Q2. 17 Dec 2014

Q2.

1)

2) False. Верно, что не может быть меньше четырёх SPE (играть NE1 в первой партии и NE2 во второй партии, играть NE2 в первой и NE2 во второй партии и т.д.). Однако могут быть и другие SPE. В SPE в любой подыгре, начинающейся со второго момента времени, должно быть сыграно равновесие Нэша. Следовательно, во второй партии (которая и есть подыгра) должно быть сыграно равновесие Нэша. В первой же партии может и не быть равновесия. Чтобы сыграть неравновесный исход в первой партии, один из игроков должен шантажировать второго в духе: "Если ты не сыграешь, как хочет моя левая нога, то во второй партии я подсуну тебе плохое для тебя равновесие Нэша!".

Пример. Повторяется два раза базовая игра:

I/II	c	d
a	(100;0)	(-1;0)
b	(99;0)	(0;0)

Равновесий в базовой игре два: (a,c) и (b,d). Второму вообще пофиг как играть (поэтому любое его поведение оптимально), но в его власти лишить первого крупного выигрыша во второй партии. Соответственно, можно сконструировать такое SPE:

Стратегия 1-го:

- в первой партии играть b,
- во второй партии: играть a, если в первой был (b,c); иначе играть b

Стратегия 2-го:

- в первой партии c,
- во второй партии: играть c, если в первой был (b,c); иначе играть d

Проверяем, что это SPE. Во второй партии эти стратегии приводят к NE. В первой партии не NE, но (!) первая партия не есть подыгра (подыгра — это от момента времени и далее до конца игры)! Может ли первый изменить свою стратегию в игре в целом и получить больше? Нет, т.к. изменение хода в первой партии лишает его 100 рублей во второй партии, давая лишь небольшой плюс в первой партии.

здесь попутно мы решим Q3. В вопросе Q3 как раз нужно доказать, что если равновесие в базовой игре единственно (a°), то при конечном повторении игры описанная выше ситуация шантажа не сложится. То есть нужно доказать, что в SPE стратегии игроков в любой момент времени будут говорить им ходить ход, соответствующий равновесию Нэша в базовой игре.

Начинаем с конца. Последняя партия является подыгрой, поэтому в последней партии должно играться равновесие Нэша a°. Но оно единственно, значит вне зависимости от предыстории в SPE стратегия игрока i советует ему делать ход a_i° в последней партии.

Переходим к предпоследней партии. В SPE выигрыш в последней партии, как мы уже знаем, не зависит от исхода предпоследней партии. Значит ничто далее не может компенсировать игроку неоптимальный ход в предпоследней партии. Значит в предпоследней партии должно играться равновесие Нэша a_i°.

И так далее.

3) False

Рассмотрим такой пример игры справа:

I/II	c	d
a	(1;0)	(0;1)
b	(0;1)	(1;0)

В ней единственное NE $(0.5a + 0.5b,\ 0.5c + 0.5d)$, игроки в среднем получают по 0.5. И предположим, что веточка “налево” даёт обоим игрокам по 0.6.

Если мы ищем SPE, то справа получаем в матрице должен играться NE, то есть игроки получают по 0.5 и первый выбирает на первом шаге 0.6.

Если же мы ищем NE в чистых. Вне зависимости от стратегии второго (c или d) первый может войти в игру и получить рубль.