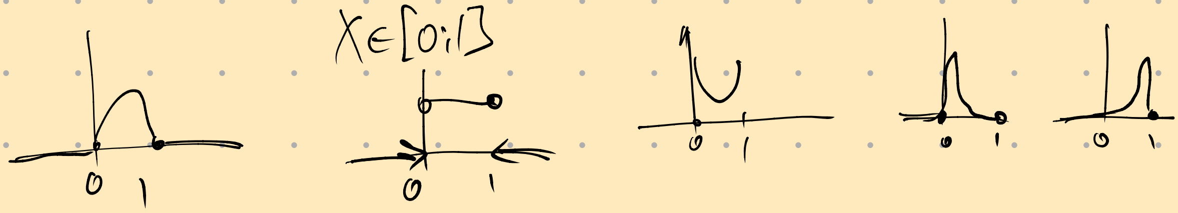
→ Нормальное распределение

Q. $X \sim Beta(a, b)$

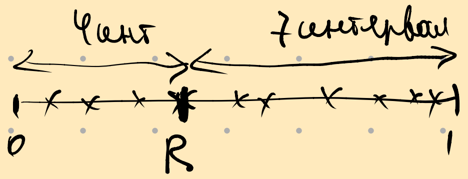
A1.

$X \in [0;1]$



A2. Где идеально точно возникает?

Пример 1

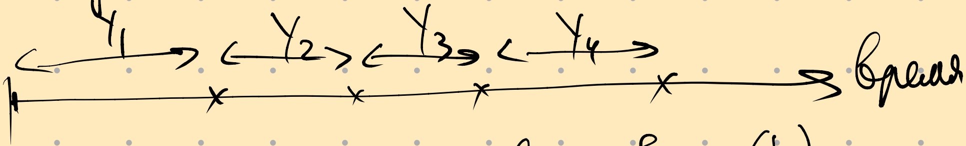


Случ. равномерно бросили $X_1, X_2, \dots X_{10}$ незав $U[0;1]$

11 интервалов.

СВ $R \sim Beta(4,7)$

Пример 2 Пуасс. поток.

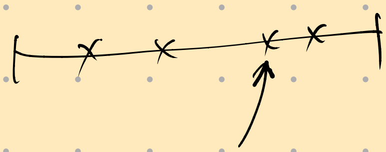


$Y_i \sim$ незав и $Expo(\lambda)$

$$R = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_a}{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_a + Y_{a+1} + \dots + Y_{a+b}}$$

$R \sim Beta(a, b)$.

Упр

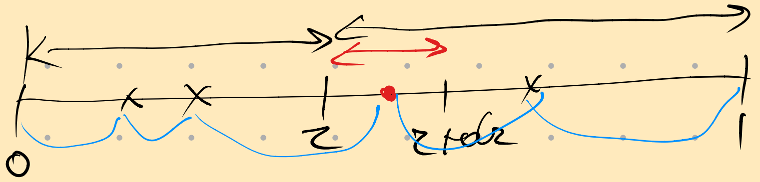


$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim Unif[0;1]$ незав.

R – это третья (слева) точка

$R \sim ?$ $f(r)$?

$$f(r) \cdot dr = \boxed{P(R \in [r; r+dr])} + o(dr) =$$



$$= \left(\frac{z}{1}\right)^2 \cdot \left(\frac{dz}{1}\right)^1 \cdot \left(\frac{1-z}{1}\right)^1 \times C_4^2 \cdot 2$$

$$f(z) = \boxed{\frac{4!}{2!\,2!} \cdot 2 \cdot z^2 \cdot (1-z)^1} = \boxed{const \cdot z^{a-1}(1-z)^{b-1}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} Beta(a, b) \\ a=3 \quad b=2 \end{array}}$$

Нормальное.

$f(x) = \boxed{. \; . \; . \; .}$

Гаусс

Астрономы:

1600г Браге

$133^\circ\ 26'\ 39''$
$133^\circ\ 25'\ 40''$
$133^\circ\ 23'\ 51''$ → ?

Лагерь А: просто возьми среднее

Лагерь Б: с меньшими весом учесть далёкие наблюдения
← Кеплер

~1810 Гаусс наоборот!

4 допустим усреднить — самое верное. Что из этого следует?

!

Предпосылки:

1. $X_1, X_2, \dots, X_n$ ~ результаты измерений — независимы
2. X_i ~ одинаково распределены
3. ошибки в $\pm$ равновероятны

---

[5] У СВ есть $f(x_1, \dots, x_n | \mu)$ ← истинное значение неизвестного пар-ра.

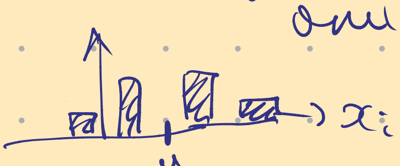
в силу (1):

$$f(x_1, \dots, x_n|\mu) = f_1(x_1|\mu)\cdot f_2(x_2|\mu)\cdot \ldots \cdot f_n(x_n|\mu) \overset{(2)}{=}$$

$$= f(x_1|\mu)\cdot f(x_2|\mu)\cdot \ldots \cdot f(x_n|\mu) \overset{(3)}{=}$$

(3) в дискретном описании

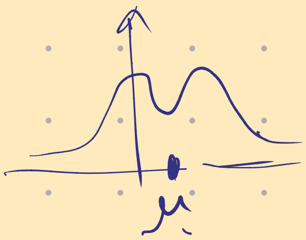
$$\boxed{P(X_i=\mu+\Delta)=P(X_i=\mu-\Delta)}$$



$$P(X_i-\mu=\Delta)=P(X_i-\mu=-\Delta)$$

в непрерывном:

$f(x_i|\mu)$ симм-на отн-но μ



$$\boxed{f(x|\mu)=h(x-\mu)}$$ h - чётная

$$= h(x_1-\mu)\cdot h(x_2-\mu)\cdot \ldots \cdot h(x_n-\mu)$$!!

(!) формализация предп (1)

$\frac{x_1+\dots+x_n}{n} = \bar{x}$ — самое верное =>

$\boxed{\bar{x} \text{ — точка максимума некой ф-ции.}}$

! то, что измерено $(x_1, \dots, x_n)$ — это наиболее вер-ный вар-нт. !

1ф $\bar{x}$ — это результат максимизации $f(x_1, \dots, x_n | \mu)$ по μ

$$\max_\mu \boxed{h(x_1-\mu) \cdot \ldots \cdot h(x_n-\mu)}$$

дожно: $\mu^* = \bar{x}$

$\boxed{h?}$

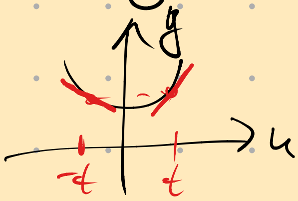
$$\max_\mu \ln\left[h(x_1-\mu) \cdot \ldots \cdot h(x_n-\mu)\right]$$

$$\max_\mu \sum_{i=1}^n \ln h(x_i-\mu)$$

$\ln h(u) = g(u)$

$$\max_\mu \sum g(x_i-\mu)$$

(4) $\boxed{g \text{ — чётная}}$



$$\sum g'(x_i-\mu)=0$$

при $\mu = \bar{x}$

g' — нечётная

$g'(-t) = -g'(t)$

$$\sum g'(x_i-\bar{x})=0 \quad (*)$$

$\forall (x_1, \dots, x_n)$

3 наблюдения

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3t \end{pmatrix} \qquad \bar{x} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{3t}{3} = t$$

$$x_1 - \bar{x} = -t$$
$$x_2 - \bar{x} = -t$$
$$x_3 - \bar{x} = 2t$$

$$(*) \qquad g'(-t) + g'(-t) + g'(2t) = 0 \qquad \forall t$$

$$-2g'(t) + g'(2t) = 0$$

$$\boxed{g'(2t) = 2g'(t)}$$

$g'(u) \overset{?}{=}$ лин.

4 набл.

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4t \end{pmatrix} \qquad \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = t$$

$$x_1 - \bar{x} = -t \quad \ldots \quad x_3 - \bar{x} = -t$$
$$x_4 - \bar{x} = 3t$$

$$g'(-t) + g'(-t) + g'(-t) + g'(3t) = 0$$

$$g'(3t) = 3g'(t)$$

$$\boxed{g'(kt) = k \cdot g'(t)} \qquad k \in \mathbb{Z} \qquad t = \frac{u}{m}$$

$$g'\left(\frac{k}{m} \cdot u\right) = k \cdot g'\left(\frac{u}{m}\right) \cdot \frac{m}{m}$$

$$g'\left(\frac{k}{m} \cdot u\right) = \frac{k}{m} \cdot g'(u)$$

(!) $g' \leftarrow$ д. быть линейной

$$g'(u) = -\tau \cdot u \qquad \tau \text{ – конст}$$

$$g(u) = -\frac{\tau}{2} \cdot u^2 + const.$$

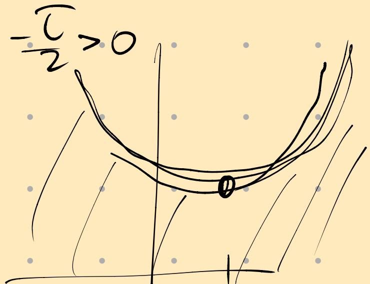
$$\boxed{\ln f(x|\mu) = g(x-\mu)}$$

$$f(x|\mu) = \exp\left(-\frac{\tau}{2}(x-\mu)^2 + const\right)$$

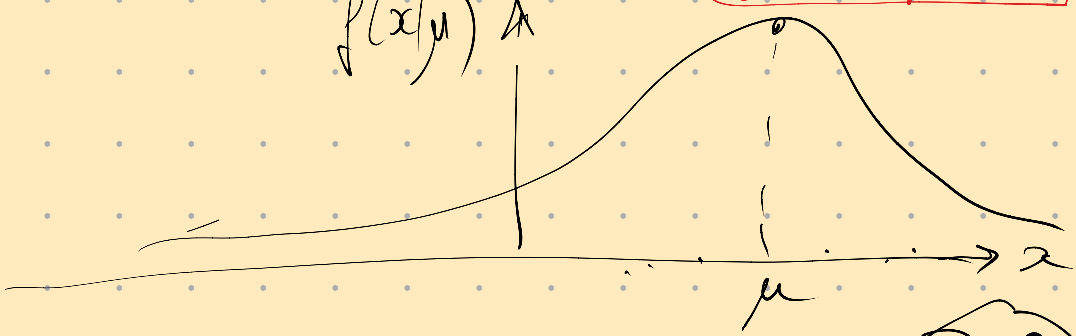
$$\boxed{f(x|\mu) = \exp\left(-\frac{\tau}{2}(x-\mu)^2\right) \cdot const}$$

д. б. отриц-м

Если бы $-\frac{\tau}{2} > 0$



$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = +\infty}$$

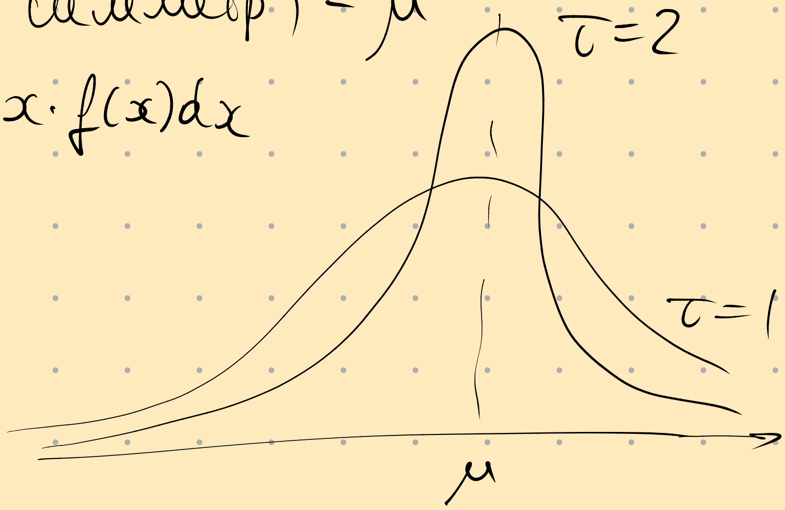


$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \qquad \tau > 0$$

X имеет $f(x|\mu)$

Упр $E(X) = (\text{по симметр}) = \mu$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$



$\boxed{\tau \text{ – точность!}}$

СВ: X, Y пар: μ, τ неслуч.

Упр. $E(X) = \mu$ $\quad Y = X - \mu \quad E(Y) = E(X) - \mu = 0$

$Var(X) =$ $\quad f_Y(y) = \exp\left(-\frac{\tau y^2}{2}\right) \cdot const$

$= Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = E(Y^2) =$

норм.

$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy = 1$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot \overbrace{\boxed{\exp\left(-\frac{\tau y^2}{2}\right) \cdot const}}^{f(y)}\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(-y)}_{u} \cdot \underbrace{(-y) \cdot \exp\left(-\frac{\tau y^2}{2}\right)}_{v'} const\, \cancel{dy} =$$

$$u' = -1 \qquad v' = -y \cdot \exp\left(-\frac{\tau y^2}{2}\right)$$

$$v = \boxed{\frac{\exp\left(-\frac{\tau y^2}{2}\right)}{+\tau}}$$

$$= \boxed{\left. -y \cdot \frac{\exp\left(-\frac{\tau y^2}{2}\right)}{+\tau} \right|_{y=-\infty}^{y=+\infty}} - \int (-1) \cdot \frac{\exp\left(-\frac{\tau y^2}{2}\right)}{\tau} \cdot const\, dy$$

$y \to +\infty$: $-y \to -\infty$; $\exp(-\tau y^2/2) \to 0$

$$= 0 + \frac{1}{\tau} \cdot \overbrace{\underbrace{\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau y^2}{2}\right) \cdot const\, dy}}_{\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy}}^{=1}$$

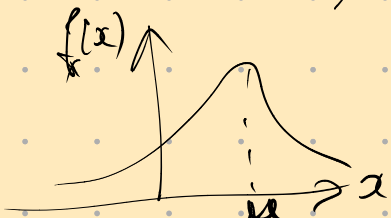
$$Var(X) = \ldots\ldots = \frac{1}{\tau}$$

$Y = X - \mu$

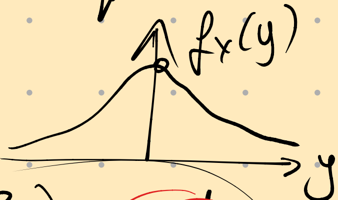
$\boxed{Var(R+7) = Var\,R}$

Обозначения: $Var(X) = \sigma^2 = \frac{1}{\tau}$

$X \sim N(\mu; \sigma^2)$ „X имеет нормальное распр-ие с ожиданием μ и дисперсией σ^2"



$$f_X(x) = \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot const$$



$$f_Y(y) = \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \cdot const$$

Как устроена const?

$\boxed{\text{Игра единицами измерения}}$

безразм.

x [м]

μ [м] $\qquad \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

σ^2 [м^2]

dx [м]

вер-сть [безр]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)}_{[\text{безр}]} \cdot \underbrace{\text{const}}_{\left[\frac{1}{\text{м}}\right]} \cdot \underbrace{dy}_{[\text{м}]\ [dy]} = 1$$

$$\text{const} = \frac{c}{\sqrt{\sigma^2}}$$

$$\boxed{f_Y(y) = \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{c}{\sqrt{\sigma^2}}}$$

c?

Решить $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = 1} \Rightarrow c$?

тяжело

Трюк

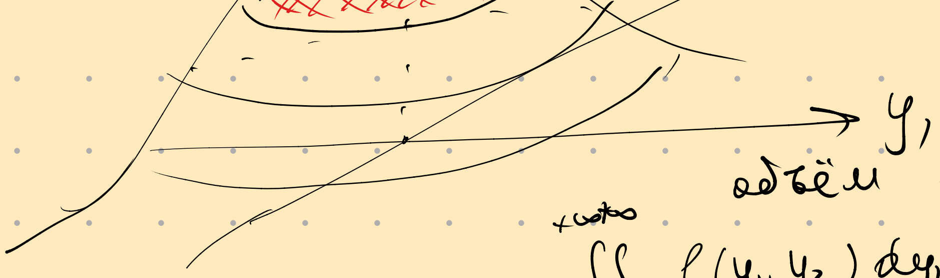
Y_1, Y_2 ~ независимых $N(0;1)$ $\qquad \sigma^2 = 1$

$f(y_1) = \exp\left(-\frac{y_1^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{c}{\sqrt{\sigma^2}} \qquad f(y_2) = -//-$

$$\boxed{f(y_1, y_2) = \frac{c^2}{1} \cdot \exp\left(-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}\right)}$$

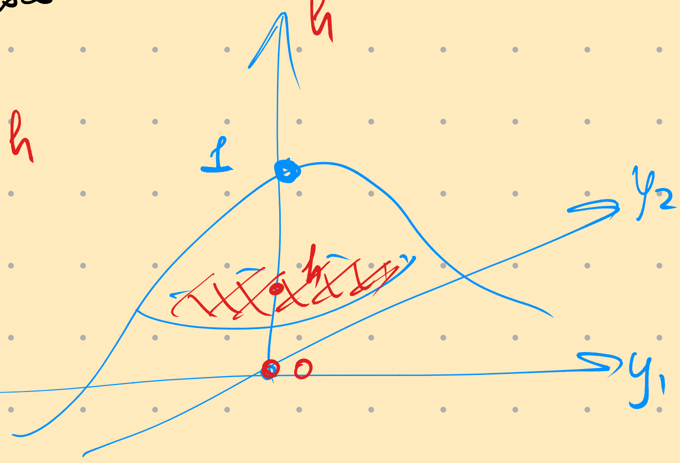
$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{c^2}{1} \cdot \exp\left(-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}\right) dy_1\, dy_2 = c^2 \cdot 2\pi$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$



объём под шляпой

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} f(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2 = 1.$$



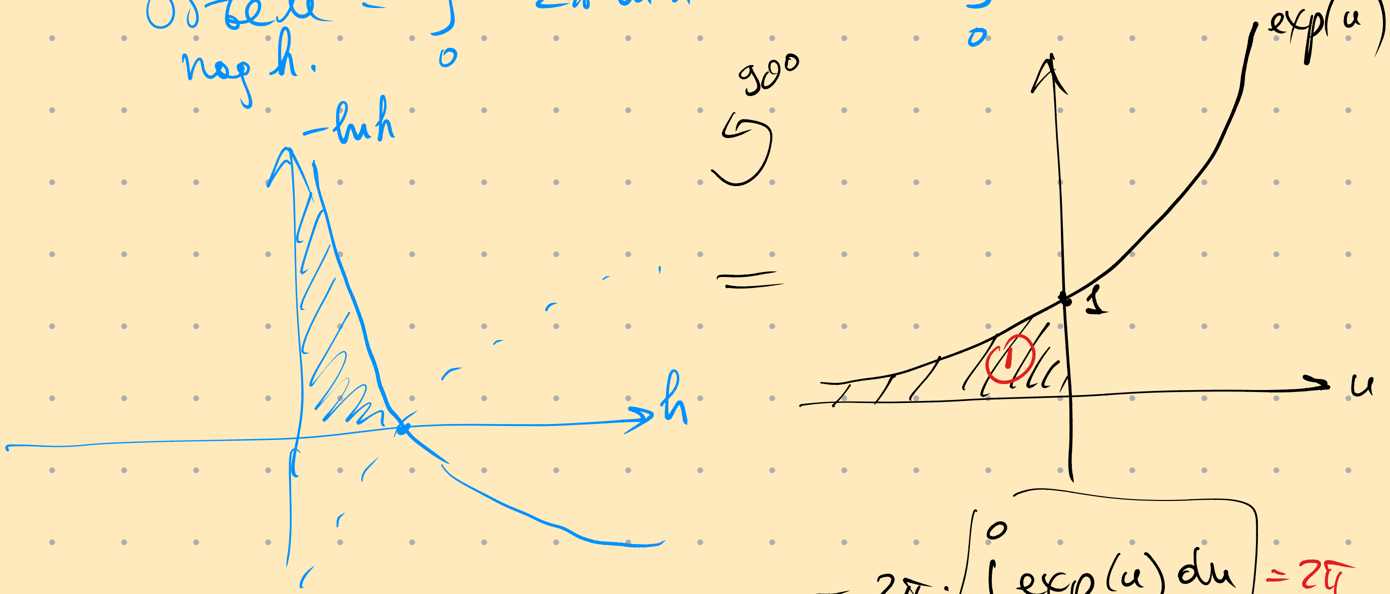
$$\boxed{h(y_1, y_2) = \exp\left(-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}\right)} = h$$

круг $\quad -\dfrac{y_1^2+y_2^2}{2} = \ln h$

$$\boxed{y_1^2 + y_2^2 = -2\ln h} = R^2$$

площадь круга: $\quad \pi R^2 = -2\pi \ln h.$

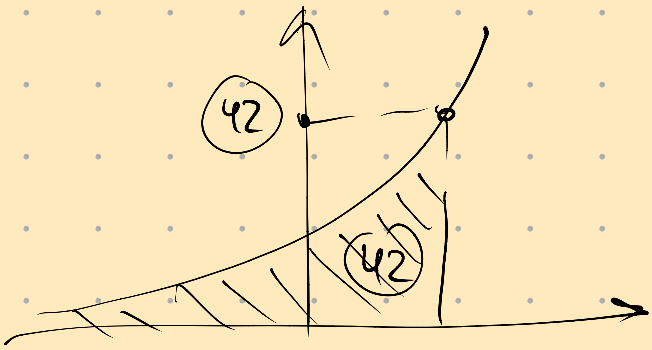
Объём под h. $= \displaystyle\int_0^1 -2\pi \ln h \, dh = 2\pi \cdot \int_0^1 -\ln h \, dh =$



$$= 2\pi \cdot \boxed{\int_{-\infty}^{0} \exp(u)\, du} = 2\pi$$

$\| \; 1$

основное св-во exp(u)



Опр. $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ нормальное / Гаусса.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$E(X) = \mu$$

$$Var(X) = \sigma^2$$