Привет!! :)

→ дискретные СВ: счётное/конечное мн-во значений

→ СВ с функцией плотности — расп. назв. $f(x)$ → $P(X\in[x;x+\Delta])=f(x)\cdot\Delta+o(\Delta)$

* абсолютно непрер-ми
* непрерывными

есть проблема

$X:\Omega\to\mathbb{R}$ $(\mathbb{R}^1)$

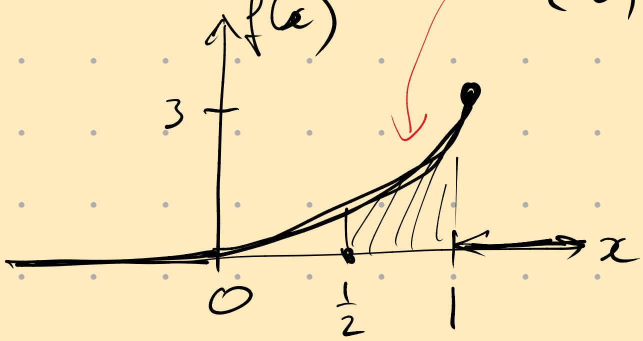
непр ф-ция из Ω в $\mathbb{R}$ может не быть непр-ой СВ.

→ смешанные (mixed) СВ

→ характеристики СВ: $Var(X)$, σ_X, $Cov(X,Y)$, $Corr(X,Y)$.

Пример.

СВ X имеет $f(x)=\begin{cases}3x^2, & x\in[0;1]\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$



$P(X\in[x;x+\Delta])=$
$=f(x)\cdot\Delta+o(\Delta)$

СВ $Y=\min\{X,\frac{1}{2}\}$ ← не дискр. не имеет ф. плотн. [у Y контпередни знак]

$P(Y\in[y;y+\Delta])\overset{?}{=}f_Y(y)\cdot\Delta+o(\Delta)$

если бы у Y была ф. плотности...

$P(Y\in[\frac{1}{2};\frac{1}{2}+\Delta])=f_Y(\frac{1}{2})\cdot\Delta+o(\Delta)$ $\quad \Delta\to 0$ $\quad P(Y=\frac{1}{2})=0$

У нас $P(Y=1/2)=P(X\geq\frac{1}{2})>0$.

$$P(Y=\tfrac{1}{2})=P(X\geq\tfrac{1}{2})=\int_{1/2} f_X(x)\,dx=$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} 3x^2\,dx=1^3-\left(\tfrac{1}{2}\right)^3=\tfrac{7}{8}$$

Опр. СВ Y наз-ся смешанной, если

$$P(Y\in[y;y+\Delta])=\underbrace{f_Y(y)\cdot\Delta}+\underbrace{\sum_{y_i} I(y_i\in[y;y+\Delta])\cdot P(Y=y_i)+}+o(\Delta)$$

Опр. атом – значение СВ, которое она принимает с положит. вер-стью.

Пример. (продолж.)

$$P(Y\in[y;y+\Delta])=\underbrace{\begin{cases}3y^2, & y\in[0;\frac{1}{2}]\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}}_{\text{аналог ф. плотности}}\times\Delta+\frac{7}{8}\cdot\overbrace{I(\tfrac{1}{2}\in[y;y+\Delta])}^{\text{атом}}+o(\Delta)$$

Теорема LOTUS:

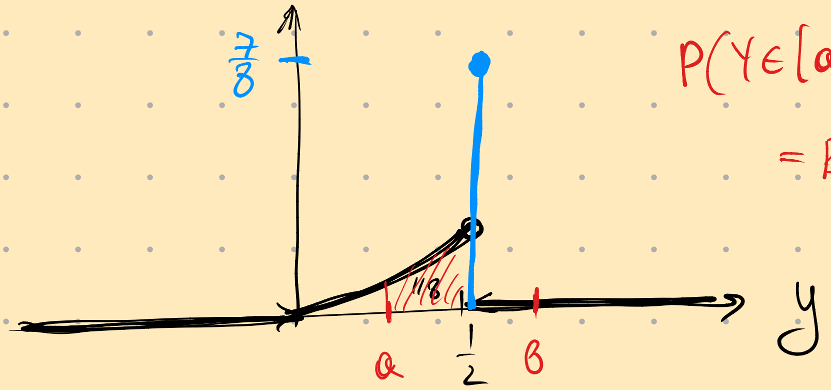
для дискр. X $\qquad E(h(X))=\sum_x h(x)\cdot P(X=x)$

для СВ с ф. плотн. $\qquad E(h(X))=\int_{-\infty} h(x)\cdot f(x)\,dx$

для смешанной СВ $\qquad E(h(X))=\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\cdot f(x)\,dx+\underbrace{\sum_x h(x)\cdot P(X=x)}_{\text{по } P(X=x)>0}$

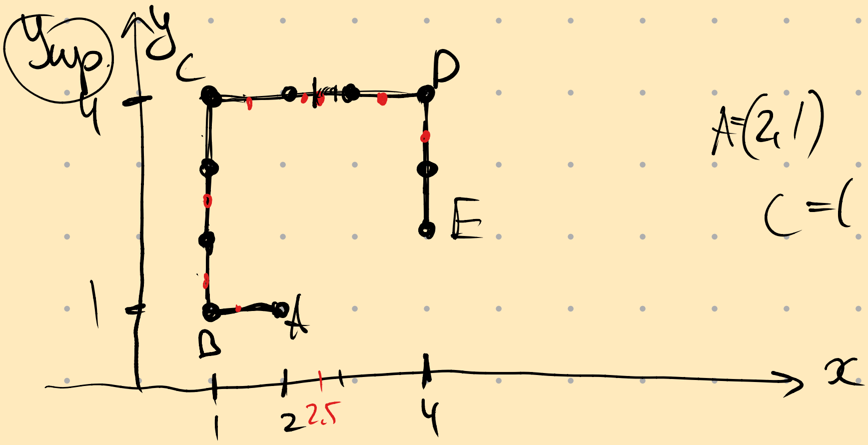
$$E(Y^2)=\underbrace{\int_0^{1/2} y^2\cdot 3y^2\,dy}_{\text{по аналогии с велич. с плотностью}}+\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{7}{8}}_{\text{по аналогии с дискретной}}=\frac{3y^5}{5}\Big|_0^{1/2}+\frac{7}{32}=$$

$$=\frac{3}{5\cdot 32}+\frac{7}{32}!$$



$P(Y\in[a;b]) =$

$=$ $+$



$A=(2,1)$ $B=(1,1)$

$C=(1,4)$ $D=(4,4)$

$E(4,2)$

Охранник целый день ходит от A до E по ломаной

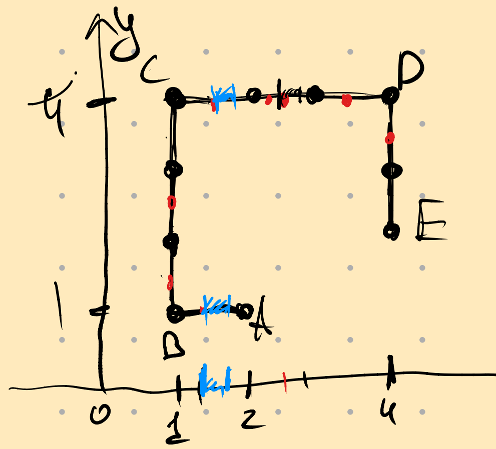
тепер звонок (охр. ок-ся в случай точке равномерно распр $\boxed{\text{по длине}}$ лом-ой)

СВ X – абсцисса охр-ка.

$P(X=4) = \frac{2}{9} = \frac{|DE|}{|\text{лом}|}$

$P(X=1) = \frac{3}{9}$

$P(X=2.5)=0$



$$P(X\in[2.5;2.5+\Delta]) \overset{?}{=} \frac{\Delta}{9} + o(\Delta)$$

Δ -

$$P(X\in[1.5;1.5+\Delta]) = \frac{2}{9}\Delta + o(\Delta)$$

$$P(X\in A) = \begin{cases} \frac{1}{9}\Delta, & \text{если } x\in[2;4] \\ \frac{2}{9}\Delta, & \text{если } x\in[1;2) \end{cases} + \frac{2}{9}I(4\in A) + \frac{3}{9}\cdot I(1\in A) + o(\Delta)$$

$A=[x;x+\Delta]$

$P(X\in[3;100]) = \int^{\frac{1}{9}\cdot 97} + \frac{2}{9}$??? (>1) поэтому

$$E(X) = \underbrace{\int_1^2 x\cdot\frac{2}{9}dx + \int_2^4 x\cdot\frac{1}{9}dx}_{\text{аналог плотн.}} + \underbrace{4\cdot\frac{2}{9} + 1\cdot\frac{3}{9}}_{\text{дискр.}}$$

Дисперсия СВ, $Var(X)$

Опр $Var(X) := E\left((X-E(X))^2\right)$

мотивация.

можно задать геометрию на СВ / событиях

$\boxed{\text{Скал. пр } \langle a, b\rangle}$

$\|a\| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$ длины

$\cos(a,b) = \dfrac{\langle a, b\rangle}{\|a\|\cdot\|b\|}$ углы

$\boxed{\text{способ 0}}$

$\langle X, Y\rangle_0 = E(X\cdot Y)$

$\langle X, X\rangle_0 = E(X^2) \geq 0$

$\langle X, Y\rangle_0 = E(X\cdot Y) = \langle Y, X\rangle$

$\langle X+Y, Z\rangle_0 = E((X+Y)Z) =$

$= \langle X, Z\rangle_0 + \langle Y, Z\rangle_0$

$\|X\|_0 = \sqrt{E(X^2)}$

событие $A \longrightarrow I_A = \begin{cases} 1, & \text{если } A \text{ пр.} \\ 0, & \text{если } A \text{ не произошло} \end{cases}$

$\langle A, B\rangle_0 = E(I_A \cdot I_B)$

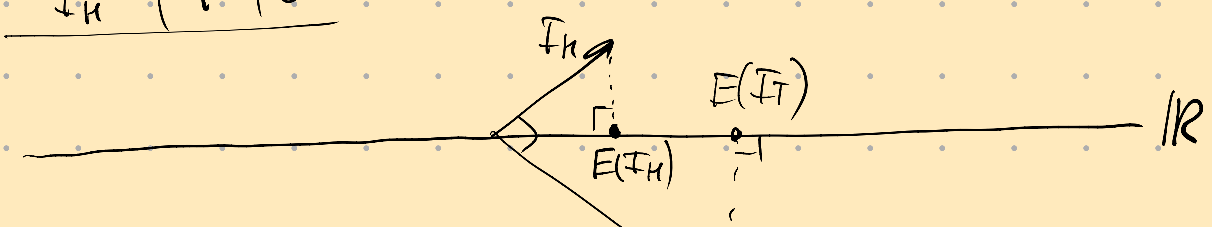
ω	H	T
вер	0,3	0,7
I_H	1	0
I_T	0	1
$I_H\cdot I_T$	0	0
I_H^2	1	0

$\langle I_H, I_T\rangle_0 = E(I_H\cdot I_T) = E(0) = 0$

$\|I_H\|_0 = \sqrt{\langle I_H, I_H\rangle_0} = \sqrt{E(I_H^2)} = \sqrt{0,3}$

$\|I_T\|_0 = \quad\dots \quad = \sqrt{0,7}$

$I_H^2 = I_H \qquad E(I_H) = 0,3$



Γ_T

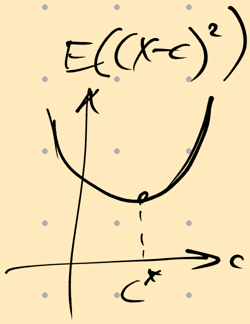
в рамках геометрии $\langle X, Y\rangle_0 = E(XY)$:
$E(X)$ – это проекция С.В. X на $\mathbb{R}$

(Упр) найди константу c, ближайшую к СВ X.

$$\|X-c\|_0^2 \to \min_c$$

$$\langle X-c, X-c\rangle_0 \to \min_c$$

$$E\left((X-c)^2\right) \to \min_c$$

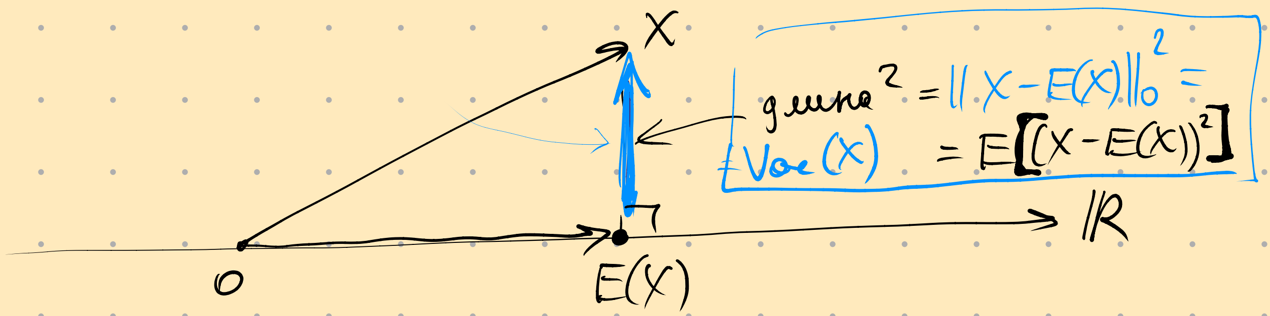


$$(X-c)^2 = X^2 - 2cX + c^2$$

$$E\left((X-c)^2\right) = E(X^2) - 2c\cdot E(X) + c^2 \to \min_c$$

X – СВ
c – константа.

$$c^* = \boxed{-\frac{b}{2a}} = \frac{2E(X)}{2\cdot 1} = E(X)$$



Т. Пифагора

$$E(X) \perp_0 X - E(X)$$

$$\|X\|_0^2 = \|E(X)\|_0^2 + \|X-E(X)\|_0^2$$

$$E(X^2) = E\left((E(X))^2\right) + \underbrace{E\left((X-E(X))^2\right)}_{Var(X)}$$

$$E(X^2) = (E(X))^2 + Var(X)$$

X - СВ
$E(X)$ = константа = 52
$E\left((E(X))^2\right) = E(52^2) = 52^2$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

□

недз. дисперсии

$X\ [kg]$ $\quad E(X)\ [kg]$

$X^2\ [kg^2]$ $\quad Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2\ [kg^2]$

опр. стандартное отклонение X, $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

[в геом: σ_X = длина $(X - E(X))$]

Опр. ковариация X и Y:

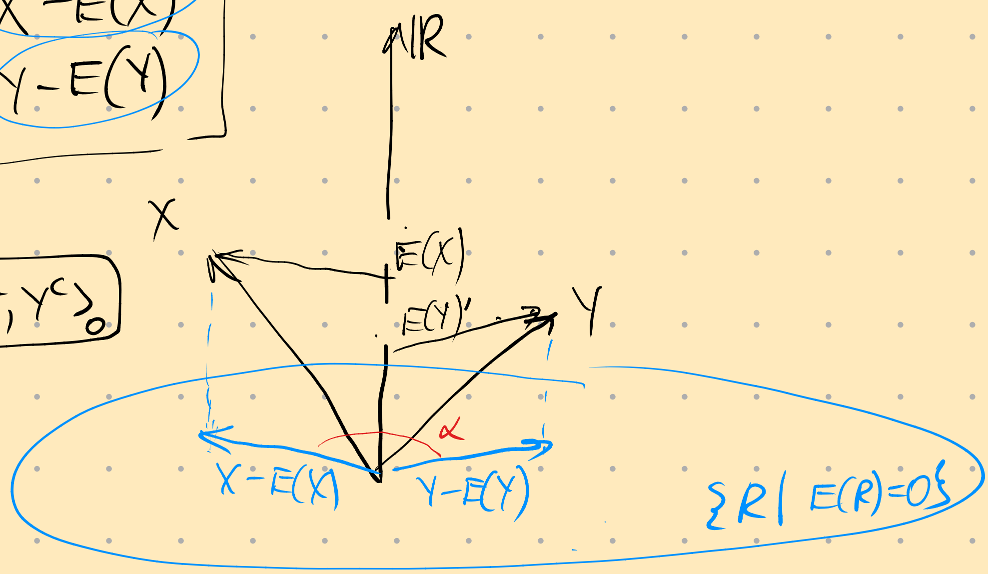
классич: $Cov(X,Y) = E[(X - E(X))\cdot(Y - E(Y))]$

$\boxed{\text{Шаг 1}}$

$$\boxed{\begin{aligned} X^c &= X - E(X) \\ Y^c &= Y - E(Y) \end{aligned}}$$

$\boxed{\text{Шаг 2}}$

$$\boxed{Cov(X,Y) = \langle X^c, Y^c \rangle_0}$$



Свойства: $Cov(X,X) = Var(X)$

$Cov(X+Y, Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$

$$\cos\alpha = \frac{\langle X - E(X), Y - E(Y) \rangle_0}{\|X - E(X)\|_0 \cdot \|Y - E(Y)\|_0} = \qquad \cos(\angle a, b) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \, \|b\|}$$

Опр.

$$\boxed{Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}}$$

Теорема.

$corr(X,Y) \in [-1, +1]$