

По поводу неразберихи с PBE. (ver 23.01.06)

Мы будем рассматривать конечные игры с полной несовершенной информацией.

Равновесие по Нэшу (Nash Equilibrium, NE)

Равновесие по Нэшу, совершенное в подыграх (Subgame Perfect Nash Equilibrium, SPNE)

Слабое совершенное Байесовское равновесие (Weak Perfect Bayesian Equilibrium, WPBE). Система (профиль стратегий, веры) (β, μ) называется WPBE, если выполнены требования: (Sequential rationality, Последовательная рациональность):

Обозначим $U_i(\beta, \mu|I)$ - ожидаемый выигрыш i -го игрока, при использовании игроками профиля стратегий β , вер μ и при условии достижения информационного множества I .

Для любого игрока i и для любого его информационного множества I :

$$U_i((\beta_i, \beta_{-i}), \mu|I) \geq U_i((\beta'_i, \beta_{-i}), \mu|I)$$

При фиксированных верах и стратегиях других игроков, ни один игрок не может увеличить свой условный ожидаемый выигрыш.

(Weak consistency, Слабая состоятельность):

Если $x \in I$ и $P(I) > 0$ то $\mu(x) = \frac{P(x)}{P(I)}$

Если вероятность попасть в множество I строго положительна, то веры в I определяются по формуле условной вероятности.

Альтернативные названия:

Assessment Equilibrium - Binmore, FG

Perfect Bayesian Equilibrium - Squintani, Lecture notes

Perfect Bayesian Equilibrium - Larry Blume, Lecture notes

Совершенное Байесовское равновесие - Коковкин, НГУ

Weak Sequential Equilibrium - Osborne, IGT

Слабое секвенциальное равновесие - Данилов, РЭШ

WPBE - MWG

Секвенциальное равновесие (Sequential Equilibrium, SE).

Система (профиль стратегий, веры) (β, μ) называется SE, если выполнены требования: (Sequential rationality):

(Consistency, состоятельность): Существует последовательность систем (профиль стратегий, веры), которая сходится к (β, μ) , β_n является полностью смешанным профилем стратегий, и μ_n слабо согласовано с β_n .

Это общепринятое название.

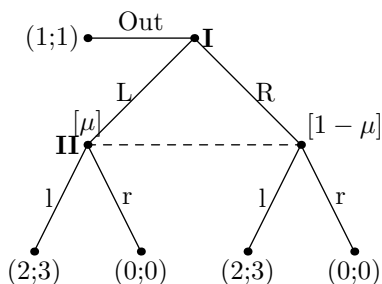
Сильное секвениальное равновесие - Данилов

Формулу условной вероятности часто называют формулой Байеса.

SPNE может не являться WPBE. Т.е. профиль стратегий β может быть совершенным в подыграх, однако ни при каких верах μ , система (β, μ) не будет являться WPBE.

Пример:

Упражнение. Убедитесь в том, что профиль (Out, r) является NE, и следовательно, SPNE,



т.к. в игре нет собственных подыгр. Однако ни при каких верах μ система $\{(Out, r), \mu\}$ не будет WPBE.

WPBE может не являться SPNE. Т.е. система из профиля β и вер μ может быть WPBE, но сам профиль β может не быть совершенным в подыграх. Пример после двух определений PBE.

Верны следующие утверждения:

$$SE \subseteq WPBE \subseteq NE$$

$$SE \subseteq SPNE \subseteq NE$$

В конечной игре с несовершенной информацией существует SE в смешанных стратегиях.

Существует также понятие Совершенное Байесовское равновесие (Perfect Bayesian Equilibrium, PBE). Будьте осторожны, под этим понятием разные авторы подразумевают разные вещи!

Есть три основные группы лиц:

1. Osborne-Rubinstein, Fudenberg-Tirole, под PBE подразумевают равновесие в динамических играх с неполной информацией! Этот класс игр сводится к частному случаю игр с несовершенной информацией.

Т.е. собственно PBE оказывается не определенным для произвольной игры с несовершенной информацией!!! PBE определен для иного класса игр, которые в принципе можно свести к играм с несовершенной информацией.

2. Squintani и ряд других авторов, под PBE подразумевает просто WPBE.

3. Gibbons, Slantchev и ряд других авторов НЕ дают строго определения PBE, ограничиваясь оборотом вроде "веры должны определяться по правилу Байеса везде, где это возможно". При этом они подчеркивают, что PBE - это не то же самое, что WPBE.

Остановимся более подробно на случае 1.

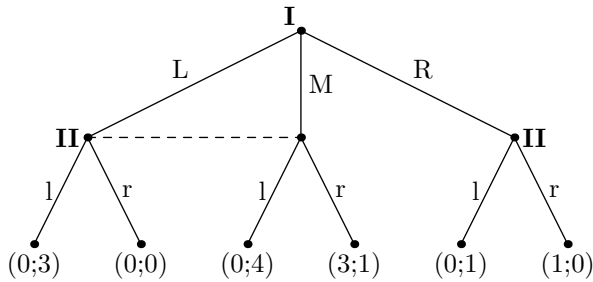
Игра с неполной информацией.

Природа присваивает каждому игроку тип. Каждый игрок знает только свой тип. Затем игроки играют в последовательную игру с наблюдаемыми ходами. Допускается, что некоторые ходы делаются одновременно. Платежи зависят от сделанных ходов и типов.

Каждую игру с неполной информацией можно представить в виде игры с несовершенной информацией.

Существуют игры с несовершенной информацией, которым не соответствует ни одной иг-

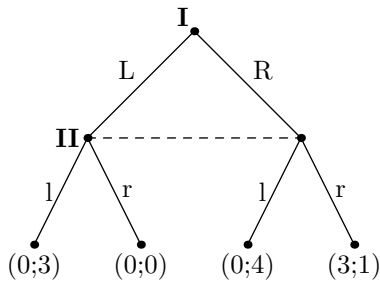
ры с неполной информацией.
Например:



Если у i -го игрока несколько типов, то на каждом этапе игры, все остальные игроки должны иметь мнение о вероятности каждого из типов. Эти мнения должны быть согласованы (разные игроки должны быть одинакового мнения).

Эти мнения также называются верами, однако они не совсем соответствуют верам в играх с несовершенной информацией, какие используются в WPBE или SE.

Например, в игре 2 игрока, у каждого один тип, ходят одновременно.



Если рассматривать эту игру как игру с неполной информацией, то веры тождественно равны единице.

Если рассматривать эту игру как игру с несовершенной информацией, то, то у второго игра есть веры.

В произвольной игре с несовершенной информацией РВЕ можно доопределить так:
РВЕ(1) это WPBE, удовлетворяющее дополнительному требованию:

Допустим, что вероятность попасть в информационное множество I равна нулю, а узлы-предшественники лежат в нескольких информационных множествах $I_1^{pr}, \dots, I_n^{pr}$. Само I оказывается естественным образом разбито на множества I_1, \dots, I_n . Пусть узел $x \in I_k$. Веру в узле x обозначим $\mu(x)$, а $\mu(I_k) = \sum_{x \in I_k} \mu(x)$. Если $\mu(I_k) > 0$, то применяем формулу условной вероятности, а именно, $\frac{\mu(x)}{\mu(I_k)}$ должна равняться вероятности выбора узла x в информационном множестве I_k^{pr} , которая рассчитывается исходя из вер в I_k^{pr} .

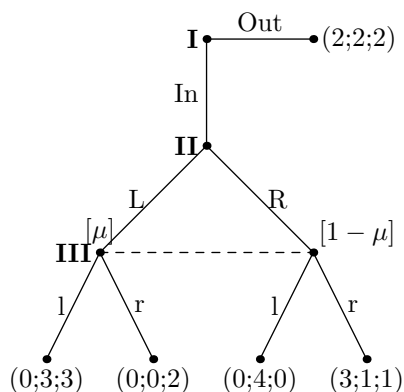
Если рассмотреть игру с неполной информацией, то РВЕ в ней (определяемое по Osborne) совпадет с РВЕ(1) для соответствующей игры с несовершенной информацией.

РВЕ(1) не обязательно является совершенным в подыграх в произвольное игре с несовершенной информацией. Для частного случая игр с неполной информацией, РВЕ(1) является совершенным в подыграх.

Существует альтернативное определение РВЕ в произвольной игре с несовершенной информацией:

РВЕ(2) - это такая система (профиль стратегий, веры), которая является WPBE в каждой подыгре.

Оно не совпадает с РВЕ(1). Очевидно, что РВЕ(2) являются совершенными в подыграх. Что имеют в виду лица третьего типа не известно (скорее всего, РВЕ(1)), т.к. примеры, приводимые ими подходят как под РВЕ(1), так и под РВЕ(2). Собственно, приводят они один и тот же пример:



Упражнение.

Убедитесь в том, что в данной игре WPBE это $\{(In, R, r), \mu = 0\}$ и $\{(Out, R, l), \mu \geq 0.5\}$.

Убедитесь в том, что SE, РВЕ(1) и РВЕ(2) это только $\{(In, R, r), \mu = 0\}$.

Заметьте также и то, что только профиль (In, R, r) является SPNE

Чтобы еще более смутить невинные души студентов, следует отметить, что к первой группе лиц (определяющим РВЕ только в играх с неполной информацией) примыкают те, кто определяют РВЕ только в играх с неполной информацией, но включают туда дополнительные требования.

Окончательно запутать смущенные души можно с помощью критерия структурной состоятельности вер. (Structural consistency of beliefs).

(Structural consistency of beliefs): Веры μ являются структурно состоятельными, если для любого информационного множества I существует такой профиль стратегий β , что I достигается с положительной вероятностью, и веры на I определяются по формуле условной вероятности.

Т.е. веры в разных множествах могут определяться разными профилями.

Однако это интуитивное требование может быть несовместимо с требованием состоятельности вер. Существуют структурно состоятельные веры, которые не являются даже слабо состоятельными. Существуют состоятельные веры (даже дополняемые профилем до секвенциального равновесия), которые не являются структурно состоятельными.