Лекция 3 !!

- независимость СВ
- производящие функции

<u>нестр. опр.</u> СВ X и Y независимы

Любое событие, к-рое можно сформулировать в терминах X, и любое событие, кот-рое можно сфор-ть с помощью Y, независимы.

<u>форм. опр</u>

СВ X и Y независимы, если* для $\forall A \subseteq \mathbb{R}, \forall B \subseteq \mathbb{R}$ события $\{X \in A\}$ и $\{Y \in B\}$ независимы.

то есть
$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B).$$

<u>уточнения:</u> ① $\{X \in A\} = \{w \in \Omega \mid X(w) \in A\}$

② * вер-сти $P(X \in A)$ и $P(Y \in B)$ опред-ны.

$$P(X \in A \mid Y \in B) = \frac{P(X \in A, Y \in B)}{P(Y \in B)} = P(X \in A)$$

незав СВ

Критерии независимости

① для дискретных СВ

- СВ X и Y независимы, если и только если события $\{X = x\}$ и $\{Y = y\}$ независимы $\forall x, y$.

② для произвольных СВ

- СВ X и Y независимы, если и только если события $\{X \leq x\}$ и $\{Y \leq y\}$ независимы $\forall x, y$.

• СВ X и Y независимы, если* и только если
$$E(f(X)\cdot g(Y)) = E(f(X))\cdot E(g(Y))$$
для $\forall f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $\forall g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

* $E(f(X))$ определено и $E(g(Y))$ определено.

док-во критерия ① для дискретных СВ.

Метатеорема: Любое док-во про дискретные СВ - это перестановка слагаемых.

$\boxed{\text{опр}}$
$\{X\in A\}$ и $\{Y\in B\}$ незав $\forall A\subseteq\mathbb{R}$ $\forall B\subseteq\mathbb{R}$

критер ①
$\{X=x\}$ и $\{Y=y\}$ незав для $\forall x,y\in\mathbb{R}$

опр => критер
возьмём $A=\{x\}$, $B=\{y\}$ $\quad \{X\in A\}=\{X=x\}$, $\{Y\in B\}=\{Y=y\}$

критер => опр.

$$P(X\in A, Y\in B) = P(X\in\tilde{A}, Y\in\tilde{B}) = \triangle$$

X - дискр и Y - дискр. : $\mathrm{Image}(X)$ - счётное или конечное
$\mathrm{Image}(Y)$ - — " —

$\tilde{A} = A\cap \mathrm{Image}(X)$
$\tilde{B} = B\cap \mathrm{Image}(Y)$

$$\triangle = \sum_{x\in\tilde{A}}\sum_{y\in\tilde{B}} P(X=x, Y=y) = \sum_x\sum_y \underbrace{P(X=x)}_{\text{незав опр}}\cdot P(Y=y)$$

критер ①

$$= \sum_{x\in\tilde{A}} P(X=x)\cdot\sum_{y\in\tilde{B}} P(Y=y) = P(X\in\tilde{A})\cdot P(Y\in\tilde{B}) =$$
$$= P(X\in A)\cdot P(Y\in B)$$

Подфеерину.

Всегда: $E(X^2 + \cos Y) = E(X^2) + E(\cos Y)$ — всегда даже для зав. X

если X и Y незав, то $E(X^2 \cdot \cos Y) = E(X^2) \cdot E(\cos Y)$ — иногда неверно для зависим.

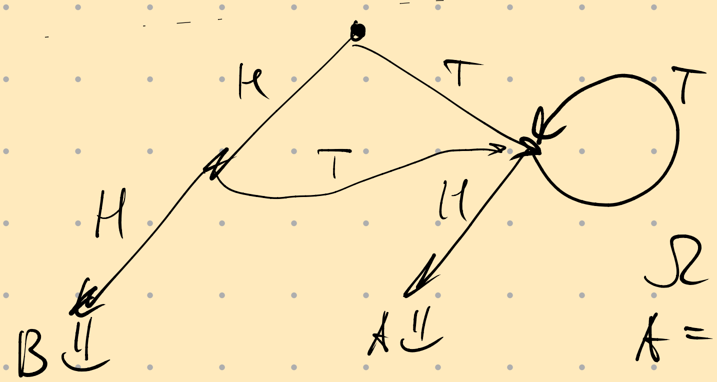
Производящие функции

Пример.

Алиса и Боб подбрас-ют монету (прав.) неогр. число раз.

Алиса выигр: если раньше выпадет TH

Боб: —//— HH.



$TT \sim T$

$HT \sim T$

$\Omega = \{HH, TH, HTH, TTH \dots\}$

$A = \{TH, TTH, \dots\}$

X - число выпавших H

Y - число выпавших T

- $P(X=7)$?
- $P(X=5, Y=4)$?
- $E(X)$?
- $E(X^3)$?
- $E(Y^2 \cdot X)$?
- $P(A)$?

Техника.

идея: под ф-циями куча действий, а над множествами.

$$\text{множество } \Omega \xrightarrow{?} \text{функция } f \to P(X=7),\ E(X),\ \text{техник.}$$

$\Omega = \{HH, TH, HTH, TTH \ldots\}$

$A = \{TH, TTH, \ldots\}$

H, T — некомм. перем-ые $\longrightarrow$ $H \cdot T \neq TH$

$f_\Omega = H \cdot H + T \cdot H + H \cdot T \cdot H + \ldots$

$f_A = T \cdot H + T \cdot T \cdot H + TTTH + \ldots$

$$P(A) = f_A\left(T = \tfrac{1}{2}, H = \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + \ldots$$

$$f_\Omega(H, T) = HH + TH + HTH + HTTH + \ldots$$

$\leftarrow$ хочу

$$E(X) = 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \ldots$$

$$\boxed{f_\Omega(H, T) = HH + TH + HTH + HTTH + \ldots}$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}h, \tfrac{1}{2}\right) = \boxed{h^2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + h \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + h^2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + h^2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 + \ldots} \ldots \;?$$

$\left.\frac{\partial}{\partial h}\right|_{h=1}$

$$E(X) = 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 + \ldots$$

$h^2 \to 2$

$h \to 1$

$h^3 \to 3$

$$E(X) = \left.\frac{\partial f_\Omega\left(\frac{1}{2}h, \frac{1}{2}\right)}{\partial h}\right|_{h=1}$$

$\boxed{\text{Вариант 1}}$

$$\left.\frac{\partial h^5}{\partial h}\right|_1 = \left.5h^4\right|_{h=1} = 5$$

$h^5 \to 5$

$h^3 \to 3$

$\boxed{\text{Вариант 2}}$

$$f_\Omega(H, T) = HH + TH + HTH + HTTH + \ldots$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}e^h, \tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 e^{2h} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 e^h + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 e^{2h} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 e^{2h} + \ldots$$

$e^h \to 1$

$e^{2h} \to 2$

$e^{3h} \to 3$

$\ldots$

$$E(X) = \left.\frac{\partial f_\Omega\left(\frac{1}{2}e^h, \frac{1}{2}\right)}{\partial h}\right|_{h=0}$$

$\boxed{\text{Монета}}$

$$fr(H,T) = HH + TH + HTH + HTTH + \dots$$

$$E(X^2) = 2^2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 2^2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + 2^2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 + \dots$$

$e^{h} \to 1^2$
$e^{2h} \to 2^2$
$e^{3h} \to 3^2$
?

$$f\left(\tfrac{1}{2}e^{h}, \tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 e^{2h} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 e^{h} + \dots$$

$$E(X^2) = \frac{\partial^2 fr\left(\frac{1}{2}e^{h}, \frac{1}{2}\right)}{\partial h^2}$$

||

$$E(X^2\cdot Y) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\cdot 2^2\cdot 0 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\cdot 1^2\cdot 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3\cdot 2^2\cdot 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^4\cdot 2^2\cdot 2 + \dots$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}e^{h}, \tfrac{1}{2}e^{t}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\cdot e^{2h}\cdot e^{0t} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\cdot e^{h}\cdot e^{t} + \dots$$

ф. произв моментов

$$\left.\frac{\partial^3 f\left(\frac{1}{2}e^{h}, \frac{1}{2}e^{t}\right)}{\partial h^2 \partial t}\right|_{\substack{h=0\\ t=0}}$$

Y – число выпавших T

X – число выпавших H

x^2	1	4	25
x	1	2	5
вер	0,2	0,3	0,5

$E(X) =$

$E(X^2) = 1\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}3 + 25\cdot 0{,}5$

$$fr(H,T) = HH + TH + HTH + HTTH + \dots$$

функция произв кол-во исходов

$P(Y=7) = \{$ надо занулить слагаемые, где больше 7 шт T и где меньше 7 штук! $\}$

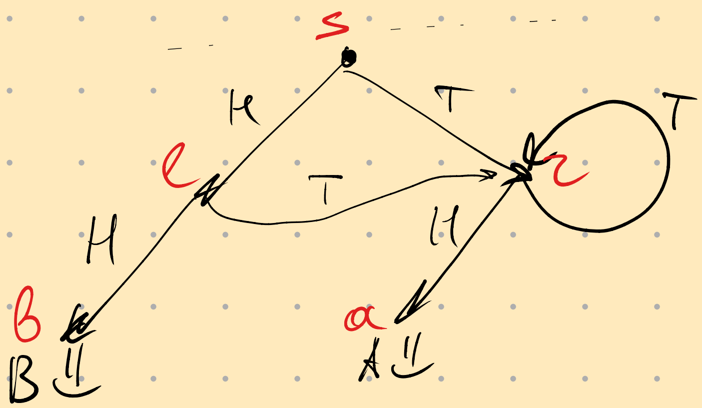
число T

$$f\left(H=\tfrac{1}{2}, T=\tfrac{1}{2}t\right) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 t + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 t + \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 t^2 + \dots$$

ф. произв-ая вер-ти

$$\frac{1}{7!}\,\frac{\partial^7 f\left(\frac12, \frac12 t\right)}{(\partial t)^7}\Bigg|_{t=0} = P(Y=7) \qquad \left(\left(\tfrac12\right)^{15} t^7\right)^{(7)} = \left(\tfrac12\right)^{15}\cdot 7!$$

$$\frac{1}{1!\,5!}\,\frac{\partial^6 f\left(\frac12 h, \frac12 t\right)}{\partial h\,\partial t^5}\Bigg|_{\substack{h=0\\ t=0}} = P(X=1, Y=5)$$



$$\begin{cases} b(H,T) = e\cdot H \\ s(H,T) = 1 \\ r(H,T) = s\cdot T + e\cdot T + r\cdot T \\ e(H,T) = s\cdot H \\ a(H,T) = r\cdot H \end{cases}$$

$b = H^2$ ⇓

⇓

(как попасть в узел r?)

$e = H$ ⇓

$$r = T + HT + r\cdot T \qquad r\cdot(1-T) = T + HT$$

$$r = (T+HT)\cdot(1-T)^{-1}$$

$$a = (T+HT)\cdot(1-T)^{-1}\cdot H$$

$$a + b = (T+HT)\cdot(1-T)^{-1}\cdot H + H^2 \Leftarrow f_\Omega \ \Downarrow$$

определения. Y – СВ Y – принимает целые неотр. знач.

опр функция производящая вероятности

$$g(t) = E(t^Y) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y=k)\cdot t^k$$

зачем нужна?

$$P(Y=l) = \frac{1}{l!} \frac{\partial^l g(t)}{(\partial t)^l}\Big|_{l=0}$$

опр функция производящая моменты Y

$$m(t) = \underbrace{E(e^{tY})}_{\text{универс определение}} = \underbrace{\sum_k P(Y=k)\cdot \exp(t\cdot k)}_{\text{в дискр. случае}}$$

зачем нужна?

$$E(Y^l) = \frac{\partial^l m(t)}{(\partial t)^l}\Big|_{l=0}$$