Всё ок?

Упр.

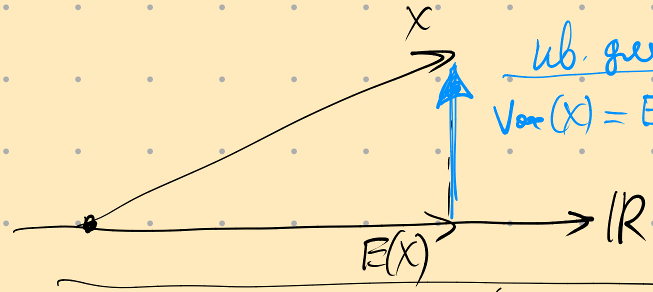
	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=0$	0,2	0,2	0,1
$Y=1$	0,1	0,2	0,2

а) $\mathrm{Var}\, X$, σ_X $X[°C]$
$\mathrm{Var}\, Y$, σ_Y

б) $\mathrm{Cov}(X,Y)$, $\mathrm{Corr}(X,Y)$?

в) $\mathrm{Var}(2X+6)$,
$\mathrm{Cov}(3X-2015, 6\cancel{Y}+\sqrt{3})$
$\mathrm{Corr}(2X-3, 6-9Y)$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$



кв. длины:
$$\mathrm{Var}(X) = E((X-E(X))^2)$$

$$E(X) = -1\cdot 0{,}3 + 0\cdot 0{,}4 + 1\cdot 0{,}3 = 0$$

$$E(X^2) = 1\cdot 0{,}3 + 0 + 1\cdot 0{,}3 = 0{,}6$$

$$\mathrm{Var}(X) = 0{,}6 - 0^2 = 0{,}6$$

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}\, X} = \sqrt{0{,}6}$$

$$\mathrm{Var}\, Y = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

$$E(Y) = 0\cdot 0{,}5 + 1\cdot 0{,}5 = 0{,}5$$

удобное св-во индикаторов $Y^2 = Y$

$$E(Y^2) = E(Y) = 0{,}5$$

$$\mathrm{Var}\, Y = 0{,}5 - 0{,}5^2 = 0{,}25$$

$$\sigma_Y = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$$

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=0$	0,2	0,2	0,1
$Y=1$	0,1	0,2	0,2

б) $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X^c \cdot Y^c) =$

опр. $X^c = X - E(X)$
$Y^c = Y - E(Y)$

$$= E\big[(X - E(X))\cdot(Y - E(Y))\big] = E\big[X\cdot Y - Y\cdot E(X) - X\cdot E(Y) + E(X)\cdot E(Y)\big] =$$

$X\cdot Y$ – СВ
X, Y – СВ
$E(X), E(Y), E(X)\cdot E(Y)$ – константы

$E(52)=52$
$E(c)=c$
c – конст

$$= E(XY) - E(Y)\cdot E(X) - E(X)\cdot E(Y) + E(X)\cdot E(Y) =$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)}$$

аналог $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X)=0 \quad E(Y)=0{,}5$

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=0$	0,2 $\boxed{0}$	0,2 $\boxed{0}$	0,1 $\boxed{0}$
$Y=1$	0,1 $\boxed{-1}$	0,2 $\boxed{0}$	0,2 $\boxed{1}$

$\boxed{X\cdot Y}$

$$E(XY) = -1\cdot 0{,}1 + 0{,}2\cdot 1 = 0{,}1$$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y) = 0{,}1 - 0\cdot 0{,}5 = 0{,}1$$

интуиция $\mathrm{Cov}(X,Y)$ = сонаправленность изменения X и Y

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=0$	0,2	0,2	0,1
$Y=1$	0,1	0,2	0,2

$\mathrm{Cov}(X,Y) > 0$

$$Cov(X,Y) = \langle X^c, Y^c\rangle_0 = E(X^c \cdot Y^c)$$

отсюда $Cov(X_1+X_2, Y_1+Y_2) = Cov(X_1,Y_1) + Cov(X_1,Y_2) + Cov(X_2,Y_1) + Cov(X_2,Y_2)$

ant:

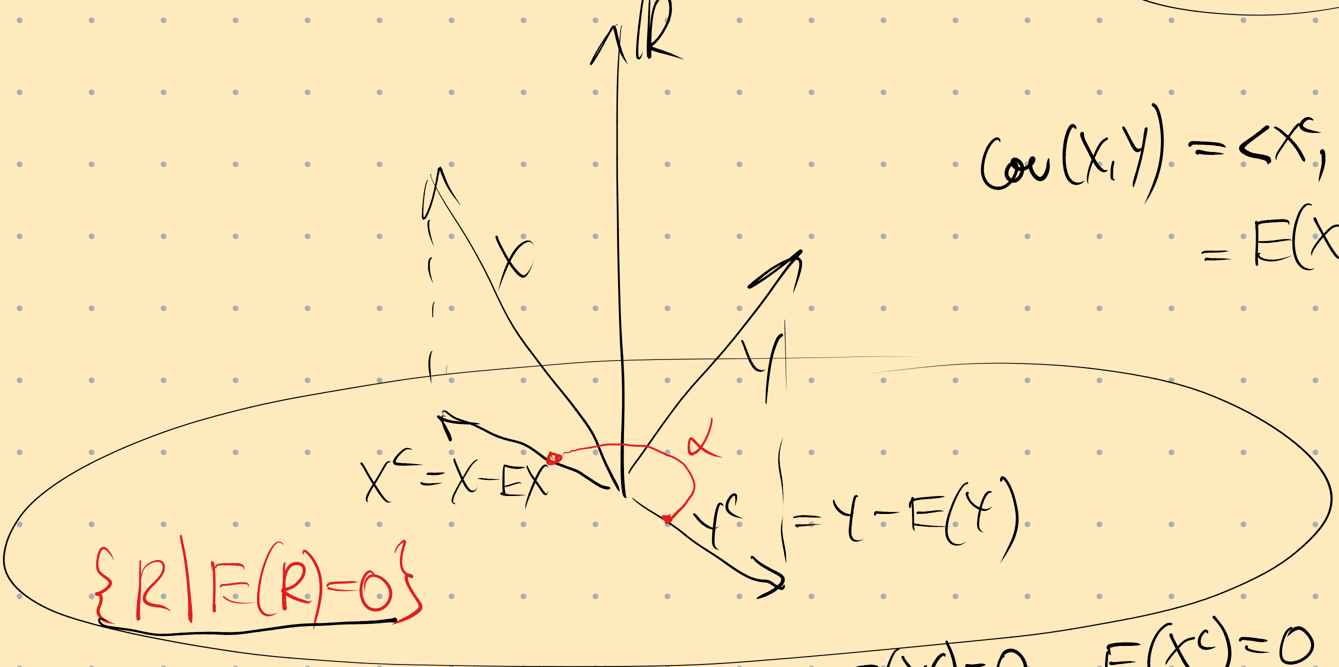
	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=0$	0,1	0,2	0,2
$Y=1$	0,2	0,2	0,1

$Cov(X,Y) < 0$

$Corr(X,Y) \in [-1,1]$ безразмерная

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{0{,}1}{\sqrt{0.6 \cdot 0.5}} \approx \frac{1}{4}$$

$\alpha \approx 0{,}4\pi$



$Cov(X,Y) = \langle X^c, Y^c\rangle_0 = E(X^c \cdot Y^c)$

$E(Y^c)=0 \quad E(X^c)=0$

б) $Var(2X+6)$,

$Cov(3X-2015, 6Y+\sqrt{3}) = Cov(3X, 6Y) = 3 \cdot 6 \cdot Cov(X,Y) = 18 \cdot 0{,}$

$cov(2X-3, 6-9Y)$

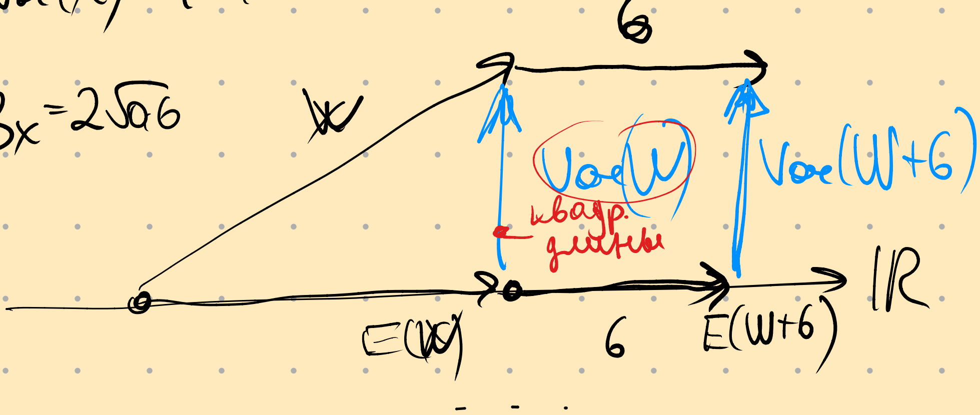
$Var(W+6) = Var(W)$

$Var(2X+6) =$

$= Var(2X) = 2^2 \cdot Var(X) = 4 \cdot 0{,}6$

$\sigma_{2X+6} = \sigma_{2X} = 2\sigma_X = 2\sqrt{0{,}6}$

интуиция!



алгебраически:

$$Var(W) = E\left[(W - E(W))^2\right]$$

$$Var(W+6) = E\left[(W+6 - E(W+6))^2\right] =$$

$$= Var(W)$$

$$Var(cX+d) = c^2 Var(X).$$

c, d − конст

Аналог.

$$Cov(X+c, Y) = E\left[(X+c - E(X+c)) \cdot (Y - E(Y))\right]$$

$$Cov(dX, Y) = E\left[(dX - E(dX)) \cdot (Y - E(Y))\right] =$$

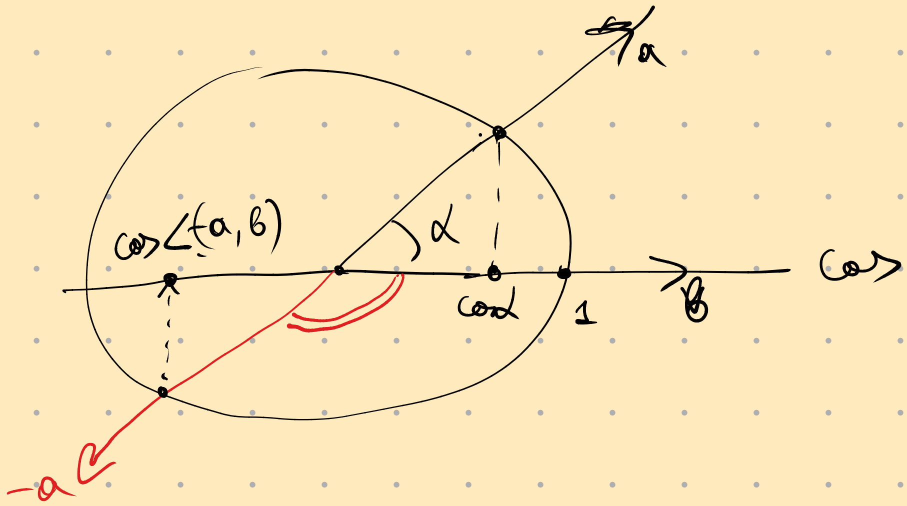
$$= d \cdot Cov(X, Y)$$

$$Cov(dX+c, Y) = d\, Cov(X, Y)$$

$(2X-3, 6-9Y)$ … $(2X, -9Y)$

$$\operatorname{corr}(2X-3,\,6-9Y) = \frac{\operatorname{Cov}(2X-3,\,6-9Y)}{\sigma_{2X-3}\cdot\sigma_{6-9Y}} = \frac{\operatorname{Cov}(2X,\,-9Y)}{\sigma_{2X}\cdot\sigma_{(9Y)}} =$$

$$= \frac{2\cdot(-9)\cdot\operatorname{Cov}(X,Y)}{2\cdot 9\cdot\sigma_X\cdot\sigma_Y} = -1\cdot\operatorname{Corr}(X,Y) = \frac{-0{,}1}{\sqrt{0{,}6}\cdot 0{,}5}$$



Упр.

У X есть плотность $f(x)=\begin{cases}3x^2, & x\in[0;1]\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$

$\operatorname{Var}(X)$?

$\operatorname{Cov}(X,X^2)$?

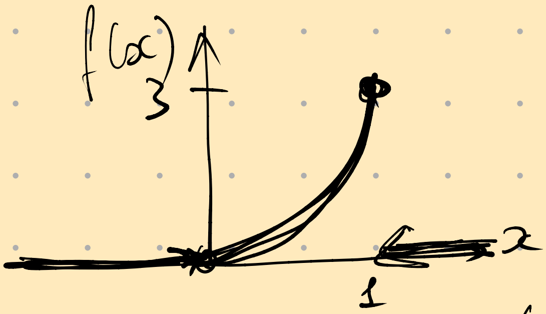
$\operatorname{Corr}(X,X^2)$?

$$\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \boxed{\frac{3}{5} - \frac{9}{16}}$$

LOTUS

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,3x^2\,dx = \frac{3}{5}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x\cdot 3x^2\,dx = \frac{3}{4}$$



$$\operatorname{Cov}(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)$$

$$\operatorname{Cov}(X,X^2) = E(X\cdot X^2) - E(X)\cdot E(X^2) = \frac{3}{6} - \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2} - \frac{9}{20}$$

$$E(X^3) = \int_0^1 x^3 f(x)\,dx = \int_0^1 x^3\cdot 3x^2\,dx = \frac{3}{6}$$

$$\operatorname{Corr}(X,X^2)=\frac{\operatorname{Cov}(X,X^2)}{\sigma_X\cdot\sigma_{X^2}}=\frac{\operatorname{Cov}(X,X^2)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\cdot\operatorname{Var}(X^2)}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{9}{20}}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}-\frac{9}{16}\right)\operatorname{Var}(X^2)}}$$

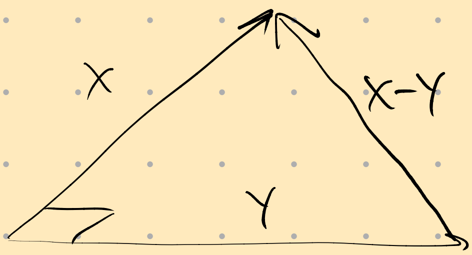
$$\operatorname{Var}(X^2)=E\left((X^2)^2\right)-\left(E(X^2)\right)^2=E(X^4)-\left(\underbrace{E(X^2)}_{\frac{3}{5}}\right)^2$$

$$E(X^4)=\int_0^1 x^4\cdot f(x)\,dx=\int_0^1 x^4\, 3x^2\,dx=\frac{3}{7}$$

Упр. $\boxed{\text{Сф. т. Пифагора}}$

Если $X \perp_0 Y$, то

$$\|X-Y\|_0^2=\|X\|_0^2+\|Y\|_0^2$$



Если $E(X\cdot Y)=0$

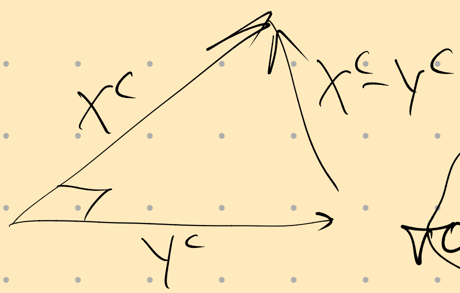
то $E\left((X-Y)^2\right)=E(X^2)+E(Y^2)$

$\forall X,Y$

Сф. т. Пифагора для СВ с нулевым ожиданием

$X^c=X-E(X)$ то $E(X^c)=0$

$Y^c=Y-E(Y)$ то $E(Y^c)=0$



Если $E\left((X-E(X))\cdot(Y-E(Y))\right)=0$

то $E\left((X^c-Y^c)^2\right)=E\left((X^c)^2\right)+E\left((Y^c)^2\right)$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Если } \operatorname{Cov}(X,Y)=0, \text{ то}\\ \operatorname{Var}(X-Y)=\operatorname{Var}(X)+\operatorname{Var}(Y)=\operatorname{Var}(X+Y)\end{array}}$$

критерий незав СВ:

- СВ X и Y незав если и только если
$$E(f(X)\cdot g(Y)) = E(f(X))\cdot E(g(Y)) \quad \forall f, g.$$
- СВ X и Y незав если и только если
$$cov(f(X), g(Y)) = 0 \quad \text{для } \forall f, g$$

Если X и Y незав, то $Var(X+Y) = Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y)$

Упр СВ X имеет отриц. биномиальное распр.

$$X \sim NBin(r, p)$$

Эксп: подбрас-м монетку до выпадения r орлов (вер-сть орла – p)

X – кол-во решек.

Var(X) ?

$r=3$

$\boxed{HHT}\boxed{HHHT}\boxed{HT}$

$X_1 = 2$ $\qquad$ $X = 6$

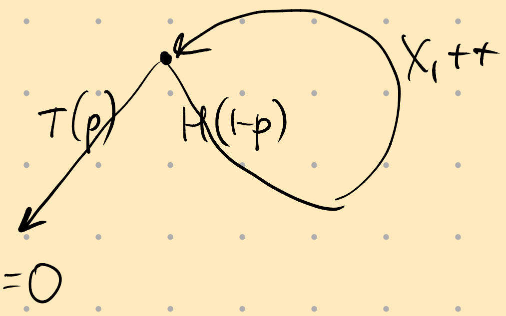
$X_1 \neq X_2$

$X = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_r$ ← незав.

X_1 ← кол-во решек до 1-го орла

$X_1 \sim X_2 \sim X_3 \ldots \sim X_r$

$$Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_r) = r \cdot Var(X_1)$$



$$\begin{cases} E(X_1) = p \cdot 0 + (1-p)\cdot E(X_1+1) \\ E(X_1^2) = p \cdot 0^2 + (1-p) \cdot E((X_1+1)^2) \end{cases}$$

$E(X_1) = (1-p)\cdot E(X_1) + 1-p \rightarrow E(X_1) = \frac{1-p}{p}$

$E(X^2 = (1-p)\cdot E(X_1^2 + 2X_1 + 1)$

$$E(X_1^2) = (1-p)\cdot E(X_1^2) + (1-p)\cdot 2\cdot \frac{1-p}{p} + 1-p$$

$$E(X_1^2) = \frac{2(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p}$$

$$Var(X_1) = E(X_1^2) - \left(E(X_1)\right)^2 = \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + \frac{1-p}{p}$$

$$Var(X) = r\cdot\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + \frac{1-p}{p}\right)$$

x	1	2
$P(X=x)$	0,9	0,1

$$E(X) = 1\cdot 0{,}9 + 2\cdot 0{,}1 = 0{,}9 + 0{,}2 = 1{,}1$$

$$\frac{1+2}{2} = 1.5$$