

Моделирование аукционов. Азбука.

Борис Демешев

10 марта 2011 г.

Содержание

1 Сравнение аукционов в общем случае	1
1.1 Про симметричность	1
1.2 Еще об аффилированности	2
1.3 Решение трех аукционов	7
1.4 Теорема о сравнении доходностей	11
1.5 Задачи	13
1.6 Решения задач	14

1 Сравнение аукционов в общем случае

Сравним доходность трех аукционов (первой, второй цены и кнопочного) для продавца в общем случае. Предположений у нас будет всего два: аффилированность сигналов и симметричность игроков.

1.1 Про симметричность

Для наглядности три примера впереди определения:

Пример 1.1. Совместная функция плотности сигналов имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{7}{8} + x_1 x_2 x_3 \quad (1.2)$$

Ценности определяются по формулам:

$$\begin{aligned} V_1 &= X_1 + \sqrt{X_2 X_3 + 1} \\ V_2 &= X_2 + \sqrt{X_1 X_3 + 1} \\ V_3 &= X_3 + \sqrt{X_1 X_2 + 1} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Все симметрично. Ценность товара для меня может по-особому зависеть от моего сигнала, но должна одинаково зависеть от сигнала других игроков. С моей точки зрения другие игроки одинаковые, и то, что знают они, чего не знаю я, должно одинаково воздействовать на ценность товара для меня.

Пример 1.4. Совместная функция плотности сигналов имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{2} x_2 x_3 \right) \quad (1.5)$$

Ценности определяются по формулам:

$$\begin{aligned} V_1 &= X_1 + \sqrt{X_2 X_3 + 1} \\ V_2 &= X_2 + \sqrt{X_1 X_3 + 1} \\ V_3 &= X_3 + \sqrt{X_1 X_2 + 1} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Несимметрична функция плотности.

Пример 2.1. Совместная функция плотности сигналов имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{7}{8} + x_1 x_2 x_3 \quad (2.2)$$

Ценности определяются по формулам:

$$\begin{aligned} V_1 &= X_1 + \sqrt{X_2 X_3 + 1} \\ V_2 &= X_2 + X_3 \\ V_3 &= X_3 \cdot X_1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Несимметричны ценности.

Для формальности:

Определение 2.4. Функция $f(a, b, c, d, e)$ симметрична относительно аргументов a, b, c , если ее значение не изменится при перестановке a, b, c в другом порядке.

Пример 2.5. Функция симметричная относительно x и y : $f(x, y, z) = xy + z$

Пример 2.6. Функция симметричная относительно всех аргументов: $f(w, x, y, z) = xyz + wxu + wxz + wuz$

Определение 2.7. Игроков будем называть симметричными, если:

1. Совместная функция плотности $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ симметрична по всем аргументам
2. Ценность V_i определяется по формуле:

$$V_i = u(X_i, X_{-i}) \quad (2.8)$$

где: X_{-i} — это вектор (X_1, X_2, \dots, X_n) в котором отсутствует X_i , а функция $u(t, t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$ симметрична по переменным t_1, \dots, t_{n-1}

1.2 Еще об аффилированности

Сперва кое-что о вероятностях...

Если у нас есть случайная величина Z , то мы можем построить функцию $z(y) = E(Z|Y = y)$. Рассмотрим эту функцию в случайной точке Y :

$$E(z(Y)) = \int_0^1 z(y) f_Y(y) dy = \int_0^1 \int_0^1 z \cdot \frac{f(y, z)}{f_Y(y)} dz f_Y(y) dy = \int_0^1 \int_0^1 z \cdot f(y, z) dy dz = E(Z) \quad (2.9)$$

Значит это нам это дает способ расчета $E(Z)$:

$$E(Z) = \int_0^1 E(Z|Y = y) f_Y(y) dy \quad (2.10)$$

Честно говоря, этот способ мы уже использовали. Он очень мощный.

Лирическое отступление для интересующихся. Если глубоко копать, то можно понять, что это не что иное, как теорема о трех перпендикулярах из 11-го класса средней школы. Намекну: мат. ожидание случайной величины — это ее проекция на множество действительных чисел. Квадратом расстояния между двумя случайными величинами при этом служит $E((X - Y)^2)$. Например, теорема Пифагора формулируется так: $E(X^2) = E(m^2) + E((X - m)^2)$. Три перпендикуляра: наклонная — это Y ; плоскость — это множество случайных величин, записывающихся как функция от X ; проекция на плоскость — это $E(Y|X = x)$ взятая в случайной точке X ; константы — это прямая в нашей плоскости; $E(Y)$ — это проекция на прямую...

Аналогично, доведя условие $X = x$ слева и справа, можно получить, что:

$$E(Z|X = x) = \int_0^1 E(Z|Y = y \cap X = x) f_{Y|X}(y|x) dy \quad (3.1)$$

Это не очевидно. Те, кому интересна теория вероятностей могут это вывести, остальные могут поверить.

Теперь вернемся к аффилированности:

Теорема 3.2. *Если X_1, \dots, X_n аффилированы, то и $X_1, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$ аффилированы.*

Доказательство. Великие о-малые говорят нам, что совместная функция плотности вектора $X_1, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$ на участке $y_1 > y_2 > \dots > y_{n-1}$ равна:

$$f_{X_1, Y_1, \dots, Y_{n-1}}(x_1, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = (n-1)! f(x_1, y_1, \dots, y_{n-1}) \quad (3.3)$$

Нам нужно проверить супермодулярность логарифма:

$$\ln(f_{X_1, Y_1, \dots, Y_{n-1}}(x_1, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})) = \ln((n-1)!) + \ln(f(x_1, y_1, \dots, y_{n-1})) \quad (3.4)$$

Вторые смешанные производные от левой части неотрицательны в силу того, что неотрицательны вторые смешанные производные от правой части. □

Теоремы которые мы далее докажем будут верны для любых аффилированных случайных величин. Но мы будем иметь ввиду X_1 и Y_1 , поэтому и будем использовать соответствующие обозначения.

Теорема 3.5. *Если из набора аффилированных величин некоторые удалить, то оставшиеся будут аффилированы*

Доказательство. Пропущено. Если будут желающие, то допишу. □

Из теорем 3.5 и 3.2 следует, что X_1 и Y_1 аффилированы. Знание этих двух величин всегда позволяет определить, победил ли первый игрок, и сколько он платит (по крайней мере для трех аукционов, которые мы сравниваем).

Нам надо изучать X_1 и Y_1 , чтобы все время не писать индекс 1 в доказательствах пока забудем про него.

Введем несколько обозначений для этой пары:

1. $g(x, y)$ — их совместная функция плотности,

2. $g(y|x) = \frac{g(x,y)}{f_X(x)}$ — условная функции плотности Y при заданном X
3. $G(y|x) = P(Y \leq y|X = x)$ — условная функции распределения Y при заданном X .

Конечно, верно соотношение:

$$G(y|x) = P(Y \leq y|X = x) = \int_0^y g(t|x) dt \quad (3.6)$$

4. $R(y|x) = \frac{g(y|x)}{G(y|x)}$ — условная обратная функция риска Y при заданном X .

Поясню смысл последней. Это шансы того, что Y будет около y , если известно, что $Y \leq y$ и $X = x$. Например, значение $R(10, 20) = 30$ можно проинтерпретировать так. Возьмем маленький $\Delta y = 0.01$. Тогда $P(Y \in [9.99; 10]|Y \leq 10, X = 20) \approx 30 \cdot 0.01 = 0.3$.

Теорема 4.1. Если случайные величины X и Y аффилированы, и $g(x, y)$ — их совместная функция плотности, то¹

1. Условная функция распределения $G(y|x)$ — не возрастает по x
2. Условная обратная функция риска $R(y|x) = \frac{g(y|x)}{G(y|x)}$ — не убывает по x

Доказательство. Величины X и Y аффилированы, поэтому $\ln(g(x, y))$ — супермодулярная функция.

Рассмотрим пару точек (x', y) и (x, y') . Воспользуемся супермодулярностью:

$$\ln(g((x', y) \wedge (x, y'))) + \ln(g((x', y) \vee (x, y'))) \geq \ln(g(x', y)) + \ln(g(x, y')) \quad (4.2)$$

Или, без логарифмов:

$$g((x', y) \wedge (x, y')) \cdot g((x', y) \vee (x, y')) \geq g(x', y) \cdot g(x, y') \quad (4.3)$$

Пусть $x' \geq x$ и $y' \geq y$. Тогда:

$$g(x, y) \cdot g(x', y') \geq g(x', y) \cdot g(x, y') \quad (4.4)$$

Поскольку $g(x, y) = g(y|x) \cdot f_X(x)$ мы получаем:

$$g(y|x) \cdot f_X(x) \cdot g(y'|x') \cdot f_X(x') \geq g(y|x') \cdot f_X(x') \cdot g(y'|x) \cdot f_X(x) \quad (4.5)$$

Убираем повторы

$$g(y|x) \cdot g(y'|x') \geq g(y|x') \cdot g(y'|x) \quad (4.6)$$

Или:

$$\frac{g(y|x)}{g(y'|x)} \geq \frac{g(y|x')}{g(y'|x')} \quad (4.7)$$

Интегрируем по y от 0 до y' :

$$\frac{G(y'|x)}{g(y'|x)} \geq \frac{G(y'|x')}{g(y'|x')} \quad (4.8)$$

¹Тут обычно вводят кучу определений (стохастическое доминирование, доминирование в терминах обратной доли риска и пр.), но мы не будем этого делать.

Переверачиваем дробь:

$$\frac{g(y'|x)}{G(y'|x)} \leq \frac{g(y'|x')}{G(y'|x')} \quad (4.9)$$

Используя условную обратную функцию риска:

$$R(y'|x) \leq R(y'|x') \quad (4.10)$$

А у нас $x \leq x'$. Это и означает, что $R(\cdot|x)$ не убывает по x .

Осталось доказать, что $G(y'|x)$ не возрастает по x . Мы докажем, что $\ln(G(y'|x))$ не возрастает по x .

Заметим, что:

$$\frac{\partial \ln(G(y'|x))}{\partial y'} = \frac{g(y'|x)}{G(y'|x)} = R(y'|x) \quad (5.1)$$

Или:

$$\ln(G(y'|x)) = \int_1^{y'} R(t|x) dt \quad (5.2)$$

Обратите внимание, что здесь несколько непривычные пределы интегрирования: не от 0, а от 1. Связано это с тем, что интеграл должен обращаться в 0 не при $y' = 0$, а при $y' = 1$. Действительно, у нас регулярное распределение на $[0; 1]$, значит $G(1|x) = 1$ и $\ln(G(1|x)) = 0$. Заметьте, что знаки при этом совпадают: и слева отрицательное выражение, т.к. $G \in (0; 1)$ и справа, т.к. верхний предел меньше нижнего.

Давайте перепишем в привычном варианте, когда верхний предел интегрирования больше нижнего:

$$\ln(G(y'|x)) = - \int_{y'}^1 R(t|x) dt \quad (5.3)$$

С ростом x подынтегрируемое выражение растет для любого t , значит растет результат интегрирования. Т.е. функция $\ln(G(y'|x))$ не возрастает по x .

□

Из этих свойств следует теорема имеющая более наглядный смысл:

Теорема 5.4. Если X и Y аффилированы, то:

1. Функция $E(Y|X = x)$ не убывает по x
2. Если $\gamma()$ — возрастающая функция, то $E(\gamma(y)|X = x)$ не убывает по x
3. $Cov(X, Y) \geq 0$

Доказательство. По определению:

$$E(Y|X = x) = \int_0^1 yg(y|x) dy \quad (5.5)$$

Мы можем проинтегрировать по частям ($u = y$, $v' = g(y|x)$) и получить:

$$E(Y|X = x) = yG(y|x)|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 G(y|x) dy \quad (5.6)$$

Поскольку мы работаем с регулярным на $[0; 1]$ распределением, то $G(0|x) = 0$ и $G(1|x) = 1$. Еще раз напомним, что выбор 0 и 1 в качестве границ распределения — это

просто масштабирование для удобства и все наши доказательства проходят без изменений для случая регулярного распределения на отрезке $[a; b]$.

$$E(Y|X = x) = 1 - \int_0^1 G(y|x)dy \quad (5.7)$$

Остается заметить, что с ростом x падает подынтегральное выражение и, следовательно, интеграл. Значит $E(Y|X = x)$ возрастает.

Доказательство для произвольной $\gamma(y)$ ничем не отличается:

$$E(\gamma(Y)|X = x) = \int_0^1 \gamma(y)g(y|x)dy \quad (6.1)$$

Интегрируя по частям получаем:

$$E(\gamma(Y)|X = x) = \gamma(y)G(y|x)|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \gamma'(y)G(y|x)dy \quad (6.2)$$

Или:

$$E(\gamma(Y)|X = x) = 1 - \int_0^1 \gamma'(y)G(y|x)dy \quad (6.3)$$

Снова замечаем, что с ростом x падает подынтегральное выражение. Вывод: $E(\gamma(Y)|X = x)$ возрастает по x .

Теперь про ковариацию. Пусть $E(X) = m$. Тогда:

$$Cov(Y, X) = Cov(Y, X - m) = E(Y(X - m)) - E(Y)E(X - m) = E(Y(X - m)) - E(Y) \cdot 0 = E(Y(X - m)) \quad (6.4)$$

Пользуемся условным способом расчета мат. ожидания **2.10**:

$$E(Y \cdot (X - m)) = \int_0^1 E(Y(X - m)|X = x)f_X(x)dx = \int_0^1 E(Y|X = x)(x - m)f_X(x)dx \quad (6.5)$$

Теперь мы замечаем, что если бы не было сомножителя $E(Y|X = x)$ то интеграл бы равнялся нулю, т.к.

$$\int_0^1 (x - m)f_X(x)dx = E(X - m) = E(X) - m = 0 \quad (6.6)$$

А теперь глядим на функцию $(x - m)f_X(x)$. Сначала она отрицательна, затем положительна, суммарная площадь равна 0:

.... тут картинка

Поскольку $E(Y|X = x)$ возрастает по x , то холм растягивается сильнее, чем яма:

.... тут еще картинка.

Значит интересующий нас интеграл $\int_0^1 E(Y|X = x)(x - m)f_X(x)dx$ равный ковариации неотрицательный.

□

Нам потребуется изучать функцию $E(V_1|Y_1 = y, X_1 = x)$. Для краткости мы введем обозначение:

Определение 6.7.

$$v(x, y) = E(V_1|Y_1 = y, X_1 = x) \quad (6.8)$$

Самое время сделать упражнение 10

Теорема 6.9. Если X_1, \dots, X_n аффилированы, и g возрастает по всем аргументам, то $E(g(X_1, \dots, X_n) | X_1 = x_1, X_2 = x_2)$ возрастает по x_1 и x_2 .

Доказательство. Пропущено. Если будут желающие, то допишу. Интуитивно: с ростом x_1 растут условные средние остальных переменных в силу аффилированности, а с их ростом растет функция g . \square

В частности из этой теоремы следует, что $v(x, y) = E(V_1 | X_1 = x, Y_1 = y)$ возрастает по обоим аргументам.

Теперь у нас хватает сил, чтобы решить наши три аукциона в общем виде.

1.3 Решение трех аукционов

- Кнопочный аукциона.

Если вы разобрались с примером кнопочного аукциона для трех игроков, то замена трех на n несложная. Запишем традиционные обозначения:

- p_1, \dots, p_n — цены, на которых игроки покидают аукцион, упорядоченные по убыванию. Т.е., p_n — цена, на которой покинул аукцион самый слабый игрок, p_{n-1} — цена, на которой произошел второй выход. Заметим, что аукцион оканчивается на цене p_2 , т.е. когда аукцион покидает предпоследний игрок. А p_1 — цена, до которой был готов идти победитель, она остается неизвестной.

Стратегия описывается набором функций. Каждая функция говорит, до какого момента давить на кнопку, если моя ценность x и...

- $b^n(x)$ — ... все n игроков в игре
- $b^{n-1}(x, p_n)$ — ... в игре $(n-1)$ игрок, а самый слабый вышел на p_n
- $b^{n-2}(x, p_{n-1}, p_n)$ — в игре $(n-1)$ игрок, а самый слабый вышел на p_n , а следующий — при цене p_{n-1}
- ...
- $b^2(x, p_3, \dots, p_n)$ — в игре 2 игрока, а выходы были на ценах p_n, \dots, p_3 .

На кнопочном аукционе равновесие Нэша можно найти по алгоритму:

Шаг 1. В свою функцию ценности вместо всех сигналов подставляю x . Получаю:
 $b^n(x) = u(x, x, x, \dots, x)$.

Шаг 2. Предполагаю, что остальные игроки поступили также. Если я вижу, что первый выход был на цене p_n , значит сигнал x_n вышедшего игрока можно найти из уравнения:

$$b^n(x_n) = p_n \quad (7.1)$$

Учитываю эту информацию в новой функции:

$$b^{n-1}(x, p_n) = u(x, x, \dots, x, x_n) \quad (7.2)$$

Шаг 3. Предполагаю, что остальные игроки поступили также. Если я вижу, что второй выход был на цене p_{n-1} , значит сигнал x_{n-1} второго вышедшего можно найти из уравнения:

$$b^{n-1}(x_{n-1}, p_n) = p_{n-1} \quad (7.3)$$

Учитываю эту информацию в новой функции:

$$b^{n-2}(x, p_{n-1}, p_n) = u(x, x, \dots, x, x_{n-1}, x_n) \quad (7.4)$$

Шаг i .

Шаг $(n-1)$. Предполагаю, что остальные игроки поступили также. Если я вижу, что $(n-2)$ -ой по счету выход был на цене p_3 , значит сигнал x_3 недавно вышедшего игрока можно найти из уравнения:

$$b^3(x_3, p_4, p_5, \dots, p_n) = p_3 \quad (8.1)$$

Учитываю эту информацию в новой функции:

$$b^2(x, p_3, \dots, p_{n-1}, p_n) = u(x, x, x_3, \dots, x, x_{n-1}, x_n) \quad (8.2)$$

Замечаем, что при использовании этих стратегий игроки выходят в порядке возрастания сигналов X_i . По предположению, функция u возрастает по всем аргументам, значит $b^n(x)$ возрастает по x . Значит первым выходит игрок с наименьшим X_i . Поскольку p_n одинаково для всех остающихся игроков, функция $b^{n-1}(x, p_n)$ возрастает по x . Значит вторым выходит игрок с наименьшим X_i среди оставшихся в игре. И т.д. В частности, первый побеждает, только если его сигнал выше всех, т.е. $X_1 > Y_1$.

Остается доказать, что это — равновесие Нэша. Пусть все игроки кроме первого используют такие функции. Что произойдет, если первый не будет использовать предлагаемую стратегию, а захочет выиграть аукцион любой ценой?

В силу того, что игроки выходят в порядке возрастания X_i предпоследний игрок выйдет на цене $b^2(Y_1, p_3, \dots, p_n)$. Т.к. он использует указанную стратегию:

$$b^2(Y_1, p_3, \dots, p_n) = u(Y_1, Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_{n-1}) \quad (8.3)$$

Выигрыш первого игрока мы упрощаем воспользовавшись тем, что Y_i — это X_2, \dots, X_n в другом порядке:

$$u(X_1, X_2, \dots, X_n) - u(Y_1, Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_{n-1}) = u(X_1, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}) - u(Y_1, Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_{n-1}) \quad (8.4)$$

Функция u возрастает по первому аргументу, значит выигрыш положителен, если и только если $X_1 > Y_1$. Т.е. жать кнопку до выигрыша первому игроку следует если $X_1 > Y_1$. Но именно такой результат гарантирует предлагаемая стратегия. Значит она и дает нам равновесие Нэша.

- Аукцион первой цены.

Мы стандартным путем получаем дифференциальное уравнение, которое является необходимым условием. Итак, пусть $b(\cdot)$ — является равновесной стратегией. И пусть остальные игроки кроме первого ее используют.

При стандартных предположениях о функции $b()$ чудо-замена $b_1 = b(a)$ упрощает нам событие W_1 до $W_1 = \{Y_1 < a\}$:

$$\pi(x, b(a)) = E((V_1 - b(a))1_{Y_1 < a} | X_1 = x) \quad (8.5)$$

Далее мы пользуемся способом расчета мат. ожидания через постановку условия **2.10**. Дополнительное условие, которое мы используем — это условие по $Y_1 = y$:

$$\begin{aligned} \pi(x, b(a)) &= \int_0^1 E((V_1 - b(a))1_{Y_1 < a} | X_1 = x, Y_1 = y)g(y|x)dy = \\ &= \int_0^a E((V_1 - b(a)) | X_1 = x, Y_1 = y)g(y|x)dy = \int_0^a (v(x, y) - b(a))g(y|x)dy = \\ &= \int_0^a v(x, y)g(y|x)dy - \int_0^a b(a)g(y|x)dy = \int_0^a v(x, y)g(y|x)dy - b(a)G(a|x) \end{aligned} \quad (8.6)$$

Берем производную по a :

$$\frac{\partial \pi(x, b(a))}{\partial a} = v(x, a)g(a|x) - b(a)g(a|x) - b'(a)G(a|x) = 0 \quad (9.1)$$

Первому игроку тоже должно быть оптимально использовать $b(x)$, значит $a = x$:

$$v(x, x)g(x|x) - b(x)g(x|x) - b'(x)G(x|x) = 0 \quad (9.2)$$

Наш диф. ур приобрел вид:

$$b'(x) = (v(x, x) - b(x)) \frac{g(x|x)}{G(x|x)} = (v(x, x) - b(x))R(x|x) \quad (9.3)$$

Мы уже говорили, что из множества решений нам нужно выбрать то, которое удовлетворяет условию $b(0) = 0$. Давайте мы строго и в общем виде докажем, что это условие является достаточным.

Никаких секретов в решении линейных диф. урв первого порядка в 21 веке нет, поэтому мы не будем этого делать. Мы просто предъявим это решение. Желающим могут убедиться, что оно подходит и в диф. ур и к условию $b(0) = 0$.

$$b(x) = \int_0^x v(y, y) \frac{R(y|y)}{\exp(\int_x^y R(t|t)dt)} dy \quad (9.4)$$

Мы замечаем, что эта функция является возрастающей по x . Подынтегральное выражение положительное и растет с ростом x , да еще и предел интегрирования растет с ростом x . Поэтому упрощение W_1 до $Y_1 < a$ корректно.

Осталось доказать, что эта стратегия — действительно дает равновесие Нэша. Допустим все остальные используют ее.

Нам надо доказать не то, что производная прибыли равна 0, когда $a = x$ (это верно, т.к. наша $b(x)$ подходит в дифференциальное уравнение), а то, что знак производной меняется с плюса на минус, как и положено в максимуме.

Присмотримся повнимательнее к первой производной прибыли:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi(x, b(a))}{\partial a} &= v(x, a)g(a|x) - b(a)g(a|x) - b'(a)G(a|x) = \\ &= (v(x, a) - b(a))g(a|x) - b'(a)G(a|x) = (v(x, a) - v(a, a) + v(a, a) - b(a))g(a|x) - b'(a)G(a|x) = \\ &= (v(x, a) - v(a, a))g(a|x) + (v(a, a) - b(a))g(a|x) - b'(a)G(a|x) \quad (9.5)\end{aligned}$$

Функция $b()$ является решением дифференциального уравнения 9.3, поэтому $v(a, a) - b(a) = b'(a)/R(a|a)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi(x, b(a))}{\partial a} &= (v(x, a) - v(a, a))g(a|x) + \frac{b'(a)}{R(a|a)}g(a|x) - b'(a)G(a|x) = \\ &= (v(x, a) - v(a, a))g(a|x) + b'(a)g(a|x) \left(\frac{1}{R(a|a)} - \frac{1}{R(a|x)} \right) \quad (10.1)\end{aligned}$$

1. Рассмотрим $a > x$. Во-первых, $v(x, a) < v(a, a)$ так как $v()$ возрастает по обоим аргументам. Во-вторых, $1/R(a|a) < 1/R(a|x)$ поскольку $R(a|x)$ возрастает по второму аргументу. Значит справа производная отрицательна.
2. Рассмотрим $a < x$. Во-первых, $v(x, a) > v(a, a)$ так как $v()$ возрастает по обоим аргументам. Во-вторых, $1/R(a|a) > 1/R(a|x)$ поскольку $R(a|x)$ возрастает по второму аргументу. Значит слева производная положительна.

Для последующего сравнения прибыли продавца нам потребуется функция выплат первого игрока. Вероятность того, что первый выиграет аукцион если его сигнал равен x равна $P(Y_1 < x | X_1 = x) = G(x|x)$. Поэтому:

$$pay^{FP}(x) = b^{FP}(x)G(x|x) \quad (10.2)$$

Здесь мы обозначили равновесную стратегию не как $b()$, а как $b^{FP}()$ т.к. она отличается от равновесной стратегии на других аукционах.

- Аукцион второй цены.

При решении задач мы столкнулись с тем, что аукцион второй цены в каком-то смысле правдивый, т.е. ставить надо свою ценность. Когда ценность не совпадает с сигналом верен очень похожий результат:

Теорема 10.3. *На аукционе второй цены равновесием Нэша будет набор стратегий: $b(x) := v(x, x) = E(V_1 | X_1 = x \cap Y_1 = x)$*

Доказательство. Пусть остальные игроки используют предлагаемую стратегию, а первый ставит b_1 .

$$\pi(x, b_1) = E((V_1 - b(Y_1))1_{W_1} | X_1 = x; Bid_1 = b_1) \quad (10.4)$$

Как всегда, сделаем замену $b_1 = b(a)$, что упрощает нам W_1 до $W_1 = \{Y_1 < a\}$

$$\pi(x, b(a)) = E((V_1 - b(Y_1))1_{Y_1 < a} | X_1 = x) = E((V_1 1_{Y_1 < a} | X_1 = x) - E(b(Y_1))1_{Y_1 < a} | X_1 = x) \quad (10.5)$$

Отдельно считаем вычитаемое:

$$E(b(Y_1)1_{Y_1 < a} | X_1 = x) = \int_0^a b(y)g(y|x)dy = \int_0^a v(y, y)g(y|x)dy \quad (10.6)$$

И применив к уменьшаемому формулу 3.1:

$$\begin{aligned} E((V_1 1_{Y_1 < a} | X_1 = x)) &= \int_0^1 E(V_1 1_{Y_1 < a} | X_1 = x \cap Y_1 = y)g(y|x)dy = \\ &= \int_0^a E(V_1 | X_1 = x \cap Y_1 = y)g(y|x)dy = \int_0^a v(x, y)g(y|x)dy \end{aligned} \quad (10.7)$$

Значит:

$$\pi(x, b(a)) = \int_0^a v(x, y) - v(y, y)g(y|x)dy \quad (11.1)$$

Если $y < x$, то величина $v(x, y) - v(y, y) > 0$ в силу того, что $v(x, y)$ возрастает по x . Мы хотим, максимизировать прибыль, т.е. мы хотим интегрировать до тех пор, пока подынтегральное выражение положительно. Т.е. оптимальное $a = x$. Остается заметить, что по предположению игрок делает ставку $b_1 = b(a)$. Но оптимальное $a = x$, значит оптимальная ставка равна $b(x)$.

□

Для последующего сравнения прибыли продавца нам потребуется функция выплат первого игрока:

$$pay^{SP}(x) = E(b(Y_1)1_{Y_1 < x} | X_1 = x) = \int_0^x v(t, t)g(t|x)dt \quad (11.2)$$

1.4 Теорема о сравнении доходностей

Теорема 11.3. *Если:*

RC1. Сигналы X_i имеют регулярное на $[0; 1]$ распределение

RC2. Сигналы X_i аффилированы

RC3. Игроки симметричны, в частности:

RC3a. Совместная функция плотности сигналов симметрична

RC3b. Ценность игрока симметрична относительно сигналов других игроков.

RC4. Ценность является возрастающей функцией от сигналов

То:

$$E(R^B) \geq E(R^{SP}) \geq E(R^{FP}) \quad (11.4)$$

Доказательство. Сначала докажем, что для продавца аукцион второй цены лучше, чем аукцион первой цены, $E(R^{SP}) \geq E(R^{FP})$.

Мы снова воспользуемся дифференциальным уравнением 9.3:

$$\begin{aligned}
 pay^{SP}(x) &= \int_0^x v(y, y)g(y|x)dy = \int_0^x (v(y, y) - b^{FP}(y))g(y|x)dy + \int_0^x b^{FP}(y)g(y|x)dy = \\
 &= \int_0^x b'^{FP}(y) \frac{1}{R(y|y)} g(y|x)dy + \int_0^x b^{FP}(y)g(y|x)dy = \\
 &= \int_0^x b'^{FP}(y) \frac{R(y|x)}{R(y|y)} G(y|x)dy + \int_0^x b^{FP}(y)g(y|x)dy \geq \\
 &\geq \int_0^x b'^{FP}(y)G(y|x)dy + \int_0^x b^{FP}(y)g(y|x)dy \quad (11.5)
 \end{aligned}$$

Последний переход верен в силу того, что $y < x$. Продолжаем:

А теперь долго и пристально смотрим на эти два интеграла и берем их в уме оба сразу:

$$\begin{aligned}
 \int_0^x b'^{FP}(y)G(y|x)dy + \int_0^x b^{FP}(y)g(y|x)dy = \\
 \int_0^x b^{FP}(y)g(y|x) + b'^{FP}(y)G(y|x)dy = b^{FP}(x)G(y|x) = pay^{FP}(x) \quad (12.1)
 \end{aligned}$$

Мы сравнили детерминистические функции выплат. А ожидаемый доход продавца связан с ними:

$$E(R) = n \cdot E(Pay_1) = n \cdot \int_0^1 pay(x)f(x)dx \quad (12.2)$$

Опять же мы применяем трюк с условным подсчетом мат. ожидания 2.10.

Теперь докажем, что для продавца кнопочный аукцион лучше, чем аукцион второй цены $E(R^{SP}) \geq E(R^{FP})$.

Только для целей этого доказательства введем функцию $z(x, y) = E(u(Y_1, Y_1, \dots, Y_{n-1})|X_1 = x, Y_1 = y)$. Напомню смысл: на кнопочном аукционе самый сильный игрок (за исключением первого) жмет кнопку до $u(Y_1, Y_1, \dots, Y_{n-1})$. Именно столько заплатит первый, если выиграет аукцион. По теореме 6.9 функция $z(x, y)$ возрастает по обоим аргументам.

Сначала мы замечаем, что $v(y, y) = z(y, y)$:

$$\begin{aligned}
 v(y, y) &= E(V_1|X_1 = y, Y_1 = y) = E(u(X_1, Y_1, \dots, Y_{n-1})|X_1 = y, Y_1 = y) = \\
 &= E(u(Y_1, Y_1, \dots, Y_{n-1})|X_1 = y, Y_1 = y) = z(y, y) \quad (12.3)
 \end{aligned}$$

Если $x > y$, то $v(y, y) < z(x, y)$. А теперь считаем ожидаемую доходность продавца:

$$E(R^{SP}) = E(b^{SP}(Y_1)|X_1 > Y_1) = E(v(Y_1, Y_1)|X_1 > Y_1) \leq E(z(X_1, Y_1)|X_1 > Y_1) \quad (12.4)$$

Заметим, что в правой части написано мат. ожидание от условного мат. ожидания в случайной точке. Пользуясь идеей 2.10 мы видим, что:

$$E(z(X_1, Y_1)|X_1 > Y_1) = E(u(Y_1, Y_1, \dots, Y_{n-1})|X_1 > Y_1) = E(R^B) \quad (12.5)$$

□

1.5 Задачи

1. Аукцион второй цены с резервной ставкой. Имеется n покупателей. Сигналы независимы и равномерны на $[0; 1]$, $V_i = X_i$. Покупатели одновременно делают ставки. Если наибольшая ставка больше r , то игрок с максимальной ставкой получает товар. Если наибольшая ставка меньше r , то товар остается у продавца. Победитель платит продавцу максимум между второй по величине ставкой и r .
 - (a) Найдите равновесие Нэша.
 - (b) Найдите оптимальное r для продавца, если ценности равномерны на $[0; 1]$.
2. Аукцион первой цены с резервной ставкой. Имеется n покупателей. Сигналы независимы и равномерны на $[0; 1]$, $V_i = X_i$. Покупатели одновременно делают ставки. Если наибольшая ставка больше r , то игрок с максимальной ставкой получает товар. Если наибольшая ставка меньше r , то товар остается у продавца. Победитель платит продавцу свою ставку.
 - (a) Найдите равновесие Нэша.
 - (b) Найдите оптимальное r для продавца, если ценности равномерны на $[0; 1]$.
3. Аукцион второй цены с платой за вход. Имеется n покупателей. Сигналы независимы и равномерны на $[0; 1]$, $V_i = X_i$. Покупатели одновременно делают ли ставку, и если делать, то какую. Сделавший ставку платит w вне зависимости от того, победил ли он. Игрок с максимальной ставкой получает товар. Если ставок не было, то товар остается у продавца. Победитель платит продавцу вторую по величине ставку.
 - (a) Найдите равновесие Нэша.
 - (b) Найдите оптимальное w для продавца, если ценности равномерны на $[0; 1]$.
4. Аукцион первой цены с платой за вход. Имеется n покупателей. Сигналы независимы и равномерны на $[0; 1]$, $V_i = X_i$. Покупатели одновременно делают ли ставку, и если делать, то какую. Сделавший ставку платит w вне зависимости от того, победил ли он. Игрок с максимальной ставкой получает товар. Если ставок не было, то товар остается у продавца. Победитель платит продавцу свою ставку.
 - (a) Найдите равновесие Нэша.
 - (b) Найдите оптимальное w для продавца, если ценности равномерны на $[0; 1]$.
5. Верно ли, что $E(R)$ одинаково в аукционе первой и второй цены с резервной ценой?
6. Верно ли, что $E(R)$ одинаково в аукционе первой и второй цены с платой за вход?
7. Величины X_1 , X_2 и X_3 независимы и равномерны на $[0; 1]$. В аукционе второй цены участвуют два игрока: первый знает X_1 , второй — X_2 . Ценность товара общая, $V_1 = V_2 = X_1 + X_2 + X_3$. Найдите равновесие Нэша и ожидаемый доход продавца.
8. По аналогии с определением условной обратной функции риска дайте определение безусловной обратной функции риска, $R(x)$. Пусть X — случайная величина, показывающая время в часах, которое я трачу на написание одной лекции. Как можно проинтерпретировать $R(5) = 10$?

9. Автобусы приходят на остановку согласно пуассоновскому потоку с интенсивностью $\lambda = 6$ автобусов в час. Вася стоит некоторое время у остановки. Сколько в среднем автобусов придет за это время? Какова вероятность, что не придет ни одного автобуса? Рассмотрите два случая:

- (a) Вася стоит у остановки ровно 5 минут.
- (b) Вася стоит у остановки случайное время X (в минутах), независимое от времени прихода автобусов. Функция плотности X имеет вид $f(x) = \frac{x}{25}$ при $x \in [0; 10]$.

Hint: В первом пункте вы не замечая того нашли $E(N|X = 5)$.

10. Найдите функции $g(x, y)$, $g(y|x)$, $G(y|x)$, $R(y|x)$ и $v(x, y)$ для случаев:

- (a) Сигналы независимы, равномерны на $[0; 1]$, $V_i = X_i$.
- (b) Три игрока. Сигналы независимы, равномерны на $[0; 1]$, $V_1 = X_1 + X_2X_3$.
- (c) Три игрока. Совместная функция плотности сигналов имеет вид $f(x_1, x_2, x_3) = 7/8 + x_1x_2x_3$ при $x_1, x_2, x_3 \in [0; 1]$, $V_1 = X_1 + X_2X_3$.

1.6 Решения задач

1. Аукцион второй цены с резервной ставкой. Имеется n покупателей. Сигналы независимы и равномерны на $[0; 1]$, $V_i = X_i$. Покупатели одновременно делают ставки. Если наибольшая ставка больше r , то игрок с максимальной ставкой получает товар. Если наибольшая ставка меньше r , то товар остается у продавца. Победитель платит продавцу максимум между второй по величине ставкой и r .
 - (a) Найдите равновесие Нэша.
 - (b) Найдите оптимальное r для продавца, если ценности равномерны на $[0; 1]$.
2. Аукцион первой цены с резервной ставкой. Имеется n покупателей. Сигналы независимы и равномерны на $[0; 1]$, $V_i = X_i$. Покупатели одновременно делают ставки. Если наибольшая ставка больше r , то игрок с максимальной ставкой получает товар. Если наибольшая ставка меньше r , то товар остается у продавца. Победитель платит продавцу свою ставку.
 - (a) Найдите равновесие Нэша.
 - (b) Найдите оптимальное r для продавца, если ценности равномерны на $[0; 1]$.
3. Аукцион второй цены с платой за вход. Имеется n покупателей. Сигналы независимы и равномерны на $[0; 1]$, $V_i = X_i$. Покупатели одновременно делают ли ставку, и если делать, то какую. Сделавший ставку платит w вне зависимости от того, победил ли он. Игрок с максимальной ставкой получает товар. Если ставок не было, то товар остается у продавца. Победитель платит продавцу вторую по величине ставкой.
 - (a) Найдите равновесие Нэша.
 - (b) Найдите оптимальное w для продавца, если ценности равномерны на $[0; 1]$.
4. Аукцион первой цены с платой за вход. Имеется n покупателей. Сигналы независимы и равномерны на $[0; 1]$, $V_i = X_i$. Покупатели одновременно делают ли ставку, и если делать, то какую. Сделавший ставку платит w вне зависимости от того, победил ли он. Игрок с максимальной ставкой получает товар. Если ставок не было, то товар остается у продавца. Победитель платит продавцу свою ставку.

- (a) Найдите равновесие Нэша.
- (b) Найдите оптимальное w для продавца, если ценности равномерны на $[0; 1]$.
5. Верно ли, что $E(R)$ одинаково в аукционе первой и второй цены с резервной ценой?
6. Верно ли, что $E(R)$ одинаково в аукционе первой и второй цены с платой за вход?
7. Величины X_1 , X_2 и X_3 независимы и равномерны на $[0; 1]$. В аукционе второй цены участвуют два игрока: первый знает X_1 , второй — X_2 . Ценность товара общая, $V_1 = V_2 = X_1 + X_2 + X_3$. Найдите равновесие Нэша и ожидаемый доход продавца.
8. Обратная функция риска: $R(x) = f(x)/F(x)$, где $f()$ — функция плотности, а $F()$ — функция распределения случайной величины X . Пусть X — случайная величина, показывающая время в часах, которое я трачу на написание одной лекции. Проинтерпретировать $R(5) = 10$ можно с помощью небольшой $\Delta = 0.01$ (одна сотая часа — это 36 секунд). Если известно, что прошло 5 часов после начала написания лекций, и я уже отдыхаю, то вероятность того, что я их окончил за только что истекшие 36 секунд примерно равна $R(5) \cdot \Delta = 0.1$.
9. Обозначим N — количество пришедших автобусов, а X — время, которое Вася наблюдал за остановкой.

- (a) Количество автобусов за x минут имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_x = 0.1x$, т.к. в среднем 6 автобусов в час, это в среднем 0.1 автобуса в минуту. $E(N|X = 5) = 0.5$

(b)

$$E(N) = \int_0^{10} E(N|X = x)f(x)dx = \int_0^{10} 0.1x \cdot \frac{x}{25}dx = \frac{4}{3} \quad (15.1)$$

10. Найдите функции $g(x, y)$, $g(y|x)$, $G(y|x)$, $R(y|x)$ и $v(x, y)$ для случаев:

- (a) Сигналы независимы, равномерны на $[0; 1]$, $V_i = X_i$.

$$g(x, y) = (n - 1)y^{n-2} \quad (15.2)$$

$$g(y|x) = g(x, y)/f(x) = (n - 1)y^{n-2} \quad (15.3)$$

$$G(y|x) = \int_0^y (n - 1)t^{n-2}dt = y^{n-1} \quad (15.4)$$

$$R(y|x) = \frac{n - 1}{y} \quad (15.5)$$

$$v(x, y) = E(X_1|X_1 = x, Y_1 = y) = x \quad (15.6)$$

- (b) Три игрока. Сигналы независимы, равномерны на $[0; 1]$, $V_1 = X_1 + X_2X_3$. Отличается только $v(x, y)$:

$$v(x, y) = E(X_1 + X_2X_3|X_1 = x, Y_1 = y) = x + E(X_2X_3|Y_1 = y) = x + E(Y_1Y_2|Y_1 = y) = x + yE(Y_2|Y_1 = y) \quad (15.7)$$

Здесь мы посчитаем интуитивно, а в следующем пункте — через интегралы. Итак: если я знаю, что Y_1 , максимум из X_2 и X_3 , равен y , то оставшаяся величина Y_2 где-то на отрезке $[0; y]$. Поскольку безусловное распределение было равномерным, то и условное будет равномерным. И условное среднее будет равно $y/2$. Т.е. $v(x, y) = x + y^2/2$.

(с)

$$g(x, y) = 2! \cdot \int_0^y 7/8 + x \cdot y \cdot x_3 dx_3 = \dots = \frac{7}{4}y + xy^3 \quad (16.1)$$

$$g(y|x) = \frac{g(x, y)}{f(x)} = \frac{\frac{7}{4}y + xy^3}{\int_0^1 \int_0^1 \frac{7}{8} + xx_2x_3 dx_2 dx_3} = \dots = \frac{\frac{7}{4}y + xy^3}{\frac{7}{8} + \frac{x}{4}} = \frac{14y + 8xy^3}{7 + 2x} \quad (16.2)$$

Интегрируя находим:

$$G(y|x) = \int_0^1 g(t|x) dt = \dots = \frac{7y^2 + 2xy^4}{7 + 2x} \quad (16.3)$$

И взяв отношение:

$$R(y|x) = \frac{g(y|x)}{G(y|x)} = \frac{14y + 8xy^3}{7y^2 + 2xy^4} = \frac{14 + 8xy^2}{7y + 2xy^3} \quad (16.4)$$

Аналогично предыдущему пункту:

$$v(x, y) = \dots = x + yE(Y_2|Y_1 = y) \quad (16.5)$$

Находим совместную функцию плотности X_2 и X_3 :

$$f(x_2, x_3) = \int_0^1 7/8 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 dx_1 = \frac{7}{8} + \frac{1}{2}x_2x_3, \quad x_2, x_3 \in [0; 1] \quad (16.6)$$

Из этого сразу следует совместная функция плотности для Y_1 и Y_2 :

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = 2!f(y_1, y_2) = \frac{7}{4} + y_1y_2, \quad 0 < y_2 < y_1 < 1 \quad (16.7)$$

И функцию плотности для Y_1 :

$$f_{Y_1}(y_1) = 2! \int_0^{y_1} f(y_1, x_3) dx_3 = \dots = \frac{7}{4}y_1 + \frac{1}{2}y_1^3 \quad (16.8)$$

Далее находим условную функцию плотности:

$$f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1) = \frac{f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)}{f_{Y_1}(y_1)} = \frac{\frac{7}{4} + y_1y_2}{\frac{7}{4}y_1 + \frac{1}{2}y_1^3}, \quad 0 < y_2 < y_1 < 1 \quad (16.9)$$

И условное ожидание:

$$E(Y_2|Y_1 = y) = \int_0^y y_2 \frac{\frac{7}{4} + yy_2}{\frac{7}{4}y + \frac{1}{2}y^3} dy_2 = \frac{8y^4 + 21y^2}{6(2y^3 + 7y)} \quad (16.10)$$

И, наконец,

$$v(x, y) = x + \frac{8y^4 + 21y^2}{6(2y^2 + 7)} \quad (16.11)$$