

# How long does it take to solve an antagonistic game by dominance?

Boris Demeshev, boris.demeshev@gmail.com

18 мая 2011 г.

Количество итераций при вычеркивании доминируемых стратегий

Под итерацией будем подразумевать вычеркивание всех нестрого доминируемых стратегий за одного игрока.

Теорема: в последовательной антагонистической двух игроков игре с  $n$  исходами потребуется не более  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  последовательных итераций.

Доказательство:

Занумеруем исходы:  $1, 2, \dots, n$

Исход 1 - худший для первого игрока, худший для второго.

Исход  $n$  - лучший для первого игрока, худший для второго.

Введем следующую терминологию:

Игрок 1 форсирует  $k$ -выигрыш. Если в некоей позиции игрок 1 может гарантировать исход с номером не меньше  $k$ , то он использует эту возможность.

Игрок 2 форсирует  $k$ -выигрыш. Если в некоей позиции игрок 2 может гарантировать исход с номером не больше  $k$ , то он использует эту возможность.

Игрок 1 не делает  $k$ -ошибок. Если в некоей позиции игрок 1 может гарантировать исход с номером не меньше  $k + 1$ , то он не допустит ошибки, позволяющей игроку 2 форсировать  $k$ -выигрыш.

Игрок 2 не делает  $k$ -ошибок. Если в некоей позиции игрок 2 может гарантировать исход с номером не больше  $k - 1$ , то он не допустит ошибки, позволяющей игроку 1 форсировать  $k$ -выигрыш.

Собственно доказательство:

Итерация 1:

Первый игрок вычеркивает:

все стратегии, не форсирующие  $n$ -выигрыш.

Второй игрок вычеркивает:

все стратегии, не форсирующие 1-выигрыш.

все стратегии, допускающие  $n$ -ошибки.

Итерация 2:

Первый игрок вычеркивает:

все стратегии, не форсирующие  $n - 1$ -выигрыш.

все стратегии, допускающие 1-ошибки.

Второй игрок вычеркивает:

все стратегии, не форсирующие 2-выигрыш.

все стратегии, допускающие  $n - 1$ -ошибки.

... Итого: как максимум  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  итераций

Данная теорема является обобщением результата полученного в работе Chess-like Games Are Dominance Solvable in at Most Two Steps, Christian Ewerhart, Games and Economic Behavior 33.

В работе Ewerhart утверждалось, что в последовательных антагонистических играх с тремя исходами (например, шахматы, шашки...) потребуется не более двух итераций.