1 Задача торга двух игроков.

1.1 Определение задачи торга.

Попробуем разобрать простейший случай, когда полезности не передаются. У нас будет всего **два** игрока. Либо каждый из них работает в одиночку, либо формируется большая коалиция. Большая, в данном случае, - это из обоих игроков.

Соответственно, описание задачи торга состоит из двух объектов:

Определение 1.1. точка разногласия (disagreement point) - это вектор платежей, получаемых игроками, если кооперации не будет.

Определение 1.2. Переговорное множество - это множество возможных платежей, которые могут получить игроки если скооперируются.

(картинка)

С формальной математической точки зрения задача торга задается парой (X, d), где X - переговорное множество, а d - точка разногласия.

Это несколько больше, чем коалиционная игра двух игроков в характеристической форме. Игра в характеристической форме предполагает, что множество X имеет вид $X = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 \leq v(N)\}$. В задаче торга множество X в принципе может иметь любую форму. Поэтому можно считать, что это не деньги, а полезность. В этих лекциях полезность измеряется в улыбках.

Впрочем, чаще всего предполагают, что переговорное множество не совсем произвольно, а удовлетворяет требованиям:

- Замкнуто;
- Выпукло;
- Ограничено сверху, т.е. существует такая точка $a = (a_1, a_2)$ на плоскости, что все множество X лежит юго-западнее точки a;
- Содержит точку d.

Мы будем считать, что эти требования выполнены.

Что означает решить задачу торга? Для данной конкретной задачи это означает выбрать наилучшую точку x^*из X. Но нас интересует не решение конкретной задачи торга, а некое правило которое позволяет решать любую задачу торга. Наше правило каждой задаче торга (X, d) сопоставляет некий «наилучший» дележ x^*. С математической точки зрения, правило дележа - это функция f. Соответственно, область определения функции f - это всевозможные задачи торга, т.е. всевозможные пары (X, d).

Пусть x^* - это предлагаемый игрокам дележ, т.е. $x^* = f((X, d))$.

Чего бы мы хотели от хорошего правила дележа f?

- Индивидуальная рациональность. Каждый игрок должен получать не меньше, чем в точке разногласия, $x^* \geq d$, т.е. $x_1^* \geq d_1$, $x_2^* \geq d_2$.
- Эффективность. Дележ x^* должен быть Парето-оптимален. Другими словами, не существует такой точки $x^{'}$, которая была была бы для обоих игроков не хуже, а кому-то даже лучше. Формально, не существует такая точка $x^{'} \neq x^*$, что $x^{'} \geq x^*$.
- Симметрия. Если игроки одинаковые (т.е. множество X симметрично относительно прямой $x_1 = x_2$, и в случае разногласия игроки получают одинаковый выигрыш $d_1 = d_2$), то $x_1^* = x_2^*$.

- Нечувствительность к смене масштаба. Пусть есть две задачи торга (X,d) и $(X^{'},d^{'})$, которые отличаются масштабом. Скажем в первой полезность измерялась в улыбках, а во второй - в улыбочках (одна улыбочка это 10^{-3} улыбок). В этом случае хотелось бы, чтобы решения этих задач также отличались только сменой масштаба. И более формально: пусть $X' = aX + b$ и $d' = ad + b$, где a и b - произвольные константы. Мы говорим, что решение f нечувствительно к смене масштаба, если $f(X') = af(X) + b$.[1]

- Независимость от третьих альтернатив. Если при доступных точках x, y, z правило выбирало x, то при доступных x и y правило тоже должно выбирать x.

Существуют ли решение которое всегда удовлетворяет всем этим требованиям? Правильный ответ в студию!

1.2 Решение Нэша

Для начала введем понятие:

Бонус от кооперации (первого игрока) - это та сумма, которую первый игрок выигрывает от кооперации по сравнению с точкой разногласия, т.е. $(x_1^* - d_1)$.

Нэш предложил странное на первый взгляд решение:

Определение 2.1. Решение Нэша - это точка x_{Nash}, которая лежит в X и максимизирует произведение бонусов от кооперации. Т.е. $(x_1, x_2)_{Nash}$ максимизирует функцию $f(x_1, x_2) = (x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$.

Давайте попробуем найти решение Нэша в задаче про носки. (напомним текст)

В нашем случае, точка несогласия, $d = (60, 120)$, а переговорное множество $X = \{(x_1, x_2)|x_1 + x_2 \leq 240\}$.

Обозначим бонус от кооперации буквой y_i, т.е. $y_i = x_i - d_i$. Решение Нэша максимизирует величину $y_1 \cdot y_2$ при ограничении $y_1 + y_2 \leq 60$. В силу симметрии $y_1 = y_2 = 30$.

Значит Нэша предлагает поделить совокупных доход как $(90, 150)$. Что, кстати говоря, совпадает с вектором Шепли и интуитивным дележом $3 : 5$.

Оказывается, что:

Теорема 2.2. *Решение Нэша - это единственное решение, удовлетворяющее требованиям индивидуальной рациональности, эффективности, симметрии, нечувствительности к смене масштаба и независимости от третьих альтернатив.*

Доказательство. Для начала рассмотрим задачу торга, где $d = (0; 0)$, а переговорное множество $Y = (x_1, x_2)|x_1 + x_2 \leq 2$. Игроки симметричны, значит должны получить одинаковый выигрыш. Единственное симметричное Парето-оптимальное решение - это $(1, 1)$. Что совпадает с решением Нэша.

Теперь рассмотрим произвольную задачу торга. В силу ограниченности сверху и замкнутости множества X решение Нэша существует. Обозначим его x_{Nash}. В силу нечувствительности к смене масштаба можно считать, что $d = (0; 0)$ и $x_{Nash} = (1; 1)$.

Решение, которое не зависит от третьих альтернатив обязано совпадать с x_{Nash}. Почему? Точка $(1, 1)$ доступна и при переговорном множестве Y, и при переговорном множестве X. Заметим, что переговорное множество Y больше, чем переговорное множество X. На множестве Y мы выбрали точку $(1, 1)$. Значит ее мы обязаны выбрать и на множестве X.

(картинка)

□

[1] Это требование называется у В.И. Данилова скалярной ковариантностью. Страшно, да?

1.3 Решение Калаи-Смородинского

Условие независимости от третьих альтернатив может быть рациональным, но оно зачастую нарушается в реальности. Давайте рассмотрим такой пример.

Вовочка и Петечка долго спорили о том, кто является самой красивой девушкой в их классе, Маша или Аня. После долгого спора они пришли к общему мнению, что самая красивая - Маша. После этого спора Вовочка и Петечка неожиданно вспомнили про Памеллу Андерсон. А вспомнив про Памеллу Андерсон, решили, что все-таки, самая красивая - Аня.

На этот пример можно, конечно, возразить, что Памелла Андерсон не училась в классе Вовочки и Петечки. И это, следовательно, не совсем независимость от третьих альтернатив. Но идея остается. Чтобы сделать выбор между несколькими объектами нужно свести многомерные характеристики объектов к одной единственной лучше-хуже. И вот-это правило сведения оказывается очень неустойчиво. На него влияет реклама или просто упоминание третьей альтернативы.

Еще пример. Вы выбирали мобильный телефон и сомневались между А и Б. И склонились к выбору А. Потом в журнале прочли про то, что есть такая крутая модель С. Крута она своим дизайном. Вам дизайн С понравился. И вы сменили свой выбор в пользу Б, потому, что дизайн Б больше похож на крутой дизайн С. Сама модель С для вас была хуже, чем А и Б, так как у нее существенно выше цена. Но критерий сведения многомерной характеристики телефона к одномерному хуже-лучше поменялся просто из-за самого наличия С.

Решение Калаи-Смородинского заменяет требование независимости от третьих альтернатив на индивидуальную монотонность. К сожалению, индивидуальная монотонность не является особо прозрачным критерием. Чтобы проще описать индивидуальную монотонность определим пару функций:

- $m_1(X, d)$ - это наибольший возможный для первого игрока бонус от кооперации, при котором бонус второго игрока неотрицателен. И, аналогично,

- $m_2(X, d)$ - это наибольший возможный для второго игрока бонус от кооперации, при котором бонус первого игрока неотрицателей.

Индивидуальная монотонность (для первого игрока). Допустим у нас есть две задачи торга, (X, d) и (X', d'), причем переговорное множество X больше, чем X'. Пусть $m_1(X, d) = m_1(X', d')$. ....

Теорема 3.1. *Решение Калаи-Смородинского, x_{KS} - это единственное Парето-оптимальное решение, которое делит бонусы от кооперации в пропорции $m_1(X, d) : m_2(X, d)$.*

(картинка)

Найдем решение Калаи-Смородинского в задаче про Носки. Точка несогласия, $(60, 120)$. Общий бонус от кооперации - 60. Поскольку деньги можно передавать, то максимальный бонус каждого игрока от кооперации также равен 60, т.е. $m_1 = m_2 = 60$. Делим общий бонус от кооперации в пропорции $60 : 60$, т.е. поровну. Каждый получает бонус по 30. Итоговый дележ $(90, 150)$. Что совпадает с решением Нэша, а заодно и с вектором Шепли.

1.4 Связь с некооперативной теорией игр.

Неплохо бы навести какой-то мостик между кооперативной и некооперативной теориями. Иначе они кажутся совершенно оторванными, хотя решают похожие задачи.

Представим себе, что торг проходит так:

Период 1. Игрок А предлагает игроку Б любой дележ из X. Если Б согласен, то игра заканчивается. Если игрок Б не согласен, то начинается период 2.

Период 2. Игрок Б предлагает играку А любой дележ из X. Если А согласен, то игра заканчивается. Если игрок А не согласен, то начинается период 3.

... и так далее.

Дополнительно добавим в игру ураган. Перед началом каждого нового периода с вероятностью α начинается ураган. В случае урагана игра принудительно заканчивается и если игроки не успели договориться, то они получают выигрыш из точки несогласия d. Уточним, что дисконтирования нет.

Зачем нам нужен ураган? Чтобы стимулировать игроков прийти к соглашению побыстрее. В каком-то смысле он заменяет дисконтирование. Рубль сейчас лучше чем обещание рубля завтра, т.к. до завтра может начаться ураган и обещание не будет исполнено.

Найдем равновесие по Нэшу совершенное в подыграх (SPNE) для каждого α. Обозначим вектор платежей, которые получают игроки, как $x_{SPNE}(\alpha)$.

Оказывается, что:

Теорема 4.1. *Решение Нэша в задаче торга является пределом равновесий по Нэшу совершенных в подыграх,* $x_{Nash} = \lim_{p\to 0} x_{SPNE}(p)$.

Доказательство. Как мы уже делали, будем рассматривать бонусы от кооперации. Т.е., например, если начался ураган, то игроки получают $(0;0)$.

Найдем SPNE для произвольного p. Если игра дошла до 3-го периода, то она ничем не отличается от изначальной игры. Поэтому сначала найдем совсем простое равновесие, в котором предлагаемый каждым игроком дележ все время один и тот же. Наше равновесие имеет такой вид: При своем ходе первый игрок всегда будет предлагать один и тот же вектор бонусов $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, а второй игрок при своем ходе будет предлагать вектор бонусов $y^* = (y_1^*, y_2^*)$. При этом x_2^* - это наименьший бонус, одобряемый вторым игроком, а y_1^* - наименьший бонус одобряемый первым игроком.

Равновесная траектория выглядит так: первый игрок предлагает $x^* = (x_1^*, x_2^*)$. Второй игрок соглашается. Игра оканчивается без наступления урагана.

Для поиска SPNE указанного вида применим принцип одноразового отклонения:

Профиль стратегий является равновесием по Нэшу совершенным в подыграх если и только если ни одному игроку ни в одной подыгре не выгодны одноразовые отклонения. Под одноразовым отклонением от стратегии s подразумевается любая стратегия s', которая отличается от стратегии s лишь в один момент времени[2].

Проверяем возможность неодобрения высокого платежа. Итак, пусть первый игрок предложил дележ $x = (x_1, x_2^* + \Delta)$, не обязательно равновесный! Если второй соглашается (согласно своей стратегии), то он получает бонус $x_2^* + \Delta$. Если второй игрок делает одноразовое отклонение (и, стало быть, не соглашается), то: С вероятностью α игроки получают бонус ноль. С вероятностью $(1-\alpha)$ начинается следующий период, в котором второй игрок (вернувшись к своей стратегии) предлагает вектор $y = (y_1^*, y_2^*)$ и первый игрок соглашается.

Чтобы одноразовое отклонение не было выгодно: $x_2^* + \Delta \geq (1-\alpha)y_2^*$ для всех $\Delta \geq 0$.

Проверяем возможность одобрения низкого платежа. Итак, пусть первый игрок предложил дележ $x = (x_1, x_2^* - \Delta)$, не обязательно равновесный! Если второй не соглашается (согласно своей стратегии), то он получает ожидаемый бонус $(1-\alpha)y_2^*$. Если второй игрок делает одноразовое отклонение (и, стало быть, соглашается), то он получает $x_2^* - \Delta$.

Чтобы одноразовое отклонение не было выгодно: $(1-\alpha)y_2^* \geq x_2^* - \Delta$ для всех $\Delta < 0$

Получаем уравнение

$$x_2^* = (1-\alpha)y_2^*$$

Аналогично,

$$y_1^* = (1-\alpha)x_1^*$$

Пока что мы получили два уравнения на 4 неизвестных. Еще два получить совсем просто: бонусы x^* и y^* в нашем профиле стратегий должны быть парето-оптимальными, т.к. в противном случае первый игрок сменит его на $(x_1^* + \Delta, x_2^*)$, а второй игрок немедленно одобрит такой дележ.

[2] Для тех, кто плохо помнит, что это значит, приведем пример. Пусть имеется стратегия $s = \{$в первой партии сделать ход a, в последующих партиях сделать ход, сделанный в первой партии$\}$. Тогда стратегия $s' = \{$в первой партии сделать ход b, в последующих партиях сделать ход, сделанный в первой партии$\}$ является одноразовым отклонением от стратегии s. Напомним также, что проверять нужно не только равновесную траекторию, но и любую другую.

Честно говоря, надо доказывать, что других существенно отличающихся равновесий нет, но сейчас мы этого делать не будем.

Итак, при любой вероятности α равновесный (в смысле SPNE) платеж можно найти из условий:

x^* и y^* Парето-оптимальны, $x_2^* = (1-\alpha)y_2^*$, $y_1^* = (1-\alpha)x_1^*$

Это 4 уравнения на 4 неизвестных (Парето-оптимальность означает, что точки лежат на границе переговорного множества).

Заметим, что $x_1^* x_2^* = y_1^* y_2^*$ при любом α, т.е. произведения бонусов, получаемых игроками равны. Графически это означает, что предложения x^* и y^* находятся на пересечении границы переговорного множества и гиперболы $b_1 b_2 = const$. Значение константы $const$ определяется значением α.

Отметим, также что решение Нэша кооперативной игры, максимизирует произведение бонусов. Обозначим его (z_1^*, z_2^*).

(картинка)

Что произойдет при $\alpha \to 0$? Ответ прост: разница $(x_1^* - y_1^*) \to 0$ и $(x_2^* - y_2^*) \to 0$, т.е. в пределе мы будем иметь одну общую точку у Парето-оптимальной границы и гиперболы. Т.е. $x^* \to z^*$ и $y^* \to z^*$.

$\square$