Моделирование аукционов. Азбука.

Борис Демешев

24 марта 2011 г.

Содержание

1 Аукционы бывают разные и эквивалентность доходности

Что почитать:

Базовый текст: IAT, chapter 3. В IAT поначалу автор использует обозначение v_i для ценностей, а потом меняет обозначение на X_i. Мы сразу будем использовать X_i.

1.1 Три аукциона и три модели

- Английский аукцион. Именно этот аукцион описан в «12 стульях» Ильфа и Петрова. Игроки по очереди называют ставки. Каждая последующая ставка должна быть больше, чем предыдущая. Товар достается тому, кто назвал наибольшую цену. Победитель платит за товар столько, сколько он сам поставил[1] . По этому принципу устроен самый крупный современный он-лайн аукцион товаров в Интернете, Ebay, http://www.ebay.com/.

- Голландский аукцион цветов. Большинство цветов продающихся в России были куплены на аукционе цветов в Голландии. Этот традиционный аукцион отличается от английского. Потенциальные покупатели цветов сидят в общем зале. Перед ними на стене — большие часы с одной стрелкой. Стрелка показывает текущую цену товара. Изначально цена высока и никто не хочет покупать. С движением стрелки цена опускается. Наступит момент, когда одного из покупателей цена наконец устроит. Он получает товар и платит соответствующую цену.

- Интернет-реклама. Когда пользователь набирает в поисковике (в Яндексе, Гугле или любом другом) какое-нибудь слово, к примеру «ГУ-ВШЭ», поисковик выдает найденные страницы и рекламные ссылки. Естественно, рекламодатели платят за то, что

[1]Про оплату комиссионого сбора в 12 стульях мы, конечно, помним.

поисковик показывает их рекламные ссылки. Более того, рекламные ссылки продаются на аукционе! Представим себе, что поисковик продает одно рекламное место. Желающие рекламодатели независимо друг от друга направляют свои заявки: «я готов платить за него 5 копеек за клик», «я готов платить 10 копеек за клик», «я готов платить 7 копеек за клик». Побеждает, естественно, тот, кто готов платить больше других. Но платит он не ту сумму, которую заявил в своей заявке! Победитель платит вторую по величине ставку! В нашем примере с тремя заявкам рекламное место достается тому, кто был готов платить 10 копеек за клик, но платить он будет 7 копеек за клик. В реальности все чуть сложнее. Например, рекламных мест может быть несколько, тогда тот, кому досталось второе по притягательности место платит ставку того, кому досталось третье. Гугл продает свои рекламные ссылки на adwords.google.com.

Этим трем реальным примерам мы сопоставим три простых модели.

Общее между тремя моделями:

На аукционе продается единица неделимого товара, скажем одна морковка. За право получить морковку борятся n покупателей. Для i-го покупателя морковка имеет некую ценность X_i. Ставку i-го покупателя будем обозначать b_i (b от слова bid).

1. Кнопочный аукцион. У каждого покупателя есть кнопка. Стартовая цена равна нулю. Изначально все покупатели давят на свои кнопки. Затем цена начинает расти. Как только игрок отпускает свою кнопку, он покидает аукцион. Аукцион прекращается, когда остается лишь один игрок, жмущий на кнопку. Товар достается этому игроку по цене, сложившейся на момент остановки.

   Эта модель является упрощением реального английского аукциона. В реальности часто бывает, что игроки начинают активно играть лишь незадолго до окончания аукциона. Эта модель не предназначена для описания такого явления. В реальности игроки могут повышать текущую цену на произвольную величину, здесь же цена меняется непрерывно. Тем не менее, многие свойства английского аукциона кнопочная модель ловит.

2. Аукцион первой цены. Покупатели одновременно делают свои ставки. Товар достается тому покупателю, который назвал самую высокую цену. Победитель платит продавцу свою ставку.

   Такой аукцион лучше всего подходит для моделирования голландского аукциона. Действительно, никакой другой информации, кроме того, по чем был продан товар ни один из игроков не получает.

3. Аукцион второй цены. Покупатели одновременно делают свои ставки. Товар достается тому покупателю, который назвал самую высокую цену. Победитель платит продавцу вторую по величине ставку, т.е. наибольшую ставку сделанную покупателями за исключением его самого.

   Эта модель хорошо подходит для аукциона интернет-рекламы с одним рекламным местом.

Чтобы разграничить реальность и модели, мы будем использовать слова «Английский аукцион», «Голландский аукцион» для описания реальных явлений, а слова «аукцион первой цены», «аукцион второй цены», «кнопочный аукцион» — для описания моделей.

А теперь давайте найдем оптимальные стратегии игроков и средний доход продавца в трех моделях:

1.2 Поиск оптимальных стратегий

Для поиска оптимальной стратегии нужно сделать какие-то предположения о ценностях X_i. Начнем с самого простого случая: ценности X_i будут независимыми и равномерными на $[0;1]$ случайными величинами. Мы ограничимся поиском симметричного равновесия, т.е. равновесия, где все игроки используют одинаковую стратегию. Фактические ставки при этом могут отличаться! Стратегия — это функция $b()$ от ценности, и даже если эти фукнции $b()$ одиковые, величины $b(X_i)$ будут разными в силу того, что ценности X_i будут разными.

До начала игры игроки ничем не отличаются: у них одинаковый закон распределения ценности товара, поэтому при анализе мы будем изучать поведение первого игрока.

Введем также обозначения Y_1, Y_2, ..., Y_{n-1} — это величины X_2, X_3, ..., X_n, отсортированные в порядке убывания. В частности, $Y_1 = \max\{X_2, ..., X_n\}$ — наибольшая ставка сделанная всеми игроками кроме первого. Также, $Y_{n-1} = \min\{X_2, ..., X_n\}$.

Поехали!

1. Аукцион первой цены.

   Предположим, что есть некая равновесная стратегия $b(x)$. Предположим также, что она дифференциируема и возрастает по x.

   Первый игрок выигрывает, если его ставка больше всех остальных, т.е. $b_1 > Bid_i$ для $i \geq 2$. Обозначим событие, состоящее в том, что первый игрок выиграл буквой W_1. Его ожидаемый выигрыш равен:

$$\pi_1(x, b_1) = (x - b_1)P(W_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1) \tag{3.1}$$

   Вероятность:

$$P(W_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1) = P(b_1 > Bid_2 \cap b_1 > Bid_3 \cap \ldots \cap b_1 > Bid_n \tag{3.2}$$

   Наша задача найти равновесие Нэша, т.е. такую ситуацию, когда использование стратегии $b(x)$ является наилучшим действием, если остальные игроки используют такую же стратегию. Поэтому мы предположим, что все игроки кроме первого используют стратегию $b(x)$, и найдем условие при котором первому тоже выгодно ее использовать.

$$P(W_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1) = P(b_1 > b(X_2) \cap b_1 > b(X_3) \cap \ldots \cap b_1 > b(X_n)) \tag{3.3}$$

   В силу независимости случайныйх величин X_i:

$$P(W_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1) = P(b_1 > b(X_2))P(b_1 > b(X_3)) \ldots P(b_1 > b(X_n)) \tag{3.4}$$

   В силу одинакового закона распределения X_i:

$$P(W_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1) = P(b_1 > b(X_2))^{n-1} \tag{3.5}$$

   Далее следует начало красивого трюка! Надеюсь все вы понимаете как делать замену переменных при решении задач. Входит, скажем, в уравнение переменная k, а мы говорим, что вместо k мы будем писать $f(m)$. Или наоборот, входит в уравнение

$f(m)$, а мы говорим, что вместо $f(m)$ будем писать k. Так вот сейчас мы сделаем замену. Мы заменим b_1 на неизвестную (!) функцию!!!

Итак, мы делаем замену $b_1 := b(a)$. С помощью этой замены мы упростим вероятность:

$$P(b_1 > b(X_2))^{n-1} = P(b(a) > b(X_2))^{n-1} = P(a > X_2)^{n-1} = P(X_2 < a)^{n-1} = F(a)^{n-1} \tag{3.6}$$

На всякий случай: $F(a) = P(X_i < a)$ — это функция распределения.

И наша прибыль имеет вид:

$$\pi_1 = (x - b(a))(F(a))^{n-1} \tag{4.1}$$

Вместо максимизации по b_1 нам придется максимизировать по a. Для нахождения оптимальной стратегии первого игрока приравниваем производную по a к нулю:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial a} = -b'(a)(F(a))^{n-1} + (x - b(a))(n-1)F(a)^{n-2}f(a) = 0 \tag{4.2}$$

После упрощения:

$$-b'(a)F(a) + (x - b(a))(n-1)f(a) = 0 \tag{4.3}$$

Завершение красивого трюка! Мы хотим потребовать, чтобы первому игроку тоже было оптимально использовать стратегию $b()$. Ценность товара для первого игрока мы обозначили x, значит оптимальное b_1 должно равняться $b(x)$. А мы делали замену $b_1 = b(a)$. Значит в точке оптимума $b(x) = b(a)$ или $x = a$.

$$-b'(x)F(x) + (x - b(x))(n-1)f(x) = 0 \tag{4.4}$$

Это дифференциальное уравнение можно решить в общем виде, но мы ограничимся нашим равномерным случаем.

Для равномерной случайной на отрезке $[0; 1]$ получаем $f(x) = 1$ и $F(x) = x$:

$$-b'(x)x + (x - b(x))(n-1) = 0 \tag{4.5}$$

Это линейное дифференциальное уравнение... Его можно решить стандартными методами, скажем, вариацией постоянной, а можно угадать вид решения. Мы пойдем путем угадывания, но я предполагаю, что все могут решить его честно! Раз фигурирует производная и первая степень x, попробуем $b(x) = kx + m$:

$$-kx + (x - kx - m)(n-1) = 0 \tag{4.6}$$

Собираем коэффициенты при x:

$$-m(n-1) + x(-k + (1-k)(n-1)) = 0 \tag{4.7}$$

Это должно быть тождеством для любого x, значит $m = 0$ и $-k + (1-k)(n-1) = 0$. Находим k, $k = \frac{n-1}{n}$.

Оптимальная стратегия первого, а заодно и всех остальных игроков: $b(x) = \frac{n-1}{n}x$.

Комментарии:

(a) Т.к. $\frac{n-1}{n} < 1$ игроки занижают свою истинную ценность в равновесии Нэша. Причем, чем меньше игроков, тем сильнее занижаются ставки по сравнению с субъективной ценностью товара.

(b) Можно обойтись без красивого трюка. Для этого можно рассмотреть функцию, обратную к функции $b()$ и применить ее внутри вероятности.

(c) В равномерном случае можно обойтись и без дифференциальных уравнений. Для этого достаточно сделать удачную догадку до начала решения. Т.е. начать со слов: предположим, что оптимальная стратегия имеет вид $b(x) = kx + m$ и максимизировать по k и m.

(d) Тот, кто попробует честно решить линейное дифференциальное уравнение, обнаружит, что общее решение имеет вид $b(x) = c \cdot x^{-(n-1)} + \frac{n-1}{n}x$. Почему мы берем $c = 0$? Потому, что стратегия игрока должна быть определена при любых $x \in [0;1]$, в частности при $x = 0$. А за исключением случая $c = 0$ общее решение не определено при $x = 0$.

Пример 5.1. Решение «в лоб», без чудо-подстановки.

Начнем с того, что прибыль представима в виде:

$$\pi(x, b_1) = (x - b_1)P(b(X_2) < b_1)^{n-1} \tag{5.2}$$

По нашим предположениям функция $b()$ строго возрастает, значит у нее есть обратная. Обозначим ее $b^{-1}()$:

$$\pi(x, b_1) = (x - b_1)P(X_2 < b^{-1}(b_1))^{n-1} = (x - b_1)F(b^{-1}(b_1))^{n-1} \tag{5.3}$$

Берем производную по b_1:

$$\frac{\partial \pi(x, b_1)}{\partial b_1} = -F(b^{-1}(b_1))^{n-1} + (x - b_1)(n-1)F(b^{-1}(b_1))^{n-2} f(b^{-1}(b_1)) \cdot \frac{db^{-1}(b_1)}{db_1} = 0 \tag{5.4}$$

Отсюда как-то неявно выражается b_1 как функция от x. Но мы на самом деле знаем ответ! Мы уже предположили, что ситуация, когда все игроки используют функцию $b()$ — это NE. Значит если все игроки кроме первого используют $b()$, то и первому игроку оптимально ее использовать! Значит решением должно являться $b_1 = b(x)$. Поэтому при подстановке $b_1 = b(x)$, должно получаться тождество верное при любых x.

При подстановке $b_1 = b(x)$ величина $b^{-1}(b_1)$ превращается в x. Собственно, это и есть a при чудо-замене... Получаем дифференциальное уравнение:

$$-F(x)^{n-1} + (x - b(x))(n-1)F(x)^{n-2} f(x) \left. \frac{db^{-1}(b_1)}{db_1} \right|_{b_1 = b(x)} = 0 \tag{5.5}$$

Сокращаем F^{n-2}:

$$-F(x) + (x - b(x))(n-1)f(x)\left.\frac{db^{-1}(b_1)}{db_1}\right|_{b_1=b(x)} = 0 \tag{5.6}$$

Остается вспомнить, что производная обратная функции — это единица делить на производную исходной функции и наше уравнение сопадает с 4.4.

2. Аукцион второй цены. Раз все игроки одинаковые, ограничимся рассмотрением первого игрока. Результат аукциона для него зависит от его собственной ставки и от максимальной ставки остальных игроков. Ценность товара для первого игрока у нас обозначена X_1. Обозначим максимальную ставку остальных игроков — m. Величину X_1 игрок знает, а m — нет. В наших обозначениях $m = b(Y_1)$, но это не существенно.

   Сравним две стратегии первого игрока: $b_1 = X_1$, $b_1 = X_1 + \Delta$. Числа X_1 и $X_1 + \Delta$ разбивают числовую прямую на три интервала. Неизвестное m попадет в один из этих трех интервалов. Запишем выигрыш первого игрока в табличку. Если $b_1 < m$, то он ничего не платит и не получает товар. Если $b_1 > m$, то игрок получает товар ценностью X_1 и платит m:

	$m \in (-\infty; X_1)$	$m \in (X_1; X_1 + \Delta)$	$m \in (X_1 + \Delta; +\infty)$
$b_1 = X_1$	$X_1 - m$	0	0
$b_1 = X_1 + \Delta$	$X_1 - m$	$X_1 - m$	0

   Мы видим, что в двух случаях из трех стратегии приносят одинаковый выигрыш. Различие есть только если $m \in (X_1; X_1 + \Delta)$. Стратегия $b_1 = X_1$ приносит нулевой выигрыш, а стратегия $b_1 = X_1 + \Delta$ приносит выигрыш $X_1 - m < 0$. Значит стратегия b_1 нестрого доминирует любую стратегию вида $b_1 = X_1 + \Delta$ при $\Delta > 0$. Делать ставку выше своей ценности не выгодно!

   Аналогично сравним стратегии $b_1 = X_1$ и $b_1 = X_1 - \Delta$:

	$m \in (-\infty; X_1 - \Delta)$	$m \in (X_1 - \Delta; X_1)$	$m \in (X_1; +\infty)$
$b_1 = X_1$	$X_1 - m$	$X_1 - m$	0
$b_1 = X_1 - \Delta$	$X_1 - m$	0	0

   На этот раз разница в выигрышах возникает если $m \in (X_1 - \Delta; X_1)$. Стратегия $b_1 = X_1$ приносит выигрыш $X_1 - m > 0$. Значит стратегия b_1 нестрого доминирует любую стратегию вида $b_1 = X_1 - \Delta$ при $\Delta > 0$.

   Вывод. Существует равновесие Нэша, в котором все игроки используют стратегию $b(x) = x$, т.е. правдиво декларируют свои ценности.

   Заметим, что в наших рассуждениях нигде не использовалось равномерность распределения X. Значит наше рассуждение проходит для любого непрерывного закона распределения X.

   Почему только для непрерывного? Надеюсь, кто-нибудь обратил внимание, что интервалы для m были открытые, мы не рассматривали случай, когда m идеально точно попадает в его границу. Если распределение ценностей непрерывно, то вероятность того, что m будет равняться конкретному числу равна нулю. Исключив эти случаи из рассмотрения мы не изменили ожидаемую прибыль первого игрока, а значит не изменили его оптимальную стратегию.

   В случае дискретного распределения доходностей очень важным становится правило, согласно которому распределяется товар, если ставки совпали. В непрерывном случае вероятность совпадения ставок равна нулю, и никакое правило распределения товара при «ничьей» не влияет на оптимальные стратегии.

3. Кнопочный аукцион.

   Снова рассмотрим первого игрока. Если он видит,например, что другие игроки долго давят свои кнопки, он может сделать вывод, что их ценности товара высоки. Наблюдая за другими, он получает информацию о них, но не о себе! Его ценность не зависит от их ценностей! Ситуция резко изменится, когда мы будем рассматривать зависимые ценности в следующих лекциях. А пока наблюдение за другими не дает нашему игроку никакой полезной информации, кроме того, остался ли он уже один в игре, или еще нет.

   Естественно, как только игрок остался один в игре, победитель сразу определен. Значит стратегия игрока не зависит, от того, сколько еще игроков осталось кроме него. Еще двое или трое, или семеро — никакой разницы. Значит еще до начала аукциона, узнав свою ценность X, игрок может уже спланировать свои действия: «я буду давить на кнопку до тех пор, пока цена не дойдет до некоей цены b или пока я не выиграю аукцион.»

   Итак, действия игрока описывается его числом b_i. Представим теперь, что игроки просто пишут свои b_i на бумажках, а на кнопки давят роботы, согласно этим b_i. Кто победит на аукционе? Победит тот, кто написал наибольшее b_i. А сколько он заплатит? Он заплатит вторую по величине b_i!

   Получается, что при независимых ценностях, кнопочный аукцион полностью эквивалентен аукциону второй цены. А его мы уже решали. Оптимальная стратегия: $b(x) = x$.

   Когда ценности будут коррелированы, кнопочный аукцион будет отличаться от аукциона второй цены.

Чтобы не повторяться давайте введем для целей наших лекций:

Определение 7.1. Закон распределения случайной величины X назовем **регулярным**, если существуют такие числа a и b, что функция распределения F строго возрастает и непрерывна на $[a; b]$, $F(a) = 0$ и $F(b) = 1$.

Мы в этом курсе всегда будем рассматривать регулярное распределение на $[0; 1]$. Это нисколько нас не ограничивает, т.к. вопрос выбора начала и конца отрезка — это вопрос выбора масштаба, в котором измеряются денежные суммы. Может быть «один» — это один миллион рублей. Зато обозначения становятся проще.

Теорема 7.2. *Теорема об одинаковой доходности. Revenue equivalence theorem.*
Если:

RE1. *На аукционе выставлен один товар*

RE2. *За право получить товар торгуются n игроков*

RE3. *Ценности товара для разных игроков одинаково распределенны и независимы*

RE4. *Ценности имеют регулярное распределение на отрезке $[0; 1]$*

RE5. *В равновесии товар достается тому игроку, для которого он ценнее всего*

RE6. В равновесии средний выигрыш игрока с минимальной ценностью (у нас с ценностью 0) равен 0

RE7. Покупатели нейтральны к риску

То:
Средний доход продавца не зависит от конкретного механизма проведения аукциона

Доказательство. Доказательство состоит из трех шагов. Двух простых и третьего, позапутаннее, — связанного с теоремой об огибающей...

Шаг 1. Рассмотрим игрока с ценностью x. Какова вероятность того, что он выиграет аукцион? Из требования RE5 следует, что это вероятность того, что ценность остальных игроков ниже x. Применяя требования RE1-RE4 получаем, что искомая вероятность, обозначим ее $q(x)$, равна

$$q(x) = F(x)^{n-1}$$

Шаг 2. Заметим, что средняя выручка продавца — это сумма средних платежей всех игроков.

Шаг 3. Оказывается, что средний платеж игрока однозначно выводится из вероятности, упомянутой в шаге 1 и условия RE6. А именно, вот-вот мы докажем, что средняя выплата игрока определяется по формуле:

$$pay(x) = xq(x) - \int_0^x q(t)dt \tag{8.1}$$

Доказательство на самом деле занимает две или три строчки, но перед ними нужно ввести кучу обозначений. Итак...

Мы выбрали конкретного игрока. Рассмотрим ситуацию, в которой остальные игроки используют равновесные стратегии. Вероятность того, что наш игрок выиграет аукцион зависит только от его ставки b, так как стратегии остальных зафиксированы. Обозначим ее $\widehat{q}(b)$. Если игрок выигрывает аукцион, то он что-то платит, причем не обязательно свою ставку! Если не выигрывает, то ничего не платит. Среднее значение этого платежа опять же зависит только от его ставки b, обозначим его $\widehat{pay}(b)$.

Средний выигрыш игрока, тогда определяется по формуле:

$$\pi(x, b) = x\widehat{q}(b) - \widehat{pay}(b) \tag{8.2}$$

У игрока есть равновесная стратегия $b(x)$, которая по определению равновесия Нэша, является наилучшим ответом на действия других игроков.

При подстановке этой наилучшей стратегии $b(x)$ вместо b мы получаем определения трех новых функций:

$$q(x) := \widehat{q}(b(x))$$

$$pay(x) = \widehat{pay}(b(x))$$

$$\pi^*(x) = \pi(x, b(x)) = xq(x) - pay(x)$$

Для ясности: единственная разница между функциями $\widehat{q}()$ и $q()$ состоит в том, что первая зависит от ставки, а вторая — от ценности. Повесив на стену столько ружей, пора стрелять!

Находим производную:

$$\frac{d\pi^*(x)}{dx} = \frac{d\pi(x, b(x))}{dx} = \frac{\partial\pi}{\partial x} + \frac{\partial\pi}{\partial b}\frac{db}{dx} \tag{8.3}$$

А теперь вспомним, что оптимальная стратегия $b(x)$ находится из условия $\frac{\partial\pi}{\partial b} = 0$. Значит:

$$\frac{d\pi^*(x)}{dx} = \left.\frac{\partial\pi}{\partial x}\right|_{b=b(x)} \tag{9.1}$$

Это, между нами говоря, была теорема об огибающей. Упрощаем производную:

$$\left.\frac{\partial\pi(x, b)}{\partial x}\right|_{b=b(x)} = \widehat{q}(b)|_{b=b(x)} = q(x) \tag{9.2}$$

Вот и все! Кстати, это имеет легкую смысловую интерпретацию. Частная производная говорит нам, что случится с ожидаемым выигрышем, если мы будем менять ценность x, но не будем менять стратегию b. Не меняя стратегию мы не влияем на вероятность выигрыша и на наш средний платеж организаторам аукциона. Естественно, мы должны получить вероятность выигрыша.

Осталось записать это в интегральной форме:

$$\pi^*(x) = \pi^*(0) + \int_0^x q(t)dt \tag{9.3}$$

Условие RE6 говорит, что $\pi^*(0) = 0$ и мы можем увидеть, что:

$$xq(x) - pay(x) = \int_0^x q(t)dt \tag{9.4}$$

Что и требовалось доказать. □

Примечания.

1. Теорема говорит только о равенстве среднего дохода. Она не говорит, что доход продавца при данных конкретных ценностях покупателей не зависит от формы аукциона.

2. Теорема не говорит, что равновесие, в котором игрок с наивысшей ценностью получает товар, существует. Она, наоборот, опирается на существование такого равновесия: если такое равновесие есть, то средний доход продавца не зависит от формы проведения аукциона. Поэтому использовать теорему нужно аккуратно.

   Если в аукционе товар достается тому, кто сделал наибольшую ставку, то часто помогает такая цепочка рассуждений: Предположим, что равновесие, где товар достается игроку с наибольшей ценностью есть. Тогда мы можем использовать теорему. Она нам поможет (сейчас мы на примере это увидим) найти равновесную стратегию. Затем мы проверяем, что эта равновесная стратегия $b(x)$ является возрастающей функцией по X. И мы подобно барону Мюнхаузену вытащили сами себя за волосы! Если по правилам аукциона товар достается сделавшему наибольшую ставку, а наибольшая ставка соответствует наибольшей ценности, значит теорему можно было применять!

Наши три модели удовлетворяют условиям теоремы, поэтому средний доход продавца в них одинаковый:

$$E(R^B) = E(R^{FP}) = E(R^{SP})$$

Средний доход продавца равен n умножить на среднюю выплату от первого игрока продавцу, поэтому воспользуемся формулой для средней выплаты от игрока продавцу:

$$pay(x) = xq(x) - \int_0^x q(t)dt$$

При равномерном распределении ценностей, т.е. $q(x) = F(x)^{n-1} = x^{n-1}$:

$$pay(x) = \frac{n-1}{n}x^n \tag{10.1}$$

Воспользуемся равномерностью второй раз:

$$E(pay(X_1)) = E(\frac{n-1}{n}X_1^n) = \frac{n-1}{n}\int t^n dt = \frac{n-1}{n(n+1)} \tag{10.2}$$

Умножаем на n и получаем:

$$E(R^B) = E(R^{FP}) = E(R^{SP}) = \frac{n-1}{n+1} \tag{10.3}$$

А сейчас мы с помощью этой теоремы в два счета получим решение аукциона первой цены не только для равномерного случая.

Пример 10.4. Решение аукциона первой цены для случай произвольного регулярного распределения ценностей. Предположим, что есть некое равновесие, и теорему об одинаковой доходности можно применять.

На аукционе первой цене средний платеж игрока равен его ставке помноженной на вероятность выигрыша:

$$pay(x) = b(x)q(x) \tag{10.5}$$

Таким образом уравнение 8.1 имеет вид:

$$xq(x) - b(x)q(x) = \int_0^x q(t)dt \tag{10.6}$$

Отсюда мы находим оптимальную стратегию:

$$b(x) = x - \frac{\int_0^x q(t)dt}{q(x)} \tag{10.7}$$

Напомним, что условия RE1-RE5 говорят нам, что $q(x) = F(x)^{n-1}$. Это и есть решение аукциона первой цены для произвольной регулярной F.

Остается проверить, что теорему можно было применять! Берем производную $\frac{db(x)}{dx}$ и убеждаемся, что она строго положительна!

Убедитесь кстати, что при подстановке $F(t) = t$ на $[0;1]$ мы получаем наш результат для равномерно распределенных ценностей.

1.3 Пример с коррелированными ценностями

Сравним на примере доходы аукциона первой и второй цены при коррелированных ценностях.

В аукционе участвуют два игрока. Предположим, что совместная функция плотностей на множестве $x_1, x_2 \in [0; 1]$ имеет вид:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \tag{11.1}$$

Наша задача найти равновесие Нэша для аукциона первой и для аукциона второй цены, а также среднюю выручку продавца.

1. Аукцион первой цены. Считаем ожидаемый выигрыш первого игрока, если его ценность равна x, а ставит он b_1. Отличие от формулы 3.1 состоит в том, что знание x содержит в себе информацию о ценности, и следовательно, ставке, второго игрока. Поэтому мы используем условную вероятность:

   $$\pi_1(x, b_1) = (x - b_1)P(b_1 > Bid_2 | X_1 = x) \tag{11.2}$$

   Предположим, что существует симметричное равновесие Нэша, в котором все игроки делают ставки согласно функции $b(x)$. Предположим, что эта функция дифференцируема и возрастает по x.

   Снова рассмотрим ситуацию, в которой все игроки кроме первого используют функцию $b()$ для своих ставок и найдем оптимальное поведение первого игрока. В нашем частном случае «все остальные» — это только второй игрок. Т.е. $Bid_2 = b(X_2)$.

   Снова сделаем магическую замену b_1 на пока неизвестную функцию $b(a)$. В силу предположения о возрастании $b(x)$ условие $b(a) > b(X_2)$ равносильны тому, что $a > X_2$.

   После магической подстановки наша прибыль имеет вид:

   $$\pi_1 = (x - b(a))P(a > X_2 | X_1 = x) \tag{11.3}$$

   Чтобы брать производную по a вспомним немного теорию вероятностей:

   Из совместной функции плотности $f(x_1, x_2)$ можно получить:

   Сначала частную функцию плотности X_1:

   $$f_{X_1}(x_1) := \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_2 \tag{11.4}$$

   В нашем случае (интеграл берите сами) $f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{2} + x_1$.

   А затем и условную функцию плотности по принципу:

   $$f(x_2 | x_1) := \frac{f(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)} \tag{11.5}$$

   В нашем случае получаем $f(x_2|x_1) = \frac{x_1 + x_2}{1/2 + x_1}$

А из условной функции плотности можно получить условную функцию распределения:

$$F(x_2|x_1) := \int_0^{x_2} f(t|x_1)dt \tag{11.6}$$

В нашем случае получаем $F(x_2|x_1) := \frac{x_1x_2+x_2^2/2}{1/2+x_1}$.

Но ведь $P(X_2 < a|X_1 = x)$ это и есть условная функция распределения, $F_{X_2|X_1}(a|x)$.

Значит наша прибыль в вероятностных терминах записывается как:

$$\pi_1 = (x - b(a))F_{X_2|X_1}(a|x) \tag{12.1}$$

Берем производную по a и приравниваем к нулю:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial a} = -b'(a)F_{X_2|X_1}(a|x) + (x - b(a))f_{X_2|X_1}(a|x) = 0 \tag{12.2}$$

Снова завершаем магический трюк. Мы должны потребовать, чтобы оптимальной стратегий первого игрока была бы функция $b_1 = b(x)$. Но мы использовали замену $b_1 = b(a)$, значит $x = a$:

$$-b'(x)F_{X_2|X_1}(x|x) + (x - b(x))f_{X_2|X_1}(x|x) = 0 \tag{12.3}$$

В результате мы получили дифференциальное уравнение:

$$b'(x) = (x - b(x))\frac{f_{X_2|X_1}(x|x)}{F_{X_2|X_1}(x|x)} \tag{12.4}$$

В нашем частном случае: $f(x|x) = \frac{2x}{1/2+x}$, $F(x|x) = \frac{1.5x^2}{1/2+x}$.

Получаем дифференциальное уравнение:

$$b' = (x - b(x))\frac{4}{3x} \tag{12.5}$$

Мы же везунчики, правда у него будет линейное решение?

Можно подбором получить $b(x) = \frac{4}{7}x$.

Если же решать честно, то общее решение имеет вид $b(x) = c \cdot x^{-4/3} + \frac{4}{7}x$. Но мы ищем стратегию, которая подходит для любого $x \in [0; 1]$, поэтому $c = 0$.

Настала очередь дохода продавца. Он равен удвоенной ожидаемой выплате первого игрока. Первый игрок платит $\frac{4}{7}X_1$ только если $X_1 > X_2$. Значит:

$$E(R^{FP}) = 2E(\frac{4}{7}X_1 \cdot 1_{X_1>X_2}) \tag{12.6}$$

Задача свелась к двойному интегралу:

$$E(\frac{4}{7}X_1 \cdot 1_{X_1>X_2}) = \int_0^1 \int_0^{x_1} \frac{4}{7}x_1 f(x_1, x_2)dx_2dx_1 \tag{12.7}$$

Подставляем функцию плотности и после взятия интеграла получаем:

$$E(R^{FP}) = \frac{3}{7} \approx 0.4286 \tag{12.8}$$

2. Аукцион второй цены. Логика решения такая же, как и в случае независимых ценностей. Рассматриваем поведение первого игрока. Поскольку игроков всего два, $m = b_2$. Отличие от случая независимыми ценностями состоит в том, что случайные величины m и X_1 зависимы. Но этот факт никак не влияет на логику решения. Поэтому снова оказывается, что стратегия $b_1 = X_1$ нестрого доминирует любую другую стратегию первого игрока.

   Считаем ожидаемый доход продавца. Он равен удвоенной ожидаемой выплате первого игрока. Первый игрок платит X_2 только если $X_1 > X_2$. Значит:

$$E(R^{SP}) = 2E(X_2 \cdot 1_{X_1 > X_2}) \tag{13.1}$$

   Задача свелась к двойному интегралу:

$$E(X_2 \cdot 1_{X_1 > X_2}) = \int_0^1 \int_0^{x_1} x_2 f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \tag{13.2}$$

   Подставляем функцию плотности и после взятия интеграла получаем:

$$E(R^{SP}) = 5/12 \approx 0.4167 \tag{13.3}$$

Таким образом, для данного совместного распределения доходностей аукционы первой и второй цены не одинаково выгодны для продавца! Мы исследуем подробнее случай связанных доходностей позже.

1.4 Упражнения

1. В моделях аукциона первой и второй цены с независимыми, равномерными на $[0;1]$ ценностями покупателей приведите примеры

   (a) Вектора ценностей, при котором для продавца лучше аукцион первой цены

   (b) Вектора ценностей, при котором для продавца лучше аукцион второй цены

2. Рассмотрите покупателей с независимыми ценностями, имеющими функцию плотности $f(x) = 2x$ на отрезке $[0;1]$. Найдите в явном виде оптимальные стратегии и среднюю прибыль продавца.

3. Докажите, что формулу $pay(x) = xq(x) - \int_0^x q(t)dt$ можно представить в виде:

$$pay(x) = pay(0) + \int_0^x t \cdot \frac{dq(t)}{dt} \cdot dt \tag{13.4}$$

4. Аукцион «Платят все!». Покупатели одновременно делают ставки. Товар достается тому, кто назвал наибольшую ставку, но платят все игроки. Каждый платит свою ставку. Ценности товара для покупателей имеют независимое регулярное распределение с функцией распределения $F()$.

Используя трюк с теоремой об одинаковых доходностях (см. пример 10.4) найдите оптимальные стратегии игроков, $b(x)$.

Какой вид имеют оптимальные стратегии, если X_i равномерны на $[0;1]$? Чему в этом случае будет равен ожидаемый доход продавца?

5. Наследство. Двум сыновьям достался земельный участок в наследство. Отец не хотел, чтобы участок был разделен, поэтому по завещанию установлены следущие правила: два брата одновременно делают ставки. Участок получает тот, кто сделал большую ставку. При этом получивший участок выплачивает свою ставку проигравшему. Найдите равновесие Нэша, если ценности участка независимы и равномерны на $[0;1]$.

6. Аукцион «Победитель платит чужую среднюю». Покупатели одновременно делают ставки. Товар достается тому, кто назвал наибольшую ставку. Победитель платит среднюю арифметическую ставок остальных игроков. Ценности товара для покупателей независимы и равномерно распределены на $[0;1]$. Найдите оптимальные стратегии игроков, $b(x)$, средний доход продавца.

   Hint: А может у дифференциального уравнения простое линейное решение?

7. Аукцион с дискретными ценностями. В аукционе участвуют два покупателя. Ценности товара для покупателей независимы и имеют дискретное распределение: X_i равновероятно принимает значения 0 и 1. Аукцион проходит по следующим правилам: продавец предлагает товар по цене a, где a — это некая константа, $a \in (0;2/3)$. Игроки одновременно решают, подходит ли им эта цена или нет. Если один сказал «да», а другой «нет», то товар достается тому, кто сказал «да» и он платит a. Если оба сказали «нет», то товар отдается бесплатно случайно выбираемому игроку. Если оба сказали «да», то товар отдается по цене a случайно выбираемому игроку.

   Найдите равновесие Нэша (хотя бы одно).

   Зависит ли равновесный доход аукциониста от a? Применима ли теорема об одинаковой доходности и почему?

   При каком a доход продавца будет максимальным?

   Hint1: На всякий случай, а то курс теории игр уже кончился :), во-первых, равновесия бывают в смешанных стратегиях, во-вторых, чистых стратегий у каждого игрока здесь четыре. Стратегия — это функция от ценности, значит у игрока есть, например, стратегия «если $X = 0$, то говорю 'нет', если $X = 1$, то говорю 'да'».

   Hint2: если задача кажется слишком сложной, решите ее для конкретного a, скажем, для $a = 0.1$, а затем попробуйте снова. Это, кстати, один из немногих универсальных приемов решения всех задач: «Я не хочу решать эту задачу, поэтому буду решать более простую!»

1.5 Решения упражнений

1. В качестве примера возьмем аукцион двух игроков.

   а) Если $X_1 = 0.2$, $X_2 = 0.6$, то на аукционе второй цены продавец получит 0.2 (вторую по величине ставку), а на аукционе первой цены продавец получит 0.3 (т.к. оптимальная стратегия имеет вид $b(x) = \frac{n-1}{n}x = \frac{1}{2}x$).

   б) Если $X_1 = 0.4$, $X_2 = 0.6$, то на аукционе второй цены продавец получит 0.4 (вторую по величине ставку), а на аукционе первой цены продавец получит 0.3 (т.к. оптимальная стратегия имеет вид $b(x) = \frac{n-1}{n}x = \frac{1}{2}x$).

2. Подставляем $F(x) = x^2$, значит $q(x) = (x^2)^{n-1} = x^{2n-2}$. Подставляем $q(x)$ в 10.7. Получаем $b(x) = \frac{2n-2}{2n-1}x$.

   Полученную $b(x)$ подставляем в 10.5. Получаем $pay(x) = \frac{2n-2}{2n-1}x^{2n-1}$.

   Считаем ожидаемую выплату первого игрока:

$$E(pay(X_1) = \int_0^1 pay(t)f(t)dt = \int_0^1 \frac{2n-2}{2n-1}t^{2n-1} \cdot 2tdt = \frac{4(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} \tag{15.1}$$

   И умножаем на число игроков:

$$E(R^{FP}) = \frac{4n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} \tag{15.2}$$

3. Используем формулу интегрирования по частям.

4. Используем уравнение из теоремы об одинаковой доходности

$$xq(x) - pay(x) = \int_0^x q(t)dt \tag{15.3}$$

   В данном случае $pay(x) = b(x)$, так как ставка платится вне зависимости от того, кому достанется товар. Значит:

$$b(x) = xq(x) - \int_0^x q(t)dt \tag{15.4}$$

   где $q(x) = F(x)^{n-1}$

   Можно решить и подругому — явно выписав задачу максимизации игрока и получив дифференциальное уравнение.

5. Эта игра не аукцион в чистом виде, т.к. игрок тоже может получить деньги. Выписываем прибыль первого игрока:

$$\pi_1 = (x - b_1)P(b(X_2) < b_1) + E(b(X_2) \cdot 1_{b(X_2) > b_1}) \tag{15.5}$$

   Прибавка в прибыли — это ожидаемый платеж от второго игрока первому.

   После чудо-замены:

$$\pi_1 = (x - b(a))P(X_2 < a) + E(b(X_2) \cdot 1_{X_2 > a}) \tag{15.6}$$

   Запишем мат. ожидание в виде интеграла:

$$\pi_1 = (x - b(a))F(a) + \int_a^{\overline{x}} b(t)f(t)dt \tag{15.7}$$

   После взятия производной по a:

$$-b'(a)F(a) + (x - b(a))f(a) - b(a)f(a) = 0 \tag{15.8}$$

Требуем оптимальности стратегии $b_1 = b(x)$:

$$-b'(x)F(x) + (x - b(x))f(x) - b(x)f(x) = 0 \tag{15.9}$$

Для равномерного случая получаем:

$$-b'(x)x + x - b(x) - b(x) = 0 \tag{15.10}$$

Находим общее решение и замечаем, что $c = 0$ или сразу подбираем линейное решение $b(x) = kx$:

$$-kx + x - 2kx = 0 \tag{16.0}$$

Получаем $k = 1/3$ и равновесие Нэша вида $b(x) = x/3$.

6. Функция прибыли:

$$\pi_1 = (x - E\left(\frac{b(X_2) + \ldots + b(X_n)}{n-1} | b(X_2) < b_1 \cap \ldots b(X_n) < b_1)\right) \cdot P(b(X_2) < b_1 \cap \ldots b(X_n) < b_1)) \tag{16.1}$$

После чудо-замены, $b_1 = b(a)$:

$$\pi_1 = (x - E\left(\frac{b(X_2) + \ldots + b(X_n)}{n-1} | X_2 < a \cap \ldots X_n < a)\right) \cdot P(X_2 < a \cap \ldots X_n < a) \tag{16.2}$$

В силу того, что X_i одинаково распределены и независимы:

$$\pi_1 = (x - E\left(b(X_2) | X_2 < a\right)) \cdot F(a)^{n-1} \tag{16.3}$$

Воспользуемся тем, что $E(b(X_2)|X_2 < a) \cdot P(X_2 < a) = E(b(X_2) \cdot 1_{X_2 < a})$:

$$\pi_1 = x \cdot F(a)^{n-1} - E\left(b(X_2) \cdot 1_{X_2 < a}\right)) \cdot F(a)^{n-2} \tag{16.4}$$

Заметим, что математическое ожидание равно интегралу:

$$E(b(X_2) \cdot 1_{X_2 < a}) = \int_0^a b(t)f(t)dt \tag{16.5}$$

Стало быть производная от мат. ожидания равна:

$$\frac{dE(b(X_2) \cdot 1_{X_2 < a})}{da} = b(a)f(a) \tag{16.6}$$

Теперь легко находим производную прибыли:

$$\pi_1 = F(a)^{n-1} + x \cdot (n-1)F(a)^{n-2}f(a) - E\left(b(X_2) \cdot 1_{X_2 < a}\right)) \cdot (n-2)F(a)^{n-3}f(a) - b(a)f(a)F(a)^{n-2} \tag{16.7}$$

Приравняв к нулю и завершив чудо-замену замечанием, что $a = x$ получаем уравнение:

$$(n-1)xF(x)f(x) - (n-2)\int_0^x b(t)f(t)dtf(x) - b(x)f(x)F(x) = 0 \tag{16.8}$$

Вообще-то мы получили интегральное уравнение, т.е. уравнение с интегралами, а не с производными. Но его можно свести к дифференциальному, сделав замену $y(x) = \int_0^x b(t)f(t)dt$, тогда $b(x)f(x) = y'(x)$. В общем виде дальше мы его решать не будем, а вспомним, что у нас $f(x) = 1$ и $F(x) = x$:

$$(n-1)x^2 - (n-2)\int_0^x b(t)dt - b(x)x = 0 \tag{16.9}$$

Вместо возможной замены $y(x) = \int_0^x b(t)dt$ мы возьмем производную от обеих частей уравнения:

$$(n-1)2x - (n-2)b(x) - b(x) - b'(x)x = 0 \tag{17.1}$$

Неленивые могут найти общее решение и заметить, что нужно взять $c = 0$. Ленивые сразу подбирают линейное решение $b(x) = kx$:

$$(n-1)2x - (n-2)kx - kx - kx = 0 \tag{17.2}$$

Получаем $k = \frac{2(n-1)}{n}$ и равновесие Нэша со стратегиями вида $b(x) = \frac{2(n-1)}{n}x$. Кстати, при $n = 2$ мы получаем аукцион второй цены, а наше решение, как и следует, дает $b(x) = x$.

Альтернативное решение по принципу «Мне повезет и без дифуров»:

А вдруг оптимальная стратегия линейна, т.е. имеет вид $b(x) = kx$? Подставим эту функцию сразу в прибыль, до чудо-замены:

$$\pi_1 = (x - E\left(\frac{kX_2 + \ldots + kX_n}{n-1} | kX_2 < b_1 \cap \ldots kX_n < b_1)\right) \cdot P(kX_2 < b_1 \cap \ldots kX_n < b_1)) \tag{17.3}$$

Упрощаем мат. ожидание и вероятность:

$$\pi_1 = (x - kE\left(X_2 | X_2 < b_1/k\right) \cdot P(X_2 < b_1/k \cap \ldots \cap X_n < b_1/k)) \tag{17.4}$$

Теперь условное мат. ожидание легко считается. Условие $X_2 < b_1/k$ и априорная равномерность X_2 равносильны тому, что X_2 равномерно на $[0; b_1/k]$. Значит условное мат.ожидание равное $\frac{b_1}{2k}$. Получаем:

$$\pi_1 = (x - \frac{b_1}{2}) \cdot (b_1/k)^{n-1} \tag{17.5}$$

Без чудо-замены берем производную по b_1. Т.е. сразу ищем оптимальную ставку:

$$k^{1-n}\left((x - \frac{b_1}{2}) \cdot (n-1)b_1^{n-2} - \frac{1}{2}b_1^{n-1}\right) = 0 \tag{17.6}$$

Выражаем b_1 и получаем $b_1 = \frac{2(n-1)}{n}x$. Поскольку она имеет предположенный вид, то все шаги были верными.

Считаем средний доход продавца. Поскольку все условия теоремы об одинаковой доходности выполнены, то ответ совпадает с найденным в лекции для аукциона первой цены:

$$E(R^{MO}) = \frac{n-1}{n+1} \tag{17.7}$$

7. Произвольная смешанная стратегия имеет вид:

   Если $X = 0$, то говорить «да» с верояностью p_0; если $X = 1$, то говорить «да» с верояностью p_1.

   Пусть моя ценность равна 0. Если я скажу «нет», то ничего не заплачу и возможно получу товар с нулевой для меня ценностью, значит мой ожидаемый выигрыш равен 0. Если я скажу «да», то с положительной вероятностью мне придется платить a, и мой ожидаемый выигрыш меньше 0. Значит, если ценность равна нулю, оптимально говорит «нет». Т.е. $p_0 = 0$.

   Пусть моя ценность равна 1. Если я скажу «нет», то получу в среднем:

$$(1 - 0.5p_1) \cdot \frac{1}{2} \tag{18.1}$$

   Если я скажу «да», то получу в среднем:

$$(1 - 0.5p_1) \cdot (1 - a) + 0.5p_1 \cdot \frac{1-a}{2} \tag{18.2}$$

   Чтобы смешанная стратегия была оптимальной, мне нужно быть безразличным между чистыми стратегиями, т.к. иначе я выбрал бы чистую. Приравниваем эти два выигрыша и находим p_1.

   Формально получается $p_1 = 4 - \frac{2}{a}$. Возникает несколько случаев...

   Если $a \in (0; 1/2)$, то равенство достигается только при $p_1 < 0$. Это означает, что при всех $p_1 \in [0; 1]$ говорить «да» выгоднее, чем «нет». Т.е. в равновесии каждый игрок использует стратегию: Если $x = 0$, то «нет», если $x = 1$, то «да»

   Если $a \in (1/2; 2/3)$, то равенство достигается только при $p_1 = 4 - \frac{2}{a}$. В равновесии каждый игрок использует стратегию: Если $x = 0$, то «нет», если $x = 1$, то «да» с вероятностью $p_1 = 4 - \frac{2}{a}$.

   Если $a = 1/2$, то при $x = 1$ «да» лучше чем «нет» при $p_1 \in (0; 1]$ и игрок безразличен между «да» и «нет» при $p_1 = 0$. Получаем равновесие с парой стратегий: Если $x = 0$, то «нет», если $x = 1$, то «да». И еще одно равновесий с парой стратегий: Всегда «нет».