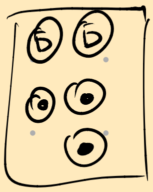
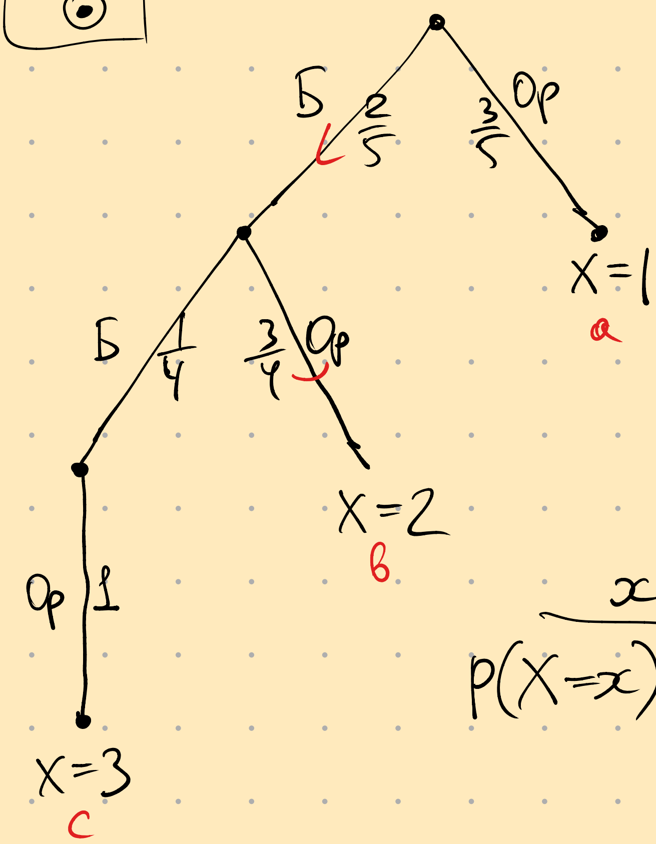
задачи из листочков к семинарам

1.1



! наугад

подряд → равно-вероятн



X – СВ
x – аргумент функции

$\Omega = \{a, b, c\}$

$X(a)=1 \quad X(b)=2 \quad X(c)=3$

x	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1$
	0,6	0,3	0,1

$$E(X) = 1\cdot 0{,}6 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}1 = \boxed{1{,}5}$$

$$\boxed{P(X=1{,}5)=0.}$$

долгосрочное среднее

$B \gg 0$

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_B}{B} \approx 1{,}5$$

1.6

ДМ+СН

Дети

–1 час $\quad \xrightarrow{k_1,\ k_2}$ $\quad \xleftarrow{k_1}$ №1

$-\frac{1}{2}$ часа $\quad \xrightarrow{k_3,\ k_4}$ $\quad \xleftarrow{k_2}$ №2

k_5, k_6 №3

$-\frac{1}{4}$ часа $\xleftarrow{k_3}$ №3

⋮

$t=0$ НГ

а) $+1$

б) K_{2024}

в шаг №1012: ДМ СН $\longrightarrow$ Деда

в шаг №2024 ДМ СН $\longleftarrow$ Деду

$\text{card}\,A_1 = 1$ $\quad A_1 = \{k_2\}$

$\text{card}\,A_2 = 2$ $\quad A_2 = \{k_3, k_4\}$

$\ldots$ $\quad A_3 = \{k_4, k_5, k_6\}$

$\text{card}\,A_n = n$ $\quad A_4 = \{k_5, k_6, k_7, k_8\}$

⋮

A_n - мно-во конфет у Деда после n-го шага

A_n - это множество

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A$$

$w \in A \iff w$ входит во все A_n нач-ая с нек-го N

$w \notin A \iff w$ не входит во все A_n начин-ая с нек-го N

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \varnothing$$

множество $\quad$ множество

$\text{card}(A_n)$ = число элементов в A_n

$\# A_n$

$|A_n|$

$$\text{card}\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \text{card}\,\varnothing = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} (\text{card}\,A_n) = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

(!) бывает $\operatorname{card} \lim\limits_{n\to\infty} A_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{card} A_n$

x номер съеденной СН конфеты

x	1	2	3	4	5	6	7	...
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	...	...	...

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots = 1$$

g) $$P(X\in \lim_{n\to\infty} A_n) = P(X\in\varnothing) = 1-1=0$$

$$\lim_{n\to\infty} P(X\in A_n) =$$

$A_1 = \{k_2\}$ $\quad P(X=2)=\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$

$A_2 = \{k_3, k_4\}$ $\quad P(X\in\{3,4\}) = \frac{1}{8}+\frac{1}{16} \leq \frac{1}{4}$

$A_3 = \{k_4, k_5, k_6\}$ $\quad P(X\in\{4,5,6\}) =$

$$= \frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64} \leq$$

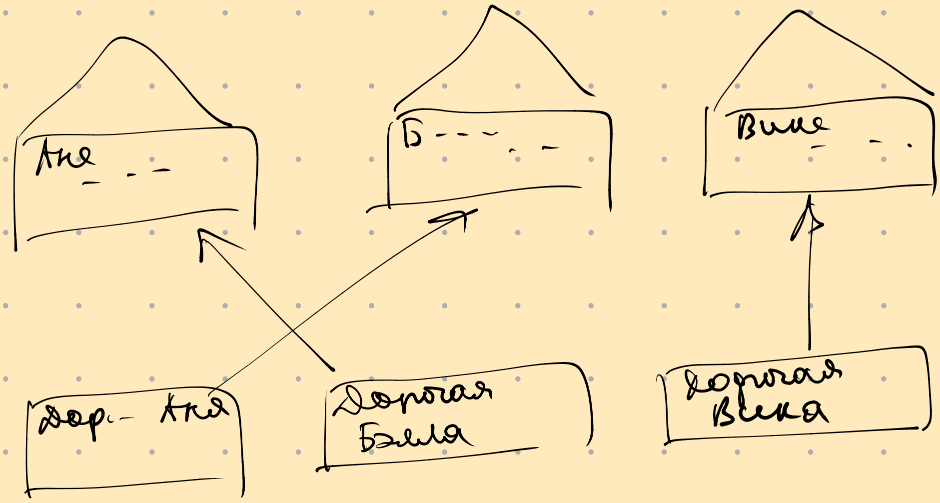
$$\leq \underbrace{\frac{1}{16}+\underbrace{\frac{1}{32}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{64}+\frac{1}{64}}}_{\frac{1}{32}}}_{\frac{1}{16}}}_{1/8} = \frac{1}{8}$$

$$P(X\in A_k) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\lim_{n\to\infty} P(X\in A_n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} P(X\in A_n) = P(X\in \lim A_n) = 0$$

3.5



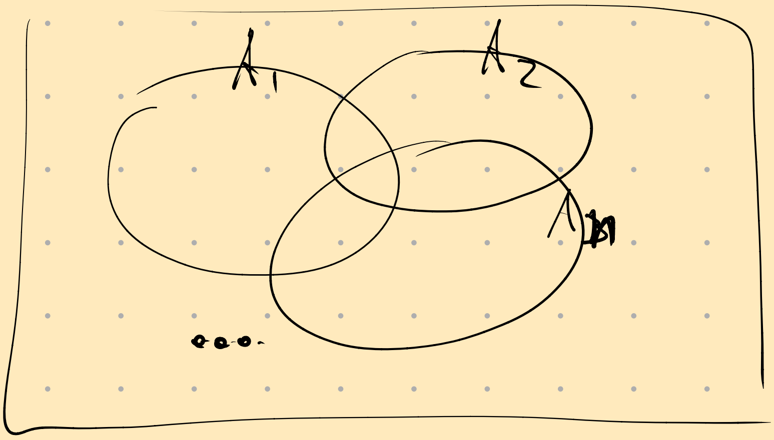
X_n — количество девушек, получивших адр-все им письма.

$\boxed{n=3}$

$$P(X_3=0)=\frac{2}{6}$$
$$P(X_3=1)=\frac{3}{6}$$
$$P(X_3=2)=\frac{0}{6}$$
$$P(X_3=3)=\frac{1}{6}$$

$6=3!$

а) $P(X_n \geq 1)$?=



A_i — адресат №i получил своё письмо.

$$P(X_n \geq 1) = P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n) - P(A_1\cap A_2) - P(A_2\cap A_4) \ldots + P(A_1\cap A_2\cap A_3) + \ldots - P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4) \ldots$$

по 1
по 2
по 3
по 4

n адресатов

$$+(-1)^{n+1} \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots A_n) \text{ до } n$$

$$P(A_1) \overset{?}{=} \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$P(A_1 \cap A_2) \overset{?}{=} \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n \cdot (n-1)}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \overset{?}{=} \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

$$P(X_n \geq 1) = C_n^1 \cdot \frac{(n-1)!}{n!} - C_n^2 \cdot \frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3 \cdot \frac{(n-3)!}{n!} - \ldots$$

$$(-1)^n \cdot \frac{1}{n!} =$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$\boxed{= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \ldots (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}}$$

б) $$\lim_{n \to \infty} P(X_n \geq 1) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots \qquad |x| < 1$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \ldots = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} P(X_n \geq 1) = 1 - e^{-1}$$

в) $\boxed{E(X_n) \ ?}$ по опр. $1 \cdot P(X_n = 1) + 2 \cdot P(X_n = 2) + \ldots n \cdot P(X_n = n)$

по свойствам

$P(X_n = 0)$ долго считать!!

! разложение СВ в сумму более удобных!

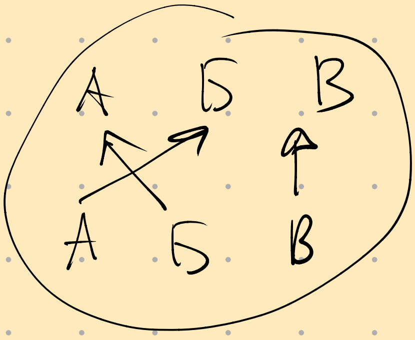
$$X_n = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_n$$

X_n - кол-во верно адресованных писем

$$Y_1 \begin{cases} 1, \text{ если адресат №1 получил своё письмо} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

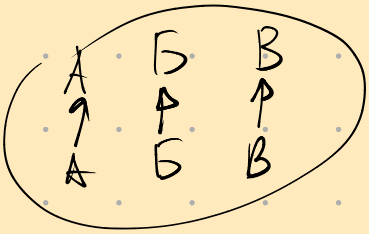
$$Y_2 \begin{cases} 1 \text{ если адресат №2 получил своё письмо} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

$n=3$

$\omega =$ 

$X_3 = 1 \quad Y_1 = 0 \quad Y_2 = 0 \quad Y_3 = 1$

$X_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3$

$\omega =$ 

$X_3 = 3 \quad Y_1 = 1 \quad Y_2 = 1 \quad Y_3 = 1$

$X_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3$

$$E(X_3) = E(Y_1) + \underbrace{E(Y_2)}_{0 \cdot P(Y_2=0) + 1 \cdot P(Y_2=1)} + \underbrace{E(Y_3)}_{0 \cdot P(Y_3=0) + 1 \cdot P(Y_3=1)}$$

$\boxed{n \text{ человек.}}$

y	0	1
$P(Y_1 = y)$	$\frac{n-1}{n}$	$1/n$

$$P(Y_1 = 0) = \frac{n-1}{n} \qquad P(Y_1 = 1) = \frac{1}{n}$$

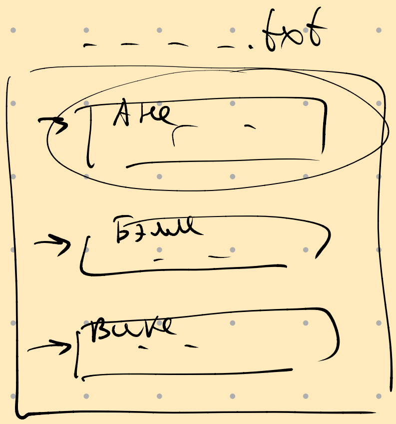
$$E(Y_1) = \frac{1}{n} \times 1 = \frac{1}{n}$$

y	0	1
$P(Y_2 = y)$	$\frac{n-1}{n}$	$1/n$

$$E(Y_2) = \frac{1}{n} \times 1 = \frac{1}{n}$$

в) $E(X_n) = E(Y_1) + E(Y_2) + \dots + E(Y_n) =$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = n \times \frac{1}{n} = 1$$



→ повторы допустимы

→ каждый адресат получает ровно одно сообщение.

а) б) в) Ω_n

$X_n : \Omega_n \to \mathbb{R}$

$\mathbb{P}(\dots)$

г) Ω_n'

$X_n' : \Omega_n' \to \mathbb{R}$

г) Ω_n

$X_n : \Omega_n \to \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{Q}(\dots)$

$\boxed{\text{возможны повторы}}$

г) $\mathbb{Q}(X_n \geq 1) = 1 - \mathbb{Q}(X_n = 0) =$

$$= 1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} =$$

$$= 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \neq$$

$$\mathbb{P}(X_n \geq 1) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{Q}(X_n \geq 1) = \lim_{n\to\infty} 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = 1 - e^{-1}$$

$X_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$

y	0	1
$P(Y_1 = y)$	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{1}{n}$

$$Q(Y_1=1)=\frac{1}{n} \qquad Q(Y_1=0)=\frac{n-1}{n}$$

$$E_Q(Y_1)=0\cdot\frac{n-1}{n}+1\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$$

$$E_Q(Y_2)=E_Q(Y_3)=\ldots=1/n$$

мат. ож. в старом эксп

$$E(X_n)=E_Q(X_n)=1$$

мат. ож. в новом эксперименте

$B>>0$

$$E(X_n)=1$$

$$\frac{X_n^{(1)}+X_n^{(2)}+\ldots+X_n^{(B)}}{B}\approx 1$$

B - кол-во опытов.