

1. [10] Случайная величина  $X$  имеет стандартное нормальное распределение.
  - а) [2] Найдите безусловное ожидание  $\mathbb{E}(|X|)$ .
  - б) [4] Найдите условное ожидание  $\mathbb{E}(X \mid X > 0)$ .
  - в) [4] Найдите условную дисперсию  $\mathbb{V}\text{ar}(X \mid X > 0)$ .

Запишите ответ в явном виде, а если это невозможно, то с помощью функции распределения.

2. [10] Вектор  $(X, Y)$  имеет совместную функцию плотности

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x^3 + 2y^3, & \text{если } x, y \in [0; 1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- а) [3] Найдите совместную функцию плотности вектора  $(R = X - Y, S = X + 3Y)$ .
  - б) [3 + 2] Найдите условную функцию плотности  $f_{Y|X}(y \mid x)$  и ожидание  $\mathbb{E}(Y \mid X = x)$ .
  - в) [2] Правда ли, что величины  $X$  и  $Y$  одинаково распределены?
3. [10] Рассмотрим пуассоновский поток снежинок  $(X_t)$  падающих на раскрытую ладонку с интенсивностью  $\lambda = 2$  снежинки в секунду.
  - а) [3] Какова вероятность того, что за 3 секунды на ладонку упадёт не более двух снежинок?
  - б) [3] Я только что раскрыл ладонку. Какова вероятность того, что следующие две снежинки упадут раньше, чем истекут четыре секунды?
  - в) [2 + 2] Найдите условную вероятность  $\mathbb{P}(X_5 = 10 \mid X_4 = 6)$  и дисперсию  $\mathbb{V}\text{ar}(X_5 \mid X_4 = 6)$ .
4. [10] Полина подбрасывает правильный кубик  $n > 100$  раз. Обозначим результаты отдельных бросков как  $X_i$ , а суммарный результат как  $S$ ,  $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .
  - а) [3] Найдите  $\mathbb{E}(X_i)$  и  $\mathbb{V}\text{ar}(X_i)$ .
  - б) [4] Найдите примерно вероятность  $\mathbb{P}(S > \mathbb{E}(S) + \sqrt{n})$ .
  - в) [3] Найдите такое число  $a$ , что  $\mathbb{P}(S > a) = 0.52$  при  $n = 200$ .

В этом упражнении ответ запишите с помощью стандартной нормальной функции распределения  $F$  и найдите численно по таблицам.

5. Вектор  $Y$  имеет совместное нормальное распределение.

$$Y \sim \mathcal{N} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & -1 & -2 \\ & 20 & -3 \\ & & 30 \end{pmatrix} \right).$$

- а) [3] Найдите  $\mathbb{E}(Y_1 - 5Y_2)$ ,  $\mathbb{V}\text{ar}(Y_1 - 5Y_2)$ ,  $\mathbb{P}(Y_1 - 5Y_2 > 0)$ .
  - б) [3] Найдите  $\text{Cov}(Y_1 Y_2, Y_3)$ .
  - в) [4] Найдите  $\mathbb{P}(Y_1 > 0 \mid Y_2 = 2)$ .

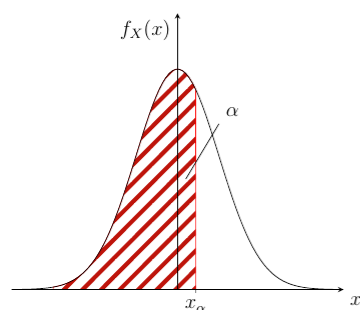
В этом упражнении достаточно записать ответ с помощью стандартной нормальной функции распределения  $F$ .

6. Величины  $X_n$  независимы и  $X_n \sim \text{Beta}(n + 10, 20)$ .

а) [2] Найдите закон распределения  $R = 1 - X_{30}$ .

б) [2 + 2] Найдите ожидания  $\mathbb{E}(1/X_{30})$  и  $\mathbb{E}(X_{30}/(1 - X_{30}))$ .

в) [4] К чему сходится последовательность  $(X_n)$  по распределению?



### Таблица для нормального распределения

В таблице приведены значения вероятностей

$$\mathbb{P}(\{X \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \alpha.$$

Целые части и десятые доли числа  $x$  указаны в левом столбце; сотые доли числа  $x$  — в верхней строке.

$x$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999