Double round auction

Четыре игрока, ценности товара независимы и равномерны на $[0;1]$. Аукцион организован так: два полуфинала (аукционы первой цены) и финал между победителями (ещё один аукцион первой цены). Победитель получает чудо-швабру. В каждом туре победитель платит. Найдите равновесные стратегии.

Solution

Стратегия каждого игрока: сколько ставить в зависимости от своей субъективной оценки чудо-швабры в первом туре и во втором, то есть формально стратегия описывается двумя функциями, $b^I(v)$ и $b^{II}(v)$.

Предположим, что эти фукнции возрастающие. Тогда в итоге товар получает тот игрок, который ценит чудо-швабру выше других.

Игрок, проходящий во второй тур, является победителем первого тура, поэтому распределение субъективных оценок во втором туре уже не является равномерным. Субъективная ценность игрока A, прошедшего во второй тур, является максимумом двух равномерных случайных величин:

$$v_A = \max\{v_1, v_2\}$$

Найдём её функцию распределения:

$$F_{v_A}(t) = \mathbb{P}(v_A \leq t) = \mathbb{P}(\max\{v_1, v_2\} \leq t) = \mathbb{P}(v_1 \leq t, v_2 \leq t) = \\ = \mathbb{P}(v_1 \leq t) \cdot \mathbb{P}(v_2 \leq t) = t^2 \quad (1)$$

Естественно, функция плотности равна $f_{v_A}(t) = 2t$.

Решаем с конца, со второго тура. Допустим во второй тур вышли игроки A и B. Зафиксируем стратегию второго игрока, $b_B = b(v_B)$. Максимизируем ожидаемый выигрыш A:

$$(v_A - b_A) \cdot \mathbb{P}(b(v_B) < b_A | v_A)$$

Мы ищем оптимальную ставку b_A. Сделаем замену неизвестного числа b_A на $b(t)$. Не страшно, что функция $b()$ пока еще неизвестна. Зато формулы упрощаются:

$$(v_A - b(t)) \cdot \mathbb{P}(b(v_B) < b(t)) = (v_A - b(t)) \cdot \mathbb{P}(v_B < t) = (v_A - b(t)) \cdot t^2$$

Берем производную по t:

$$(v_A - b(t)) \cdot 2t - b'(t)t^2 = 0$$

В силу симметрии оптимальная стратегия игрока A должна равняться $b()$, то есть $b(t) = b(v_A)$ и получаем:

$$(t - b(t)) \cdot 2 - t \cdot b'(t) = 0$$

Решая это линейное уравнение находим, что $b(t) = \frac{2}{3}t + c \cdot t^{-2}$. Нам нужно возрастающее решение, поэтому берём $c = 0$.

Итого, оптимальная стратегия во втором туре $b(v) = \frac{2}{3}v$. Можно было немного сжульничать, предположить, что стратегия линейна и найти оптимальную линейную стратегию.

Если игрок A с оценкой товара равной v_A только вошёл во второй тур, то он ожидает, что его выигрыш будет равен:

$$(v_A - 2/3 \cdot v_A) \cdot v_A^2 = v_A^3/3$$

Находим оптимальную стратегию в первом туре. На этот раз $b()$ неизвестная оптимальная стратегия игроков в первом туре. Ожидаемый выигрыш в начале игры равен вероятности выйти во второй тур помножить на условный ожидаемый выигрыш, если я дошел до второго тура.

$$(v_1^3/3 - b_1) \cdot \mathbb{P}(b(v_2) < b_1 | v_1)$$

Делаем замену $b_1 = b(t)$:

$$(v_1^3/3 - b(t)) \cdot \mathbb{P}(v_2 < t) = (v_1^3/3 - b(t)) \cdot t$$

Берем производную по t и вспоминаем, что в оптимуме $b(t) = b(v_1)$:

$$t^3/3 - b(t) - b'(t) \cdot t = 0$$

Решаем дифференциальное уравнение $b(t) = t^3/12 + c/t$, отбираем возрастающее решение, получаем $b(t) = t^3/12$.

Итого: Нэш: $b_I(v) = v^3/12$, $b_{II}(v) = 2v/3$.