Видно / слышно !!

Сходимость по распределению.

def $R_n \xrightarrow{dist} R$ $\boxed{\lim F_n(x) = F(x) \text{ в точках непрер-сти } F \quad F_n(x) = P(X_n \le x) \quad F(x) = P(R \le x)}$

Чем плоха. сх-сть по распр-ию?

$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$

Пример.

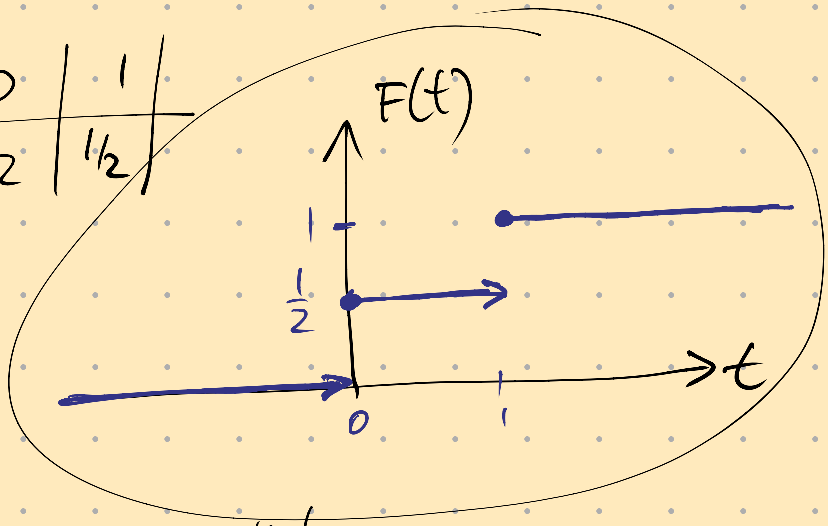
$R_1 = R_2 = R_2 = R_3 = \dots$

t	0	1
$P(R_n = t)$	$1/2$	$1/2$

$R_n \xrightarrow{dist} R_1$ $\qquad P(R_n \le t) = P(R_1 \le t)$!!

$S_n = 1 - R_n$

t	0	1
$P(S_n = t)$	$1/2$	$1/2$



$S_n \xrightarrow{dist} R_1$

$S_n + R_n = 1 - R_n + R_n = 1$

$R_n \xrightarrow{dist} R_1$

$S_n \xrightarrow{dist} R_1$

$\underbrace{\boxed{S_n + R_n}}_{=1} \overset{dist}{\not\to} 2R_1$

Опр. $R_n \xrightarrow{prob} R$ $\quad (R_n)$ сходится по вероятности к R

$\operatorname{plim} R_n = R$

$$\forall \varepsilon>0 \ \lim_{n\to\infty} P(|R_n - R| > \varepsilon) = 0.$$

Пример.

$X \sim U[0;1]$ $\qquad\qquad \operatorname{plim} R_n \overset{?}{=} 0$

$R_n = X/n$

$$P(|R_n - 0| > \varepsilon) = P(R_n > \varepsilon) = P(X/n > \varepsilon) =$$
$$= P(X > n\cdot\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{при } n > \frac{1}{\varepsilon} \\ \dots \end{cases}$$

$\forall \varepsilon > 0$ с нек-рого номера $[N]$ $n\varepsilon > 1$

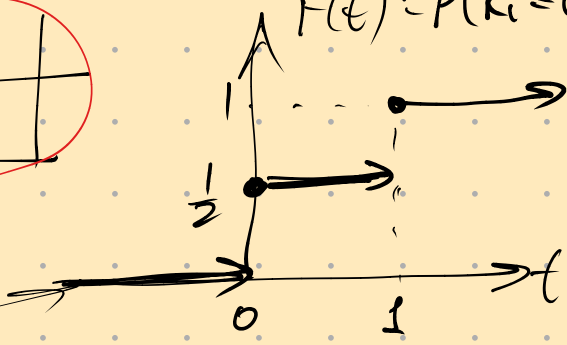
$$\lim_{n\to\infty} P(|R_n - 0| > \varepsilon) = 0$$

Пример.

$R, R_1, R_2, R_3 \dots$ незав. и один. распр.-ные.

t	0	1
$P(R_i = t)$	1/2	1/2

$F(t) = P(R_i \le t)$



$R_n \xrightarrow{dist} R$ т.к. $F_n = F$

$d = |R_n - R|$

$R \backslash R_n$	0	1
0	$d=0$ (1/4)	$d=1$ (1/4)
1	$d=1$ (1/4)	$d=0$ (1/4)

$\operatorname{plim} R_n \ne R$

t	0	1
$P(d=t)$	1/2	1/2

$P(|R_n - R| > \varepsilon) \xrightarrow{?} 0 \qquad P(d > \varepsilon) \to 0$

$P(d > 0.7) = \frac{1}{2} \not\to 0$ $(n\to\infty)$

Закон больших чисел (в слабой форме)
(law of large numbers)

Если: $X_1, X_2, \dots$ независимы, одинаково распределены, $E(X_i) = \mu < +\infty$ и $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$

то: $\operatorname{plim}_{n\to\infty} \overline{X}_n = \mu$.

док-во [с дополнительным предположением, что $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$]

$\boxed{\text{Шаг 1}}$ Цель: $P(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $(\varepsilon > 0)$

$$E(\overline{X}_n) = E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)}{n} = \frac{\mu + \mu + \dots + \mu}{n} = \mu$$

нер-во Маркова:
если: $X \geq 0$ и $a > 0$
то: $P(X \geq a) \leq E(X)/a$
нер-во Чебышёва
если $E(X) = \mu$ и $Var(X) = \sigma^2$ то
$P(|X - \mu| \geq a) \leq \dfrac{Var\, X}{a^2}$

по нер-ву Чебышёва
$$P(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{Var(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2}$$

$$Var(\overline{X}_n) = Var\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(Var\, X_1 + \dots + Var\, X_n + \cancel{2cov(X_1, X_2) + 2cov(X_1, X_3) \dots}\right)$$

независим.

$$= \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot Var(X_1) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$0 \leq P(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2/n}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \boxed{\varepsilon > 0}$$

Теорема о непрерывном отображении.

① Если f непрерывная и $R_n \xrightarrow{dist} R$ то $f(R_n) \xrightarrow{dist} f(R)$

② Если f непр-ая и $\operatorname{plim}\limits_{n\to\infty} R_n = R$ то $\operatorname{plim} f(R_n) = f(R)$

Упр. X_n ~ независ. одинак. распр $U[0;1]$

$$R_n = \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n} \qquad \operatorname{plim} R_n \overset{?}{=}$$

теор. о непр. отображении

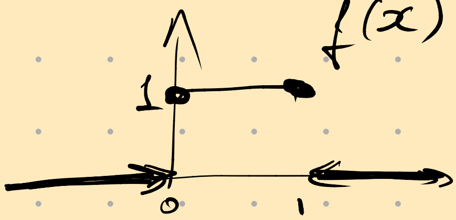
$$\operatorname{plim} \ln R_n = \ln \operatorname{plim} R_n$$

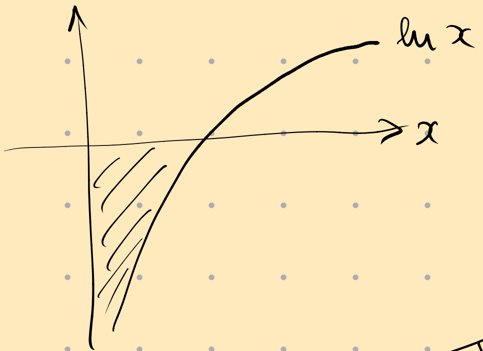
$$Y_n = \ln R_n = \frac{1}{n}(\ln X_1 + \ln X_2 + \ldots + \ln X_n) = \frac{\ln X_1 + \ln X_2 + \ldots + \ln X_n}{n} =$$

ЗБЧ

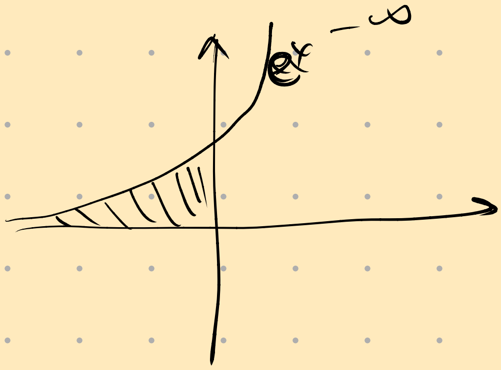
$$\operatorname{plim}\limits_{n\to\infty} \ln(R_n) = \operatorname{plim}\limits_{n\to\infty} \frac{\ln X_1 + \ldots + \ln X_n}{n} = E(\ln X_1)$$

$$E(\ln X_1) = \int_0^1 \ln x \cdot 1 \cdot dx = -1$$





$$= -\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = e^x \Big|_{-\infty}^{0} = -1$$



$$(x \ln x - x)' = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x - 1 = \ln x$$

$$\operatorname{plim} \ln R_n = -1$$

$$\ln \operatorname{plim} R_n = -1$$

$$\boxed{\operatorname{plim} R_n = e^{-1}}$$

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{X_1\cdot X_2\cdot\ldots\cdot X_n} = e^{-1}$$

Теорема. Предел по вер-сти выдерживает арифметику.

$$\text{plim}(X_n\cdot Y_n) = \text{plim}\, X_n \cdot \text{plim}\, Y_n$$

$$\text{plim}(X_n+Y_n) = \text{plim}\, X_n + \text{plim}\, Y_n$$

$$\text{plim}\, \frac{X_n}{Y_n} = \frac{\text{plim}\, X_n}{\text{plim}\, Y_n}$$

если обе стороны существуют.

$$R_n \xrightarrow{prob} R \implies R_n \xrightarrow{dist} R$$

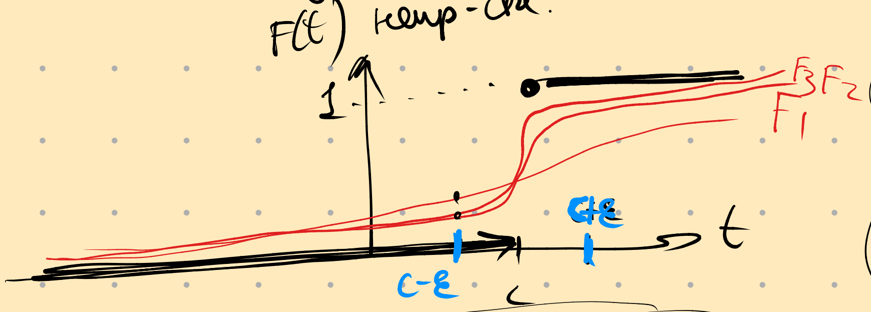
Теорема. Если $\text{plim}\, R_n = R$ то $R_n \xrightarrow{dist} R$.

Теорема $\text{plim}\, R_n = c$ (const) $\iff R_n \xrightarrow{dist} c$ (const)

Док-во. Если $R_n \xrightarrow{dist} c$ (const) то $\text{plim}\, R_n = c$

$F_n(t) \to F(t)$ в точках непр-сти $F(t)$

$F(t) = P(R \le t)$



при $t<c$ $F_n(t) \to 0$

при $t>c$ $F_n(t) \to 1$

$$P(|R_n - c| > \varepsilon) = \le P(R_n > c+\varepsilon) + P(R_n < c-\varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$P(R_n < c-\varepsilon) \le P(R_n \le c-\varepsilon) = F_n(c-\varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$P(R_n > c+\varepsilon) = 1 - P(R_n \le c+\varepsilon) = 1 - F_n(c+\varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 1-1=0$$

$\boxed{\text{Мораль}}$

$$R_n \xrightarrow{prob} R \quad \Longrightarrow \quad R_n \xrightarrow{dist} R$$

$\Downarrow$

$$\operatorname{plim} X_n + \operatorname{plim} Y_n = \operatorname{plim}(X_n+Y_n)$$

$\boxed{\text{Теор.}}$ Для неслучайных послед-стей $R_n = c_n$ (const) обе конвергенции совпадают с обычными пределами.

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{n^2+7n}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+7n}{3n^2} = \frac{1}{3}$$

Упр. $X_1, X_2, \ldots$ незав. $\mathrm{Expo}(\lambda=2)$

$$R_n = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{2n+7}$$

а) $\operatorname{plim} R_n \stackrel{?}{=} \operatorname{plim}\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \cdot \frac{n}{2n+7}\right) =$

б) $R_n \xrightarrow{dist} ?$

$$= \operatorname{plim}\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \cdot \operatorname{plim}\frac{n}{2n+7} =$$

ЗБЧ

$$= E(X_1) \cdot \lim \frac{n}{2n+7} = E(X_1)\cdot\frac{1}{2}$$

$E(X_1) =$ → помн. $\left(\frac{1}{\lambda}\right)$; → $\int_0^\infty x \cdot \lambda \cdot \exp(-\lambda x)\,dx = \frac{1}{\lambda}$

а) $\operatorname{plim} R_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

б) предел по вер-сти — более сильный,

$$R_n \xrightarrow{dist} \frac{1}{4}$$