полезность потерпевшего $U_1 = R - v$. Полезность судьи $U_2 = -(v - R)^2$.
Формализуйте игру и найдите равновесия по Нэшу, совершенные на подыграх.

Задача 6.84. Снова конверты
Десять неотличимых друг от друга конвертов. В каждом из девяти лежит по 1000 рублей, в десятом не лежит ничего. Маша выбирает наугад один из десяти конвертов и тайно от Пети вскрывает его. Петя, по-прежнему не зная о содержимом конверта, назначает цену. Если Маша согласна с ценой, то конверт переходит к Пете, а оговоренная цена уплачивается Петей. Если Маша не согласилась с ценой, то конверт остается у нее.
АС: Какая-то ... Ясно, что $p = 0$!

1. Найдите все равновесия по Нэшу в чистых стратегиях;

2. Найдите все равновесия по Нэшу в поведенческих стратегиях;

3. Изменится ли результат игры, если сразу после вскрытия конверта Маша дополнительно будет выбирать, предоставлять ли Пете право выкупа?

Задача 6.85. Два коллекционера
Источник: [6]??
Два известных коллекционера хотят заполучить одну картину. Оба оценивают для себя эту картину в 10 миллионов рублей. Аукцион проходит по следующим правилам:

Игроки по очереди выбирают, повысить ли ставку на пол-миллиона или выйти из аукциона (при этом картина достается сопернику). Когда аукцион окончился, оба игрока платят последнюю названную ими цену. Если игроки повышают ставку постоянно, то их платежи равны минус бесконечности.

1. Найдите два равновесия по Нэшу в чистых стратегиях;

2. Найдите совершенное подыгровое равновесие по Нэшу следующего вида: первый игрок в каждом раунде повышает ставку с вероятностью p, а второй — с вероятностью q. Сколько в таком равновесии стоит право первого хода?

3. Есть ли в игре другие равновесия по Нэшу? АС: Дык в пункте (а) есть! Или имеются в виду совершенные на подыиграх

Задача 6.86. «Лохотрон-??»
У n индивидов есть уникальная возможность получить чудо-швабру! Только у нас! В каждом раунде индивиды одновременно решают, внести ли дополнительно один рубль, либо выйти из игры. Внесенные деньги не возвращаются. Чудо-швабру ценности ν рублей получает последний оставшийся. Если несколько игроков вносят деньги бесконечно долго, то их выигрыши равны минус бесконечности.

1. Найдите равновесия по Нэшу, совершенные в подырграх, в чистых стратегиях;

2. Как изменится ответ, если индивиды принимают решения по очереди?

Задача 6.87. Ультиматум [O]
Два брата снова делят пирог. Старший предлагает, как его поделить. Затем младший одобряет, или не одобряет дележ. Если младший не одобряет дележ, то мама уносит пирог на работу.

1. Найдите все совершенные подыгровые равновесия по Нэшу;

2. Мама уже разрезала пирог на n частей! Теперь старший брат предлагает, кому сколько кусочков достанется. Найдите все совершенные подыгровые равновесия по Нэшу;

3. Что происходит, если n стремится к бесконечности?

4. Найдите совершенные подыгровые равновесия в непрерывном и дискретном вариантах «Ультиматума», если братья завидуют друг другу, т.е., например, когда первому брату досталась доля x, он получает удовольствие в размере $x - \beta(1-x)$, где $\beta \in (0; 1)$ — коэффициент зависти.

Задача 6.88. Простейший покер
Маша и Саша положили на кон по одному доллару. Маша берет из колоды одну карту. Известно, что выигрышная для Маши карта придет с вероятностью p. Узнав, какая карта ей досталась, Маша может либо сразу открыть карту, либо удвоить ставку. Если ставка удвоена, то Саша может либо отказаться от удвоения ставки (и проиграть один доллар), либо поддержать удвоение ставки. Затем карта открывается.

1. Формализуйте игру и найдите АС: сильное или слабое? секвенциальное равновесие в зависимости от p.

   Тигр: Во многих книжках авторы пишут «секвенциальное равновесие», хотя имеют ввиду не более, чем равновесие по Нэшу. Я не знаю почему, наверное, звучит похоже на «сексуальное».

2. Постройте график зависимости цены игры от p.

3. При каком p игра справедлива, если ставка увеличивается не вдвое, а в n раз?

4. Попробуйте поиграть со своей девушкой (молодым человеком)!

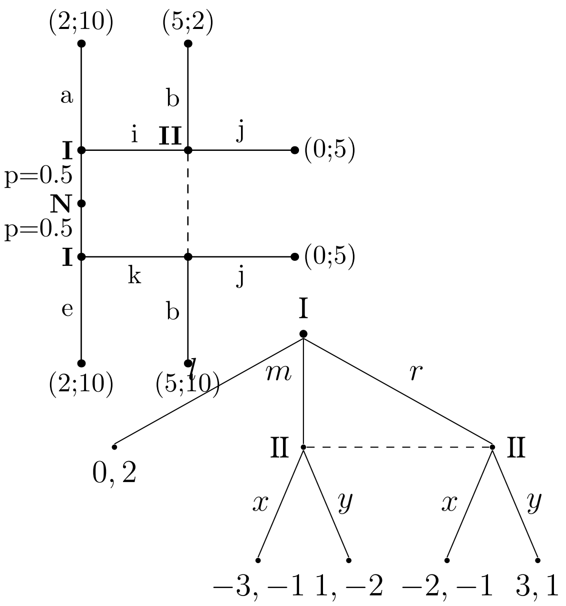
   АС: нецензурный комментарий

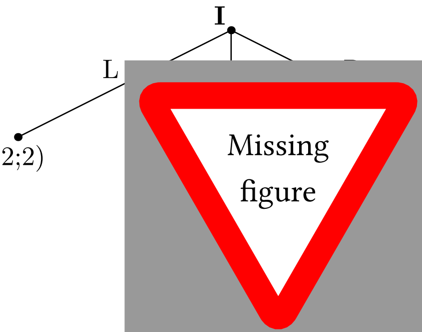
Задача 6.89. Лес
Источник: [13, 9.C.5], Sloth
На каждом дереве найдите:

1. Совершенные Байесовские равновесия АС: т.е. слабые секвенциальные?;

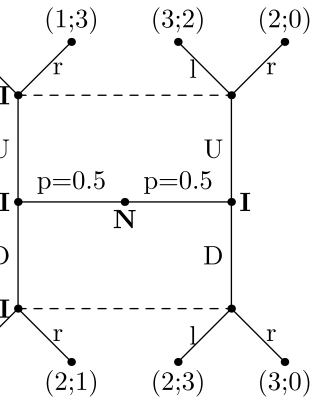
2. Секвенциальные равновесия;

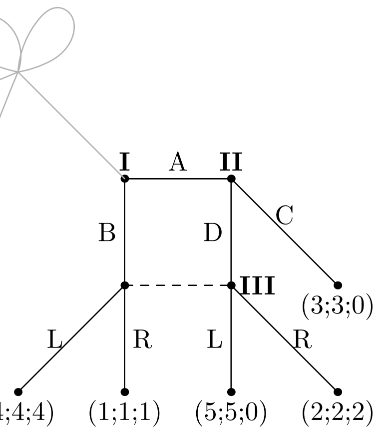
3. Равновесия по Нэшу. Для нахождения последних переведите деревья в матричную форму (для деревьев с тремя игроками будем считать, что первый игрок выбирает матрицу игры, второй — строку, а третий — столбец).

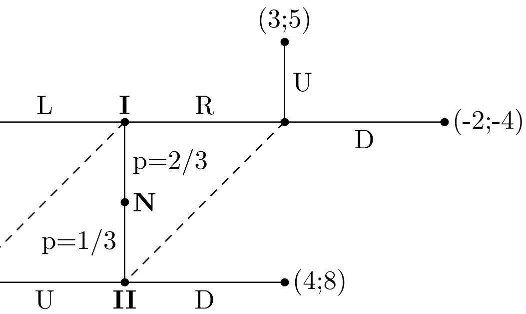


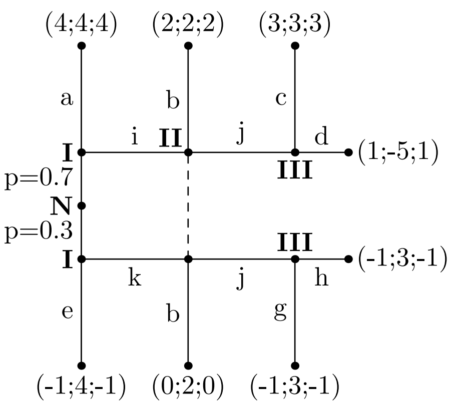


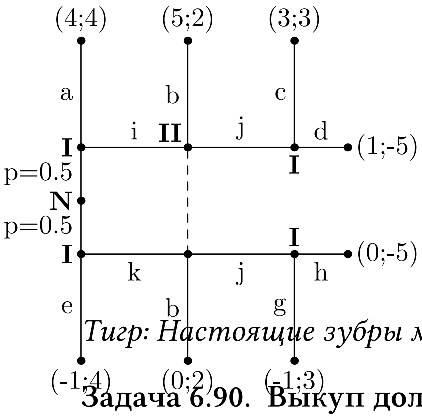
Здесь будет лес!!! Возможно копировать tikz деревья из https://github.com/bdemeshev/gt201/tree/master/gt_seminars


(1;3)
(3;2)
(2;0)
r
l
r
U
U
p=0.5
p=0.5
I
N
D
D
r
l
r
(2;1)
(2;3)
(3;0)


I
A
II
C
B
D
III
(3;3;0)
L
R
L
R
(1;1;1)
(5;5;0)
(2;2;2)


(3;5)
U
L
I
R
(-2;-4)
D
p=2/3
N
p=1/3
(4;8)
U
II
D


(4;4;4)
(2;2;2)
(3;3;3)
a
b
c
I
i
II
j
d
(1;-5;1)
III
p=0.7
N
p=0.3
III
I
(-1;3;-1)
k
j
h
e
b
g
(-1;4;-1)
(0;2;0)
(-1;3;-1)



Тигр: Настоящие зубры могут попытаться работать в смешанных стратегиях!

Задача 6.90. Выкуп доли-2

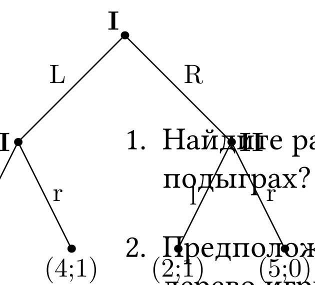
Доля Маши в ЗАО «Красивое платье» составляет s, а доля Кати — $(1-s)$. Маша и Катя решили отказаться от дальнейшего сотрудничества. У ЗАО должна быть одна владелица!

Сначала Маша называет цену p — сколько по ее мнению стоит все ЗАО. Затем Катя выбирает выкупить ли за sp Машину долю или продать Маше свою долю за $(1-s)\,p$. Ценность ЗАО для каждой владелицы — случайная величина равномерно распределенная на $[0;1]$.

Найдите совершенное равновесие Байеса-Нэша. (АС: т.е. слабое секвенциальное?)

Задача 6.91. Недостоверное наблюдение

АС: Вася Лимонадов -> Эдик Лимонов Вася Лимонадов очень любит лимонад. Берет с собой обычно одну бутылку (L), но может взять и две (R). По натуре Вася Лимонадов жадный и не любит, когда его просят поделиться лимонадом. Коля Безлимонадов может либо попросить у Васи попробовать лимонад (l), либо молча завидовать (r). Конечно, лучше спрашивать Васю, когда у того с собой много лимонада...



1. Найдите равновесия по Нэшу в чистых стратегиях. Какие из них являются совершенными на подыграх?

2. Предположим, что Коля не знает, взял ли Вася одну или две бутылки лимонада. Видоизмените дерево игры. Найдите равновесия по Нэшу. Найдите слабые секвенциальные равновесия;

3. Предположим, что Коля ошибается в оценке количества бутылок, взятых Васей с вероятностью p, т.е., например, если Вася взял одну бутылку лимонада, то с вероятностью p Коля думает, что у Васи две бутылки. Нарисуйте новое дерево игры. Найдите равновесия по Нэшу. Найдите слабые секвенциальные равновесия.

Задача 6.92.

Источник: [22]

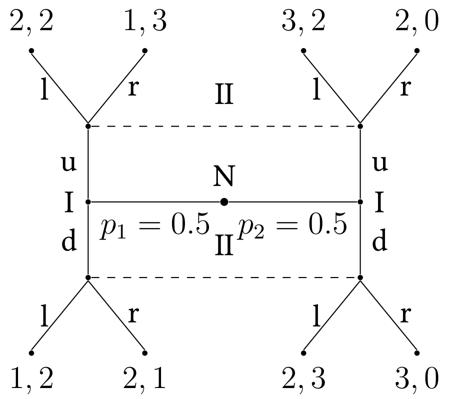
Рассмотрим игру двух игроков. Сначала Природа выбирает тип первого игрока, известный только ему. Первый игрок может быть рациональным с вероятностью 0.7 и импульсивным с вероятностью 0.3. Затем второй игрок выбирает между «стоп» (игра оканчивается платежом (0;0)) и «вперед» (ход переходит к первому). Далее первый игрок выбирает между «стоп» (игра оканчивается платежом (2;-1)) и «вперед» (ход переходит ко второму). Импульсивный игрок всегда выбирает «вперед». Далее второй игрок выбирает между «стоп» (игра оканчивается платежом (1;1)) и «вперед» (ход переходит к первому). Далее первый игрок выбирает между «стоп» (игра оканчивается платежом (3;0)) и «вперед» (игра оканчивается платежом (2;2)). АС: таких тоже несколько вариаций: Соседи и.т.п Импульсивный игрок всегда выбирает «вперед».

1. Нарисуйте дерево игры;

2. Найдите слабые секвенциальные равновесия;

3. Найдите сильные секвенциальные равновесия

Задача 6.93. SPNE=WSE?
Тигр: Все бюрократы прячутся за красивые сокращения вроде TLA и ETLA!
Автор: Three Letter Acronym и Extended Three Letter Acronym.



1. Найдите все равновесия в чистых стратегиях, совершенные на подыграх;

2. Найдите все слабые секвенциальные равновесия в чистых стратегиях.

Задача 6.94. Вхождение в отрасль
Фирма Новичок (Entrant) решает, входить или не входить на рынок; если она входит на рынок, то случайным образом определяется, какие у нее будут издержки производства, высокие (с вероятностью $\frac{1}{3}$) или низкие (с вероятностью $\frac{2}{3}$). Затем фирма Старожил (Incumbent) решает, развязывать ли ценовую войну или выбирать молчаливый сговор. Издержки фирмы Новичка достоверно известными только ей самой.
Выигрыши определяются так:
$(0;10)$, если Новичок не входит на рынок;
$(-1;9)$, если у Новичка высокие издержки, а Старожил выбирает ценовую войну;
$(6;7)$, если у Новичка высокие издержки, а Старожил выбирает молчаливый сговор;
$(4;4)$, если у Новичка низкие издержки, а Старожил выбирает ценовую войну;
$(8;7)$, если у Новичка низкие издержки, а Старожил выбирает молчаливый сговор;

1. Изобразите игру в развернутой форме;

2. Укажите, сколько стратегий у каждого игрока;

3. Переведите игру в матричную форму;

4. Найдите все равновесия по Нэшу;

5. Укажите, какие из найденных равновесий по Нэшу являются совершенными на подыграх.

Задача 6.95. Вхождение на рынок (Entry-deterrence game)
Фирма Новичок (Entrant) решает, входить или не входить на рынок; если она входит на рынок, то фирма Старожил (Incumbent) решает, бороться ли с новичком (to Fight) или нет (to Accommodate). Векторы платежей (первым указан платеж фирмы Новичка) равны: $(0;3)$, если фирма Новичок не входит на рынок; $(-1;a)$, если фирма Новичок входит, а фирма Старожил выбирает борьбу; $(1;1)$, если фирма Новичок входит, а фирма Старожил отказывается от борьбы. Значение величины a является частной информацией фирмы Старожила. Фирме Новичку известны априорные вероятности $P\,(a=-2)=0,7$ и $P\,(a=3)=0,3$.

1. Перечислите все чистые стратегии обеих фирм;

2. Нарисуйте дерево игры (возможно два варианта);

3. Найдите совершенное равновесие по Байесу-Нэшу.

Задача 6.96. Повторяемая игра «Вхождение на рынок»
АС: объединить в одну группу задач (эту и предыдущую)? Рассмотрите игру, заключающуюся в двукратном повторении игры, предложенной в задаче (...Какой? предыдущей?). После первого раунда фирма Новичок узнает значение a. Дисконт фактор $\delta=0,8$.

1. Перечислите все чистые стратегии обеих фирм;

2. Найдите совершенное равновесие Байеса-Нэша.

Задача 6.97. Настоящие ковбои заказывают бифштекс!
У первого игрока два типа: настоящий ковбой (!) и сладкоежка (W), которые природа выбирает с вероятностями 0,9 и 0,1 соответственно. Оба игрока знают эти вероятности, но только первый игрок видит ход Природы. Первый игрок делает заказ у стойки бара в тот момент, когда в бар входит второй игрок.
Второй игрок — довольно буйный тип. *Тигр: тип не в смысле теории игр, а просто тип.* Он заходит в бар, чтобы подраться, однако он трус и не хотел бы встретиться с настоящим ковбоем. У второго игрока есть выбор: завязывать драку (*F*) или не завязывать (*N*). Перед своим ходом второй игрок видит выбор первого игрока.
Первый игрок может заказать бифштекс (*S*) или пудинг (*P*). Настоящие ковбои предпочитают бифштекс, а сладкоежки — пудинг.

1. Перечислите все чистые стратегии обоих игроков;

2. Найдите совершенное равновесие Байеса-Нэша;

3. Найдите секвенциальное равновесие.

Задача 6.98. Быть или не быть?
Докажите или опровергните следующие утверждения:

1. Любое слабо-секвенциальное равновесие является совершенным на подыграх;

2. Любое равновесие, совершенное на подыграх, является слабым севкенциальным.

Задача 6.99. Вето
Петя и Вася должны выбрать одну из четырех альтернатив. Они по очереди вычеркивают по одной альтернативе из списка до тех пор, пока не останется одна невычеркнутая. Первым ходит Петя. Предпочтения Пети таковы: $A \succ B \succ C \succ D$. Предпочтения Васи — диаметрально противоположные.

1. Найдите равновесие Нэша, совершенное на подыграх;

2. Пусть предпочтения Васи с вероятностью p совпадают с Петиными, а с вероятностью $(1 - p)$ являются противоположными. Вася точно знает свои предпочтения, а Петя знает только априорные вероятности. Найдите совершенное равновесие по Байесу-Нэшу (слабое секвенциальное?) в зависимости от p. Нужны точные векторы выигрышей ‼

Задача 6.100. Где мел?
Чтобы никто не воспользовался хорошим мелом в её отсутствие, учительница Марья Ивановна Сидорова решила спрятать куски хорошего мела. Она может спрятать их либо в самой классной комнате, либо в лаборантской. Учитель математики Иванов Иван Иваныч будет искать мел или только в лаборантской, или только в классной комнате (у него урок уже начинается). Если он находит мел, то получает полезность 1. А если нет, то ему приходится писать плохим мелом, и он получает полезность 0. Утром следующего дня Марья Ивановна обнаруживает, что забыла, где спрятала мел. Если она находит мел с первой попытки, то получает полезность 2, если только со второй попытки — полезность 1, и полезность 0, если весь хороший мел использован Иваном Ивановичем.

1. Представьте игру в развернутой форме;

2. Является ли эта игра игрой с совершенной памятью (perfect recall)?

3. Переведите игру в матричную форму;

4. Найдите все равновесия по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях.

   П...ц задача!

Задача 6.101. К берегу водохранилища подошли трое...

картинка ?

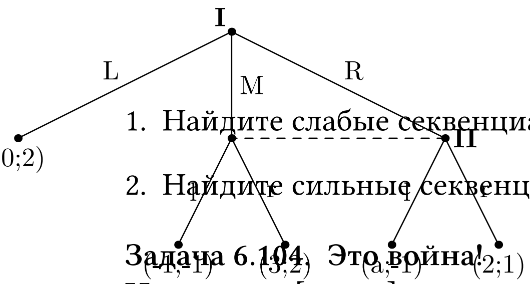
1. Является ли эта игра игрой с совершенной памятью?

2. Какие профили стратегий приводят к розыгрышам $R - D - A$, $L - D - A$ и S?

3. Придумать к этому дереву платежи и текст задачи, начинающийся словами «К берегу водохранилища подошли трое».

Задача 6.102. Большой аукцион
Источник: [13]
На рынке n покупателей, каждый из которых хочет купить одного говорящего попугая. Ценность попугая для покупателей различна: $v_1 < v_2 < \ldots < v_{n-1} < v_n$. На рынке доступно всего $q < n$ попугаев. Покупатели одновременно называют цену. Попугаи достаются покупателям, назвавшим наивысшие цены по каким ценам? 1-м? 2-м?, следующим?. Если одинаковых предложений слишком много, то попугаи распределяются так: сначала каждый покупатель по очереди 1,2,...,n? имеет шанс добровольно отказаться от покупки. Если после всех отказов желающих осталось больше, чем попугаев, то попугаи распределяются случайным образом. Найдите равновесие по Нэшу (SE?), в котором все покупатели предлагают одинаковую цену.
Перенести в аукционы?

Задача 6.103.
Источник: [13, 9.C.3]
Залезьте на дерево и



1. Найдите слабые секвенциальные равновесия в зависимости от a;

2. Найдите сильные секвенциальные равновесия в зависимости от a;

Задача 6.104. Это война!
Источник: [21, 3.5]
Две страны, Левая и Правая, хотят поделить территорию в виде отрезка $[0; 1]$. Столицы стран находятся на концах отрезка. Природа выбирает издержки ведения войны: c_l — для Левой и c_r — для Правой, величины c_l и c_r независимы и равномерно распределены на отрезке $[0; 1]$. Издержки c_l известны только Левой стране. Издержки c_r известны обеим странам. Правая страна выдвигает свои требования к границе $x \in [0; 1]$. Левая страна либо удовлетворяет требования Правой, либо развязывает войну. Правая страна побеждает в войне с экзогенной вероятностью $p \in (0; 1)$. Стране-победительнице достается вся территория.

1. Найдите равновесия по Нэшу в чистых стратегиях; слабо секвенциальные равновесия по Байесу-Нэшу (для каждого c_r отдельная игра!);

2. Найдите вероятность войны и средние выигрыши игроков в равновесии;

3. Предположим, что издержки ведения войны становятся общеизвестны. Какова была бы априорная вероятность войны и средние выигрыши стран в равновесии априори?

4. Ответьте на пункты «а» и «б», если требования выдвигает Левая страна.

Задача 6.105. Наследство
Источник: [21, 3.3]
В игре два игрока: родственник графа и продавец соседнего имения. После смерти граф оставил этому родственнику сумму v. В отличие от родственника, продавец соседнего имения не знает точной суммы наследства. По оценкам продавца — либо 1000 рублей (с вероятностью p), либо 2000 рублей (с вероятностью $(1-p)$). Продавец назначает свою цену имения, а родственник решает, выкупать имение, или нет. У родственника нет других денег, кроме наследства от графа, а имение он оценивает больше чем в 2000 рублей.
Формализуйте игру и найдите слабое? сильное? секвенциальное равновесие в зависимости от p

Задача 6.106. Из системы задач "Покер"
Неправильная монетка выпадает «орлом» с вероятностью p. Первый игрок знает результат выпадения монетки, второй — нет. Первый игрок объявляет второму, как выпала монетка (при этом он может сказать правду, а может соврать). Затем второй делает свою догадку о том, как в действительности выпала монетка. За свою правдивость первый игрок получает единицу полезности и ещё две единицы получает в том случае, если второй скажет «орел». Второй игрок получает единицу полезности, если верно угадает, как выпала монетка.

1. Представьте игру в форме дерева;
2. Найдите все слабые/сильные секвенциальные равновесия при $p = 0,7$;
3. Найдите все слабые/сильные секвенциальные равновесия в зависимости от p.

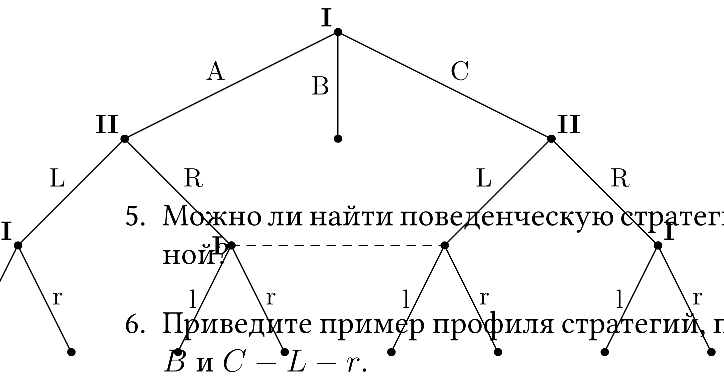
Задача 6.107. Тюремный покер, динамический вариант
Текстовое описание
Первый игрок выбирает, в какой руке спрятать пуговицу. Затем второй игрок пытается угадать, в какой руке находится пуговица. За неугаданную руку второй платит первому два рубля. За угаданную левую руку первый платит второму один рубль, за угаданную правую - три рубля.

1. С какой вероятностью монету следует прятать в левой руке?
2. В чью пользу эта игра?

Задача 6.108. Вариация на тему «21»
Источник: [22]
Цель игры — набрать в сумме как можно большее количество очков, но не больше трех. Предположим, что каждая карта, взятая из колоды, приносит игроку количество очков, равномерно распределенное на отрезке $[1;3]$, независимо от предыдущих карт. Сначала первый игрок берет по одной столько карт, сколько захочет. Затем второй игрок, зная только, сколько карт взял первый игрок, берет себе по одной столько карт, сколько захочет. Выигрывает тот, кто набрал наибольшую сумму, не превосходящую 3 очка. Если на руках у каждого игрока больше 3 очков, то выигрывает второй игрок.
Найдите слабое/сильное секвенциальное равновесие.

Задача 6.109. Разница между стратегиями1. Укажите число чистых стратегий каждого игрока;

2. Является ли эта игра игрой с совершенной памятью (perfect recall)?
3. Приведите пример эквивалентных поведенческой и смешанной стратегии;
4. Можно ли найти смешанную стратегию, для которой не существует эквивалентной поведенческой?



5. Можно ли найти поведенческую стратегию, для которой не существует эквивалентной смешанной?

6. Приведите пример профиля стратегий, приводящего к траектории розыгрыша игры $A-R-l$, B и $C-L-r$.

Задача 6.110. «Лабиринт».
Источник: БЗИ, Коковин
Два игрока играют на графе (дерево) игры: первый игрок с именем K выбирает вверх или вниз, затем второй игрок с именем S — влево или вправо, и т.д. Это дерево с корнем $< K1 >$, с 12-ю вершинами (типа up-righ-up-right), глубиной 4 хода можно представить так:

```
 К  О      К   О
 С  Е      Р   Г
  \ /       \ /
  S4ulu     S4uru
    |         |
    |         |
   K3ul<--S2u-->K3ur
    |    |    |
    В    |    И
    Е    |    Й
         |
       < K1 >
    Н    |    К
    С    |    Е
    |    |    |
   K3dl<--S2d-->K3dr
    |         |
    |         |
  S4dld      S4drd
   / \        / \
  /   \      /   \
 О    К     О    В
 Р    Г     Е    Й
```

Рис. 2: «Лабиринт.»

Взяв свою фамилию как бесконечную последовательность символов типа «коковинкокови...», свое имя типа «сергейсергейсер...» задайте выигрыши первого и второго игроков в вершинах, как на рисунке; пара букв в каждой вершине.

Подставьте вместо каждой буквы имени число — ее номер в алфавите, либо решайте непосредственно в буквах: более поздняя больше ст'оит.

1. Найти SPE, SE. Расшифровать все концепции динамических игр в начале раздела! Относится ко всем задачам ниже!

2. Найти PBE в альтернативном предположении, что второй ход (вершины $S2d$, $S2u$) производит природа, случайно, с вероятностями 0.5, и оба игрока не способны определить, влево или вправо произошел выбор.

Задача 6.111. Соседи.
Источник: БЗИ, NES
Задача похожа на некоторые из предыдущих. Структурировать! Антон и Борис, соседи по общежитию, каждый день тратили по 20 мин. на поход в магазин за продуктами. Им это надоело и, чтобы сэкономить время, они договорились в течение ближайших четырех дней ходить в магазин по очереди и покупать на всех: в первый день Антон, затем Борис и т. д. Покупка продуктов для соседа отнимает лишние 5 мин, поэтому у идущего в магазин появляется соблазн нарушить соглашение и купить продукты только себе. Если кто-то хоть раз так сделает, то в последующие дни ходить в магазин снова будут по отдельности (да и в этот день обманутому соседу придется прогуляться).
Антон всегда действует сообразно обстоятельствам (в каждый из двух своих дней может выбирать, выполнить или нарушить соглашение), а вот Борис может являться оппортунистом, как Антон, а может быть и честным, т. е. всегда выполнять соглашение (в этом случае у него оба раза по единственному возможному действию). Антон верит, что Борис с вероятностью $p > 0$ является честным.

1. Как выглядит развернутая форма игры, если полезности участников равны выигранному времени?

2. При каких p существует секвенциальное равновесие, в котором Антон в первый день играет честно (выполняет соглашение)?

Задача 6.112. Пример «Масти и Картинки».
Источник: БЗИ

Таблица 1:

Масти:				
	Крас-	*ные*	*Чер-*	*ные*
	Черви ↓	Бубны ↓	Крести ↓	Пики ↓
Старшие: Туз	8 1	0 3	2 5	0 1
Старшие: Король	6 7	0 1	4 5	2 3
Младшие: Дама	2 3	6 9	8 3	0 1
Младшие: Валет	0 3	4 7	4 9	0 1

Здесь предполагается, что строчный игрок выберет: Старшие или Младшие, потом столбцовый — Красные или Черные, потом строчный — конкретную картинку из уже названной группы (из

Старших или из Младших), потом столбцовый — конкретную масть из уже названного цвета. Найти SPE, INDW.

Вариант 2: Усложнение задачи — найти SPE, INDW, PBE если последний ход решается жребием — подбрасыванием монетки.

Вариант 3: То же, но результат подбрасывания известен до ходов второму игроку, и только ему.

Вариант 4: Найти SPE, INDW, PBE если *первый* ход решается жребием — подбрасыванием монетки, и никто не видит его.

Задача 6.113. Пример «Trivial quize». (упрощенный покер)?? ?? К семейству покерных задач
Источник: БЗИ

Разыгрывая 1 рубль, Анна тянет карту из колоды, смотрит, и не показывая Борису (у которого открыт Валет, а карты от 10-ки до Туза), или удваивает ставку, или пасует и имеет -1, а Борис 1. Если удвоено, Борис или пасует и имеет -2, а Анна 2, или удваивает, и карта открывется. Если она больше, чем Валет, то Анна выиграла 4 у Бориса, иначе проигрывает 4. Найти PBE (частоты ходов при каждой карте).

Вальтов осталось 3 или 4? Надо по-человечески написать

Задача 6.114. Мосты Цезаря: «commitment».
Источник: БЗИ

Уже было выше похожее Цезарь с войском переправился по наведенным мостам через реку на сторону неприятеля, войско Цезаря приготовилось к бою. Неприятель приготовился к бою. Цезарь сжег за собой мосты. Увидев это, неприятель бежал.

Составить две игры, годящихся для объяснения этой ситуации:

1)С полной информацией о целях трех игроков: Цезарь, войско Цезаря, неприятель.

2)С двумя игроками (Цезарь, неприятель), неполной информацией и выявлением целей Цезаря через его поведение.

(Сходная ситуация «commitment» возникает при кредите с залогом).

АС: хочу видеть оба решения!!

Задача 6.115. Залог или клятва: «commitment».
Источник: БЗИ

Лучше описать и сформулировать чётко!! Пусть популяция российских бизнесменов имеет обыкновение просить кредит размером в \$ 100 на год в банке, и при гарантии возврата банк готов был бы давать кредит под 5%. Пользование кредитом приносит среднему бизнесмену в год A%. В среднем, четверть бизнесменов кредит без залога не отдают. Оставляя в гараже банка свой джип ценой в \$ 120 в залог на год, бизнесмен имеет потерю полезности, равную 10% годовых. Половина бизнесменов джипов не имеют, им оставить нечего. Но половина из всех (поровну среди джиповладельцев и безлошадных) известны как истые мусульмане, каждый может поклясться Аллахом, что кредит отдаст, и клятвы эти всегда исполняются.

Добавив данных, составить игру, годящуюся для описания ситуации, и найти, при каком параметре A в равновесии банк дает кредит не только джипо-владельцам и мусульманам, и почем. Если банк — монополист, то для какой категории кредит дешевле, а для какой — дороже (выгоднее ли быть собственником джипа или репутированным мусульманином)?

Задача 6.116. Цена репутации (клятва)
Источник: БЗИ

Предположим, что религиозный ростовщик в средневековом Багдаде не считает До конца неясно, что имеется в виду? богоугодным зарабатывать на каждой сделке больше 1 процента и не ограничен в деньгах. Его кредит может принести любому торговцу 20% годовых. В городе ограниченное число купцов трех вероисповеданий.

1. Мусульмане известны как исполняющие клятву в $m\%$ случаев, иудеи – в $j\%$ случаев, христиане – в $c\%$ случаев. Кто из купцов почем получает кредит (если получает)? (Решить задачу при любых $m; c$.

2. Мусульмане имеют неудовольствие от нарушение клятвы размером в $m\%$ годовых, иудеи – в $j\%$ годовых, христиане – в $c\%$ годовых. Кто из купцов почем получает кредит (если получает)? АС: совсем плохой вариант

Задача 6.117. Стратегическое лидерство в состязаниях.
Источник: [33]
Трое соискателей A, B, C ведут борьбу за приз, ценность которого равна 1. Они последовательно выбирают свои уровни усилий x_a, x_b, x_c (сначала выбирает A, потом B, потом C). Вероятность для участника i выиграть приз равна $\frac{x_i}{x_a+x_b+x_c}$. Считаем, что для каждого соискателя затраты усилий в размере x эквивалентны потере x денежных единиц. Участники нейтральны к риску. Опишите, как устроена развернутая форма игры, и найдите равновесие (не только равновесные уровни усилий, но и стратегии участников!) при следующих информационных предположениях, являющихся общим знанием:

1. Каждый участник знает все, что происходило до его хода;

2. Участники B и C знают x_a, C не знает x_b;

3. Участник C знает x_a, больше никто ничего не знает.

В каждом случае используйте наиболее подходящую концепцию решения игры. В каких случаях совершенные по подыграм равновесия Нэша не дают адекватного предсказания исхода?

Задача 6.118. Маленькие семейные радости.
Источник: [33]
У мужа на работе предстоит веселая вечеринка. Жена обещает мужу семейный скандал, если он напьется. Во время вечеринки муж может с вероятностью p влюбиться в молодую сотрудницу. После этого он должен решить, напиваться ему или нет. Если он не напьется, то его выигрыш равен нулю; выигрыш жены в этом случае тоже равен нулю. Если муж напьется, жена должна решить, сидеть тихо или же устроить скандал. Если учинить скандал влюбленному мужу, то он уйдет к молодой сотруднице. Тогда выигрыши мужа и жены равны $(-1, -3)$; учинив скандал просто пьяному мужу, жена и муж получают по -1. Если сидеть тихо, то выигрыш жены равен -2; выигрыш влюбившегося мужа при этом равен -3 (ему стыдно), а просто пьяного мужа равен 5.

1. Формализуйте игру в развернутой форме;

2. Найдите все сильные секвенциальные равновесия;

3. А что, если влюбиться может только пьяный муж?

Задача 6.119.
Вариации на тему «чет-нечет», «matching pennies»
Тигр: Молчите, поручик Ржевский! Вовочка, ни слова! Алексей Владимирович, вы в приличном обществе!
Нарисуйте дерево игры, выпишите матрицу игры, найдите слабые (сильные) секвенциальные равновесия? равновесия по Байесу-Нэшу:

1. Классический «чет-нечет». Два игрока одновременно называют натуральное число. Если сумма чисел четная, то первый игрок выигрывает один рубль, если сумма чисел нечетная, то рубль выигрывает второй игрок.

2. Сначала первый игрок подбрасывает монетку (результат подбрасывания не доступен второму игроку). Если монетка выпала на орла, то игроки играют в классический «чет-нечет». Если монетка выпала на решку, то играется «чет-нечет», но первый игрок обязан назвать четное число; Тигр: он же тогда проиграет!

3. Перед игрой в «чет-нечет» первый игрок подбрасывает игральную кость (второй игрок не знает результат подбрасывания). Если кость выпадает на 1 или 2, то играется классический «чет-нечет». Если кость выпадает на 3, 4, 5, 6, то размер выигрыша в случае четной суммы устанавливается равным двум рублям (размер выигрыша при нечетной сумме остается равным одному рублю);

4. Описание игры такое же, как в пункте «в», отличие состоит лишь в том, что результат подбрасывания игральной кости известен только второму игроку;

5. Описание игры такое же, как в пункте «в», отличие состоит лишь в том, что результат подбрасывания игральной кости неизвестен ни одному из игроков.

Задача 6.120. Чудо-швабра
У продавца есть Чудо-швабра. Есть один потенциальный покупатель. Ценность швабры для продавца и покупателя – независимые равномерные на $[0;1]$ случайные величины. Каждый из них знает ценность товара для себя. Сначала покупатель предлагает цену. Если продавец согласен, то обмен происходит, если нет – то оба игрока получают выигрыш ноль. Найдите слабое/сильное? секвенциальное равновесие. Как изменится ответ, если потенциальных покупателей n, они одновременно предлагают свои цены и товар достается покупателю, назвавшему наибольшую цену? То есть это вообще другая задача — просто аукцион?

6.7. Передача информации

Главное не война. Главное — маневры!

Задачи, где самое важное — понять как распространяется информация между игроками...

Задача 6.121. Предание о самураях.
При династии Чжоу замок одного из князей охраняли самураи нескольких родов. Самураи рода Цзы были молчаливы и не общались друг с другом, хотя каждый вечер собирались за чашечкой сакэ.
В одну из темных ночей из замка выкрали прекрасную дочь князя. В ту ночь дежурило десять самураев, возможно, что были из них и принадлежавшие роду Цзы. Каждый самурай помнит, кто из его рода дежурил в эту ночь, но не помнит про себя лично (в силу мук совести). Если самурай будет твердо уверен в том, что вина лежит на его плечах, то сделает себе харакири. Через две недели после кражи девушки, как и каждый день, самураи рода Цзы вновь молча пили свой сакэ. Но в этот день к ним вошел служитель замка и сказал, что помнит, как видел в роковую ночь на дежурстве самурая из их рода.
После этой новости они собирались за сакэ ещё шесть раз. Больше ни разу они уже не собрались: все покончили собой...

1. Формализовать в виде игры??

2. Сколько самураев рода Цзы охраняло князя? *Тигр: Без сакэ не разобраться!*

3. То, что сообщил служитель замка, было известно всем самураям рода Цзы! Раз все они покончили собой, значит все были виновны, значит каждый знал о вине своих сородичей. Что же нового[5] содержало сообщение служителя о том, что хотя бы один из них виновен?

4. Смогли бы самураи установить свою виновность, если бы виновны были не все?

Задача 6.122. Колпаки
Источник: [15]
Царь решил испытать своих четырех мудрецов. Он приказал им закрыть глаза и из мешка, где было много черных и белых колпаков, вынул случайным образом и надел на мудрецов 4 колпака. Сказал им открыть глаза, сообщил, что в мешке были черные и белые и спросил: может ли кто наверняка угадать на себе колпак, глядя на других? «Нет — это невозможно» — сказали мудрецы (и были правы). А случилось, что все колпаки белые. «А ведь среди одетых есть белый колпак, тогда что вы о себе скажете?» - сказал царь. Мудрецы промолчали. Ведь ничего нового он не сообщил: каждый уже видел троих соседей в белом. «Помолчите минуту, потом можно говорить» — сказал царь. Но и во второй раз они молчали. И когда третий раз он предложил говорить - молчали. А вот на четвертый раз каждый сказал, что он в белом колпаке, и однозначно объяснил это, и царь всех наградил.

1. Объясните решение (SPE) Как??. В чем новизна поступившей от царя информации?

2. Покажите, что так же решается задача для любого числа мудрецов и любого варианта выпавших черных/белых колпаков: кто-то (Или все сразу?) определит свой колпак и скажет;

3. Покажите, что если выпали неодинаковые колпаки, то более слабой подсказки царя: «колпаки неодинаковы» — достаточно для разрешения игры НЕ ПРИ ВСЯКОМ числе черных и белых.

7. Кооперативные игры

Задача 7.1. Ботинки
У трех человек есть по ботинку. У двоих — по одному левому, у третьего — один правый. Покупатель готов купить пару за 100 рублей. Как правильно оценить владения каждого из трех игроков? АС: Как это моделировать??

Задача 7.2. «So long sucker» [1950, Nash, Shapley, Hausner, Shubik]
Что в этой задаче надо сделать????
Тигр: в эту игру обязательно нужно сыграть!
Автор: И ещё ей неплохо бы придумать цензурное название
1. Игра для четырех игроков.
2. Каждый игрок начинает игру с 7 фишками своего цвета. По ходу игры игрок может стать владельцем фишек чужих цветов. Владения каждого игрока доступны всеобщему обозрению.
3. Игрок, делающий первый ход, определяется случайным образом.
4. Ход состоит в том, что игрок кладет любую свою фишку на игровое поле или поверх любой одиночной фишки на игровом поле, или поверх любой башни из фишек, уже стоящих на игровом поле.

[5] Примерно до трех лет ребенок живет с верой во всеобщность знания. Он думает, что то, что знает он, знают все. Поэтому дети рисуют дом, у которого видны все четыре стены. Следующий эксперимент описан в литературе. Ребенок и папа видят, как мама кладет банан в одну из двух коробок на столе. Потом мама выходит из комнаты. Папа перекладывает банан в другую коробку и спрашивает ребенка, где мама будет искать банан, когда вернется. Ребенок ответит, что в той коробке, куда его переложили. Зачем искать банан там, где его нет? И только примерно к трем годам ребенок понимает, что всеобщности знания нет, и...может лгать.

5. Игрок, делающий следующий ход, выбирается игроком, сделавшим последний ход, за исключением ситуаций взятия башни или поражения игрока (правила 6 и 9). Игрок, сделавший последний ход, может передать право хода любому игроку (включая себя самого), чей цвет отсутствует в только что сыгранной башне. Если в только что сыгранной башне присутствуют все цвета, то ход передается тому игроку, чей цвет не встречается дольше всего, считая сверху башни.
6. Взятие происходит, если в одну башню кладутся подряд две фишки одного цвета. Игрок, чей цвет соответствует цвету последних двух фишек, обязан убить одну фишку из башни по своему выбору, забирает остаток башни и получает право следующего хода.
7. Убитые фишки помещаются в «коробку мертвых».
8. Пленник — это фишка с цветом, отличающимся от цвета своего владельца. В любой момент игры любой игрок может убить пленника или передать пленника другому игроку. Передача пленника является безусловной, т.е. пленник не может быть потребован обратно. Игрок не может ни передавать фишки своего цвета, ни убивать их (за исключением правила 6).
9. Игрок терпит поражение и выбывает из игры, если он не может сделать ход, т.е. если у него не осталось фишек в собственности. Поражение не является окончательным, пока остальные игроки официально не отказались от передачи пленников (правило 8). Если игрок выбыл из игры, то ход возвращается к тому игроку, который передал выбывшему право хода. (Если это приводит к поражению последнего, то ход возвращается ещё на шаг назад и т.д.).
10. Фишки выбывшего игрока остаются в игре пленниками, но игнорируются при определении порядка хода (правило 5). Если башня взята с помощью двух фишек выбывшего игрока, то вся башня убивается, а ход возвращается как в правиле 9.
11. Победитель — это игрок, оставшийся в игре последним. Победителем можно стать, не имея фишек во владении. Победителем может стать игрок, все фишки которого убиты.
12. Разрешены любые переговоры, кроме сговоров до игры или переговоров вдали от игрового поля. В правилах нет никаких штрафов за неисполнение взятых обязательств.
Примечание: Если игроков больше четырех, то количество фишек на одного игрока желательно уменьшить. Увеличение количества фишек приводит к более длительной игре.
McCarthy's revenge rule: «When fatally double-crossed, try to damage the double-crosser as much as possible before your demise.»
«We had married couples going home in separate cabs»
«'So Long Sucker,' A Four-Person Game». In M. Shubik (ed.) Game Theory and Related Approaches to Social Behavior, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Задача 7.3. Подземные музыканты.
Источник: БЗИ, NES
Оркестр из трех музыкантов (A, B, C) играет в подземном переходе. Поодиночке они могли бы заработать, соответственно, 6, 18 и 30 рублей в час. Играя по двое, они бы получили: A и B — 36, A и C — 48 , B и C — 54 рубля в час. А вместе они имеют 72 рубля в час.

1. Будет ли отвергнут равный дележ, и если будет, то какими коалициями?

2. Найдите ядро игры, т. е. все дележи, которые не будут отвергнуты;

3. Является ли игра супераддитивной? Супермодулярной?

4. Найдите все точки Вебера и вектор Шепли. Что из найденного принадлежит ядру?

Задача 7.4. Парламент.
Источник: БЗИ, NES
Конгресс и Сенат состоят из трех членов каждый. Закон принимается, только если в обеих палатах набрано большинство.

1. Найдите ядро этой кооперативной игры;

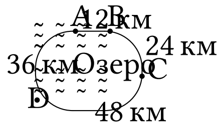
2. Пусть вдобавок имеется ещё президент, одобрение которого обязательно. Сколько он получит в ядре? В векторе Шепли?

3. А потом две палаты объединили. Теперь нужно просто 4 голоса из 6 плюс президентское одобрение. Вроде бы, парламент стал сильнее, так как больше выигрывающих коалиций, чем в 2. Как изменилась «зарплата» президента? АС: Шепли или ядро?

Задача 7.5. Симметричные игры.
Источник: БЗИ, NES
Назовем кооперативную игру с трансферабельной полезностью *симметричной*, если выигрыш $v(K)$ коалиции K зависит только от ее численности $k = |K|$. Без ограничения общности считаем, что $v(N) = N$. Какой должна быть функция $v(k)$ для того, чтобы ядро было непустым? чтобы игра была супермодулярной?

Задача 7.6. Строительство дороги.
Источник: БЗИ, NES

Исправить рисунок!!!



Проект дороги.

Четыре поселка A, B, C, D расположены на берегу большого озера (см. рис.). Каждый поселок нуждается в автомобильном сообщении с тремя остальными, причем кратчайшим путем (так, незамкнутая дорога $BCDA$ не устраивает жителей поселка B, поскольку они хотят ездить в A напрямик). Местные власти решили скинуться и построить кольцевую дорогу вокруг озера, соединяющую поселки. Вопрос состоит в том, как разделить между поселками издержки по строительству 120 км дороги.

1. Для каждой коалиции найдите минимальную протяженность нужной ей дороги. Опишите ядро игры. Является ли игра супермодулярной?

2. Пусть поселки равноправны в переговорном процессе, а затраты делятся, исходя из вектора Шепли. Сколько километров дороги должен профинансировать каждый поселок?

3. Пусть n_A, n_B, n_C, n_D — число жителей в поселках, причем не обязательно $n_A = n_B = n_C = n_D$. Как в этом случае разумно распределить затраты? В каком соотношении должны находиться числа n_A, n_B, n_C, n_D, чтобы все жители платили один и тот же налог на строительство дороги?

Задача 7.7. Охрана.
Источник: БЗИ, NES
Имеется 6 производителей A, B, C, D, E, F, каждый из которых может заработать \$1, и два охранника P и Q, не производящих ничего. Коалиция получает суммарную выручку ее участников, но только в том случае, если среди них есть хотя бы один охранник. Иначе приходят грабители и все забирают. Сколько нужно платить охранникам? Ответьте на этот вопрос с точки зрения ядра и вектора Шепли.

Задача 7.8. Ядро экономики.
Источник: БЗИ, NES
Алиса, Берта и Виола имеют по единице товара, который оценивают, соответственно, в 3, 6 и 8 долларов. Густав, Даниил, Евгений и Жорж могли бы купить по единице этого товара и готовы заплатить за него, соответственно, 2, 4, 7 и 9 долларов.

1. Формализуйте эту ситуацию в виде кооперативной игры с побочными платежами (задайте выигрыши коалиций);

2. Пусто ли ядро этой игры?

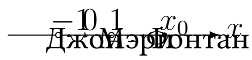
Задача 7.9. Разложение по элементарным играм.
Источник: БЗИ, NES
В кооперативной игре v с побочными платежами участвуют игроки 1, 2, 3. Выигрыши коалиций заданы следующим образом:

$$\begin{array}{llll} v(\emptyset) = 0, & v(1) = 4, & v(2) = 9, & v(3) = 4, \\ v(1,2) = 15, & v(1,3) = 12, & v(2,3) = 13, & v(1,2,3) = 20. \end{array}$$

1. Найдите разложение этой игры по базису из элементарных игр v_S, $S \subseteq \{1,2,3\}$;

2. Как из найденного разложения получить вектор Шепли?

Задача 7.10. Rendez-vous-2.
Источник: БЗИ
Поправить рисунок!



Джон и Мэри живут на одной улице (см. рис.) и по умолчанию встречаются у фонтана (x_0). Они могут договориться о встрече в любом другом месте улицы. Полезность участника равна (со знаком минус) расстоянию, которое ему нужно пройти.

1. Нарисуйте множество допустимых выигрышей (u_1, u_2). Изобразите на нем положения статус-кво при всех возможных значениях параметра x_0;

2. Пусть x_N — место встречи, соответствующее решению Нэша этой задачи торга. Найдите x_N как функцию от $x_0 \in \mathbb{R}$ и постройте ее график;

3. Тот же вопрос для x_K — решения Калаи—Смородински;

4. А что можно сказать про эгалитарное и утилитарное решения?

Задача 7.11. Торг в модели обмена.
Источник: БЗИ
У агента 1 есть единица товара x, а у агента 2 — единица товара y. Предпочтения участников задаются функциями полезности, соответственно, $u_1 = \sqrt{xy}$ и $u_2 = \min\left(x, \frac{3}{2}y\right)$.

1. Пусть агенты торгуются за распределение товаров x и y. Найдите (и изобразить на рисунке в координатах u_1, u_2) область допустимых выигрышей (Парето-границу) и решение Нэша. Изобразите в ящике Эджворта множество оптимальных по Парето распределений товаров и точку, соответствующую решению Нэша;

2. Пусть теперь предметом торга является только цена, по которой происходит обмен, а размер сделки устанавливается после этого первым игроком единолично. Снова найдите область допустимых выигрышей и решение Нэша (и отобразите на тех же рисунках);

3. Укажите на тех же рисунках распределение товаров и пару выигрышей, соответствующие общему равновесию в данной экономике обмена. Сравните результаты пунктов 1–3 и прокомментируйте.

Задача 7.12. Совет безопасности
Источник: [33]
Совет безопасности ООН состоит из пяти постоянных и десяти переменных членов. Никакое решение не может быть принято без одобрения со стороны всех постоянных членов, но и без 10 голосующих «за» тоже. Коалиция выигрывет, если удовлетворяет обоим требованиям. Найти распределение сил, в соответствии с ядром и с вектором Шепли. Является ли игра супермодулярной?

Задача 7.13. Семейные вечера.
Источник: [33]
По вечерам семья любит слушать музыку. Мама обожает Аллу Пугачеву (точка 0 на прямой), сын больше всего любит группу Чайф (точка 0.5 на той же прямой), а папа тащится от Шнура из группы «Ленинград» (точка 1 на прямой). Удовольствие от музыки равно 1 минус расстояние от нее до своей любимой музыки. Установка воспроизводящего устройства требует одну секунду издержек. Любая пара членов семьи или любой член семьи в отдельности могут уйти в одну из свободных комнат, самостоятельно установить проигрывающее устройство и слушать музыку там. Персональные издержки от прослушивания нелюбимой музыки могут компенсироваться другими членами «группы по интересам».

1. Формализуйте эту ситуацию как коалиционную игру с побочными платежами. Является ли игра супераддитивной? Супермодулярной?
2. Опишите ядро этой игры;
3. Найдите вектор Шепли этой игры. Лежит ли он в ядре? Какая музыка будет играть и где? Кто сколько вносит средств на воспроизводящее устройство?

Задача 7.14.
Источник: [33]
Нефть из Ирака следует в США многими путями, возможно переплетаясь по пути (строго говоря, есть граф нефтепроводов, и нигде посередине нефть качать нельзя). У каждого нефтепровода существует максимальная пропускная способность. Каждый из нефтепроводов контролируется одним из бандитских формирований. США готово платить за нефть пропорционально мощности потока. Доказать, что бандиты всегда могут договориться, не развязывая войны.

Задача 7.15. Ботинки-2.
Есть n игроков, каждый из которых владеет левым ботинком, и есть ещё m игроков, каждый из которых владеет правым ботинком, $n > m$. Каждый левый подходит к каждому правому. Одна полная пара ботинок стоит 1 рубль.

1. Формализуйте игру как кооперативную и найдите ядро;
2. Найдите вектор Шепли для $n = 3$ и $m = 2$;
3. В изначальной постановке спрашивался вектор Шепли для произвольного n и m[6]. В явном виде (без громоздкой суммы) этот вектор не находится. Предложите какую-нибудь аппроксимацию для больших n и m с помощью нормального распределения;
4. Опишите переговорное множество, К-ядро и нуклеолус Нужны определения‼!;
5. Является ли игра супермодулярной?
6. Разложите игру в сумму простых игр (игра называется простой, если победить можно, только включив некую коалицию олигархов). АС: формальное определение простой игры‼

[6] Тигр? Мне почему-то показалось, что очевидным будет ответ типа $n/(n+m)$. Это ошибка.

Задача 7.16. Гномы и золото.
Группа из n гномов нашла много золотых слитков в пещере. Начинается обвал, поэтому нужно срочно убегать из пещеры. После обвала пещера окажется недоступной. Слитки золота тяжелы: в одиночку ни один гном не может нести слиток, но два гнома могут свободно нести один слиток. Снаружи пещеры слитки золота можно продать по цене 1 рубль за штуку.

1. Найдите ядро и вектор Шепли для произвольного n;
2. Опишите переговорное множество, К-ядро и нуклеолус;
3. Прокомментируйте разницу для четного и нечетного n;
4. Является ли игра супермодулярной?
5. Разложите игру в сумму простых игр.

Задача 7.17. Toetjes.
Источник: [8]
Остался последний кусочек пирога. Три брата не знают, как его поделить. Папа спрашивает: «Сколько стоил пирог в магазине?» Сначала отвечает старший сын, затем средний, затем младший. Называть одинаковые цены нельзя. Для простоты будем считать, что деньги бесконечно делимы, а стоимость пирога — случайная величина равномерно распределенная на отрезке $[0;1]$. Найдите вектор Шепли[7] и ядро этой игры.

Задача 7.18. Угадай цену пирога.
От пирога остался один кусочек[8]. На него претендуют три брата. Папа предлагает им по очереди попробовать угадать цену пирога: сначала гадает старший, затем — средний и в конце — младший. Братья знают, что цены пирогов распределены равномерно на $[0;1]$. Тот из братьев, чья версия ближе всего к правильной, получает пирог.

1. Найдите ядро и вектор Шепли в кооперативном варианте игры;
2. Опишите переговорное множество, К-ядро и нуклеолус;
3. Найдите все устойчивые множества По Нейману-Моргенштерну?? Определения??
4. Является ли игра кооперативная игра супермодулярной?
5. Найдите равновесие по Нэшу, совершенное на подыграх в некооперативном варианте игры;
6. Прокомментируйте разницу между кооперативным и некооперативным решениями.

Задача 7.19. Помещик и крестьяне.
Есть один помещик и n крестьян. Помещик владеет полем. Без поля крестьяне не могут ничего заработать. Если помещик предоставил поле и на нем работают k крестьян, то они получают выгоду $f(k)$, где f — функция с $f' > 0$.

1. Найдите ядро и вектор Шепли;
2. Найдите нуклеолус;
3. Предложите примерное геометрическое описание для выигрыша помещика.

---

[7] Можно считать, что цена коалиции — это супремум достижимых коалицией платежей.

[8] Эта игра реально играется в Голландии в семьях при дележе чего-нибудь между детьми. И на разных шоу, конечно.

Задача 7.20. 3 player unanimity game
Илья Муромец, Алеша Попович и Добрыня Никитич охотятся на Змеев-Горынычей. В одиночку никто из них не может одолеть ни одного Змея-Горыныча. Втроем — могут одолеть одного Змея-Горыныча за час, вдвоем — одолевают $\alpha \in (0; 1)$ Змеев-Горынычей в час.

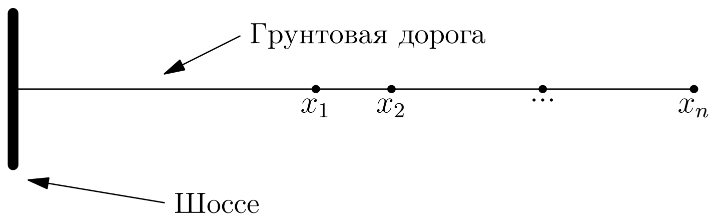
1. Найдите ядро и вектор Шепли для произвольного α;

2. Опишите переговорное множество, К-ядро и нуклеолус;

3. Найдите все устойчивые множества;

4. Является ли игра супермодулярной?

Задача 7.21. Малое Гадюкино
От шоссе до деревни Малое Гадюкино идет грунтовая дорога. Осенью дорога приходит в ужасное состояние, поэтому Малые Гадюкинцы на общем собрании решили заасфальтировать ее. При распределении затрат необходимо учесть тот факт, что деревня растянута вдоль дороги, и фактически Гадюкинцы живут на разных расстояниях от шоссе. *Тигр: В бухте Находка надо корректно распределить расходы по чистке бухты между владельцами причалов...*
Всего в Малом Гадюкино обитает n семей, на расстояниях от шоссе, равных x_1, x_2,...x_n метров. За 1 рубль можно заасфальтировать 1 метр.

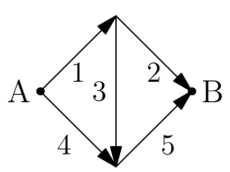


1. Сформулируйте данную игру как кооперативную и найдите в ней вектор Шепли;

2. Найдите нуклеолус;

3. Является ли игра супермодулярной?

Задача 7.22. Нефтепровод.
Нефть можно доставить из точки А в точку Б по нефтепроводу.



Собственники труб и пропускная способность труб в таблице:

Номер трубы	Пропускная способность	Владелец
1	2 л/час	Андрей
2	3 л/час	Борис
3	1 л/час	Володя
4	2 л/час	Борис
5	3 л/час	Андрей

Потребители нефти готовы платить 1 рубль за скорость передачи 1 литр/час.

1. Сформулируйте данную игру как кооперативную и найдите в ней вектор Шепли;

2. Найдите нуклеолус;

3. Является ли игра супермодулярной?

Задача 7.23.
Приведите пример несупераддитивной игры. Желательно не абстрактный, а жизненный. Желательно смешной.

Задача 7.24. Связь супермодулярности и супераддитивности.1. Верно ли, что из супермодулярности следует супераддитивность?

2. Приведите пример супераддитивной, но не супермодулярной игры. Желательно не абстрактный, а жизненный. Желательно смешной.

Задача 7.25.
У первого игрока есть l литров левой полуфилософской жидкости. У второго игрока есть $m > l$ литров правой полуфилософской жидкости. При смешивании 1 литра левой и одного литра правой полуфилософской жидкостей получается 1 кг золота. Полуфилосовская жидкость стоит 1 миллион рублей за литр, золото — 3 миллиона рублей за килограмм. Полезность от денег задана функцией $u(m) = \sqrt{m}$. Как поделить полезность между игроками? (найдите и решение Нэша, и решение Калаи-Смородински).

Задача 7.26.
Рассмотрим коалиционную игру двух игроков в характеристической форме.

1. Верно ли, что решение Нэша всегда совпадает с вектором Шепли? Докажите или приведите контр-пример;

2. Верно ли, что решение Калаи-Смородински всегда совпадает с вектором Шепли? Докажите или приведите контр-пример;

3. Верно ли, что решения Нэша и Калаи-Смородински всегда совпадают? Докажите или приведите контр-пример;

Задача 7.27.
Пусть имеется задача торга (X, d). Рассмотрим связанную с ней некооперативную игру.
Первый игрок предлагает дележ $x^I \in X$;
Второй игрок предлагает дележ $x^{II} \in X$ и вероятность $p \in [0; 1]$.
С вероятностью p игра заканчивается и игроки получают точку несогласия d. С вероятностью $(1 - p)$ игра продолжается:
Первый игрок выбирает в качестве финального дележа либо предложенный им в начале игры дележ x^I, либо лотерею px^{II} ?? $px^{II} + (1 - p)x^I$??.
Верно ли, что совершенное на подыграх равновесие в этой игре совпадает с решением Нэша задачи торга? С решением Калаи-Смородински?
АС: Туманно. Надо нарисовать дерево игры!

Задача 7.28.
Докажите, что решение Калаи-Смородинского — единственное решение, удовлетворяющее условиям эффективности, симметрии, нечувствительности к смене масштаба, индивидуальной рациональности и индивидуальной монотонности.

Задача 7.29.
Какое решение задачи торга получится, если известно, что оно удовлетворяет условиям индивидуальной рациональности, эффективности, симметрии, индивидуальной монотонности и независимости от третьих альтернатив?

Задача 7.30.
В стране N есть 5 провинций, разных по численности населения: 100, 100, 200, 300, 400 (тыс. чел.) Руководство страны состоит из 5 человек. Им даны голоса пропорционально численности провинции, т.е. 1, 1, 2, 3, 4 голоса, соответственно. Решение принимается, если за него подано не менее 8 голосов (из 11 возможных). В этой кооперативной игре выигрышем коалиции можно считать 1, если она может одобрить решение, и 0, если не может. Найдите ядро и вектор Шепли. Соответствует ли вектор Шепли численности населения?

8. Эволюционные игры

Задача 8.1. Эволюция
В проекты???

Рассмотрим вариант простейшей антагонистической игры «чет-нечет». Два игрока одновременно называют натуральное число. Если сумма чисел четная, то первый игрок выигрывает один рубль, если сумма чисел нечетная, то два рубля выигрывает второй игрок. Для начала найдите равновесие по Нэшу в этой игре. Затем проведите компьютерный эксперимент. Породим на свет 100000 особей, чей генетический код — это играемая особью чистая стратегия. Раунд проходит следующим образом: по очереди каждая особь ...(?)

9. Идеи проектов/курсовых/вопросы с неизвестным (кому?) ответом/конкурсы!

Задача 9.1.
A.Savvateev Дуополия Бертрана с неодинаковыми издержками, и/или с ограничением целочисленности цены. Найти все Нэшевские равновесия. Какие ещё могут быть равновесия?

Задача 9.2.
Приведите пример игры без условия Куна, в которой не существует секвенциального равновесия даже в смешанных стратегиях. (Эта задача довольно зыбкая; ответ мне неизвестен, да и понятие решения там плохо определимо. Однако, если кто продемонстрирует блестящий пример, заработает двойной бонус.)

АС: Миша Раскин что-то сделал!

Источник: [33]

Задача 9.3.
Конкурс. Лучшая посредственность. Каждому предлагается задумать и подать на бумаге число от 1 до 100. Тот, чье число ближе всех к половинке от среднего из названных — победитель. Призером также является — первым подавший корректную модель игры.

АС: Это игра «Гарвард»? Что тут такого?

Задача 9.4. «Лохотрон-??»
Конкурс. Аукцион «Лохотрон». На столе лежит 100 руб. — дар экзаменатора. Любой желающий участвовать в розыгрыше этой купюры вносит на стол 1 рубль (безвозвратно). Желающие продолжать розыгрыш вносят ещё по 1. И т.д. Победитель забирает все (возместив экзаменатору 100) и получает «отл.». Призером также является — первым подавший корректную модель игры.

АС: Выше это уже было!

Задача 9.5.
Конкурс. («общее знание») Трое или четверо из занявших лучшие места в другом конкурсе закрывают глаза и экзаменатор кладет на голову каждому белый платок. Известно, что платки бывают красные или белые. Разрешается открыть глаза. Угадать цвет платка на себе невозможно. Но когда экзаменатор скажет: «среди вас есть белый платок», угадать возможно (хотя он ничего нового каждому не сообщил). Выигрывает угадавший первым и объяснивший. Призером также является — первым подавший корректную модель игры.
AC: Выше это уже было!

10. Решения

2.1 Джордж может поймать Усаму. Пройдемся подряд по всем пещерам, дважды осмотрим последнюю и пройдемся в обратном порядке.

2.2 Саддам. За месяц Саддам может построить одну треть завода. За 13 месяцев у него будет 13 третей завода. Начнем их достраивать. Их тут же разрушают, но 13-ую треть мы достраиваем и 13, и 14 числа. Завод готов.

2.3 1. начнем с угла вести разделительную линию, она и будет соединять две противоположные стороны;

2. у первого

2.4 Чтобы помешать акционеру провести d кандидатов конкуренты должны провести $D-d+1$ своего кандидата. Оптимально распределить имеющиеся голоса поровну. В непрерывном случае нужно выбрать минимальное n удовлетворяющее неравенству: $\frac{nD}{d} > \frac{D(N-n)}{D-d+1}$. Получаем $n_{min} = \left\lfloor \frac{Nd}{D+1} \right\rfloor + 1$.
В дискретном случае неравенство заменяется на $\left\lfloor \frac{nD}{d} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{D(N-n)}{D-d+1} \right\rfloor$
Поэтому алгоритм выглядит так: Пробуем $n = \left\lfloor \frac{Nd}{D+1} \right\rfloor + 1$
Если оно подходит в неравенство, то объявляем его ответом.
Если оно не подходит в неравенство, то объявляем ответом $n = \left\lfloor \frac{Nd}{D+1} \right\rfloor + 2$.

2.5 Последний называет остаток от деления на k суммы цветов шляп впереди стоящих, гарантировано спасены $(n-1)$.

2.6 Первый день прийти в особой рубашке, затем копировать действия Васи.

2.7 1. нет, нужно считать условное ожидание, а для него нужны априорные вероятности;

2. для существования условного м.о. нужна конечность обычного м.о. Здесь обычное м.о. равно плюс бесконечности...

3.1 ++, –, ++, -+, ++, -+ и далее -+

3.2 цикл: -,+,+,+,+,-

3.3

3.4

3.5

3.6

3.7 Выигрышные позиции при малых n: 1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 19...
Можно заметить, что выигрышные позиции остоят друг от друга на расстояние 1 или на расстояние 2. На двумерной доске (вроде бы?) если аккуратно действовать то можно доказать, что начиная с 6-ой разницы есть цикл разниц вида: (1-2-2-2-2-1-2-)

3.8

3.9

3.10

3.11

3.12

3.13

нет, могут быть «плохие» ходы

да, по определению функции

3.14

3.15

3.16 (б) разделить кучку 7 на 1+6 или 2+5 или 3+4

3.17

3.18

3.19

3.20

3.21

3.22

3.23

3.24

3.25

4.2

4.3

4.4 Два игрока. Множество стратегий первого $S_1 = [0; +\infty)$, множество стратегий второго $S_2 = [0; +\infty)$. Платежные функции: $u_1 = \frac{1.5(s_1+s_2)}{2} - s_1$, $u_2 = \frac{1.5(s_1+s_2)}{2} - s_2$. В матричной форме не представляется, т.к. стратегий у каждого игрока бесконечное количество. Равновесие по Нэшу $s_1 = 0$, $s_2 = 0$. Стратегия $s_1 = 0$ строго доминирует любую стратегию первого игрока, аналогично со стратегией $s_2 = 0$.

4.5 Эту ситуацию можно смоделировать так: n игроков, у каждого две стратегии: стоять или сидеть. Равновесий по Нэшу два: главарь сидит и все сидят, главарь стоит и все стоят.

4.6 (б) 1;
(в) 2;
(г) $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$

4.7

4.8

4.9

4.10 да, конечно

4.11

4.12

4.13

4.14

4.15

4.16

4.17 4 равновесия

4.18

4.19

4.20

4.21

4.22

4.23

4.24

4.25

4.26

4.27

4.28

4.29 Достаточно рассмотреть отрезок вместо круга. (?)...

4.30

4.31 нет

4.32 обе партии голосуют «за» и денег не получают

4.33

4.34

4.35

4.36

4.37

4.38 (1) $(0.5; 0.25; 0.25)$ (3) Чтобы игроку было все равно что называть:
$(1-p_1)^2 = p_1^2 + (1-p_1-p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + (1-p_1-p_2-p_3)^2 = \ldots$
Получаем уравнение: $p_k^2 + p_{k+1}^2 = 2p_{k+1}(1-p_1-p_2-\ldots-p_k)$
Ищем решение в виде геометрического распределения $p_k = \frac{1-p}{p}p^k$, получаем уравнение на p:
$p^3 + p^2 + p - 1 = 0$
(4) Лотерея оказалась неустойчива к сговору игроков.

4.39

4.40

4.41

4.42 $1 - p^*a = \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}$

4.43

4.44

4.45

4.46 Если $f(x,a) = \frac{x}{a+x}$, $a > 0$, $x > 0$, то $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{a}{(a+x)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2a}{(a+x)^3}$ Может вторая производная больше нуля? Какова вероятность выигрыша команды с подготовкой x, если известно, что ей придется встретиться с командами с подготовками a_1, a_2 ...a_n?
Зависит ли потенциальный партнер команды x в следующем туре от уровня подготовки команды x?
Верно ли, что вероятность выигрыша команды складывается из подобных слагаемых с какими-то весами? Зависят ли эти веса от x?
Производная этой вероятности в свою очередь распадается на несколько слагаемых...
Может от произведения лучше взять логарифм?

4.47

4.48

4.49 1. Допустим, что такая ситуация возможна. Заметим, что переход одного школьника в другую школу не меняет среднего уровня школ в этой модели, т.к. имеется континуум школьников.

Машеньке не выгодно отклоняться: $(1+x_m)(1+\bar{x}_f) \geqslant (1+x_m)(1+\bar{x}_p) - c$

Вовочке не выгодно отклоняться: $(1+x_v)(1+\bar{x}_f) \leqslant (1+x_v)(1+\bar{x}_p) - c$

Эти неравенства упрощаются до:

$c \leqslant (1+x_v)(\bar{x}_p - \bar{x}_f)$

$c \geqslant (1+x_m)(\bar{x}_p - \bar{x}_f)$

Из первого неравенства следует, что $\bar{x}_p - \bar{x}_f > 0$. Это логично, т.к. единственный довод ходить в платную школу в данной модели — это наличие там умного окружения.

Но $x_m > x_v$ значит система неравенств не имеет решения. Подобная ситуация невозможна.

2. Из пункта а) можно сделать вывод: если в равновесии кто-то выбирает платную школу, то все школьники с более высоким уровнем интеллекта также выбирают платную школу.

Отсюда: любое равновесие по Нэшу должно иметь вид: школьники с интеллектом до x^* выбирают бесплатную школу, более умные — платную. Найдем этот x^*.

Средний контингент бесплатной школы: $\frac{x^*}{2}$, в платной — $\frac{x^*+1}{2}$.

Условие при котором школьнику лучше идти в бесплатную:

$(1+x)(1+\frac{x^*}{2}) \geqslant (1+x)(1+\frac{x^*+1}{2}) - c$

Упрощаем: $x \leqslant 2c-1$. Т.е. $x^* = 2c-1$.

Вывод:

Если $c < 0.5$, то в равновесии все выбирают бесплатную школу.

Если $c > 0.5$, то в равновесии школьники с интеллектом $x < 2c-1$ выбирают бесплатную школу, а остальные — платную.

4.50 1. $(14/3, 16/3)$, $(2/3, 16/3)$

2. ..., $(0,2)$

3. а — нет, б — похоже тоже нет

4.51 (а) равновесия в чистых нет.
(б) Первый игрок должен быть безразличен между усилиями: $e_1 \in [a;b]$. Т.е. $U(e_1) = U(a) = U(b)$. Если первый игрок выбирает уровень усилий e_1, то он выигрывает с вероятностью $\int_0^{e_1} p(t)dt$. Следовательно:
$\int_0^{e_1} p(t)dt - 2e_1^2 = 0 - 2a^2 = 1 - 2b^2$
Поскольку есть стратегия $e_1 = 0$, приносящая полезность 0, любая играемая стратегия должна приносить платеж не меньше 0.
Отсюда $a = 0$ и $b = 1/\sqrt{2}$. Взяв производную по e_1 получаем:
$p(t) = 4t$ на отрезке $[0; 1/\sqrt{2}]$.

4.52 (а) $h = 1, l = 0$

4.53

4.54

4.55

4.56

4.57

4.58

4.59

4.60 да, классическая дилемма заключенного

4.61 да, конечно

4.62 а) да; б) бесконечное количество; в) да; г) может не быть АС: проверить ответы!

4.63

4.64

4.65

4.66

4.67

4.68

4.69

4.70

4.71

4.72 Нет.

4.73

4.74

4.75

4.76 1. оптимальной стратегии нет;

2. Равномерно на $[0;2]$, гарантирует выигрыш с вероятностью не менее 0.5.

4.77

4.78

4.79

4.80 вроде, да

4.81 Пусть Саша использует функцию плотности f, а Алеша — чистую стратегию y. Находим условие безразличия для Алеши. Решаем дифф. уравнение на f. Ответ: $f(t) = \ldots t^{-3/2}$ при $t \in [0.25;1]$.

4.82 Симметричное равновесие Нэша: $0K + \frac{1}{3}N + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}Kol$

4.83 Игрок: выбирает равновероятно и затем выбирает другую. Ведущий: равновероятно прячет и равновероятно открывает пустую

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

5.7

5.8

5.9

5.10

5.11

5.12

5.13

5.14

5.15

5.16

5.17

5.18

5.19

5.20 Оптимальная стратегия имеет пороговый вид: если результат первого этапа меньше x, то идем на второй этап. Пусть Вася использует стратегию с порогом a, а Петя – с порогом b. При фиксированном a Петя выбирает b так, чтобы его вероятность выигрыша $\int_0^1 F_a(t)f_b(t)dt$ была максимальной. Здесь $F_a(t)$ – функция распределения Васиного итогового результата, а $f_b(t)$ – функция плотности Петиного. Условие первого порядка: $\int_0^1 F_a(t)dt - F_a(b) = 0$, В паре с уравнением симметричности $a = b$ получаем оптимальный порог $b = \sqrt{2} - 1$. Если результаты общеизвестны, то: проигравшему на первом этапе обязательно надо идти на второй, а выигравший идет на второй этап только если его результат меньше 1/2.

5.21 Предположим, что решение задачи, функция $p(v)$ — возрастающая.
$U(p) = (v - p)(F(v(p)))^{n-1}$, максимизируем по p
FOC: $-F(v) = (v-p)(n-1)f(v)\frac{dv}{dp} = 0$
Получаем линейное дифференциальное уравнение на $p(v)$:
$p' + p\frac{(n-1)f(v)}{F(v)} = \frac{(n-1)f(v)v}{F(v)}$
Решение соответствующего однородного: $p(v) = c(F(v))^{1-n}$
Начальное условие $p(0) = 0$
Решение неоднородного:
$p(v) = v - \frac{\int_0^v F^{n-1}(t)dt}{F^{n-1}(v)}$
Легко проверить, что $p(v)$ получилась возрастающая

5.22 I am searching for the Nash-Equilibrium bid function b(v).
Let's guess. Maybe it's linear?
I verify whether it is of the form $b(v) = c \cdot v$.
How a bidder think?
If my value is v and i bid b then my expected profit is:
$E = P(\text{I win})(v - E(\frac{cv_2+cv_3+\ldots+cv_n}{n-1}|\text{I win}))$
Where:
$P(\text{I win}) = P(cv_2 < b, cv_3 < b, \ldots, cv_n < b) = \left(\frac{b}{c}\right)^{n-1}$ $E(\frac{cv_2+cv_3+\ldots+cv_n}{n-1}|\text{I win})) = E(cv_2|cv_2 < b) = \frac{b}{2}$
It may be simplyfied to:
$E = \left(\frac{b}{c}\right)^{n-1}(v - \frac{b}{2})$
I maximize it, choosing b and get equation:
$b = v\frac{2(n-1)}{n}$.
It seems plausible. Because in the case of $n = 2$ it gives $b = v$ (truthful bidding) but in that case this auction is just the second price auction.

5.23 Let's guess.
Maybe f is linear?
In that case $b = c \cdot v$. (I prefer b for bid and v for value)
If v is uniform then (for linear f) b is also uniform.
While searching for Nash Equilibria one fix the strategies of all other players and find the best response for one selected player. So i fix strategies of all $(n-1)$ players as $b_i = c \cdot v_i$ for $i \in \{2, \ldots, n\}$
Let's denote W — the event «I Win the auction».
Expected profit or utility for risk neutral player equals to: $E(U) = P(W) \cdot (v - E(\frac{b+b_2+\ldots b_n}{n}|W)$ Here (i am the first player — just for convinience) $P(W) = P(b > b_2, b > b_3, \ldots, b > b_n) = P(cv_2 < b) \cdot \ldots \cdot P(cv_n < b) = \left(\frac{b}{c}\right. \ldots$ What do we have for $E\left(\frac{b+b_2+\ldots b_n}{n}|W\right)$? Conditionally on W i have: b — is a constant $b_2, \ldots, b_n$ are iid on $[0; b]$ (!) and their expected value is $b/2$. So $E\left(\frac{b+b_2+\ldots b_n}{n}|W\right) = \frac{b+(n-1)\cdot\frac{b}{2}}{n}$

Plugging this into $E(U)$ and maximizing by b: $E(U) = const \cdot b^{n-1}(v - b\frac{n+1}{2n})\ (n-1)\frac{1}{b} - \frac{n+1}{2n}\frac{1}{v-b\frac{n+1}{2n}} = 0$ Or
$\frac{b}{n-1} = v\frac{n+1}{2n} - b$
Or
$b = v \cdot \frac{n^2-1}{2n^2}$
And it's indeed linear!
For large n you bid about one half of the value — just like in the case of «average of the others bid» auction. Because the influence of your bid disappears.

5.24

5.25 б) да; в) $(v_1, \ldots, v_n)$, $(v_1, 0, 0, \ldots, 0)$, $(v_2, v_1, 0, 0, \ldots, 0)$

5.26

5.27

5.28

5.29

6.1 Решаем по индукции. Для удобства занумеруем пиратов начиная с самого младшего (номер 1 — зеленый юнга, ..., номер n — капитан). Если в живых остался один пират, то он предлагает все себе и сам же одобряет этот дележ. Если в живых осталось два пирата ($n = 2$), то предлагающий дележ должен все отдать юнге. Иначе юнга не согласится, и по правилам игры дележ не будет одобрен, а неодобренный дележ означает для пирата номер 2 смерть. Если в живых осталось три пирата, то пират номер 3 предлагает все себе. Сам он одобряет этот дележ, юнга одобряет (ему все равно ничего не достанется), только пират номер 2 против. Дележ одобрен. Если осталось $n > 3$ пиратов, то пират номер n предлагает все себе. Все пираты кроме пирата номер $(n-1)$ одобряют этот дележ

6.2 one of possible, the first 44 pirates are thrown overboard, and then P456 offers one gold piece to each of the odd-numbered pirates P1 through P199

6.3

6.4 Вероятность выигрыша для второго игрока — $5/9$.

6.5

6.6

6.7 а) и б) первый и последний игроки входят на середину отрезка, остальные — не входят; в) похоже так же?

6.8

6.9

6.10

6.11

6.12 A, C, D, E, H = +; B, F, G, I = -

6.13 Решаем с конца. Если мы дошли до момента $t = 100$, то перед нами одновременная игра. Рисуем ее матрицу, получаем что в ней есть единственное равновесие по Нэшу — это (требовать, требовать). Рассмотрим $t = 99$. Для следующего шага игра уже решена, поэтому перед нами снова матрица два на два. И снова оптимальное поведение для обоих игроков — требовать деньги. Продолжаем до первого момента времени. Получаем, что единственное SPNE — это следующая пара стратегий (требовать деньги в каждый момент времени, требовать деньги в каждый момент времени).

6.14

6.15 Один тигр и одна антилопа -> тигр съедает антилопу. Два тигра и одна антилопа -> тигры не едят антилопу, т.к. иначе за вкус придется заплатить жизнью. По индукции — при четном числе тигров, тигры воздерживаются от трапезы; при нечетном числе тигров один из тигров ест антилопу, а далее тигры воздерживаются от трапезы.

6.16

6.17

6.18

6.19

6.20 Когда в живых осталось только два игрока, каждый стреляет в единственного противника. Теперь рассмотрим ситуацию, когда все трое живы:
CAB. Если ходит C, то он будет убивать B, так как для C лучше стреляться один на один с A, а не с B.
ACB. Если ходит A…Вариант раз: A промазал (не важно в кого он целился). В этом случае C убивает B и A остается один на один с C, при этом ход у A. Вариант два: A целился в B и попал. Тогда C убивает A. Вариант три: A целился в C и попал. Тогда A остается один на один с B. Вариант три лучше, чем вариант два. Значит, если ходит A, то он стреляет в C.
BAC. Если ходит B…Вариант раз: B промазал (не важно в кого он целился). В этом случае A стреляет в C и C, если жив, стреляет в B. Вариант два: B целился в A и попал. Тогда C убивает B. Вариант три: B целился в C и попал. B остался один на один с C. Вариант три лучше, чем вариант два. Значит, если ходит B, то он стреляет в C.
Считаем вероятности:
CAB. $P = [1/2, 0, 1/2]$.
ACB. $P = 0.5[1/9, 8/9, 0] + 0.5[1/2, 0, 1/2] = [11/36, 16/36, 9/36]$
BAC. $P = 0.5[5/9, 4/9, 0] + 0.5[11/36, 16/36, 9/36] = [31/72, 32/72, 9/72]$
Мораль для последовательности BACBAC…:
Меньше всего шансов выжить у C (самого сильного).
A хотел бы стрелять в воздух (но нельзя), т.к. $31/72 > 11/36$
B все равно стрелять ли в C или стрелять в воздух, т.к. $32/72 = 16/36$

6.21 1 патрон, p:
при четном n — стрелять равновероятно в впереди стоящих
при нечетном n — стрелять равновероятно в позади стоящих или в воздух (если позади — никого)
$p_{n,k} = \frac{k-1}{n-1}$ — вероятность погибнуть для ковбоя номер k. (при четном n)
бесконечные патроны, p:
при четном n — стрелять равновероятно в остальных
при нечетном n — стрелять в воздух

6.22

6.23

6.24

6.25

6.26

6.27

6.28

	(ss)	(sk)	(kk)
(sss)	$\frac{1}{6}(3a-3; 3b-2)$	$\frac{1}{6}(4a-2; 2b-1)$	$\frac{1}{6}(5a-1; b)$
(ssk)	$\frac{1}{6}(2a-2; 4b-2)$	$\frac{1}{6}(4a-2; 2b-1)$	$\frac{1}{6}(5a-1; b)$
(skk)	$\frac{1}{6}(a-1; 5b-1)$	$\frac{1}{6}(a-1; 5b-1)$	$\frac{1}{6}(5a-1; b)$
(kkk)	$\frac{1}{6}(0; 6b)$	$\frac{1}{6}(0; 6b)$	$\frac{1}{6}(0; 6b)$

	(ss)	(sk)	(kk)
(ss)	$\frac{1}{5}(3a-2; 2b-2)$	$\frac{1}{5}(4a-1; b-1)$	$\frac{1}{5}(5a; 0)$
(sk)	$\frac{1}{5}(2a-1; 3b-2)$	$\frac{1}{5}(4a-1; b-1)$	$\frac{1}{5}(5a; 0)$
(kk)	$\frac{1}{5}(a; 4b-1)$	$\frac{1}{5}(a; 4b-1)$	$\frac{1}{5}(5a; 0)$

	(s)	(k)
(ss)	$\frac{1}{4}(2a-2;2b-1)$	$\frac{1}{4}(3a-1;b)$
(sk)	$\frac{1}{4}(a-1;3b-1)$	$\frac{1}{4}(3a-1;b)$
(kk)	$\frac{1}{4}(0;4b)$	$\frac{1}{4}(0;4b)$

	(s)	(k)
(s)	$\frac{1}{3}(2a-1;b-1)$	$\frac{1}{3}(3a;0)$
(k)	$\frac{1}{3}(a;2b-1)$	$\frac{1}{3}(3a;0)$

	$(\emptyset)$
(s)	$\frac{1}{2}(a-1;b)$
(k)	$\frac{1}{2}(0;2b)$

6.29

6.30

6.31

6.32

6.33

6.34

6.35

6.36

6.37

6.38

6.39

6.40 а) NE: RB, LA; SPNE: LA, б) RXX-BB, в) AX-R, г) LX-AA, RX-AA, LX-AB

6.41

6.42 Стратегия игрока имеет пороговый вид. Если первая спичка длиннее a, то вторую уже не брать. Для двух: $a^2 = \frac{1}{3}(1-a^3)$, $a \approx 0.532$

6.43 нет

6.44

6.45

6.46

6.47

6.48

6.49

6.50

6.51

6.52

6.53 Занумеруем рабочих. Делаем нумерацию общеизвестной. Публично обещаем уволить «тунеядца» с наименьшим номером. Все. В результате: Номеру 1 не выгодно быть тунеядцем — его уволят не глядя на других. Номеру 2 не выгодно быть тунеядцем, т.к. номер 1 тунеядцем не будет. И т.д.

6.54 Чтобы максимум $pf(\hat{p}) + (1-p)f(1-\hat{p})$ был в точке $\hat{p} = p$ необходимым условием будет: $pf'(p) = (1-p)f'(1-p)$.

Если левую часть обозначить $q(p)$, то получаем уравнение $q(p) = q(1-p)$. Берем любую функцию, симметричную относительно $1/2$ (останется потом только проверить, что $\hat{p} = p$ — это максимум, а не минимум). Например, подойдет $q(x) = 1$, тогда получаем $f(x) = \ln(x)$, или $q(x) = 2x(1-x)$, тогда получаем $f(x) = -x^2 + 2x$

6.55

6.56 Пусть зарплата Андрея — a, Бори — b, Васи — c.

Андрей произносит вслух предположение о значении средней зарплаты M. Боря называет Васе любое число x из промежутка $(0, b-M)$. Вася говорит Андрею число $y = x + c - M$. Андрей говорит Боре число $z = a - M + y$. Боря получил $z = a - M + c - M + x$. Далее он вычитает x, прибавляет $b - M$, делит на 3 и прибавляет M, получая $\frac{a+b+c}{3}$.

6.57

6.58

6.59

6.60 Разбив время на интервалы по несколько моментов, можно передавать информацию не в виде «коснулся-не коснулся», а целые слова.
Если вычислить солдата, стоящего в центре, то задача разбивается на две задачи меньшей размерности плюс задачка об уведомлении центрального.

6.61

6.62

6.63

6.64

6.65

6.66

6.67

6.68

6.69

6.70

6.71

6.72

6.73

6.74

6.75

6.76

6.77

6.78

6.79

6.80

6.81

6.82

6.83

6.84

6.85

6.86

6.87

6.88

6.89 $\{ak, b, ch, \mu = 0\}$
solution (full):
Слабое секвенциальное равновесие должно удовлетворять нескольким критериям:
1. Если вероятность попасть в информационное множество больше нуля, то веры в нем должны определяться по формуле условной вероятности.
2. Действия игроков должны быть оптимальными в каждом информационном множестве. При этом мы предполагаем, будто бы игра начинается с данного инфо множества, а вероятности каждого конкретного узла заданы верами.

У первого 16 стратегий, у второго — 2 стратегии. Проще искать перебором. (Хотя можно выписать матрицу 16 на 2, найти равновесия по Нэшу и попытаться дополнить их верами).
Пусть второй играет b.
Оптимальность действий в верхнем правом узле требует, чтобы там первый выбирал c.
Оптимальность действий в нижнем правом узле требует, чтобы там первый выбирал h.
Оптимальность действий в нижнем левом узле требует, чтобы там первый выбирал k.
Оптимальность действий в верхнем левом узле требует, чтобы там первый выбирал i.
Зная стратегию первого, считаем веры для второго. Веры равны по 0.5.
Проверяем, оптимальность действий второго в его информационном множестве.
При таких верах ожидаемая полезность от хода b равна 2.
При таких верах ожидаемая полезность от хода j равна -1.
Ходить b оптимально.
Итого: chki, b, mu=0.5 — WSE
Пусть второй играет j.
Оптимальность действий в верхнем правом узле требует, чтобы там первый выбирал c.
Оптимальность действий в нижнем правом узле требует, чтобы там первый выбирал h.
Оптимальность действий в нижнем левом узле требует, чтобы там первый выбирал k.
Оптимальность действий в верхнем левом узле требует, чтобы там первый выбирал a.
Зная стратегию первого, считаем веры для второго.
Веры равны: 0 (вверху) и 1 (внизу).
Проверяем, оптимальность действий второго в его информационном множестве.
При таких верах ожидаемая полезность от хода b равна 2.
При таких верах ожидаемая полезность от хода j равна -5.
Ходить j неоптимально.
Итого: нет WSE таких, что второй играет j.
Ответ: WSE: (chki, b, mu=0.5)

6.90

6.91

6.92

6.93

6.94

6.95

6.96

6.97

6.98 нет, нет

6.99

6.100

6.101

6.102

6.103

6.104

6.105

6.106

6.107

6.108

6.109

6.110

6.111

6.112

6.113

6.114

6.115

6.116

6.117

6.118

6.119

6.120 $b(x) = \frac{n}{n+1}x$

6.121

6.122

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7 В векторе Шепли производители получают одинаковую сумму x, а охранники — одинаковую сумму y. Суммарный заработок равен 6, значит $6x + 2y = 6$. Заметим, что производитель при его добавлении в коалицию получает 0, если охранника ещё нет, и 1, если охранник уже включен в коалицию. Средний вклад производителя равен вероятности того, что перед ним войдет хотя бы один охранник. Рассмотрим произвольного производителя П. Возможно три принципиальных порядка: ПОО, ОПО, ООП (про остальных производителей мы забываем, т.к. на заработок П они не влияют. Получаем, что средний заработок П равен $2/3$. Отсюда охранники получают по 1.

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

7.13

7.14

7.15

7.16 Ищем вектор Шепли для $n \geqslant 2$. Все гномы одинаковые, значит и получают одинаково. Общий доход равен k если гномов $2k$ или $2k+1$. Соответственно, вектор Шепли — это $(0.5, 0.5, \ldots)$ для четного n и $(\frac{k}{2k+1}, \frac{k}{2k+1}, \ldots)$ для $n = 2k+1$.
Ищем ядро. Если $n = 2$, то ядро это все векторы вида $x_1 + x_2 = 1$. Рассмотрим случай $n = 2k+1 > 2$. Сумма выигрышей любых $2k$ гномов должна быть больше либо равна k, т.е. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n - x_i \geqslant k$ для всех i (без любого гнома можно обойтись). Сложим все $2k+1$ неравенство, получим, что $2k \cdot (x_1 + x_2 + \ldots x_n) \geqslant (2k+1)k$. С другой стороны $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant k$. Противоречие, ядро пусто. Возьмем случай $n = 2k > 2$. Пусть какому-нибудь гному обещают меньше $v < 1/2$. Поскольку любые два гнома могут заработать 1, то из этого следует, что все остальные гномы должны получать как минимум $1 - v > 1/2$. Тогда суммарный заработок будет больше k, что

невозможно. Значит все гномы получают минимум по $1/2$. А больше — нет денег. Поэтому при $n = 2k$ ядро совпадает с вектором Шепли.
Мораль: вектор Шепли старается делить «по справедливости», т.е. если игроки одинаковые, значит всем поровну. А ядро проверяет «устойчивость» дележа. Когда гномов $2k+1$ один гном оказывается не при делах, и он готов на любую уступку, «да я даже за одну копейку готов нести!». И этот гном без ноши мешает договорам других.

7.17 $\left(\frac{7}{36}, \frac{13}{36}, \frac{16}{36}\right)$, ядро пусто

7.18

7.19

7.20

7.21

7.22

7.23 Например, Волк, Коза и Капуста. У одного игрока — Волк, у второго — Коза, у третьего- Капуста. Если их владения объединить и не предпринять никаких мер, то стоимость их коалиции ниже суммы их стоимостей.

7.24 а) да

7.25

7.26

7.27

7.28

7.29 «По братски», т.е. всем поровну.

7.30 Я

8.1

9.1 здесь ссылку — где поискать в инете

9.2 мне казалось есть какая-то статья в Journal of gt and ec. beh

9.3

9.4

9.5

11. Названия концепций решения (Коковин+)

Максимин (MM) - исход игры (профиль стратегий) при осторожном поведении всех, то есть при максимизации гарантированных выигрышей, не учитывая в своих расчетах целей и текущих решений партнеров.

Решение в (слабо-) доминирующих стратегиях (WDE) или слабо-доминирующее равновесие - исход игры в случае наличия у каждого "абсолютно-оптимальной" стратегии, то есть стратегии, (слабо) доминирующей над всеми другими его стратегиями независимо от ходов партнеров, их целей и текущих решений. [Аналогично и определение сильно-доминирующего равновесия **SDE**.]

Решение в итерационно- (слабо-)недоминируемых стратегиях (IND$_W$) - исход игры в случае одновременного итерационного отбрасывания (слабо-) доминируемых стратегий каждым игроком и соответствующего редуцирования игры: исключения отброшенных стратегий из рассмотрения ВСЕМИ игроками. Требует знания или целей партнеров или факта отбрасывания стратегий. [Аналогично определяется Решение в итерационно- сильно-недоминируемых стратегиях (IND$_S$).]

Равновесие Нэша (NE) - исход игры (профиль стратегий), при котором ни у одного игрока нет стимула отступить от своей текущей стратегии, при знании текущих стратегий партнеров и гипотезе, что партнеры не отступят. [Эквивалентный вариант: Равновесие Нэша - исход, когда все сходили одновременно вслепую, имея лишь некоторые ожидания о запланированном ходе партнеров, а когда карты открылись, то все ожидания оправдались.]

Совершенное в Подыграх Равновесие (Нэша) (SPE = SPNE) - это равновесие Нэша в развернутой форме игры, являющееся также равновесием Нэша во всех ее подыграх.

Слабое секвенциальное равновесие Weak sequential equilibrium, WSE

Секвенциальное равновесие Sequential equilibrium, SE

Совершенное байесовское равновесие Perfect bayesian equilibrium, PBE Применимо только к динамическим байесовским играм.

Слабый оптимум Парето ($WPareto$) - возможный исход, который нельзя улучшить для всех игроков сразу, даже согласовав их ходы. **Сильный оптимум Парето** ($Pareto$) - исход, который нельзя улучшить для кого-то, не ухудшив для других.

Элемент (слабого) Ядра игры (C) - возможный исход, который не блокируется ни одной коалицией в переговорах. Коалиция блокирует в переговорах (отвергает) вариант, если имеет другой, строго более желательный для всех своих членов, среди СВОИХ возможностей (среди вариантов, достижимых независимо от действий вне-коалиционных игроков). Т.е. Ядро - множество вариантов, вне которого соглашений быть не может.

Сокращения: MM – MaxiMin, DE – Dominant Equilibrium, SDE – Strong Dominant Equilibrium, IND_W – Iterative (Weakly) Non-Dominant Equilibrium, SoE – Sophisticated Equilibrium, NE - Nash Equilibrium, NE_m – Nash Equilibrium in Mixed stratagies, $SP(N)E$ – Subgame Perfect (Nash) Equilibrium, StE – Stackelberg Equilibrium, $Pareto$ - Pareto, C – Core.

12. Названия некоторых стратегий в повторяющейся дилемме заключенного

Обозначения:
a^t - исход базовой игры с номером t ;
a_i^t - ход сделанный i-ым игроком в базовой игре с номером t .
s_i - стратегия i-го игрока;
h^t - предыстория игры к моменту времени $t : h^t = \{a^1, a^2, ...a^{t-1}\}$;
$s_i(h^t)$ - ход, предписываемый стратегией s_i после истории h^t (в момент t);
Стратегия «Всегда кооперироваться» (always cooperate)
Предписывает всегда играть ход $c : s_i(h^t) = c, \quad \forall t$
Наивная стратегия переключения (naive grim trigger)
Предписывает играть ход c в первой партии и далее до тех пор, пока противник играет ход c :
$s_i(h^t) = \{ \ c, \quad t = 1c, \quad t > 1, \quad \forall \tau < t \Rightarrow a_j^\tau = cd, \quad otherwise$
Стратегия переключения (grim trigger)
Предписывает играть ход c в первой партии и далее до тех пор, пока оба игрока играют ход c :
$s_i(h^t) = \{ \ c, \quad t = 1c, \quad t > 1, \quad \forall \tau < t \Rightarrow a^\tau = (c; c)d, \quad otherwise$
Стратегия «Зуб за зуб» (Tit for Tat)
Предписывает играть ход c в первой партии и далее повторять ход противника в предыдущей партии: $s_i(h^t) = \{ \ c, \quad t = 1a_j^{t-1}, \quad t > 1$
Стратегия Кнута и Пряника (Win-Stay, Lose-Shift; Pavlov strategy)

Предписывает играть ход c в первой партии и далее играть ход c , если в предыдущей партии действия игроков совпали: $s_i\left(h^t\right) = \{ \ c, \quad t = 1c, \quad t > 1, \quad a^{t-1} \in \{(c;c),(d;d)\}d, \quad otherwise$
Тигр: Эта хитрая стратегия была внедрена известными специалистами по теории игр Кнутом Б.Б. и Пряником В.Л.
Стратегия ограниченного возмездия (limited retaliation)
Предписывает играть ход c , пока все игроки кооперируются. Если произошло нарушение, то в течение k ходов играть d , затем вернуться в исходное состояние. Состоит из трех фаз: Фаза 1: сыграть ход c и переключиться в фазу 2; Фаза 2: играть ход c до тех пор, пока все игроки играют ход c, в противном случае переключиться в фазу 3, положив $\tau := 0$; Фаза 3: пока $\tau \leqslant k$, положить $\tau := \tau + 1$ и играть ход d , иначе переключиться в фазу 1.

13. Источники мудрости

Список литературы

[1] Gametheory.net. www.gametheory.net, Если захотелось поискать какие-то ресурсы по теории игр, то есть вероятность, что они там упомянуты. Хотя гугл и так рулит.

[2] Кинофильм «Игры разума» («beautiful mind»).

Абсолютно бесполезен при подготовке к экзамену по теории игр.

[3] Курс Массачусетского Технологического института.

http://web.mit.edu/14.12/www/index.html Лекции, задачи, образцы экзамена.

[4] Ken Binmore. *Fun and Games.* D.C. Heath, 1992.

Оригинальная книжка по теории игр для начинающих! Серьезно и с юмором! Есть доказательство теоремы о существовании равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях, построенное на игре «Шестиугольники».

[5] Brams and Taylor. An envy-free cake division protocol. 1995.

Как поделить пирог без весов, чтобы никто не завидовал другому?

[6] Cramton. Курс лекций. Автор cramton.

Прекрасный курс с лекционными материалами и задачами для магистров.

[7] Chrusutuan Ewerhart. Chess-like games are dominance solvable in at most two steps. *Games and Economic Behavior*, 33:41–47.

Коротенькая статья, не требующая математической подготовки, где изложено подробное (аж запутывает) доказательство того, что если бы перевести шахматы в матричную форму, то решили бы их по доминированию за два шага.

[8] Thomas Ferguson and Christian Genest. Toetjes na. 2003.

Братья по очереди пытаются угадать, сколько стоил пирог. От пирога остался только один кусочек - он достанется тому, кто оказался ближе всех к истинной цене. http://www.math.ucla.edu/~tom/papers/toetjes.pdf.

[9] Robert Gibbons. *Game Theory for Applied Economists.* Princeton University Press, 1992.

[10] H. Gintis. *Game theory evolving.* Second Edition,Princeton University Press, 2009.

Большой сборник задач, связанных между собой. При особой усидчивости можно освоить теорию игр по задачам, узнав кучу интересных вещей!

[11] Jowas. Politically incorrect math problems.

www.mai.liu.se/~jowas/Incorrect Здесь были политически некорректные задачи по теории игр, но они куда-то делись.

[12] Kockesen. Курс лекций, автор kockesen.

http://www.columbia.edu/~lk290/gameug.htm Еще один хороший курс. Лекции и задачи..

[13] Mas-Colell. *Microeconomic theory.* Oxford University Press, 1995.

Толстая книжка по микроэкономике (*Тигр: говорят, можно использовать как талисман против злых духов*), где есть несколько глав про теорию игр. Изложено занудно и аккуратно.

[14] J. Miller. *Game theory at work.* McGraw-Hill, 2003.

Книга, занимающая промежуточное положение между хорошей комедией и учебником для вузов, рекомендованным Министерством образования РФ.

[15] R.B. Myerson. *Game Theory (Analysis of Condlict).* Harvard University Press, 1991.

[16] M. Osborne. *Introduction to game theory.* Oxford University Press, 2004.

Лучший учебник по теории игр для начинающих. Много задач, широкий охват материала.

[17] M. Osborne and A. Rubinstein. *A course in game theory.* The MIT Press, 1994.

Можно рассматривать как более серьезное продолжение книги Osborne, Introduction to game theory.

[18] Elisha Peterson and Francis Edward Su. Exact procedures for envy-free chore division. 1998.

http://citeseer.ist.psu.edu/22271.html Как поделить грязную работу, чтобы никто не завидовал другому?

[19] Polisci. Курс лекций. Автор polisci.

Прекрасный курс с лекционными материалами и задачами для бакалавров. Наиболее соответствует курсу ГУ-ВШЭ в настоящее время. Единственный минус - он там темнит по-поводу perfect bayesian nash equilibrium.

[20] Martin Shubik. The dollar auction game: A paradox in noncooperative behavior and escalation. *The Journal of Conflict Resolution*, 15, 1971.

[21] Branislav L. Slantchev. Game theory: Static and dynamic games of incomplete information. http://slantchev.ucsd.edu/courses/gt/06-incomplete-info.pdf.

[22] Lones Smith. Computing the diffusion process limit of a sequence of suitably scaled continuous time stochastic processes.

, Как заменить процесс с частыми и мелкими случайными шоками на процесс Ито? Всего одна страница.

[23] R. Sprague. Uber zwei abarten von nim. *Tohoku Math. J.*, 43:351–354, 1937.

[24] F. Squintani. Notes for non-cooperative game theory.

Заметки к лекциям магистерского уровня. На стадии разработки (похоже вечной), т.е. есть пропуски и небольшие ошибки. Стоит прочитать тем, кто хочет заниматься теорией игр. Автор убрал их из открытого доступа в сети. Может готовятся к публикации... Но кто ищет ;).

[25] F. Vega-Redondo. *Economics and the Theory of Games.*

Книжка с нестандартными обозначениями.

[26] Winkler. Games people don't play.

Несколько красивейших задач по теории игр с решениями! Например, как получить пользу от посторонней информации?

[27] Гусейн-Заде. *Разборчивая невеста.* МЦНМО, 2003.

http://www.mccme.ru/mmmf-lectures/books/books/books.php Задача про разборчивую невесту, изложенная на школьном уровне.

[28] В.И. Данилов. *Лекции по теориЯ игр.* РЭШ, 2002.

http://www.nes.ru/RUssIan/research/abstracts/2002/Danilov-r.htm

Хороший курс для математиков на русском.

[29] Илья Ильф and Евгений Петров. *Двенадцать стульев.* М, Правда, 1956.

Рекомендуется к прочтению даже тем, кто не собирается заниматься теорией игр.

[30] Эммануил Ласкер. Brettspiele der volker. 1931.

[31] Баше де Мезирьяк. Занимательные и приятные числовые задачи. 1612.

Ссылка на переиздание 1884 года:

http://cnum.cnam.fr/DET/8PY45.html, задача 22.

[32] Брамс С. and А. Тейлор. *Делим по справедливости.* Москва, Синтег, 2002.

Книга с огромным количеством примеров дележа! Кэмп-Дэвидские соглашения и процедура дележа «подстраивающийся победитель». Ничего кроме умения решать уравнения вроде $6x + 7 = 8$ не требуется.

[33] Алексей Савватеев. Курс в НМУ. 2004.

https://www.mccme.ru/ium/s04/games.html.

[34] Г. Секей. *Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике.* Мир, 1990.

Куча парадоксов, занимательных задач и фактов! Элементарная теория вероятностей!

[35] Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики, 1985.

14. Косяки!!!

Todo list