Сходимость по распределению и ЦПТ.

У числовых посл-стей

$\lim a_n = a$ $\Rightarrow$ сх-сть по Пеано

У случ-х величин.

$R_n \xrightarrow{a.s.} R$ $\qquad$ $R_n \xrightarrow{P} R$ $\Rightarrow$ $\boxed{R_n \xrightarrow{dist} R}$

Пример.

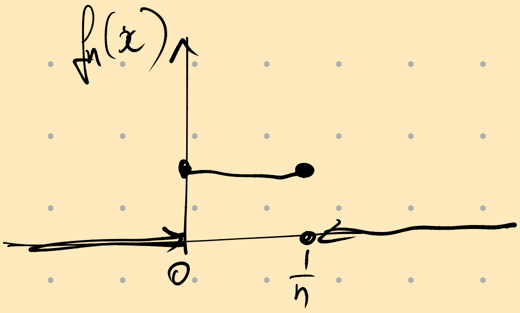
$R_n \sim Unif[0;2+\frac{1}{n}] \xrightarrow{dist} R \sim U[0;2]$

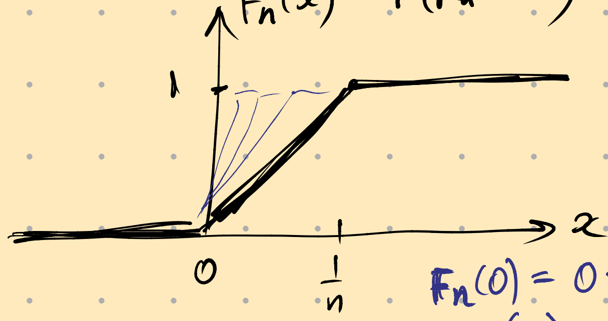
Опр. $R_n \xrightarrow{dist} R$ сх-ся по распределению

$\underbrace{\boxed{P(R_n \le x)}}_{F_n(x)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underbrace{P(R \le x)}_{F(x)}$ для $\forall x$, в которых функция распр-ия $F(x) = P(R \le x)$ непрер-на.

Пример.

$$R_n \sim Unif\left[0; \tfrac{1}{n}\right] \xrightarrow{dist !!} R = 0.$$





$F_n(0) = 0 \not\to F(0) = 1$

$F_n(x) \to 1 \quad x > 0$

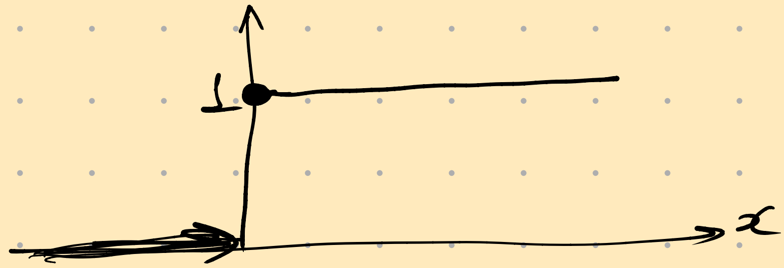
$F_n(x) \to 0 \quad x < 0$

$\downarrow n \to \infty$

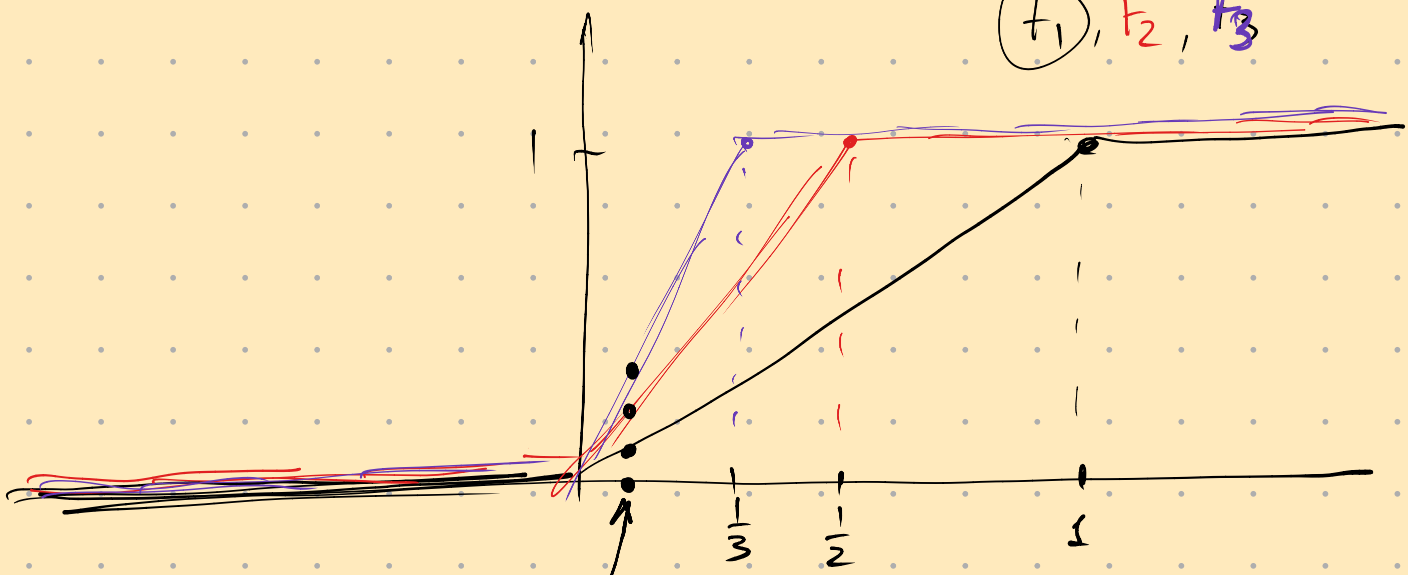
У R нет плотн.

t	0
$P(R=t)$	1

$F(x) = P(R \le x)$



F_1, F_2, F_3



$\boxed{x = 0.01}$

$F_n(0.01) \to 1$

Пример.

X_n равновероятно прин знач от 1 до n (включ)

$$Y_n = \frac{X_n}{n}$$

$$Y_n \xrightarrow{dist} Y \sim Unif[0;1]$$

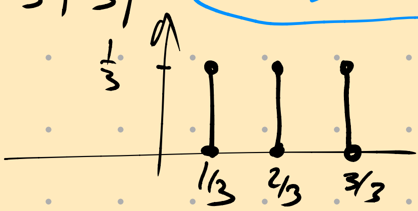
Теорема

$E(\cos Y_n) \to$
$\to E(\cos Y$

t	1	2	3
$P(Y_3=t)$	1/3	1/3	1/3

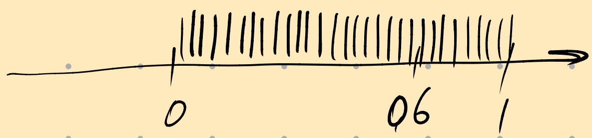
s	1/3	2/3	3/3
$P(Y_3=s)$	1/3	1/3	1/3

$\boxed{E(\operatorname{arctan} Y_n) \Rightarrow E(\operatorname{arctan} Y)}$



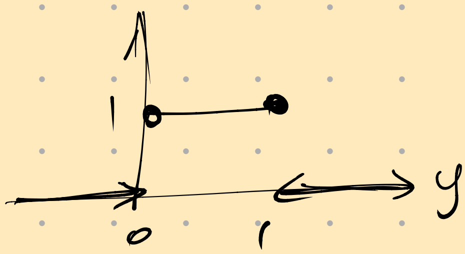
s	1/5	2/5	3/5	4/5	5/5
$P(Y_5=s)$	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

$P(Y_{30}=t)\downarrow$ $\qquad P(Y_{30}\le 0{,}6)\approx 0{,}6$

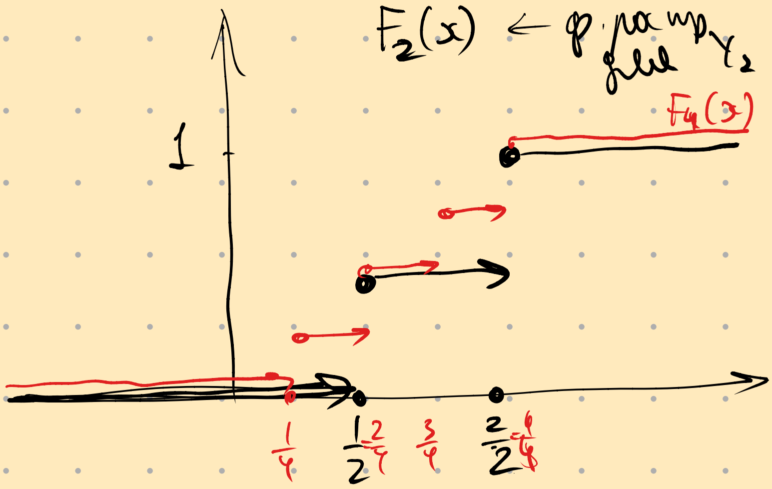


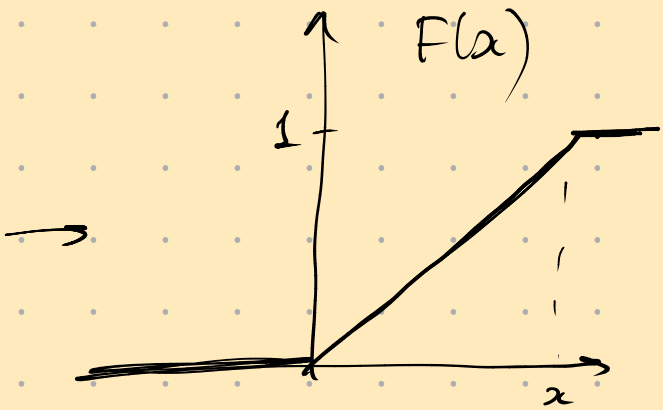
у Y_n нет ф. плотн., они - дискретные

у Y есть $f(y)$



$F_2(x) \leftarrow$ ф. распр. для Y_2





Опр. (перефр.)

$$P(R_n \le x) \longrightarrow P(R\le x)$$

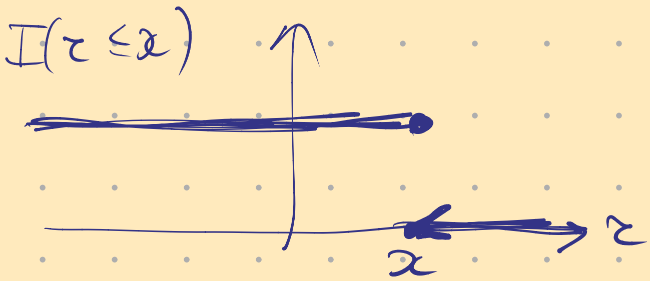
в точках непр-сти $F(x)=P(R\le x)$

$$P(A)=E(I_A)$$

Опр $R_n \xrightarrow{dist} R$ если

$$E(h(R_n)) \longrightarrow E(h(R))$$

для любой функции $h\in H$



H – все вида $h(\tau)=I(\tau\le x)$, где x – точка непр-сти ф-ции $F(x)$ величины R

Теор.) опр-ие сх-сти не изм-ся, если в качестве ф-ции H взять не индикаторы, а, например

H = { все огранич-ые непр-ые ф-ции }

H = { все ф-ции диф-ые k раз с огранич-ми произв-ми }

Ц.П.Т.

Если $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ незав, один. расп, $E(Q_i)=\mu$, $Var(Q_i)=\sigma^2$, то

$$R_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i - E\left(\sum Q_i\right)}{\sqrt{Var\left(\sum Q_i\right)}} \xrightarrow{dist} R \sim N(0;1)$$

$\boxed{\text{„Всё нормально“}}$

док-во

$$E(Q_i)=\mu \Rightarrow E\left(\sum_{i=1}^{n} Q_i\right) = n\mu$$

$$\left.\begin{matrix} Var(Q_i)=\sigma^2 \\ Q_i \text{ незав} \end{matrix}\right\} \Rightarrow Var\left(\sum_{i=1}^{n} Q_i\right) = Var(Q_1+Q_2+\ldots+Q_n) =$$

$$= Var(Q_1)+\ldots+Var(Q_n) + \cancel{2Cov(Q_1,Q_2)+\ldots+2Cov(Q_{n-1},Q_n)}$$

$E(Q_i)=\mu$

$Var(Q_i)=\sigma^2$

$$= n \cdot Var(Q_1) = n\cdot\sigma^2$$

$$R_n = \frac{Q_1+\ldots+Q_n - n\cdot\mu}{\sqrt{n\cdot\sigma^2}} = \underbrace{\frac{Q_1-\mu_1}{\sqrt{n}\cdot\sigma}}_{= X_1} + \underbrace{\frac{Q_2-\mu_2}{\sqrt{n}\cdot\sigma}}_{= X_2} + \ldots + \underbrace{\frac{Q_n-\mu_n}{\sqrt{n}\cdot\sigma}}_{= X_n}$$

$$R_n = X_1+X_2+\ldots+X_n$$

$$E(X_i) \overset{?}{=} E\left(\frac{Q_i-\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) = 0$$

$$Var(X_i) \overset{?}{=} Var\left(\frac{Q_i-\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma}\right) = \frac{1}{n}$$

[Идея] [Chin 2022]

[Цель!] $X_1+X_2+\ldots+X_n \underset{n\to\infty}{\approx} N(0;1)$

пошагово будем заменять слагаемые на N.

$X_n \to Y_n \quad Y_n \sim N(0;\frac{1}{n})$

$X_{n-1} \to Y_{n-1} \quad Y_{n-1} \sim N(0;\frac{1}{n})$

$$\underbrace{X_1+X_2+X_3+X_4}_{Z_{4,4}} \xrightarrow{\text{шаг}} \underbrace{X_1+X_2+X_3+0}_{S_{4,4}}$$

шаг

$$\underbrace{X_1+X_2+X_3+Y_4}_{Z_{4,3}} \to \underbrace{X_1+X_2+0+Y_4}_{S_{4,3}}$$

$$\underbrace{X_1+X_2+Y_3+Y_4}_{Z_{4,2}} \to \underbrace{X_1+0+Y_3+Y_4}_{S_{4,2}}$$

$$X_1+Y_2+Y_3+Y_4 \to 0+Y_2+Y_3+Y_4$$

$$\underbrace{Y_1+Y_2+Y_3+Y_4}_{Z_{4,0}}$$

$Y_i \sim N(0;\frac{1}{n})$ и незав.

$\boxed{Y_1+Y_2+\ldots+Y_n \sim N(0;1)}$

[Опр!/Теор] $R_n \xrightarrow{dist} R$

$E(h(R_n)) \to E(h(R))$ для $\forall h \in H$

$H = \{$все ф-ции 3 раз дифф-мые с огран-ми произв-ми$\}$

с некоторого номера T при $n \geq T$

$$\boxed{\left| E\left(h(X_1+X_2+\ldots X_n)\right) - E\left(h(Y_1+\ldots Y_n)\right)\right| < \varepsilon.}$$

с нек-рого номера T при $n \geq T$

$$\left| E(h(Z_{n,i})) - E(h(S_{n,i})) + E(h(S_{n,i})) - E(h(Z_{n,i-1}))\right| < \frac{\varepsilon}{n}$$

ряд Тейлора — по Лагранжу.

$$h(Z_{n,i}) = h(S_{n,i}) + h'(S_{ni})\cdot(Z_{ni} - S_{ni}) + \frac{h''(C)}{2!}\cdot(Z_{ni} - S_{ni})^2$$

C – точка между S_{ni} и Z_{ni}

$$h(Z_{ni}) - h(S_{ni}) = h'(S_{ni})\cdot X_i + \frac{h''(C)}{2!}\cdot X_i^2$$

по аналогии

$$h(Z_{ni-1}) - h(S_{ni}) = h'(S_{ni})\cdot Y_i + \frac{h''(D)}{2!}\cdot Y_i^2$$

D – точка между S_{ni} и Z_{ni-1}

$$\approx \frac{h''(S_{ni})}{2!}$$

$$h(Z_{ni}) - h(S_{ni}) = h'(S_{ni})\cdot X_i + \frac{h''(S_{ni})}{2!}\cdot X_i^2 + \frac{h''(C) - h''(S_{ni})}{2!}X_i^2$$

$$E\left(h(Z_{ni}) - h(S_{ni})\right) = E\left(h'(S_{ni})\cdot X_i\right) + E\left(\frac{h''(S_{ni})}{2!}X_i^2\right) + E\left(\frac{h''(C) - h''(S_{ni})}{2!}X_i^2\right)$$

S_{ni} не зав ни от X_i ни от Y_i

$$E(h'(S_{ni})\cdot X_i) = E(h'(S_{ni}))\cdot \underbrace{E(X_i)}_{0} = 0$$

$$E\left(\frac{h''(S_{ni})}{2!}X_i^2\right) = E(h''(S_{ni}))\cdot\frac{1}{2}\cdot\underbrace{E(X_i^2)}_{\frac{1}{n}}$$

цель: $\left|E[\ldots]\right| < \frac{\varepsilon}{n}$

$$E[h(Z_{ni}) - h(S_{ni}) + h(S_{ni}) - h(Z_{ni-1})] =$$

$$= 0 + E(h''(S_{ni}))\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} + E\left[\frac{h''(C)-h''(S_{ni})}{2!}X_i^2\right]$$

$$-0 - E(h''(S_{ni}))\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - E\left[\frac{h''(D)-h''(S_{ni})}{2!}Y_i^2\right]$$

$$= E\left(\frac{h''(C)-h''(S_{ni})}{2!}\cdot X_i^2\right) - E\left(\frac{h''(D)-h''(S_{ni})}{2!}\cdot Y_i^2\right)$$

с нек-го n вычитаемое $\le \frac{\varepsilon}{2n}$

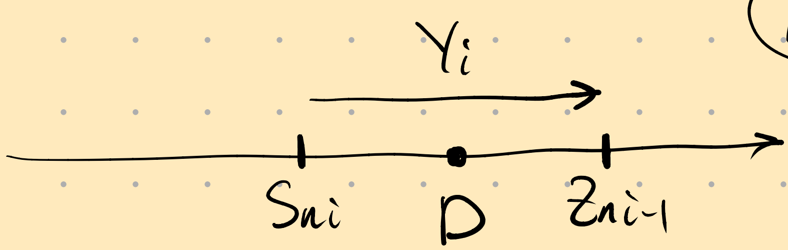
$$E\Bigg(\underbrace{\boxed{\frac{h''(D)-h''(S_{ni})}{2!}}}_{\Delta}\cdot Y_i^2\Bigg)$$

$G = \{|Y_i| < c\}$ $\qquad I_G + I_B = 1$

$B = \{|Y_i| \ge c\}$

$$= E(\Delta\cdot Y_i^2\cdot I_G) + E(\Delta\cdot Y_i^2\cdot I_B)$$

$|Y_i| < c$



h - хорошая! ограничена 3-я произв-ая $\leq M_3$

$$E(\Delta \cdot Y_i^2 \cdot I_G) \leq \frac{M_3 \cdot C}{2} \cdot \underbrace{E(Y_i^2 \cdot I(|Y_i| < C))}_{\leq E(Y_i^2) = \frac{1}{n}}$$

$$E(\Delta Y_i^2 \cdot I_G) \leq \frac{M_3 \cdot C}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

выбрав „C" мы сделали $< \frac{\varepsilon}{4n}$

Шаг Выбрав n добьёмся того, что

$$E(\Delta Y_i^2 \cdot I_B) < \frac{\varepsilon}{4n} \quad !!$$

не доделали
