Моделирование аукционов. Домашняя работа - 3.

1. Техническая задача.

   (a) Выразите $(a+c) \vee (b+c)$ через $a \vee b$. Выразите $(a+c) \wedge (b+c)$ через $a \wedge b$.

   (b) Случайные величины Z_1, ..., Z_n аффилированы между собой. Случайные величины W_1, ..., W_k — аффилированы между собой. Набор случайных величин Z_1, ..., Z_n не зависит от набора W_1, ..., W_k. Верно ли, что набор случайных величин Z_1, ..., Z_n, W_1, ..., W_k аффилирован?

$$(a+c) \vee (b+c) = a \vee b + c \tag{1}$$

$$(a+c) \wedge (b+c) = a \wedge b + c \tag{2}$$

Да, набор Z_1, ..., Z_n, W_1, ..., W_k аффилирован. В силу независимости логарифм совместной функции плотности разлагается в сумму логарифмов:

$$\ln f_{Z,W}(z_1, ..., z_n, w_1, ..., w_k) = \ln f_Z(z_1, ..., z_n) + \ln f_W(w_1, ..., w_k) \tag{3}$$

И смешанные производные равны либо нулю, либо неотрицательны в силу аффилированности Z_i между собой и W_i между собой.

2. Пусть V — общая ценность товара для двух игроков, равномерна на $[1; 2]$. Величины R_1 и R_2 — независимы между собой и с V и равномерны на $[-0.5; 0.5]$. По смыслу: R_1 и R_2 — это ошибки игроков при подсчете ценности товара V. Игроки получают сигналы $X_i = V + R_i$, т.е. игроки знают ценность V с ошибкой.

   (a) Найдите совместную функцию плотности X_1 и X_2. Верно ли, что X_1 и X_2 аффилированны?

   (b) Найдите $v(x, y) = E(V|X_1 = x, Y_1 = y)$. Найдите равновесие Нэша на аукционе второй цены.

   (c) Найдите совместную функцию плотности X_1 и Y_1, $g(x, y)$

Hint: В решении контрольной есть похожая задача. А $g(x, y)$ можно неплохо упростить пользуясь предыдущей задачей.

Поскольку игроков всего двое, то $g(x, y)$ — это просто совместная функция плотности X_1 и X_2.

Находим условную совместную плотность:

$$p(x_1, x_2|v) = 1, \quad x_1, x_2 \in [v - 0.5; v + 0.5] \tag{4}$$

Значит:

$$p(x_1, x_2, v) = 1, \quad x_1, x_2 \in [v - 0.5; v + 0.5], v \in [1; 2] \tag{5}$$

Заметим, что область, где плотность положительна, можно описать условием:

$$v \in [(x_1 - 0.5) \vee (x_2 - 0.5); (x_1 + 0.5) \wedge (x_2 + 0.5)] = [v_{min}; v_{max}] \tag{6}$$

Интегрируем по v и получаем:

$$p(x_1, x_2) = \int_{v_{min}}^{v_{max}} 1dv = v_{max} - v_{min} = x_1 \wedge x_2 - x_1 \vee x_2 + 1 \tag{7}$$

$$E(V|X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \int vp(v|x_1, x_2)dv = \int v\frac{p(x_1, x_2, v)}{p(x_1, x_2)}dv = \frac{\int vp(x_1, x_2, v)dv}{p(x_1, x_2)} \tag{8}$$

В числителе:

$$\int_{v_{min}}^{v_{max}} vdv = \frac{v_{max}^2 - v_{min}^2}{2} \tag{9}$$

Значит в итоге:

$$v(x_1, x_2) = \frac{v_{max}^2 - v_{min}^2}{2 \cdot (v_{max} - v_{min})} = \frac{v_{max} + v_{min}}{2} = \frac{x_1 \wedge x_2 + x_1 \vee x_2}{2} \tag{10}$$

Равновесие Нэша на аукционе второй цены:

$$v(x, x) = x \tag{11}$$

3. Пусть R_1, R_2 и S — равномерны на $[0; 1]$ и независимы. Ценность товара для первого игрока, $V_1 = 0.8X_1 + 0.2X_2$ и для второго — $V_2 = 0.8X_2 + 0.2X_1$. Первый игрок получает сигнал $X_1 = S + R_1$. Второй игрок получает сигнал $X_2 = S + R_2$.
   (a) Найдите $g(x, y)$, $R(y|x)$ и $v(x, y) = E(V|X_1 = x, Y_1 = y)$
   (b) Используя предыдущие функции найдите равновесие Нэша на аукционе второй цены, первой цены и кнопочном аукционе

Игроков всего два, значит $g(x, y)$ — просто совместная функция плотности X_1 и X_2.

$$p(x_1, x_2|s) = 1 \cdot 1, \quad x_1, x_2 \in [s; s + 1] \tag{12}$$

Следовательно:

$$p(x_1, x_2, s) = 1 \cdot 1, \quad x_1, x_2 \in [s; s + 1], s \in [0; 1] \tag{13}$$

Заметим, что область, где плотность положительна, можно описать условием:

$$s \in [x_1 \vee x_2 - 1; x_1 \wedge x_2] = [s_{min}; s_{max}] \tag{14}$$

Интегрируем по s и получаем:

$$p(x_1, x_2) = \int_{s_{min}}^{s_{max}} 1ds = s_{max} - s_{min} = x_1 \wedge x_2 - x_1 \vee x_2 + 1 \tag{15}$$

Плотность обращается в ноль за пределами участка $0 \le x_1, x_2 \le 2$, $x_1 - 1 \le x_2 \le x_1 + 1$.

Чтобы найти $R(y|x)$ вспоминаем что это такое:

$$R(y|x) = \frac{g(x,y)}{\int_0^y g(x,t)dt} \tag{16}$$

Возникает четыре случая для $R(y|x)$...

К сожалению, в явном виде хорошего мало. Стандартная максимизация с чудо-заменой дает дифференциальное уравнение:

$$(0.8x - b'(x)) \int_0^x p(x, x_2) dx_2 + x - b(x) = 0 \tag{17}$$

Возникает два случая из-за ломаной $p(x_1, x_2)$...

Если $x \in [0; 1]$, то:

$$(0.8x - b'(x)) \cdot (x - 0.5x^2) + x - b(x) = 0 \tag{18}$$

Из этого уравнения надо выбрать решение с $b(0) = 0$.

Если $x \in [1; 2]$, то:

$$(0.8x - b'(x)) \cdot 0.5 + x - b(x) = 0 \tag{19}$$

Из этого уравнения надо выбрать решение непрерывно склеивающееся с первым в точке $x = 1$.

Находим $v(x, y)$:

$$v(x,y) = E(V_1|X_1 = x, Y_1 = y) = E(V_1|X_1 = x, X_2 = y) = 0.8x + 0.2y \tag{20}$$

Равновесие Нэша на аукционе второй цены:

$$b(x) = v(x,x) = x \tag{21}$$

Кнопочный аукцион совпадает с аукционом второй цены.

4. Продолжение задачи 2 с контрольной (можно использовать все полученные в ней результаты). На аукционе продается картина, которая равновероятно является «Джокондой» Леонардо да Винчи или ее подделкой. За нее торгуются n покупателей. Ценность картины для всех покупателей одинакова, $V_1 = V_2 = ... = V_n = V$ и равна 1, если это оригинал и 0, если подделка.

   Если $V = 0$, то сигналы X_i условно независимы и равномерны на $[0; 1]$. Если $V = 1$, то сигналы X_i условно независимы и имеют функцию плотности $f(x|V = 1) = 2x$ при $x \in [0; 1]$

   (a) Найдите равновесие Нэша на аукционе второй цены

   (b) Найдите $E(V|X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3 \dots X_n = x_n)$

   (c) С помощью предыдущего пункта найдите функции $b^n(x)$, $b^{n-1}(x, p_n)$ и $b^{n-2}(x, p_{n-1}, p_n)$ в равновесии Нэша на кнопочном аукционе

В решении контрольной 3 мы получили результат:

$$v(x,y) = \frac{4xy^{n-1}}{1+4xy^{n-1}} \tag{22}$$

Следовательно, равновесие Нэша на аукционе второй цены:

$$b(x) = v(x,x) = \frac{4x^n}{1+4x^n} \tag{23}$$

Можно отметить, что функция растет с ростом x и падает с ростом n.

Теперь рассмотрим $A = \{X_1 \in [x_1; x_1+\Delta] \cap ... \cap X_n \in [x_n; x_n+\Delta]\}$. Как и в решении задачи с контрольной:

$$E(V|A) = P(V=1|A) = \frac{P(V=1\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|V=1)\cdot P(V=1)}{P(A)} = \frac{0.5P(A|V=1)}{P(A)} \tag{24}$$

Согласно методу о-малых аналогичная формула справедлива для плотностей:

$$E(V|X_1=x_1, X_2=x_2, \ldots, X_n=x_n) = \frac{0.5\cdot 2^n \Pi_{i=1}^n x_i}{0.5+0.5\cdot 2^n\Pi_{i=1}^n x_i} = \frac{2^n\Pi_{i=1}^n x_i}{1+2^n\Pi_{i=1}^n x_i} \tag{25}$$

Теперь частично находим стратегию на кнопочном аукционе:

$$b^n(x) = \frac{2^n x^n}{1+2^n x^n} \tag{26}$$

Если все игроки используют эту функцию, то чтобы игрок вышел на цене p ценность должна равняться:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{1/n} \tag{27}$$

Подставляя один такой x в ожидаемую ценность получаем:

$$b^{n-1}(x,p_n) = \frac{2^{n-1}x^{n-1}\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^{1/n}}{1+2^{n-1}x^{n-1}\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^{1/n}} \tag{28}$$

Если второй выходит на цене p_{n-1}, то его ценность была равна:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^{1/n(n-1)}\left(\frac{p_{n-1}}{1-p_{n-1}}\right)^{1/(n-1)} \tag{29}$$

Значит:

$$b^{n-2}(x,p_{n-1},p_n) = \frac{2^{n-2}x^{n-2}\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^{1/n(n-1)}\left(\frac{p_{n-1}}{1-p_{n-1}}\right)^{1/(n-1)}}{1+2^{n-2}x^{n-2}\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^{1/n(n-1)}\left(\frac{p_{n-1}}{1-p_{n-1}}\right)^{1/(n-1)}} \tag{30}$$