Моделирование аукционов. Азбука.

Борис Демешев

25 марта 2011 г.

Содержание

1 Сравнение аукционов в общем случае

Сравним доходность трех аукционов (первой, второй цены и кнопочного) для продавца в общем случае. Предположений у нас будет всего два: аффилированность сигналов и симметричность игроков.

1.1 Про симметричность

Для наглядности три примера впереди определения:

Пример 1.1. Совместная функция плотности сигналов имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{7}{8} + x_1x_2x_3 \tag{1.2}$$

Ценности определяются по формулам:

$$\begin{aligned} V_1 &= X_1 + \sqrt{X_2X_3 + 1} \\ V_2 &= X_2 + \sqrt{X_1X_3 + 1} \\ V_3 &= X_3 + \sqrt{X_1X_2 + 1} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Все симметрично. Ценность товара для меня может по-особому зависеть от моего сигнала, но должна одинаково зависеть от сигнала других игроков. С моей точки зрения другие игроки одинаковые, и то, что знают они, чего не знаю я, должно одинаково воздействовать на ценность товара для меня.

Пример 1.4. Совместная функция плотности сигналов имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1(\frac{7}{8} + \frac{1}{2}x_2x_3) \tag{1.5}$$

Ценности определяются по формулам:

$$\begin{matrix} V_1 = X_1 + \sqrt{X_2X_3+1} \\ V_2 = X_2 + \sqrt{X_1X_3+1} \\ V_3 = X_3 + \sqrt{X_1X_2+1} \end{matrix} \tag{1.6}$$

Несимметрична функция плотности.

Пример 2.1. Совместная функция плотности сигналов имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{7}{8} + x_1x_2x_3 \tag{2.2}$$

Ценности определяются по формулам:

$$\begin{matrix} V_1 = X_1 + \sqrt{X_2X_3+1} \\ V_2 = X_2 + X_3 \\ V_3 = X_3 \cdot X_1 \end{matrix} \tag{2.3}$$

Несимметричны ценности.

Для формальности:

Определение 2.4. Функция $f(a, b, c, d, e)$ симметрична относительно аргументов a, b, c, если ее значение не изменится при перестановке a, b, c в другом порядке.

Пример 2.5. Функция симметричная относительно x и y: $f(x, y, z) = xy + z$

Пример 2.6. Функция симметричная относительно всех аргументов: $f(w, x, y, z) = xyz + wxy + wxz + wyz$

Определение 2.7. Игроков будем называть симметричными, если:

1. Совместная функция плотности $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ симметрична по всем аргументам

2. Ценность V_i определяется по формуле:

$$V_i = u(X_i, X_{-i}) \tag{2.8}$$

   где: X_{-i} — это вектор $(X_1, X_2, ..., X_n)$ в котором отсутствует X_i, а функция $u(t, t_1, t_2, ..., t_{n-1})$ симметрична по переменным t_1,..., t_{n-1}

1.2 Еще об аффилированности

Сперва кое-что о вероятностях...

Если у нас есть случайная величина Z, то мы можем построить функцию $z(y) = E(Z|Y = y)$. Рассмотрим эту функцию в случайной точке Y:

$$E(z(Y)) = \int_0^1 z(y)f_Y(y)dy = \int_0^1\int_0^1 z \cdot \frac{f(y,z)}{f_Y(y)} dz f_Y(y)dy = \int_0^1\int_0^1 z \cdot f(y,z)dydz = E(Z) \tag{2.9}$$

Значит это нам это дает способ расчета $E(Z)$:

$$E(Z) = \int_0^1 E(Z|Y = y)f_Y(y)dx \tag{2.10}$$

Честно говоря, этот способ мы уже использовали. Он очень мощный.

Лирическое отступление для интересующихся. Если глубоко копать, то можно понять, что это не что иное, как теорема о трех перпендикулярах из 11-го класса средней школы. Намекну: мат. ожидание случайной величины — это ее проекция на множество действительных чисел. Квадратом расстояния между двумя случайными величинами при этом служит $E((X-Y)^2)$. Например, теорема Пифагора формулируется так: $E(X^2) = E(m^2) + E((X-m)^2)$. Три перпендикуляра: наклонная — это Y; плоскость — это множество случайных величин, записывающихся как функция от X; проекция на плоскость — это $E(Y|X=x)$ взятая в случайной точке X; константы — это прямая в нашей плоскости; $E(Y)$ — это проекция на прямую...

Аналогично, довесив условие $X = x$ слева и справа, можно получить, что:

$$E(Z|X=x) = \int_0^1 E(Z|Y=y \cap X=x) f_{Y|X}(y|x)dy \tag{3.1}$$

Это не очевидно. Те, кому интересна теория вероятностей могут это вывести, остальные могут поверить.

Теперь вернемся к аффилированности:

Теорема 3.2. *Если X_1, ..., X_n аффилированы, то и X_1, Y_1, Y_2, ..., Y_{n-1} аффилированы.*

Доказательство. Великие о-малые говорят нам, что совместная функция плотности вектора X_1, Y_1, Y_2, ..., Y_{n-1} на участке $y_1 > y_2 > ... > y_{n-1}$ равна:

$$f_{X_1,Y_1,...,Y_{n-1}}(x_1, y_1, y_2, ..., y_{n-1}) = (n-1)! f(x_1, y_1, ..., y_{n-1}) \tag{3.3}$$

Нам нужно проверить супермодулярность логарифма:

$$\ln(f_{X_1,Y_1,...,Y_{n-1}}(x_1, y_1, y_2, ..., y_{n-1})) = \ln((n-1)!) + \ln(f(x_1, y_1, ..., y_{n-1})) \tag{3.4}$$

Вторые смешанные производные от левой части неотрицательны в силу того, что неотрицательны вторые смешанные производные от правой части.

□

Теоремы которые мы далее докажем будут верны для любых аффилированных случайных величин. Но мы будем иметь ввиду X_1 и Y_1, поэтому и будем использовать соответствующие обозначения.

Теорема 3.5. *Если из набора аффилированных величин некоторые удалить, то оставшиеся будут аффилированы*

Доказательство. Пропущено. Если будут желающие, то допишу.

□

Из теорем 3.5 и 3.2 следует, что X_1 и Y_1 аффилированы. Знание этих двух величин всегда позволяет определить, победил ли первый игрок, и сколько он платит (по крайней мере для трех аукционов, которые мы сравниваем).

Нам надо изучать X_1 и Y_1, чтобы все время не писать индекс $_1$ в доказательствах пока забудем про него.

Введем несколько обозначений для этой пары:

1. $g(x, y)$ — их совместная функция плотности,

2. $g(y|x) = \frac{g(x,y)}{f_X(x)}$ — условная функции плотности Y при заданном X

3. $G(y|x) = P(Y \le y|X = x)$ — условная функции распределения Y при заданном X.

   Конечно, верно соотношение:

$$G(y|x) = P(Y \le y|X = x) = \int_0^y g(t|x)dt \tag{3.6}$$

4. $R(y|x) = \frac{g(y|x)}{G(y|x)}$ — условная обратная функция риска Y при заданном X.

   Поясню смысл последней. Это шансы того, что Y будет около y, если известно, что $Y \le y$ и $X = x$. Например, значение $R(10, 20) = 30$ можно проинтерпретировать так. Возьмем маленький $\Delta y = 0.01$. Тогда $P(Y \in [9.99; 10]|Y \le 10, X = 20) \approx 30 \cdot 0.01 = 0.3$.

Теорема 4.1. *Если случайные величины X и Y аффилированы, и $g(x, y)$ — их совместная функция плотности, то*[1]

1. *Условная функция распределения $G(y|x)$ — не возрастает по x*

2. *Условная обратная функция риска $R(y|x) = \frac{g(y|x)}{G(y|x)}$ — не убывает по x*

Доказательство. Величины X и Y аффилированы, поэтому $\ln(g(x, y))$ — супермодулярная функция.

Рассмотрим пару точек (x', y) и (x, y'). Воспользуемся супермодулярностью:

$$\ln(g((x', y) \wedge (x, y'))) + \ln(g((x', y) \vee (x, y'))) \ge \ln(g(x', y)) + \ln(g(x, y')) \tag{4.2}$$

Или, без логарифмов:

$$g((x', y) \wedge (x, y')) \cdot g((x', y) \vee (x, y')) \ge g(x', y) \cdot g(x, y') \tag{4.3}$$

Пусть $x' \ge x$ и $y' \ge y$. Тогда:

$$g(x, y) \cdot g(x', y') \ge g(x', y) \cdot g(x, y') \tag{4.4}$$

Поскольку $g(x, y) = g(y|x) \cdot f_X(x)$ мы получаем:

$$g(y|x) \cdot f_X(x) \cdot g(y'|x') \cdot f_X(x') \ge g(y|x') \cdot f_X(x') \cdot g(y'|x) \cdot f_X(x) \tag{4.5}$$

Убираем повторы

$$g(y|x) \cdot g(y'|x') \ge g(y|x') \cdot g(y'|x) \tag{4.6}$$

Или:

$$\frac{g(y|x)}{g(y'|x)} \ge \frac{g(y|x')}{g(y'|x')} \tag{4.7}$$

Интегрируем по y от 0 до y':

$$\frac{G(y'|x)}{g(y'|x)} \ge \frac{G(y'|x')}{g(y'|x')} \tag{4.8}$$

[1] Тут обычно вводят кучу определений (стохастическое доминирование, доминирование в терминах обратной доли риска и пр.), но мы не будем этого делать.

Переворачиваем дробь:
$$\frac{g(y'|x)}{G(y'|x)} \le \frac{g(y'|x')}{G(y'|x')} \tag{4.9}$$

Используя условную обратную функцию риска:

$$R(y'|x) \le R(y'|x') \tag{4.10}$$

А у нас $x \le x'$. Это и означает, что $R(\cdot|x)$ не убывает по x.

Осталось доказать, что $G(y'|x)$ не возрастает по x. Мы докажем, что $\ln(G(y'|x))$ не возрастает по x.

Заметим, что:
$$\frac{\partial \ln(G(y'|x))}{\partial y'} = \frac{g(y'|x)}{G(y'|x)} = R(y'|x) \tag{5.1}$$

Или:
$$\ln(G(y'|x)) = \int_1^{y'} R(t|x)dt \tag{5.2}$$

Обратите внимание, что здесь несколько непривычные пределы интегрирования: не от 0, а от 1. Связано это с тем, что интеграл должен обращаться в 0 не при $y' = 0$, а при $y' = 1$. Действительно, у нас регулярное распределение на $[0; 1]$, значит $G(1|x) = 1$ и $\ln(G(1|x)) = 0$. Заметьте, что знаки при этом совпадают: и слева отрицательное выражение, т.к. $G \in (0; 1)$ и справа, т.к. верхний предел меньше нижнего.

Давайте перепишем в привычном варианте, когда верхний предел интегрирования больше нижнего:
$$\ln(G(y'|x)) = -\int_{y'}^{1} R(t|x)dt \tag{5.3}$$

С ростом x подынтегрируемое выражение растет для любого t, значит растет результат интегрирования. Т.е. функция $\ln(G(y'|x))$ не возрастает по x.

□

Из этих свойств следует теорема имеющая более наглядный смысл:

Теорема 5.4. *Если X и Y аффилированы, то:*

1. *Функция $E(Y|X = x)$ не убывает по x*
2. *Если $\gamma()$ — возрастающая функция, то $E(\gamma(Y)|X = x)$ не убывает по x*
3. *$Cov(X, Y) \ge 0$*

Доказательство. По определению:

$$E(Y|X = x) = \int_0^1 yg(y|x)dy \tag{5.5}$$

Мы можем проинтегрировать по частям ($u = y$, $v' = g(y|x)$) и получить:

$$E(Y|X = x) = yG(y|x)|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 G(y|x)dy \tag{5.6}$$

Поскольку мы работаем с регулярным на $[0; 1]$ распределением, то $G(0|x) = 0$ и $G(1|x) = 1$. Еще раз напомню, что выбор 0 и 1 в качестве границ распределения — это просто масштабирование для удобства и все наши доказательства проходят без изменений для случая регулярного распределения на отрезке $[a;b]$.

$$E(Y|X=x) = 1 - \int_0^1 G(y|x)dy \tag{5.7}$$

Остается заметить, что с ростом x падает подынтегральное выражение и, следовательно, интеграл. Значит $E(Y|x=x)$ возрастает.

Доказательство для произвольной $\gamma(y)$ ничем не отличается:

$$E(\gamma(Y)|X=x) = \int_0^1 \gamma(y)g(y|x)dy \tag{6.1}$$

Интегрируя по частям получаем:

$$E(\gamma(Y)|X=x) = \gamma(y)G(y|x)|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \gamma'(y)G(y|x)dy \tag{6.2}$$

Или:

$$E(\gamma(Y)|X=x) = 1 - \int_0^1 \gamma'(y)G(y|x)dy \tag{6.3}$$

Снова замечаем, что с ростом x падает подынтегральное выражение. Вывод: $E(\gamma(Y)|X=x)$ возрастает по x.

Теперь про ковариацию. Пусть $E(X)=m$. Тогда:

$$Cov(Y,X) = Cov(Y,X-m) = E(Y(X-m)) - E(Y)E(X-m) = \\ E(Y(X-m)) - E(Y)\cdot 0 = E(Y(X-m)) \tag{6.4}$$

Пользуемся условным способом расчета мат. ожидания 2.10:

$$E(Y\cdot(X-m)) = \int_0^1 E(Y(X-m)|X=x)f_X(x)dx = \int_0^1 E(Y|X=x)(x-m)f_X(x)dx \tag{6.5}$$

Теперь мы замечаем, что если бы не было сомножителя $E(Y|X=x)$ то интеграл бы равнялся нулю, т.к.

$$\int_0^1 (x-m)f_X(x)dx = E(X-m) = E(X) - m = 0 \tag{6.6}$$

А теперь глядим на функцию $(x-m)f_X(x)$. Сначала она отрицательна, затем положительна, суммарная площадь равна 0:

.... тут картинка

Поскольку $E(Y|X=x)$ возрастает по x, то холм растягивается сильнее, чем яма:

.... тут еще картинка.

Значит интересующий нас интеграл $\int_0^1 E(Y|X=x)(x-m)f_X(x)dx$ равный ковариации неотрицательный.

□

Нам потребуется изучать функцию $E(V_1|Y_1=y, X_1=x)$. Для краткости мы введем обозначение:

Определение 6.7.

$$v(x,y) = E(V_1|Y_1=y, X_1=x) \tag{6.8}$$

Самое время сделать упражнение 10

Теорема 6.9. *Если* X_1, ..., X_n *аффилированы, и* g *возрастает по всем аргументам, то* $E(g(X_1, ..., X_n|X_1 = x_1, X_2 = x_2)$ *возрастает по* x_1 *и* x_2.

Доказательство. Пропущено. Если будут желающие, то допишу. Интуитивно: с ростом x_1 растут условные средние остальных переменных в силу аффилированности, а с их ростом растет функция g. □

В частности из этой теоремы следует, что $v(x, y) = E(V_1|X_1 = x, Y_1 = y)$ возрастает по обоим аргументам.

Теперь у нас хватает сил, чтобы решить наши три аукциона в общем виде.

1.3 Решение трех аукционов

- Кнопочный аукцион.

  Если вы разобрались с примером кнопочного аукциона для трех игроков, то замена трех на n несложная. Запишем традиционные обозначения:

  – p_1,...,p_n — цены, на которых игроки покидают аукцион, упорядоченные по убыванию. Т.е., p_n — цена, на которой покинул аукцион самый слабый игрок, p_{n-1} — цена, на которой произошел второй выход. Заметим, что аукцион оканчивается на цене p_2, т.е. когда аукцион покидает предпоследний игрок. А p_1 — цена, до которой был готов идти победитель, она остается неизвестной.

  Стратегия описывается набором фукнций. Каждая функция говорит, до какого момента давить на кнопку, если моя ценность x и...

  – $b^n(x)$ — ... все n игроков в игре
  – $b^{n-1}(x, p_n)$ — ... в игре $(n - 1)$ игрок, а самый слабый вышел на p_n
  – $b^{n-2}(x, p_{n-1}, p_n)$ — в игре $(n-1)$ игрок, а самый слабый вышел на p_n, а следующий — при цене p_{n-1}
  – ...
  – $b^2(x, p_3, ..., p_n)$ — в игре 2 игрока, а выходы были на ценах p_n, ..., p_3.

  На кнопочном аукционе равновесие Нэша можно найти по алгоритму:

Шаг 1. В свою функцию ценности вместо всех сигналов подставляю x. Получаю: $b^n(x) = u(x, x, x, ..., x)$.

Шаг 2. Предполагаю, что остальные игроки поступили также. Если я вижу, что первый выход был на цене p_n, значит сигнал x_n вышедшего игрока можно найти из уравнения:

$$b^n(x_n) = p_n \tag{7.1}$$

Учитываю эту информацию в новой функции:

$$b^{n-1}(x, p_n) = u(x, x, ..., x, x_n) \tag{7.2}$$

Шаг 3. Предполагаю, что остальные игроки поступили также. Если я вижу, что второй выход был на цене p_{n-1}, значит сигнал x_{n-1} второго вышедшего можно найти из уравнения:

$$b^{n-1}(x_{n-1}, p_n) = p_{n-1} \tag{7.3}$$

Учитываю эту информацию в новой функции:

$$b^{n-2}(x, p_{n-1}, p_n) = u(x, x, ..., x, x_{n-1}, x_n) \tag{7.4}$$

Шаг i.

Шаг $(n-1)$. Предполагаю, что остальные игроки поступили также. Если я вижу, что $(n-2)$-ой по счету выход был на цене p_3, значит сигнал x_3 недавно вышедшего игрока можно найти из уравнения:

$$b^3(x_3, p_4, p_5, ..., p_n) = p_3 \tag{8.1}$$

Учитываю эту информацию в новой функции:

$$b^2(x, p_3, ..., p_{n-1}, p_n) = u(x, x, x_3, ..., x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \tag{8.2}$$

Замечаем, что при использовании этих стратегий игроки выходят в порядке возрастания сигналов X_i. По предположению, функция u возрастает по всем аргументам, значит $b^n(x)$ возрастает по x. Значит первым выходит игрок с наименьшим X_i. Поскольку p_n одинаково для всех остающихся игроков, функция $b^{n-1}(x, p_n)$ возрастает по x. Значит вторым выходит игрок с наименьшим X_i среди оставшихся в игре. И т.д. В частности, первый побеждает, только если его сигнал выше всех, т.е. $X_1 > Y_1$.

Остается доказать, что это — равновесие Нэша. Пусть все игроки кроме первого используют такие функции. Что произойдет, если первый не будет использовать предлагаемую стратегию, а захочет выиграть аукцион любой ценой?

В силу того, что игроки выходят в порядке возрастания X_i предпоследний игрок выйдет на цене $b^2(Y_1, p_3, ..., p_n)$. Т.к. он использует указанную стратегию:

$$b^2(Y_1, p_3, ..., p_n) = u(Y_1, Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_{n-1}) \tag{8.3}$$

Выигрыш первого игрока мы упрощаем воспользовавшись тем, что Y_i — это X_2,..., X_n в другом порядке:

$$u(X_1, X_2, ..., X_n) - u(Y_1, Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_{n-1}) = u(X_1, Y_1, Y_2, ..., Y_{n-1}) - u(Y_1, Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_{n-1}) \tag{8.4}$$

Функция u возрастает по первому аргументу, значит выигрыш положителен, если и только если $X_1 > Y_1$. Т.е. жать кнопку до выигрыша первому игроку следует если $X_1 > Y_1$. Но именно такой результат гарантирует предлагаемая стратегия. Значит она и дает нам равновесие Нэша.

- Аукцион первой цены.

  Мы стандартным путем получаем дифференциальное уравнение, которое является необходимым условием. Итак, пусть $b()$ — является равновесной стратегией. И пусть остальные игроки кроме первого ее используют.

При стандартных предположениях о функции $b()$ чудо-замена $b_1 = b(a)$ упрощает нам событие W_1 до $W_1 = \{Y_1 < a\}$:

$$\pi(x, b(a)) = E((V_1 - b(a))1_{Y_1<a}|X_1 = x) \tag{8.5}$$

Далее мы пользуемся способом расчета мат. ожидания через постановку условия 2.10. Дополнительное условие, которое мы используем — это условие по $Y_1 = y$:

$$\begin{aligned}\pi(x, b(a)) = \int_0^1 E((V_1 - b(a))1_{Y_1<a}|X_1 = x, Y_1 = y)g(y|x)dy = \\ = \int_0^a E((V_1 - b(a))|X_1 = x, Y_1 = y)g(y|x)dy = \int_0^a (v(x, y) - b(a))g(y|x)dy = \\ = \int_0^a v(x, y)g(y|x)dy - \int_0^a b(a)g(y|x)dy = \int_0^a v(x, y)g(y|x)dy - b(a)G(a|x)\end{aligned} \tag{8.6}$$

Берем производную по a:

$$\frac{\partial\pi(x, b(a))}{\partial a} = v(x, a)g(a|x) - b(a)g(a|x) - b'(a)G(a|x) = 0 \tag{9.1}$$

Первому игроку тоже должно быть оптимально использовать $b(x)$, значит $a = x$:

$$v(x, x)g(x|x) - b(x)g(x|x) - b'(x)G(x|x) = 0 \tag{9.2}$$

Наш диф. ур приобрел вид:

$$b'(x) = (v(x, x) - b(x))\frac{g(x|x)}{G(x|x)} = (v(x, x) - b(x))R(x|x) \tag{9.3}$$

Мы уже говорили, что из множества решений нам нужно выбрать то, которое удовлетворяет условию $b(0) = 0$. Давайте мы строго и в общем виде докажем, что это условие является достаточным.

Никаких секретов в решении линейных диф. уров первого порядка в 21 веке нет, поэтому мы не будем этого делать. Мы просто предъявим это решение. Желающием могут убедиться, что оно подходит и в диф. ур и к условию $b(0) = 0$.

Теорема 9.4. *На аукционе первой цены равновесная стратегия имеет вид:*

$$b(x) = \int_0^x v(y, y)\frac{R(y|y)}{exp(\int_x^y R(t|t)dt)}dy \tag{9.5}$$

Мы замечаем, что эта функция является возрастающей по x. Подынтегральное выражение положительное и растет с ростом x, да еще и предел интегрирования растет с ростом x. Поэтому упрощение W_1 до $Y_1 < a$ корректно.

Осталось доказать, что эта стратегия — действительно дает равновесие Нэша. Допустим все остальные используют ее.

Нам надо доказать не то, что производная прибыли равна 0, когда $a = x$ (это верно, т.к. наша $b(x)$ подходит в дифференциальное уравнение), а то, что знак производной меняется с плюса на минус, как и положено в максимуме.

Присмотримся повнимательнее к первой производной прибыли:

$$\frac{\partial\pi(x,b(a))}{\partial a} = v(x,a)g(a|x) - b(a)g(a|x) - b'(a)G(a|x) =$$
$$= (v(x,a)-b(a))g(a|x)-b'(a)G(a|x) = (v(x,a)-v(a,a)+v(a,a)-b(a))g(a|x)-b'(a)G(a|x) =$$
$$(v(x,a) - v(a,a))g(a|x) + (v(a,a) - b(a))g(a|x) - b'(a)G(a|x) \quad (9.6)$$

Функция $b()$ является решением дифференциального уравнения 9.3, поэтому $v(a,a)-b(a) = b'(a)/R(a|a)$:

$$\frac{\partial\pi(x,b(a))}{\partial a} = (v(x,a) - v(a,a))g(a|x) + \frac{b'(a)}{R(a|a)}g(a|x) - b'(a)G(a|x) =$$
$$(v(x,a) - v(a,a))g(a|x) + b'(a)g(a|x)\left(\frac{1}{R(a|a)} - \frac{1}{R(a|x)}\right) \quad (10.1)$$

1. Рассмотрим $a > x$. Во-первых, $v(x,a) < v(a,a)$ так как $v()$ возрастает по обоим аргументам. Во-вторых, $1/R(a|a) < 1/R(a|x)$ поскольку $R(a|x)$ возрастает по второму аргументу. Значит справа производная отрицательна.
2. Рассмотрим $a < x$. Во-первых, $v(x,a) > v(a,a)$ так как $v()$ возрастает по обоим аргументам. Во-вторых, $1/R(a|a) > 1/R(a|x)$ поскольку $R(a|x)$ возрастает по второму аргументу. Значит слева производная положительна.

Для последующего сравнения прибыли продавца нам потребуется функция выплат первого игрока. Вероятность того, что первый выиграет аукцион если его сигнал равен x равна $P(Y_1 < x|X_1 = x) = G(x|x)$. Поэтому:

$$pay^{FP}(x) = b^{FP}(x)G(x|x) \quad (10.2)$$

Здесь мы обозначили равновесную стратегию не как $b()$, а как $b^{FP}()$ т.к. она отличается от равновесной стратегии на других аукционах.

- Аукцион второй цены.

  При решении задач мы столкнулись с тем, что аукцион второй цены в каком-то смысле правдивый, т.е. ставить надо свою ценность. Когда ценность не совпадает с сигналом верен очень похожий результат:

  Теорема 10.3. *На аукционе второй цены равновесием Нэша будет набор стратегий:* $b(x) := v(x,x) = E(V_1|X_1 = x \cap Y_1 = x)$

  Доказательство. Пусть остальные игроки используют предлагаемую стратегию, а первый ставит b_1.

  $$\pi(x,b_1) = E((V_1 - b(Y_1))1_{W_1}|X_1 = x; Bid_1 = b_1) \quad (10.4)$$

  Как всегда, сделаем замену $b_1 = b(a)$, что упрощает нам W_1 до $W_1 = \{Y_1 < a\}$

  $$\pi(x,b(a)) = E((V_1 - b(Y_1))1_{Y_1<a}|X_1 = x) = E((V_1 1_{Y_1<a}|X_1 = x) - E(b(Y_1))1_{Y_1<a}|X_1 = x) \quad (10.5)$$

Отдельно считаем вычитаемое:

$$E(b(Y_1))1_{Y_1<a}|X_1 = x) = \int_0^a b(y)g(y|x)dy = \int_0^a v(y,y)g(y|x)dy \quad (10.6)$$

И применив к уменьшаемому формулу 3.1:

$$E((V_1 1_{Y_1<a}|X_1 = x) = \int_0^1 E(V_1 1_{Y_1<a}|X_1 = x \cap Y_1 = y)g(y|x)dy = \int_0^a E(V_1|X_1 = x \cap Y_1 = y)g(y|x)dy = \int_0^a v(x,y)g(y|x)dy \quad (10.7)$$

Значит:

$$\pi(x, b(a)) = \int_0^a (v(x,y) - v(y,y))g(y|x)dy \quad (11.1)$$

Если $y < x$, то величина $v(x,y) - v(y,y) > 0$ в силу того, что $v(x,y)$ возрастает по x. Мы хотим, максимизировать прибыль, т.е. мы хотим интегрировать до тех пор, пока подынтегральное выражение положительно. Т.е. оптимальное $a = x$. Остается заметить, что по предположению игрок делает ставку $b_1 = b(a)$. Но оптимальное $a = x$, значит оптимальная ставка равна $b(x)$.

□

Для последующего сравнения прибыли продавца нам потребуется функция выплат первого игрока:

$$pay^{SP}(x) = E(b(Y_1)1_{Y_1<x}|X_1 = x) = \int_0^x v(t,t)g(t|x)dt \quad (11.2)$$

1.4 Теорема о сравнении доходностей

Теорема 11.3. *Если:*

RC1. Сигналы X_i имеют регулярное на $[0;1]$ распределение

RC2. Сигналы X_i аффилированы

RC3. Игроки симметричны, в частности:

- *RC3a. Совместная функция плотности сигналов симметрична*
- *RC3b. Ценность игрока симметрична относительно сигналов других игроков.*

RC4. Ценность является возрастающей функцией от сигналов

То:

$$E(R^B) \geq E(R^{SP}) \geq E(R^{FP}) \quad (11.4)$$

Доказательство. Сначала докажем, что для продавца аукцион второй цены лучше, чем аукцион первой цены, $E(R^{SP}) \geq E(R^{FP})$.

Мы снова воспользуемся дифференциальным уравнением 9.3:

$$pay^{SP}(x) = \int_0^x v(y,y)g(y|x)dy = \int_0^x (v(y,y) - b^{FP}(y))g(y|x)dy + \int_0^x b^{FP}(y)g(y|x)dy = \\ = \int_0^x b'^{FP}(y)\frac{1}{R(y|y)}g(y|x)dy + \int_0^x b^{FP}(y)g(y|x)dy = \\ = \int_0^x b'^{FP}(y)\frac{R(y|x)}{R(y|y)}G(y|x)dy + \int_0^x b^{FP}(y)g(y|x)dy \geq \\ \geq \int_0^x b'^{FP}(y)G(y|x)dy + \int_0^x b^{FP}(y)g(y|x)dy \quad (11.5)$$

Последний переход верен в силу того, что $y < x$. Продолжаем:

А теперь долго и пристально смотрим на эти два интеграла и берем их в уме оба сразу:

$$\int_0^x b'^{FP}(y)G(y|x)dy + \int_0^x b^{FP}(y)g(y|x)dy = \\ \int_0^x b^{FP}(y)g(y|x) + b'^{FP}(y)G(y|x)dy = b^{FP}(x)G(y|x) = pay^{FP}(x) \quad (12.1)$$

Мы сравнили детерминистические функции выплат. А ожидаемый доход продавца связан с ними:

$$E(R) = n \cdot E(Pay_1) = n \cdot \int_0^1 pay(x)f(x)dx \quad (12.2)$$

Опять же мы применяем трюк с условным подсчетом мат. ожидания 2.10.

Теперь докажем, что для продавца кнопочный аукцион лучше, чем аукцион второй цены $E(R^B) \geq E(R^{SP})$.

Только для целей этого доказательства введем функцию $z(x,y) = E(u(Y_1, Y_1, ..., Y_{n-1})|X_1 = x, Y_1 = y)$. Напомню смысл: на кнопочном аукционе самый сильный игрок (за исключением первого) жмет кнопку до $u(Y_1, Y_1, ..., Y_{n-1})$. Именно столько заплатит первый, если выиграет аукцион. По теореме 6.9 функция $z(x,y)$ возрастает по обоим аргументам.

Сначала мы замечаем, что $v(y,y) = z(y,y)$:

$$v(y,y) = E(V_1|X_1 = y, Y_1 = y) = E(u(X_1, Y_1, ..., Y_{n-1})|X_1 = y, Y_1 = y) = \\ = E(u(Y_1, Y_1, ..., Y_{n-1})|X_1 = y, Y_1 = y) = z(y,y) \quad (12.3)$$

Если $x > y$, то $v(y,y) < z(x,y)$. А теперь считаем ожидаемую доходность продавца:

$$E(R^{SP}) = E(b^{SP}(Y_1)|X_1 > Y_1) = E(v(Y_1, Y_1)|X_1 > Y_1) \leq E(z(X_1, Y_1)|X_1 > Y_1) \quad (12.4)$$

Заметим, что в правой части написано мат. ожидание от условного мат. ожидания в случайной точке. Пользуясь идеей 2.10 мы видим, что:

$$E(z(X_1, Y_1)|X_1 > Y_1) = E(u(Y_1, Y_1, ..., Y_{n-1})|X_1 > Y_1) = E(R^B) \quad (12.5)$$

□

1.5 Задачи

1. Аукцион второй цены с резервной ставкой. Имеется n покупателей. Сигналы независимы и равномерны на $[0;1]$, $V_i = X_i$. Покупатели одновременно делают ставки. Если наибольшая ставка больше r, то игрок с максимальной ставкой получает товар. Если наибольшая ставка меньше r, то товар остается у продавца. Победитель платит продавцу максимум между второй по величине ставкой и r.

   (a) Найдите равновесие Нэша.

   (b) Найдите оптимальное r для продавца, если ценности равномерны на $[0;1]$.

2. Аукцион первой цены с резервной ценой r. Имеется n покупателей. Сигналы независимы и равномерны на $[0;1]$, $V_i = X_i$. Покупатели одновременно делают ставки. Если наибольшая ставка больше r, то игрок с максимальной ставкой получает товар. Если наибольшая ставка меньше r, то товар остается у продавца. Победитель платит продавцу свою ставку. Предполагаем, что r известна покупателям.

   (a) Найдите равновесие Нэша.

   (b) Найдите оптимальное r для продавца, если ценности равномерны на $[0;1]$.

3. Аукцион второй цены с платой за вход. Имеется n покупателей. Сигналы независимы и равномерны на $[0;1]$, $V_i = X_i$. Покупатели одновременно решают делать ли ставку, и если делать, то какую. Сделавший ставку платит w вне зависимости от того, победил ли он. Игрок с максимальной ставкой получает товар. Если ставок не было, то товар остается у продавца. Победитель платит продавцу вторую по величине ставкой. Если на аукцион вошел только один игрок, то он побеждает и ничего кроме платы за вход не платит.

   (a) Найдите равновесие Нэша.

   (b) Найдите оптимальное w для продавца, если ценности равномерны на $[0;1]$.

4. Аукцион первой цены с платой за вход. Имеется n покупателей. Сигналы независимы и равномерны на $[0;1]$, $V_i = X_i$. Покупатели одновременно решают делать ли ставку, и если делать, то какую. Сделавший ставку платит w вне зависимости от того, победил ли он. Игрок с максимальной ставкой получает товар. Если ставок не было, то товар остается у продавца. Победитель платит продавцу свою ставку.

   (a) Найдите равновесие Нэша.

   (b) Найдите оптимальное w для продавца, если ценности равномерны на $[0;1]$.

5. Верно ли, что $E(R)$ одинаково в аукционе первой и второй цены с резервной ценой?

6. Верно ли, что $E(R)$ одинаково в аукционе первой и второй цены с платой за вход?

7. Величины X_1, X_2 и X_3 независимы и равномерны на $[0;1]$. В аукционе второй цены участвуют два игрока: первый знает X_1, второй — X_2. Ценность товара общая, $V_1 = V_2 = X_1 + X_2 + X_3$. Найдите равновесие Нэша и ожидаемый доход продавца.

8. По аналогии с определением условной обратной функции риска дайте определение безусловной обратной функции риска, $R(x)$. Пусть X — случайная величина, показывающая время в часах, которое я трачу на написание одной лекции. Как можно проинтерпретировать $R(5) = 10$?

9. Автобусы приходят на остановку согласно пуассоновскому потоку с интенсивностью $\lambda = 6$ автобусов в час. Вася стоит некоторое время у остановки. Сколько в среднем автобусов приедет за это время? Какова вероятность, что не приедет ни одного автобуса? Рассмотрите два случая:

   (a) Вася стоит у остановки ровно 5 минут.

   (b) Вася стоит у остановки случайное время X (в минутах), независимое от времени прихода автобусов. Функция плотности X имеет вид $f(x) = \frac{x}{25}$ при $x \in [0; 10]$.

   Hint: В первом пункте вы не замечая того нашли $E(N|X = 5)$.

10. Найдите функции $g(x, y)$, $g(y|x)$, $G(y|x)$, $R(y|x)$ и $v(x, y)$ для случаев:

    (a) Сигналы независимы, равномерны на $[0; 1]$, $V_i = X_i$.

    (b) Три игрока. Сигналы независимы, равномерны на $[0; 1]$, $V_1 = X_1 + X_2X_3$.

    (c) Три игрока. Совместная функция плотности сигналов имеет вид $f(x_1, x_2, x_3) = 7/8 + x_1x_2x_3$ при $x_1, x_2, x_3 \in [0; 1]$, $V_1 = X_1 + X_2X_3$.

1.6 Решения задач

1. Аукцион второй цены с резервной ставкой.

   С помощью таблички доказываем, что игрокам оптимально говорить правду. Конечно, если ценность меньше r, то оптимально говорить любое число ниже r. Но правду оптимально говорить всегда.

   Первый игрок в среднем платит:

$$E(Pay_1) = r \cdot P(X_1 > r > Y_1) + E(Y_1 \cdot 1_{X_1 > Y_1 > r}) \tag{14.1}$$

   Совместная функция плотности X_1 и Y_1 имеет вид:

$$g(x, y) = (n - 1)y^{n-2} \tag{14.2}$$

   Значит первое слагаемое равно:

$$rP(X_1 > r > Y_1) = r \int_r^1 \int_0^r (n-1)y^{n-2}dydx = (1 - r)r^n \tag{14.3}$$

   И второе слагаемое равно:

$$E(Y_1 \cdot 1_{X_1 > Y_1 > r}) = \int_r^1 \int_r^x y \cdot (n-1)y^{n-2}dydx = \\ = (n-1)\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{\rho^n}{n} + \frac{\rho^{n+1}}{n+1}\right) \tag{14.4}$$

   Значит средняя выплата первого игрока равна:

$$E(Pay_1) = (1 - r)r^n + (n-1)\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{r^n}{n} + \frac{r^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{r^n}{n} - \frac{2r^{n+1}}{n+1} + \frac{n-1}{n(n+1)} \tag{14.5}$$

   Максимизируем по r находим, что $r^* = 0.5$.

2. Аукцион первой цены с резервной ставкой. Рассуждаем за 1-го игрока:

$$\pi_1(x, b_1) = (x - b_1)P(b_1 \geq \max\{b(Y_1), r\}) \tag{14.6}$$

Наша задача максимизировать эту функцию выбирая произвольное b_1.

Если $x < r$, то нам ничего не светит, оптимально не участвовать в аукционе, т.е. можно делать любую ставку меньше r. Если $x \geq r$, то оптимально участвовать в аукционе с некоторой ставкой $r \leq b_1 \leq x$. В частности, получаем, что $b(r) = r$.

Предположим, что $x \geq r$. Тогда целевая функция упростится до старой, без резервной цены!

$$\pi_1(x, b_1) = (x - b_1)P(b_1 \geq b(Y_1)) \tag{15.1}$$

Делаем вывод. Если $x \geq r$, то оптимальное $b_1(x)$ удовлетворяет старому дифференциальному уравнению.

Напомним, что старое уравнение было:

$$b'(x)x = (n-1)(x - b(x)) \tag{15.2}$$

И его решением было:

$$b(x) = cx^{1-n} + \frac{n-1}{n}x \tag{15.3}$$

На этот раз c надо искать из условия $b(r) = r$. Раньше, кстати, начальное условие было $b(0) = 0$. Отсюда находим $c = r^n/n$ и частное решение:

$$b(x) = \frac{r^n}{n}x^{1-n} + \frac{n-1}{n}x, \quad x \geq r \tag{15.4}$$

На всякий пожарный можно убедиться, что эта функция возрастает по x.

Ожидаемая выплата от первого игрока:

$$\begin{aligned} E(b(X_1)1_{X_1 \geq Y_1, X_1 \geq r}) = \int_r^1 \int_0^x b(x)g(x,y)dydx = \\ \int_r^1 b(x)\int_0^x g(x,y)dydx = \int_r^1 b(x)\int_0^x (n-1)y^{n-2}dydx = \\ \int_r^1 b(x)x^{n-1}dx = \frac{r^n}{n} - \frac{2r^{n+1}}{n+1} + \frac{n-1}{n(n+1)} \end{aligned} \tag{15.5}$$

Зависимость выплаты первого игрока от r такая же как на аукционе второй цены.

3. Аукцион второй цены с платой за вход.

Для начала заметим, что если игрок решил делать ставку, то ему оптимально делать ставку равную ценности. Доказательство стандартное, стратегия $b_1 = X_1$ нестрого доминирует все остальные. Осталось определить, при каких X_1 первому игроку лучше играть, а при каких — нет.

Предполагаем, что оптимальная стратегия имеет вид: если $x \geq \rho$, то делать ставку $b_1 = x$, если $x < \rho$, то не делать ставку. Предположим кроме того, что равновесные стратегии $b(x)$ возрастают по x при $x \geq \rho$.

Рассмотрим игрока с ценностью $x \geq \rho$ в равновесии Нэша. Какова вероятность того, что он выиграет аукцион? Поскольку $b(x)$ монотонно возрастает вероятность выигрыша по-прежнему:

$$q(x) = F^{n-1}(x), \quad x \geq \rho \tag{15.6}$$

Игрок с ценностью ρ должен быть безразличен между ставкой $b(\rho)$ и не участием в аукционе. Не участвуя в аукционе он получает ноль. Участвуя, он выиграет только если все остальные не участвуют, т.е. он выигрывает аукцион по нулевой цене. Значит условие безразличия имеет вид:

$$-w + \rho F^{n-1}(\rho) = 0 \tag{16.1}$$

Применительно к нашему случаю $F(x) = x$ получаем $\rho = w^{1/n}$.

Ожидаемая выплата от первого игрока равна:

$$E(Pay_1) = E(Y_1 1_{X_1 > Y_1 > \rho}) + wP(X_1 > \rho) = E(Y_1 1_{X_1 > Y_1 > \rho}) + w(1-\rho) \tag{16.2}$$

Первое слагаемое мы уже искали, см. **??**:

$$E(Y_1 1_{X_1 > Y_1 > \rho}) = (n-1)\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{\rho^n}{n} + \frac{\rho^{n+1}}{n+1}\right) \tag{16.3}$$

Складываем, и, как и раньше получаем:

$$E(Pay_1) = (n-1)\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{\rho^n}{n} + \frac{\rho^{n+1}}{n+1}\right) + \rho^n(1-\rho) =$$
$$= \frac{\rho^n}{n} - \frac{2\rho^{n+1}}{n+1} + \frac{n-1}{n(n+1)} \tag{16.4}$$

4. Аукцион первой цены с платой за вход.

   Предположим, что оптимальная стратегия имеет вид: Если $x \geq \rho$, то делать ставку $b(x)$; если $x < \rho$, то не делать ставку. Предположим, что эта $b()$ возрастающая при $x \geq \rho$. Как и на аукционе второй цены из этого следует, что вероятность выигрыша первого игрока при $x \geq \rho$ равна:

$$q(x) = F(x)^{n-1} = x^{n-1} \tag{16.5}$$

   Если $x = \rho$, то игроку должно быть безразлично, делать или не делать ставку. Если ему не безразлично, то значит ρ выбрано не оптимально. Ожидаемый выигрыш первого игрока при ценности ρ:

$$(\rho - b(\rho))F(\rho)^{n-1} - w = 0 \tag{16.6}$$

   Заметим, что $b(\rho) = 0$. Действительно, игрок с пороговой ценностью ρ может выиграть только если у остальных ценность ниже ρ, т.е. если остальные не участвуют. А при таком условии победы оптимально ставить $b(\rho) = 0$.

   Получаем такой же порог участия как на аукционе второй цены:

$$\rho = w^{1/n} \tag{16.7}$$

Рассматриваем случай $x \geq \rho$. В этом случае прибыль совпадает со старой. Мы получаем старое дифференциальное уравнение и старое решение:

$$b(x) = cx^{1-n} + \frac{n-1}{n}x \tag{16.8}$$

И начальное условие $b(\rho) = 0$. Получаем $c = \frac{1-n}{n}\rho^n$ и частное решение:

$$b(x) = \frac{n-1}{n}x(1 - \rho^n x^{-n}) \tag{16.9}$$

Считаем ожидаемый платеж первого игрока:

$$E(Pay_1) = E(b(X_1)1_{X_1 \geq Y_1, X_1 \geq \rho}) + \rho^n P(X_1 > \rho) \tag{17.1}$$

Первый интеграл:

$$E(b(X_1)1_{X_1 \geq Y_1, X_1 \geq \rho}) = \int_\rho^1 \int_0^x b(x)g(x,y)dydx =$$
$$\int_\rho^1 b(x)\int_0^x g(x,y)dydx = \int_\rho^1 b(x)\int_0^x (n-1)y^{n-2}dydx =$$
$$\int_\rho^1 b(x)x^{n-1}dx = (n-1)\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{\rho^n}{n} + \frac{\rho^{n+1}}{n+1}\right) \tag{17.2}$$

В сумме, как и раньше:

$$E(Pay_1) = \frac{\rho^n}{n} - \frac{2\rho^{n+1}}{n+1} + \frac{n-1}{n(n+1)} \tag{17.3}$$

5. Верно ли, что $E(R)$ одинаково в аукционе первой и второй цены с резервной ценой? Да.

6. Верно ли, что $E(R)$ одинаково в аукционе первой и второй цены с платой за вход? Да.

   Более того, можно заметить, что аукцион с резервной ценой r похож на аукцион с платой за вход $w = r \cdot F(r)^{n-1}$.

7. Можно воспользоваться теоремой **??** и сказать, что равновесная стратегия:

$$b(x) = E(V_1|X_1 = x, Y_1 = x) = E(X_1 + X_2 + X_3|X_1 = x, Y_1 = x) = x + E(X_2 + X_3|Y_1 = x) \tag{17.4}$$

   Внимание! Здесь есть небольшая ловушка! Игроков всего два! X_3 — это не сигнал от Природы третьему игроку! X_3 — это просто составляющая ценности неизвестная обоим игрокам. Поэтому здесь $Y_1 = X_2$, а не $Y_1 = \max\{X_2, X_3\}$. Остается вспомнить про независимость X_2 и X_3 и получить:

$$x + E(X_2 + X_3|Y_1 = x) = x + E(X_2 + X_3|X_2 = x) = x + x + E(X_3) = 2x + 0.5 \tag{17.5}$$

   Считаем ожидаемую выигрыш продавца:

$$E(R) = 2E(Y_2) + 0.5 = 2\int_0^1 y \cdot 2(1-y)dy + 0.5 = ... = \frac{7}{6} \tag{17.6}$$

8. Обратная функция риска: $R(x) = f(x)/F(x)$, где $f()$ — функция плотности, а $F()$ — функция распределения случайной величины X. Пусть X — случайная величина, показывающая время в часах, которое я трачу на написание одной лекции. Проинтерпретировать $R(5) = 10$ можно с помощью небольшой $\Delta = 0.01$ (одна сотая часа — это 36 секунд). Если известно, что прошло 5 часов после начала написания лекций, и я уже отдыхаю, то вероятность того, что я их окончил за только что истекшие 36 секунд примерно равна $R(5) \cdot \Delta = 0.1$.

9. Обозначим N — количество пришедших автобусов, а X — время, которое Вася наблюдал за остановкой.

   (a) Количество автобусов за x минут имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_x = 0.1x$, т.к. в среднем 6 автобусов в час, это в среднем 0.1 автобуса в минуту. $E(N|X = 5) = 0.5$

   (b)
$$E(N) = \int_0^{10} E(N|X = x)f(x)dx = \int_0^{10} 0.1x \cdot \frac{x}{25}dx = \frac{4}{3} \tag{18.1}$$

10. Найдите функции $g(x, y)$, $g(y|x)$, $G(y|x)$, $R(y|x)$ и $v(x, y)$ для случаев:

    (a) Сигналы независимы, равномерны на $[0; 1]$, $V_i = X_i$. Применяя метод о-малых находим:
$$g(x, y) = (n-1)y^{n-2} \tag{18.2}$$
$$g(y|x) = g(x, y)/f(x) = (n-1)y^{n-2} \tag{18.3}$$
$$G(y|x) = \int_0^y (n-1)t^{n-2}dt = y^{n-1} \tag{18.4}$$
$$R(y|x) = \frac{n-1}{y} \tag{18.5}$$
$$v(x, y) = E(X_1|X_1 = x, Y_1 = y) = x \tag{18.6}$$

    (b) Три игрока. Сигналы независимы, равномерны на $[0; 1]$, $V_1 = X_1 + X_2X_3$. Отличается только $v(x, y)$:
$$v(x, y) = E(X_1 + X_2X_3|X_1 = x, Y_1 = y) = x + E(X_2X_3|Y_1 = y) = \\ x + E(Y_1Y_2|Y_1 = y) = x + yE(Y_2|Y_1 = y) \tag{18.7}$$
    Здесь мы посчитаем интуитивно, а в следующем пункте — через интегралы. Итак: если я знаю, что Y_1, максимум из X_2 и X_3, равен y, то оставшаяся величина Y_2 где-то на отрезке $[0; y]$. Поскольку безусловное распределение было равномерным, то и условное будет равномерным. И условное среднее будет равно $y/2$. Т.е. $v(x, y) = x + y^2/2$.

    (c)
$$g(x, y) = 2! \cdot \int_0^y 7/8 + x \cdot y \cdot x_3 dx_3 = ... = \frac{7}{4}y + xy^3 \tag{18.8}$$

$$g(y|x) = \frac{g(x,y)}{f(x)} = \frac{\frac{7}{4}y + xy^3}{\int_0^1 \int_0^1 \frac{7}{8} + xx_2x_3dx_2dx_3} = ... = \frac{\frac{7}{4}y + xy^3}{\frac{7}{8} + \frac{x}{4}} = \frac{14y + 8xy^3}{7 + 2x} \quad (18.9)$$

Интегрируя находим:

$$G(y|x) = \int_0^1 g(t|x)dt = ... = \frac{7y^2 + 2xy^4}{7 + 2x} \quad (18.10)$$

И взяв отношение:

$$R(y|x) = \frac{g(y|x)}{G(y|x)} = \frac{14y + 8xy^3}{7y^2 + 2xy^4} = \frac{14 + 8xy^2}{7y + 2xy^3} \quad (19.1)$$

Аналогично предыдущему пункту:

$$v(x,y) = ... = x + yE(Y_2|Y_1 = y) \quad (19.2)$$

Находим совместную функцию плотности X_2 и X_3:

$$f(x_2, x_3) = \int_0^1 7/8 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 dx_1 = \frac{7}{8} + \frac{1}{2}x_2x_3, \quad x_2, x_3 \in [0;1] \quad (19.3)$$

Из этого сразу следует совместная функция плотности для Y_1 и Y_2:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = 2!f(y_1, y_2) = \frac{7}{4} + y_1y_2, \quad 0 < y_2 < y_1 < 1 \quad (19.4)$$

И функцию плотности для Y_1:

$$f_{Y_1}(y_1) = 2!\int_0^{y_1} f(y_1, x_3)dx_3 = ... = \frac{7}{4}y_1 + \frac{1}{2}y_1^3 \quad (19.5)$$

Далее находим условную функцию плотности:

$$f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1) = \frac{f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)}{f_{Y_1}(y_1)} = \frac{\frac{7}{4} + y_1y_2}{\frac{7}{4}y_1 + \frac{1}{2}y_1^3}, \quad 0 < y_2 < y_1 < 1 \quad (19.6)$$

И условное ожидание:

$$E(Y_2|Y_1 = y) = \int_0^y y_2 \frac{\frac{7}{4} + yy_2}{\frac{7}{4}y + \frac{1}{2}y^3} dy_2 = \frac{8\,y^4 + 21\,y^2}{6\,(2\,y^3 + 7\,y)} \quad (19.7)$$

И, наконец,

$$v(x,y) = x + \frac{8\,y^4 + 21\,y^2}{6\,(2\,y^2 + 7)} \quad (19.8)$$