

Домашнее задание 6

Дедлайн: 2024-11-01, 21:00.

1. Распределение вектора (X, Y) задано таблицей

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 0$	0.2	0.2	0.1
$X = 1$	0.5	0	0

- а) Найдите энтропии $\mathbb{H}(X)$, $\mathbb{H}(Y)$, $\mathbb{H}(X, Y)$.
 - б) Найдите $\mathbb{H}(Y | X)$.
 - в) Какое максимальное значение может принимать условная энтропия $\mathbb{H}(Y | X)$, если X принимает два значения, а Y — три?
2. Для дискретных величин X и Y докажите или опровергните утверждения:
- а) $\mathbb{H}(X) + \mathbb{H}(Y | X) = \mathbb{H}(X, Y)$;
 - б) $\mathbb{H}(X, Y) \geq \mathbb{H}(X)$;
 - в) $\mathbb{H}(X^2) = \mathbb{H}(X)$;
3. Время до прихода автобуса на остановку — неотрицательная случайная величина X с функцией плотности. Андрей верит, что функция плотности X имеет вид

$$a(x) = \begin{cases} \alpha \exp(-\alpha x), & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Борис верит, что функция плотности X имеет вид

$$b(x) = \begin{cases} \beta \exp(-\beta x), & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Вова верит, что у X есть какая-то функция плотности $c(x)$, а математическое ожидание такое, как думает Андрей.

- а) Найдите математическое ожидание с точки зрения Андрея и Вовы, $\mathbb{E}_a(X)$.
- б) Найдите энтропию $\mathbb{H}(a)$.
- в) Найдите кросс-энтропию $\text{CE}(b||a)$. При каком α она минимальна?
- г) Найдите кросс-энтропию $\text{CE}(c||a)$.
- д) Чему равно максимальное значение энтропии $\mathbb{H}(c)$ и при какой функции плотности $c(x)$ достигается максимум?