

1. [10] Величины (X_n) независимы и одинаково распределены с плотностью $f(x) = \max\{0, 1 - |x|\}$.
 - а) [2] Найди число c такое, что величина X_1 превышает c с вероятностью $1/4$.
 - б) [2] Найдите функцию $m_X(t)$ производящую моменты величины X_n .
 - в) [2] Найдите функцию $m_R(t)$ производящую моменты величины $R = X_1 + X_2 + \dots + X_{10} + 2024$.
 - г) [4] Найдите функцию плотности величины $Y = \ln(X^2)$.
2. [10] Совместная функция плотности вектора (X, Y) равна $f(x, y) = 2x^3 + y$ на квадрате $[0; 1] \times [0; 1]$ и 0 за его пределами.
 - а) [2] Найдите вероятность $\mathbb{P}(X > Y, Y > 0.5)$.
 - б) [6] Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(XY)$, $\text{Cov}(X, Y)$.
 - в) [2] Зависимы ли величины X и Y ?
3. [10] Дональд Трамп подкидывает пару стандартных игральных кубиков до тех пор, пока одновременно не выпадет две шестёрки. Обозначим N — общее количество бросков кубиков (бросок пары считаем за два броска кубика), а S — общее количество выпавших шестёрок во всех бросках.
 - а) [2] Найдите вероятности $\mathbb{P}(N = 6)$ и $\mathbb{P}(S = 3)$.
 - б) [4] Найдите ожидание $\mathbb{E}(N)$ и дисперсию $\text{Var}(N)$.
 - в) [4] Найдите энтропии $\mathbb{H}(N)$ и $\mathbb{H}(S)$.
4. [10] Подсудимый виновен с некоторой вероятностью p . Независимо друг от друга и от виновности подсудимого, каждый из 12 присяжных проголосует за верное решение (виновен или не виновен) с вероятностью $3/5$ и за ошибочное — с вероятностью $2/5$.
 - а) [4] Найдите ожидание и дисперсию количества присяжных, голосующих за виновность.
 - б) [2] Найдите вероятность того, что ровно 7 присяжных проголосуют за виновность.
 - в) [2] Найдите наиболее вероятное число верно проголосовавших присяжных.
 - г) [2] Найдите вероятность того, что подсудимый виновен, если ровно 7 присяжных проголосовали за его виновность.
5. [10] Алиса подбрасывает правильную монетку. Если монетка выпадет орлом, то Алиса выплачивает Бобу один рубль. Если монетка выпадает решкой, то Алиса выплачивает Бобу случайную сумму равномерно распределённую от 0 до 2 рублей. Обозначим X — выигрыш Боба.
 - а) [5] Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\text{Var}(X)$.
 - б) [5] Найдите функцию распределения $F(x)$ величины X и постройте её график.
6. [10] В лифт 12-этажного дома на первом этаже вошли 11 человек. Каждый из них выходит независимо от других и равновероятно на любом из этажей, от второго до последнего.
 - а) [2] Найдите вероятность того, что все выйдут на разных этажах.
 - б) [4] Найдите вероятность того, что зашедшая в лифт Алиса выйдет на 6-м этаже или выше, если после 4-го этажа в лифте осталось пятеро.
 - в) [4] Найдите вероятность того, что все пассажиры выйдут не выше 9-го этажа, если никто из них не вышел со 2-го по 6-й.