

## Домашнее задание 6

Дедлайн: 2024-11-01, 21:00.

1. Распределение вектора  $(X, Y)$  задано таблицей

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 0$	0.2	0.2	0.1
$X = 1$	0.5	0	0

- Найдите энтропии  $\mathbb{H}(X)$ ,  $\mathbb{H}(Y)$ ,  $\mathbb{H}(X, Y)$ .
  - Найдите  $\mathbb{H}(Y | X)$ .
  - Какое максимальное значение может принимать условная энтропия  $\mathbb{H}(Y | X)$ , если  $X$  принимает два значения, а  $Y$  — три?
2. Для дискретных величин  $X$  и  $Y$  докажите или опровергните утверждения:
- $\mathbb{H}(X) + \mathbb{H}(Y | X) = \mathbb{H}(X, Y)$ ;
  - $\mathbb{H}(X, Y) \geq \mathbb{H}(X)$ ;
  - $\mathbb{H}(X^2) = \mathbb{H}(X)$ ;
3. Время до прихода автобуса на остановку — неотрицательная случайная величина  $X$  с функцией плотности. Андрей верит, что функция плотности  $X$  имеет вид

$$a(x) = \begin{cases} \alpha \exp(-\alpha x), & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Борис верит, что функция плотности  $X$  имеет вид

$$b(x) = \begin{cases} \beta \exp(-\beta x), & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Вова верит, что у  $X$  есть какая-то функция плотности  $c(x)$ , а математическое ожидание такое, как думает Андрей.

- Найдите математическое ожидание с точки зрения Андрея и Вовы,  $\mathbb{E}_a(X)$ .
- Найдите энтропию  $\mathbb{H}(a)$ .
- Найдите кросс-энтропию  $\text{SE}(b||a)$ . При каком  $\alpha$  она минимальна?
- Найдите кросс-энтропию  $\text{SE}(c||a)$ .
- Чему равно максимальное значение энтропии  $\mathbb{H}(c)$  и при какой функции плотности  $c(x)$  достигается максимум?