Licence auction

Предположим, что в равновесии фирмы-новички делают ставки согласно убывающей функции $b(c)$.

Тогда во второй раунд выйдет фирма с минимальными издержками $c = \min\{c_1, c_2\}$. Это всё, что знает фирма-старожил, поэтому с её точки зрения закон распределения издержек входящей фирмы — это распределение минимума. Функция распределения минимума,

$$F_c(t) = P(c \le t) = 1 - P(c > t) = 1 - P(c_1 > t)P(c_2 > t) = 1 - (\bar{c} - t)^2/\bar{c}^2$$

Заметим, что $E(c) = \bar{c}/3$.

Во втором раунде фирма-старожил максимизирует свою ожидаемую прибыль производит количество q_{old}, а фирма новичок использует $q_{new}(c)$.

Задача фирмы-новичка:

$$\max_{q_{new}} q_{new} \cdot (1 - q_{new} - q_{old} - c)$$

Получаем функцию реакции: $q_{new} = (1 - q_{old} - c)/2$.

Задача фирмы-старожила:

$$\max_{q_{old}} E(q_{old} \cdot (1 - q_{new} - q_{old}))$$

С точки зрения фирмы-старожила случайными величинами являются q_{new} и c. Отсюда:

$$q_{old} = (1 - E(q_{new}))/2$$

Решая систему

$$\begin{cases} q_{new} = (1 - q_{old} - c)/2 \\ q_{old} = (1 - E(q_{new}))/2 \end{cases}$$

Находим: $q_{old} = \frac{1}{3} + E(c)$, $q_{new} = \frac{1}{3} - E(c)/2 - c/2$

Замечаем, что при любых $c < 1/2$, выпуск (и прибыль) фирмы новичка положительны.

При условии, что $E(c) = \bar{c}/3$, получаем $q_{old} = \frac{3+\bar{c}}{9}$, $q_{new}(c) = \frac{6-\bar{c}-9c}{18}$.

И прибыль фирмы-новичка равна:

$$\pi_{new} = q_{new}^2 = (6 - \bar{c} - 9c)^2/18^2$$

Но на аукционе второй цены игроку выгодно делать ставку равную своему выигрышу, то есть

$$b(c) = (6 - \bar{c} - 9c)^2/18^2$$

Замечаем, что эта функция убывает, как мы и предполагали.