Семинар 6 !!

- → E, Var, σ, H,
- → $Cov(X,Y)$, $Corr(X,Y)$, $H(X,Y)$, $H(Y|X)$
- → $CE(p\|q)$, $D_{KL}(p\|q)$

$$Var(X+Y) = Var X + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y)$$

Упр.

$$X \sim Bin\left(n=100,\ p=\tfrac{1}{4}\right)$$

Эксперимент.
Кидаем монету 100 раз.
X – число решек.
$p=\frac{1}{4}$ – вер-сть решки в отдельно взятом броске

а) $E(X)$?
б) $Var(X)$?
в) σ_X?

$$X \overset{?}{=} Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_{100}$$

$$Y_1 = \begin{cases} 1 & \text{была (H) в 1-м броске} \\ 0 & \text{не было (H) в 1-м броске} \end{cases}$$

$$Y_3 = \begin{cases} 1 & \text{была (R) в 3-м броске} \\ 0 \end{cases}$$

а) $E(X) = E(Y_1) + E(Y_2) + \dots + E(Y_{100})$ [далее для зависим]

y	0	1
$P(Y_i = y)$	3/4	1/4

$E(Y_i) = 1/4$

$E(X) = 100/4 = 25$

б) $Var(X) = Var(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{100}) =$

$= Var(Y_1) + Var(Y_2) + \dots + Var(Y_{100}) +$

$+ 2\,Cov(Y_1, Y_2) + 2\,Cov(Y_1, Y_3) + \dots +$

$+ \dots$

$+ 2\,Cov(Y_{99}, Y_{100}) =$

в силу независимости 0

{если величины R и L незав, то $cov(R,L)=0$}

$= Var(Y_1) + \dots + Var(Y_{100})$

y	0	1
$P(Y_i=y)$	$3/4$	$1/4$

$$Var(Y_1) = E[(Y_1 - E(Y_1))^2] = E(Y_1^2) - (E(Y_1))^2$$

$$E(Y_1) = \frac{1}{4}$$

$$E(Y_1^2) = E(Y_1) = \frac{1}{4}$$

т.к. $Y_1 \in \{0, 1\}$

$$Var(Y_1) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$Var(X) = 100 \cdot \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right)$$

в) $$\sigma_X = \sqrt{Var\ X} = \sqrt{100\left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right)}$$

Упр.

$$X \sim Geom\left(p = \frac{1}{4}\right)$$

Эксперимент

подбр-е монетку до 1-го орла (T)

$p(T)$ в отдельном $= \frac{1}{4}$.

X – число решек (Geom)

Y – число бросков (Geom)

$$Y = X+1$$

$$P(Y=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

$$P(X=k) = (1-p)^k \cdot p$$

$$H(X) \overset{?}{=} -\sum P(X=k) \cdot \ln P(X=k) =$$

(нат)

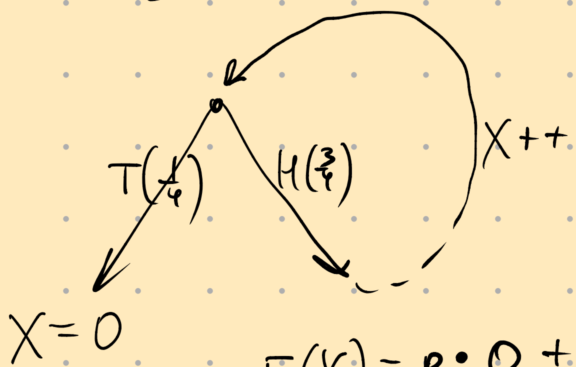
$$= -\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \cdot p \ln\left((1-p)^k \cdot p\right) =$$

$$= -\sum (1-p)^k p\, k \ln(1-p) - \sum (1-p)^k \cdot p \cdot \ln p = a_1 + a_2$$

$$a_2 = -\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \cdot p \cdot \ln p = -\ln p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) =$$

$$= -\ln p$$

$$a_1 = -\ln(1-p) \cdot \boxed{\sum_{k=0} P(X=k) \cdot k} = -\ln(1-p) \cdot E(X)$$



$$E(X) = p \cdot 0 + (1-p) \cdot E(X+1)$$

$$E(X) = (1-p)\cdot E(X) + 1-p$$
$$pE(X) = 1-p$$
$$E(X) = \frac{1-p}{p}$$

$$H(X) = -\ln(1-p)\cdot\frac{1-p}{p} - \ln p \qquad > 0$$

нюанс интерпретации $H(\cdot)$

y	0	1
вер	3/4	1/4

$$H(Y) = -\frac{3}{4}\ln\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{4} = \boxed{0.56}$$

? меньше одного вопроса на одно угадывание в среднем ???

[! Да !]

$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6 \ldots\ldots, Y_{1000000}$

0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 ....

Q. Правда ли, что два Y_i подряд нули?

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 \approx 0{,}56$

Упр

	$Y=A$	$Y=Б$	$Y=B$
$X=0$	1/2	0	0
$X=1$	1/8	1/4	1/8

а) $H(X)$, $H(X,Y)$, $H(Y|X)$?

б) X и Y зависимы?

б) да! $X=0 \Rightarrow Y=A$
$X=1 \Rightarrow$ самое вер-е $Y=Б$

x	0	1
вер	1/2	1/2

$H(X) = 1$ (бит)

$H(X) = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} =$

$$\boxed{-\sum P(X=x)\cdot\ln P(X=x)}$$

$= -\ln\frac{1}{2} = \ln 2 \approx 0{,}69$ [нат]

$$H(X,Y) = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\ln\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\cdot\ln\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\ln\frac{1}{8} \approx 1{,}21$$

$V = \binom{X}{Y}$ $\qquad H(V) = -\sum P(V=v)\cdot \ln P(V=v)$

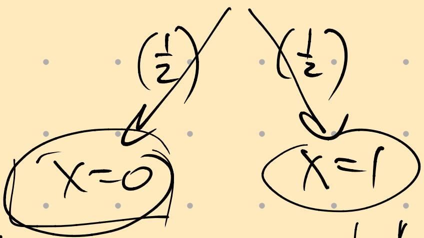
$\ln 801 \approx \ln 800 = 5\ln 2 + 2\ln 5$

$H(Y|X) = H(X,Y) - H(X)$

по опр. $= -\sum P(X=x, Y=y)\cdot \ln P(Y=y|X=x)$

Теорема: $H(X) + H(Y|X) = H(X,Y)$

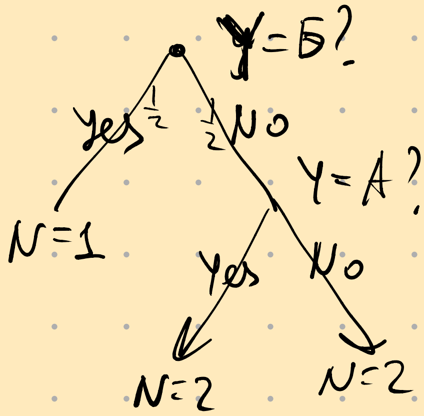
	$Y=A$	$Y=Б$	$Y=B$
$X=0$	$1/2$	0	0
$X=1$	$1/8$	$1/4$	$1/8$



y	A
$P(Y=y\|X=0)$	1

$\boxed{N=0}$

y	A	$Б$	B
$P(Y=y\|X=1)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$



$$H(Y|X) = E(N) = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{8}\cdot 2 + \frac{1}{8}\, 2 = \frac{3}{4} \text{ [бит]}$$

1 бит $= \ln 2$ нат $\qquad 0{,}52 \approx \frac{3}{4}\ln 2$ [нат]

Упр. X – СВ распр-ая на отрезке $[0;1]$

Истинная ф. плотн. $\qquad p(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

модель ф плотн. $\qquad q(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \in [0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

а) $H(p)$, $CE(p \| q) = ?$

б) $D_{KL}(p \| q) = ?$

$E(X) = \sum x \cdot P(X=x)$ дискр СВ

$E(X) = \int x \cdot f(x) \cdot dx$ СВ с плотн

$H(X) = -\sum \ln P(X=x) \cdot P(X=x)$

$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} \ln f(x) \cdot f(x) dx$

а) $H(p) = -\int_0^1 \ln(2x) \cdot 2x\, dx$

$= -\int_0^1 \ln 2 \cdot 2x\, dx - \int_0^1 \ln x \cdot 2x\, dx =$ [по частям]

u v'

$= \dots$!!

б) $CE(p \| q) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \cdot \ln q(x)\, dx = -\int_0^1 2x \ln(3x^2)\, dx =$

$=$ [по частям]

в) $D_{KL}(p \| q) = CE(p \| q) - H(p) = \dots$ > 0

интерпретация H для СВ с функцией плотности хуже

Упр. X СВ $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

ф. плотн.

а) $H(X)$?

б) $\tilde{X}$ – это дискретная версия X „огрублю" с шагом $\frac{1}{1000000} = \Delta$

$$\tilde{X} = \left\lceil \frac{X}{\Delta} \right\rceil \times \Delta$$

[округление вверх с точностью до 1-ой миллион-ной]

$H(\tilde{X})$ примерно?

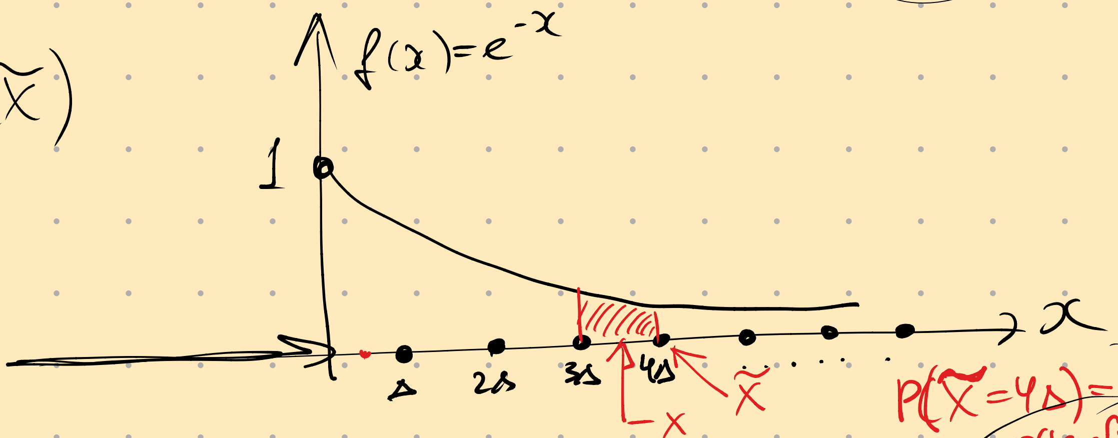
а) $H(X) = -\int_0^\infty f(x) \cdot \ln f(x)\, dx =$

$$= -\int_0^\infty e^{-x} \ln e^{-x}\, dx = +\int_0^\infty \underset{u'}{e^{-x}} \cdot \underset{v}{x}\, dx =$$

$$= -e^{-x} \cdot x \Big|_{x=0}^{x=+\infty} + \int_0^\infty e^{-x} \cdot 1 \cdot dx =$$

$$= 0 + 1 = 1$$

б) $H(\tilde{X})$



$P(\tilde{X} = 4\Delta) = P(X \in [3\Delta; 4\Delta])$

$$H(\tilde{X}) = -\sum_v P(\tilde{X} = v) \cdot \ln P(\tilde{X} = v) \approx$$

$$\approx -\sum_v f(v) \cdot \Delta \cdot \ln (f(v)\Delta) =$$

$$= -\sum_v \ln f(v) \cdot f(v) \cdot \Delta - \sum_v \ln(\Delta) \cdot f(v) \cdot \Delta =$$

$X \in [3\Delta; 4\Delta] \Rightarrow \tilde{X} = 4\Delta$

$$P(\tilde{X} = 4\Delta) = P(X \in (3\Delta; 4\Delta]) = \int_{3\Delta}^{4\Delta} f(t)\, dt \approx f(4\Delta) \cdot \Delta$$

$$= - \sum_{v} \ln f(v) \cdot f(v) \cdot \Delta - \ln \Delta \sum_{v} f(v) \cdot \Delta \approx$$

$$\approx - \int_{0}^{\infty} \ln \cancel{f(x)}\, f(v)\, dv - \ln \Delta \int_{0}^{\infty} f(v)\, dv =$$

$$= H(X) - \ln \Delta \cdot 1$$

$$H(\tilde{X}) \approx H(X) - \ln \Delta$$

$$H(\tilde{X}) \approx 1 - \ln \frac{1}{1000000} \approx 1 + 13,8 \approx 14,8$$