

Домашнее задание 5

Дедлайн: 2024-10-25, 23:59.

1. Случайная величина X распределена равномерно на $[0; 10]$, $Y = X^2$.
 - а) Найдите дисперсию $\text{Var}(Y)$, стандартное отклонение σ_Y .
 - б) Найдите $\text{Cov}(X, Y)$, $\text{Corr}(X, Y)$.
 - в) Найдите $\text{Cov}(6X + 2Y + 7, -2Y + 15)$, $\text{Corr}(5 - 6X, 8 + 9Y)$, $\text{Var}(2Y + 7)$.
 - г) Предложите любую неслучайную функцию h такую, что $\text{Corr}(h(X), X) = 0$, $\text{Var}(h(X)) > 0$.
2. Назовём наилучшей линейной аппроксимацией величины Y с помощью величины X функцию вида $\hat{Y} = \alpha + \beta X$, где α и β — константы, при которых величина $\mathbb{E}((Y - \hat{Y})^2)$ минимальна.
 - а) Известно, что $\text{Cov}(X, Y) = 10$, $\text{Var}(X) = 40$, найдите β .
 - б) Дополнительно известно, что $\mathbb{E}(Y) = 10$, $\mathbb{E}(X) = 80$, найдите α .

Допустим, что $a + bR$ — наилучшая линейная аппроксимация L с помощью R , а $c + dL$ — наилучшая линейная аппроксимация R с помощью L .

 - в) Выразите произведение bd через корреляцию $\text{Corr}(R, L)$.
3. В анализе временных рядов иногда используют концепцию частной корреляции. Частная корреляция между величинами X и Y , очищенными от связи с величиной W , равна обычной корреляции между величинами $X^* = X - \alpha W$ и $Y^* = Y - \beta W$, где константы α и β находятся из условия некоррелированности X^* с W и некоррелированности Y^* с W .

$$\text{pCorr}(X, Y; W) = \text{Corr}(X^*, Y^*), \text{ где } \begin{cases} X^* = X - \alpha W, & \text{Cov}(X^*, W) = 0, \\ Y^* = Y - \beta W, & \text{Cov}(Y^*, W) = 0. \end{cases}$$

Величины Y_1, Y_2, Y_3 независимы и равномерны на отрезке $[0; 1]$, $S_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3$.

Найдите $\text{Corr}(Y_1, Y_2)$ и $\text{pCorr}(Y_1, Y_2; S_3)$.