Задача 9.3

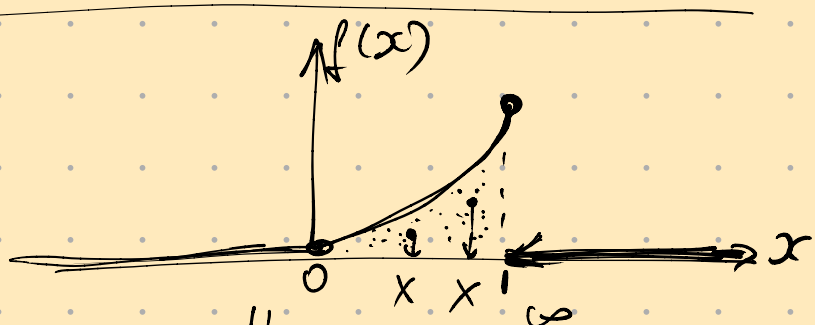
СВ X

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{при } x \in [0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

→ а) $P(X > \frac{1}{2})$?

→ б) $E(X)$?

→ в) $Y = \ln X$ найдите $f_Y(y)$?



а) $P(X > \frac{1}{2}) = \int_{1/2}^{1} 3x^2\,dx = x^3\Big|_{1/2}^{1} = \frac{7}{8}$ $= \int_{1/2}^{\infty} f(x)\,dx$

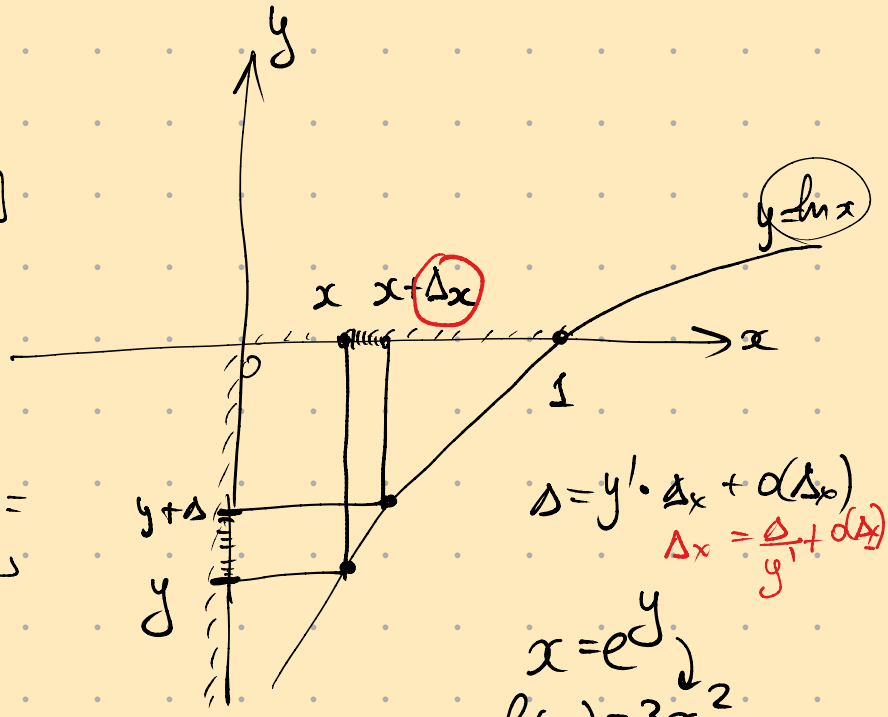
б) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^1 3x^3\,dx = \frac{3x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}$

в дискр: $E(X) = \sum_x x \cdot P(X = x)$

$$P(X \in [x; x+\Delta]) = f(x) \cdot \Delta + o(\Delta)$$

$Y = \ln X$ $\quad X \in [0;1]$, $Y \in (-\infty; 0]$

$P(Y \in [y; y+\Delta]) = ?$



$= o(\Delta) + P(X \in [x; x + \frac{\Delta}{y'}]) =$

$= o(\Delta) + f(x) \cdot \frac{\Delta}{y'} =$

$\Delta = y' \cdot \Delta_x + o(\Delta_x)$

$\Delta_x = \frac{\Delta}{y'} + o(\Delta_x)$

$x = e^y$

$f(x) = 3x^2$

$= o(\Delta) + \frac{f(x)}{y'} \cdot \Delta = o(\Delta) + \frac{f(x)}{1/x}\Delta = o(\Delta) + x \cdot f(x) \cdot \Delta =$

это уже $f_Y(y)$

$= o(\Delta) + e^y \cdot 3(e^y)^2 \Delta$

$f_Y(y)$

ф. плотности СВ Y:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3e^{3y} & \text{при } y \in (-\infty; 0] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

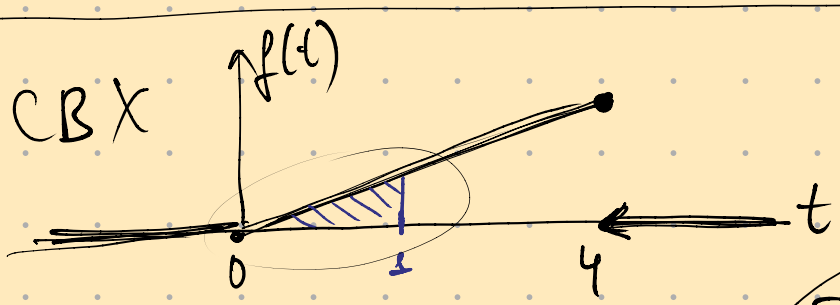
Правило Если $Y = g(X)$ – дифференцируемая монотонная, то чтобы найти к ф-ции плотности СВ Y достаточно подставить $x(y)$ в $f(x)dx$

$$f(x)dx = 3x^2 \cdot dx = 3(e^y)^2 \cdot d(e^y) = 3(e^y)^2 \cdot e^y dy$$

$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$

$f(y)$

(9.7.) СВ X



$$f(t) = \begin{cases} t/8 & \text{при } t \in [0; 4] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

а) $P(X<1)$, $E(X)$, $E(X^2)$

в) $E(X|X<1)$, $E(X^2|X<1)$

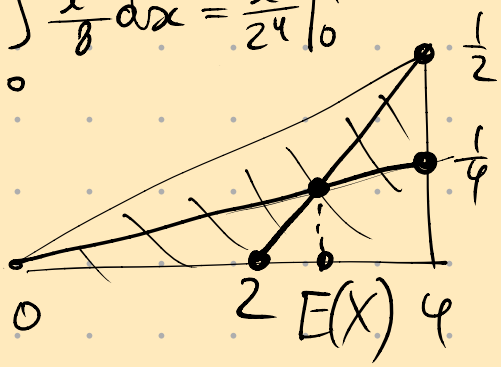
д) q? $P(X \le q) = 0{,}40$

$P(X<1) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x/8\,dx =$

площадь $= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$

$$E(X) = \int_0^4 x \cdot f(x)\,dx = \int_0^4 \frac{x^2}{8}\,dx = \frac{x^3}{24}\Big|_0^4$$

→ центр масс абсц.



① центр мас
② симметрия
③ масштабир/ед. цилер.

$$\begin{cases} y = x/16 \\ y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{x}{16} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$$

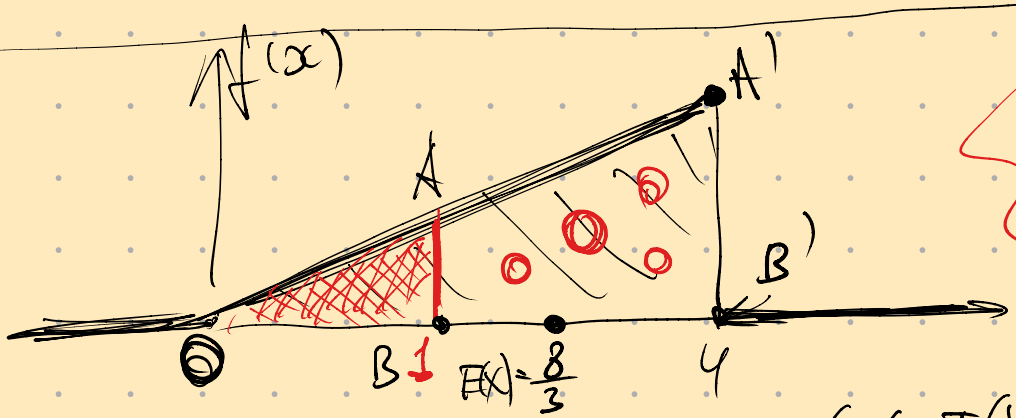
$$4x = x - 8$$

$$x = \frac{8}{3}$$

$$E(X^2) = \int_0^4 x^2 f(x)\,dx = \int_0^4 \frac{x^3}{8}\,dx =$$

гели идей?

$$\frac{x^4}{8\cdot 4}\Big|_{x=0}^{x=4} = 8$$



$E(X|A) = E(X \cdot I_A)/P(A)$

$$E(X|X<1)? = E(X \cdot I(X<1))/P(X<1) =$$

$$E(X^2|X<1)? = \frac{E(X \cdot I(X<1))}{1/16} =$$

$\Delta OAB \sim \Delta OA'B'$

k под. = 1:4

$E(X|X<1) = \frac{E(X)}{4} =$

$= \frac{8/3}{4} = \frac{2}{3}$

$$= \frac{1}{1/16} \cdot \int_0^4 \underbrace{x \cdot I(x<1)}_{g(x)} \cdot f(x)\,dx$$

1

смена масштаба

$$= \frac{1}{1/16} \int_0^1 x \cdot f(x)\,dx = 16 \cdot \int_0^1 \frac{x^2}{8}\,dx = \frac{2}{3}$$

$$E(X^2 \mid X<1) = \frac{1}{P(X<1)} \cdot \int_0^4 \underbrace{x^2 \cdot I(x<1)}_{} \cdot \underbrace{f(x)\,dx}_{}$$

$$= \frac{1}{1/16} \cdot \int_0^1 x^2 \cdot \frac{x}{8}\,dx = \dots$$

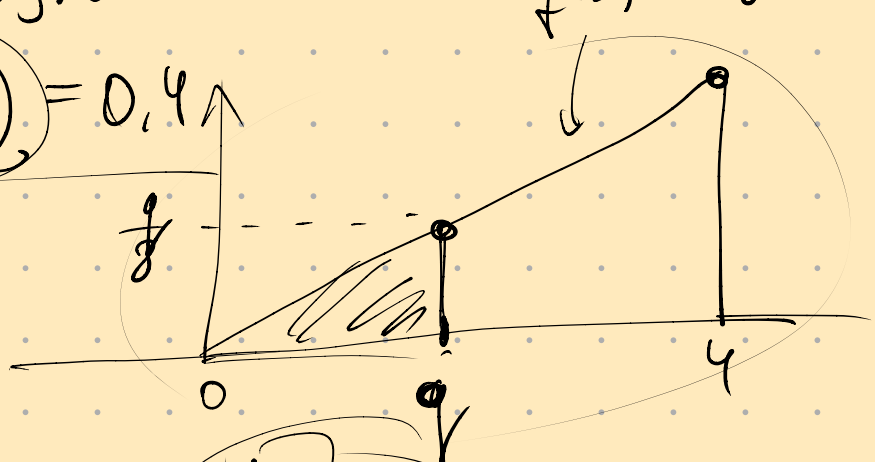
	X	X^2	
числа	$[кг]$ $[см]$	$[кг^2]$ $[см^2]$	(ед. изм)

$$E(X^2 \mid X<1) = \frac{E(X^2)}{(4)^2} = \frac{8}{4^2} = \frac{1}{2}$$

---

g) квантиль порядка 40%

q? $P(X \le q) = 0{,}4$



интеграл.

$$\int_0^q f(x)\,dx = \int_0^q \frac{x}{8}\,dx = 0{,}4$$

→ q?

геометр.

$$P(X \le \varphi) = \frac{1}{2} \cdot \varphi \cdot \frac{\varphi}{8} = \frac{\varphi^2}{16} = 0{,}4$$

$$\varphi = \sqrt{16 \cdot 0{,}4}$$

9.11 убыток от пожара $X \sim U[0;1]$

Q – компенсация

$$Q = \begin{cases} 0{,}7, & \text{если } X \ge 0{,}7 \\ 0, & \text{если } X < 0{,}7 \end{cases}$$

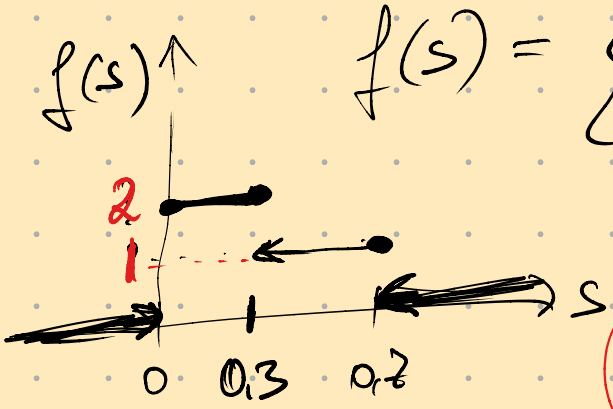
S – убыток с учётом компенсации

$$S = X - Q$$

→ а) $f_S(s)$ – ф. плотности

б) $E(S)$? $E(S^2)$?

$$f(s) = \begin{cases} ? & x \in [0; 0{,}7] \\ 0, & \text{если } x \notin [0; 0{,}7] \end{cases}$$



$$P(S \in [0{,}1; 0{,}2]) ?= P(X \in [0{,}1; 0{,}2]) + P(X \in [0{,}8; 0{,}9])$$

(0,1×2)

$$P(S \in [0{,}5; 0{,}6]) ?= P(X \in [0{,}5; 0{,}6])$$

(0,1)

$$f(s) = \frac{P(X \in [s; s+\Delta])}{\Delta} + \frac{o(\Delta)}{\Delta}$$

и это ф плотности СВ S → $f(s) = \begin{cases} 2, & \text{если } s \in [0;0,3] \\ 1, & \text{если } s \in (0,3;0,7] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Нюанс. $f(x)$ ф плотности не единственна,

[можно поменять её значение на множестве нулевой длины]

и это → $f(s) = \begin{cases} 2, & \text{если } s \in (0;0,3) \\ 1, & \text{если } s \in [0,3, 0,7] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

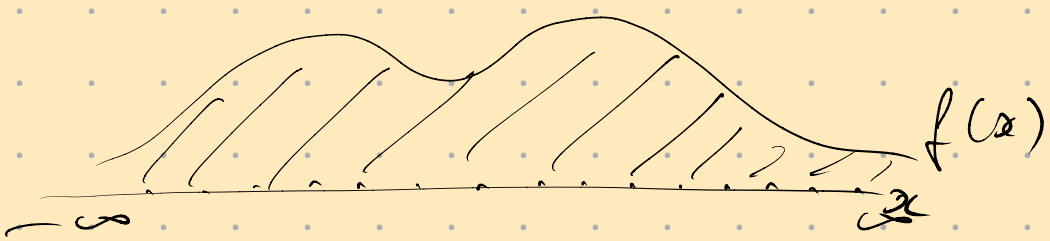
и даже это $f(s)$ → $f(s) = \begin{cases} 2, & \text{если } s \in (0;0,3) \\ 1, & \text{если } s \in [0,3, 0,7] \\ 52, & \text{если } s = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Упр. 9.4 СВ с. ф. плотности $f(x)$

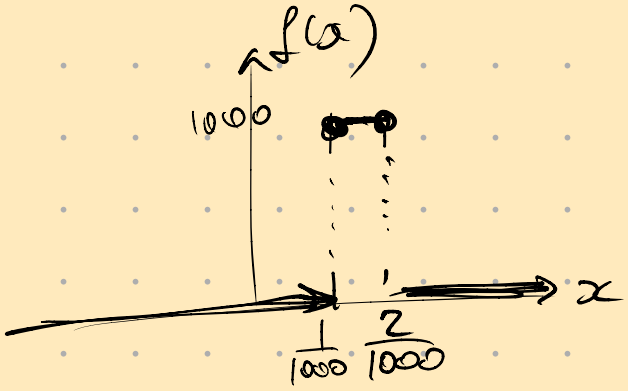
а) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \overset{?}{=} P(X \in (-\infty; +\infty)) = 1$

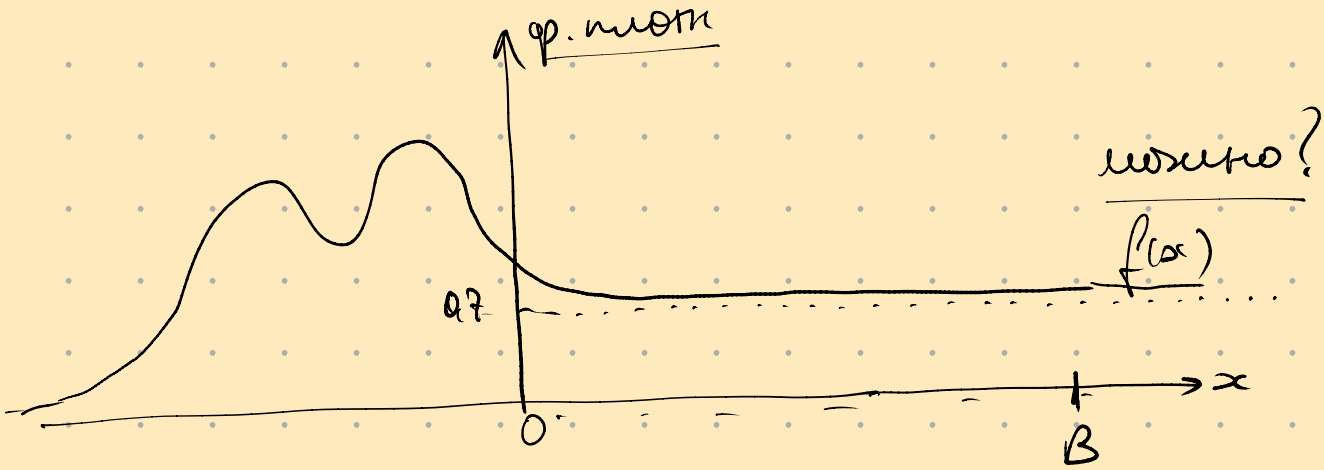
б) может ли $f(x)$ быть больше (да) 1000?

в) что можно сказать про $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$?



$P(X \in [x; x+\Delta]) = f(x) \cdot \Delta + o(\Delta)$



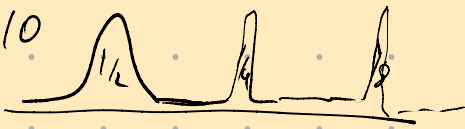


можно?

$P(X \in [0; B]) \geq 0.7 \cdot B = 7$

$B = 10$

не выполн.



$\lim_{x \to \infty} f(x)$ → не сущ.

→ 0 (если сущ.)