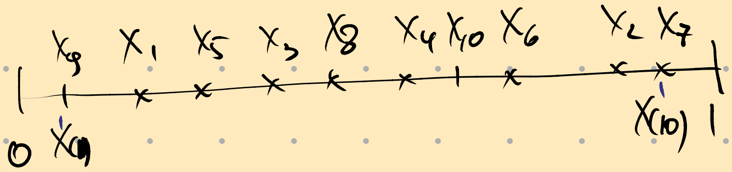
→ Beta-распределение

→ Нормальное распределение.

(Упр.) $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ независимы, Unif$[0;1]$

упорядочим по возрастанию $X_{(1)} \le X_{(2)} \le X_{(3)} \le \dots \le X_{(10)}$

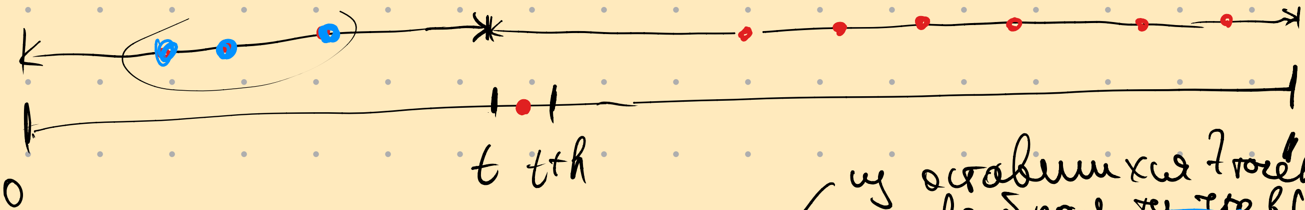


Найдите плотность $X_{(4)}$? $f_{X_{(4)}}(t)$?

$$f_{X_{(4)}}(t) = \begin{cases} ?, & t\in[0;1] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Смысл плотности

$$\boxed{P(X_{(4)} \in [t;t+h]) = f(t)\cdot h + o(h)}$$



из оставшихся 7 точек я выбрал ту, что в $[t;t+h]$

$$P(X_{(4)} \in [t;t+h]) = \boxed{C_{10}^3 \cdot \left(\frac{t}{1}\right)^3} \cdot \boxed{7\cdot\left(\frac{h}{1}\right)} \cdot \underbrace{\boxed{(1-t)^6}}_{\text{оставшиеся точки } \in[t;1]} + o(h)$$

выбираю те, что попадут в $[0;t]$

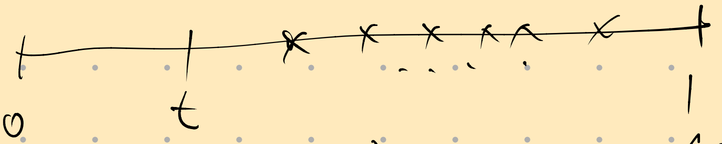
$$f(t) = \lim_{h\to 0}\frac{P(X_{(4)}\in[t;t+h])}{h} = \boxed{C_{10}^3\cdot 7\cdot t^3\cdot(1-t)^6} = 10\cdot\cancel{9}\cdot C_9^3\cdot t^3\cdot(1-t)^6$$

Альтернатива

$$P(X_{(1)} \le t) = 1 - P(X_{(1)} > t) =$$
$$= 1 - P(X_1 > t,\ X_2 > t,\ \dots\ X_{10} > t) =$$

$\{X_{(1)} > t\}$ = {самый мал-ий больше t} =
= {каждый больше t}

$$= 1 - P(X_1 > t)\cdot P(X_2 > t)\cdot \ldots \cdot P(X_{10} > t)$$



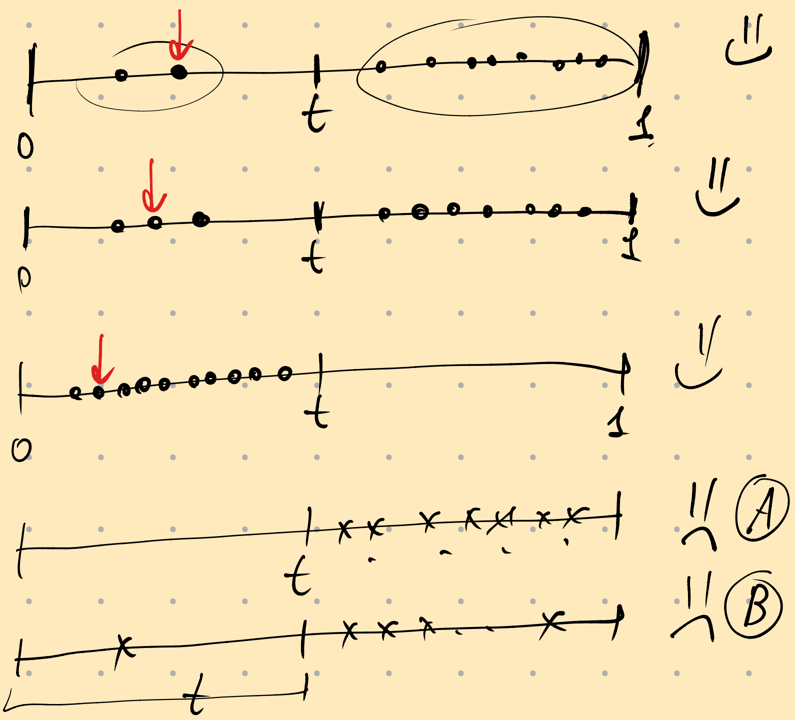
ф. распределения $F_{(1)}(t) = 1 - (1-t)^{10} = P(X_{(1)} \le t)$

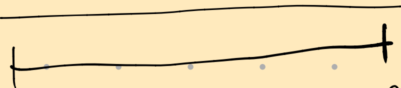
$$f_{(1)}(t) = F'_{(1)}(t) = 10\cdot(1-t)^9$$

$$F_{(2)}(t) = P(X_{(2)} \le t) \overset{?}{=} ?$$

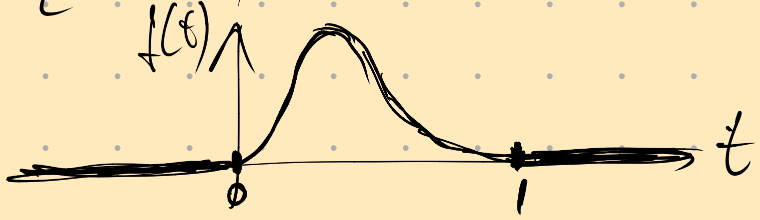
$$\boxed{f_{(2)}(t) = F'_{(2)}(t)}$$

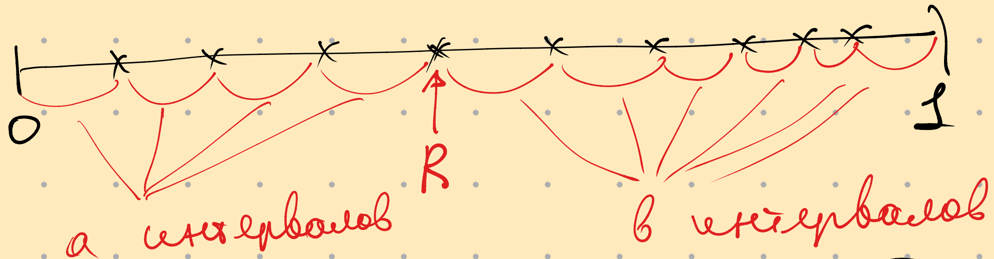
$$= 1 - \underbrace{(1-t)^{10}}_{A} - C_{10}^{1}\cdot t(1-t)^9$$





$$f(t) = \begin{cases} C_{10}^{3}\cdot 7\cdot t^3\cdot(1-t)^6, & t \in [0;1] \\ 0, & t \notin [0;1] \end{cases}$$





Всего интервалов: $a+b$.

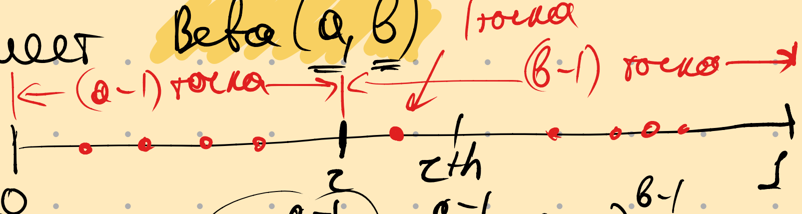
Всего точек: $n = a+b-1$

упор. номер $R = X_{(a)}$

<u>Определение</u> (для $a, b \in \mathbb{N}$)

Если $X_1, \ldots, X_{a+b-1} \sim U[0;1]$ независ, то

$R = X_{(a)}$ имеет Beta(a, b)

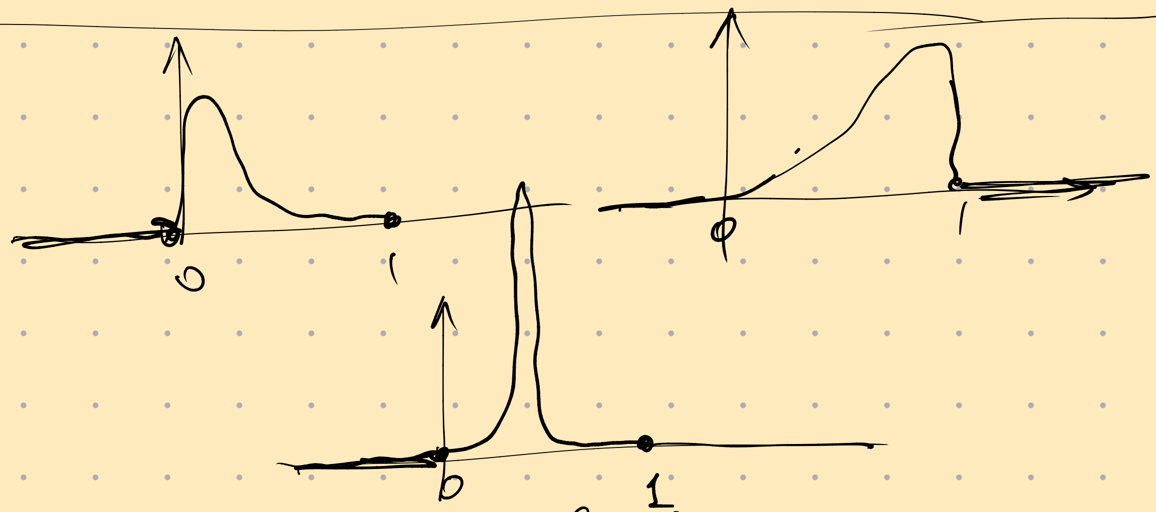


<u>Упр.</u> $f_R(r)$?

$$P(R \in [r; r+h]) = (a+b-1) \cdot h \cdot C_{a+b-2}^{a-1} \cdot r^{a-1} \cdot (1-r)^{b-1} + o(h)$$

$$f_R(r) = \begin{cases} \dfrac{(a+b-1)!}{(a-1)! \cdot 1! \cdot (b-1)!} \cdot r^{a-1} \cdot (1-r)^{b-1} & r \in [0;1] \\ 0, \end{cases}$$

$a, b \in \mathbb{N}$



<u>Опр (обобщение для $a>0, b>0$)</u>

$R \sim$ Beta(a, b)

$$f_R(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(a,b)} \cdot r^{a-1} \cdot (1-r)^{b-1}, & r \in [0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

для $a, b \in \mathbb{N}$: $\dfrac{(a-1)!\,(b-1)!}{(a+b-1)!}$

опр. [Бета-функция]

$$B(a,b) = \int_0^1 r^{a-1}(1-r)^{b-1}\,dr$$ ← нормирующая константа.

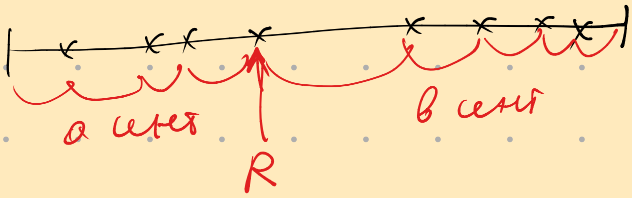
цель: $\int_0^1 f_R(r)\,dr = 1$

Упр устное $\int_0^1 r^{56}\cdot(1-r)^{1000}\,dr \stackrel{?}{=} \frac{56!\,1000!}{1057!}$

$$\boxed{\int_0^1 \boxed{\frac{(56+1000+1)!}{56!\,1000!}}\, r^{56}\cdot(1-r)^{1000}\,dr = 1}$$

Свойства $R \sim \text{Beta}(a,b)$ [верен для $a>0, b>0$] [док-ва для натур]

а) $\boxed{E(R)}$? $= \frac{a}{a+b}$ ← интуиция



б) $Var(R)$?

в) $1-R \sim$? $\text{Beta}(b,a)$

$$E(R) = \int_0^1 r\cdot f(r)\,dr = \int_0^1 \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!\,(b-1)!}\, r\cdot r^{a-1}\cdot(1-r)^{b-1}\,dr =$$

$$= \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!\,(b-1)!}\boxed{\int_0^1 r^{a}\cdot(1-r)^{b-1}\,dr} =$$

почти ф. плотн $\text{Beta}(a+1, b)$

$$= \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!\,\cancel{(b-1)!}} \cdot \frac{a!\,\cancel{(b-1)!}}{(a+b-1+1)!} = \frac{a}{a+b}$$

б) $E(R^2) = \int_0^1 r^2 f(r)\,dr = \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!\,(b-1)!}\cdot\int_0^1 r^{a+1}(1-r)^{b-1}\,dr =$

аналог.

$$= \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!\,(b-1)!}\cdot\frac{(a+1)!\,(b-1)!}{(a+b+1)!} = \ldots$$

$$Var(R) = E(R^2) - (E(R))^2$$

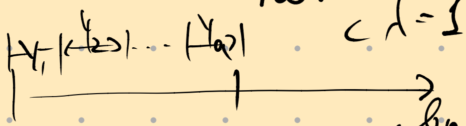
Упр / теорема. $a, b \in \mathbb{N}$ [результат верен $a, b > 0$]

$$\left.\begin{array}{l} S_1 \sim \text{Gamma}(a, 1) \\ S_2 \sim \text{Gamma}(b, 1) \end{array}\right\} \text{незав}$$

смысл? ф. плотн?

время наступления a-го происшествия в пуасс. потоке с $\lambda = 1$.

$$R = \frac{S_1}{S_1 + S_2} \qquad S = S_1 + S_2$$



$Y_i \sim$ незав $Exp(\lambda)$

$S_1 = Y_1 + \ldots + Y_a \sim$

$\sim \text{Gamma}(a, \lambda)$

!! а) $f_{S_1, S_2}(s_1, s_2)$?

б) $f_{R,S}(r, s)$?

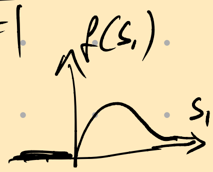
в) как расп-на R?
как расп-на S?

$$f_{S_1}(s_1) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^a \cdot \exp(-\lambda s_1) \cdot s_1^{a-1}}{(a-1)!}, & s_1 \geq 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \qquad a \in \mathbb{N}$$

$$f_{S_1}(s_1) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^a \cdot \exp(-\lambda s_1) \cdot s_1^{a-1}}{\Gamma(a)} & s_1 \geq 0 \\ 0 \end{cases}$$

в нашем случае $\lambda = 1$

$$f_{S_1}(s_1) = \frac{\exp(-s_1) \cdot s_1^{a-1}}{\Gamma(a)}$$



$$f_{S_2}(s_2) = \frac{\exp(-s_2) \cdot s_2^{b-1}}{\Gamma(b)}$$

$$\text{а)} \quad f(s_1, s_2) \overset{\text{незав}}{=} \frac{1}{\Gamma(b)\Gamma(a)} \cdot \exp(-s_1) \cdot \exp(-s_2) \cdot s_1^{a-1} \cdot s_2^{b-1}$$

потянуло Beta-расп!

$$\begin{cases} S = S_1 + S_2 \\ R = \dfrac{S_1}{S_1 + S_2} \end{cases} \qquad J = \frac{\partial\, old}{\partial\, new}$$

$$\text{б)} \quad f_{S,R}(s, r) = f(s_1(s, r), s_2(s, r)) \cdot |\det J|$$

old, new

$$S_1 = S \cdot R$$

$$S_2 = S - S_1 = S - SR$$

$$J = \begin{array}{c|c|c} & \text{по } S & \text{по } R \\ \hline \text{от } S_1 & R & S \\ \text{от } S_2 & 1-R & -S \end{array}$$

$$|\det J| = |-RS - S(1-R)| = S$$

$s_1(s, r)$
$s_2(s, r)$

$$f_{S,R} = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot \exp(-s) \cdot (sR)^{a-1} ((1-R) \cdot s)^{b-1} \cdot S$$

$f(s_1, s_2) =$

$= \frac{1}{\Gamma(b)\Gamma(a)} \cdot \underbrace{\exp(-s_1)\cdot\exp(-s_2)}_{\exp(-s_1-s_2)} \cdot s_1^{a-1} \cdot s_2^{b-1}$

$f_{S,R}(s, r) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot z^{a-1} \cdot (1-z)^{b-1} \cdot \exp(-s)\cdot s^{a+b-1}$

не считая конст это Beta(a,b)

не считая конст. Гамма(a+b, 1)

$= \boxed{\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)} \cdot z^{a-1}\cdot(1-z)^{b-1}} \cdot \boxed{\frac{\exp(-s)\cdot s^{a+b-1}}{\Gamma(a+b)}}$

плотн. Beta(a,b)

плотн Гамма(a+b,1)

Итог!

$R = \frac{S_1}{S_1+S_2} \sim \text{Beta}(a, b)$

$S = S_1 + S_2 \sim \text{Гамма}(a+b, 1)$

R и S независ.

$$\boxed{\frac{1}{\text{Beta}(a,b)} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}}$$