Семинар 3

Упр.

подбр-ю монетку 10 раз.

$p_H = 0{,}2 \quad p_T = 0{,}8$

X - кол-во H, Y - кол-во T.

$P(X=7)$?

- $E(X)$?
- $E(X^2)$?
- $E(X\cdot Y)$?

$\boxed{\text{метод.}}$

$\Omega \longrightarrow$ функция $\longrightarrow$ извлекаем $E(X)$ ....

$\Omega = \{HHH\dots H, HH\dots HT, \dots\dots\}$ $\boxed{\text{сколько исходов в } \Omega?}$ $2^{10} = 1024$

$* = H+T$

$f = HHHH\dots H + HHHHH\dots HT + \dots\dots + TTT\dots T$

соглашение

$\boxed{H\cdot T = HT}$

$(MAM + ПАП)\cdot A = MAMA + ПАПА \quad MAMA = (MA)^2 = MA\cdot MA$

$\boxed{\text{слова из двух букв}}$

$(H+T)\cdot(H+T) = HH + TH + HT + TT = (H+T)^2$

$f(H,T) = (H+T)^{10} = *^{10}$ $\quad * = H+T$

множество $\longrightarrow$ функция

$\Omega = \{HHH\dots H, \dots\}$ $\quad f = (H+T)^{10}$ $\quad$ чудеса $[HT]\{10\}$

способ 1:

- $E(X)$? $= \dfrac{\partial f(0{,}2h, 0{,}8)}{\partial h}\Big|_{h=1}$

X – кол-во H
Y – кол-во T
$p_H = 0{,}2 \quad p_T = 0{,}8$

$\boxed{\text{Шаг 1}}$ $f(0{,}2h, 0{,}8) = (0{,}2h + 0{,}8)^{10} = g(h)$

функция производящая вер-сти

$\ldots + HTTH^7 + \ldots$

↓ подстановка
$H = 0{,}2h$
$T = 0{,}8$

$\ldots + (0{,}2h)^8 \cdot 0{,}8^2 + \ldots$

↓ произв по h
$h = 1$

$\ldots + 8 \cdot (0{,}2)^8 h^7 \cdot 0{,}8^2_T$

$\boxed{\text{Шаг 2}}$ $\dfrac{\partial g(h)}{\partial h}\Big|_{h=1} = 10 \cdot (0{,}2h + 0{,}8)^9 \cdot 0{,}2\Big|_{h=1} = 10 \cdot 0{,}2 = 2$

- $E(X^2)$?

$E(X \cdot (X-1)) = \dfrac{\partial^2 g(h)}{\partial h^2}\Big|_{h=1}$

$\boxed{\text{Шаг 1}}$ $f(0{,}2e^h, 0{,}8) = m(h)$ ← функция производящая момента

$f = \ldots + HT^2H^7 + \ldots$

$m(h) = f(0{,}2e^h, 0{,}8) = \ldots + 0{,}2^8 \cdot 0{,}8^2 \cdot e^{2h} + \ldots$ ↓ $\dfrac{\partial^2 m(h)}{\partial h^2}\Big|_{h=0}$

$E(X^2) = \ldots + 2 \cdot 0{,}2^8 \cdot 0{,}8^2 + \ldots$

$f(H, T) = (H + T)^{10}$

$m(h) = (0{,}2e^h + 0{,}8)^{10}$

$m'(h) = \underline{10 \cdot (0{,}2e^h + 0{,}8)^9} \cdot \underline{e^h \cdot 0{,}2}$

$m''(h) = 10 \cdot (0{,}2e^h + 0{,}8)^9 \cdot e^h \cdot 0{,}2 +$
$+ 10 \cdot 9 \cdot (0{,}2e^h + 0{,}8)^8 \cdot (e^h \cdot 0{,}2)^2$

$$m''(0) = 10\cdot 1^9\cdot 0{,}2 + 10\cdot 9\cdot 0{,}2^2 = E(X^2)$$

- $E(XY)$? $\longrightarrow$ можно $E(X\cdot(10-X)) =$
$$= E(10X) - E(X^2) = 10\underline{E(X)} - \underline{E(X^2)}$$

$$m(h,t) = f(0{,}2e^h, 0{,}8e^t) = (0{,}2e^h + 0{,}8e^t)^{10}$$

ф-ция производящая моменты для (X,Y)

$$\left.\frac{\partial^2 m}{\partial h\,\partial t}\right|_{\substack{h=0\\t=0}} = \left(10\cdot(0{,}2e^h + 0{,}8e^t)^9\cdot 0{,}2e^h\right)'_t =$$
$$= 10\cdot 9\cdot(0{,}2e^h + 0{,}8e^t)^8\cdot 0{,}2e^h\, 0{,}8e^t$$
$$\underset{\substack{t=0\\h=0}}{=} 10\cdot 9\cdot 1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8 = E(XY)$$

- $P(X=7)$

$$g(h) = (0{,}2h + 0{,}8)^{10} = \underline{0{,}2^{10}\cdot h^{10}} + \underline{10\cdot 0{,}2^9\cdot 0{,}8^1\cdot h^9} + \ldots$$

$P(X=10)$ $\quad$ $P(X=9)$

$$(a+b)^{10} = \sum_k C_{10}^k\cdot a^k\cdot b^{n-k}$$

$$= \sum_l P(X=l)\cdot h^l$$

$P(X=7)$ = коэфф в ряду Тейлора для $g(h)$ при h^7.

$$P(X=7) = \boxed{C_{10}^7\cdot 0{,}2^7\cdot 0{,}8^3}$$

$$\lim_{T\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} V(T,\varepsilon) = 1$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{T\to\infty} V(T,\varepsilon) = 0$$

число вар-тов, цет ран из 3 орла

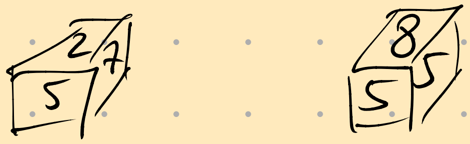
вер-сть каждого.

Упр

кол-во очков на грани – это натуральное число

Придумайте пару кубиков (с нестандартными очками на гранях) N_1, N_2

нестанд:



$$P(N_1+N_2=\ell) = P(S_1+S_2=\ell) \quad \forall \ell$$

S_1, S_2 – кол-во очков на станд. об. паре.

стандартн.:

$P(N_1+N_2=2) = \frac{1}{36}$ $\qquad$ $P(S_1+S_2=2) = \frac{1}{36}$

$P(N_1+N_2=3) = \frac{2}{36}$ $\qquad$ $P(S_1+S_2=3) = 2/36$

$\vdots$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\vdots$

классич.

$$\Omega = \{\boxed{1}\boxed{1},\ \boxed{1}\boxed{2},\ \ldots\ldots,\ \boxed{6}\boxed{6}\}$$

$\downarrow$

$$f = (\boxed{1}+\boxed{2}+\ldots+\boxed{6})^2$$

$* = \boxed{1}+\boxed{2}+\ldots$
$\ldots+\boxed{6}$

$$f = (x^1+x^2+\ldots+x^6)^2$$

$\boxed{1}\cdot\boxed{1} \to \ldots \to 2$

$\boxed{3}\cdot\boxed{4} \to \ldots \to 7$

$$f = 1\cdot x^2 + \ldots + 5x^8 + \ldots$$

$x^2\cdot x^3 = x^5$

$\boxed{2}\boxed{3} \to \boxed{5}$

$\boxed{2}\boxed{6}$ $\quad x^2\cdot x^6$

$\boxed{3}\boxed{5}$ $\quad x^3 x^5$

$\boxed{4}\boxed{4}$

$\boxed{5}\boxed{3}$ $\quad \boxed{6}\boxed{2}$

цель задачи? $f(x) = a(x)\cdot b(x)$

пример A-кубик $= \{2, 3, 7, 12, 12, 6\}$

как произв-ая ф-ция несёт инфо

$$a(x) = 1\cdot x^2 + 1\cdot x^3 + 1\cdot x^6 + 1\cdot x^7 + 2\cdot x^{12}$$

$$f = (x + \dots + x^6)^2 = x^2\cdot\underbrace{(1+\dots+x^5)}_{}{}^2$$

← геом. прогр.

$$= x^2\cdot\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^2 =$$

$$= x^2\left(\frac{(1-x^3)\cdot(1+x^3)}{1-x}\right)^2 = x^2\left((1+x+x^2)\cdot(1+x^3)\right)^2 =$$

$$= x^2\cdot(1+x+x^2)^2\cdot(1+x)^2\cdot(1-x+x^2)^2$$

2 → a и b, a и a, b и b

a, b; a, b; a, b

$a(x)$ $b(x)$

надписи на гранях ← $a(x) = c_1x^{p_1} + c_2x^{p_2}$ ← число граней

• кубики! граней на кубике 6

$a(1) = 6$

$b(1) = 6$

$$6\cdot 6 = a(1)\cdot b(1) = f(1) = 1^2\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 1^2 = 36$$

• только натуральные числа $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

$\cancel{x^0}$ $\;?x^1, ?x^2, ?x^3 \dots$

один вариант ($a \leftrightarrow b$)

$$a(x) = x\cdot(1+x+x^2)\cdot(1+x)\cdot(1-x+x^2)^2$$

$$b(x) = x\cdot(1+x+x^2)\cdot(1+x)$$

← произв. функция для основ-ка гранях

$$b(x) = x\cdot(1+2x+2x^2+x^3) = 1x^1 + 2x^2 + 2x^3 + x^4$$

$\updownarrow$

$$B = \{1, 2, 2, 3, 3, 4\}$$

$2x^3$ → 3, 3

$$a(x) = (x + 2x^2 + 2x^3 + x^4) \cdot (1 - x + x^2)^2 =$$

$$= 1 \cdot x^1 + x^3 x^4 x^5 x^6 + 1 \cdot x^8$$

A - нудик $\{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$