Моделирование аукционов. Азбука.

Борис Демешев

18 марта 2011 г.

Содержание

1 Язык механизмов

Как выглядит аукцион, если не вдаваться в детали? Природа случайно раздает игрокам сигналы. Затем игроки делают ставки. Затем правила аукциона определяют, кто получает товар и кто сколько платит.

Если не обращать внимание на слово «аукцион», то так выглядят абсолютно все задачи, где нужно принять решение. И в этой лекции мы покажем, как аукцион второй цены неплохо справляется со всеми этими задачами!

1.1 Описание всех задач на языке механизмов

Рассмотрим несколько примеров. Во всех примерах нужно выбрать одно решение из нескольких возможных и определить, кто сколько платит. В табличках будут находиться полезности игроков в зависимости от принятого решение. Вопрос оплаты решения мы в табличках освещать не будем. Мы также забудем пока про то, что Природа сообщает игрокам какие-то сигналы.

Пример 1.1. Аукцион. Есть три игрока и один товар. Ценность товара для них равна V_1, V_2 и V_3.

	Отдать товар игроку 1	Отдать товар игроку 2	Отдать товар игроку 3	Оставить товар у продавца
Игрок 1	V_1	0	0	0
Игрок 2	0	V_2	0	0
Игрок 3	0	0	V_3	0

Можно рассмотреть различные вариации этой задачи. Например, добавить продавца как игрока или убрать решение «Оставить товар у продавца» из списка возможных.

Пример 1.2. Общественное благо. Есть два города, A и B, на разных берегах реки. Полезность моста для их жителей равна V_A и V_B. Есть еще администрация области, для которой мост обойдется в сумму c.

	Построить мост	Не строить мост
Жители города A	V_A	0
Жители города B	V_B	0
Администрация	$-c$	0

Если администрация тратит не свои деньги, а скажем деньги из какого-то бюджета, который ни на что кроме моста потратить нельзя, тогда ее как игрока можно не учитывать, т.к. ей все равно, строить мост или не строить.

Пример 2.1. . Разносчик пиццы. Есть два клиента, A и B. От ресторана до A ехать a минут, до B — b минут. От A до B ехать c минут. Полезность клиента от пиццы равна времени доставки со знаком минус:

	Ехать сначала к A потом к B	Ехать сначала к B потом к A
Клиент A	$-a$	$-b-c$
Клиент B	$-a-c$	$-b$

При желании можно учесть и полезность разносчика пиццы. Например, как общее время доставки со знаком минус. Это будет другая игра. Наш случай означает, что разносчику все равно сколько тратить на дорогу. Скажем, его в ресторане все равно нагрузили бы какой-нибудь работой, если бы он приехал раньше. Можно еще добавить решения «Ехать только к A», «Ехать только к B» и «Не ехать ни к кому». Но мы будем считать, что пицца безумно вкусна эти варианты даже не рассматриваются клиентами.

Пример 2.2. Мама сказала Саше и Маше помыть посуду и подмести пол. Допустим, что неудовольствие от мытья посуды для каждого из них равно $(-a)$, а от подметания пола — $(-b)$.

	Саша моет посуду, Маша — пол.	Саша моет пол, Маша — посуду.	Все моет Саша.	Все моет Маша.
Саша	$-a$	$-b$	$-a-b$	0
Маша	$-b$	$-a$	0	$-a-b$

Итак, любой механизм решения задачи должен состоять из двух правил: правило, которое говорит, какое решение должно быть принято, и правило, которое говорит, кто и сколько платит.

Некая дополнительная сложность состоит в том, что в реальности часто применяются случайные механизмы решения этих задач. В частности, Саша и Маша могут просто подкинуть монетку, чтобы принять решение. Поэтому правило выбора будет говорить, какими должны быть вероятности принятия каждого из решений.

Итого, для описания механизмов нам понадобятся множества:

1. T_i — множество всех возможных сигналов, которые Природа может послать игроку i. В наших трех предыдущих лекциях — множество возможных значений случайной величины X_i. Еще говорят, множество возможных типов игрока i.

   Пример. Пусть каждый игрок знает свое X_i. Величины X_i равномерны на $[0;1]$. В этом случае $T_i = [0;1]$. Число x_1, конкретный сигнал, который получил первый игрок — это элемент из T_1.

2. B_i — множество[1] всех возможных ходов игрока i.

   Например, для аукциона первой цены — это список возможных ставок игрока i, $B_i = [0; +\infty)$. Число b_1, конкретная ставка, которую сделал первый игрок — это элемент из B_1.

3. $B = B_1 \times B_2 \times \dots B_n$ — декартово произведение множеств ходов отдельных игроков. Т.е. это набор всех возможных сочетаний ходов для наших игроков.

4. $T = T_1 \times T_2 \times \dots T_n$ — декартово произведение множеств типов отдельных игроков. Т.е. это набор всех возможных сочетаний типов для наших игроков.

5. Δ — множество вероятностных распределений на списке решений.

   Звучит страшно, но достаточно привести в пример пару элементов из Δ, чтобы все стало ясно. Если мы выбираем между решениями a, b и c, то элементами Δ, например, будут: {Принять решение a}, {Принять решение b с вероятностью 0.1 и решение c с вероятностью 0.9 }.

   С математической точки зрения, если у нас k возможных решений, то Δ — это все возможные векторы вероятностей:

$$\Delta = \{(p_1, p_2, ..., p_k) | \forall p_i \geq 0, \sum p_i = 1\} \tag{3.1}$$

В этих обозначениях, например, стратегия i-го игрока — это функция $s_i : T_i \to B_i$. Кстати, равновесие Нэша — это набор стратегий по одной от каждого игрока, т.е. это функция $NE : T \to B$. Действительно, если заданы типы всех игроков и задано равновесие Нэша, то мы можем понять, какие ходы будут сделаны. Естественно, равновесие Нэша, это не произвольная такая функция — нужно еще сказать, что никому не будет выгодно отклоняться, если все игроки расскажут друг другу свои стратегии.

А механизм — это правила игры:

Определение 3.2. Механизм. Описание механизма состоит из трех пунктов:

1. B_i — список возможных ходов игрока i

2. $\phi : B \to \Delta$ — правило распределения: фукнция, которая определяет вероятности принятия каждого решения в зависимости от ходов игроков.

3. $\mu : B \to \mathbb{R}^n$ — правило платежей: функция, которая определяет кто и сколько платит в зависимости от ходов игроков.

Вообще говоря список ходов B_i, предлагаемый игроку i может быть произвольным и никак не связанным со списком T_i возможных состояний игрока i.

Пример 3.3. Три игрока и один товар. Для игрока i товар имеет ценность X_i, каждый игрок знает свое X_i. Величины X_i независимы и равномерны на $[0; 1]$.

В этом примере $T_i = [0; 1]$. Но это никак не ограничивает нас в множестве ходов. Например, мы можем попросить наших трех игроков одновременно в разных комнатах станцевать вальс. В этом случае B_i = {Множество возможных вальсов}.

[1]Не путайте с другими обозначениями! b_i — это конкретная ставка игрока i, число; Bid_i — ставка игрока как случайная величина; $b(x)$ — функция, которая говорит какую ставку делать в зависимости от сигнала.

Подобные механизмы использует Дед Мороз в детском саду: «Кто расскажет самый лучший стишок...» и тамада на свадьбе «Кто назовет больше всего комплиментов невесте ...».

Мы же ограничимся прямыми механизмами. Прямой механизм прямо спрашивает у каждого игрока: «Ты кто?». Точнее говоря, «Ты какого типа?» или «Какой сигнал послала тебе природа?». Игрок при этом может сказать правду, а может и соврать. В прямом механизме множество возможных ходов совпадает с множеством типов игрока, $T_i = B_i$

Определение 4.1. Прямой механизм. В прямом механизме $B_i = T_i$ и его описание включает в себя:

1. $Q : B \to \Delta$ — правило распределения: фукнция, которая определяет вероятности принятия каждого решения в зависимости от объявленных игроками своих типов
2. $M : B \to \Delta$ — правило платежей: функция, которая определяет кто и сколько платит в зависимости от объявленных игроками своих типов

Рассмотрим подробнее простую ситуацию. Три игрока и один товар. Для игрока i товар имеет ценность X_i, каждый игрок знает свое X_i. Величины X_i независимы и равномерны на $[0;1]$. В этом случае: $T_i = [0;1]$.

В рамках этой ситации рассмотрим наши три аукциона на языке механизмов.

Пример 4.2. Аукцион первой цены. Товар достается тому, кто назвал наибольшую цену. Если таких игроков несколько — выбираем победителя из них наугад. Победитель платит названную им самим цену.

Можно считать, что механизм прямой и множество разрешенных ходов имеет вид $B_i = T_i = [0;1]$.

Функция $\phi(\vec{b})$ говорит нам, с какой вероятностью побеждает тот или иной игрок при заданном $\vec{b}$.

Например пятый игрок назвал цену выше всех:

$$\phi(1,2,3,4,5) = (0,0,0,0,1) \tag{4.3}$$

Или, второй и третий игрок назвали наибольшую цену:

$$\phi(1,3,3,1,2) = (0,0.5,0.5,0,0) \tag{4.4}$$

Т.е. функция ϕ расставляет равные вероятности для игроков с наибольшей ставкой.

А соответственно функция $\mu(\vec{b})$ говорит, что только победитель платит. Но победитель выбирается наугад среди игроков с наибольшей ставкой, поэтому у всех игроков с наибольшей ставкой есть ожидаемый платеж.

Например, если пятый игрок назвал цену выше всех:

$$\mu(1,2,3,4,5) = (0,0,0,0,5) \tag{4.5}$$

Или, второй и третий игрок назвали наибольшую цену:

$$\mu(1,3,3,1,2) = (0,1.5,1.5,0,0) \tag{4.6}$$

Пример 4.7. Аукцион второй цены. Товар достается тому, кто назвал наибольшую цену. Если таких игроков несколько — выбираем победителя из них наугад. Победитель платит вторую по величине цену.

Можно считать, что механизм прямой и множество разрешенных ходов имеет вид $B_i = T_i = [0;1]$.

Функция $\phi(\vec{b})$ точно такая же, как на аукционе первой цены, т.к. победитель — это тот, кто назвал наибольшую ставку.

Функция $\mu(\vec{b})$ отличается. Она говорит, что победитель платит не свою, а вторую по величине ставку.

Например,

$$\mu(1,2,3,4,5) = (0,0,0,0,4) \tag{5.1}$$

Или,

$$\mu(1,3,3,1,2) = (0,1,1,0,0) \tag{5.2}$$

Единица — взялась от деления двойки (второй по величине цены) на двух потенциальных победителей.

Пример 5.3. Кнопочный аукцион.

Кнопочный аукцион не является прямым механизмом, т.к. множество возможных ходов существенно сложнее множества сигналов, которые может получить игрок. Полное описание этого аукциона с выписыванием функций ϕ и μ в явном виде занудно. Поэтому мы ограничимся описанием множеств B_i. Зная выбор каждого игрока из его B_i мы можем определить, кто выигрыл и сколько ему нужно платить, значит функции ϕ и μ существуют.

Представим себе, что первый игрок знает значение своего сигнала X_1. Ему нужно решить, до какой цены жать кнопку, пока кнопку жмут трое, т.е. нужно выбрать некое число в диапазоне $[0;1]$. Еще нужно решить до какой цены жать кнопку, когда осталось двое игроков, а самый слабый вышел на цене p, т.е. нужно выбрать некую непрерывную на $[0;1]$ функцию.

В результате $B_i = [0;1] \times C[0;1]$, т.е. B_i — это декартово произведение отрезка $[0;1]$ на множество непрерывных на отрезке $[0;1]$ функций.

Для примера найдем $\phi(\vec{b})$ и $\mu(\vec{b})$ в точке $\vec{b} = ((0.7, p+p^2), (0.5, 2p), (0.8, p+p^3))$. В данных условиях первым выйдет второй игрок, т.к. он жмет кнопку до момента времени $t = 0.5$. Далее останутся первый и третий игрок, которые подставят в свои функции $p = 0.5$. Значит первый будет жать кнопку до $t = 0.75$, а третий — до $t = 0.625$. Аукцион окончится в $t = 0.625$ победой первого игрока:

$$\phi((0.7, p+p^2), (0.5, 2p), (0.8, p+p^3)) = (1,0,0) \tag{5.4}$$

И

$$\mu((0.7, p+p^2), (0.5, 2p), (0.8, p+p^3)) = (0.625,0,0) \tag{5.5}$$

Лишний раз стоит подчеркнуть, что $(0.7, p+p^2)$ — это ход первого игрока. А стратегия игрока — это функция, которая говорит, какой элемент из B_i выбирать в зависимости от полученного сигнала из T_i. Т.е. стратегия это правило, которое каждому числу из $T_i = [0;1]$ сопоставляет конкретный ход, т.е. пару (число, функция) из B_i

Мы считаем, что организаторы честно исполняют описанные в механизме функции, даже если после того, как они узнали ставки, им стало выгодно изменить механизм. Это конечно не всегда так и тут уместно сделать небольшое лирическое отступление.

В поезде Москва-Амстердам перегонщиком машин из Белоруссии была рассказана следующая история. Он купил машину на аукционе за 1200 евро, перегнал, дал объявление о продаже за 2000. Звонков много, и всем он сказал, что она уже продана. Потом дал новое объявление о продаже за 2500. Звонков много, и всем он сказал, что она уже продана. И т.д. Продал он ее, то ли за 3500, то ли за 3800, не помню.

Именно поэтому в реальности на многих аукционах есть стартовая цена, а есть резервная цена и это не одно и тоже. Стартовая цена —это цена с которой начинаются торги. Естественно, товар не может быть продан ниже стартовой цены. Стартовую цену игроки знают, а резервная цена известна только организаторам аукциона. Если торги не доходят до резервной цены, то товар остается у продавца, но он получает информацию о ставках. А если бы продавец начал торг с резервной цены, то он бы не получил информацию о ставках, т.к. их бы не было.

1.2 Правдивость и другие желательные свойства

Когда механизм принятия решения объявлен игрокам, игроки будут выбирать свои стратегии. Какой механизм выбрать, чтобы в равновесии Нэша были достигнуты определенные цели?

А теперь чудо-замена превращается в чудо-теорему, объясняющую почему можно изучать только прямые механизмы.

Теорема 6.1. *Пусть задан произвольный механизм (B, ϕ, μ) и равновесие Нэша NE в нем. Существует прямой механизм (Q, M) и равновесие Нэша NE' в нем такое, что:*

1. *При любых типах игроков вероятностям принятия решений и платежи в NE и NE' совпадают.*

2. *В NE' игроки правдиво сообщают свои типы*

Доказательство. Давайте вспомним логику нашей чудо-замены. Для конкретности можно представлять себе аукцион первой цены с симметричными игроками, но это нигде в доказательстве не используется.

Первый игрок зная x максимизирует функцию $\phi_1(x, b_1)$ по b_1. При этом получается некое оптимальное b_1^*.

Мы говорили: давайте заменим $b_1 = b(a)$. И будем максимизировать по a. Неважно, что функция $b()$ пока еще неизвестна. Важно, нам заранее известен результат оптимизации по a! С одной стороны должно быть $b_1^* = b(a^*)$, а с другой $b()$ — это равновесная стратегия, поэтому $b_1^* = b(x)$. И при хороших свойствах $b()$ из этого следует $a^* = x$.

Что будет если мы реализуем нашу чудо-замену в реальности? Т.е. продавец обещает игрокам: вы мне говорите a, а я за вас сделаю ставку $b(a)$ на аукционе. Что тогда оптимально говорить игрокам? Игрокам оптимально говорить $a^* = x$, т.е. правдиво сообщать ценность товара для себя.

Если организаторы аукциона будут сначала применять функцию $b()$ к ходам игроков, а затем использовать старый механизм, то игрокам будет выгодно правдиво декларировать свои типы.

(картинка ...)

Если игроки несимметричны, т.е. старый механизм давал равновесие $(b_1(x), b_2(x), ..., b_n(x))$, то в новом прямом механизме ход первого игрока предварительно обрабатывается функцией $b_1()$, ход второго — функцией $b_2()$ и т.д.

Более формально: Пусть равновесие NE имеет вид $\beta : T \to B$. Смысл написанного: равновесие — это функция, которая каждому набору типов игроков ставит в соответствие набор сделанных ими ходов. Если расписывать детально: $\beta(x_1, x_2, ..., x_n) = (b_1(x_1), b_2(x_2), ..., b_n(x_n))$.

Пусть $\vec{x}$ — произвольный набор типов игроков, $\vec{x} \in T$. Определим прямой механизм по принципу: $Q(\vec{x}) := \phi(\beta(\vec{x}))$ и $M(\vec{x}) := \mu(\beta(\vec{x}))$.

При этом автоматически оказывается, что при новом механизме равновесие Нэша NE' будет иметь вид: $\beta'(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Действительно, если бы какому-то игроку не было выгодно правдиво декларировать свой тип x_i в этой ситуации, то ему не было бы выгодно использовать стратегию $b_i(x_i)$ в исходном непрямом механизме.

А если все игроки правдиво декларируют свои ценности, то и результат применения прямого механизма совпадает с результатом применения исходного непрямого механизма.

□

Применим нашу теорему к аукциону первой цены.

Пример 7.1. Когда мы решали аукцион первой цены в простейшем случае, $X_i = V_i$, ценности X_i независимы и равномерны на $[0;1]$ мы установили, что оптимальная стратегия имеет вид $b(x) = \frac{n-1}{n}x$.

Теорема говорит нам, что можно так поменять правила аукциона, что никому ни хуже ни лучше не станет, но игроки будут говорить правду. Как это сделать?

Изменим правила аукциона. Победителем по прежнему будем считать игрока с наибольшей ставкой. А вот платить он будет не ровно свою ставку, а свою ставку, умноженную на $\frac{n-1}{n}$. На измененном аукционе игроки говорят правду, но платежи совпадают с исходным акционом!

На аукционе второй цены игроки говорят правду и без каких-то подправок.

Теперь вместо того, чтобы изучать произвольные механизмы и произвольные равновесия Нэша в них, можно ограничиться изучением прямых механизмов и равновесий Нэша в которых игроки правдиво заявляют свой тип. Т.е. можно никогда не делать разницы между множествами B_i и T_i. Кроме как на свадьбе и в детском саду :)

Существует несколько свойств, которые мы хотели бы видеть у механизмов:

Определение 7.2. Правдивость. Прямой механизм называется правдивым, если в равновесии Нэша игроки правдиво декларируют свои сигналы.

Пример 7.3. Будем считать, что выполнены предпосылки теоремы об одинаковой доходности. Аукцион первой цены — не правдив, аукцион второй цены — правдив.

Определение 7.4. Эффективность. Механизм называется эффективным, если в равновесии Нэша принятое решение максимизирует суммарную полезность всех агентов.

Пример 7.5. Если выполнены предпосылки теоремы об одинаковой доходности, то аукционы первой и второй цены является эффективными механизмами. Действительно, в этом случае товар достается игроку с максимальной полезностью. Любое другое решение приведет к снижению совокупной полезности.

Нужно подчеркнуть, что эффективность не учитывает правило платежей! Когда мы говорим об эффективности механизма, мы говорим об эффективности правила распределения.

Определение 7.6. Индивидуальная рациональнасть. Механизм называется индивидуально рациональным, если игроки согласны участвовать в нем добровольно.

Индивидуальная рациональность учитывает правило платежей! Когда мы говорим об индивидуальной рациональности, мы учитываем и правило распределения и правило платежей.

Пример 7.7. Если выполнены предпосылки теоремы об одинаковой доходности, то аукционы первой и второй цены индивидуально рациональны, т.к. ожидаемый выигрыш каждого игрока неотрицательный. А пример 2.2 с Сашей и Машей, которым нужно помыть пол и посуду не будет индивидуально рациональным, если только мама не предложит им какую-нибудь компенсацию в виде похода в кино.

Определение 8.1. Оптимальность. Механизм называется оптимальным, если в равновесии Нэша организаторы получают от игроков максимально возможную ожидаемую прибыль.

Если у нас есть диктаторские полномочия, т.е. мы можем заставить игроков участвовать в аукционе, то, очевидно, мы можем получить сколь угодно большую прибыль. Для этого просто надо потребовать от каждого заплатить достаточно много. Но такой аукцион не будет индивидуально рациональным. Поэтому обычно выбирают оптимальный механизм среди индивидуально рациональных.

Иногда организаторам не нужно заработать денег. Бывает задача состоит в том, чтобы организовать игру так, чтобы в равновесии Нэша было принято некое желательное решение. Скажем, в примере со строительством моста организаторы могут быть заинтересованы в принятии решения «построить мост». Т.е. нам интересно принятие нужного решения, а не потоки платежей, которые возникают в связи с этим. В этом случае от механизма может требоваться:

Определение 8.2. Бюджетная сбалансированность. Механизм имеет сбалансированный бюджет, если в равновесии Нэша сумма платежей всех игроков равна нулю.

Стоит сразу сказать, что не всех этих свойств можно добиться одновременно. Для некоторых задач доказано, что не существует механизма, который был бы эффективен, правдив, индивидуально рационален и бюджетно сбалансирован.

1.3 Механизм VCG

Есть универсальный механизм, который применим к множеству ситуаций. Этот механизм есть не что иное как аукцион второй цены. Давайте повнимательнее к нему присмотримся... Мы сознательно пока забудем про платежи и сосредоточимся только на полезности от получения товара.

Конкретный пример. У пяти игроков были ценности равные $(1, 3, 7, 11, 25)$. Ровно такие ставки они и сделали. Победил пятый игрок, который поставил 25. При этом он получил от товара полезность равную 25. Остальные четверо получили суммарную полезность 0.

А что произошло бы если бы пятый не участвовал в аукционе? Тогда победил бы игрок с ценностью 11. При этом четверо игроков (кроме нынешного пятого) получили бы суммарную полезность равную 11.

Заметим, что при удалении любого другого игрока сумма полезностей остальных (без учета платежей) не поменялась бы.

Подводим итог. На аукционе второй цены:

$$
\begin{aligned}
&\text{Выплата } i\text{-го игрока} = \\
&\qquad \text{Максимально достижимая суммарная полезность всех игроков кроме } i\text{-го} \\
&\qquad\qquad - \\
&\qquad\qquad \text{Текущая суммарная полезность всех игроков кроме } i\text{-го}
\end{aligned}
\tag{8.3}
$$

Механизм Викри-Кларка-Гровса применяет эту идею к любой задаче. А именно он говорит:

Определение 9.0. . Механизм VCG. Неформальное определение:

1. Правило распределение: выбрать решение, максимизирующее сумму полезностей.
2. Правило платежей: игрок i платит суммарную потерю полезности остальных игроков от своего участия в игре.

Опишем идею немножко более формально. Пусть множество возможных типов игрока i — это числовое множество T_i, чаще всего отрезок. Мы рассматриваем только прямые механизмы, поэтому множество возможных ходов такое же, $B_i = T_i$.

Полезность игрока зависит от его типа и принятого решения, $v_i(X_i, w)$. Т.е. типовая табличка имеет вид:

	Решение w_1	Решение w_2
Игрок 1	$v_1(X_1, w_1)$	$v_1(X_1, w_2)$
Игрок 2	$v_2(X_2, w_1)$	$v_2(X_2, w_2)$
Игрок 3	$v_3(X_3, w_1)$	$v_3(X_3, w_2)$

В теореме мы используем обозначения:

1. b_i — ход, сделанный игроком i, поскольку механизм прямой, это есть заявленный им тип.
2. w^* — оптимальное решение при типах $(b_1, b_2, ..., b_n)$
3. w^*_{-i} — оптимальное решение при типах $(b_1, ..., b_{i-1}, -, b_{i+1}, ..., b_n)$, т.е. в случае если i-ый игрок не участвует.

Итак,

Определение 9.1. Механизм VCG, механизм Викри-Кларка-Гровса — это прямой механизм, в котором:

1. Множество $B_i = T_i$, т.е. каждому игроку предлагают сказать свой тип.
2. Правило распределения: выбирается то решение w, которое максимизирует сумму полезностей игроков при задекларированных ходах. Если таких решений несколько, то оно выбирается равновероятно.
$$\max_w \sum_i v_i(b_i, w) \tag{9.2}$$
3. Правило платежей: платеж i-го игрока есть разница между: максимально возможной суммарной полезностью остальных игроков, если i-ый не участвует в игре, и суммарной полезностью остальных игроков при текущем решении.
$$M_i(\vec{b}) = \sum_{j \neq i} v_j(b_j, w^*_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(b_j, w^*) \tag{9.3}$$

Мы сейчас докажем, что в механизме VCG стратегия игрока «правдиво декларировать свой тип» нестрого доминирует все остальные. Но перед доказательством разберем пару примеров:

Пример 9.4. Применение механизма VCG к разносчику пиццы, 2.1.

Сначала определим, какое решение примет механизм VCG. Для этого посчитаем сумму полезностей.

	Ехать сначала к А потом к В	Ехать сначала к В потом к А
Клиент А	$-a$	$-b-c$
Клиент В	$-a-c$	$-b$
Сумма полезностей	$-2a-c$	$-2b-c$

Т.е. механизм VCG выберет наикратчайший путь. Для определенности будем считать, что $a<b<c$. В этом случае, разносчик пиццы едет сначала к А, потом к В.

Теперь определим для случая $a<b$ кто и сколько платит.

Сколько платит игрок А? Если бы А не было, то оптимальным был бы путь к В напрямую и тот получил бы полезность $-b$. Сейчас В получает полезность $-a-c$. Стало быть игрок А должен заплатить $-b-(-a-c)=a+c-b$.

Сколько платит игрок В? Если бы В не было, то оптимальным был бы путь к А напрямую и тот получил бы полезность $-a$. Сейчас А получает полезность $-a$. Стало быть игрок В ничего не платит, $-a-(-a)=0$.

Пример 10.1. Применение механизма VCG к строительству моста, 1.2. Для примера возьмем конкретные значения V_A, V_B и c. Посчитаем сумму полезностей. Зная сумму определим, какое решение примет VCG.

	Построить мост	Не строить мост
Жители города А	$+60$	0
Жители города В	$+90$	0
Администрация	-100	0
Сумма	$+50$	0

Т.е. механизм VCG говорит: строим мост.

Теперь считаем, кто и сколько платит.

Сколько платят жители А? Если бы их не было, то оптимальным было бы решение не строить мост и остальные игроки получили бы полезность 0. Сейчас остальные игроки получают в сумме (-10). Значит жители A платят $0-(-10)=10$.

Сколько платят жители В? Если бы их не было, то оптимальным было бы решение не строить мост и остальные игроки получили бы полезность 0. Сейчас остальные игроки получают в сумме (-40). Значит жители В платят $0-(-40)=40$.

Тут мы видим существенный недостаток механизма VCG: а именно бюджетную несбалансированность. Чтобы сделать то, что советует VCG, нужно взять откуда-то с потолка еще 50 рублей. И это не проблема конкретно механизма VCG, а именно несовместимость некоторых желательных свойств.

Естественно, возникает вопрос: а как механизм VCG добьется того, чтобы максимизировать суммарную полезность? Ведь для этого надо знать истинные полезности игроков! А вдруг они соврали, когда сообщали свои типы? Ответ, естественно, состоит в том, что игрокам выгодно правдиво сообщать свои типы:

Теорема 10.2. *При использовании механизма VCG стратегия «Правдиво декларировать свой тип, $b_i(x_i)=x_i$» нестрого доминирует остальные стратегии игрока i.*

Доказательство. Посчитаем полезность первого игрока полезность в случае, если игроки делают ходы $(b_1,\ldots,b_n)$, не обязательно правдивые.

Общая полезность с учетом решения и платежа равна:

$$v_1(x_1, w^*) - M_1 = v_1(x_1, w^*) - \left(\sum_{j=2}^{n} v_j(b_j, w^*_{-1}) - \sum_{j=2}^{n} v_j(b_j, w^*) \right) =$$

$$= v_1(x_1, w^*) + \sum_{j=2} v_j(b_j, w^*) - \sum_{j=2}^{n} v_j(b_j, w^*_{-1}) \quad (10.3)$$

Первый игрок выбирает b_1. На что оно влияет? Оно влияет только на исход w^*! Первый игрок не в силах изменить, ни w^*_1, т.к. это игра без него, ни ходы b_j остальных игроков, ни свой тип x_1. Т.е. выбор хода b_1 не меняет вычитаемого.

Оставшиеся два слагаемых на которые первый игрок может влиять выбором хода b_1 — это не что иное, как суммарная полезность всех игроков, если бы их типы были бы равны $(x_1, b_2, b_3, ..., b_n)$.

А правило распределения w^* обеспечивает максимизацию суммарной полезности для задекларированных типов $(b_1, b_2, ..., b_n)$. Значит, если первый игрок сообщит $b_1 = x_1$, то правило w^* само максимизирует его полезность.

□

Из этого, конечно, следует, что профиль стратегий, где все игроки правдиво декларируют свой тип, является равновесием Нэша.

Есть и другой подход к обобщению идеи аукциона второй цены. И этот подход также активно используется.

Пример 11.1. Обобщенный аукцион второй цены, Generalized Second Price auction, GSP.

Как Google делает деньги? Около 98% своих денег Google делает на продаже рекламных ссылок. Есть несколько рекламных мест, которые показываются, когда пользователь запрашивает в поисковике какое-нибудь слово, например «Абрикос». Эти места отличаются по престижности. Желающие получить эти рекламные места одновременно делают свои ставки.

Игрок, сделавший самую большую ставку получает самое престижное место, игрок сделавший вторую по величине ставку, получает второе по престижности место и т.д. При этом победитель платит не свою ставку, а вторую по величине ставку; игрок получивший второе по престижности место платит ставку игрока, получившего третье по престижности место и т.д. Игрок выигравший самое непрестижное рекламное место, платит самую высокую ставку среди игроков, которые ничего не выиграли.

В реальности все чуточку сложнее. Игрок сделавший i-ую по величине ставку платит $i+1$ по величине ставку плюс небольшую надбавку. Есть еще куча других нюансов, связанных с особенностью продаваемого блага. Желающие могут сами поиграться на `adwords.google.com`. Например, за сумму в несколько долларов можно сделать страницу-сюрприз, которая будет выводиться первой при поиске на фразу «день рождения Васи Петрова».

1.4 Оптимальный аукцион

А сейчас мы увидим, что в простейшей ситуации аукцион второй цены с резервной ценой оптимален.

Пусть каждый покупатель знает ценность товара для себя, т.е. $X_i = V_i$. Кроме того предположим, что каждая ценность имеет регулярное распределение, описываемое функцией распределения $F_i(x)$.

Что произошло бы, если бы никакого аукциона не было, и продавец просто предложил бы каждому покупателю купить у него товар по цене x? В этом случае игрок i согласился бы на покупку, если $X_i > x$, а вероятность этого равна:

$$P(X_i > x) = 1 - F_i(x) \tag{12.0}$$

И при отсутствии аукциона, средний доход продавца от i-го игрока был бы равен:

$$TR_i = x(1 - F_i(x)) \tag{12.1}$$

По сравнению с обычной формулой $TR(Q) = P(Q) \cdot Q$:

1. x — это аналог цены $P(Q)$
2. $1 - F_i(x)$ — это аналог количества товара Q

Как обычно в экономике можно определить предельный доход продавца, $TR'(Q)$:

$$MR_i(x) = \frac{dTR_i(x)}{d(1 - F_i(x))} = x + (1 - F_i(x))\frac{dx}{d(1 - F_i(x))} = \\ = x + (1 - F_i(x))\frac{-1}{f(x)} = x - \frac{1 - F_i(x)}{f_i(x)} \tag{12.2}$$

Мы воспользовались тем, что производная обратной функции — это единица делить на производную исходной.

Эта величина — скорость роста ожидаемого дохода продавца при росте вероятности сделки. Если она положительна, значит продавец заинтересован в росте вероятности сделки, т.е. в снижении v. Если она отрицательна, значит продавец заинтересован в снижении вероятности сделки, т.е. в росте v.

Оказывается, что величина MR_i возникает и при моделировании аукционов. А именно:

Теорема 12.3.

$$E(pay_1(X_1)) = E(q_1(X_1)MR_1(X_1)) \tag{12.4}$$

Доказательство. Мы будем изучать первого игрока, и поэтому опустим индекс 1, чтобы было меньше писанины.

Для доказательства вспомним формулу из теоремы об одинаковой доходности первой лекции:

$$pay(x) = xq(x) - \int_0^x q(t)dt \tag{12.5}$$

Тогда мы считали, что все игроки используют равновесные стратегии. И при этом трактовали функции как:

- $q(x)$ — вероятность того, что первый игрок выиграет, если его ценность равна x.
- $pay(x)$ — средняя выплата от первого игрока продавцу, если его ценность равна x

Теперь представим себе, что как в теореме 6.1 мы заменили исходный механизм прямым, т.е. продавец автоматом обрабатывает поступающие к нему сообщения о типах равновесными функциями b_i. Тогда получается новая трактовка старых функций:

- $q(x)$ — вероятность того, что первый игрок выиграет, если сообщит ценность x, а остальные правдиво сообщат свои ценности

- $pay(x)$ — средняя выплата от первого игрока, если он сообщит ценность x, а остальные правдиво сообщат свои ценности

Поехали:

$$E(pay(X_1) = \int_0^1 pay(x)f(x)dx = \int_0^1 \left(xq(x) - \int_0^x q(t)dt\right) f(x)dx =$$
$$\int_0^1 xq(x)f(x)dx - \int_0^1 \int_0^x q(t)dtf(x)dx \quad (12.6)$$

Применим к вычитаемому формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^1 \int_0^x q(t)dtf(x)dx = \int_0^x q(t)dtF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 q(x)F(x)dx =$$
$$= \int_0^1 q(x)dx - \int_0^1 q(x)F(x)dx = \int_0^1 q(x)(1-F(x))dx \quad (13.1)$$

Подставляем полученный результат в исходную формулу:

$$E(pay(X_1) = \int_0^1 xq(x)f(x)dx - \int_0^1 q(x)(1-F(x))dx =$$
$$= \int_0^1 q(x)f(x) \cdot \left(x - \frac{1-F(x)}{f(x)}\right) dx = E(q(X_1) \cdot MR(X_1)) \quad (13.2)$$

□

Польза от этой теоремы в том, что с помощью нее легко определить оптимальный аукцион.

Теорема 13.3. *Предположим, что функции* $MR_i(x) = x - \frac{1-F_i(x)}{f_i(x)}$ *для каждого игрока не убывают. Оптимальный аукцион устроен по принципу:*

1.1. Товар достается покупателю с наибольшим $MR_i(X_i)$*, если оно неотрицательно. Если таких покупателей несколько, то он выбирается из них равновероятно.*

1.2. Если наибольшее $MR_i(x_i) < 0$*, то товар остается у продавца*

2. Победитель платит минимально возможную ставку, при которой он еще остался бы победителем:

$$M_i = \inf\{t | MR_i(t) \geq 0, MR_i(t) \geq MR_j(X_j) \forall j\} \quad (13.4)$$

Доказательство. Что делает оптимальный аукцион? Он должен максимизировать $E(R) = E(pay_1(X_1)) + ... + E(pay_1(X_n))$.

Как мы только что доказали, $E(pay_i(X_i)) = E(q_i(X_i)MR_i(X_i))$. Выбирая правила аукциона мы не можем влиять на $MR_i(X_i)$, т.к. это характеристика распределения ценностей. Мы можем только влиять на вероятности получения товара каждым из игроков, т.е. на функцию $q_i()$.

Предлагаемое правило распределения сделает максимум возможного! Оно помножит на 0 отрицательные $MR_i(X_i)$. При наличии положительных $MR_i(X_i)$, оно помножит на единицу наибольшее из них, а остальные помножит на 0. Значит оно максимизирует ожидаемую прибыль продавца.

Остался один вопрос. А сможет ли это правило работать? Ведь, чтобы определить $MR_i(X_i)$, надо знать настоящее X_i. Т.е. осталось доказать, что при использовании этого правила игроки правдиво декларируют свои ценности.

Как и в первой лекции построим сравнительную табличку. Результат аукциона для первого игрока зависит от его собственной ставки и от $m = \max\{0, MR_2(X_2), ..., MR_n(X_n)\}$.

	$m \le MR_1(X_1 - \Delta)$	$m \in [MR_1(X_1 - \Delta); MR_1(X_1)]$	$m \ge MR_1(X_1)$
$b_1 = X_1$	$X_1 - M_1$	$X_1 - M_1$	0
$b_1 = X_1 - \Delta$	$X_1 - M_1$	0	0

Разница только во втором столбце. В этом случае $MR_1(X_1) \ge MR_j(X_j)$ и $MR_1(X_1) \ge 0$. Значит величина $X_1 - M_1 \ge 0$.

Аналогично доказывается, что и отклоняться в положительную сторону также невыгодно.

Платежи возникающие в матрице неотрицательные. Это означает, что механизм индивидуально рационален и игроков не надо в него затаскивать принудительно. □

Применим эту теорему к случаю симметричных игроков.

Пример 14.1. Если все функции $MR_i(x)$ одинаковые и возрастают по x, то товар либо достается игроку с наибольшим X_i, либо не достается никому. Товар не достается никому, если

$$MR(\max\{X_i\}) < 0 \tag{14.2}$$

Это условие можно записать и как:

$$\max\{X_i\} < MR^{-1}(0) \tag{14.3}$$

Т.е. на аукционе есть победитель, если максимальная ставка достигла отметки $MR^{-1}(0)$. Сколько платит победитель? Чтобы остаться победителем, минимальная ставка которую нужно сделать должна удовлетворять условию $MR(t) \ge 0$ и быть больше других ставок. Действительно:

$$M = \inf\{t|MR(t) \ge 0, MR(t) \ge MR(X_j)\forall j\} \iff \inf\{t|MR(t) \ge 0, t \ge X_j \forall j\} \tag{14.4}$$

Таким образом мы доказали, что для симметричных игроков оптимальным аукционом будет аукцион второй цены с резервной ценой равной $r = MR^{-1}(0)$.

Стоит отметить, что если ценности независимы, но имеют разное распределение, то аукцион второй цены с резервной ценой может не быть оптимальным. Это связано с тем, что на аукционе второй цены побеждает игрок с наибольшей ценностью, а в оптимальном аукционе нужно чтобы победил игрок с наибольшей MR_i. Если фукнции MR_i отличаются, то эти условия могут не совпадать.

Пример 14.5. На аукционе n игроков. Ценности независимы и равномерны на $[0; 1]$. Какими должны быть правила проведения аукциона, чтобы максимизировать ожидаемую доходность продавца?

Находим $MR(x)$:

$$MR(x) = x - \frac{1-x}{1} = 2x - 1 \tag{14.6}$$

Функция монотонно возрастает, поэтому оптимальный аукцион — это аукцион второй цены с резервной ценой. Находим цену из уравнение $MR(r) = 0$. Получаем $r = 0.5$

1.5 Спасибо!

Вот, пожалуй, и всё. Надеюсь, вам понравилось. Спасибо!

1.6 Задачи

1. Найдите $E(MR_i(X_i))$

2. Рассмотрите задачу разносчика пиццы, $a < b < c$, где помимо двух основных также есть варианты: «Ехать только к A», «Ехать только к B» и «Не ехать ни к кому». Какое решение будет принято и сколько заплатят игроки при применении механизма VCG?

3. Рассмотрите задачу разносчика пиццы с двумя игроками и с учетом самого разносчика пиццы, $a < b < c$, где помимо двух основных также есть варианты: «Ехать только к A», «Ехать только к B» и «Не ехать ни к кому». Полезность разносчика пиццы равно времени потраченному на дорогу со знаком минус. Какое решение будет принято и сколько заплатят игроки при применении механизма VCG?

4. Какое решение будет принято, сколько заплатят игроки при использовании механизма VCG в задаче про посуду, 2.2?

5. Приведите пример, показывающий, что на аукционе GSP в равновесии Нэша игроки не всегда правдиво сообщают свои ценности.

1.7 Решения задач

1. По определению $MR_i(x)$:

$$E(MR_i(X_i)) = E(X_i) - \int_{\alpha_i}^{\omega_i} (1 - F(t))dt \tag{15.1}$$

Далее интегрируем по частям, $u(t) = 1 - F(t)$, $v'(t) = 1$ и получаем $E(MR_i(X_i)) = 0$.