Многомерные распределения.

* $\boxed{\text{5-17 ноября}}$ $\boxed{\text{5 время + дата}}$

идея 1: обобщение одномерного случая
идея 2: аналогия с дискретным случаем

Опр. $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ — вектор СВ

совм. функция распределения X ⇐ есть у любого вектора СВ

$$F(x_1, x_2, \dots x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots X_n \le x_n)$$

X - скал. СВ
$F(x) = P(X \le x)$

Опр. Совместная функция плотности ⇐ есть не всех векторов СВ

$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ — вектор СВ

$$P(X \in A) = \int \cdots \int_A f(x_1, x_2, \dots x_n)\, dx_1 \cdot dx_2 \dots dx_n$$

$A \subseteq \mathbb{R}^n$

X - скал. СВ
$P(X \in [a;b]) = \int_a^b f(x)dx$

Теорема (с док-вом)

если ф. плотн. существует, то:

$$P(X_1 \le x_1, \dots X_n \le x_n) \to F(x_1, x_2 \dots x_n)$$

$$P(X_1 \le x_1, \dots X_n \le x_n) \to \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, t_2 \dots t_n) dt_1 \dots dt_n$$

$$F(x_1, x_2 \dots x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots t_n)\, dt_1 \dots dt_2$$

$$f(x_1, \dots x_n) = \frac{\partial^n F}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 \dots \partial x_n}$$

Снижение размерности

одном

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \qquad f(x) = F'(x)$$

Как от совместного распр-ия получить индивидуальное распределение?

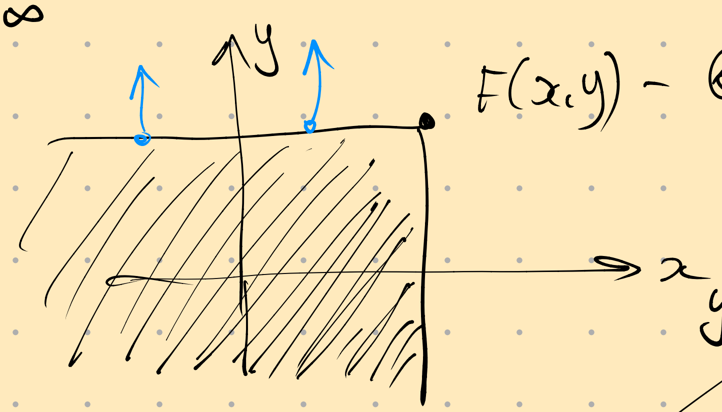
на примере пары СВ:

- $F_{X,Y}(x,y) \xrightarrow{?} F_X(x)$?
- $f_{X,Y}(x,y) \longrightarrow f_X(x)$?

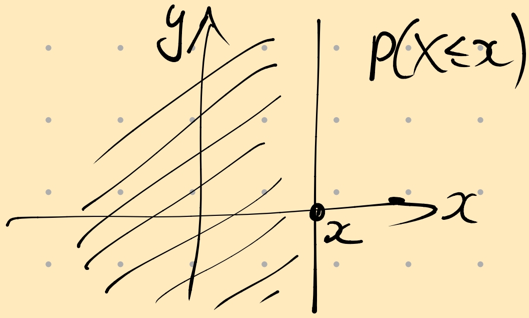
$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) \longrightarrow F(x) = \underbrace{P(X \le x)}_{=\,P(X \le x,\ Y \le +\infty)}$$

(нер) $F_{X,Y}(x, +\infty) = F_X(x)$

$$\lim_{y \to \infty} F(x,y) = F_X(x) = P(X \le x)$$



$F(x,y)$ – вер-сть для $\binom{X}{Y}$ попасть в заштр. область



$$\underbrace{P(X \le x, Y \le +\infty)}_{\parallel} = \underbrace{P(X \le x)}_{\parallel}$$

$$\int_{a=-\infty}^{x} \int_{b=-\infty}^{+\infty} f(a,b)\,da\,db = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

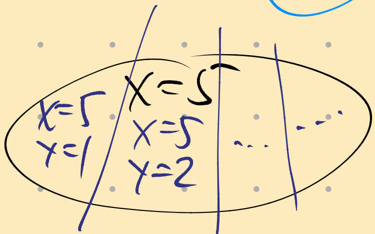
произв по x

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,b)\,db = f_X(x)} \longleftrightarrow$$

дискр. аналог

$$P(X=x) = \sum_y P(X=x, Y=y)$$

(!) В общем случае по индив-м $F_i(x_i)$ невозм-но найти $F(x_1,\dots x_n)$



<u>Для независимых величин</u> $X_1,\dots,X_n$

$$P(X_1\le x_1, X_2\le x_2, \dots, X_n\le x_n) = P(X_1\le x_1)\cdot P(X_2\le x_2)\cdot\ldots\cdot P(X_n\le x_n)$$

<u>критерий независимости</u>

$$\Leftrightarrow F(x_1,\dots x_n) = F_1(x_1)\cdot F_2(x_2)\cdot\ldots\cdot F_n(x_n)$$

(если совм ф. плотн. существует) берем произв по $x_1, x_2 \dots x_n$

Критерий независимости для СВ с функцией плот.

$$\Leftrightarrow f(x_1,\dots x_n) = f_1(x_1)\cdot f_2(x_2)\cdot\ldots\cdot f_n(x_n)$$

$\boxed{\text{дискр. аналог}}$ $P(X=x, Y=y) = P(X=x)\cdot P(Y=y)$

X и Y незав

„Хорошее" преобразование $Y=h(X)$ $X[n\times 1]$ $Y[n\times 1]$

- взаимно одн.
- $\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\ne 0$

$\left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right| < \infty$

как изменяется $f_X(x_1,\dots x_n) \xrightarrow{?} f_Y(y_1,\dots y_n)$?

Ответ: замена переменных в интеграл (вероятность = интеграл от плотн) одномерн $Y = X^3$

$$P(X \in [1;2]) = P(Y \in [1;8])$$

$$\int_1^2 \boxed{f_X(x)\,dx} = \int_1^8 \boxed{f_Y(y)\,dy} = \int_{x=1}^{x=2} f_Y(x^3)\,3x^2\,dx$$

$y = x^3$

$$f_X(x) = f_Y(x^3) \cdot 3x^2$$

$$\boxed{f_X(x) = f_Y(x^3) \cdot \frac{\partial y}{\partial x}}$$

! просто перейдите в новые коорд, но домн. на произв!

Многомерный случай

Теорема $Y = h(X)$

$\{$ если $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ дифф., взаимно одн-на

$\det\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) \neq 0$ $\left|\det\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\right| < \infty$ $]$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

то: $f_X(x_1, \dots, x_n) = f_Y(h(x)) \cdot \left|\det \frac{\partial h}{\partial x}\right|$

Пример.

$$f_X(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2, & x_1 \in [0;1], \ x_2 \in [0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{X_1} \\ \sqrt[3]{X_1} + X_2 \end{pmatrix} \leftarrow \text{новые через старые}$$

$f_Y(y_1, y_2)$?

старые через новые:

$$\begin{cases} X_1 = Y_1^3 \\ X_2 = Y_2 - Y_1 \end{cases}$$

(! в ответе должны быть y_1, y_2)

$$f_Y(y_1, y_2) = f_X(x_1, x_2) \cdot \left|\det \frac{\partial x}{\partial y}\right| =$$

$$= \overbrace{(y_1^3 + (y_2 - y_1))}^{(x_1 + x_2)} \cdot \left|\det \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{по } y_1 & \text{по } y_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3y_1^2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{от } x_1 \\ \text{от } x_2 \end{array} =$$

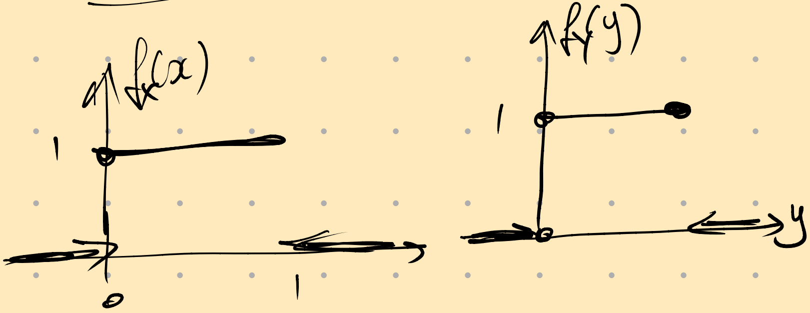
$$= \begin{cases} (y_1^3 + y_2 - y_1)\cdot 3y_1^2 & \text{если } y_1^3 \in [0;1],\ y_2 - y_1 \in [0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \longleftarrow \text{ф. плотн } Y_1, Y_2$$

Формула свёртки. (convolution)

Задача: X и Y — пара незав СВ с функцией плотности.

$$S = X + Y \qquad f_S(s)\ ?$$

Шаг 1 $\quad f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$



аналог
X и Y незав

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x)\cdot P(Y=y)$$

Шаг 2 $\quad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ S \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} X = X \\ S = X + Y \end{matrix}$

$$\begin{matrix} X = X \\ Y = S - X \end{matrix}$$

$$\frac{\partial\,\text{стар}}{\partial\,\text{нов}}$$

$$f_{X,S}(x,s) = f_{X,Y}(x, s-x)\cdot \left|\det \begin{array}{cc} \text{по } x & \text{по } s \\ \left(\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial s} \end{matrix}\right) \end{array}\right| \begin{matrix} \text{от } x \\ \text{от } y \end{matrix} =$$

$$= f_X(x)\cdot f_Y(s-x)\cdot \left|\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right| =$$

$$= f_X(x)\cdot f_Y(s-x) = f_{X,S}(x,s)$$

Шаг 3 Снижаем размерность $\binom{X}{S} \to S'$

$$\boxed{f_S(s) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(s-x)\, dx}$$

формула свёртки

аналог дискр. случаи: $P(S'=s) = \sum_x P(X=x) \cdot P(Y=s-x)$

Теорема (LOTUS)

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, \ldots x_n) \cdot f(x_1, \ldots x_n) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot \ldots dx_n$$

$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$

в одном

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f(x)\, dx$$

например.

$\boxed{f_{X,Y}(x,y)}$

совм. плотн. пары $\binom{X}{Y}$

$$E(X^2 \cdot Y^3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot y^3 \cdot f(x,y)\, dx\, dy$$

аналог дискр

$$\boxed{E(X^2 Y^3) = \sum_{x,y} x^2 \cdot y^3 \cdot P(X=x, Y=y)}$$

Расширение идеи условной вероятности.

опр. $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

(треб: $P(B) > 0$)

Опр. условная плотность.

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

назв. вел. — $Y|X$; точка — $(y|x)$

из контекста — $f(y|x)$

$f(5|6)$!!

[X, Y могут быть векторы]

Опр. условную ф-цию распределения

$$F_{Y|X}(y|x) = F_{Y|X}(y_1, y_2, \dots y_n | x_1, \dots x_k) =$$

$$= \int_{t_1=-\infty}^{y_1} \int_{t_2=-\infty}^{y_2} \dots \int_{t_n=-\infty}^{y_n} f(t|x)\, dt_1 \cdot dt_2 \cdot \ldots \cdot dt_n$$

идея: формализация идеи $P(Y_1 \le y_1, \dots Y_n \le y_n | X_1 = x_1 \dots \dots X_k = x_k)$

Опр условные мат. ожидания

$$E(Y|X) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y|x)\, dy$$

Y – скаляр СВ
X – вектор СВ

Теорема (LOTUS)

$$E(h(Y)|X) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h(y_1 \dots y_n) \cdot f(y_1 \dots y_n | x_1 \dots x_k)\, dy_1\, dy_2 \dots dy_n$$

Y – вектор СВ

$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$