Привет!! :)

Лекция 4

* основные дискретные законы распределения
* случайные величины с функцией плотности

<u>Опр.</u> Эксперимент: подбр-м монету n раз. на каждом броске монетка выпадает орлом с вер-стью p. [независимо от других бросков]

СВ X – количество орлов.

X имеет биномиальное распределение с парам-рами n и p.

$$X \sim Bin(n, p).$$

Упр. $P(X=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$$E(X) \overset{?}{=} E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) = E(Y_1) + \dots + E(Y_n) =$$

↑ разлож. в сумму. Y_i → 1 с вер p, → 0

$$= n \times p$$

<u>Опр.</u> Подбрасываем монету до 1-го орла.

Вер-сть орла равна p.

Броски независимы.

СВ X имеет геометрическое расп-ие с параметром p, если

X – число решек.

$$X \sim Geom(p)$$

Упр $P(X=k) = (1-p)^k \cdot p$

<u>вариант.</u> иногда определяют геом расп.

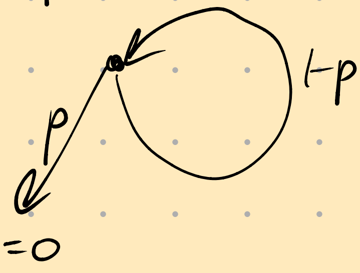
Y – кол-во бросков

$$Y = X + 1 \qquad \boxed{P(Y=k) = (1-p)^{k-1}\cdot p}$$

$$E(Y) = E(X) + 1$$

$$E(X) = \sum_k k\cdot(1-p)^k\cdot p = \text{(можно)}$$

Первый шаг:



$$E(X) = p\cdot 0 + (1-p)\cdot(1+E(X))$$

$$E(X) = \frac{1-p}{p}$$

$$E(Y) = \frac{1-p}{p} + 1 = \frac{1}{p}$$

Опр. Отриц. биномиальное распределение.

$$X \sim NBin(r, p)$$

X – число решек, эксперимент состоит в подбрасывании монетки до достижения r орлов (не об. подряд) и вер-ть орла при отдельном броске равна p.

$$r = 3$$

$$w = \boxed{\underbrace{HHH}T\underbrace{H}T\underbrace{HHHH}T} \qquad X = 3+1+4 = 8$$

Если $X \sim NBin(r,p)$ то: $X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_r$, $Y_i \sim Geom(p)$

$$P(X=k) = C_{k+r-1}^{k}(1-p)^k\cdot p^r$$

$$E(X) = r\cdot E(Y_1) = r\cdot\frac{1-p}{p}$$

Опр. X имеет гипергеометрическое распределение

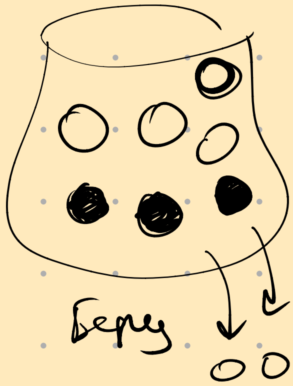
всего N яблок из которых K вкусных.
случайно равновер-но выбираем себе n яблок.

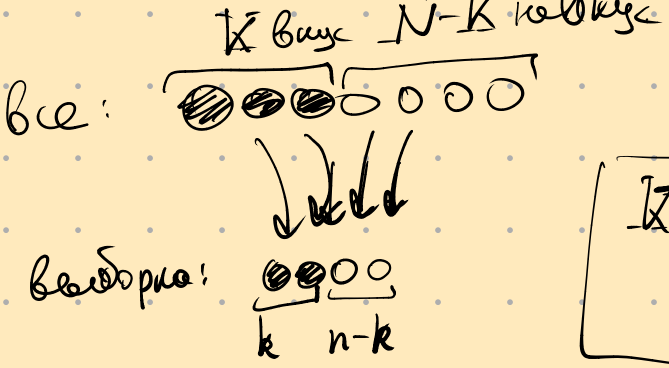
X - число выбранных вкусных яблок.

$$X \sim HGeom(N, K, n)$$

Упр. $P(X=k) \overset{?}{=} \dfrac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$

конст: N - всего яблок, K вкусных





$$\boxed{K=3 \quad N-K=4 \quad n=4 \qquad P(X=2)=\frac{C_3^2 C_4^2}{C_7^4}}$$

$$E(X) = \sum_k k \cdot P(X=k)$$

$Y_i \to 1$ если ябл i вкусное, $\to 0$, иначе.

$$X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

$\boxed{Y_i \text{ зависимые}}$

$$E(X) = E(Y_1) + \dots + E(Y_n) = \frac{K}{N} + \frac{K}{N} + \dots + \frac{K}{N} = n \cdot \frac{K}{N}$$

Случ. велич. с континуумом значений.

Способ 1 случайный выбор точки (равномерный) на подмножестве $\mathbb{R}^n$.

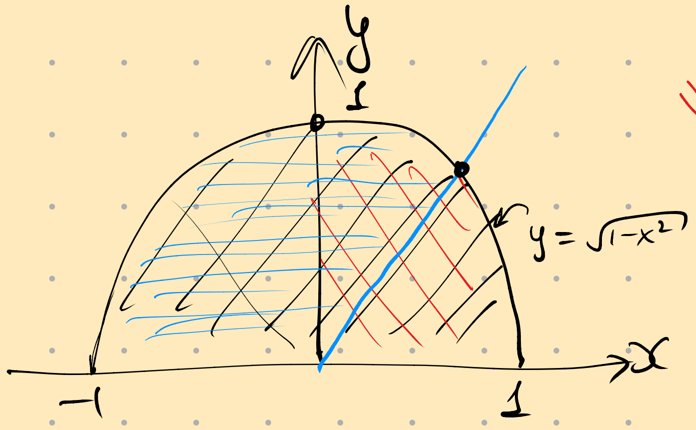
длина / площадь / объём / ....

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \qquad S_\Omega < +\infty$ (площадь....)

$$P\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in A\right) = \frac{S_A}{S_\Omega} \qquad [A \subseteq \Omega]$$

Пример. Выбираем точку равномерно на

полукруге $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$.
Точка имеет случ-ые коорд-ты $\binom{X}{Y}$.



$P(X>0)\ ? = \frac{S(x>0)}{S_\Omega} = \frac{\pi/4}{\pi/2} = \frac{1}{2}$

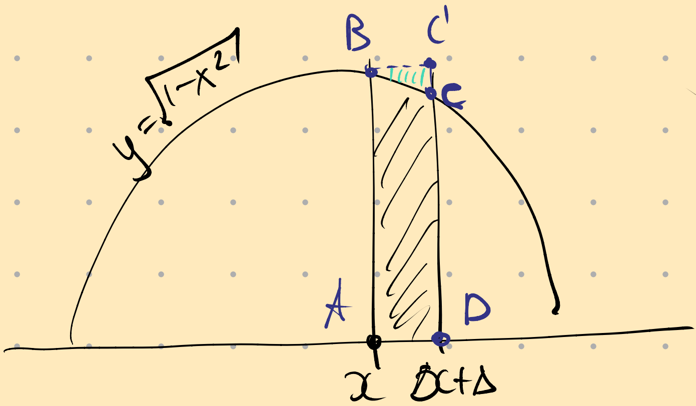
$P(Y>X)\ ? = \frac{3\pi/8}{\pi/2} = \frac{3}{4}$

Способ 2 Случайная величина X имеет ф-цию плотности $f(x)$, если

$$\boxed{P(X \in [x, x+\Delta]) = \underline{f(x)} \cdot \Delta + o(\Delta)}$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{o(\Delta)}{\Delta} = 0$$

Упр. Для примера с полукругом найдём ф-цию плотности.



$P(X \in [x, x+\Delta]) = ? \cdot \Delta + o(\Delta)$

основная (no Δ) сост-ая вер-сти

точно: $= \frac{S_{ABCD}}{S_\Omega}$

с точностью до $o(\Delta)$ $= \frac{S_{ABC'D}}{S_\Omega} = \frac{AB \cdot \Delta}{\pi/2} = \frac{\sqrt{1-x^2} \cdot \Delta}{\pi/2}$

$$P(X \in [x, x+\Delta]) = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} \cdot \Delta + o(\Delta)$$

Случ. величина X имеет ф. плотности

$$f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{1-x^2}/\pi & \text{если } x\in[-1;1] \\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Упр. СВ X имеет ф. плотности

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2, & x\in[0;1] \\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

а) $P(X\in[0{,}2;0{,}201])$? примерно?

б) $P(X\in[0{,}2;0{,}3])$? точно

при $\Delta\approx 0$ $\quad P(X\in[x,x+\Delta])\approx f(x)\cdot\Delta$

$$P(X\in[x,x+\Delta]) = f(x)\cdot\Delta + o(\Delta)$$

$$P(X\in[0{,}2;0{,}2+0{,}001])\approx 3\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}001$$

Эксперимент: случайно равномерно выбираем точку под кривой

$$P(X\in[0{,}2;0{,}3]) = \int_{0,2}^{0,3} f(x)\,dx = \int_{0,2}^{0,3} 3t^2\,dt = t^3\Big|_{0,2}^{0,3} = 0{,}3^3-0{,}2^3$$

"Теорема" если у СВ X есть ф. плотности $f(x)$ то

$$P(X\in[a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx$$

док-во: определение интеграла

Опр. СВ X имеет равномерное распределение на отрезке $[a;b]$ если вер-сть попасть в какой-либо подотрезок пропорциональна его длине.

$$P(X\in[c;d]) = \frac{|d-c|}{|b-a|}$$

$X \sim U[a, b]$ $X \sim Unif[a, b]$ [uniform]

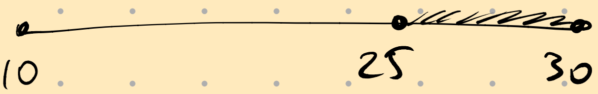
Упр. $X \sim U[10; 30]$

а) $P(X > 25)? = 1/4$ б) ф. плотности $f(x)$?

$P(X \geq 25)? = 5/20 = 1/4$

$P(X = 25)? = 0$

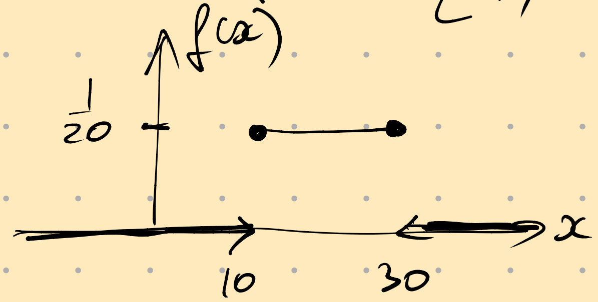
$$P(X = 25) \leq \underbrace{P(X \in [25-0.01; 25+0.01])}_{= \frac{2 \cdot 0.01}{20}}$$



$$P(X \in [x; x+\Delta]) = \frac{\Delta}{20} = \frac{1}{20} \cdot \Delta$$

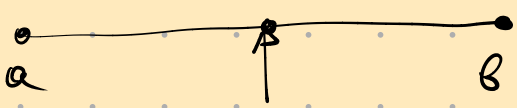
это и есть ф. плотности

$$f(x) = \begin{cases} 1/20 & \text{при } x \in [10; 30] \\ 0, & \text{при } x \notin [10; 30] \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a; b] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$X \sim U[a; b]$



по симметрии: $E(X) = \frac{a+b}{2}$

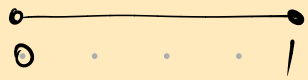
Теорема (LOTUS = law of unconscious statistician)

если у СВ X есть ф. плотности $f(x)$ и $g(x)$ произв. ф-ция то

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot \boxed{f(x) \cdot dx}$$

в дискретном случае: $E(g(X)) = \sum_x g(x) \cdot \boxed{P(X=x)}$

Упр $\quad X \sim U[0;1]$



а) $f(x)$?

б) $E(X^2)$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1}, & \text{если } x \in [0;1] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 g(x) \cdot f(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot \underbrace{1 \cdot dx}_{\approx P(X \in [x; x+dx])} = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$