

ТЕОРИЯ ИГР

Лекция 1

Вадим Львович Шагин.

70 % того, что будет в курсе, будет в книге.

Это математическая дисциплина.

Надо выключать телефоны и не опаздывать. Надо посещать лекции, потому что будет легче воспринять на слух, чем прочесть из непонятной книжки.

Курс не использует много из математического анализа, но тут идёт логика, рассуждения, символическая математика. Матанализ развивался ещё с XVII века, а в 50-е годы был только ещё спецкурс вещей, которые читались вскользь — начало, на котором развивалась бурная наука. 1-я контрольная будет в 1-м модуле, вторая — во втором, плюс будет оцениваться работа на семинарах. Списать не очень получается, Будут остановки и ответы на вопросы по куску.

Теория игр — теория конфликта. Для этого нужны двое. Например, прибыль при конкуренции двух участников рынка зависит от цены и качества товара участников. Выигрыш каждого зависит от других игроков. Пример: выпускается одна и та же продукция, и тут вступает в силу модель Курно, которая справедлива для олигополии. Игра называется «чёт-нечет». Начинается счёт с меньшего, на кого попадает, тот выигрывает рубль. Например, 2 — 1. Выигрывает второй игрок. Эта игра статическая. Статическая игра — это игра, в которой ход делается одновременно. Динамическая игра — это шахматы, карты, домино и т. д. Участники игры — игроки. Игроки делают в играх ходы. Стратегия — это более ёмкое понятие. Первый игрок выбрал один палец или два пальца — здесь две стратегии. А если заранее договорились сыграть, то в двукратно повторяемой игре сколько стратегий? Четыре. Надо всё пропускать сквозь свои каналы. 1 — 1, 2 — 2, 1 — 2, 2 — 1. Четыре чистых стратегии. А может ли быть пятая стратегия? Первый ход — выбросить один, а второй — повторить ход соперника. А можно сделать противоположный ход. Можно в зависимости от выигрыша пойти. А есть смешанные стратегии. Выбрасывать один или два пальца в зависимости от монетки. Вводим элемент случайности. Можно задать вероятность p и с ней кидать пальцы. Это смешанная стратегия — вероятностная смесь чистых стратегий.

Когда задана игра, то, во-первых, правила устанавливаются с самого начала и не меняются до конца игры. Это не хорошо и не плохо. Был 1998, нам было 6 лет, и был дефолт. Государство играло в разные игры с другими государствами и с жителями России. И в один момент государство сказал: мы играем по новым правилам. Оно всех поставило в неудобную ситуацию, хотя правила игры закладывались неизменными. Но память об этом дефолте будет давить недоверием. Этот выигрыш будет долго покрываться недовыигрышами. После 1998 года люди долго не клали деньги в банк. Любое изменение правил чревато последствиями.

Почему у нас не заказывают программ на рынке ПО? У нас лучше программисты, но был 1998 год. Если ситуация уже была, то почему теория игр это не рассматривает? Должно быть продолжение. Тема курсовой: как изменится теория игр, если один из игроков сможет менять правила.

Стратегия — полный план действий на всю игру.

Итак, теория игр — теория конфликтов. Нужны игроки, правила, стратегии. Нужен выигрыш, который зависит от действий всех игроков.

Классификация: по количеству игроков (2 или более). По количеству стратегий: конечная или бесконечная. Конечная — один или два пальца. Бесконечная: Рита называет число 21. Шагин говорит: 22! Я выиграл! Эта игра последовательная, потому что, зная правила, можно выбрать $n + 1$ и выиграть. А можно выбрать x от 0 до 1. Задана функция выигрыша. Выбор числа — это и есть стратегия. Это бесконечная игра, множество стратегий бесконечно. По наличию элементов случайности бывают стохастические и детерминированные игры. По коалиции игры бывают коалиционные и бескоалиционные, когда правила не допускают отношений между игроками. Делятся ещё по свойствам функции выигрыша. Можно играть с нулевой суммой (антагонистические игры). Сумма всех выигрышей равна нулю: сколько один выиграл, столько проиграл. Есть неантагонистические игры, в которых можно проиграть сколько угодно. Бывают статические и динамические игры. Рулетка — статическая игра. Можно делить на игры с полной и неполной информацией, а также совершенная и несовершенная информация.

	СИ	НСИ
ПИ		
НПИ		

Полнота информации — полнота функции выигрыша. Каждый игрок знает, сколько получит каждый при выборе стратегии. Игра «чёт-нечет» — ПИ. Игры с НПИ — противоречие: хотя бы один из игроков неполно знает. Например: если выбрасываем 1 — 2, то с вероятностью 0,5 получим 3 рубля, с вероятностью 0,5 получаем 0,5 рубля. Не будет такого, что никто не будет знать о функциях выигрыша. Речь идёт о знании функции выигрыша. Если хотя бы один из игроков при наборе стратегий знает что-то с вероятностью, то это неполная информация.

Совершенная информация или несовершенная. В какой из точек я нахожусь? В какой-то момент надо сделать ход, на руках одна карта. А мы не помним, вылетела десятка трэф или нет. Может быть разный случай: 10 трэф на руках, 10 трэф в прикупе, предыстория неизвестная. В совершенной информации вся предыстория знакома. В несовершенной информации мы можем не знать, где находимся. Множество стратегий второго игрока всегда известно.

Форма описания игры.

Первый выбирает строку. Второй выбирает столбец. Записано, сколько пальцев.

	1	2
1	(0; 0)	(1; -1)
2	(-1; 1)	(0; 0)

Если у нас N игроков, $S_1, S_2, \dots, S_N, U_1(S), U_2(S), \dots, U_N(S)$, то это игра в нормальной форме. S_i — множество стратегий (конечное или бесконечное) второго игрока. Они должны быть заданы. $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_N$ — Декартово произведение.

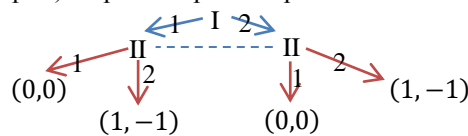
Декартово произведение. Скажем, $X = [1, 2], Y = [3, 5]$. $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$. На плоскости получается прямоугольник.

$S = \{s\}; s = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_N), s_i \in S_i$. Когда каждый игрок выбрал стратегию, то получается исход, или ситуация, или профиль стратегий — s .

U_1 — выигрыш первого игрока; он зависит от S — область определения функции выигрыша является множество профилей таких стратегий.

Иногда будет удобно рассматривать i -го игрока и вести рассуждение с его точки зрения. Будем рассматривать вектор так: $s = (s_i, s_{-i})$. s_i — стратегия i -го игрока, s_{-i} — совокупность всех остальных игроков, исключая первого. $s_{-i} \in S_{-i} = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_N$.

Игра в развёрнутой (экстенсивной форме): первый игрок выбрасывает 1 или 2, второй выбрасывает 1 или 2.



Это множество называется информационным множеством. Это игра с несовершенной информацией. Последовательная игра с полной несовершенной информацией.

Доминирование. Доминирующие и доминируемые стратегии. Её надо рассмотреть вперёд по книге!

Лекция 2

Бывает, что ни одна стратегия не доминирует. Но может быть и нестрогое доминирование. Каковы бы ни были действия всех остальных игроков, выбор s_i даст не хуже, чем y_i .

У нас $s_i \in S_i, y_i \in S_i, s_i \geq y_i$: $\begin{cases} \forall s_{-i} \in S_{-i}: U_i(s_i, s_{-i}) \geq U_i(y_i, s_{-i}) \\ \exists s_{-i} \in S_{-i}: U_i(s_i, s_{-i}) > U_i(y_i, s_{-i}) \end{cases}$

Строгое доминирование: $\forall s_{-i} \in S_{-i}: U_i(s_i, s_{-i}) > U_i(y_i, s_{-i})$

Когда одна доминирует, то везде выполняется соотношение «не хуже», а в одном случае — лучше. АА строгое доминирование — когда везде лучше.

Рассмотрим игру.

	c	d
a	(2; 2)	(0; 3)
b	(3; 0)	(1; 1)

Первому игроку лучше выбрать вторую стратегию. $3 > 2, 1 > 0$; второму игроку лучше выбрать вторую стратегию.

$$b > a$$

$$d > c$$

Мы получим точку: первый получит рубль и второй получит рубль. Но как хотелось бы получить по два рубля! Но если бы они сыграли a и c , то получили бы по два рубля. (1; 1) — равновесие Нэша. А в точке (2; 2) выгоднее отклониться в одиночку.

Этот пример заставляет задуматься: а не лучше ли им договориться? Если это однократная игра, то тогда можно надуть соперника. Ага! Шагин думает: Рита сыграет c , а Шагин надует и сыграет b ! Может быть и наоборот. Поэтому в одиночку каждому удобно отклониться! Мы позже будем рассматривать игры с доверием. Тут у нас будет равновесие $(b; d)$.

	d	e
A	(5; 1)	(4; 0)
B	(6; 0)	(3; 1)
c	(6; 4)	(4; 4)

$$c \geq a, c \geq b$$

Нет строго доминируемых стратегий. Хорошо, исключим мысленно a . Это исключает первого игрока. В теории игр есть правило: мой соперник не глупее меня. Тогда они оба вычёркивают эту строку. Тогда второй игрок исключает первый столбец, играет e , а первый играет c .

Но мы могли поступить и иначе. А если мы исключим b , как нестрого доминируемую? Тогда эту стратегию исключают оба. После этого второй исключает столбец e . И первый выберет c . А если первый исключит обе, то тогда второму будет без разницы.

Но первый и второй игрок могут исключать разные случаи. А процедура исключения строго доминируемых стратегий всегда приведёт к одному и тому же результату.

Антагонистические игры, или игры с нулевой суммой. Будем рассматривать игры двух игроков. Такую игру очень удобно представлять в виде матриц, и можно не писать второе число.

	s_1^2	...	s_j^2	...	s_n^2	
s_1^1						$\min_j U_{1j}$
s_i^1			U_{ij}			$\min_j U_{ij}$
s_m^1						$\min_j U_{mj}$
	$\max_i U_{i1}$		$\max_i U_{ij}$		$\max_i U_{in}$	

В чём заключается осторожная стратегия? Если я выберу первую строку, то какой будет самый худший вариант? Если первая стратегия выбрана первым, то второй минимизирует свой проигрыш по j . А когда мы выберем вторую, то тогда он выберет минимум из второй строки. А потом мы максимизируем по i от минимума по j . Получим α — нижнюю цену игры как $\max_i \min_j U_{ij}$. А теперь будем рассуждать с точки зрения второго игрока. Если выбираем первый столбец, то первый игрок выберет ту строку, где максимум по $\forall i \max_i U_{1...N}$. Потом второй игрок вспоминает, что это всё его проигрыши, и он среди всех них производит процедуру минимизации проигрыша. Эта величина называется верхней ценой игры — $\beta = \min_j \max_i U_{ij}$. Если $\alpha = \beta$, то игра полностью определённая. И точка исхода называется седловой точкой. Эта величина называется ценой игры.

Но бывает случай, когда $\alpha < \beta$. Тогда не определена игра однозначно.

Рассмотрим пример.

−5	−1	4	−5
3	2	7	2
3	2	7	

$$\max_i \min_j U = 2 = \alpha$$

$$\min_j \max_i U = 2 = \beta$$

Рассмотрим другую игру.

8	1	4	1
−1	6	5	−1
8	6	5	

$$\max_i \min_j U = 1 = \alpha$$

$$\min_j \max_i U = 5 = \beta$$

А если они так и играют по осторожным стратегиям, то это будет неожиданность для обоих! Первый выиграет больше, второй проиграет меньше. Потом игрок 1 поумнеет и станет получать 5 рублей по стратегии b . А потом второй поумнеет и выберет c ! Потом первый перескакивает на a . И равновесия нет.

Выбор смешанной стратегии — выбор оптимального вектора с совокупностью чистых стратегий.

Смешанная стратегия — случайная величина со значениями чистых стратегий.

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}, \bar{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

Предположим, что надо рассчитать вероятность исхода.

$$p_i q_j$$

Тогда получим математическое ожидание выигрыша:

$$\sum_{i,j} p_i q_j U_{ij} = \bar{p}^T U \bar{q}$$

Здесь будет то же самое: минимум по q , внешнее — максимум по p .

$$\max_p \min_q \bar{p}^T U \bar{q} = \alpha$$

$$\min_q \max_p \bar{p}^T U \bar{q} = \beta$$

В чистых стратегиях игра конечная, в смешанных — бесконечна.

И есть тогда цена игры в смешанных стратегиях. Мы должны уметь её находить. $\bar{p}^*, \bar{q}^*, \alpha = \beta \rightarrow V = ?$

А следующий тип будет на семинарах и на контрольных. Никто никого не доминирует, пусть у нас есть матрица

10	4	4
0	12	0
6	5	5
10	12	

В чистых стратегиях здесь никто никого строго не доминирует. Но подумаем в смешанных.

Пусть мы выбираем комбинацию двух чисел: $px + (1 - p)y, p \in [0,1]$.

Может ли смесь b и c победить a ? Нет. А смесь $pa + (1 - p)b$ может победить c .

$$p > 0,6, p < \frac{7}{8}; p \in (0,6; 0,875)$$

Когда оба игрока договариваются играть в смешанных стратегиях, то первый игрок никогда не будет играть строку c . Второй игрок не глупее первого и сделает то же самое. Пусть $p = 0,7$. Тогда

$$d = 0,7a + 0,3b = 7$$

Лекция 3

Решить антагонистическую игру — найти стратегию $(p; q)$, от которой невыгодно отклоняться.

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i,j} p_i q_j U_{ij} = \vec{p}^* U \vec{q}$$

$$\max_p \min_q \vec{p}^* U \vec{q} = \alpha$$

$$\min_q \max_p \vec{p}^* U \vec{q} = \beta$$

В смешанных стратегиях результат будет одним и тем же. Это и есть цена v . Нам нужно ещё и векторы найти.

Рассмотрим матричную игру.

	x	y	z	t
a	1	4	9	5
b	7	1	-4	2
c	0	3	8	4
d	6	0	-6	1

Вычёркиваем c , она доминируется a . Вычёркиваем d , она доминируется b . Потом для второго $y > t$. Получили матрицу 2×3 . Может, смешанная стратегия для второго доминирует третий столбец? x не может быть строго доминируемой, а y может.

$$\begin{cases} qx - (1 - q)z > y \\ q + (1 - q)9 < 4 \\ 7q - 4(1 - q) < 1 \end{cases}$$

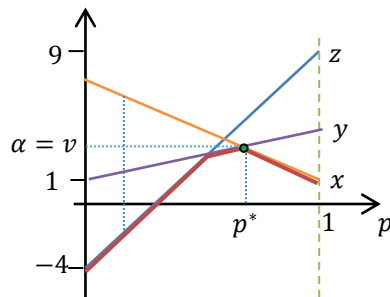
Получим пустое множество. Даже в смешанных стратегиях никто не победит. Как решить такую игру? Минимаксную проблему надо как-то решить. Матрицу мы сократили. Пусть первый игрок выбирает смешанную стратегию: p и $(1 - p)$. Второй выбирает, скажем, чистую.

$$U_1 | x = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 7$$

$$U_1 | y = p \cdot 4 + (1 - p) \cdot 1$$

$$U_1 | z = p \cdot 9 + (1 - p) \cdot (-4)$$

Подобные члены приводить не стоит. Если есть вероятность выиграть 3 рубля с вероятностью p и 100 рублей с вероятностью $1 - p$, то мы не можем получить 2 или 101. Внутренняя процедура (минимизация по q) приведёт нас на нижнюю ломаную. Это и есть процедура поиска самого худшего варианта. Если второй игрок узнает p , то я буду получать меньше всего. И максимизация приводит нас в верхнюю точку!



$$p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 7 = 4p + (1 - p), p^* = \frac{2}{3}$$

$$V = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 7 = 3$$

Здесь обычно наступает ступор: как найти q ? В формировании этой точки участвуют два столбца, x и y . Столбец z не влияет на формирование точки!

$$q \cdot 1 + (1 - q) \cdot 4 = 7q + (1 - q) = 3$$

$$q^* = \frac{1}{3}$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задача хорошо решается, когда пересекаются 3 прямые. А какой-то участок может быть горизонтальным! На контрольной этого не будет.

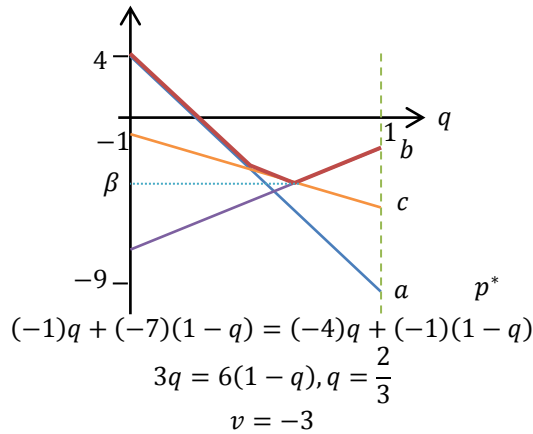
Напишем матрицу.

	$x \quad (q)$	$y \quad (1-q)$	z	t
a	-9	4	-8	6
b	-1	-7	0	-6
c	-4	-1	-3	0
d	-5	-2	-4	-1

$$U_2 | a = -9q + 4(1-q)$$

$$U_2 | b = -q - 7(1-q)$$

$$U_2 | c = -4q - (1-q)$$



Прямая a не участвует в формировании ничего. $p(-1) + (1-p)(-4) = -3 \Rightarrow p^* = \frac{1}{3}$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Неантагонистические игры. Введём понятие равновесия Нэша и равновесия по Парето.

$$\{N; S_1, \dots, S_N; U_{1, \dots, N}(S)\}$$

На экзамене могут попасться вопросы, могут ли, скажем, два игрока мылить друг другу шею. Хорошо; если один из игроков сильнее другого в 10 раз, то будет ли он выигрывать? Нет! Тут не сформулирована игра.

Рассмотрим некоторый исход $s = (s_1, \dots, s_i, \dots, s_N) \in S$. Равновесие Нэша по определению!:

$$s = NE: \forall i = 1, N, \forall y_i \in S_i \quad U_i(s_i, s_{-i}) \geq U_i(y_i, s_{-i})$$

Мы выделяем игрока и рассматриваем две его стратегии. При условии, что остальные игроки не изменяют своих стратегий, невыгодно отклоняться в одиночку. Каждый решает задачу такую:

$$\begin{cases} \max_{y_i \in S_i} U_i(s_1, \dots, s_{-i}, y_i, s_{i+1}, \dots, s_N) \rightarrow s_i \\ i = \overline{1, N} \end{cases}$$

Доминирование по Парето.

$$s \in S, y \in S$$

$$s \succ_p y \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in \overline{1, N}: U_i(s) \geq U_i(y) \\ \exists i \in \overline{1, N}: U_i(s) > U_i(y) \end{cases}$$

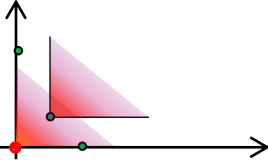
Для всех нас профиль s не хуже, чем y , а для некоторых он даже лучше!

Исход s называется оптимальным по Парето, если он не доминируем никаким другим исходом. Посмотрим на примерах.

	c	d
a	$p(1,1)$	$p(0,3)_N$
b	$p(2,0)_N$	$(0,0)_N$

ac — не Нэш! ad — Нэш!

По Парето удобно строить картину выигрышей.



Парето — это те точки, к северо-востоку от которых не существует никаких точек.

$$U_1(p, q) = 1 \cdot pq + 2(1 - p)q = 2q - pq \rightarrow \max_{p \in [0;1]}$$

$$p = 0, q > 0$$

$$q = 0 \rightarrow p = \forall$$

$$U_2(p, q) = 1 \cdot pq + 3p(1 - q) = 3p - 2pq \rightarrow \max_{p \in [q;1]}$$

$$q = 0, p > 0$$

$$p = 0 \rightarrow q = \forall$$

$$(p, q): \begin{cases} (0, q), q \in [0,1] \\ (p, 0), p \in [0,1] \end{cases}$$

Лекция 4

Что такое равновесие Нэша? Это профиль стратегий, при котором каждому из игроков невыгодно менять стратегию в одиночку. Мы рассмотрим ещё несколько игр.

	q	$(1 - q)$
p	(1,2)	(4,1)
$(1 - p)$	(3,0)	(1,3)

Запишем матожидание 1 игрока:

$$U_1(p, q) = pq + 4p(1 - q) + 3(1 - p)q + (1 - p)(1 - q) = (3 - 5q)p + 2q + 1 \rightarrow \max_{p \in [0,1]}$$

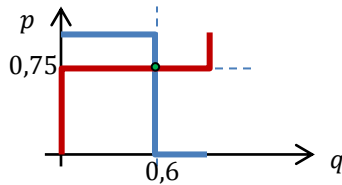
$$p \in [0,1]$$

Раз линейная функция, а функция возрастает, то выбираем самое большое p .

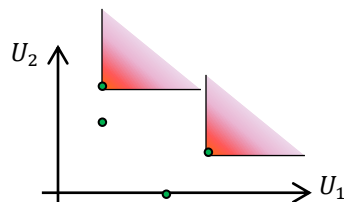
$$p = \begin{cases} 1, & 3 - 5q > 0 \\ 0, & q > 0,6 \\ \forall, & q = 0,6 \end{cases}$$

$$U_2(p, q) = 2pq + p(1 - q) + 3(1 - p)(1 - q) = (4p - 3)q + 3 - 2p \rightarrow \max_{q \in [0,1]}$$

$$q = \begin{cases} 1, & p > 0,75 \\ 0, & q < 0,75 \\ \forall, & p = 0,75 \end{cases}$$



$$p = \frac{3}{4}, q = 0,6 = NE$$



Нэша будем искать в смешанных, Парето — в чистых.

Игра «Семейный спор». Саша и Маша живут без телефонов, только с телепатической связью. И они, не договариваясь, идут либо на футбол, либо на балет. Биматричная игра:

	$\Phi (q)$	$\text{Б} (1 - q)$
$\Phi (p)$	(2; 1)	(0; 0)
$\text{Б} (1 - p)$	(0; 0)	(1; 2)

Найти равновесие Нэша и Парето-оптимальные точки.

(Ф; ф) и (Б; б) — Парето-оптимальные исходы.

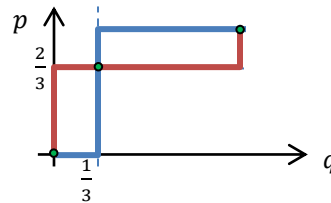
В чистых стратегиях (Ф; ф) и (Б; б) — Нэш.

$$U_C = 2pq + (1-p)(1-q) = (3q-1)p + 1-q \rightarrow \max_p$$

$$p = \begin{cases} 1, & q > 1/3 \\ 0, & q < 1/3 \\ \forall, & q = 1/3 \end{cases}$$

$$U_M = pq + 2(1-p)(1-q) = (3p-1)q + 2-2p$$

$$q = \begin{cases} 1, & p > 2/3 \\ 0, & p < 2/3 \\ \forall, & p = 2/3 \end{cases}$$



$$NE: \left\{ (\Phi, \phi); (Б, б); \left(\frac{2}{3}\Phi + \frac{1}{3}Б; \frac{1}{3}\phi + \frac{2}{3}б \right) \right\}$$

Саша и Маша получают 3 от общения и 1 от зрелища:

	Ф (q)	Б (1-q)
Φ (p)	(4; 3)	(1; 1)
Б (1-p)	(0; 0)	(3; 4)

Найти равновесие Нэша и Парето-оптимальные точки.

(Ф; ф) и (Б; б) — Парето-оптимальные исходы.

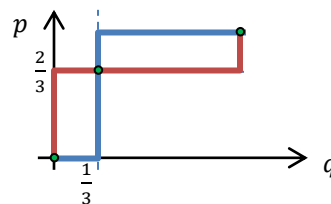
В чистых стратегиях (Ф,ф) и (Б,б) — Нэш.

$$U_C = 4pq + p(1-q) + 3(1-p)(1-q) = 2(3q-1)p + \varphi(q) \rightarrow \max_p$$

$$p = \begin{cases} 1, & q > 1/3 \\ 0, & q < 1/3 \\ \forall, & q = 1/3 \end{cases}$$

$$U_M = 3pq + p(1-q) + 4(1-p)(1-q) = 2(3p-2)q + \varphi(p) \rightarrow \max_q$$

$$q = \begin{cases} 1, & p > 2/3 \\ 0, & p < 2/3 \\ \forall, & p = 2/3 \end{cases}$$



$$NE: \left\{ (\Phi, \phi); (Б, б); \left(\frac{2}{3}\Phi + \frac{1}{3}Б; \frac{1}{3}\phi + \frac{2}{3}б \right) \right\} \text{ (ответ совпадает!).}$$

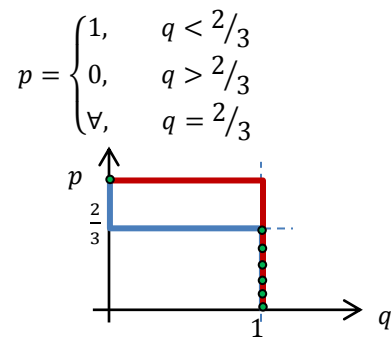
Такая задача обязательно входит в контрольную.

	q	(1-q)
p	(3; 1)	(1; 2)
(1-p)	(3; 2)	(0; 0)

$$U_1 = 3pq + p(1-q) + 3(1-p)q = -pq + p + \varphi(q) \rightarrow \max_q = p(1-q) + \varphi(q)$$

$$p = \begin{cases} 0, & q > 1 \\ \forall, & q = 1/3 \\ 1, & q < 1 \end{cases}$$

$$U_2 = pq + 2p(1-q) + 2(1-p)q = -3pq + 2q + \psi(p) \rightarrow \max_q = q(2-3p) + \psi(p)$$



Ответ: $NE = \{(a, d), (pa + (1-p)b; c), p \in [0; \frac{2}{3}]\}$

Нарисовать Парето-оптимумы: (b,c)

Теорема Нэша: есть хотя бы одно равновесие Нэша.

Следующей задачи нет в книжке и на семинарах. Она будет на контрольной.

	q	r	$(1-q-r)$
p	(2; 3)	(0; 1)	(4; 3)
$(1-p)$	(0; 0)	(2; 3)	(1; 1)

Дома доказать, что нет строго доминируемых стратегий.

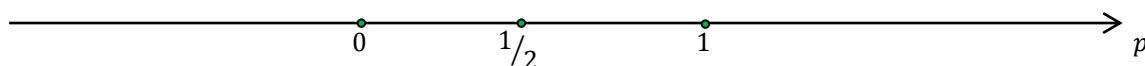
$$U_1 = 2pq + 4p(1-q-r) + 2(1-p)r + (1-p)(1-q-r) = \dots = p(3-q-5r) + r - q + 1 \rightarrow \max_{p \in [0,1]}$$

$$p = \begin{cases} 1, & q + 5r < 3 \\ 0, & q + 5r > 3 \\ \forall, & q + 5r = 3 \end{cases}$$

$$U_2 = 3pq + pr + 3p(1-q-r) + 3(1-p)r + (1-p)(1-q-r) = q(p-1) + 2r(1-2p) + 2p + 1 \rightarrow \max_{q,r}$$

$$q = \begin{cases} 1, & p > 1 \\ 0, & p < 1 \\ \forall, & p = 1 \end{cases}$$

$$r = \begin{cases} 1, & p < 0,5 \\ 0, & p > 0,5 \\ \forall, & p = 0,5 \end{cases}$$



I $p < \frac{1}{2}$: {2} $\Rightarrow q = 0$, {3} $\Rightarrow r = 1$; $q + 5r = 5 > 3$; {4} $\Rightarrow p = 0$

$(b; d) = NE$

II $p = \frac{1}{2}$: {2} $\Rightarrow q = 0$, {3} $\Rightarrow r = \forall$; $q + 5r = 3$; $r = \frac{3}{5}$; {4} $\Rightarrow p = 0$

$$\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, \frac{3}{5}d + \frac{2}{5}e\right) = NE$$

III $p \in (\frac{1}{2}; 1)$: {2} $\Rightarrow q = 0$, {3} $\Rightarrow r = 0$; $q + 5r = 0$; {4} $\Rightarrow p = 1 \notin (\frac{1}{2}; 1)$

IV $p = 1$: $r = 0$; $q + 5r \leq 3$; $q = \forall$

$$(a, qc + (1-q)e), q \in [0; 1]$$

Парето-точки ищутся точно так же.

Бесконечные игры.

Бесконечная игра — игра с бесконечным количеством стратегий хотя бы у одного из игроков. Пусть первый выбирает x , второй выбирает y .

$$\begin{aligned} A &\rightarrow x \in \mathbb{R} \quad B \rightarrow y \in \mathbb{R} \\ U_A &= -x^2 - xy, \quad U_B = xy - 4y - y^2 \\ -2x - y &= 0 = (U_A)'_x \\ (U_B)'_y &= x - 4 - 2y = 0 \\ x &= 0,8, \quad y = -1,6 = NE \end{aligned}$$

Лекция 5

Сегодня мы займёмся динамическими (последовательными) играми с полной совершенной информацией.

Рассмотрим игру. Сначала первый игрок выбирает $a_1 \in A_1$. Потом второй игрок, зная a_1 , выбирает a_2 . Выигрыши:

$$U_{1,2}(a_1, a_2).$$

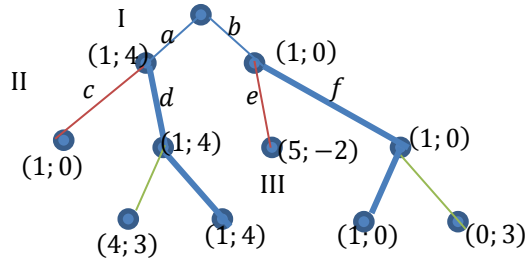
Игроки всё знают. Начнём методом обратной индукции. Вторая фирма знает a_1 и максимизирует по a_2 .

$$\max_{a_2 \in A_2} U_2(a_1, a_2) \Rightarrow a_2^* = R(a_1)$$

При различных значениях отклик будет разным — оптимальная стратегия второго игрока. И первый игрок всё знает.

$$\max_{a_1 \in A_1} U_1(a_1, R(a_1)) \Rightarrow a_1^*$$

Уже это мы можем подставить в верхнюю строчку. Но кому выгоднее быть? Первая фирма обладает преимуществом. Схема:



Метод обратной индукции приводит к тому, что у нас два метода обратной индукции.

К предыдущему параграфу. Статические игры в *модели Курно*. Есть две фирмы, которые выпускают один и тот же продукт. Необходимо решить, сколько выпускать товара. Оба знают обратную функцию спроса (линейная убывающая):

$$A: q_1, \quad B: q_2, \quad P = a - bq, \quad Q = q_1 + q_2$$

Издержки на 1 единицу — c . Каждая фирма может максимизировать по своему количеству.

$$U_A(q_1, q_2) = pq_1 - cq_1 = (a - b(q_1 + q_2))q_1 - cq_1 = q_1 \left(\frac{a - c - bq_2}{\text{const}} - bq_1 \right) \rightarrow \max_{q_1}$$

Получается парабола (квадратичная функция). Максимум: $q_1 = \frac{a - c - bq_2}{2b}$

Проделаем то же обратно. $q_2 = \frac{a - c - bq_1}{2b}$

Что же есть равновесие Курно? Одновременное решение задач максимизации!

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a - c}{3b}$$

Решить дома задачу для n фирм! Обобщите для фирм с разными издержками!

Следующая модель — *модель Штакельберга*.

В этой модели есть производитель-лидер и тот, кто только входит в отрасль. Лидер объявляет: моё количество гречки будет таким-то! Последователь, зная это, рассчитывает для себя количество гречки и выпускает.

$$P = a - Q, \quad q_1 + q_2 = Q$$

Издержки: $c_1; c_2 > c_1$ (так как старая фирма уже освоилась). Пойдём методом обратной индукции.

$$I: q_1; II: q_2$$

$$U_2 = (a - q_1 - q_2)q_2 - c_2q_2 \xrightarrow{FOC} \max_{q_2} q_2(a - c_2 - q_1 - q_2) \rightarrow q_2 = \frac{a - c_2 - q_1}{2} = q_2^* = R(q_1)$$

Но первая фирма же знает, как вторая выбирать будет.

$$U_1 = \left(a - q_1 - \frac{a - c_2 - q_1}{2} \right) q_1 - c_1q_1 \rightarrow \max_{q_1} \rightarrow q_1 \left(a - c_1 - q_1 - \frac{a - c_2 - q_1}{2} \right)$$

Проведём максимизацию:

$$q_1 = \frac{a}{2} - c_1 + \frac{c_2}{2} \Rightarrow q_2 \dots$$

Допустим, что издержки одинаковы:

$$\begin{aligned} c_1 = c_2 = c &\rightarrow q_1 = \frac{a - c}{2} \rightarrow q_2 = \frac{a - c}{4} \\ U_1 &= q_1 \left(a - \frac{3}{4}(a - c) \right) - cq_1 = \frac{q_1(a - c)}{4} = \frac{(a - c)^2}{8} \\ U_2 &= q_2 \left(a - \frac{3}{4}(a - c) \right) - cq_2 = \frac{q_2(a - c)}{4} = \frac{(a - c)^2}{16} \end{aligned}$$

Если будем решать задачу с замыкающим, то давайте так: лидер, последователь, два замыкающих.

$$c = c_1 = c_2 = c_3$$

$$I: q_1, \quad II: q_2, \quad III: q_3, q_4$$

А это уже *модель Курно*.

$$P(Q) = 100 - Q, \quad Q = \sum_{i=1}^4 q_i$$

$$U_3 = q_3 \cdot (100 - q_1 - q_2 - q_3 - q_4) - cq_3 = q_3(99 - q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \rightarrow \max_{q_3}$$

$$U_4 = q_4(99 - q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \rightarrow \max_{q_4}$$

$$q_3 = \frac{99 - q_1 - q_2 - q_4}{2}, \quad q_4 = \frac{99 - q_1 - q_2 - q_3}{2}$$

$$q_3 = q_4 = \frac{99 - q_1 - q_2}{3}$$

Это первый шаг. И первая, и вторая фирма знают это количество.

$$U_2 = q_2 \left(100 - q_1 - q_2 - \frac{2}{3}(99 - q_1 - q_2) \right) - q_2 c = \frac{1}{3} q_2 (99 - q_1 - q_2) \rightarrow \max_{q_2}$$

$$q_2 = \frac{99 - q_1}{2}$$

$$U_1 = q_1 \left(100 - q_1 - \frac{99 - q_1}{2} - \frac{2}{3} \left(99 - q_1 - \frac{99 - q_1}{2} \right) \right) - c q_1 \rightarrow \max_{q_1} \rightarrow \dots$$

После этого мы максимизируем квадратичную функцию, подставляем значения...

Решите дома задачу с 2 лидерами и 3 последователями, а потом с 1 и 4, где издержки в 2 раза различаются.

Модель «Ним».

На столе куча фишек, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Условия: на столе 100 фишек, можно брать фишки с модификациями.

N — количество фишек	I	II
1	+	+
2	+	+
3	—	—
4	+	+
5	+	+
6	—	—

Ключевой вопрос к решению: могу ли я поставить своего соперника в положение «минус»?

Новая игра подобного плана. I: 1, 3. II: 1, 2.

N	I	II
1	+	+
2	—	+
3	+	+
4	—	+
5	—	+
	—	+
	—	+

На дом: 1, 2, 3 — 1, 2, 4.

Задача о рациональных пиратах. На метод обратной индукции. Есть куча пиратов. Мы нашли кучу золота и решили её разделить. Все мы пираты, но ранжированные. Самый главный пират — Шагин. Кристина — его зам. После неё — Володя. Первое слово предоставляется главному пирату. Все пираты — либералы. Они ставят вопрос на голосование. Если большинство голосует за, то так и делим. В противном случае атамана съедают, и лидерство переходит к Кристине, и она свой вариант выставляет. Есть предпочтение каждого пирата: чем больше у меня золота, тем лучше. Второе предпочтение: если при двух вариантах голосования одинаково золота, то выбираю тот вариант, при котором больше в живых останется. Все пираты прошли курс теории игр и прошли метод обратной индукции. Считаем от конца. Остались Шагин и Кристина. Шагин — атаман. Кристина — заместитель. Какой бы вариант Шагин ни выбрал, то его съедят. Тогда нормален только один вариант: он отдаёт всё золото Кристине. Теперь нас трое: Шагин, Кристина и Володя. Тогда Шагин берёт всё себе. Если Шагин предложит что-то другое, то Володя против. Если Шагина съедают, то всё золото будет не ему. Володя всегда против. А Кристина всегда за, потому что иначе она не получит. Но Шагина и Кристины большинство. Так, если Шагин, Кристина, Володя и Никита. Когда дело дойдёт до двоих, то получит Никита. Шагин предлагает себе: Кристина против. При $n = 3$ забирает Кристина. Тогда надо согласиться с Шагиным. Золота-то мальчики не получают, но в живых останется больше. И при $n = 100$ золото всё равно у Шагина. Оказывается, такой вот интересный исход.

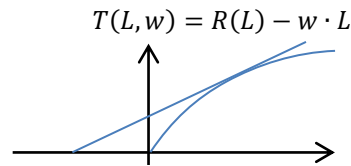
Однажды Шагин в Хорватии собрался с приятелями. Было около 25 человек, половина из США. Один принёс задачу. «Когда меня принимали на работу, то дали задачу о неверных жёнах».

История о неверных жёнах. В некотором царстве живут супружеские пары (100, 200 и т. д.). Появился глашатай, которому все жители доверяют. Глашатай объявляет: среди ваших жён есть неверные. Объявил и ушёл. Нравы крутые: неверных жён изгоняют. Все выпускники ВШЭ. Мужчины не могут обмениваться информацией. Любой мужчина знает всё о других жёнах, но ничего не знает о своей. Каждый вечер они собираются на центральной площади и смотрят, кого изгнали, а кто остался в

живых. Как только мужчина путём логических выводов приходит к мнению, что жена изменяет, то прогоняет. Чем закончится чистка?

Метод обратной индукции широко применяется в теории игр. Рассмотрим ещё одну задачу. Купля-продажа рабочей силы. Есть объединение, продающее рабочую силу, и есть фирма-покупатель.

$U(L, w)$ — функция полезности объединения. Чем больше L нанятых и чем больше w платят, то тем больше монотонно возрастает функция.



Объединение устанавливает плату за рабочую силу. При большой зарплате фирма мало рабочих берёт, при малой — много. Фирма максимизирует по L свою $\pi(L, w) = \max(R(L) - w \cdot L)$

$$R'(L) - w = 0$$

$$R'(L) = w \Rightarrow L^*$$

$$L^* = L^*(w)$$

$$U(L^*(w), w) \rightarrow \max_w$$

Лекция 6

Если среди 100 жён n неверных, то их всех сразу выгонят одновременно на n -й день.

Hsehelp.ru — аналог ксиона.

Один лидер, один последователь, один замыкающий.

Обратная функция спроса:

$$P = a - Q, \quad Q = q_1 + q_2 + q_3$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = c$$

$$I: q_1, \quad II: q_2(\text{зная } q_1), \quad III: q_3(\text{зная } q_1, q_2)$$

$$U_3 = q_3(a - q_1 - q_2 - q_3) - cq_3 = q_3(a - c - q_1 - q_2 - q_3) \Rightarrow \max_{q_3}$$

$$q_3 = \frac{a - c - q_2 - q_1}{2}$$

$$U_2 = q_2(a - c - q_1 - q_3 - q_2) = q_2\left(a - c - q_1 - \frac{a - c - q_2 - q_1}{2} - q_2\right) = q_2\left(\frac{a - c - q_1 - q_2}{2}\right) \Rightarrow \max_{q_2}$$

$$q_2 = \frac{a - c - q_1}{2}$$

$$q_3 = \frac{a - c - q_1}{4}$$

$$U_1 = q_1(-a - c - q_1 - \frac{3}{4}(a - c - q_1)) = \frac{1}{4}q_1(a - c - q_1)$$

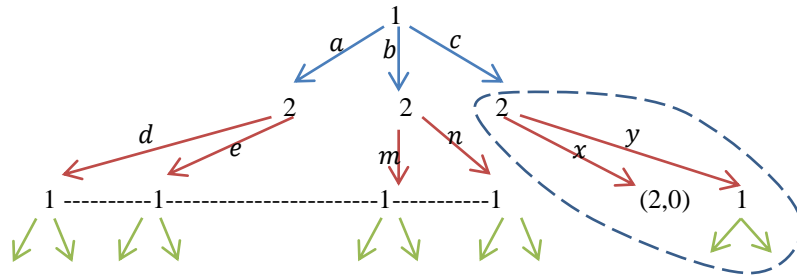
$$q_1 = \frac{a - c}{2}; \quad q_2 = \frac{a - c}{4}, \quad q_3 = \frac{a - c}{8}$$

Мы приступаем к новой теме:

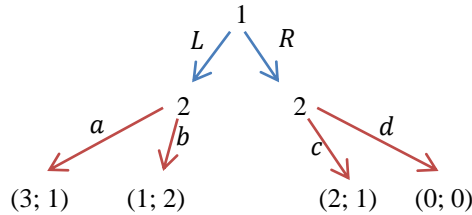
Динамические игры с полной несовершенной информацией. Речь идёт о функции выигрыша при всевозможных исходах. Совершенная информация — информация по предыстории. Каждый игрок знает, как развивались события до этого момента. Если хотя бы один из игроков не может сказать, что он находится в этой точке, то неполная информация. Если незнание функции, то мы рассматриваем функцию выигрыша с вероятностью. Один игрок знает издержки второго игрока с вероятностью, и такие задачи будут рассматриваться нами во втором модуле. Рассматривать будет динамическую форму. В этой игре набор игроков. Известна последовательность, с которой ходят игроки. На конечных узлах известны функции выигрыша. Третье — платёжные функции.

Первый игрок делает действие, второй анализирует игрока и делает ход. Каждый из игроков знает, как ходить — весь набор его инструкций есть стратегия.

Подыгра. Она начинается в одноточечном решающем узле



Все узлы, которые следуют за точкой начала подыгры, включаются в игру. Если n' следует за n (где n — начальный узел подыгры), то все узлы информационного множества должны содержаться в подыгре. Подыгра начинается в одноточечном узле. Все узлы пунктирного множества должны принадлежать дереву. Здесь подыгры две: они начинаются в узле 2 (x,y) и 1 (z,t). Подыгра — это ветка ёлки, которую мы отрезаем и вытаскиваем, не цепляясь. Рассмотрим:



Второй игрок будет выбирать или b , или c . Из них двух первый выберет c .

	ac	ad	bc	bd
L	(3; 1)	(3; 1)	(1; 2)	(1; 2)
R	(2; 1)	(0; 0)	(2; 1)	(0; 0)

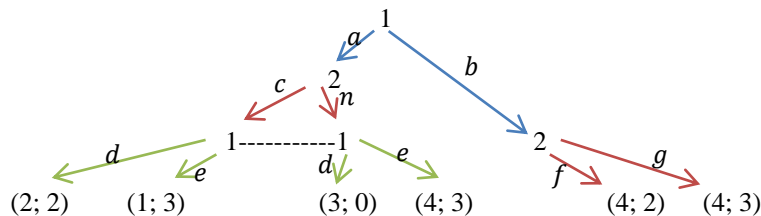
Нэш: $(L; bd); (R; bc)$

Второе полностью согласуется с методом обратной индукции. Но тут появилось ещё одно равновесие Нэша.

Появилось другое равновесие Нэша. Второе равновесие хорошее, а первое равновесие — бяка! От него надо избавиться! Тем не менее, каждому в одиночку ему невыгодно отклоняться. Как избавиться от такого равновесия? Мы переходим к равновесию Нэша, совершенное в подыграх. SPNE — равновесие, которое в проецировании на каждую игру будут равновесием Нэша. У нас две подыгры. В левой игре второй игрок выберет b . Буква b встречается в обоих равновесиях. А c встречается только во второй игре! Почему первое равновесие является плохим? Если первый поверит, что второй сыграет bd , то лучше уже L . Но если первый выберет R , то тогда d приведёт к нулям. Из всех равновесий надо отобрать те, которые совершенны в подыграх.

Что такое несостоятельно обещание? Кристина выбирает x или y . Если Кристина выбирает x , а Вадим выбирает z , то исход (10; 1). Если Вадим выберет t , то тогда исход (0; 1000). Если Кристина выбирает y , то исход (2; 2). Обещание Вадима несостоятельно, так как он может надуть Кристину, которая будет возлагать надежду на (10; 1), и получить (0; 1000).

Мы рассмотрели самую простенькую игру. А теперь рассмотрим более сложные. На контрольной работе на эту задачу худшие результаты.



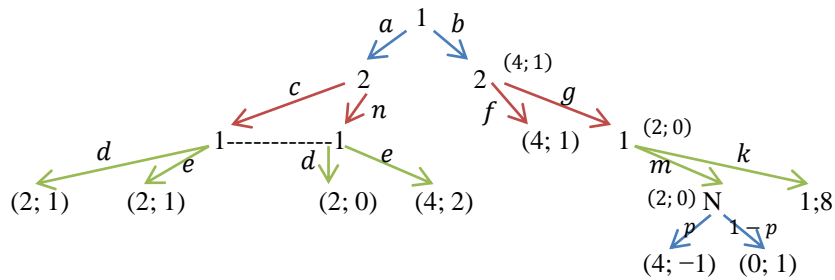
	cf	cg	nf	ng
ad	2; 2	2; 2	3; 0	3; 0
ae	1; 3	1; 3	4; 3	4; 3
bd	4; 2	4; 3	4; 2	4; 3
be	4; 2	4; 3	4; 2	4; 3

Если первый выбрал b , то ему потом без разницы. А второй игрок не знает, как пошёл первый. Что такое нормализация матрицы? Перевод в статическую игру. Во второй подыгре игрок выберет g . А все подыгры, где второй выбирает f , — бяки. Первый игрок выбирает строки, второй — столбцы. Получим

	c	n
d	2; 2	3; 0
e	1; 3	4; 3

А в проекции на подыгру $bd-cg$ тоже даёт равновесие. $be-cg$ — нет, так как $e-c$ не равновесие. Оно не является совершенным. $ae-ng$: $e-n$ — равновесие. Хорошее. $bd-ng$ — нет, так как $d-n$ не равновесие. И так далее. Мы возьмём только совершенные Нэш-равновесия. Subgame perfect Nash equilibrium.

Ещё игра.



$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

После выбора вторым m матожидание составит $(2; 0)$.

Нормализуем игру с учётом того, что от правой ветви осталась только b .

	c	n
ad	2; 1	2; 0
ae	2; 1	4; 2
bd	4; 1	4; 1
be	4; 1	4; 1

Выпишем отдельно подыгру:

	c	n
d	2; 1	2; 0
e	2; 1	4; 2

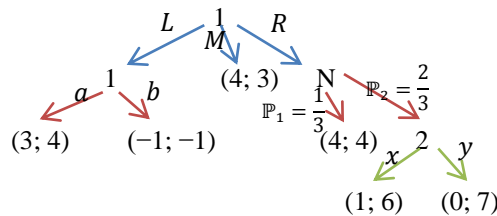
В ответе мы должны учесть события по линии b .

$$(ae; n) \rightarrow (aem; nf)$$

$$(bd; c) \rightarrow (bdn; cf)$$

$$(be; n) \rightarrow (bem; nf)$$

Рассмотрим ещё одну игру.



	x	y
La	3; 4	3; 4
Lb	-1; -1	4; 3
Ma	4; 3	-1; -1
Mb	4; 3	4; 3
Ra	2; $16/3$	$4/3$; 6
Rb	2; $16/3$	$4/3$; 6

Первый ходит два раза.

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16/3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$NE = (Ma; x), (Ma; y), (Mb; x), (Mb; y)$$

Лекция 7

Бесконечно повторяемые игры.

Рассмотрим биматричную игру.

	B	b
A	1; 1	5; 0
a	0; 5	4; 4

Нэш-равновесие (A, a) . Любому невыгодно отклоняться. Если бы игроки договорились, то они бы играли в более выгодное (a, b) . Но тогда один сможет обмануть и получить 5. Игра играется однократно. А что будет, если игра играется 2 раза?

Лена думает: после второй партии сначала у нас будет по рублю в первом гейме. Так что эту единицу можно приплюсовать.

	a	b
A	2; 2	6; 1
B	1; 6	5; 5

Здесь то же самое, выберется (A, a) . Это единственное равновесие Нэша. Стратегия: $((A, a); (A, a))$.

А что будет при бесконечном количестве игр? Сколько будет выигрыша в бесконечности? Так суммировать нельзя. Ряд расходится. Должен быть другой механизм расчёта.

Что такое дисконтирование? Шагин хочет купить козу. Алёна продаёт козу, говорит: сто долларов. Шагин предлагает через год, так как у него пока нет, но Алёна не хочет. Деньги, переведённые из будущего в сегодня, будут менее ценными. Если 100 долларов положить в банк, то набегит ещё 5 % на депозит. Она говорит: давай либо 105 через год под расписку, либо 100 сейчас. Для перевода надо переводить, умножая на коэффициент:

$$\delta\pi: \delta = \frac{1}{1+r}$$

r — процентная ставка, выраженная в долях единицы.

А если через два года сумма, то тогда δ^2 .

$$S_0 \rightarrow S_1 = S_0(1+r) \Rightarrow S_0 = \frac{S_1}{1+r} = S_1 \cdot \delta$$

$\{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n\}$ — поток платежей. 100 рублей через 2 года — это $100 \cdot \delta^2$, $\delta < 1$

Приведём к сегодняшнему моменту времени:

$$\pi = \pi_0 + \pi_1\delta + \pi_2\delta^2 + \dots + \pi_n\delta^n$$

NPV — суммарный поток — net product value — можно его сверху мажорировать.

Мы будем получать рубль, потом немного меньше, и есть геометрическая прогрессия: $\{b_n\}, b_{n+1} = qb_n$.

$$\sum_{i=1}^n b_i = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}; |q| < 1 \Rightarrow s = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_1}{1-q}$$

У нас вышла бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Давайте посчитаем поток: $\{3; 2; 4; 3; 2; 4; \dots\}, \delta = \frac{1}{3}$

$$\pi = ?$$

$$3 + 2\delta + 4\delta^2 + 3\delta^3 + 2\delta^4 + 4\delta^5 + \dots = (3 + 2\delta + 4\delta^2) + \delta^3(3 + 2\delta + 4\delta^2) + \delta^6(3 + 2\delta + 4\delta^2) + \dots = \frac{3 + 2\delta + 4\delta^2}{1 - \delta^3}$$

Введём понятие среднего платежа.

Рассмотрим задачу: в Петербург едем со скоростью 40 км/ч, а обратно — 60 км/ч.

$$V_{\text{ср}} = \frac{2S}{\frac{S}{40} + \frac{S}{60}} = 48$$

Средняя скорость эквивалентна нашему общему движению. Что такое среднее значение? Это постоянный приток, который получается при заданном δ .

$$\begin{aligned} \pi &= \pi_0 + \pi_1\delta + \pi_2\delta^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i\delta^i \\ \{\pi_{\text{ср}}; \pi_{\text{ср}}; \dots\} &= \pi_{\text{ср}} + \pi_{\text{ср}}\delta + \pi_{\text{ср}}\delta^2 + \dots = \frac{\pi_{\text{ср}}}{1-\delta} \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i\delta^i &= \frac{\pi_{\text{ср}}}{1-\delta} \Rightarrow \pi_{\text{ср}} = (1-\delta) \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i\delta^i \end{aligned}$$

Если такая дилемма заключённого, и в двойной игре могут быть разные стратегии: например, повторить ход соперника в первой партии и т. д. Сейчас мы сформируем пару стратегий, опирающихся на предыдущую игру, для игры с бесконечным количеством ходов. Рассчитаем выигрыш в какой-нибудь игре.

$$G(\infty; \delta) = (G; G; G; \dots) \delta$$

На стратегию A лучший ответ — a .

Каков будет суммарный платёж при такой последовательности?

$$\begin{cases} A, B, B, A, B, B, A, B, B \\ a, b, a, b, a, b, a, b, a, b \end{cases}$$

	0	1	2	3	4	5
U_1	1	4	0	5	0	4
U_2	1	4	5	0	5	4

$$\delta = \frac{1}{2}$$

$$\pi^I = 1 + 4\delta + 0\delta^2 + 5\delta^3 + 0\delta^4 + 4\delta^5 + \delta^6(1 + 4\delta + 0\delta^2 + 5\delta^3 + 0\delta^4 + 4\delta^5) + \dots = \frac{1 + 4\delta + 5\delta^3 + 4\delta^5}{1 - \delta^6}$$

$$\pi_1^{\text{ср}} = (1-\delta) \frac{1 + 4\delta + 5\delta^3 + 4\delta^5}{1 - \delta^6}$$

$$\pi^{II} = \frac{1 + 4\delta + 5\delta^2 + 5\delta^4 + 4\delta^5}{1 - \delta^6}$$

Стратегия жёсткого переключения.

Сформулируем стратегию (полный план действий) жёсткого переключения, которая ориентирована на 4 рубля каждый раз, поскольку это лучше, чем просто рубль. И у Шагина, и у Риты есть соблазн надуть друг друга. Каждому выгодно отклоняться, но получается неустойчивое состояние. Договорённость ничего не будет стоить, если возникнет недоверие. $(B, b) \succ_p (A, a)$, даже если (A, a) — Нэш!

$$\text{strategy 1} \begin{cases} t = 0 \rightarrow B \\ t > 0 \rightarrow B \Leftrightarrow \forall \tau < t \text{ было } (B, b) \\ \text{else } A \end{cases}$$

Как только я или соперник переключились на другую ситуацию, сразу сменим стратегию на а. Зачем нужна первая строка? В начальный момент времени нельзя узнать предысторию. Это является стратегией. Для второго игрока: в базовой игре будет b , а потом, как в первом случае.

$$\text{strategy 2} \begin{cases} t = 0 \rightarrow b \\ t > 0 \rightarrow b \Leftrightarrow \forall \tau < t \text{ было } (B, b) \\ \text{else } a \end{cases}$$

Эта стратегия говорит: я тоже не надуваю моего соперника! Никто друг друга не надувал.

Такая совокупность стратегий будет Нэш-равновесием во всех подыграх при некоторых играх. Хочется же в каждой игре получать побольше. Мы сформулировали стратегии.

t	0	1	2
U_1	4	4	...
U_2	4	4	...

$$\pi^I = 4 + 4\delta + 4\delta^2 \dots = \frac{4}{1-\delta}$$

Когда кто-то нарушает что-то, то будет так:

t	0	1	2
U_1	5	1	...
U_2	0	1	...

$$\pi^{II} = 5 + \delta + \delta^2 + \dots = 5 + \frac{\delta}{1-\delta}$$

Когда невыгодно отклоняться?

$$\begin{aligned} \frac{4}{1-\delta} &\geq 5 + \frac{\delta}{1-\delta} \\ 4 &\geq 5 - 5\delta + \delta \\ \delta &\geq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Тогда совокупность стратегий будет проводить а равновесие и называться равновесие Нэша.

Первый игрок и второй формулируют стратегию: в первой буду играть В (b), а каждой последующей — В (b), пока кто-то не нажухает. А что будет, если отклонение произойдёт на момент времени t_0 ?

t	0	1	2	...	$t_0 - 1$	t_0	t_{0+}
I	B	B	B	...	B	A	$A \dots$
II	b	b	b	...	b	b	$a \dots$
U_1	4	4	4	...	4	5	1...
U_2	4	4	4	...	4	0	1...

$$\begin{aligned} \pi^I &= 4 + 4\delta + 4\delta^2 + \dots + 4\delta^{t_0-1} + 5\delta^{t_0} + \delta^{t_0+1} + \dots = \frac{4(1-\delta^{t_0})}{1-\delta} + 5\delta^{t_0} + \frac{\delta^{t_0+1}}{1-\delta} = \frac{1}{1-\delta} (4 - 4\delta^{t_0} + 5\delta^{t_0} - 5\delta^{t_0+1} + \delta^{t_0+1}) \\ &= \frac{4}{1-\delta} + \frac{1}{1-\delta} (\delta^{t_0} - 4\delta^{t_0+1}) = \frac{4}{1-\delta} + \frac{\delta^{t_0}(1-4\delta)}{1-\delta} \end{aligned}$$

Невыгодно отклоняться на t_0 :

$$\begin{aligned} \frac{4}{1-\delta} &\geq \frac{4}{1-\delta} + \frac{\delta^{t_0}(1-4\delta)}{1-\delta} \\ \delta &\geq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

И выгоднее отклониться на первом шаге, потому что куш тогда будет менее дисконтироваться.

Чем больше δ , тем больше величина доверия. Если ставка в банке r из дроби $\frac{1}{1+r}$, то тогда тем выгоднее надуть.

В каждой контрошке есть задачка: сформулировать стратегию жёсткого переключения. Вызубрить до запятой!

Лекция 8

Мы выяснили, что существует такая совокупность стратегий, которая в каждой игре предписывает играть не точку Нэша. Если я отклонюсь однажды, то это повлечёт потери. Мы сравнивали выигрыши, и если он не превышает потери, то отклоняться невыгодно.

Рассмотрим такую матрицу:

	c	d
a	(2; 3)	(8; 1)
b	(1; 9)	(5; 6)

$$ac = NE; \quad bd \underset{p}{>} ac$$

Стратегия жёсткого переключения первого:

$$t = 0: b \\ t \geq 0: b \Leftrightarrow \forall \tau < t (b; d); \text{ otherwise, } a$$

Стратегия второго аналогична.

Мы уже доказали, что при некоторых δ это является равновесием Нэша.

$$U_1 = 5 + 5\delta + 5\delta^2 + \dots = \frac{5}{1-\delta}$$

Если он переключается, то когда выгоднее? В самый начальный момент.

$$\hat{U}_1 = 8 + 2\delta + 2\delta^2 + \dots = 8 + \frac{2\delta}{1-\delta}$$

$$\text{Невыгодно переключаться: } \frac{5}{1-\delta} > 8 + \frac{2\delta}{1-\delta}$$

$$5 - 2\delta \geq 8 - 8\delta, \quad \delta > 0,5$$

$$U_2 = \frac{6}{1-\delta}, \quad \hat{U}_2 = 9 + \frac{3\delta}{1-\delta}$$

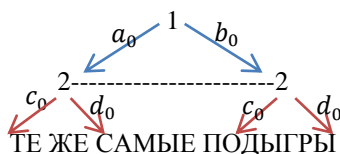
$$\text{Невыгодно второму: } \frac{6}{1-\delta} > 9 + \frac{3\delta}{1-\delta}, \quad \delta \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Ответ: } \delta \geq \frac{1}{2}$$

Сформулируем *принцип одношагового отклонения*. Исход $s = s_1, s_2, \dots, s_N$ является совершенным подыгровым равновесием (SPNE) тогда и только тогда, когда ни один игрок не выиграет при однократном отклонении после любой предистории и возврате к его стратегии после этого отклонения.

	c	d
a	(2; 3)	(8; 1)
b	(1; 9)	(5; 6)

Что есть эта игра бесконечное число раз?



Любая подыгра, выходящая из любого узла, будет равновесием Нэша. В проекции на каждую подыгровую невыгодно по-одиночке отклоняться.

Сформулируем *стратегию наивного переключения*.

$$I: t = 0: b \\ t \geq 0: b \Leftrightarrow \forall \tau < t (\forall; d); \text{ otherwise, } a \\ I: t = 0: d \\ t \geq 0: d \Leftrightarrow \forall \tau < t (\forall; d); \text{ otherwise, } c$$

Пример:

	c	d
a	(1; 1)	(5; 0)
b	(0; 5)	(4; 4)

Раньше мы ориентировались на то, какие ходы будут сыграны обоими, а тут — только на то, как второй игрок сыграет.

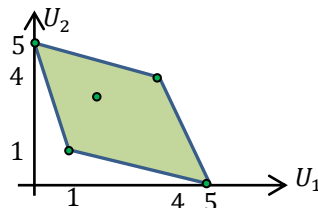
Совокупность стратегий:

t	0	1	2	...	$t_0 - 1$	t_0	t_{0+}
I	a	b	a	...	a	a	a
II	d	c	c	...	c	c	c
U_1	5	0	1	...	1	1	1...
U_2	0	5	1	...	1	1	1...

Является ли эта стратегия Нэшем с момента $t = 1$? В общей игре это Нэш, но в проекции на подыгровую — нет.

Достижимые платежи и теорема Фридмана.

	c	d
a	(1; 1)	(5; 0)
b	(0; 5)	(4; 4)



Назовём в игре $G = (N, S_1, \dots, S_N, U_1(S), \dots, U_N(S))$ платёж (x_1, \dots, x_N) достижимым, если он является выпуклой линейной комбинацией платежей, полученных при применении всеми игроками чистых стратегий.

Мы возьмём выпуклую ЛК $\alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1$.

Если у нас пять точек, то всегда можно натянуть так, чтобы пятая точка с прочими потрохами была внутри.

Когда оба игрока применяют смешанную стратегию, достижима любая внутренняя точка. Как получить точку (2; 3)?

$$U_1 = pq + 5p(1 - q) + 4(1 - p)(1 - q) = 2$$

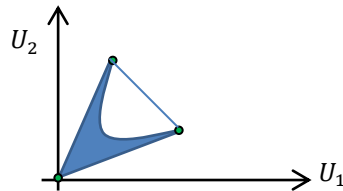
$$U_2 = pq + 5(1 - p)q + 4(1 - p)(1 - q) = 3$$

$$5(q - p) = 1$$

$$q = p + \frac{1}{5}$$

Мы можем найти эту точку, но так получается далеко не всегда.

	c	d
a	(2; 1)	(0; 0)
b	(0; 0)	(1; 2)



Так получается из-за того, что векторы разнонаправленные. Достижимое множество отделено узеньким треугольником.

Есть ещё совместные смешанные стратегии. Мы выбираем p и q не независимо. Если орёл, то Шагин играет a , Кристина — c . Если решка, то bd . Или определить по кубику. Любая точка из оставшейся области достижима в качестве среднего платежа в бесконечно повторяемой игре. Например:

I: abbabb \rightarrow 211211

II: bddbdd \rightarrow 122122

$G(\infty, \delta)$ При каком δ средний платёж равен полтора?

Игроки получат:

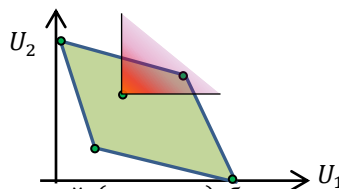
$$U_1 = \frac{2 + \delta + \delta^2}{1 - \delta^3}, \quad U_1^{\text{cp}} = U_1(1 - \delta) = \frac{2 + \delta + \delta^2}{1 + \delta + \delta^2} = \frac{3}{2}, \quad \delta_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$U_2 = \frac{1 + 2 + 2\delta^2}{1 - \delta^3}, \quad U_2^{\text{cp}} = U_2(1 - \delta) = \frac{1 + 2\delta + 2\delta^2}{1 + \delta + \delta^2} = \frac{3}{2}, \quad \delta_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Теорема Фридмана довольно простая. Все ей долгое время пользовались, но никто не брал на себя даже доказать её. «Народная теорема».

Пусть есть N игроков с полной информацией в статической игре, $e = (e_1, \dots, e_N)$ — платежи, соответствующие единственной точке Нэша. Есть другой платёж: (x_1, \dots, x_N) : $x_i > e_i$ строго по Парето (у нас это (4; 4)).

	c	d
a	(1; 1)	(5; 0)
b	(0; 5)	(4; 4)



Есть SPNE в бесконечно повторяемой, в которой (x_1, \dots, x_N) будет достигаться как средний платёж.

$a = (a_{e_1}, \dots, a_{e_N})$ — исход, соответствующий платежу (e_1, \dots, e_N) . Выигрышу (x_1, \dots, x_N) соответствуют стратегии $(a_{x_1}, \dots, a_{x_N})$. Тогда $\exists \delta \in [0; 1]$, при которых в каждой базовой игре будут получены платежи x , и эти стратегии будут составлять SPNE. В нашем ромбе любая точка может стать средним платежом, всегда есть дельта, что будет SPNE.

$$t = 0: a_{x_1}$$

$$t \geq 0: a_{x_i} \Leftrightarrow \forall \tau < t (a_{x_i}); \text{ otherwise, } a_{e_i}$$

При каких дельтах такая совокупность есть равновесие Нэша?

$$U_i = \frac{x_i}{1-\delta}$$

$$\max_t U_i(a_{x_1}, a_{x_2}, \dots, a_{x_{i-1}}, t, a_{x_{i+1}}, \dots, a_{x_N}) = d_i$$

$$\hat{U}_1 = d_i + e_i \delta + e_i \delta^2 + \dots = d_i + \frac{e_i \delta}{1-\delta}$$

$$\frac{x_i}{1-\delta} \geq d_i + \frac{e_i \delta}{1-\delta} \Rightarrow x_i \geq d_i - \delta d_i + \delta e_i \Rightarrow \delta \geq \frac{d_i - x_i}{d_i - e_i}$$

На прямой они слева направо идут так: e_i , x_i , d_i .

При $\delta \geq \max_i \left(\frac{d_i - x_i}{d_i - e_i} \right)$, отклонение в одиночку невыгодно.

Модель Курно дуополии.

$$Q = q_1 + q_2$$

$$p = a - Q$$

$$\pi_1 = q_1(a - c - q_1 - q_2)$$

$$\pi_2 = q_2(a - c - q_1 - q_2)$$

$$\max_{q_1} \pi_1, \quad \max_{q_2} \pi_2$$

$$q_1 = q_2 = \frac{a - c}{3} = q_c, \quad \pi_c = \frac{(a - c)^2}{9}$$

Модель для монополиста:

$$P = a - Q, \quad TC = c$$

$$\pi_M = (a - Q)Q - cQ = Q(a - c - Q)$$

$$Q_M = \frac{a - c}{2}, \quad \pi_M = \frac{(a - c)^2}{4}$$

Но игрокам выгодно производить $\frac{a-c}{4}$ каждому, тогда мы сможем произвести сговор. Это по Парето лучше.

Мы играем бесконечное число раз:

$$\left(\frac{a-c}{4}; \frac{a-c}{4} \right) \succ_P \left(\frac{a-c}{3}; \frac{a-c}{3} \right)$$

Это не Нэш, а лишь Парето:

$$\left(\frac{(a-c)^2}{8}; \frac{(a-c)^2}{8} \right)$$

Когда выгодно отклоняться? Рассмотрим: каждый игрок играет бесконечно.

$$\pi = \frac{(a-c)^2}{8(1-\delta)}$$

$$q_1 \left(a - c - q_1 - \frac{a-c}{4} \right) \rightarrow \max_{q_1} \pi_1$$

$$\tilde{q} = \frac{3}{8}(a-c)$$

Вот столько мы произведём, если мы хотим надуть Кристину.

$$\tilde{U}_1 = \frac{3}{8}(a-c) \left(\frac{3}{4}(a-c) - \frac{3}{8}(a-c) \right) = \frac{9}{64}(a-c)^2$$

Единожды надувши, формулируем стратегию жёсткого переключения.

При каком δ будет Нэш?

$$\frac{(a-c)^2}{8(1-\delta)} \geq \frac{9}{64}(a-c)^2 + \frac{\frac{1}{9}(a-c)^2 \delta}{1-\delta}$$

$$\delta \geq \frac{9}{17}$$

Лекция 9

На прошлой лекции Шагин сачканул, т. е. заболел.

Планируется провестись заочно-лекционный курс по моделированию аукционов. Лекции заочно, контроль очно. Создаётся блок, где каждую неделю публикуется видео и конспект лекции с упражнениями и решениями. Каждую неделю — очная письменная работа. 4 недели. Из чего будет состоять курс? Можно будет узнать, что аукцион — это необязательно дядя с молоточком. Сверхприбыль Гугла — прибыль аукциона. Как устроены аукционы? Почему не всегда победитель платит поставленное? Как влияют на прибыль организатора правила аукциона? Когда нарушается равновесная цена? Можно обращаться: boris.demeshev@gmail.com

Написали контрольные по-разному. Десять десятков. 80 человек за чертой бедности (3 и ниже). Пополам: первая и вторая. Но семинарист имеет право за успешные выступления поднять балл. Это плюсики. Бывает, что завышали на два балла. Если промежуточная — 7,3 — и посещение стабильное, то 7,2 — это 8. Надо не складываться в тряпочку, а проявлять активность. Для неудов будет дополнительная работа, и, как правило, переписываемая работа по сложности более сложная, чем изначальная, и задания необязательно совпадают. На SPNE на контрошке была одна козявка, но некоторые умудрились и тут сделать более сложное. Не было игр с природой, а на повторке дают природу.

Новая тема. Статические игры с неполной информацией — Байесовские игры. Неполная информация о функциях выигрыша. А предыстория — это касается совершенства. «Закрой рот, простудишься!» Маленькая задачка, которую мы обкрутим. Ссылка будет на неё. Итак, следующее: модель Курно с асимметричной информацией. Есть две фирмы.

$$P = a - Q, \quad Q = q_1 + q_2$$

Это одновременная игра. В чём асимметрия? Издержки:

$$I \rightarrow c_1; \quad II \begin{cases} c_H, & \mathbb{P} = \theta \\ c_L, & \mathbb{P} = 1 - \theta \end{cases}$$

А у первой фирмы только вероятностные представления о второй фирме. θ известно. Вторая фирма знает всё про свои издержки, знает θ . Первая фирма имеет представление о второй фирме. И второй игрок должен знать это представление. Когда мы говорим о равновесии Нэша, то надо знать, как вторая фирма будет реагировать. Вторая фирма знает не только издержки, но и то, что первая имеет представления о вероятностях и действиях второй фирмы. Сколько выпустят фирмы?

Начнём со второй. Представим, что $c = c_H$, $U_2 |_{c_H} = q_2^H (a - c_H - q_1 - q_2^H) \rightarrow \max_{q_2^H} \rightarrow q_2^H = \frac{a - c_H - q_1}{2}$

А если издержки c_L , то $U_2 |_{c_L} = q_2^L (a - c_L - q_1 - q_2^L) \rightarrow \max_{q_2^L} \rightarrow q_2^L = \frac{a - c_L - q_1}{2}$

$$U_1 = \theta q_1 (a - c_1 - q_1 - q_2^H) + (1 - \theta) q_1 (a - c_1 - q_1 - q_2^L) \rightarrow \max_{q_1}$$

Квадратный трёхчлен. Продифференцируем:

$$\begin{aligned} -2\theta q_1 + \theta(a - c_1 - q_2^H) - 2(1 - \theta)q_1 + (1 - \theta)(a - c_1 - q_2^L) &= 0 \\ -2q_1 + \theta(a - c_1 - q_2^H) + (1 - \theta)(a - c_1 - q_2^L) &= 0, \quad (3) \end{aligned}$$

Уравнения с тремя неизвестными: q_2^H, q_2^L, q_1 . Ответ:

$$\begin{aligned} q_2^H &= \frac{1}{3}(a - 2c_H + c_1) + \frac{1 - \theta}{6}(c_H - c_L) \\ q_2^L &= \frac{1}{3}(a - 2c_L + c_1) + \frac{\theta}{6}(c_H - c_L) \\ q_1 &= \frac{1}{3}(a - 2c + \theta c_H + (1 - \theta)c_L) \end{aligned}$$

Статические игры: функции выигрыша фиксированы. А в динамических они суть функции от других игроков. У нас в задаче игроки не знают количества друг друга и считают их за константы. Первый игрок максимизирует матожидание от прибыли. А второй игрок знает издержки и максимизирует что-то уже известное.

Накрутим на это общую теорию. У каждого из игроков есть свой тип.

$$\begin{aligned} t_1, t_2, \dots, t_N \\ \mathbb{P}(t_1, \dots, t_N) \end{aligned}$$

Множество типов: $t_i \in T_i$

Пусть $c_1 \rightarrow T_1 = \{c_1\}, c_{H,L} \rightarrow T_2 = \{c_H, c_L\}, t_2 \begin{cases} \theta \\ 1 - \theta \end{cases}$

Тип определяется для второго игрока, вероятности заданы. Кроме того, заданы действия игроков:

$$a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_N \in A_N$$

U_1, \dots, U_N известны. Что есть стратегии в данной игре? На этой лекции много понятий.

$$q_2 = q_2(c_{H,L}) = q_2(t_2)$$

Стратегия игрока — это функция: какое действие будет при таком типе, какое действие при другом. Это пока всё о втором игроке.

$a_i(t_i)$ — стратегия. Функций может быть бесконечно много.

Есть природа. Все игроки, а Шагин — природа. У нас t_{100} . i -му игроку говорится, какого он типу. Следующему тоже. Игроки знают о себе. А об остальных игроков лишь вероятностные представления. i -й игрок знает свой тип, а вторых только ожидает. Он берёт только матожидание.

$$U_i = \max_{a_i} \sum_{t_{-i}} \mathbb{P}(t_{-i} | t_i) \cdot U_i(a_1^*(t_1), \dots, a_{i-1}^*(t_{i-1}), a_i, a_{i+1}^*(t_{i+1}))$$

Когда каждый игрок максимизирует свой выигрыш и матожидание других, то этой Байесовское равновесие. Решение этой задачи — это $a_i^*(t_i)$, а по минус итым будут другие выигрыши. Совокупность таких функций $a_i^*(t_i)$ — Байесовское равновесие. Решим задачу на Байесовское равновесие.

Два игрока выбирают действительные числа.

$$I \rightarrow x, \quad II \rightarrow y, \quad A) \begin{cases} U_1 = -x^2 + xy \\ U_2 = -y^2 + xy + 4y \end{cases}, \quad B) \begin{cases} U_1 = -x^2 + 4xy \\ U_2 = -y^2 \end{cases}, \quad \mathbb{P}_A = 0,7, \mathbb{P}_B = 0,3$$

Первый игрок точно знает вид платёжных функций. Второй игрок не знает, A или B , но знает $\mathbb{P}_{A,B}$. Оба знают выигрыши. Первому природа нащептала, за тип A .

$$\begin{aligned} \text{I: } & \begin{cases} -2x_A + y = 0, & (1) \\ -3x_B + 4y = 0, & (2) \end{cases} \\ \text{II: } & 0,7(-y^2 + xy + 4y) + 0,3(-y^2) \rightarrow \max_y \\ & -2y + 0,7x_A + 2,8 = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Система 3 уравнений даст $x_A = \frac{38}{33}, x_B = \frac{112}{33}, y = \frac{56}{33}$

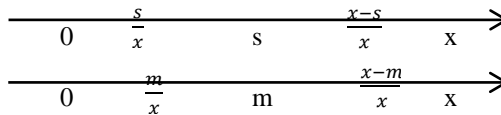
Следующая игра — Саша и Маша. Футбол и балет.

	ф	б
Ф	$2 + t_c; 1$	$0, 0$
Б	$0, 0$	$1; 2 + t_m$

$$t_c \sim U[0; x], \quad t_m \sim [0; x]$$

Саша знает своё t_c , Маше неизвестно. А балет идёт «Спартак», ей нравится, а у Саши вероятностное представление о t_m . Надо найти разделяющее равновесие.

$$(s, m): \begin{cases} t_c \geq s \Rightarrow C \rightarrow \Phi, \text{ otherwise } Б \\ t_m \geq m \Rightarrow C \rightarrow б, \text{ otherwise } ф \end{cases}$$



$$\text{Саша: } \begin{cases} \Phi \rightarrow (2 + t_c) \frac{m}{x} + 0 \cdot \frac{x-m}{x} \\ Б \rightarrow 0 \cdot \frac{m}{x} + 1 \cdot \frac{x-m}{x} \end{cases}, \quad \Phi \geq Б = ?$$

$$\begin{aligned} (2 + t_c) \frac{m}{x} &\geq \frac{x-m}{x}, & 2 + t_c &\geq \frac{x-m}{m} \\ t_c &\geq \frac{x-m}{m} - 2 \\ t_c &\geq \frac{x-3m}{m} = s \quad (1) \end{aligned}$$

Маша от футбола может получить либо 1 (если вместе), либо 0.

$$\text{Маша: } \begin{cases} \Phi \rightarrow 1 \cdot \frac{x-s}{x} + 0 \cdot \frac{s}{x} \\ Б \rightarrow 0 \cdot \frac{x-s}{x} + (2 + t_m) \cdot \frac{s}{x} \end{cases}, \quad б \geq ф = ?$$

$$\begin{aligned} (2 + t_m) \frac{s}{x} &\geq \frac{x-s}{x} \\ t_m &\geq \frac{x-s}{s} - 2 = \frac{x-3s}{s} = m \quad (2) \end{aligned}$$

Решим методом подстановки:

$$\begin{cases} sm = x - 3m \\ sm = x - 3s \\ m = s \\ s^2 = x - 3s \end{cases}$$

$$s = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2} = m$$

Разделяющие переменные должны располагаться на одних и тех же интервалах.

Лекция 10

Неполная информация о платёжных функциях. Сегодня мы продолжим и почти закончим. В книжке есть только один пример — и всё. Мы рассмотрим много. Это одна из самых сложных тем. Со следующей лекции до конца болеть запрещено. Решим 2 задачи на разделяющее равновесие. Матрица асимметрична.

$0; 0$	$3 + t_1; 2$
$1; 4 + t_2$	$0; 0$

Саша и Маша терпеть не могут друг друга.

$$t_1 \sim U[0; 4], \quad t_2 \sim U[0; 10]$$

Раньше давалось уточнение:

$$(s, m): s \in [0; 4], m \in [0; 10]$$

Если $t_1 > s$, то Саша идёт на футбол, а если нет, то балет. Если $t_2 > m$, то Маша идёт на футбол.

Надо самим уметь формулировать, что такое разделяющее равновесие. Чем больше t_1 , тем больше Саше хочется на футбол.

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{0 \quad \frac{s}{4} \quad s \quad \frac{4-s}{4}} t_1 \\
 \xrightarrow{0 \quad \frac{m}{10} \quad m \quad \frac{10-m}{10}} t_2
 \end{array}$$

Саша: $U^C|_{\Phi} = 0 \cdot \frac{10-m}{10} + (3+t_1) \frac{m}{10}$, $U^C|_{\bar{B}} = 1 \cdot \frac{10-m}{10} + 0 \cdot \frac{m}{10}$

$$(3+t_1) \frac{m}{10} \geq \frac{10-m}{10}$$

$$t_1 > \frac{10-4m}{m} = s$$

$$10-4m = sm$$

Маша: $U^M|_{\Phi} = 0 \cdot \frac{4-s}{4} + (4+t_2) \frac{s}{4}$, $U^M|_{\bar{6}} = 2 \cdot \frac{4-s}{4} + 0 \cdot \frac{s}{4}$

$$\Phi \geq \bar{6}: (4+t_2) \frac{s}{4} \geq 2 \cdot \frac{4-s}{4}$$

$$t_2 \geq \frac{8-6s}{s} = m$$

$$8-6s = sm$$

$$10-4m = 8-6s; \quad m = \frac{1-3s}{2}$$

$$8-6s = s \cdot \frac{1+3s}{2}$$

$$3s^2 + 13s - 16 = 0, \quad s = 1, \quad m = 2$$

Сформулировать и найти разделяющееся равновесие.

	Φ	$\bar{6}$
Φ	$5+2t_1; 6$	$-2; 1$
\bar{B}	$-1; 2$	$7-t_1; 5-t_2$

$$t_1 \sim U[-2; 1], \quad t_2 \sim U[-1; 3]$$

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{-2 \quad \frac{s+2}{3} \quad \bar{B} \quad s \quad \Phi \quad \frac{1-s}{3} \quad 1} t_1 \\
 \xrightarrow{-1 \quad \bar{6}_{m+1} \quad \frac{m}{4} \quad \Phi \quad \frac{3-m}{4} \quad 3} t_2
 \end{array}$$

Если t_1 велико, то футбол круче. Вероятность (Φ ; $\bar{6}$) возрастает.

$$U^C|_{\Phi} = (5+2s) \frac{3-m}{4} - 2 \frac{m+1}{4}$$

$$U^C|_{\bar{B}} = -\frac{3-m}{4} + (7-t) \frac{m+1}{4}$$

$$(5+2t_1)(3-m) - 2(m+1) \geq (m-3) + (7-t_1)(m+1)$$

$$t_1(6-2m+m+1) \geq 15m-9$$

$$t_1(7-m) \geq 15m-9, \quad t_1 \geq \frac{15m-9}{7-m} = s$$

Тут нас должно осенить, что мы получили s .

$$15m-9 = 7s-sm \quad (1)$$

$$U^M|_{\Phi} = 6 \frac{1-s}{3} + 2 \frac{s+2}{3}$$

$$U^M|_{\bar{6}} = 1 \frac{1-s}{3} + (5-t_2) \frac{s+2}{3}$$

$$\Phi \geq \bar{6}: 6(1-s) + 2(s+2) \geq (1-s) + (5-t_2)(s+2) \Leftrightarrow (t_2-5)(s+2) \geq 5s-5-2s-4$$

$$(t_2-5) \geq \frac{3s-9}{s+2}$$

$$t_2 \geq \frac{8s+1}{s+2} = m$$

$$8s+1 = 2m+sm \quad (2)$$

Игра А:

	$\Phi \quad q$	$\bar{6} \quad 1-q$
$\Phi \quad (p)$	$2; 1$	$0; 0$
$\bar{B} \quad (1-p)$	$0; 0$	$1; 2$

Игра Б:

	$\Phi \quad r$	$\bar{6} \quad 1-r$
$\Phi \quad (p)$	$2; 0$	$0; 3$
$\bar{B} \quad (1-p)$	$0; 1$	$1; 0$

Во второй ситуации Саша любит Машу, а Маша его ненавидит и получает удовольствие там, где его нет. Но Саша не знает, любит ли его Маша. Оба игрока знают вероятности.

$$\mathbb{P}_A = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}_B = \frac{1}{3}$$

Найти Байесовское равновесие в смешанных стратегиях.

Найти p, q, r , при которых Саша и Маша свои действия оптимизируют.

$$U^C = \frac{2}{3}[2 \cdot pq + 1 \cdot (1-p)(1-q)] + \frac{1}{3}[2 \cdot pr + 1 \cdot (1-p)(1-r)]$$

Саша выбирает только p . Поэтому получается

$$\frac{p}{3}(4q - 2 + 2q + 2r - 1 + r) + \varphi(q, r)$$

Последняя нас не колышет.

$$\frac{p}{3} = (6q + 3r - 3) + \varphi = p(2q + r - 1) + \varphi$$

Понятно, что Саша выберет $p = 1$ при положительной скобке и 0 при отрицательной. И, конечно же, любое, если скобка нулевая.

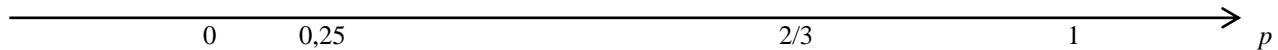
$$p = \begin{cases} 1, & 2q + r > 1 \\ 0, & 2q + r < 1 \\ \forall, & 2q + r = 1 \end{cases}$$

$$U^M|_A = pq + 2(1-p)(1-q) = q(p - 2 + 2p) + 2 - 2p = q(3p - 2) + \xi$$

$$q = \begin{cases} 1, & p > 2/3 \\ 0, & p < 2/3 \\ \forall, & p = 2/3 \end{cases}$$

$$U^M|_B = 3p(1-r) + (1-p)r = r(1-4p) + 3p$$

$$r = \begin{cases} 1, & p < 1/4 \\ 0, & p > 1/4 \\ \forall, & p = 1/4 \end{cases}$$



$$1) p \in [0; \frac{1}{4}) \Rightarrow q = 0, r = 1 \Rightarrow p \in [0; \frac{1}{4})$$

$$2) p \in (\frac{1}{4}; \frac{2}{3}) \Rightarrow q = 0, r = 0 \Rightarrow p = 0 \notin (\frac{1}{4}; \frac{2}{3})$$

$$3) p \in (\frac{2}{3}; 1] \Rightarrow q = 1, r = 0 \Rightarrow p = 1$$

$$4) p = \frac{1}{4} \Rightarrow q = 0, r = \forall, 2q + r = 1 \Rightarrow r = 1: (p; q; r) = (\frac{1}{4}; 0; 1)$$

$$5) p = \frac{2}{3} \Rightarrow q = \forall, r = 0, 2q + r = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{2}: (p; q; r) = (\frac{2}{3}; \frac{1}{2}; 0)$$

$$\text{Ответ: } p \in [0; 0,25], q = 0, r = 1, \quad p = 1, q = 1, r = 0, \quad p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{2}, r = 0.$$

$$\text{Распишем последний случай: } (\frac{2}{3}\Phi + \frac{1}{3}\text{Б}; \frac{1}{2}\Phi + \frac{1}{2}\text{Б}; \text{Б}).$$

Задача ещё.

$$\begin{aligned} & I \rightarrow x, \quad II \rightarrow y \\ A: & \begin{cases} U_1 = -2x^2 + 2xy + 2x - 5y^2 \\ U_2 = -2y^2 + 2xy + 2x + 3y \end{cases}, \quad \mathbb{P}_A = 0,6 \\ B: & \begin{cases} U_1 = -x^2 + 2xy + 8x + 7y^2 \\ U_2 = -2y^2 + 3xy + 4x + 2y \end{cases}, \quad \mathbb{P}_A = 0,4 \end{aligned}$$

Первый игрок знает, какая игра играется. А второй не знает. Оба знают вероятности.

$$I \rightarrow A: -2x_A + 2y + 2 = 0 \quad (1)$$

$$I \rightarrow B: -2x_B + 2y + 8 = 0 \quad (2)$$

В следующей строке надо вставить обязательно индексы, так как это разные величины!!!

$$\begin{aligned} II: & 0,6(-2y^2 + 2x_A y + 2x_A + 3y) + 0,4(-2y^2 + 3x_B y + 4x_B + y) \\ & -4y + 0,6(2x_A + 3) + 0,4(3x_B + 2) = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Три уравнения, три неизвестных. Сворачиваем и находим.

Домашнее задание:

	ф	б
Ф	$5 - 2t; 6$	$-2; 1$
Б	$-1; 2$	$7 + t_1; 5 - t_2$

Пусть издержки последователя известны только последователю в Штакельберге. Последователь знает свои издержки и лидера. А лидер знает свои и только вероятность высоких и низких.

Лекция 11

Кузьминов и Ясин гуляли по парку и в 1993 году решили сделать Высшую Школу Экономики. Это нужно было для запада и для нас: рынок сбыта и сырьевая база. Был конкурс среди желающих быть преподавателями. Было 3 экзамена: математика, экономика, английский. Как созывали на первый выпуск? Собирали магистров. Среди тех, кого набрали: если были дети с высшим образованием и у самого высшее, то этих еле набрали. Наш факультет первый! Набрали 80 бакалавриата. Кто закончил школу? Еле-еле набрали. Тянули их за уши. Если вылетят, никого не останется. И только в 1996 году появился конкурс. Прошли конкурс преподавателей? Давайте в Эрasmus или Сорбонну.

Мы остановились на статических играх с неполной информацией. Как играют динамические игры с неполной информации? Мы рассматривали Штакельберга. Лидер, последователь, неполная информация.

Модель Штакельберга с неполной информацией. В книжке этого нет.

$$P = 100 - Q$$

$$Q = q_1 + q_2$$

1) Лидер объявляет q_1

2) Последователь, зная q_1 , выбирает q_2 .

$$c_{Leader} = 2, \quad c_{Follower} = \begin{cases} 6 (c_H), & \mathbb{P}_1 = 0,4 \\ 4 (c_L), & \mathbb{P}_2 = 0,6 \end{cases}$$

$$U_{Follower} |_{c_H} = q_2(100 - q_1 - q_2) - 6q_2 = q_2(94 - q_1 - q_2) \rightarrow \max_{q_2} \Rightarrow q_2^H = \frac{94 - q_1}{2} \quad (1)$$

$$U_{Follower} |_{c_L} = q_2 \left(96 - q_1 - q_2 \rightarrow \max_{q_2} \Rightarrow q_2^L = \frac{96 - q_1}{2} \right)$$

$$U_{Leader} = 0,4q_1(98 - q_1 - q_2^H(q_1)) + 0,6q_1(98 - q_1 - q_2^L(q_1))$$

Будем ориентироваться на матожидание.

$$q_1(98 - q_1) - 0,4q_1 \cdot q_2^H(q_1) - 0,6q_1 \cdot q_2^L(q_1) \rightarrow \max_{q_1}$$

$$98 - 2q_1 - 0,4 \cdot 1 \cdot q_2^H(q_1) - 0,4q_1 \left(-\frac{1}{2} \right) - 0,6q_1^L(q_1) - 0,6q_1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = 0$$

$$q_1 = \dots, \quad q_2^H = \dots, q_2^L = \dots$$

Этот пример с огромной вероятностью попадёт в контрольную работу.

Игра:

$$A \rightarrow x \in \mathbb{R}; \quad B \rightarrow y, \text{ зная } x$$

$$M = \begin{cases} U_1 = -2x^2 + 4xy - 6x + 3y + 5 \\ U_2 = x^2 - y^2 + 2xy - 2y + 1 \end{cases}$$

$$N = \begin{cases} U_1 = -2x^2 - 4xy + 4x - 5y + 1 \\ U_2 = 2x^2 - y^2 - 2xy + 4y - 2 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(N) = 0,5$$

Игрок знает, какая игра играет.

Решите эту игру дома! Начинаем игру, второй максимизирует при какой-то вероятности, получим $y(x)$. А у первого — сумма с разными индексами.

Одна из задач на контрошке будет такой.

Аукцион. Принимают участие двое, выставляется на продажу произведение искусства или товар. Выставляем «Квадрат» Малевича. Лена и Сергей — участники аукциона. Чем больше картина нравится, тем больше готов за неё заплатить. Лена пишет в конверте сумму. Сергей тоже пишет. Дают Шагину. Те смотрят, кто больше написал, и тому и продаёт. Чем больше сумма, тем больше шанс получить. Но чем меньше сумма, тем больше выигрыш.

Величина оценки: V_i i -м игроком, $i = 1, 2$

b_i — готов заплатить в конверте, $i = 1, 2$

$$U_i = \begin{cases} V_i - b_i, & b_i > b_j \\ 0, & b_i < b_j \\ \frac{V_i - b_i}{2}, & b_i = b_j \end{cases}$$

Что есть стратегии? Если картина малоценная, то поставим столько. Сколько готов заплатить при различных значениях V .

Стратегии: $b_1(V_1); b_2(V_2)$. Заданы стратегии, типы игроков, функция выигрыша. Игра в нормальной форме. Решим для двух случаев. Есть ли равновесие Нэша в классе линейных функций?

$$b_1 = a + c_1 v_1, \quad b_2 = a_2 + c_2 v_2$$

$$v_i = 0 \Rightarrow b_i = 0 \Rightarrow a_i = 0$$

$$b_1 = c_1 v_1, \quad b_2 = c_2 v_2$$

$$b_1 \in [0; c_1]$$

$$U_1 = (V_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 > b_2) + 0 + \frac{V_1 - b_1}{2}\mathbb{P}(b_1 = b_2) = (V_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 > c_2 V_2) + 0 + \frac{V_1 - b_1}{2}\mathbb{P}(b_1 = c_2 V_2) =$$

$$(V_1 - b_1)\mathbb{P}\left(V_2 < \frac{b_1}{c_2}\right) + 0 + \frac{V_1 - b_1}{2}\underbrace{\mathbb{P}\left(V_2 = \frac{b_1}{c_2}\right)}_0 = (V_1 - b_1)\frac{b_1}{b_2} \rightarrow \max_{b_1} \Rightarrow b_1 = \frac{V_1}{2}$$

Рассмотрим нелинейные функции.

$$b_1 = f(V_1), \quad b_2 = f(V_2)$$

f — возрастающая функция.

$$U_1 = (V_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 > f(V_2)) = (V_1 - b_1)\mathbb{P}\left(V_2 < f^{(-1)}(b_1)\right) = (V_1 - b_1) \cdot f^{(-1)}(b) \rightarrow \max_{b_1}$$

$$(-1) \cdot f^{(-1)}(b_1) + (V_1 - b_1) \cdot \frac{1}{f'(V_1)} = -V_1 + (V_1 - b_1) \cdot \frac{1}{f'(V_1)} = 0$$

$$V_1 f'(V_1) + b_1 = V_1$$

$$V_1 f'(V_1) + f(V_1) = V_1$$

$$(V_1 \cdot f(V_1))' = V_1$$

$$V_1 \cdot f(V_1) = \frac{V_1^2}{2} + C$$

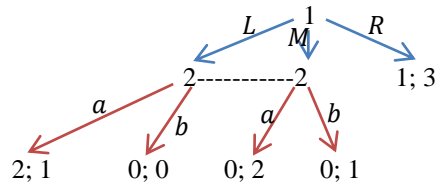
$$f(V_1) = \frac{V_1}{2} + \frac{c}{V_1}$$

$$\lim_{V_1 \rightarrow 0} f(V_1) = 0 \Rightarrow c = 0$$

Тогда $f(V_1) = \frac{V_1}{2}$.

Динамические игры с неполной несовершенной информацией.

Контрольная 28-го декабря.



	a	b
L	2; 1	0; 1
M	0; 2	0; 1
R	1; 3	1; 3

Наверняка дадут в контрольной дадут тему нахождения SPNE!

$$\{(L; a); (R; b)\} = NE$$

Но $(R; b)$ — бяка. Везде оно хуже. Но как избавиться от бяки? Приступим к этой теме.

Введём понятие веры. Это не вероятность. В узлах: $2(\mu)$ ---- $2(1-\mu)$

При помощи веры осредним действия.

$$U_2|_a = \mu \cdot 1 + (1 - \mu) \cdot 2 = 2 - \mu$$

$$U_2|_b = 1 - \mu$$

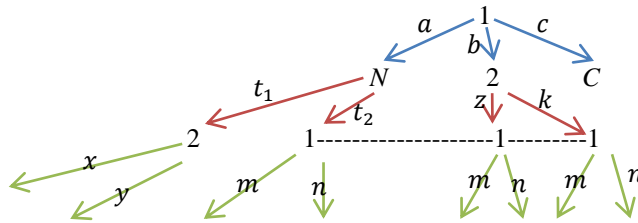
$$\forall \mu \in [0; 1]: U_2|_a > U_2|_b$$

Вводим слабое секвенциальное равновесие. Введём 4 требования.

1. В каждом информационном множестве действующий игрок должен иметь веры (beliefs) в том, какой из узлов этого информационного множества достигнут в данной игре. Для многоточечного множества это неотрицательные числа, в сумме дающие единицу.

2. При заданных верах стратегии игроков должно быть последовательно рациональными. Действия, осуществляемые игроком, оптимальны при условии задания вер и оптимальны в действиях других игроков.

3. См. следующую лекцию.



Рассмотрим 2 стратегии.

cm, xz

Чем всё закончится? В узле C! Мы тогда можем сказать, что информационное множество не принадлежит траектории. Он с нулевой вероятностью окажется в том информационном множестве. Рассмотрим am, xz . Вероятность есть. Тогда множество находится на траектории равновесия. С положительной вероятностью мы можем там оказаться.

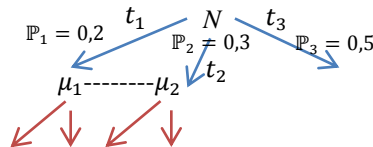
Лекция 12

3. В прошлый раз мы разобрали 2 требования. В информационных множествах на траекториях равновесия веры формируются по формулам Байеса.

4. В информационных множествах вне траектории равновесия веры также формируются по формулам Байеса, если это возможно.

Слабое секвенциальное равновесие Нэша — совокупность стратегий и вер, удовлетворяющих условиям 1—4: WSNE, WSPNE.

Мы вряд ли помним формулы Байеса. Представим себе картинку:



Сумма вер равна 1. $\mu_1 = \frac{0,2}{0,2+0,3}$ — вера при условии, что мы попадаем в это информационное множество.

Рассмотрим первый случай. Рынок сигналов (рынок лимонов, или рынок подержанных автомобилей).

Шагин приходит в магазин, и его задача — купить подержанный автомобиль. Но есть хорошие и плохие авто, и подбегает менеджер: чем я могу вам помочь? Тот задаёт ряд вопросов, чтобы влезть в его шкуры и подавать сигналы. Он будет мыслить своими мозгами и посылать сигналы, чтобы Шагин купил то, что он предлагает. Задача Шагина — купить подешевле, а его — продать подороже. Сигналы обманные (иномарка, блестящая, «Запорожец») не принимаются. Поэтому он даёт такие сигналы, чтобы втереться в доверие, тогда он сможет влиять на веры о типах автомобилей. Шагин сложил представления, а если прислушивается к менеджеру, то тот меняет веры. Последовательность такова:

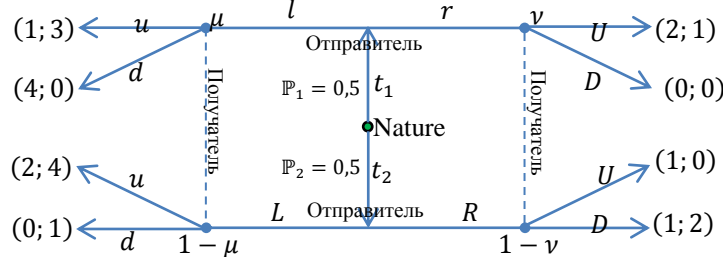
- 1) Известна природа, она формирует типы (автомобиля): $t_i \in T$.
- 2) Менеджер (Sender — отправитель сообщения) выбирает сообщение $m_j \in M$.
- 3) Шагин (Receiver — получатель) предпринимает действие $a_k \in A$.

Выигрыши будут $U_R(t_i, m_j, a_k)$, $U_S(t_i, m_j, a_k)$

$\mu(t_i|m_j)$ — это покупательское представление о типах. Отсюда $\max_{a_k} (\mu \cdot U_R) \rightarrow a^*(m_j)$.

Эту задачи оптимизации выигрыша получателя может решить не только получатель, но и продавец. Он знает, какая будет реакция на продавца. Оба игрока могут решать эту задачу. Тогда $\max_{m_j} U_S(t_i, m_j, a^*(m_j)) \rightarrow m^*(t_i)$. Итак, отправитель знает, какое сообщение посылать на каждый автомобиль.

Отправитель пишется с буквой «п». Получатель не знает, в какой из двух точек находится. Игра заканчивается выигрышами:



t_1	t_2	uU	uD	dU	dD
l	L				
l	R				
r	L				
r	R				

Как, не заполняя матрицы, заполнять и решать? В одноточечном множестве вера 1. Найдём слабое секвенциальное Нэш-равновесие. Пусть существуют равновесия. Тогда какой лучший ответ первого? Маленькая буква — при типе t_1 , большая — при t_2 .

1)

$$\begin{aligned} t_1: uU &\rightarrow r \\ t_2: uU &\rightarrow L \end{aligned}$$

Теперь найдём ответ на rL : веры должны быть рациональны. $1 - \mu = \frac{0,5}{0,5} = 1 \rightarrow \mu = 0$.

$v = 1$, потому что только тип t_1 приходит. В числителе: вероятность того, что приводит. В знаменателе: сумма того, что сюда приводит. $\mu = 0 \rightarrow u > d$, $v = 1 \rightarrow U > D$.

Слабое секвенциальное равновесие:

$$\{(rL, uU), \mu = 0, v = 1\}$$

2)

$$\begin{aligned} t_1: uD &\rightarrow l \\ t_2: uD &\rightarrow L \end{aligned}$$

Итак смотрит на отправителя, он идёт налево. $\mu = \frac{0,5}{0,5+0,5}$, потому что и то, и то приведёт сюда.

$$\begin{aligned} \pi_2(u) &= 0,5 \cdot 3 + 0,5 \cdot 4 = 3,5 \\ \pi_2(d) &= 0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 1 = 0,1 \end{aligned}$$

Отсюда $u > d$.

Но на правом множестве мы находимся вне информационного множества. В каких случаях

$$\begin{aligned} \pi_2(D) &\geq \pi_2(U), \quad v = ? \\ v \cdot 0 + (1 - v) \cdot 2 &\geq v \cdot 1 + (1 - v) \cdot 0 \\ v &\leq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\{(lL, uD), \mu = 0,5, v \in [0; \frac{2}{3}]\}$$

3)

$$\begin{aligned} dU &\rightarrow lR \\ \mu &= 1, \quad v = 0 \end{aligned}$$

Второму получателю лучше $u > d$, что противоречит тому, что dU .

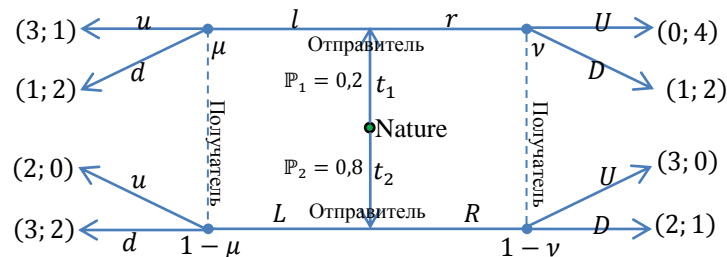
4)

$$\begin{aligned} dD &\rightarrow lR \\ \mu &= 1, \quad v = 0 \end{aligned}$$

$u > d$, что противоречит dD .

Такого плана задача есть в книге. Решим ещё пару задач, и традиционно такую задачу дают на контрольной уже 10 лет. Будет ещё 3 лекции на схемы, которых нет в книжке.

Решим эту же задачу с другими вероятностями и выигрышами.



Условие то же самое: найти слабые секвенциальные равновесия.

1)

$$\begin{aligned} uU &\rightarrow lR \\ \mu &= 1, v = 0 \end{aligned}$$

$\mu = 1$: $u > d$, что противоречит u .

2)

$$uD \rightarrow \begin{cases} lL \\ lR \end{cases}$$

А во втором случае ему всё равно, надо всё рассматривать.

$$\begin{aligned} lL, \mu &= 0,2 \\ \pi_2(u) &= 0,2 \cdot 1 + 0,8 \cdot 0 = 0,2 \\ \pi_2(d) &= 0,2 \cdot 2 + 0,8 \cdot 2 = 2 \\ d &> u \end{aligned}$$

Противоречие.
2б)

$$lR, \mu = 1, v = 0 \\ d > u$$

Тоже противоречие.
3)

$$\begin{aligned} & dU \\ & t_1 \rightarrow l, t_2 \rightarrow \text{один чёрт} \\ & \begin{cases} lL: \mu = 0,2, d > u \\ lR: \text{вне траектории} \end{cases} \\ & \pi_2(U) \geq \pi_2(D) \\ & v \cdot 4 + (1-v) \cdot 0 \geq v \cdot 2 + (1-v) \cdot 1 \\ & v \geq \frac{1}{3} \\ & \left\{ (lL, dU), \mu = 0,2, v \in \left[\frac{1}{3}; 1 \right] \right\} \\ & lR, \mu = 1, v = 0, d > u, D > U \end{aligned}$$

Противоречие.

4)

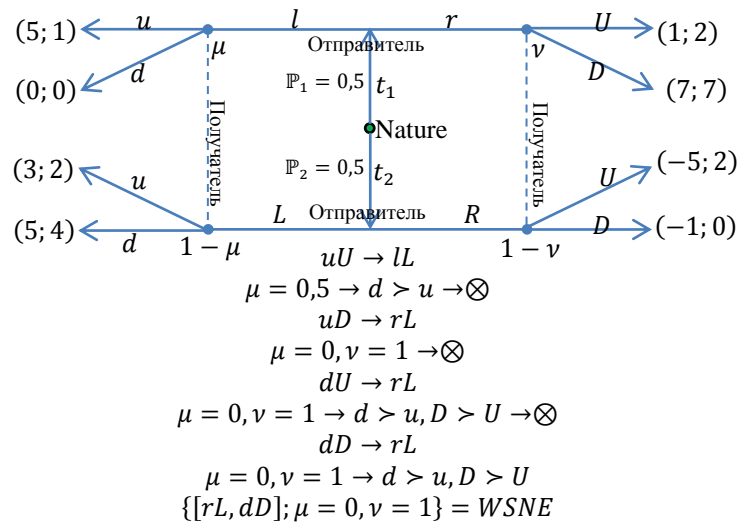
$$dD \rightarrow l, r; L \\ lL: \mu = 0,2, \quad \pi_2(u) = 0,2, \quad \pi_2(d) = 2, \quad d > u$$

И это вполне согласуется с dD .

$$\begin{aligned} & \pi_2(D) \geq \pi(U), \quad v < \frac{1}{3} \\ & \left\{ (lL, dD), \mu = 0,2, v \in \left[0; \frac{1}{3} \right] \right\} \\ & rL, \mu = 0, v = 1, d > u, U > D \end{aligned}$$

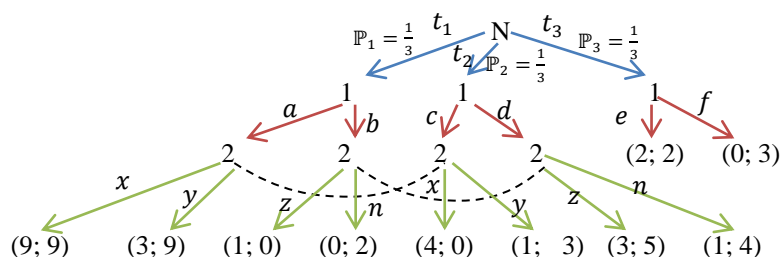
Это не согласуется с исходными данными.

Рассмотрим третий пример. Мы его дадим. Вера близка к единице, что мы напишем контрошку, если мы будет ещё на трёх лекциях.



Лекция 13

Рассматриваем следующую схему: природа выбирает один из трёх путей равновероятно. Второй игрок не знает: он в a или c ; он в b или d ?



В однотоочечном множестве игрок 1 сыграет e . У игрока 2 всего $2^3 = 8$ стратегий.

xz, xn, yz, yn — стратегии второго игрока.

Найдём слабые секвенциальные SPNE.

1)

$$xz \rightarrow a, t_1, \quad c, t_2, \quad e, t_3$$

Смотрим наоборот. ace . В первой слева точке 2 игрока μ , в третьей с ним (соединённой) $1 - \mu$. $\mu = \frac{1}{2}$. Оценим

$$U_2(x) = \frac{1}{2} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 4,5, \quad U_2(y) = \frac{1}{2} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 6$$

$$y > x$$

А это противоречит предположению. В этой колонке равновесия нет.

2)

$$xn \rightarrow ace$$

При ace мы имеем $y > x$, и в этой колонке \emptyset .

3)

$$yz \rightarrow ade$$

В первое информационное множество попадает t_1 , а два других не приводят. Следовательно, $\mu = 1$. Вторая и четвёртая точки — v и $1 - v$.

$$\mu = 1 \rightarrow x \sim y$$

$$1 - v = 1 \rightarrow v = 0$$

$$z > n$$

Это не противоречит, следовательно, $\{(ade; yz), \mu = 1, v = 0\}$ — удовлетворяющая всем четырём пунктам стратегия.

4)

$$yn \rightarrow ace, ade$$

$$4.1 \quad ace \rightarrow \mu = \frac{1}{2}, \quad U_2(x) < U_2(y), y > x.$$

При каком раскладе $U_2(n) \geq U_2(z)$, $v = ?$

$$U_2(n) = 2v + 4(1 - v) \geq 0v + 5(1 - v)$$

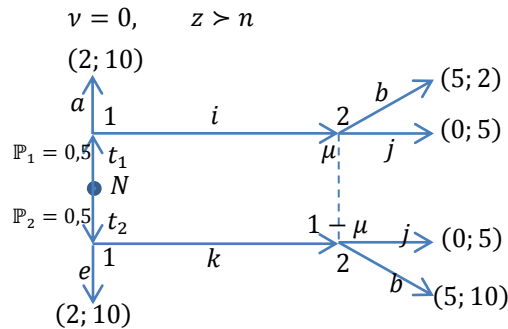
$$2v \geq 1 - v, \quad v \geq \frac{1}{3}$$

В этой ситуации $n \geq z$. $\{(ace; yn), \mu = \frac{1}{2}, v \in [\frac{1}{3}; 1]\}$ — слабое секвенциальное Нэш-равновесие.

Во всех многоточечных множествах должны быть определены веры. Можно определить по формулам Байеса, а там, где нельзя, надо считать.

$$4.2 \quad ade \rightarrow \mu = 1, x \sim y$$

Противоречие исходному условию. \emptyset .



У второго игрока только 2 стратегии. b, j .

$$1) \quad b \rightarrow i_{t_1} k_{t_2}$$

В точках, где b и j , $\mu = 1 - \mu = 0,5$

$$U_2(b) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 10 = 6, \quad U_2(j) = \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 5 \Rightarrow b > j$$

Слабое секвенциальное Нэш-равновесие: $\{(ik; b), \mu = \frac{1}{2}\}$.

$$2) \quad j \rightarrow ae$$

«Эль у меня ва-аще нет!»

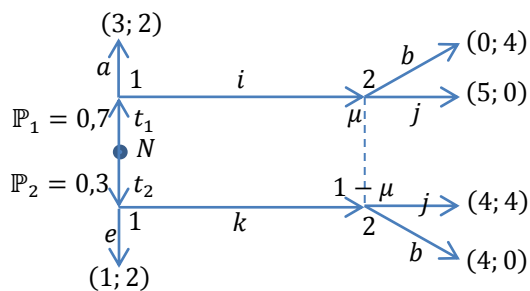
Информационное множество лежит вне траектории равновесия. Мы должны оценить, при каких значениях выигрыш больше:

$$U_2(j) \rightarrow U_2(b), \quad \mu = ?$$

$$\mu \cdot 5 + (1 - \mu) \cdot 5 \geq \mu \cdot 2 + (1 - \mu) \cdot 10 \Rightarrow 3\mu > 5(1 - \mu), \quad \mu \geq \frac{5}{8} \rightarrow j \geq b$$

$$\{(ae; j), \mu \in [\frac{5}{8}; 1]\}$$

Решим такую же игру при новых числах.



1) $b \rightarrow ak, \mu = 0$

$$j > b \quad (4 > 0)$$

Возникает противоречие.

2) $j \rightarrow ik, \mu = 0,7$

$$U_2(b) = 0,7 \cdot 4 + 0,3 \cdot 0 = 2,8$$

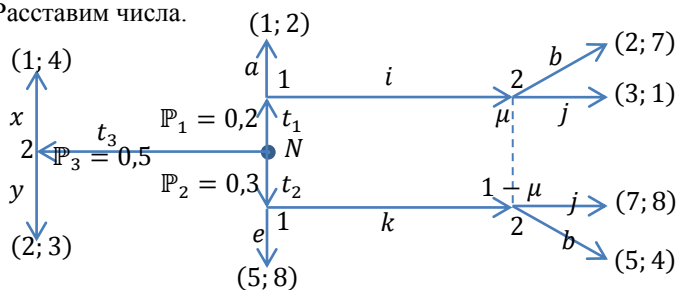
$$U_2(j) = 0,7 \cdot 0 + 0,3 \cdot 4 = 1,2$$

$$b > j$$

И тут нет равновесия.

На каждую схему дома надо самостоятельно решить задачи. 25-го будет последнее занятие.

Усложним задачу. 3 типа. Расставим числа.



$$x > y$$

$$bx, by, jx, jy$$

Первая строчка значит, что by и jy можно не рассматривать.

1) $bx \rightarrow ie, ik$

1.1 $ie \rightarrow \mu = 1, b > j$, нет противоречия. $\{(ie; bx), \mu = 1\}$ — WSPNE.

1.2 $ik \rightarrow$ оба типа попадают в информационное множество. $\mu = 0,4$

$$U_2(b) = \frac{2}{5} \cdot 7 + \frac{3}{5} \cdot 4 = \frac{26}{5}$$

$$U_2(j) = \frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{3}{5} \cdot 8 = \frac{26}{5}$$

$$b \sim j$$

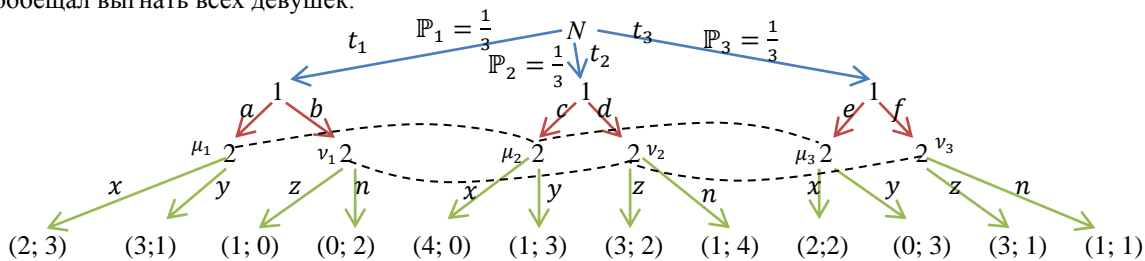
$$\{(ik; bx), \mu = \frac{2}{5}\} = WSPNE$$

2) $jx \rightarrow ik$

$$ik: b \sim j, \quad \mu = \frac{2}{5}$$

$$\{(ik; jx), \mu = \frac{2}{5}\}$$

Шагин пообещал выгнать всех девушек.



$$II: xz, xn, yz, yn$$

$$xz \rightarrow acf, \quad \mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}, \quad \mu_3 = 0$$

$$U_2(x) = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{3}{2}$$

$$U_2(y) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 2$$

$$y > x$$

Противоречие.

$$xn \rightarrow ace, \quad \mu_{1,2,3} = \frac{1}{3}$$

$$U_2(x) = \frac{1}{3}(3 + 0 + 2) = \frac{5}{3}$$

$$U_2(y) = 1 + 3 + 3 = \frac{7}{3}$$

$$y > x, \quad \otimes$$

$$yz \rightarrow adf, \mu_1 = 1, \quad \mu_{2,3} = 0, \quad x > y, \quad \otimes$$

$$yn \rightarrow acf \sim adf$$

$$acf: \mu_3 = 0, \quad \mu_{1,2} = \frac{1}{2}$$

$$U_2(x) = 1,5 < U_2(y) = 2, \quad y > x$$

Нормально.

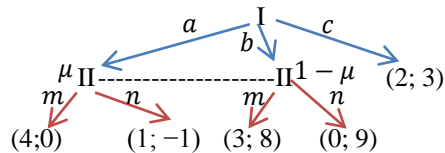
$$v_3 = 1$$

$$z \sim n$$

$$\left\{ (acf; yn), \quad \bar{\mu} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4.2 нет равновесия

Лекция 14



	m	n
a	(4; 0)	(1; -1)
b	(3; 8)	(0; 9)
c	(2; 3)	(2; 3)

$(a; m), (c; n)$ — Нэш.

Оценим веры:

$$U_2(m) = \mu \cdot 0 + (1 - \mu) \cdot 8$$

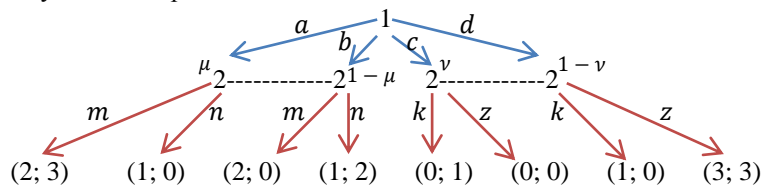
$$U_2(n) = \mu \cdot (-1) + (1 - \mu) \cdot 9$$

$$m \geq n$$

$$8(1 - \mu) \geq -\mu + 9(1 - \mu)$$

$$\mu \geq \frac{1}{2}$$

Ответ: оба Нэша с соответствующими верами.



Можно найти нормализацией. Но сейчас найдём для первого.

$$mk \rightarrow a, \quad b$$

Веры не можем определять, это не природа. У первого игрока вер нет. Поэтому поступим по-другому.

	mk	mz	nk	nz
a	(2; 3)	(2; 3)	(1; 0)	(1; 0)
b	(2; 0)	(2; 0)	(1; 2)	(1; 2)
c	(0; 1)	(0; 0)	(0; 1)	(0; 0)
d	(1; 0)	(3; 3)	(1; 0)	(3; 3)

$$(a; mk), \quad \mu = 1$$

Теперь у второго игрока оценим v :

$$U_2(k) = v + 0 \cdot (1 - v)$$

$$U_2(z) = 3(1 - \mu)$$

$$k \succ z: v \geq \frac{3}{4}$$

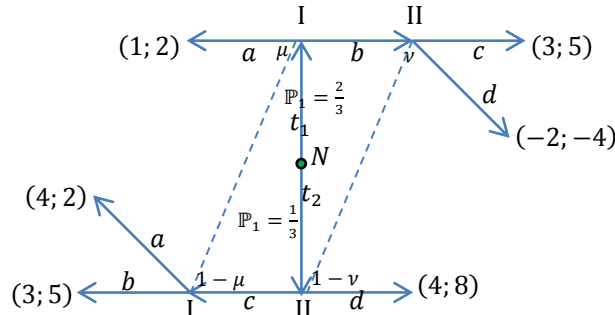
Часть ответа: $\{(a; mk), \mu = 1, v \in [\frac{3}{4}; 1]\}$

$$\{(b; nk), \mu = 0, v \in [\frac{3}{4}; 1]\}$$

$(d; mz): U_2(m) = 3\mu + 0(1 - \mu), U_2(n) = 2(1 - \mu), m \succ n \Leftrightarrow \mu \geq 2/5; v = 0.$

$$\{(d; mz), \mu \in [\frac{2}{5}; 1], v = 0\}$$

$$\{(d; nz), \mu \in [0; \frac{2}{5}], v = 0\}$$



Нормализуем данную матрицу.

	a	b
c	(2; 2)	(2; 4)
d	(3; 5)	(0; 0)

$$ac \rightarrow \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$ad \rightarrow \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$bc \rightarrow \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

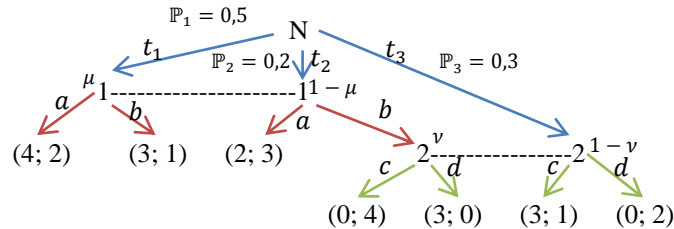
$$bd \rightarrow \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Два равновесия: bc, ad .

$$bc: \mu = \frac{2}{3}, \quad v = \frac{2}{3}$$

$$ad: \mu = 1, \quad v = 0$$

Это и есть ответ.



Попробуем решить без нормализации.

$$2 \rightarrow c \Rightarrow \mu = \frac{5}{7}$$

Про v пока неизвестно, всё от стратегии первого игрока зависит. Второй игрок выбрал стратегию c . Ищем слабое севквенциальное равновесие. Оценим ход a и оценим b .

$$U_1(a) = \frac{5}{7} \cdot 4 + \frac{2}{7} \cdot 2 = \frac{24}{7}$$

$$U_1(b) = \frac{5}{7} \cdot 3 + \frac{2}{7} \cdot 0 = \frac{15}{7}$$

$$a > b$$

Когда $c > d$? t_3 лежит на траектории, а два других типа не приводят, так как первый сыграл a . $v = 0$, второй пойдёт на d . $d > c$, что противоречит предпосылке. Нет равновесия.

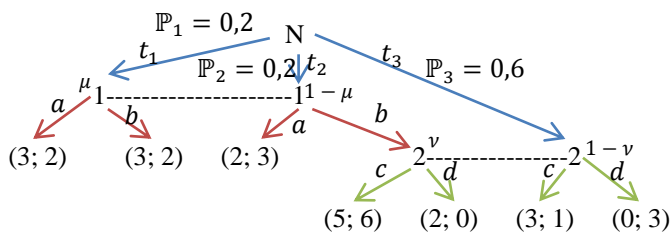
$$2 \rightarrow d$$

Всё точно так же до момента:

$$U_1(b) = \frac{5}{7} \cdot 3 + \frac{2}{7} \cdot 3 = 3$$

Выбирается a , $d > c$, $v = 0$. Противоречия нет.

$$\{(a; d), \mu = \frac{5}{7}, v = 0\}$$



Пусть $1 \rightarrow a$. $\mu = \frac{1}{2}$ всегда. А v зависит от игры. Если 1-й играет a , то $v = 0$. Тогда лучший ответ второго — d . Обратно: если 2-й выбирает d , то

$$U_1(a) = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{5}{2}, \quad U_2(b) = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{5}{2}$$

$$a \sim b$$

$$\{(a; d), \mu = \frac{1}{2}, v = 0\}$$

Теперь $1 \rightarrow b$. Второй играет b . $v = \frac{1}{4}$, так как сюда приводят t_2 и t_3 . Тогда что лучше?

$$U_2(c) = \frac{1}{4} \cdot 6 + \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{9}{4}$$

$$U_2(d) = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{9}{4}$$

$$c \sim d$$

а) Если c , то первому как лучше? $b > a$

$$\{(b; c), \mu = \frac{1}{2}, v = \frac{1}{4}\}$$

$$d \rightarrow a \sim b$$

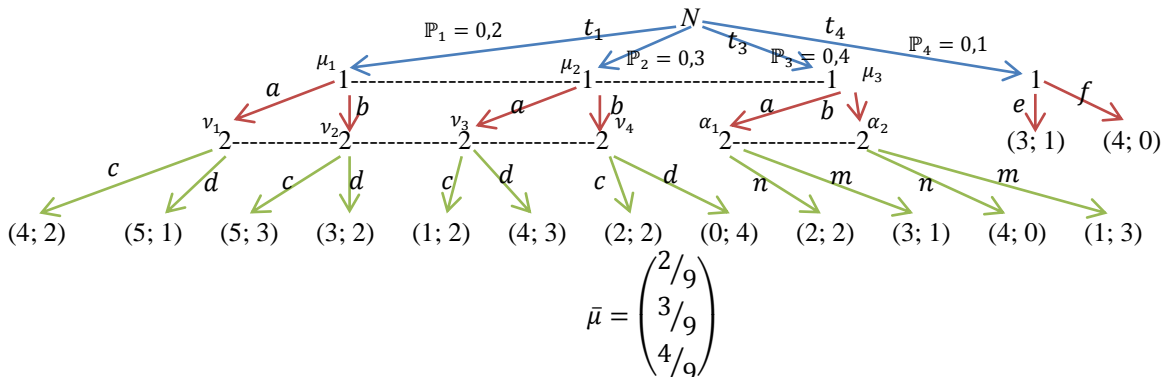
Противоречия нет.

$$\{(b; d), \mu = \frac{1}{2}, v = \frac{1}{4}\}$$

$$c \rightarrow b > a$$

$$U_1(a) = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2,5$$

$$U_1(b) = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5 = 4$$



$$\bar{\mu} = \begin{pmatrix} 2/9 \\ 3/9 \\ 4/9 \end{pmatrix}$$

У 1-го игрока 4 стратегии, но в правой подыгре первый сыграет f , так как $4 > 3$. У 2-го 4 стратегии. Пусть 2-й играет cn . Какой ход сделает первый?

$$U_1(a) = \frac{2}{9} \cdot 4 + \frac{3}{9} \cdot 1 + \frac{4}{9} \cdot 2 = \frac{19}{9}$$

$$U_1(b) = \frac{2}{9} \cdot 5 + \frac{3}{9} \cdot 2 + \frac{4}{9} \cdot 4 = \frac{32}{9}$$

$$b > a \rightarrow bf$$

Если 1-й bf , то как второй сыграет? В $v_{1,3}$ нули.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Если мы находимся в α_2 , то $m > n$, противоречие.

$$2 \rightarrow cm$$

$$U_1(a) = \frac{2}{9} \cdot 4 + \frac{3}{9} \cdot 1 + \frac{4}{9} \cdot 3 = \frac{23}{9}$$

$$U_1(b) = \frac{2}{9} \cdot 5 + \frac{3}{9} \cdot 2 + \frac{4}{9} \cdot 1 = \frac{20}{9}$$

$$a > b \rightarrow af$$

$$v_2 = 0, \quad v_4 = 0, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 0 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n > m$$

Но сие противоречит. \otimes .

Если $2 \rightarrow dn$, то

$$U_1(a) = \frac{2}{9} \cdot 5 + \frac{3}{9} \cdot 4 + \frac{4}{9} \cdot 2 = \frac{30}{9}$$

$$U_1(b) = \frac{2}{9} \cdot 3 + \frac{3}{9} \cdot 0 + \frac{4}{9} \cdot 4 = \frac{22}{9}$$

$$a > b$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 0 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = (1; 0)$$

$$n > m$$

$$U_2(c) = \frac{2}{5} \cdot 2 + \frac{3}{5} \cdot 2 = 2$$

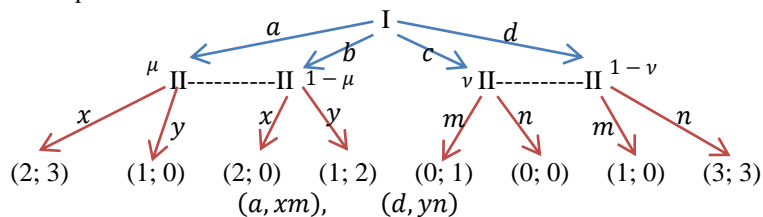
$$U_2(d) = \frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{3}{5} \cdot 3 = \frac{11}{5}, \quad d > c$$

$$\left\{ (af; bn), \quad \mu = \begin{pmatrix} 2/9 \\ 3/9 \\ 4/9 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 0 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Последняя колонка на дом. Там нет равновесий.

Лекция 15, и последняя

Задачу какую-то мы решили неправильно.



Вера первая равна единице. $\mu = 1$.

$$v \geq 3 - 3v$$

$$v \geq \frac{3}{4}$$

Вторая строка. У нас $v = 0$. $n > m$.

$$2(1 - \mu) \geq 3\mu$$

$$\mu \leq \frac{2}{5}$$

Ещё одно равновесие.

$$(b, ym)$$

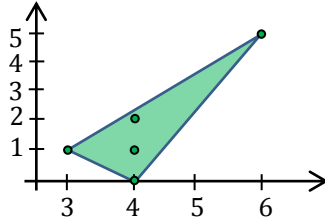
$$\mu = 0, \quad v \geq \frac{3}{4}$$

И ещё одно:

$$(d, xn), \quad v = 0, \quad \mu \geq \frac{2}{5}$$

Если дана матрица и даны платежи, а требуется допустимые найти, то тогда строим выпуклый многоугольник. Если трудно определить, подставляем координаты в уравнение прямой. Допустима ли она в качестве платежа от смешанных стратегий? Например, допустима ли точка $(4; 2)$ в качестве смешанной стратегии

	c	d
a	$(4; 1)$	$(4; 0)$
b	$(6; 5)$	$(3; 1)$



$$u_2 \geq \frac{5}{2}(u_1 - 4), \quad 2u_2 - 5u_1 + 40 \geq 0$$

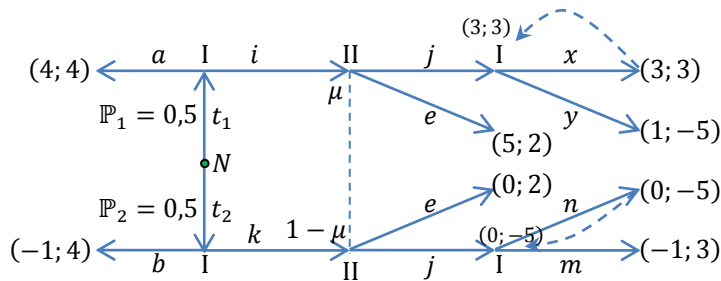
$$4 - 5 \cdot 4 + 20 \geq 0$$

$$4pq + 4p(1 - q) + 6(1 - p)q + 3(1 - p)(1 - q) = 4 \Leftrightarrow pq + 5(1 - p)q + (1 - p)(1 - q) = 2$$

Если данная система имеет решения при $0 \leq p, q \leq 1$, то тогда достигим.

$$4pq + 4p - 4pq + 6q - 6pq + 3 - 3p - 3q + 3pq = 4$$

Аукциона на экзамене не будет. Решим жука:



У 1 игрока 4 информационных множества. 16 стратегий у 1 игрока. У второго их две. В первом столбце ищем равновесие.

$$\Pi: e \rightarrow ixnk$$

При типе t_1 он при a выберет 4 рубля, при i — 5 рублей. Если j , то тогда x , и y в равновесиях не будет. При типе t_2 m не представлена. Определим веры при таких стратегиях. $\mu = \frac{1}{2}$. А может, при таких верах для второго лучше j ? Давайте проверим.

$$U_2(e) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2$$

$$U_2(j) = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot (-5)$$

$$e > j$$

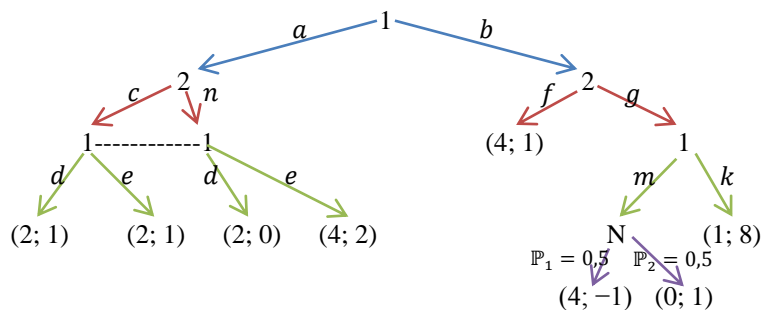
Значит, при данных верах это у нас равновесие.

$$\left\{ (ikxn; e), \mu = \frac{1}{2} \right\} = WSPNE$$

Теперь найдём ответ на j .

$$j \rightarrow akxn$$

$$\mu = 0 \rightarrow e, \otimes$$



Найти $SPNE$. Разберёмся с природой. Значит, взвесим выигрыши по вероятностям. Поставим $(2; 0)$.

	cf	cg	nf	ng
adm	$(2; 1)$	$(2; 1)$	$(2; 0)$	$(2; 0)$
adk	$(2; 1)$	$(2; 1)$	$(2; 0)$	$(2; 0)$
aem	$(2; 1)$	$(2; 1)$	$(4; 2)$	$(4; 2)$
aek	$(2; 1)$	$(2; 1)$	$(4; 2)$	$(4; 2)$
bdm	$(4; 1)$	$(2; 0)$	$(4; 1)$	$(2; 0)$
bdk	$(4; 1)$	$(1; 8)$	$(4; 1)$	$(1; 8)$
bem	$(4; 1)$	$(2; 0)$	$(4; 1)$	$(2; 0)$
bek	$(4; 1)$	$(1; 8)$	$(4; 1)$	$(1; 8)$

Нэша тоже найти надо.

Везде, где есть k , надо зачеркнуть в проекции на правую подыгру. У первого игрока:

	f	g
m	$(4; 1)$	$(2; 0)$
k	$(4; 1)$	$(1; 8)$

Подыгра второго:

	c	n
d	$(2; 1)$	$(2; 0)$
e	$(2; 1)$	$(4; 2)$

Итого равновесия: $(bdm; cf); (aem; nf); (bem; nf)$.

Вызубрить и сформулировать стратегию жёсткого переключения!

На последней лекции Шагину грустно расставаться с теми, кто с ним работал 4 месяца. Пусть он нас и ругает, особенно последние ряды, но это идёт ему, как вампиру, подпитка!