Моделирование аукционов. Догонялка.

1. Можно решать задачи в любом порядке.
2. При подозрении на опечатку — спрашивайте в блоге!
3. Насколько подробно все расписывать — решай сам исходя из конкретной ситуации. Очевидно, что в примере $1+2+3=?$ ответ можно написать сразу, а взятие интеграла $\int x^5 \cos(x) dx$ требует каких-то промежуточных записей.
4. Паниковать при решении догонялки строжайше запрещено!
5. Для каждой задачи обязательно нужно спрогнозировать свою оценку. Не надо скромничать, лучше попытаться объективно оценить свое решение. За неверное оценивание баллы снижаться не будут, а верное оценивание даст возможность чему-то научиться. Опыт показывает, что оценка своих собственных решений позволяет резко улучшить их качество. Прогноз своей оценки пишем в табличку!
6. Не забудь подписать свою работу. Пожалуйста!
7. Срок сдачи догонялки: 12 мая, четверг.

Имя:

Отчество:

Фамилия:

Группа:

	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Итого
Прогноз оценки						
Оценка (от 0 до 5)						

1. Кнопка «Buy now!»

   Два игрока торгуются за товар на кнопочном аукционе с возможностью немедленной покупки товара. Ценности $X_i = V_i$ независимы и равномерны на $[0;1]$. Каждый игрок знает свою ценность X_i. Продавец дает игрокам возможность купить товар немедленно по фиксированной цене a. Подробнее. В начале аукциона текущая цена равна нулю и оба игрока жмут на свои кнопки. Текущая цена растет с течением времени. Кто первый отпустил свою кнопку, тот проиграл. В этот момент аукцион заканчивается и победитель получает товар по текущей цене. Но в любой момент пока аукцион не закончился, любой игрок может сказать: «Покупаю по цене a». В этом случае ему достается товар по цене a и аукцион заканчивается.

   (a) Что является стратегией игрока на этом аукционе?

   (b) Применима ли в данном случае теорема об одинаковой доходности?

   (c) Найдите равновесие Нэша

2. Есть шесть покупателей. У продавца две чудо-швабры. Каждый покупатель хочет только одну чудо-швабру. Продавец решил продавать эти две чудо швабры путем двух последовательных аукционов первой цены, на каждом из которых будет выставляться одна чудо-швабра. Каждый игрок знает ценность чудо-швабры для себя, $X_i = V_i$. Ценности независимы и равномерны на $[0;1]$. Ценности не меняются со временем. Когда проводится второй аукцион известна только ставка, которую сделал победитель первого.

(a) Применима ли в данном случае теорема об одинаковой доходности или ее небольшая вариация?

(b) Что является стратегией игрока в этой игре?

(c) Найдите равновесие Нэша

(d) Верно ли, что средние цены на обоих аукционах равны?

(e) Какова вероятность того, что на первом аукционе цена будет больше, чем на втором?

3. В моделях аукциона первой и второй цены с независимыми, равномерными на $[0;1]$ ценностями покупателей сравните дисперсию выигрыша продавца.

4. Может ли цена расти с ростом предложения?

Рассмотрим кнопочный аукцион, в котором участвуют три игрока. Продавец продает одинаковых чудо-швабр. Каждому игроку нужна только одна чудо-швабра. Ценность чудо-швабры для всех игроков одинакова и равна $V = X_1+X_2+X_3$. Каждый из игроков знает только свое X_i. Сигналы X_i независимы и имеют регулярное распределение $F(t)$. Чудо-швабры по одной достаются тем игрокам, кто отпустил кнопку позже всех.

(a) Найдите равновесие Нэша для случая $k = 1$

(b) Найдите равновесие Нэша для случая $k = 2$

(c) Приведите пример распределения $F(t)$ при котором средняя цена растет с увеличением предложения с $k = 1$ до $k = 2$

$k = 1$: $b^3(x) = 3x$, $b^2(x, p_3) = 2x + p/3$

$k = 2$. Поскольку аукцион заканчивается при выходе первого игрока, то стратегия определяется функцией $b^3(x)$.

Поскольку мы такой аукцион не решали, то используем стандартный подход с максимизацией прибыли:

$$E(Profit_1|X_1 = x, Bid_1 := b_1) = E((X_1 + X_2 + X_3 - b(Y_2))1_{b_1>b(Y_2)}|X_1 = x, Bid_1 := b_1) \quad (1)$$

Чудо-замена $b_1 = b(a)$ и независимость X_i дают нам:

$$\pi_1(x, b(a)) = E((x+X_2+X_3)-b(Y_2))1_{a>Y_2}) = xP(Y_2 < a)+2E(X_2\cdot 1_{Y_2<a})-E(b(Y_2)\cdot 1_{Y_2<a}) \quad (2)$$

Сосредоточимся на $E(X_2 \cdot 1_{Y_2<a})$:

$$E(X_2 \cdot 1_{Y_2<a}) = E(X_2 \cdot 1_{X_2\wedge X_3<a}) = E(X_2 \cdot 1_{X_2<a} \cdot 1_{X_2<X_3}) + E(X_2 \cdot 1_{X_3<a} \cdot 1_{X_3<X_2}) \quad (3)$$

5. Может ли цена расти с падением спроса?

Рассмотрим кнопочный аукцион, в котором могли бы участвовать три игрока. Продается одна чудо-швабра. Ценность чудо-швабры для всех игроков одинакова и равна $V = X_1 + X_2 + X_3$. Каждый из трех потенциальных игроков знает только свое X_i. Сигналы X_i независимы и имеют регулярное распределение $F(t)$. Перед началом аукциона продавец случайным образом выбирает одного игрока и говорит: «Ты мне не нравишься, поэтому ты в аукционе не участвуешь». Оставшиеся двое участвуют в аукционе.

(a) Найдите равновесие Нэша

(b) Приведите пример распределения $F(t)$ при котором средняя цена растет с падением спроса

Hint: Задача 7 из лекции 3...