Моделирование аукционов. Азбука.

Борис Демешев

26 февраля 2011 г.

Содержание

1 Общая ценность, аффилированные сигналы

1.1 Напоминалка по теории вероятностей

Определение 1.1. Индикатором события A называется случайная величина, которая равна 1, если A произошло и 0, если A не произошло. Обозначают индикатор A так: 1_A.

Проверьте, что вы понимаете, что $E(1_A) = P(A)$.
С помощью индикаторов легко определить условное ожидание:

Определение 1.2. Если $P(A) > 0$, то условным ожидание случайной величины X при условии события A называют число:

$$E(X|A) := \frac{E(X \cdot 1_A)}{P(A)}$$

Если вам знакомо альтернативное определение условного ожидания, убедитесь, что оно совпадает с этим на паре примеров. Альтернативное определение основано на идее: условное ожидание считается так же, как и безусловное, только вместо безусловной вероятности используется условная.

Пример 1.3.

Prob	0.1	0.2	0.3	0.4
X	6	2	3	1

Найдите $E(X|X > 2)$.
Решение:
$P(X > 2) = 0.4$
Составляем табличку для $X \cdot 1_{X>2}$:

Prob	0.1	0.2	0.3	0.4
$1_{X>2}$	1	0	1	0
$X \cdot 1_{X>2}$	6	0	3	0

Находим $E(X \cdot 1_{X>2}) = 1.5$. Значит $E(X|X > 2) = 1.5/0.4 = 3.75$

Пример 2.1. Пусть X распределено экспоненциально с параметром $\lambda = 1$, т.е. функция плотности X при $t \geq 0$ имеет вид:

$$p_X(t) = e^{-t}$$

Найдите $E(X|X < 5)$.

Решение. Находим $P(X < 5) = \int_0^5 e^{-x}dx = 1 - e^{-5}$. Затем $E(X \cdot 1_{X<5}) = \int_0^5 xe^{-x}dx = 1 - 6e^{-5}$. И, следовательно, $E(X|X < 5) = \frac{e^5-6}{e^5-1}$

Часто приходится иметь дело с условным ожиданием виде $E(Y|X = x)$. В случае, когда X дискретна и $P(X = x) > 0$ мы без проблем применяем определение 1.2. Однако, если, X непрерывна и $P(X = x) = 0$, у нас возникают проблемы. Впрочем, если $P(X \in [x; x + \Delta x]) > 0$, то наши проблемы легко решаются:

Определение 2.2. Если $P(X \in [x; x + \Delta x]) > 0$, то мы определяем условное ожидание $E(Y|X = x)$ по формуле:

$$E(Y|X = x) := \lim_{\Delta x \to 0} E(Y|X \in [x; x + \Delta x]) \tag{2.3}$$

Для практических вычислений мы редко (почти никогда в этих лекциях) будем пользоваться определением. Нам будет достаточно четырех свойств:

- Мат. ожидание суммы равно сумме мат. ожиданий

$$E(X + Y|A) = E(X|A) + E(Y|A) \tag{2.4}$$

- Константу можно выносить за знак мат. ожидания

$$E(cX|A) = cE(X|A) \tag{2.5}$$

- Значения известной случайной величины можно подставлять:

$$E(f(X, Y)|X = x) = E(f(x, Y)|X = x) \tag{2.6}$$

- Если случайная величина X и событие A независимы, то

$$E(X|A) = E(X) \tag{2.7}$$

Для величин имеющих совместную функцию плотности можно указать способ считать $E(Y|X = x)$ без предельного перехода:

Теорема 2.8. *Если пара случайных величин X и Y имеет совместную функцию плотности $f(x, y)$, то*

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y|x)dy \tag{2.9}$$

Доказательство.

$$E(Y|X \in [x; x+\Delta x]) = \frac{E(Y 1_{X\in[x;x+\Delta x]})}{P(X \in [x; x+\Delta x])} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x}^{x+\Delta x} y f(x,y) dx dy}{f_X(x)\cdot \Delta x + o(\Delta x)} =$$
$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y \int_{x}^{x+\Delta x} f(x,y) dx dy}{f_X(x)\cdot \Delta x + o(\Delta x)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y (f(x,y)\Delta x + o(\Delta x)) dy}{f_X(x)\cdot \Delta x + o(\Delta x)} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{f(x,y)\Delta x + o(\Delta x)}{f_X(x)\cdot \Delta x + o(\Delta x)} dy \quad (2.10)$$

При $\Delta x \to 0$ указанный интеграл стремится к $\int_{-\infty}^{+\infty} y f(y|x) dy$. □

1.2 Большая сила о-малых!

В теории вероятностей часто возникает примерно такая задача:

Известна функция плотности случайной величины X, $p_X(t)$. Также известно, как Y выражается через X, т.е. известно, что $Y = f(X)$. Причем функция f — монотонная и дифференциируемая. Нужно найти функцию плотности Y, $p_Y(t)$.

Есть два способа решения.

Первый — стандартный, без о-малых и их силы. Нужно знать только, что функция плотности — это производная от функции распределения:

$$p_Y(y) = \frac{dP(Y \le y)}{dy} = \frac{dP(X \le f^{-1}(y))}{dy} = p_X(f^{-1}(y)) \cdot \frac{df^{-1}(y)}{dy}$$

Или, если считать, что $y = f(x)$:

$$\frac{dy}{dx} p_Y(y) = p_X(x) \quad (3.1)$$

Пример 3.2. Пусть X имеет функцию плотности $p_X(x) = 2x$ на отрезке $[0; 1]$ и $Y = X^3$. Найдите функцию плотности Y.

Решение: Здесь $y = x^3$, значит $y' = 3x^2$ и $x = y^{1/3}$. Значит:

$$3x^2 p_Y(y) = 2x \quad (3.3)$$

Подставляем вместо $x = y^{1/3}$:

$$3y^{2/3} p_Y(y) = 2y^{1/3} \quad (3.4)$$

Итого:

$$p_Y(y) = \frac{2}{3} y^{-1/3} \quad (3.5)$$

Теперь магия о-малых!

Какой смысл в функции плотности? Вероятность того, что X лежит в отрезке небольшой длины примерно равна произведению длины этого отрезка на значение плотности:

$$P(X \in [x; x+\Delta x]) \approx p(x)\Delta x \quad (3.6)$$

Здесь Δx — это небольшое число. Если быть точным, то:

$$P(X \in [x; x+\Delta x]) = p_X(x)\Delta x + o(\Delta x) \quad (3.7)$$

На всякий случай,

- $o(\Delta x)$ — это такая функция от Δx, что:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \tag{3.8}$$

- $o(1)$ — это такая функция от Δx, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} o(1) = 0 \tag{4.1}$$

Поскольку f монотонная, то событию $X \in [x; x + \Delta x]$ соответствует событие $Y \in [y; y + \Delta y]$, где конечно, $y = f(x)$ и $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Аналогично:

$$P(Y \in [y; y + \Delta y]) = p_Y(y)\Delta y + o(\Delta y) \tag{4.2}$$

Приравниваем две вероятности:

$$p_X(x)\Delta x + o(\Delta x) = p_Y(y)\Delta y + o(\Delta y) \tag{4.3}$$

Делим на Δx:

$$p_X(x) + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = p_Y(y)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{o(\Delta y)}{\Delta x} \tag{4.4}$$

Устремляем о-малое к нулю и по определению о-малого получаем:

$$p_X(x) = p_Y(y)\frac{dy}{dx} \tag{4.5}$$

Продолжаем осваивать большую силу о-малых!

Пусть X_1, ..., X_n — имеют регулярную функцию распределения $F()$ на $[0; 1]$ и независимы. Введем также обозначения Y_1, Y_2, ..., Y_{n-1} — это величины X_2, X_3, ..., X_n, отсортированные в порядке убывания. В частности, $Y_1 = \max\{X_2, ..., X_n\}$ — наибольшая ставка сделанная всеми игроками кроме первого. Также, $Y_{n-1} = \min\{X_2, ..., X_n\}$.

Пример 4.6. Найдите функцию плотности Y_1.

Решение. Прежде чем доставать из ножен о-малые вспомним два простых факта:

$$P(X_1 < x) = F(x) \tag{4.7}$$

$$P(X_1 \in [x_1; x_2]) = F(x_2) - F(x_1) \tag{4.8}$$

Вместо плотности $p_{Y_1}(z)$ мы ищем вероятность $P(Y_1 \in [z; z + \Delta z])$. При маленьких Δz вероятность и плотность связаны:

$$P(Y_1 \in [z; z + \Delta z]) \approx p_{Y_1}(z)\Delta z \tag{4.9}$$

Расчехлим о-малые:

$$P(X_2 < X_1 | X_1 \in [z; z + \Delta z]) = F(z) + o(1) \tag{4.10}$$

Чуть-чуть помедитируйте над этим равенством. При $\Delta z \to 0$ правая и левая части становятся похожи на $F(z)$. Значит верное равенство.

А теперь мы одним махом выпишем ответ!

Что значит $Y_1 \in [z; z + \Delta z]$? Это означает, что одна из величин X_i попала в этот интервал. У нас есть $(n-1)$ возможностей выбрать эту одну. А остальные $(n-2)$ случайные величины должны быть меньше избранной! Смотрите на ответ:

$$P(Y_1 \in [z; z + \Delta z]) = (n - 1) \cdot (F(z + \Delta z) - F(z)) \cdot (F(z) + o(1))^{n-2} \tag{4.11}$$

По сомножителям:

- $(n-1)$ — это число способов выбрать ту случайную величину, которая будет максимумом. Скажем мы выбрали X_3
- $F(z+\Delta z) - F(z)$ — это вероятность того, что X_3 попадет в интервал $[z; z+\Delta z]$.
- $F(z) + o(1) = P(X_i < X_3 | X_3 \in [z; z+\Delta z])$

Чтобы получить функцию плотности: делим на Δz и устремляем Δz к нулю!

$$p_{Y_1}(z) = (n-1) \cdot f(z) \cdot F(z)^{n-2} \tag{5.1}$$

На всякий случай напомню стандартный способ без о-малых:

$$p_{Y_1}(z) = \frac{dP(Y_1 \leq z)}{dz} = \frac{dP(X_2 < z \cap ... \cap X_n < z)}{dz} = \frac{dF(z)^{n-1}}{dz} = (n-1)f(z)F(z)^{n-2} \tag{5.2}$$

Если при поиске отдельной функции плотности можно обойтись без о-малых, то при переходе к совместной функции плотности о-малые впереди на лихом коне!

Пример 5.3. Найдите совместную функцию плотности для пары Y_1 и Y_3.

Вместо плотности легче искать вероятность:

$$P(Y_1 \in [w; w+\Delta w] \cap Y_3 \in [z+\Delta z]) = p(w,z)\Delta w \Delta z + o(dwdz) \tag{5.4}$$

Что значит $Y_1 \in [w; w+\Delta w] \cap Y_3 \in [z+\Delta z]$? Это означает, что одна из величин X_2, ..., X_n попала в $[w; w+\Delta w]$. У нас есть $(n-1)$ возможностей выбрать эту одну. Еще одна попала в $[z; z+\Delta z]$. Эту одну можно выбрать $(n-2)$ способом. Еще одна попала между ними, т.е. в интервал $[w+o(1); z+o(1)]$. Эту одну можно выбрать $(n-3)$ способами. Оставшиеся $(n-4)$ случайные величины должны быть меньше Y_3, т.к. лежать в интервале $[0; w+o(1)]$:

$$\begin{aligned} P(Y_1 \in [w; w+\Delta w] \cap Y_3 \in [z; z+\Delta z]) = \\ = (n-1)(n-2)(n-3)(F(w+\Delta w) - F(w))(F(z+\Delta z) - F(z)) \cdot \\ \cdot (F(z) - F(w) + o(1))(F(z) + o(1))^{n-4} \end{aligned} \tag{5.5}$$

На всякий случай объясняем по сомножителям:

- $(n-1)$ — это число способов выбрать ту случайную величину, которая будет максимумом. Скажем мы выбрали X_3
- $(n-2)$ — это число способов выбрать Y_3 среди оставшихся. Скажем мы выбрали X_7.
- $(n-3)$ — это число способов выбрать Y_2. Ее надо оговаривать особо, т.к. она должна лечь между Y_1 и Y_3. Пусть это оказалась X_9.
- $(F(w+\Delta w) - F(w))$ — это $P(X_3 \in [w; w+\Delta w])$
- $(F(z+\Delta z) - F(z))$ — это $P(X_7 \in [z; z+\Delta z])$
- $(F(w) - F(z) + o(1))$ — это $P(X_9 \in [w+o(1); z+o(1)])$
- $(F(z) + o(1))^{n-4}$ — это вероятность того, что оставшиеся X_i меньше X_7

Делим на Δw, Δz и устремляем их к нулю.

$$p_{Y_1,Y_3}(w,z) = (n-1)(n-2)(n-3)f(z)f(w)(F(w) - F(z))F(z)^{n-4} \tag{5.6}$$

1.3 Старые формулы на вероятностном языке

Сова стала объяснять, что такое Необходимая или Соответствующая Спинная Мускулатура. Она уже объясняла это когда-то Пуху и Кристоферу Робину и с тех пор ожидала удобного случая, чтобы повторить объяснения, потому что это такая штука, которую вы спокойно можете объяснять два раза, не опасаясь, что кто-нибудь поймёт, о чём вы говорите.

Алан Милн в переводе Бориса Заходера.

Обозначения!

Событие:

- W_i — событие, состоящее в том, что победителем аукциона стал игрок i.

Случайные величины:

- X_i — случайная величина, значение которой известно игроку i. Функцию распределения этой случайной величины обозначим $F()$, а функцию плотности — $f()$.
- V_i — случайная величина, ценность товара для игрока i. Если игрок точно знает ценность товара, то $V_i = X_i$. Есть множество других возможностей, например, $X_i = V_i + e_i$, где e_i — некая случайная ошибка.
- Bid_i — случайная величина, ставка, которую сделает игрок i. В симметричном равновесии Нэша:
$$Bid_i = b(X_i) \tag{7.1}$$
- Pay_i — случайная величина, выплата, которую сделает игрок i.
- R — случайная величина, доход продавца:
$$R = Pay_1 + Pay_2 + ... + Pay_n \tag{7.2}$$
- $Profit_i$ — случайная величина, выигрыш игрока i:
$$Profit_i = V_i 1_{W_i} - Pay_i \tag{7.3}$$
- Y_1, ..., Y_{n-1} — случайные величины X_2, ..., X_n упорядоченные по убыванию.

Детерминистические функции:

- $b(\cdot)$ — неслучайная функция, зависимость ставки от ценности в равновесии Нэша
- $q(x) = P(W_1|X_1 = x)$ — вероятность выигрыша первого игрока, если $X_1 = x$
- $pay_1(x) = E(Pay_1|X_1 = x)$ — средняя выплата первого игрока, если $X_1 = x$

Если предположить, что первый игрок использует не равновесную стратегию $Bid_1 = b(X_1)$, а ставит константу[1] , т.е. $Bid_1 = b_1$, то появляются еще 3 детерминистические функции:

- $\widehat{q}(b) = P(W_1|Bid_1 = b_1)$ — вероятность выигрыша, если используется стратегия $Bid_1 = b_1$.
- $\widehat{pay_1}(b_1) = E(Pay_1|Bid_1 = b_1)$ — средняя выплата, если используется стратегия $Bid_1 = b_1$.
- $\pi_1(x, b_1) = E(Profit_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1)$ — средний выигрыш первого игрока, если $X_1 = x$ и используется стратегия $Bid_1 = b_1$.

[1]Это нужно только при поиске равновесия. Остальные игроки используют равновесные стратегии.

Для аукциона первой цены:

$$Pay_1 = Bid_1 \cdot 1_{W_1} \tag{8.1}$$

Значит:

$$Profit_1 = X_1 \cdot 1_{W_1} - Pay_1 = (X_1 - Bid_1) \cdot 1_{W_1} \tag{8.2}$$

$$\begin{aligned}
&E(Profit_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \\
&\quad = E((X_1 - Bid_1) \cdot 1_{W_1}|X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \\
&\quad = (x - b_1)E(1_{W_1}|X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \\
&\quad = (x - b_1)P(W_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1)
\end{aligned} \tag{8.3}$$

Озаботимся величиной $P(W_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1)$. Если ценности независимы, то:

$$\begin{aligned}
&P(W_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1) = P(W_1|Bid_1 = b_1) = \\
&\quad = P(Bid_2 < Bid_1 \cap \ldots ; Bid_n < Bid_1|Bid_1 = b_1) = \\
&\quad = P(Bid_2 < b_1 \cap \ldots ; Bid_n < b_1) = \\
&\quad = P(Bid_2 < b_1)^{n-1} = P(b(X_2) < b_1)^{n-1}
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Дальше чудо-замена $b_1 = b(a)$. Уточняем: b_1 — константа, a — константа, $b()$ — неизвестная, но детерминистическая функция.

$$P(b(X_2) < b_1)^{n-1} = P(b(X_2) < b(a))^{n-1} = P(X_2 < a)^{n-1} = (F(a))^{n-1} \tag{8.5}$$

Итого, для аукциона первой цены с независимыми ценностями:

$$\pi_1(x, b(a)) = (x - b(a)) \cdot (F(a))^{n-1} \tag{8.6}$$

Что меняется, если ценности зависимы?

Единственное отличие состоит в том, что:

$$P(W_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1) \neq P(W_1|Bid_1 = b_1) \tag{8.7}$$

На этот раз вероятность упрощается не так сильно:

$$\begin{aligned}
&P(W_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \\
&\quad = P(Bid_2 < Bid_1 \cap \ldots \cap Bid_n < Bid_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \\
&\quad = P(Bid_2 < b_1 \cap \ldots \cap Bid_n < b_1|X_1 = x) = \\
&\quad = P(b(X_2) < b_1 \cap \ldots \cap b(X_n) < b_1|X_1 = x)
\end{aligned} \tag{8.8}$$

И еще чуть-чуть после чудо-замены:

$$\begin{aligned}
&P(b(X_2) < b_1 \cap \ldots \cap b(X_n) < b_1|X_1 = x) = \\
&\quad P(b(X_2) < b(a) \cap \ldots \cap b(X_n) < b(a)|X_1 = x) = \\
&\quad P(X_2 < a \cap \ldots \cap X_n < a|X_1 = x)
\end{aligned} \tag{8.9}$$

А эту вероятность можно посчитать, если известна совместная функция плотности ценностей. С использованием обозначения $Y_1 = \max\{X_2, \ldots, X_n\}$ можно записать ее короче:

$$P(X_2 < a \cap \ldots \cap X_n < a|X_1 = x) = P(Y_1 < a|X_1 = x) \tag{8.10}$$

Итого, для аукциона первой цены с зависимыми ценностями:

$$\pi_1(x, b(a)) = (x - b(a)) \cdot P(Y_1 < a | X_1 = x) \tag{8.11}$$

А сейчас мы увидим, как с помощью мат. ожидания записать уже знакомые нам вещи. А именно:

Теорема 8.12. *Если предпосылки теоремы об одинаковой доходности выполнены, то:*

- *Для произвольного аукциона* $q(x) = P(Y_1 < x)$
- *Для произвольного аукциона* $pay(x) = E(Y_1 \cdot 1_{Y_1 < x})$
- *Для аукциона первой цены* $b(x) = E(Y_1 | Y_1 < x)$

Доказательство. Первое. Из предпосылки о том, что товар достается тому покупателю, у которого выше ценность немедленно следует, что $q(x) = P(Y_1 < x)$.

Второе. В одном из упражнений первой лекции мы установили:

$$pay(x) = pay(\underline{x}) + \int_{\underline{x}}^{x} t \cdot \frac{dq(t)}{dt} \cdot dt \tag{9.1}$$

Если предпосылки теоремы об одинаковой доходности выполнены, то:

$$pay(x) = \int_{\underline{x}}^{x} t \cdot \frac{dq(t)}{dt} \cdot dt \tag{9.2}$$

Вспоминаем, что:

$$q(x) = F(x)^{n-1} \tag{9.3}$$

Стало быть

$$\frac{dq(x)}{dx} = (n-1) f(x) F(x)^{n-2} \tag{9.4}$$

И!!! Мы видим, что это есть функция плотности Y_1!!!:

$$\frac{dq(x)}{dx} = p_{Y_1}(x) \tag{9.5}$$

Т.е. для любого аукциона подходящего в теорему об одинаковой доходности:

$$pay(x) = \int_{\underline{x}}^{x} t \cdot p_{Y_1}(t) \cdot dt = E(Y_1 \cdot 1_{Y_1 < x}) \tag{9.6}$$

Третье. На аукционе первой цены:

$$pay(x) = b(x) \cdot q(x) \tag{9.7}$$

Пользуемся первыми двумя результатами и получаем:

$$E(Y_1 1_{Y_1 < x}) = b(x) \cdot P(Y_1 < x) \tag{9.8}$$

Отсюда немедленно следует, что:

$$b(x) = \frac{E(Y_1 1_{Y_1 < x})}{P(Y_1 < x)} = E(Y_1 | Y_1 < x) \tag{9.9}$$

□

1.4 Просто разные примеры

Пример 9.10. Потренируем о-малую мускулу. Найдем равновесие Нэша в аукционе третьей цены. Предполагаем, что ценность и сигнал — это одно и то же, т.е. $V_i = X_i$, а сами сигналы X_i независимы и имеют регулярное распределение на $[0; 1]$.

Мы только что доказали, что при выполнении теоремы об одинаковой доходности:

$$pay_1(x) = E(Y_1 \cdot 1_{Y_1 < x}) = \int_0^x t p_{Y_1}(t) dt \tag{9.11}$$

Из этого следует, что:

$$\frac{dpay_1(x)}{dx} = x p_{Y_1}(x) \tag{10.1}$$

С другой стороны на аукционе третьей цены первый игрок платит третью по величине ставку, значит вторую по величине ставку игроков не считая себя.

$$pay_1(x) = E(Pay_1 | X_1 = x) = E(b(Y_2) \cdot 1_{W_1} | X_1 = x) \tag{10.2}$$

Если мы предположим, что в равновесии функция $b()$ строго возрастает, то

$$W_1 = \{b(X_1) > b(X_2) \cap \ldots \cap b(X_1) > b(X_n)\} = \{X_1 > Y_1\} \tag{10.3}$$

Т.к. X_i независимы, нашу функцию выплат можно записать с помощью безусловного мат. ожидания:

$$pay_1(x) = E(b(Y_2) \cdot 1_{Y_1 < X_1} | X_1 = x) = E(b(Y_2) \cdot 1_{Y_1 < x}) \tag{10.4}$$

Судя по формуле нам нужна совместная функция плотности Y_1 и Y_2. О-малые приходят на помощь:

$$p(y_1, y_2) = (n-1)(n-2) f(y_1) f(y_2) F(y_2)^{n-3} \tag{10.5}$$

Следует уточнить, что эта формула верна при $0 < y_2 < y_1 < 1$. При остальных y_1 и y_2 плотность равна нулю.

Для нахождения математического ожидания выписываем страшный двойной интеграл:

$$\begin{gathered} pay_1(x) = E(b(Y_2) \cdot 1_{Y_1 < x}) = \int_0^1 \int_0^{y_1} b(y_2) 1_{y_1 < x} p(y_1, y_2) dy_2 dy_1 = \\ \int_0^x \int_0^{y_1} b(y_2) p(y_1, y_2) dy_2 dy_1 = \int_0^x \int_0^{y_1} b(y_2)(n-1)(n-2) f(y_1) f(y_2) F(y_2)^{n-3} dy_2 dy_1 = \\ (n-1)(n-2) \int_0^x f(y_1) \int_0^{y_1} b(y_2) f(y_2) F(y_2)^{n-3} dy_2 dy_1 \end{gathered} \tag{10.6}$$

Конечно, интегрировать это мы не будем. Мы наоборот, возьмем производную по x два раза. Берем производную первый раз:

$$\frac{dpay_1(x)}{dx} = (n-1)(n-2) f(x) \int_0^x b(y_2) f(y_2) F(y_2)^{n-3} dy_2 \tag{10.7}$$

С другой стороны,

$$\frac{dpay_1(x)}{dx} = x p_{Y_1}(x) = x(n-1) f(x) (F(x))^{n-2} \tag{10.8}$$

После сокращения $(n-1)$ и $f(x)$ мы получили уравнение:

$$(n-2)\int_0^x b(y_2)f(y_2)F(y_2)^{n-3}dy_2 = x(F(x))^{n-2} \tag{10.9}$$

Чтобы избавиться от интеграла берем еще раз производную по x от обеих частей.

$$(n-2)b(x)f(x)F(x)^{n-3} = F(x)^{n-2} + (n-2)xf(x)F(x)^{n-3} \tag{10.10}$$

Выражаем $b(x)$:

$$b(x) = \frac{F(x)}{(n-2)f(x)} + x \tag{11.1}$$

При равномерном распределении наша формула превращается в:

$$b(x) = \frac{n-1}{n-2}x \tag{11.2}$$

Она возрастает по x, значит теорему об одинаковой доходности действительно можно было применять.

Пример 11.3. Общая ценность.

Предположим, что на аукционе первой цены продается участок с домом. Торгуются два игрока. Ценность участка с домом одинакова для обоих игроков. Только они ее не совсем полностью знают. Один игрок хорошо разбирается в домах, а второй — в земельных участках. Т.е. Природа сообщает первому игроку ценность дома, а второму — ценность участка.

Введем обозначения:

- V_i — случайная величина, ценность товара для игрока i
- X_i — случайная величина, сигнал от Природы, который получает игрок i

В нашем случае: $V_1 = V_2 = X_1 + X_2$ — это ценности товара, а X_1 — сигнал, часть ценности, известная первому игроку и X_2 — сигнал, часть ценности, известная второму игроку.

Предположим, что X_i независимы и равномерны на $[0;1]$. Найдите равновесие Нэша.

Решение:

В этом случае прибыль равна:

$$Profit_1 = (V_1 - Bid_1)\cdot 1_{W_1} \tag{11.4}$$

Находим нашу детерминистическую функцию:

$$\begin{aligned} E(Profit_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \\ = E((x + X_2) - b_1)\cdot 1_{W_1}|X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \\ = (x - b_1)P(W_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1) + E(X_2 \cdot 1_{W_1}|X_1 = x; Bid_1 = b_1) \end{aligned} \tag{11.5}$$

Здесь нужно быть очень аккуратным т.к. $E(X\cdot Y)$ в общем случае не совпадает с $E(X)\cdot E(Y)$!

В силу независимости X_i и того, что $Bid_2 = b(X_2)$ упрощаем $P(W_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1)$:

$$P(W_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1) = P(Bid_2 < Bid_1|X_1 = x; Bid_1 = b_1) = P(Bid_2 < b_1) \tag{11.6}$$

Вспомнив чудо-замену $b_1 = b(a)$ получаем:

$$P(Bid_2 < b_1) = P(b(X_2) < b(a)) = P(X_2 < a) = F(a) \tag{11.7}$$

Упрощаем: $E(X_2 \cdot 1_{W_1} | X_1 = x; Bid_1 = b_1)$:

$$E(X_2 \cdot 1_{W_1} | X_1 = x; Bid_1 = b_1) = E(X_2 \cdot 1_{Bid_2 < Bid_1} | X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \\ E(X_2 \cdot 1_{b(X_2) < b_1} | X_1 = x) = E(X_2 \cdot 1_{b(X_2) < b_1}) \tag{11.8}$$

В последнем переходе мы использовали то, что X_1 и X_2 независимы.
И, чудо-замена,

$$E(X_2 \cdot 1_{b(X_2) < b_1}) = E(X_2 \cdot 1_{b(X_2) < b(a)}) = E(X_2 \cdot 1_{X_2 < a}) = \int_0^a t f(t) dt \tag{12.1}$$

Собираем все вместе:

$$\pi_1(x, b(a)) = (x - b(a))F(a) + \int_0^a t f(t) dt \tag{12.2}$$

Берем производную по a:

$$-b'(a)F(a) + (x - b(a))f(a) + af(a) = 0 \tag{12.3}$$

Т.к. мы ищем равновесие Нэша, оптимальное $b_1 = b(x)$, и значит, оптимальное $a = x$:

$$-b'(x)F(x) + (x - b(x))f(x) + xf(x) = 0 \tag{12.4}$$

В случае равномерных ценностей:

$$-b'(x)x + (x - b(x)) + x = 0 \tag{12.5}$$

Это линейное дифференциальное уравнение, общее решение имеет вид $b(x) = x + \frac{c}{x}$. Единственное ограниченное на $[0;1]$ решение — это $b(x) = x$. Почему нас не интересуют неограниченные решения? Потому, что оно заведомо не оптимально. Если стратегия $b(x)$ принимает значения больше единицы, то стратегия $\min\{b(x), 1\}$ окажется лучше. Стратегия $b(x)$ с положительной вероятностью приводит к ситуации, когда мы выигрываем товар, но обязаны заплатить за него сумму выше 1, т.е. мы получаем отрицательный выигрыш. Стратегия $\min\{b(x), 1\}$ этого недостатка лишена, а во всем прочем точно копирует стратегию $b(x)$.

Пример 12.6. Кнопочный аукцион с зависимыми ценностями. У нас имеется три игрока, $V_1 = V_2 = V_3 = X_1 + X_2 + X_3$, функция плотности ценностей имеет вид: $p(x_1, x_2, x_3) = c \cdot (1 + x_1 x_2 x_3)$ для $x_i \in [0;1]$. Найдите равновесные Нэша и средний доход продавца.

Самое сложное — это понять, что является здесь стратегией игрока. Напомню правила. Текущая цена равна времени прошедшему с момента начала аукциона. В начале все игроки жмут свои кнопки. Каждый сам решает, когда ему отпустить кнопку. Как только кнопку отпускает предпоследний игрок, аукцион оканчивается. Победителем считается тот, кто продолжает давить. Он получает товар, по текущей цене на конец аукциона. Во время аукциона игроки знают кто и когда его покидает. Стратегия игрока может учитывать эту информацию. Если ценности зависимы, так оно и окажется.

Рассмотрим первого игрока. Стратегия должна говорить игроку: до которого времени давить кнопку, если никто другой не вышел, и до которогу времени давить кнопку, если один другой игрок на цене p. При всем при этом стратегия может учитывать известное игроку значение X_1. В результате стратегия игрока в симметричном случае описывается двумя (!) функциями $(b^3(x), b^2(x, p))$:

- $b^3(x)$ — до которого времени давить кнопку, если в игре 3 игрока
- $b^2(x, p)$ — до которого времени давить кнопку, если в игре 2 игрока, и один ушел на цене p

Сейчас мы предъявим равновесные стратегии, а затем докажем, что они действительно равновесные.

Пусть:

- $b^3(x) = x + x + x = 3x$
- $b^2(x, p) = x + x + \frac{p}{3} = 2x + \frac{p}{3}$

Откуда взялись эти стратегии?

Первая, $b^3()$, получилась подстановкой x в платежную фукнцию вместо каждого X_i. Чтобы понять вторую, $b^2(x, p)$, представим себе, что игрок спрашивает сам себя «Что будет, если я прямо сейчас выиграю аукион?»

Допустим, что текущая цена равна p, и остальные два игрока используют такую же $b^3()$. Первый игрок выиграет аукцион, только если остальные два игрока прямо сейчас покинут его. Но это означает, что для них $b^3(x) = p$. Значит для уходящего игрока $x = \frac{p}{3}$. Ага! Мы смогли восстановить x уходящего игрока зная цену на которой он вышел. И мы вводим новую функцию $b^2(x, p)$, которая учитывает этот факт.

Чем они хороши?

Сначала определим, в каком порядке будут выходить игроки, если все используют указанную стратегию. Сначала выйдет тот игрок, у кого минимальное значение $b^3(X_i)$. Поскольку $b^3()$ строго возрастающая функция первым выйдет игрок с минимальным X_i. Допустим это произошло на цене p. Следующим игроком из двух оставшихся выйдет тот, у кого $b^2(X_i, p)$ меньше. Но $b_2(x, p)$ строго возрастает по x, а значение p одинаковое, значит вторым выйдет тот из оставшихся игроков, у кого X_i меньше. Мораль. Если игроки используют эти стратегии, то они выходят в порядке возрастания ценностей и товар получает тот, у кого X_i наибольшее. Это хорошее свойство указанной стратегии, но еще не доказательство оптимальности.

Почему же они все-таки равновесны?

Рассматриваем ситуацию, когда все игроки кроме первого используют указанную стратегию. Мы сейчас посчитаем какой выигрыш получает первый игрок, если тоже использует указанную стратегию и сколько он получит, если отклонится.

Пусть первый игрок также использует стратегию $(b^3(x), b^2(x, p))$. Возможно две ситуации:

- Первый игрок выигрывает аукцион.

  Это происходит, если его ценность выше других, т.е. $X_1 > Y_1$. В этом случае первый выход из игры происходит при цене $b^3(Y_2)$, а второй — при цене $b^2(Y_1, b^3(Y_2))$. Значит первый игрок заплатит $b^2(Y_1, b^3(Y_2))$. И выигрыш первого игрока равен:

  $$V_1 - b^2(Y_1, b^3(Y_2)) = X_1 + X_2 + X_3 - b^2(Y_1, b^3(Y_2)) = X_1 + Y_1 + Y_2 - Y_1 - Y_1 - Y_2 = X_1 - Y_1 > 0 \tag{13.1}$$

  Если игрок захочет отклонится, т.е. не выиграть аукцион, то он получит 0. Значит отклоняться не выгодно.

- Первый игрок проигрывает аукцион.

Это происходит, если его ценность не максимальная, т.е. $X_1 < Y_1$. В этом случае его доход равен 0. Сколько игрок получит, если захочет отклонится, т.е. выиграть?

$$V_1 - b^2(Y_1, b^3(Y_2)) = X_1 + X_2 + X_3 - b^2(Y_1, b^3(Y_2)) = X_1 + Y_1 + Y_2 - Y_1 - Y_1 - Y_2 = X_1 - Y_1 < 0 \tag{13.2}$$

Отклоняться не выгодно.

Замечания:

- При определении стратегий была важна связь между X_i и V_i, но не совместная функция плотности X_i
- Если после окончания игры игроки раскроют значения своих X_i друг другу, то никто не пожалеет о выбранной стратегии. Проигравшие не жалеют, т.к. при известных X_i им ничего не светит. Выигравший не жалеет, т.к. при фиксированных стратегиях других игроков выиграть за меньшую сумму он не мог.
- Аукцион как и раньше очень сильно похож на аукцион второй цены

1.5 Супермодулярные функции

Введем более короткие обозначения для максимума и минимума:

$$x \wedge y \wedge z = \min\{x, y, z\} \tag{14.1}$$

$$x \vee y \vee z = \max\{x, y, z\} \tag{14.2}$$

Эти обозначения объясняются просто. Кто-то когда-то давно заметил, что минимум и максимум нескольких чисел ведут себя точно так же, как пересечение и объединение множеств:

Убедитесь, что для множеств верно:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \tag{14.3}$$

А для чисел верно:

$$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c) \tag{14.4}$$

Докажите, что, например, верны формулы:

$$1_A \wedge 1_B = 1_{A \cap B} \tag{14.5}$$

$$1_A \vee 1_B = 1_{A \cup B} \tag{14.6}$$

Аналогичные операции применяются и к векторам:

Определение 14.7. Если $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, то:

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = (x_1 \wedge y_1, \ldots, x_n \wedge y_n) \tag{14.8}$$

$$\vec{x} \vee \vec{y} = (x_1 \vee y_1, \ldots, x_n \vee y_n) \tag{14.9}$$

В экономическом моделировании то там, то сям возникают супермодулярные функции:

Определение 14.10. Функция $f()$ называется супермодулярной, если для любых $\vec{x}$ и $\vec{y}$

$$f(\vec{x} \wedge \vec{y}) + f(\vec{x} \vee \vec{y}) \geq f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \tag{14.11}$$

Пример 14.12. Функция $f(x_1, x_2) = x_1$ является супермодулярной. Действительно, левая часть равна:

$$f(\vec{x} \wedge \vec{y}) + f(\vec{x} \vee \vec{y}) = x_1 \wedge y_1 + x_1 \vee y_1 = x_1 + y_1 \tag{14.13}$$

Правая часть равна:

$$f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = x_1 + y_1 \tag{15.1}$$

Пример 15.2. Функция $f(x) = x^3$ является супермодулярной:

$$f(x \wedge y) + f(x \vee y) = (x \wedge y)^3 + (x \vee y)^3 = x^3 \wedge y^3 + x^3 \vee y^3 = x^3 + y^3 = f(x) + f(y) \tag{15.3}$$

Пример 15.4. Функция $f(x_1, x_2) = -x_1 x_2$ не является супермодулярной:

$$f((1,2) \wedge (2,1)) + f((1,2) \vee (2,1)) = f(2,2) + f(1,1) = -4 - 1 = -5 \tag{15.5}$$

$$f(1,2) + f(2,1) = -2 - 2 = -4 \tag{15.6}$$

Теорема 15.7. *Если у функции f существуют вторые производные, то она является супермодулярной если и только если для $i \neq j$:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \geq 0 \tag{15.8}$$

Доказательство. В этой лекции мы в него поверим и его можно использовать при решении домашних задач. А докажем в 3-ей лекции. □

Нам эти функции понадобятся в таком контексте.

Мы предположим, что игрок не полностью знает ценность товара для себя. Т.е. каждый игрок получает от Природы сигнал X_i. Отныне X_i — это не ценность товара для игрока i!

Определение 15.9. Случайные величины X_1, ..., X_n с совместной функцией плотности $f(x_1, \dots, x_n)$ называются аффилированными, если $ln(f(\vec{x}))$ — супермодулярная функция.

В силу того, что логарифм произведения равен сумме логарифмов, это определение эквивалентно следующему:

Определение 15.10. Случайные величины X_1, ..., X_n с совместной функцией плотности $f(x_1, \dots, x_n)$ называются аффилированными, если

$$f(\vec{x} \wedge \vec{y}) \cdot f(\vec{x} \vee \vec{y}) \geq f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) \tag{15.11}$$

1.6 Задачи

1. Пусть A и B — это события. Верно ли, что $E(1_A|B) = P(A|B)$?

2. Пусть A и B — это независимые события. Верно ли, что $E(1_A|B) = E(1_A)$?

3. С помощью о-малых найдите:

   (a) функцию плотности минимума остальных ставок, $p_{Y_{n-1}}(t)$

   (b) функцию плотности $p_{Y_{(6)}}(t)$

   (c) совместную функцию плотности $p_{Y_1,Y_{n-1}}(a,b)$

   (d) совместную функцию плотности $p_{Y_3,Y_6}(a,b)$

   (e) совместную функцию плотности $p_{Y_{n-2},Y_{n-1}}(a,b)$

   (f) совместную функцию плотности $p_{X_1,Y_1}(a,b)$

4. Рассмотрим аукцион первой цены двух игроков. Ценности независимы и имеют функцию плотности $f(t) = 2t$ на $[0;1]$.

   Найдите:

   (a) Равновесие Нэша, т.е. детерминистические стратегии $b(x)$

   (b) Детерминистическую функцию $pay_1(x)$

   (c) Детерминистическую функцию $\widehat{pay_1}(b)$

   (d) Детерминистическую функцию $q_1(x)$

   (e) Детерминистическую функцию $\widehat{q_1}(b)$

   (f) Функцию распределения случайной величины Pay_1

   (g) $E(Pay_1)$, $Cov(Pay_1, Pay_2)$, $Var(Pay_1)$

   (h) Функцию распределения случайной величины R

   (i) $E(R)$, $Var(R)$, $Cov(R, Pay_1)$

   (j) Тонкая разница! Если применить детерминистическую функцию $pay_1(x)$ к случайной величине X_1, то мы получим случайную величину $pay_1(X_1)$. Временно обозначим ее L_1 (и забудем это обозначение после этого упражнения). Найдите функцию распределения L_1, $E(L_1)$, $Var(L_1)$, $Cov(L_1, L_2)$

5. Предположим, что на аукционе первой цены продается участок с домом. Торгуются два игрока. Природа сообщает первому игроку ценность дома, X_1, а второму — ценность участка, X_2. При этом ценности игроков определяются по формулам: $V_1 = X_1 + 0.5X_2$ — первому важнее дом, $V_2 = 0.5X_1 + X_2$ — второму важнее участок. Ценности независимы и равномерны на $[0;1]$. Найдите равновесие Нэша.

6. Сколько функций потребуется (и от каких переменных каждая из них зависит) чтобы описать стратегию в симметричном равновесии Нэша в кнопочном аукционе с 4-мя игроками? С 5-ю? С n игроками?

7. Сколько функций потребуется (и от каких переменных каждая из них зависит) чтобы описать стратегию в несимметричном равновесии Нэша в кнопочном аукционе с 4-мя игроками? С 5-ю? С n игроками?

8. Рассмотрим кнопочный аукцион с тремя игроками. Каждый игрок знает своё X_i, а ценности определяются по правилу:

$$V_1 = X_1 + X_2 \cdot X_3 V_2 = X_2 + X_1 \cdot X_3 V_3 = X_3 + X_1 \cdot X_2 \qquad (16.1)$$

   Сигналы X_i независимы и имеют равномерное распределение на $[0;1]$. Найдите равновесие Нэша и средний доход продавца.

9. Найдите $(1,2,3) \wedge (5,0,2)$ и $(1,2,3) \vee (5,0,2)$

10. Являеются ли супермодулярными функции:

    (a) $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$
    (b) $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ при положительных x_i
    (c) $f(a,b,c) = a \wedge b \wedge c$
    (d) $f(a,b,c) = a \vee b \vee c$

11. Существует ли функция одной переменной не являющаяся супермодулярной?

12. Верно ли, что X_i аффилированы если:

    (a) X_1, ..., X_n — независимы
    (b) $f(x,y) = x + y$ при $x, y \in [0;1]$
    (c) $f(x,y) = \frac{1+4xy}{2}$ при $x, y \in [0;1]$

13. Пара случайных величин X и Y имеет совместное нормальное распределение с корреляцией ρ. При каких ρ они будут аффилированы?

1.7 Решения задач

1. Да. $E(1_A|B) = E(1_A 1_B)/P(B) = P(A \cap B)/P(B) = P(A|B)$

2. Да. $E(1_A|B) = P(A|B) = P(A) = E(1_A)$

3. (a) $p_{Y_{n-1}}(t) = (n-1)f(t)(1-F(t))^{n-2}$
   (b) $p_{Y_{(6)}}(t) = (n-1)f(t)C_{n-1}^5(1-F(t))^5(F(t))^{n-7}$
   (c) $p_{Y_1,Y_{n-1}}(a,b) = (n-1)(n-2)f(a)f(b)(F(a)-F(b))^{n-3}$
   (d) $p_{Y_3,Y_6}(a,b) = (n-1)(n-2)f(a)f(b)(F(b))^{n-7}(1-F(a))^2(F(a)-F(b))^2$
   (e) $p_{Y_{n-2},Y_{n-1}}(a,b) = (n-1)(n-2)f(a)f(b)(1-F(a))^{n-3}$
   (f) $p_{X_1,Y_1}(a,b) = f(a)(n-1)f(b)(F(b))^{n-2}$

4. (a) Стратегии $b(x)$ мы уже искали в предыдущей домашней работе, $b(x) = \frac{2}{3}x$
   (b) Функцию $pay_1(x)$ проще всего найти через теорему 8.12:

$$pay_1(x) = \int_0^x t(n-1)f(t)(F(t))^{n-2}dt = \frac{2}{3}x^3 \qquad (17.1)$$

(c) Функция $\widehat{q_1}(b)$ — это вероятность того, что первый выиграет, если поставит b. Значит:

$$\widehat{q_1}(b) = P(Bid_2 < b) = P(\frac{2}{3}X_2 < b) = P(X_2 < \frac{3}{2}b) = F(\frac{3}{2}b) = (\frac{3}{2}b)^2 \tag{17.2}$$

(d) Ищем $\widehat{pay_1}(b)$:

$$\widehat{pay_1}(b) = E(b \cdot 1_{Bid_2<b}) = b \cdot P(Bid_2 < b) = b(\frac{3}{2}b)^2 \tag{17.3}$$

(e) Функция $q_1(x)$ — это вероятность того, что первый выиграет при ценности x, значит $q_1(x) = x^2$

(f) Случайная величина Pay_1 — интересный зверь. Она не является ни дискретной, ни непрерывной. Заметим, что в равновесии с вероятностью 0.5 первый проигрывает аукцион и не платит ничего. Значит у функции распределения скачок высотой 0.5 в точке $t = 0$! А в остальных точках — она непрерывна. Замечаем, что область значений Pay_1 — отрезок $[0; 2/3]$...

Более детально рассматриваем точки $t \in (0; 2/3)$

$$\begin{aligned} P(Pay_1 \le t) = P(Pay_1 \le t \cap X_1 > X_2) + P(Pay_1 \le t \cap X_1 < X_2) = \\ = P(Pay_1 \le t \cap X_1 > X_2) + P(X_1 < X_2) = P(Pay_1 \le t \cap X_1 > X_2) + 0.5 \end{aligned} \tag{18.1}$$

Считаем первую вероятность отдельно:

$$\begin{aligned} P(Pay_1 \le t \cap X_1 > X_2) = P(\frac{2}{3}X_1 \le t \cap X_1 > X_2) = \\ P(X_1 \le 1.5t \cap X_1 > X_2) = \int_0^{1.5t} \int_0^{x_1} 2x_1 2x_2 dx_2 dx_1 = \frac{81}{32}t^4 \end{aligned} \tag{18.2}$$

Итого, получаем функцию распределения:

$$F_{Pay_1}(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 0.5 + \frac{81}{32}t^4, t \in [0; 2/3] \\ 1, t > 2/3 \end{cases} \tag{18.3}$$

Функции плотности у Pay_1 нет! Функция распределения разрывна. Тем не менее выпишем производную:

$$f_{Pay_1}(t) = 0.5d(0) + \frac{81}{8}t^3 \tag{18.4}$$

В начале формулы идет некое мифическое $0.5d(0)$ — это просто условная запись. Она нужна чтобы помнить, что у $F(t)$ в точке $t = 0$ был скачок высотой 0.5.

(g) $E(Pay_1)$, , $Var(Pay_1)$

Считаем мат. ожидание. Это легко. От дискретной части появляется $0 \cdot 0.5$. От непрерывной — интграл.

$$E(Pay_1) = 0 \cdot 0.5 + \int_0^{2/3} t \cdot \frac{81}{8}t^3 dt = ... = 4/15 \tag{18.5}$$

Для дисперсии нам нужно:

$$E(Pay_1^2) = 0^2 \cdot 0.5 + \int_0^{2/3} t^2 \cdot \frac{81}{8} t^3 dt = ... = 4/27 \tag{18.6}$$

Дисперсия равна:

$$Var(Pay_1) = E(Pay_1^2) - E(Pay_1)^2 = 4/27 - (4/15)^2 = 52/675 \tag{18.7}$$

Два игрока никогда не платят одновременно, поэтому $Pay_1 \cdot Pay_2$ тождественно равно нулю. Отсюда:

$$Cov(Pay_1, Pay_2) = E(Pay_1 Pay_2) - E(Pay_1)E(Pay_2) = 0 - (4/15)^2 \tag{19.0}$$

(h) Случайная величина R — это не что иное, как максимум из ставок:

$$R = \max\{\frac{2}{3}X_1, \frac{2}{3}X_2\} = \frac{2}{3}\max\{X_1, X_2\} \tag{19.1}$$

Функция распределения:

$$F_R(t) = P(R \leq t) = P(\frac{2}{3}\max\{X_1, X_2\} \leq t) = P(X_1 < \frac{3}{2}t \cap X_2 < \frac{3}{2}t) = F(\frac{3}{2}t)^2 = \left(\frac{3}{2}t\right)^4 \tag{19.2}$$

Это непрерывная случайная величина, и у нее есть функция плотности:

$$f_R(t) = 4\left(\frac{3}{2}t\right)^3 \frac{3}{2} \tag{19.3}$$

(i) Для нахождения $E(R)$, $Var(R)$, $Cov(R, Pay_1)$ вспоминаем, что $R = Pay_1 + Pay_2$.

$$E(R) = E(Pay_1 + Pay_2) = 2E(Pay_1) \tag{19.4}$$

$$Var(R) = Var(Pay_1) + Var(Pay_2) + 2Cov(Pay_1, Pay_2) \tag{19.5}$$

$$Cov(R, Pay_1) = Cov(Pay_1 + Pay_2, Pay_1) = Var(Pay_1) + Cov(Pay_2, Pay_1) \tag{19.6}$$

(j) В нашем случае $L_1 = \frac{2}{3}X_1^3$.
Функция распределения:

$$F_{L_1}(t) = P(L_1 < t) = P(\frac{2}{3}X_1^3 < t) = P(X_1 < (1.5t)^{1/3}) = F((1.5t)^{1/3}) = (1.5t)^{2/3} \tag{19.7}$$

В данном случае речь идет о непрерывной случайной величине, у нее есть функция плотности:

$$f_{L_1}(t) = 1.5\frac{2}{3}(1.5t)^{-1/3} \tag{19.8}$$

Мат. ожидание:

$$E(L_1) = \int_0^1 \frac{2}{3}t^3 2t dt = \frac{4}{15} \tag{19.9}$$

Дисперсия:

$$Var(L_1) = E(L_1^2) - E(L_1)^2 = \frac{1}{9} - \left(\frac{4}{15}\right)^2 = \frac{1}{25} \tag{19.10}$$

Поскольку X_1 и X_2 независимы, $pay(X_1)$ и $pay(X_2)$ тоже независимы, и $Cov(L_1, L_2) = 0$

Заметим, что $E(Pay_1) = E(pay_1(X_1)$, но дисперсия и ковариация отличаются! Т.е. Pay_1 и $pay_1(X_1)$ — это разные случайные величины.

5. От рассмотренного примера отличается только коэффициентом 0.5 перед $E(X_2 1_{W_1}|...)$. Значит финальное дифф. уравнение имеет вид:

$$-b'(x)F(x) + (x - b(x))f(x) + 0.5 \cdot xf(x) = 0 \tag{20.1}$$

При равномерном распределении:

$$-b'(x)x + (x - b(x)) + 0.5 \cdot x = 0 \tag{20.2}$$

Подбираем сразу линейное решение, получаем $b(x) = 0.75x$

6. Для четырех. $b^4(x)$, $b^3(x, p_4)$, $b^2(x, p_3, p_4)$ (названия переменных объясняются соглашением, что p_i — это моменты выхода игроков в порядке убывания)

Для пяти. $b^5(x)$, $b^4(x, p_5)$, $b^3(x, p_4, p_5)$, $b^2(x, p_3, p_4, p_5)$

Для n игроков. Нужна $(n-1)$ функция, $b^n(x)$, $b^{n-1}(x, p_n)$, ..., $b^2(x, p_3, ..., p_n)$

7. Начнем все-таки с трех. Заметим, что у каждого игрока свои стратегии! Например, рассмотрим первого:

(a) $b_1^3(x)$ — до какого момента давить на кнопку, если в игре 3 игрока.

(b) $b_1^{2:-2}(x, p)$ — до какого момента давить на кнопку, если в игре 2 игрока и первым вышел второй.

(c) $b_1^{2:-3}(x, p)$ — до какого момента давить на кнопку, если в игре 2 игрока и первым вышел третий.

Для четырех (функции описывают, до какого момента давить на кнопку)

(a) $b_1^4(x)$ — если все четверо в игре

(b) $b_1^{3:2}(x, p)$ — если вышел только второй на цене p

(c) $b_1^{3:3}(x, p)$ — если вышел только третий на цене p

(d) $b_1^{3:4}(x, p)$ — если вышел только четвертый на цене p

(e) $b_1^{2:2,3}(x, p_3, p_4)$ — если сначала вышел второй, на цене p_4, а затем — третий, на цене p_3

(f) $b_1^{2:2,4}(x, p_3, p_4)$

(g) $b_1^{2:3,4}(x, p_3, p_4)$

(h) $b_1^{2:3,2}(x, p_3, p_4)$

(i) $b_1^{2:4,2}(x, p_3, p_4)$

(j) $b_1^{2:4,3}(x, p_3, p_4)$

Итого: $1 + 3 + 6 = 10$ функций.

Для пяти: $1 + 4 + 12 + 24 = 41$ функция.

Для произвольного n: $C^1_{n-1}1! + C^2_{n-1}2! + C^3_{n-1}3! + C^4_{n-1}4! + ...C^{n-2}_{n-1}(n-2)!$

8. Сначала равновесие. Первая функция — $b^3(x) = x + x^2$. Со второй чуть посложнее... Если игрок вышел на цене p, то $x + x^2 = p$. Решаем квадратное уравнение, берем корень из $[0; 1]$:
$$x = \frac{\sqrt{1+4p} - 1}{2} \tag{21.0}$$
И получаем:
$$b^2(x, p) = x + x\frac{\sqrt{1+4p} - 1}{2} = x\frac{\sqrt{1+4p} + 1}{2} \tag{21.1}$$
Пусть Z_1 — наибольшая из всех X_i, Z_2 — вторая по величине, а Z_3 — самая маленькая. Тогда побеждает игрок с сигналом Z_1. При этом он платит $b^2(Z_2, b(Z_3)) = Z_2 + Z_2Z_3$.
Значит:
$$E(R) = E(Z_2 + Z_2Z_3) = E(Z_2) + E(Z_2Z_3) \tag{21.2}$$
Для их расчета привлекаем банду о-малых.
Ищем функцию плотности Z_2. Три способа выбрать Z_2, одна из двух X_i должна быть больше избранной (сомножитель $(1-t)$), другая — меньше (сомножитель t):
$$p_{Z_2}(t) = 3 \cdot 2 \cdot t(1-t) \tag{21.3}$$
Совместная функция плотности положительна только при $a > b$ и равна:
$$p_{Z_2,Z_3}(a, b) = 6(1-a) \tag{21.4}$$
После интегрирования первой получаем очевидный результат, что мат. ожидание медианы трех равномерных случайных величин равно половине:
$$E(Z_2) = ... = 1/2 \tag{21.5}$$
И после интегрирования второй:
$$E(Z_2Z_3) = ... = \frac{3}{20} \tag{21.6}$$
Итого: $E(R) = \frac{13}{20}$

9. Ответ: $(1, 2, 3) \wedge (5, 0, 2) = (1, 0, 2)$ и $(1, 2, 3) \vee (5, 0, 2) = (5, 2, 3)$

10. К первым двум можно применять теорему 15.7.
   (a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0$, супермодулярна
   (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} > 0$, супермодулярна
   (c) да, супермодулярна. Достаточно, например, рассмотреть два случая:
      i. $x_1 > y_1$, $x_2 > y_2$, $x_3 > y_3$. Здесь $f(\vec{x} \wedge \vec{y}) = f(\vec{y})$ и $f(\vec{x} \vee \vec{y}) = f(\vec{x})$ и неравенство выполнено.

ii. $x_1 > y_1$, $x_2 > y_2$, $x_3 < y_3$ Здесь нужно немного помучиться с рассмотрением разных порядков...

(d) нет, не супермодулярна. Например: $\vec{x} = (3,3,1)$ и $\vec{y} = (2,2,4)$. Тогда: $\vec{x} \wedge \vec{y} = (2,2,1)$ и $\vec{x} \vee \vec{y} = (3,3,4)$. Находим, что: $f(\vec{x} \wedge \vec{y}) = 2$, $f(\vec{x} \vee \vec{y}) = 4$, $f(\vec{x}) = 3$, $f(\vec{y}) = 4$

11. Нет. Если $x = y$, то $x \wedge y = x \vee y = x = y$ и $f(x \wedge y) + f(x \vee y) = f(x) + f(y)$. Если $x \neq y$, то одно из этих чисел больше, а другое — меньше. А это значит, что $x = x \wedge y$ и $y = x \vee y$. Или наоборот, $x = x \vee y$ и $y = x \wedge y$.

12. (a) Независимые случайные величины аффилированы: $\ln(f(x,y,z) = \ln(f(x)) + \ln(f(y)) + \ln(f(z))$

(b) Если $f(x,y) = x + y$, то

$$\frac{\partial^2 \ln(f)}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{(x+y)^2} < 0 \tag{22.1}$$

Значит, величины не аффилированны. Кстати, в этом примере ради интереса можно посчитать ковариацию: $E(X) = E(Y) = 7/12$, $E(XY) = 1/3$, $Cov(X,Y) = -1/144$.

(c) Если $f(x,y) = \frac{1+4xy}{2}$, то:

$$\frac{\partial^2 \ln(f)}{\partial x \partial y} = ... = \frac{4}{(1+4xy)^2} \geq 0 \tag{22.2}$$

Случайные величины аффилированны

13. Для начала заметим, что ответ на вопрос не зависит от мат. ожидания и дисперсии. Это связано с тем, что в силу теоремы 15.7 нужна только неотрицательность смешанной второй производной логарифма плотности при любых x и y. Выбор мат. ожидания — это перенос графика плотности вдоль осей, выбор дисперсии — это растяжение графика плотности вдоль осей. Если была где-то точка с отрицательной второй смешанной производной, то она просто поменяет свои координаты.

Рассматриваем случай с нулевым мат. ожиданием и единичной дисперсией. Ковариационная матрица имеет вид:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \tag{22.3}$$

Функция плотности равна:

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi det(S)} exp\left(-\frac{1}{2}(x\ y)S^{-1}(x\ y)^t\right) \tag{22.4}$$

После логарифмирования получаем (нам интересна только смешанная вторая производная, поэтому следим только за коэффициентом при xy):

$$\ln(p(x,y)) = ... + \frac{\rho}{1-\rho^2}xy \tag{22.5}$$

Значит двумерное совместное нормальное распределение аффилированно если корреляция неотрицательная.