1. Предположим, что условия теоремы об одинаковых доходностях выполнены.

   (a) Может ли выбор механизма проведения аукциона влиять на ковариацию выплат двух разных игроков?

   (b) Найдите ковариацию выплат первого и второго игрока в аукционе первой цены с независимыми и равномерными на $[0;1]$ ценностями. Hint: можно пользоваться тем, что средняя выплата равна $\frac{n-1}{n(n+1)}$.

   Solution:

$$Cov(Pay_1, Pay_2) = E(Pay_1 Pay_2) - E(Pay_1)E(Pay_2) \tag{1}$$

   На вычитаемое способ аукциона влиять не может в силу теоремы об одинаковой доходности. Сосредоточимся на $E(Pay_1 Pay_2)$. В аукционе первой цены никакие два игрока не могут платить одновременно, поэтому произведение выплат всегда равно нулю, т.е. $E(Pay_1 Pay_2) = 0$. В аукционе «Платят все» произведение выплат строго положительно, поэтому $E(Pay_1 Pay_2) > 0$. Значит способ проведения аукциона может влиять на ковариацию.

2. «Наследство» по типу аукциона второй цены. Двум сыновьям достался земельный участок в наследство. Отец не хотел, чтобы участок был разделен, поэтому по завещанию установлены следущие правила: два брата одновременно делают ставки. Участок получает тот, кто сделал большую ставку. При этом получивший участок выплачивает проигравшему меньшую из двух ставок. Ценности участка для игроков независимы и равномерны на $[0;1]$.

   Найдите равновесие Нэша.

   Solution.

   Ожидаемая прибыль:

$$\pi(x, b_1) = (x - E(b(X_2)|b(X_2) < b_1)) \cdot P(b(X_2) < b_1) + b_1 P(b(X_2) > b_1) \tag{2}$$

   После чудо-замены $b_1 = b(a)$ и упрощения вероятностей:

$$\pi = (x - E(b(X_2)|X_2 < a))P(X_2 < a) + b(a)(1 - P(X_2 < a)) \tag{3}$$

   Или:

$$\pi = xF(a) - E(b(X_2) \cdot 1_{X_2 < a})) + b(a)(1 - F(a)) \tag{4}$$

   В записи с интегралом:

$$\pi = xF(a) - \int_0^a b(t)f(t)dt + b(a)(1 - F(a)) \tag{5}$$

   Приравниваем производную к нулю:

$$xf(a) - b(a)f(a) - b(a)f(a) + b'(a)(1 - F(a)) = 0 \tag{6}$$

   Для случая равномерного распределения:

$$x - 2b(x) + b'(x)(1 - x) = 0 \tag{7}$$

Подбором коэффициентов находим линейное решение:

$$b(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} \tag{8}$$

3. Рассмотрим аукцион второй цены. Предположим, что ценности независимы и имеют регулярное распределение. Агенты не нейтральны к риску. Их отношение к риску отражается функцией полезности $u()$. Про $u()$ известно, что она непрерывна, строго возрастает и для удобства $u(0) = 0$. Т.е. если игрок получает товар ценностью x и платит продавцу m, то его полезность равна $u(x - m)$.

   Найдите равновесие Нэша.

   Как в лекции, составляем табличку и видим, что $b_1 = X_1$ нестрого доминирует остальные стратегии.

4. Рассмотрим аукцион второй цены с резервной ставкой r. Резервная ставка — это минимальная цена за которую продавец согласен расстаться с товаром. Если все игроки сделали ставки ниже r, товар остается у продавца, никто ничего не платит. Если хотя бы один игрок сделал ставку выше r, то товар достается игроку сделавшему самую высокую ставку и платит он максимум между второй по величине ставкой и r. Константа r общеизвестна всем игрокам. Ценности независимы и имеют регулярное распределение. Агенты нейтральны к риску.

   Найдите равновесие Нэша.

   Как в лекции, составляем табличку и видим, что $b_1 = X_1$ нестрого доминирует остальные стратегии.

5. Рассмотрим аукцион первой цены с двумя игроками. Ценности независимы и равномерны на $[0; 1]$. Но ставку можно сделать только 0 или 0.5. Если ставки игроков совпали, то товар достается случайно выбираемому игроку за соответствующую плату.

   Найдите равновесие Нэша.

   Предположим, что стратегия имеет вид:

   Если ценность ниже порога x^*, то делать ставку 0, иначе делать ставку 0.5.

   Осталось найти x^*.

   Допустим, что второй игрок использует такую стратегию.

   Если первый сделает ставку ноль, то его ожидаемый выигрыш будет равен:

$$\pi(x, 0) = x^* \frac{1}{2} x \tag{9}$$

   Если первый сделает ставку 0.5, то его ожидаемый выигрыш будет равен:

$$\pi(x, 0.5) = (x - 0.5)x^* + (x - 0.5)\frac{1}{2}(1 - x^*) = (x - 0.5)\frac{1}{2}(x^* + 1) \tag{10}$$

   Находим условие, при котором $\pi(x, 0.5) > \pi(x, 0)$, получаем:

$$x > \frac{1}{2}(x^* + 1) \tag{11}$$

   Значит правая часть представляет собой x^*. Решаем уравнение $x^* = \frac{1}{2}(x^* + 1)$, получаем $x^* = 1$. Т.е. вне зависимости от ценности игрокам имеет смысл ставить 0.