

1. [10] Величины (X_n) независимы и одинаково распределены с плотностью $f(x) = \max\{0, 1 - |x|\}$.
 - а) [2] Найди число c такое, что величина X_1 превышает c с вероятностью $1/4$.
 - б) [2] Найдите функцию $m_X(t)$ производящую моменты величины X_n .
 - в) [2] Найдите функцию $m_R(t)$ производящую моменты величины $R = X_1 + X_2 + \dots + X_{10} + 2024$.
 - г) [4] Найдите функцию плотности величины $Y = \ln(X^2)$.
 - а) $c = 1 - \sqrt{2}/2$;
 - б)
 - в) $(m_X(t))^{10} \cdot \exp(2024t)$;
 - г) Заметим, что функция плотности $|X|$ равна $2 - 2x$ на отрезке $[0; 1]$ (все отрицательные значения отражаем вправо). И далее, $|X| = \exp(Y/2)$, отсюда $f_Y(y) = (2 - 2\exp(y/2))_{\frac{1}{2}} \exp(y/2) = \exp(y/2) - \exp(y)$ при $y < 0$.
2. [10] Совместная функция плотности вектора (X, Y) равна $f(x, y) = 2x^3 + y$ на квадрате $[0; 1] \times [0; 1]$ и 0 за его пределами.
 - а) [2] Найдите вероятность $\mathbb{P}(X > Y, Y > 0.5)$.
 - б) [6] Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(XY)$, $\text{Cov}(X, Y)$.
 - в) [2] Зависимы ли величины X и Y ?
 - а) $\mathbb{E}(X) = 13/20$, $\mathbb{E}(Y) = 7/12$, $\mathbb{E}(XY) = 11/30$, $\text{Cov}(X, Y) = -1/80$,
 - б) Величины зависимы так как функция $f(x, y)$ не раскладывается в произведение $f_X(x)$ на $f_Y(y)$.
3. [10] Дональд Трамп подкидывает пару стандартных игральных кубиков до тех пор, пока одновременно не выпадет две шестёрки. Обозначим N — общее количество бросков кубиков (бросок пары считаем за два броска кубика), а S — общее количество выпавших шестёрок во всех бросках.
 - а) [2] Найдите вероятности $\mathbb{P}(N = 6)$ и $\mathbb{P}(S = 3)$.
 - б) [4] Найдите ожидание $\mathbb{E}(N)$ и дисперсию $\text{Var}(N)$.
 - в) [4] Найдите энтропии $\mathbb{H}(N)$ и $\mathbb{H}(S)$.
 - а) $\mathbb{P}(N = 6) = (35/36)^2(1/36)$, $\mathbb{P}(S = 3) = 10/11 \cdot 1/11$
 - б) $\mathbb{E}(N) = 2 \cdot 1/p = 72$, $\text{Var}(N) = 4 \cdot (1 - p)/p^2 = 5040$;
 - в)
4. [10] Подсудимый виновен с некоторой вероятностью p . Независимо друг от друга и от виновности подсудимого, каждый из 12 присяжных проголосует за верное решение (виновен или не виновен) с вероятностью $3/5$ и за ошибочное — с вероятностью $2/5$.
 - а) [4] Найдите ожидание и дисперсию количества присяжных, голосующих за виновность.
 - б) [2] Найдите вероятность того, что ровно 7 присяжных проголосуют за виновность.
 - в) [2] Найдите наиболее вероятное число верно проголосовавших присяжных.

г) [2] Найдите вероятность того, что подсудимый виновен, если ровно 7 присяжных проголосовали за его виновность.

а) $\mathbb{E}(N) = p(12 \cdot 3/5) + (1 - p)(12 \cdot 2/5)$; $\mathbb{E}(N^2) = p(12 \cdot 3/5 \cdot 2/5 + (12 \cdot 3/5)^2) + (1 - p)(12 \cdot 3/5 \cdot 2/5 + (12 \cdot 2/5)^2)$;

б) $\mathbb{P}(N = 7) = pC_{12}^7(3/5)^7(2/5)^5 + (1 - p)C_{12}^7(3/5)^5(2/5)^7$;

в) $\arg \max \mathbb{P}(G = g) = 7$, где $\mathbb{P}(G = g) = C_{12}^g(3/5)^g(2/5)^{12-g}$;

г) $\mathbb{P}(A \mid N = 7) = pC_{12}^7(3/5)^7(2/5)^5 / (pC_{12}^7(3/5)^7(2/5)^5 + (1 - p)C_{12}^7(3/5)^5(2/5)^7)$

5. [10] Алиса подбрасывает правильную монетку. Если монетка выпадет орлом, то Алиса выплачивает Бобу один рубль. Если монетка выпадает решкой, то Алиса выплачивает Бобу случайную сумму равномерно распределённую от 0 до 2 рублей. Обозначим X — выигрыш Боба.

а) [5] Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\text{Var}(X)$.

б) [5] Найдите функцию распределения $F(x)$ величины X и постройте её график.

а) $\mathbb{E}(X) = 1$; $\mathbb{E}(X^2) = 7/6$; $\text{Var}(X) = 1/6$;

б)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x/4, & x \in [0; 1) \\ x/4 + 1/2, & x \in [1; 2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

6. [10] В лифт 12-этажного дома на первом этаже вошли 11 человек. Каждый из них выходит независимо от других и равновероятно на любом из этажей, от второго до последнего.

а) [2] Найдите вероятность того, что все выйдут на разных этажах.

б) [4] Найдите вероятность того, что зашедшая в лифт Алиса выйдет на 6-м этаже или выше, если после 4-го этажа в лифте осталось пятеро.

в) [4] Найдите вероятность того, что все пассажиры выйдут не выше 9-го этажа, если никто из них не вышел со 2-го по 6-й.

а) $11!/11^{11}$;

б) $5/11 \cdot 7/8 = 35/88$; Чтобы осознать, что события зависимы (!) достаточно представить ситуацию «после 4-го этажа в лифте осталось 11 человек».

в) $(1/2)^{11}$;