

Домашнее задание 7

Дедлайн: 2024-12-03, 23:59.

1. Пара величин (X, Y) имеет функцию плотности $f(x, y) = 2x^3 + y$ на квадрате $[0; 1] \times [0; 1]$ и 0 за его пределами.
 - а) Найдите условную функцию плотности $f(y | x)$.
 - б) Найдите частные функции плотности $f_X(x)$ и $f_Y(y)$.
 - в) Найдите функцию плотности $f_W(w)$ и функцию распределения $F_W(w)$ величины $W = X - Y$.
 - г) Найдите ожидание $\mathbb{E}(X + 5Y)$ и дисперсию $\text{Var}(X + 5Y)$.
 - д) Найдите совместную функцию плотности пары $(V = 2X + 3Y, W = X - Y)$. Аккуратно укажите область, где новая плотность положительна.
 - е) Найдите условное ожидание $\mathbb{E}(Y | X = x)$ и условную дисперсию $\text{Var}(Y | X = x)$.
2. Рассмотрим пуассоновский поток снежинок (X_t) падающих на раскрытую ладонку с интенсивностью $\lambda = 0.5$ снежинок в секунду.
 - а) Какова вероятность того, что за 5 секунд на ладонку упадёт не менее двух снежинок?
 - б) Я только что раскрыл ладонку. Какова вероятность того, что следующие две снежинки упадут раньше, чем через три секунды?
 - в) Выпишите функцию плотности времени T от раскрытия ладонки до выпадения третьей снежинки.
 - г) Найдите $\mathbb{E}(T)$ и $\text{Var}(T)$.
 - д) Выпишите функцию плотности отношения R времени выпадения третьей снежинки к времени выпадения десятой снежинки.
 - е) Найдите $\mathbb{E}(R)$ и $\text{Var}(R)$.
 - ж) Найдите вероятность $\mathbb{P}(X_{10} = 5 | X_4 = 1)$.
 - з) Найдите условные ожидание $\mathbb{E}(X_{10} | X_4 = 1)$ и дисперсию $\text{Var}(X_{10} | X_4 = 1)$.
3. Страховые случаи наступают согласно пуассоновскому потоку с интенсивностью 100 случаев в месяц. Выплаты по каждому страховому случаю распределены независимо от других случаев и времени наступления равномерно 0 до 1 ундециллиона рублей.

Проведите 10^4 симуляций этого процесса длиной в 1 месяц.

 - а) Постройте гистограмму суммарных выплат за 10 дней.
 - б) Оцените вероятность того, что за 10 дней придётся выплатить более 12 ундециллионов рублей.
 - в) Оцените размер резерва, необходимый страховой компании для того, чтобы за месяц вероятность исчерпания этого резерва была равна 0.05.
 - г) Как изменятся ответы на вопросы (б) и (в), если месяц начался с понедельника, а в субботу и воскресенье интенсивность страховых случаев падает до 10 случаев в месяц?