

1 Матричная форма, осторожные стратегии, обратная индукция (начало)

[Slantchev] - глава Elements of basic models, [IGT] - глава 2,5

Информационное множество — один или несколько узлов, которые игрок не может различить между собой (пунктир на дереве)

Стратегия – инструкция, указывающая какой ход нужно выбирать в каждом узле (информационном множестве). Стратегия позволяет игроку продолжить игру с любой позиции, не только с начальной.

Профиль стратегий или исход – набор стратегий по одной от каждого игрока

Игра с совершенной информацией – игра, где каждый игрок знает всю предысторию игры; на дереве есть только одноточечные информационные множества

Осторожная стратегия – стратегия, которую выберет игрок, предполагающий, что при любом его выборе для него произойдет самое худшее

Антагонистическая игра – игра двух игроков, в которой выигрыш одного игрока равен проигрышу другого

Природа или Случай – особый игрок, у которого изначально заданы вероятности ходов (буква N на дереве).

Суть метода обратной индукции – начиная с конца игры определяем кому как выгодно пойти. Каждый игрок выбирает больший средний выигрыш. Применим в играх с совершенной информацией.

Задачи 1.1. 1.2. 1.3.

game .23	game .25	game .24
----------	----------	----------

- Сколько стратегий у каждого игрока? Сколько в игре исходов?
- Выпишите все профили стратегий, при которых, игра оканчивается в узле $(-1;-1)$.
- Переведите игру в матричную форму
- Решите игру методом обратной индукции

Задачи 2.1. 2.2. 2.3.

game .13	game .22	game .28
----------	----------	----------

- Укажите число стратегий каждого игрока
 - Переведите игры в матричную форму
- Примечание: в играх с природой в матрицу пишут средний выигрыш

3. Задана антагонистическая игра (в матрице указывается выигрыш для первого игрока):

	d	e	f
a	-2	1	3
b	3	x	-5
c	2	-3	0

- а) Допишите в матрицу выигрыши второго игрока;
- б) Найдите осторожные стратегии обоих игроков при $x = 0$
- г) Найдите осторожные стратегии обоих игроков при произвольном x

4. Задана матрица игры:

	t_1	t_2	t_3
l_1	(0; 0)	(0; 0)	(0; 0)
l_2	(0; 0)	(1; -3)	(-3; 1)
l_3	(0; 0)	(-3; 1)	(1; -3)

- а) Существует ли последовательная игра с совершенной информацией («дерево без пунктиров») с такой матрицей?
- б) Существует ли последовательная игра с несовершенной информацией («дерево с пунктирами») с такой матрицей?

5. Deep Blue

Представим, что Вы играете партию в шахматы против компьютера. Сколько стратегий использует компьютер во время одной партии?

6. Есть несколько кучек камней. Два игрока ходят по очереди. За ход разрешается: либо взять любое положительное количество камней из одной кучки, либо поделить любую кучку на две новые непустые кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Проигравший платит победителю 1 рубль. Игроки ходят по очереди.

Нарисуйте дерево игры, начинающейся с единственной кучки из 3 камней.

7. В кучке лежит 5 камней. Петя и Вася по очереди забирают камни из кучки. Петя ходит первым. За свой ход Петя может взять 1 или 3 камня, а Вася 2 или 3 камня. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Проигравший платит победителю рубль.

- а) Нарисуйте дерево игры;
- б) Переведите игру в матричную форму.
- в) Найдите осторожные стратегии игроков.
- г) Решите игру методом обратной индукции

8. Допустим, что задана некая антагонистическая игра в матричной форме.

Определите, верно или не верно каждое утверждение:

- а) При увеличении всех чисел матрицы на единицу осторожные стратегии игроков не изменятся.
- б) При умножении всех чисел на минус единицу осторожные стратегии игроков не изменятся.
- в) При транспонировании матрицы осторожные стратегии игроков поменяются местами (т.е. осторожные стратегии второго игрока станут осторожными стратегиями первого игрока и наоборот).

9. С чего все начиналось...

Париж, Людовик XIV, 1654 год, высшее общество говорит о рождении новой науки - теории вероятностей. Ах, кавалер де Мере, «fort honnete homme sans etre mathematicien» «благородный человек, хотя и не математик»... Старая задача, неправильные решения которой предлагались тысячелетиями (например, одно из неправильных решений предлагал изобретатель двойной записи, кумир бухгалтеров, Лука Пачоли) наконец решена правильно!

Два игрока одинаковой силы играют в некую игру до шести побед. Игрок первым выигравший шесть партий (не обязательно подряд) получает 800 луидоров. К текущему моменту первый игрок выиграл 5 партий, а второй - 3 партии. Они вынуждены прервать игру в данной ситуации. Как им поделить приз по справедливости?

10. Кортес

Кортес с бандой головорезов высадили на берегу. Кортес выбирает, нападать ли на деревушку или нет. Местная деревушка может либо сразу перейти в подчинение Кортеса, либо принять бой. Если деревушка примет бой, то выбор появится у Кортеса: либо драться до победного конца, либо после первых потерь бежать на кораблях обратно. Ценность деревушки для Кортеса – одна единица, ценность собственных головорезов – 2 единицы. Если Кортес будет драться до конца, то деревушка будет взята, но большинство головорезов погибнет в бою. Для жителей деревушки – главное остаться в живых, сохранить при этом независимость, конечно, желательно.

а) Нарисуйте дерево игры и найдите обратно-индукционный исход.

б) Нарисуйте дерево игры и найдите обратно-индукционный исход в случае, если Кортес ограничил свои возможности – сжег корабли.

2 Антагонистический игры

1. Какая-нибудь антагонистическая игра. В следующем году имеет смысл не рассказывать, а подробно разобрать 2х3 неантагонистическую

2. Камень, Ножницы, Бумага и Колодец тоже надо

3 Доминирование, НЕ в чистых

Равновесие по Нэшу. Nash equilibrium. NE.

– Профиль стратегий, в котором ни один игрок не захочет сменить свою стратегию, даже если узнает стратегии других игроков.

1. Петя, Вася и Волшебная Шкатулочка

Вася и Петя нашли волшебную шкатулочку. Если в нее положить деньги и сказать «Ахалай Махалай», то сумма, лежащая в шкатулке увеличивается в полтора раза. Один недостаток: работает только раз! Петя и Вася решили поступить так: каждый положит в шкатулку сколько хочет, потом они скажут «Ахалай Махалай» и поделят всю сумму поровну.

а) Что является стратегией игрока?

б) Представьте эту игру в *нормальной форме*.

в) Можно ли представить игру в матричной форме? Почему?

г) Найдите равновесие по Нэшу;

2. Игра в половину среднего. Три раунда. Победители делят шоколадку поровну. Можно было спросить, что изменится, если каждый победитель получает по конфете?

3. Делим пирог

Мама одновременно спрашивает двух братьев, какую долю пирога каждый хотел бы получить. Братья получают то, что попросили, если пирога хватает (остаток при этом мама уносит на работу). Если братья вместе запросили больше, чем целый пирог, то они не получают ничего.

а) Представьте игру в нормальной форме;

б) Найдите все равновесия по Нэшу в чистых стратегиях.

в) Как изменится ответ, если братья завидуют друг другу, т.е. если удовольствие равно размеру собственного куска минус размер чужого куска?

4. Задача. Два человека пришли в кабак. У одного из них 10 золотых, у второго – 6 золотых. Каждый может тратить деньги на выпивку или на музыку. Музыка является общественным благом - ее слышат все. Выпивка - частным. Полезности равны $u_1 = (m_1 + m_2)d_1$ и $u_2 = (m_1 + m_2)d_2$, где m_i и d_i - расходы i -го человека на музыку и выпивку. Предположим, что деньги бесконечно делимы.

- а) Найдите равновесие Нэша
- б) Что изменится в случае, если у второго 2 золотых?
- в) Что изменится, если функции полезности имеют вид $u_1 = (m_1 - m_2)v_1 + 20v_1$ и $u_2 = (m_2 - m_1)v_2 + 20v_2$?

4 Биматричные игры, НЕ в смешанных

1. Биматричная игра 3х3, сводимая к 2х2 вычеркиванием строго доминируемых стратегий
2. Первый игрок называет число $x \in [0; 10]$, одновременно второй называет число $y \in [0; 5]$. Выигрыши определяются по формулам

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= -x^2 + 6xy + \cos(y) \\ u_2(x, y) &= -y^2 + 4xy + 4y + \sin(x) \end{aligned} \quad (1)$$

Найдите равновесие Нэша в чистых стратегиях

3. Конверты

В пяти конвертах спрятаны суммы в 10\$, 20\$, 40\$, 80\$ и 160\$. Случайным образом выбираются два конверта с соседними суммами и выдаются игрокам, по одному конверту игроку. *Тигр: А в конвертах - это взятки?* Каждый игрок открывает свой конверт и выбирает, хочет ли он оставить себе сумму или хочет обменяться. Обмен происходит, если оба игрока согласны обменяться.

- а) Сколько чистых стратегий у каждого игрока?
 - б) Найдите все равновесия по Нэшу в чистых и стратегиях
4. Вопросы о разном...
- а) Может ли в равновесие по Нэшу входить строго доминируемая стратегия?
 - б) Может ли в равновесие по Нэшу входить нестрого доминируемая стратегия?
 - в) Могут ли все исходы игры быть равновесными по Нэшу?
 - г) Может ли в произвольной игре не быть ни одного равновесия по Нэшу в чистых стратегиях? А в биматричной?
 - д) Может ли в произвольной игре не быть ни одного равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях? А в биматричной?
 - е) Может ли существовать в произвольной игре стратегия, на которую не существует оптимального ответа? А в биматричной?
 - ё) Может ли игра в развернутой форме быть антагонистической?
 - ж) Сколько смешанных стратегий у первого игрока, если у первого игрока две чистых стратегии, а у второго – три чистых стратегии?

5. Задача. Limbo.

До весны 2007 года в Швеции существовала необычная лотерея «Limbo». Правила выглядят следующим образом. Вы можете выбрать любое натуральное число. Победителем объявляется тот, кто назвал самое маленькое число, никем более не названное. Например, если игроки называли числа 1, 3, 1, 2, 4, то победителем будет тот, кто назвал число 2. Если наименьшего никем более не названного нет, то приз остается у организаторов.

- а) Опишите все равновесия по Нэшу в чистых стратегиях для n игроков

6. Задача. Мост

Из пункта A в пункт D можно попасть двумя путями - через B или через C . Если по дороге AB едет x машин, то время в пути каждой из них будет равно $f_{AB}(x) = x + 32$. Для других отрезков пути функции равны: $f_{BD}(x) = 5x + 1$, $f_{CD}(x) = x + 32$ и $f_{AC}(x) = 5x + 1$. Каждое утро из города A в город D едет 6 машин.

game.5

- а) Сколько машин и по какой дороге едет в равновесии по Нэшу? Сколько им требуется времени, чтобы добраться из A в D ?
- б) Как изменятся ответы, если между городами B и C построен удобный мост, такой что $f_{BC} = 0$?