Моделирование аукционов. Контрольная работа 3.

1. Пусть V — общая ценность товара для двух игроков, равномерна на $[0; 1]$. Величины R_1 и R_2 — независимы между собой и с V и равномерны на $[0.5; 1.5]$. Игроки получают сигналы $X_i = V \cdot R_i$.

   (a) Найдите совместную функцию плотности X_1 и X_2. Верно ли, что X_1 и X_2 аффилированны?

   (b) Найдите $v(x, y) = E(V|X_1 = x, Y_1 = y)$

   (c) Найдите совместную функцию плотности X_1 и Y_1, $g(x, y)$

   По условию, при фиксированном v величина равномерна на $[0.5v; 1.5v]$. Длина этого отрезка равна v, значит условная функция плотности X_1 при фиксированном v имеет вид:

$$p(x_1|v) = \frac{1}{v} \quad x_1 \in [0.5v; 1.5v] \tag{1}$$

   Т.к. при фиксированном v величины X_1 и X_2 независимы, то выписываем $p(x_1, x_2|v)$:

$$p(x_1, x_2|v) = \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{v}, \quad x_1, x_2 \in [0.5v; 1.5v] \tag{2}$$

   Т.к. $p(x_1, x_2, v) = p(x_1, x_2|v)p(v)$:

$$p(x_1, x_2, v) = \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{v} \cdot 1, \quad x_1, x_2 \in [0.5v; 1.5v] \tag{3}$$

   Условие $x_1, x_2 \in [0.5v; 1.5v]$ записываем как: $x_1 \wedge x_2 > 0.5v$ и $x_1 \vee x_2 < 1.5v$. Или как $v \in [\frac{x_1 \vee x_2}{1.5}; \frac{x_1 \wedge x_2}{0.5}]$. Для краткости обозначим этот интервал: $[v_{min}; v_{max}]$.

   Интегрируем по v в указанных пределах и получаем:

$$p(x_1, x_2) = \int_{v_{min}}^{v_{max}} \frac{1}{v^2} dv = \frac{1}{v_{min}} - \frac{1}{v_{max}} \tag{4}$$

   Есть точки, где функция недифференциируема, поэтому проверять супермодулярность нужно будет по определению. Проверка супермодулярности пропущена. Она сводится к аккуратному рассмотрению нескольких случаев.

   Здесь $Y_1 = X_2$, поэтому третий пункт уже решен, осталось найти:

$$E(V|X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \int vp(v|x_1, x_2)dv = \int v\frac{p(x_1, x_2, v)}{p(x_1, x_2)}dv = \frac{\int vp(x_1, x_2, v)dv}{p(x_1, x_2)} \tag{5}$$

   В числителе:

$$\int_{v_{min}}^{v_{max}} \frac{1}{v} dv = \ln(v_{max}) - \ln(v_{min}) \tag{6}$$

   Значит в итоге:

$$v(x_1, x_2) = \frac{\ln(v_{max}) - \ln(v_{min})}{\frac{1}{v_{min}} - \frac{1}{v_{max}}} \tag{7}$$

2. На аукционе продается картина, которая равновероятно является «Джокондой» Леонардо да Винчи или ее подделкой. За нее торгуются n покупателей. Ценность картины для всех покупателей одинакова, $V_1 = V_2 = ... = V_n = V$ и равна 1, если это оригинал и 0, если подделка.

   Если $V = 0$, то сигналы X_i условно независимы и равномерны на $[0; 1]$. Если $V = 1$, то сигналы X_i условно независимы и имеют функцию плотности $f(x|V = 1) = 2x$ при $x \in [0; 1]$

   (a) Найдите совместную функцию плотности всех X_i. Верно ли, что все X_i аффилированны?

   (b) Найдите $v(x, y) = E(V|X_1 = x, Y_1 = y)$

   (c) Найдите совместную функцию плотности X_1 и Y_1, $g(x, y)$

   Для наглядности напомню формулу для вероятности некоего события A:

$$P(A) = P(A \cap V = 1) + P(A \cap V = 0) = \\ = P(A|V = 1)P(V = 1) + P(A|V = 0)P(V = 0) = 0.5P(A|V = 1) + 0.5P(A|V = 0) \tag{8}$$

   О-малые говорят нам, что плотности подчиняются такой же формуле, т.к. многомерная плотность есть вероятность поделить на Δ^n. Поэтому совместная функция плотности имеет вид:

$$f(x_1, ..., x_n) = 0.5 \cdot 1 \cdot 1... \cdot 1 + 0.5 \cdot 2x_1 \cdot 2x_2 \cdot \ldots 2x_n = 0.5 + 2^{n-1}x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \tag{9}$$

   Проверяем вторую смешанную производную логарифма. В силу симметрии достаточно по x_1 и x_2:

$$\frac{\partial^2 \ln(f)}{\partial x_1 \partial x_2} = ... = \frac{0.5}{f(x_1, ..., x_2)^2} \geq 0 \tag{10}$$

   Найдем сначала третий пункт:

   Опять вспоминаем, что $P(A) = 0.5P(A|V = 1) + 0.5P(A|V = 0)$. О-малые говорят нам, что плотности подчиняются такой же формуле! Поэтому находим две условные функции плотности X_1 и Y_1:

$$g(x, y|V = 0) = (n - 1) \cdot 1 \cdot y^{n-2} \tag{11}$$

   И

$$g(x, y|V = 1) = (n - 1) \cdot 2x \cdot 2y \cdot (y^2)^{n-2} \tag{12}$$

   И получаем безусловную:

$$g(x, y) = 0.5(n - 1) \cdot 1 \cdot y^{n-2} + 0.5(n - 1) \cdot 2x \cdot 2y \cdot (y^2)^{n-2} \tag{13}$$

   Поскольку V принимает значения только 0 и 1, то $E(V|A) = P(V = 1|A)$. По формуле условной вероятности:

$$P(V = 1|A) = \frac{P(V = 1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|V = 1) \cdot P(V = 1)}{P(A)} = \frac{0.5P(A|V = 1)}{P(A)} \tag{14}$$

   И в итоге:

$$P(V = 1|X_1 = x, Y_1 = y) = \frac{0.5(n - 1) \cdot 2x \cdot 2y \cdot (y^2)^{n-2}}{0.5(n - 1) \cdot 1 \cdot y^{n-2} + 0.5(n - 1) \cdot 2x \cdot 2y \cdot (y^2)^{n-2}} \tag{15}$$

3. На аукционе второй цены присутствуют n покупателей. Ценности совпадают с сигналами, $V_i = X_i$; сигналы X_i независимы и равномерны на $[0;1]$. На аукционе продается k одинаковых чудо-швабр, $1 < k < n$. Каждому покупателю нужна только одна чудо-швабра. Покупатели одновременно делают свои ставки. Чудо-швабры достаются по одной каждому из k покупателей с самыми высокими ставками. Каждый из k победителей платит организатору наибольшую проигравшую ставку.

   Найдите равновесие Нэша.

   Проверяем метод «Авось старое решение подойдет». Строим табличку как в первой лекции и видим, что стратегия $b(x) = x$ нестрого доминирует остальные стратегии. Единственное отличие: выиграю ли я аукцион зависит от сравнения моей ставки и $m = b(Y_k)$, а не $m = b(Y_1)$ как в первой лекции.

4. На аукционе первой цены присутствуют n покупателей. Ценности совпадают с сигналами, $V_i = X_i$; сигналы X_i независимы и равномерны на $[0;1]$. На аукционе продается k одинаковых чудо-швабр, $1 < k < n$. Каждому покупателю нужна только одна чудо-швабра. Покупатели одновременно делают свои ставки. Чудо-швабры достаются по одной каждому из k покупателей с самыми высокими ставками. Эти k победителей платят свои ставки организатору.

   Найдите дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет равновесная стратегия.

   Hint: Когда продавался один товар, то условие победы первого игрока — $Y_1 < a$, а если продается k товаров, то условие победы первого игрока $Y_? < a$.

   Условие победы первого игрока: $Y_k < a$. В функции прибыли мы можем убрать условие в силу независимости ценностей.

$$\pi(x, b(a)) = (x - b(a))E(1_{Y_k<a}|X_1 = x) = (x - b(a))P(Y_k < a) \tag{16}$$

   Применяем о-малые. Одна величина должна упасть около t, $(k-1)$ должна оказаться выше t, и $(n-1-k)$ должно оказаться ниже t:

$$f_{Y_k}(t) = (n-1) \cdot C_{n-1}^{k-1} \cdot 1 \cdot (1-t)^{k-1} \cdot t^{n-k-1} \tag{17}$$

   Значит:

$$\pi(x, b(a)) = (x - b(a))E(1_{Y_k<a}|X_1 = x) = (x - b(a)) \int_0^a f_{Y_k}(t)dt \tag{18}$$

   Получаем диф. ур:

$$(x - b(x))f_{Y_k}(x) - b'(x) \int_0^x f_{Y_k}(t)dt = 0 \tag{19}$$

   Всё. Дифференциальное уравнение получено.

   А дальше можно изолировать $\int_0^x ...dt$ в правой части, взять производную по x и избавится от интеграла. Но это уже относится к решению дифференциального уравнения.

5. Существуют ли неаффилированные случайные величины X_1 и X_2 такие, что $Cov(X_1, X_2) > 0$?

   Да. Возьмем пару аффилированных случайных величин с положительной корреляцией. У нее функция плотности всюду удовлетворяет условию $\partial^2 \ln(f(x_1, x_2))/\partial x_1 \partial x_2 \geq 0$. А теперь на очень-очень маленьком участке нарушим это условие. Случайные величины перестали быть аффилированными. А ковариация от этого изменится очень-очень слабо, т.е. останется положительной.

   Конкретный пример: X_1 — равномерно на $[0; 1]$, D — равномерно на $[0; 1]$.

$$X_2 = D + \begin{cases} X_1, X_1 > 0.00001 \\ -X_1, X_1 < 0.00001 \end{cases} \tag{20}$$

Подсказка: по-моему, задача 2 дольше задачи 1, задача 4 дольше задачи 3.