

Моделирование аукционов. Азбука.

Борис Демешев

23 марта 2011 г.

Содержание

1. Аукцион «Платят все!». Покупатели одновременно делают ставки. Товар достается тому, кто назвал наибольшую ставку, но платят все игроки. Каждый платит свою ставку. Ценности товара для покупателей имеют независимое регулярное распределение с функцией плотности $f(x) = 2x$ на $[0; 1]$.

Как нужно изменить правила этой игры, чтобы игрокам было выгодно правдиво декларировать свои ценности, но при этом ни один игрок не выиграл и не проиграл?

Hint: Смотрите список задач к лекции один

2. Наследство. Двум сыновьям достался земельный участок в наследство. Отец не хотел, чтобы участок был разделен, поэтому по завещанию установлены следующие правила: два брата одновременно делают ставки. Участок получает тот, кто сделал большую ставку. При этом получивший участок выплачивает свою ставку проигравшему. Ценности участка независимы и равномерны на $[0; 1]$.

Как нужно изменить правила этой игры, чтобы игрокам было выгодно правдиво декларировать свои ценности, но при этом ни один игрок не выиграл и не проиграл?

Hint: Смотрите список задач к лекции один

3. Аукцион «Победитель платит чужую среднюю». Покупатели одновременно делают ставки. Товар достается тому, кто назвал наибольшую ставку. Победитель платит среднюю арифметическую ставок остальных игроков. Ценности товара для покупателей независимы и равномерно распределены на $[0; 1]$.

Как нужно изменить правила этой игры, чтобы игрокам было выгодно правдиво декларировать свои ценности, но при этом ни один игрок не выиграл и не проиграл?

4. Три игрока. Ценности V_1 , V_2 и V_3 равномерны на $[0; 1]$ и независимы. Первый и второй игрок знают значение своих ценностей, т.е. $X_1 = V_1$ и $X_2 = V_2$. А третий игрок ничего не знает!

Найдите равновесие Нэша на аукционе первой, второй цены и на кнопочном аукционе.

5. Два игрока. Ценности независимы имеют экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 1$. Сигналы совпадают с ценностями, $X_i = V_i$. Найдите равновесие Нэша на аукционе первой цены.
6. Два игрока. Ценности независимы и имеют экспоненциальные распределения с параметрами $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$. Сигналы совпадают с ценностями, $X_i = V_i$.

- (a) Предположим, что аукцион проводится по принципу аукциона второй цены с резервной ценой r .
- Найдите равновесие Нэша.
 - В осях (X_1, X_2) изобразите три множества: товар достается первому игроку, товар достается второму игроку, товар остается у продавца.
- (b) Разработайте оптимальный аукцион. Будет ли он отличаться от аукциона второй цены?
- Найдите равновесие Нэша.
 - В осях (X_1, X_2) изобразите три множества: товар достается первому игроку, товар достается второму игроку, товар остается у продавца.
7. На аукционе первой цены участвуют n потенциальных покупателей. Продается один товар, $V_i = X_i$, ценности равномерны на $[0; 1]$ и независимы. Доставка товара по почте стоит 0.1. Доставку оплачивает покупатель. Игроки одновременно решают делать ли ставки, и если делать, то какие.
- Найдите равновесные стратегии и ожидаемую прибыль продавца.
 - Как изменится предыдущий ответ, если доставку оплачивает продавец?
 - Решите аналогичную задачу для аукциона второй цены.
8. На аукционе участвуют n игроков. Пусть функция распределения сигналов имеет вид $F(x) = x^a$ на $[0; 1]$, где a — это некая константа, $a \geq 1$.
- Найдите $MR(x)$. Является ли $MR(x)$ возрастающей?
 - Постройте оптимальный аукцион.
9. Рассмотрим аукцион n игроков. Ценности независимы и равномерны на $[0; 1]$, $X_i = V_i$. Игроки одновременно делают свои ставки b_i . Продавец считает синус каждой ставки, $\hat{b}_i = \sin(b_i)$. И проводит обычный аукцион второй цены с реальными ставками равными \hat{b}_i . Т.е. побеждает тот, у кого \hat{b}_i больше, а платит он вторую по величине \hat{b}_i . Является ли этот механизм правдивым?
10. Общественное благо наоборот. Рассмотрим задачу выбора поставщика общественного блага. Жители деревни Малое Гадюкино решили проложить к деревне новую дорогу от шоссе. Есть два варианта. Вариант А: поручить все одной организации, которая все сделает «под ключ» за 100 тыс. рублей: и дорогу выложит и фонари поставит. Вариант Б: поручить одной организации собственно прокладку дороги (60 тыс. рублей) и другой — фонари (30 тыс. рублей). Выгода жителей деревни — случайная величина, X равномерна на $[80; 180]$ тыс. рублей:

•	Не строить	Строить «под ключ»	Строить по частям
Фирма А	0	-100	0
Фирма Б1	0	0	-60
Фирма Б2	0	0	-30
Жители	0	X	X

Опишите механизм VCG применительно к этой задаче. Т.е. требуется описать кто и сколько платит, в зависимости от ставок игроков. Общее описание механизма VCG за ответ не засчитывается.

11. Кнопка «Buy now!»

Два игрока торгуются за товар на кнопочном аукционе с возможностью немедленной покупки товара. Ценности $X_i = V_i$ независимы и равномерны на $[0; 1]$. Продавец дает игрокам возможность купить товар немедленно по фиксированной цене a . Подробнее. В начале аукциона текущая цена равна нулю и оба игрока жмут на свои кнопки. Текущая цена растет с течением времени. Кто первый отпустил свою кнопку, тот проиграл. Но в любой момент пока аукцион не закончился, любой игрок может сказать: «Покупаю по цене a ».

- (a) Что является стратегией игрока на этом аукционе?
- (b) Применима ли в данном случае теорема об одинаковой доходности?
- (c) Найдите равновесие Нэша

12. Есть шесть покупателей. У продавца две чудо-швабры. Каждый покупатель хочет только одну чудо-швабру. Продавец решил продавать эти две чудо швабры путем двух последовательных аукционов первой цены, на каждом из которых будет выставляться одна чудо-швабра. Каждый игрок знает ценность чудо-швабры для себя, $X_i = V_i$. Ценности независимы и равномерны на $[0; 1]$. Ценности не меняются со временем. Когда проводится второй аукцион известна только ставка, которую сделал победитель первого.

- (a) Применима ли в данном случае теорема об одинаковой доходности или ее небольшая вариация?
- (b) Что является стратегией игрока в этой игре?
- (c) Найдите равновесие Нэша
- (d) Верно ли, что средние цены на обоих аукционах равны?
- (e) Какова вероятность того, что на первом аукционе цена будет больше, чем на втором?

13. В моделях аукциона первой и второй цены с независимыми, равномерными на $[0; 1]$ ценностями покупателей сравните дисперсию выигрыша продавца.

14. Аукцион «Все платят среднюю ставку». Покупатели одновременно делают ставки. Товар достается тому, кто назвал наибольшую ставку, но платят все игроки. Все игроки платят среднюю сумму ставок. Ценности товара для покупателей имеют независимое регулярное распределение с функцией распределения $F()$. Используя трюк с теоремой об одинаковых доходностях (см. пример ...) найдите оптимальные стратегии игроков, $b(x)$, средний доход продавца. ...

15. Сравнение правовых систем.

Две стороны судятся по спорному вопросу.

16.