1 Ядро и вектор Шепли. Первое знакомство

1.1 Игра в характеристической форме

Начнем с обозначений:

N - множество всех игроков, а n - их количество.

Определение 1.1. Коалиция (coalition) - подмножество игроков.

Определение 1.2. Большая коалиция (grand coalition) - синоним для множества всех игроков.

Определение 1.3. Коалиционная игра в характеристической форме (coalitional game или cooperative game in characteristic form) это:

1. Множество игроков N.

2. Характеристическая функция (characteristic function), v, сопоставляющая каждой коалиции сумму денег, которую эта коалиция может заработать самостоятельно.

Характеристическая функция может принимать отрицательные значения (например, при дележе расходов). Мы считаем, что пустая коалиция (куда никто не входит), не может заработать денег и никому ничего не должна, т.е. $v(\emptyset) = 0$. Именно характеристическая функция полностью описывает игру в нашем случае.

Пример 1.4. «Ботинки». Пара ботинок (левый плюс правый) стоит 600 рублей. Один ботинок без пары не стоит ничего. У Лени есть левый ботинок, у Левы - еще один такой же левый, а у Паши - правый. Здесь $N = \{\text{Леня,Лева,Паша}\}$, $v(\text{Леня}) = v(\text{Лева}) = v(\text{Паша}) = 0$ (в одиночку никто не может получить 600 рублей); $v(\text{Леня,Лева}) = 0$ (у них нет правого); для любой другой коалиции S, $v(S) = 600$, т.к. есть и правый и левый ботинки.

Пример 1.5. «Носки». Левые и правые носки ничем не отличаются. Пара носков стоит 60 рублей. Один носок ничего не стоит. У Андрея - три носка, у Бориса - пять носков. Здесь $N = \{\text{Андрей,Борис}\}$, $v(\text{Андрей}) = 60$, $v(\text{Борис}) = 120$, $v(\text{Андрей, Борис}) = 240$.

Все упомянутые примеры обладают свойством, которое называется супераддитивностью (superadditivity):

Если несколько непересекающихся коалиций объединяются, то вместе как одна коалиция они заработают не меньше, чем по отдельности.

Определение 1.6. Игра называется супераддитивной, если для любых непересекающихся коалиций S_1, S_2, верно неравенство $v(S_1 \cup S_2) \geq v(S_1) + v(S_2)$.

В такой игре у игроков есть интерес в создании большой коалиции и дележе полученного $v(N)$.

Вопрос в том, как поделить $v(N)$?

Мы обсудим две концепции решения - ядро и вектор Шепли.

1.2 Ядро.

Предположим, что большая коалиция решила каким-то образом разделить $v(N)$. С математической точки зрения, дележ - это вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Поскольку большая коалиция может заработать $v(N)$, то любой дележ обязан удовлетворять бюджетному ограничению $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \leq v(N)$. Чего мы хотим от дележа?

Собственно, всегда хочется двух условий: эффективность и устойчивости (в каких-нибудь смыслах).

Эффективность - это отсутствие потерь: вся доступная сумма $v(N)$ должна распределяться между игроками без остатка, т.е. неравенство $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \leq v(N)$ должно быть выполнено как равенство.

Определение 1.7. . Условие **эффективности**. Дележ называется эффективным, если $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = v(N)$.

Об устойчивости. Хочется, чтобы среди игроков не было сепаратистских тендеций. Допустим какой-нибудь коалиции S при дележе достается меньше, чем та сумма, которую она может заработать самостоятельно. В таком случае игроки входящие в S не захотят участвовать в большой коалиции, отсоединятся и получат больше. Отсоединившись, коалиция S получает $v(S)$; а соглашаясь на дележ - получает $\sum_{i \in S} x_i$. Отсюда возникает:

Определение 2.1. Условие **отсутствия сепаратистских тенденций**. Дележ удовлетворяет условию отсутствия сепаратистских тендеций если для любой коалиции S: $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$.

Определение 2.2. Ядро (Core) - это множество дележей, удовлетворяющих условиям:
1) Эффективности
2) Отсутствие сепаратистских тендеций.

Находим ядро в наших примерах. Исходя из определения - ядро можно найти решая систему из одного уравнения и нескольких неравнеств.

Пример 2.3. . Ботинки. $x_{l1} + x_{l2} + x_r = 1$, $x_{l1} + x_r \geq 1$, $x_{l2} + x_r \geq 1$. Единственное решение - это $x_{l1} = x_{l2} = 0$, $x_r = 1$. Обладатель редкого ресурса получает все!

Пример 2.4. . Носки. $x_1 + x_2 = 240$, $x_1 \geq 60$, $x_2 \geq 120$. Решение: любой дележ вида: $(x_1, 240 - x_1)$, где $x_1 \in [60; 120]$.

Недостатки ядра. Во-первых, ядро бывает пустым. Оно бывает пустым из-за того, что условие полного отсутствия сепаратистских тенденций слишком сильное. Во-вторых, ядро бывает не единственным.

Эти две проблемы исправляет другая концепция - вектор Шепли (Shapley value). Он всегда существует и всегда единственный.

1.3 Вектор Шепли

Допустим игроки у нас занумерованы в некотором порядке π. Здесь π - это не 3.14..., а некая последовательность чисел от 1 до n, например, $\{1, 3, 2, 4, 5\}$. Будем формировать большую коалицию добавляя игроков по одному в указанном порядке. Когда мы добавляем i-го игрока у нас уже сформирована некоторая коалиция S. Присоединяясь к этой коалиции S, игрок i увеличивает достижимый выигрыш на $v(S \cup \{i\}) - v(S)$. Назовем эту прибавку вкладом i-го игрока в большую коалицию, обозначим[1] ее $Add(i, \pi)$.

Конечно же, вклад i-го игрока в большую коалицию, $Add(i, \pi)$, зависит от порядка формирования большой коалиции π.

Например, в игре «Ботинки». Если формировать большую коалицию в порядке Леня, Лева, Паша, то вклад Левы равен нулю. Если формировать большую коалицию в порядке Паша, Лева, Леня, то вклад Левы равен 600 рублей.

Если же формировать большую коалицию добавляя игроков по одному в случайном порядке π, то прибавка, вносимая i-м игроком, $Add(i)$ - будет случайной величиной.

Вектор Шепли - это вектор $(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_N)$, где выигрыш i-го игрока, ϕ_i определяется по принципу: $\phi_i = E(Add(i))$.

Определение 2.5. Вектор Шепли - это математическое ожидание вклада каждого игрока, если большая коалиция формируется в случайном порядке.

[1]Обозначение не общепринятое, но мне кажется его введение оправдано.

Из определения ясно, что вектор Шепли всегда (по крайней мере при конечном числе игроков) существует и всегда единственный.

В наших примерах:

Пример 2.6. Ботинки. Найдем $E(Add(r))$. Если Паша входит первым, то его вклад равен нулю, иначе его вклад равен 600. Значит $E(Add(r)) = \frac{2}{3}600 = 400$. Вклад Лени равен 600 только если первым вошел Паша, а вторым - Леня. Значит $E(Add(l1)) = \frac{1}{6}600 = 100$. Аналогично для Левы. Значит вектор Шепли равен: $(100, 100, 400)$.

Пример 3.1. . Носки. Возможно всего два порядка формирования большой коалиции: Андрей-Борис и Борис-Андрей. В первом случае вклады игроков равны $Add(a, ab) = 60$, $Add(b, ab) = 180$, во втором - $Add(b, ba) = 120$ и $Add(a, ba) = 120$. И вектор Шепли: $\phi_a = 90$, $\phi_b = 150$. Что соответствует интуитивному дележу в пропорции 3/5.

Теорема 3.2. *Вектор Шепли удовлетворяет требованию эффективности.* $\sum \phi_i = v(N)$.

Доказательство.

$$\sum \phi_i = \sum E(Add(i)) = E(\sum Add(i));$$

Мы определяли $Add(i)$ как вклад i-го игрока при пошаговом построении большой коалиции. Поэтому суммарный вклад всех игроков всегда равен стоимости большой коалиции, $\sum Add(i) = v(N)$. Каждое $Add(i)$ - случайная величина, но их сумма (вне зависимости от порядка формирования большой коалиции) равна константе $v(N)$.

$$E(\sum Add(i)) = E(v(N)) = v(N)$$

$\square$

Лирическое отступление. Немного критики. В играх, которые мы рассматривали, предполагалось, что выигрыш (или полезность) можно перераспределять между игроками. Любая коалиция S заработав $v(S)$ могла разделить этот выигрыш $v(S)$ между своими участниками произвольным образом.

Насколько это реалистично?

Деньги, конечно, можно делить. Но вот полезность они приносят разную, достаточно представить себе, что в игре «Носки» Андрей - бедный пенсионер, а Борис - богатый менеджер.

Передаваема ли полезность?

В одной из серий мультфильма про Удава, Попугая, Мартышку и Слоненка, Удав передавал Мартышке привет. У него было хорошее настроение. Как известно, первые два «Привета» кое-кто потерял, и только третий «Привет» достался Мартышке.

Отсюда вывод: деньги легко передаются, но не отражают полезность; полезность передеатся плохо.