Привет!!

Лекция 2

* метод первого шага
* разложение СВ в сумму
* условные $P(A|B)$, $E(X|B)$

Задача

Алиса : HTH   H = решка   T = орёл
Боб : HHT

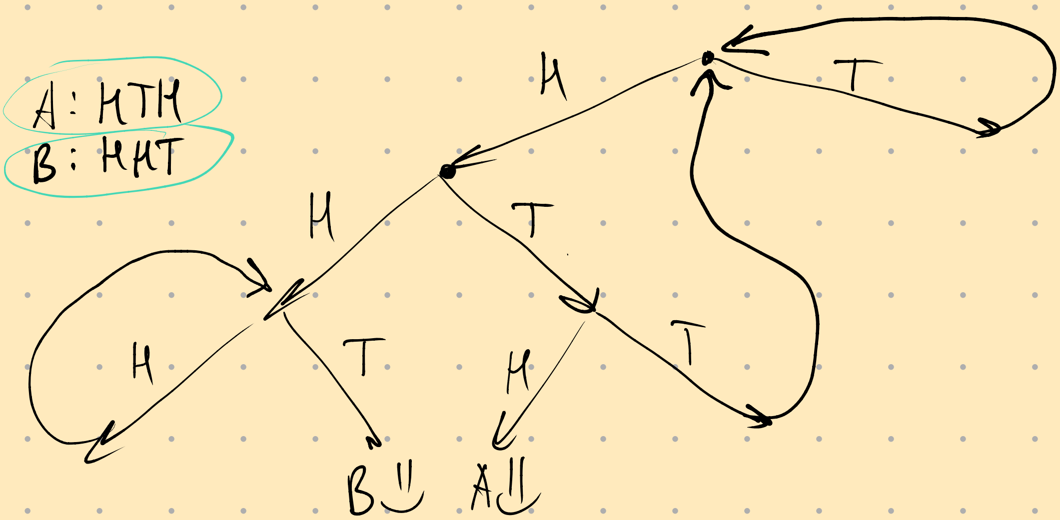
неогр. число раз бросают прав. монету
Алиса выигр., если ранее выпадет HTH
Боб — // — HHT.

а) P(Алиса выигр)?

б) N - число бросков, E(N)?

TTTHTH → Алиса выигр, $N=6$

$P(TTTHTH) = \left(\frac{1}{2}\right)^6$

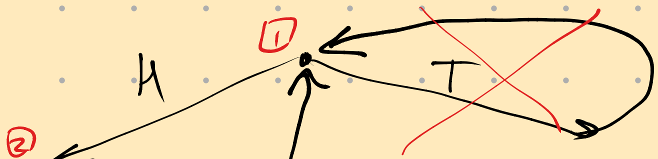


T ~ •

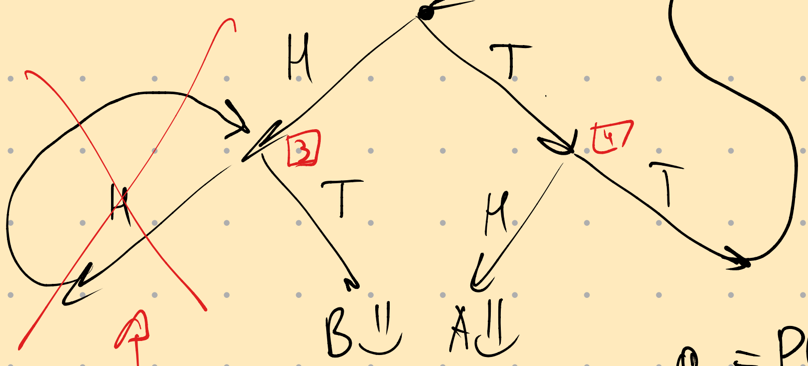
$\cancel{H}HH$ ~ HH ?
HTH
HHT

HTT ~
HTH
HHT

P(Алиса поб) ∨ P(Боб победит)



$\boxed{\text{упрощать}}$



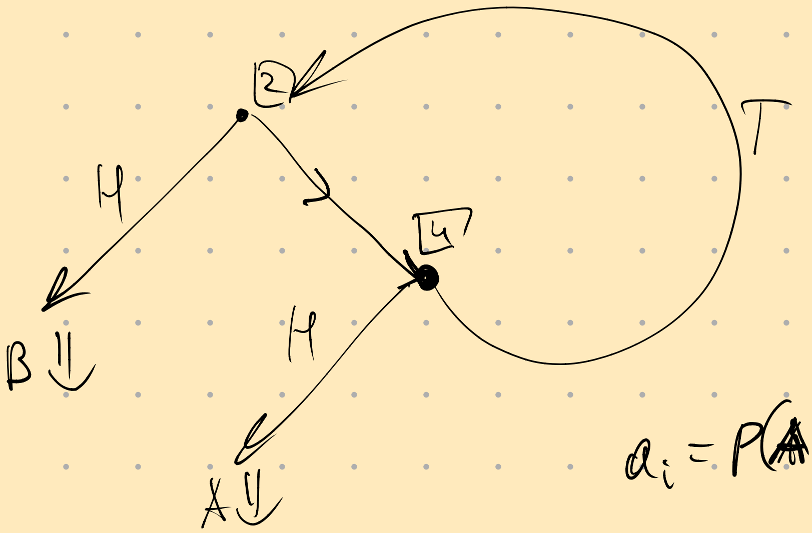
„узо“ влияет на продолж. но не на побед.

Q_1: $P(A \text{ победит})$

Q_2: $E(N)$

a_1

$$a_1 = P(A\ \text{поб} \mid \text{старт в } \boxed{1})$$
$$a_2 = P(\ldots \mid \text{старт в } \boxed{2})$$
$$a_3 = P(\ldots \mid \text{старт в } \boxed{3})$$
$$a_4 = P(\ldots \mid \text{старт в } \boxed{4})$$

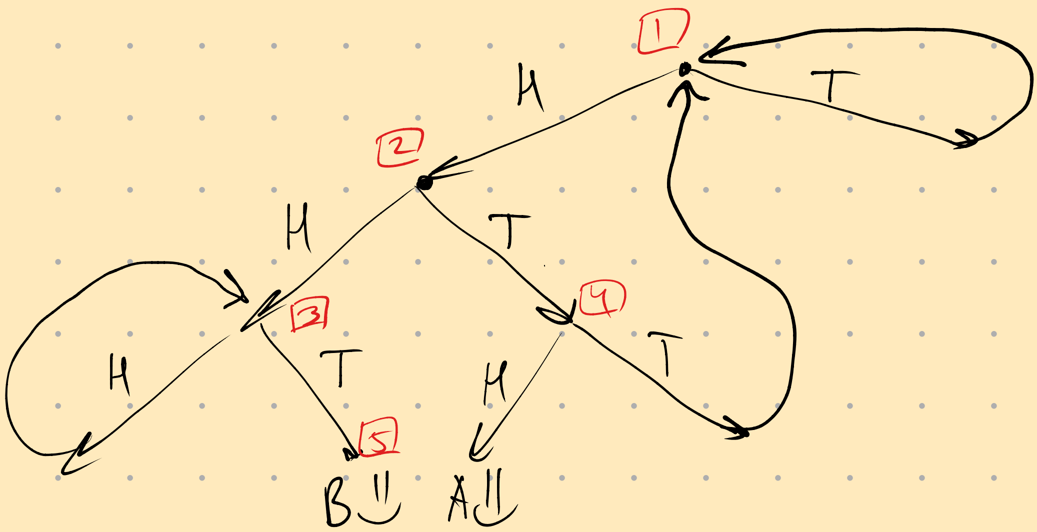


$$a_i = P(A\ \text{поб} \mid \text{старт в } \boxed{i})$$

Метод первого шага

$$\begin{cases} a_2 = \frac{1}{2} \cdot a_4 \\ a_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} a_2 \end{cases}$$

$$a_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} a_4$$
$$\frac{3}{4} a_4 = \frac{1}{2}$$
$$a_4 = \frac{2}{3}$$
$$a_2 = \frac{1}{3}$$



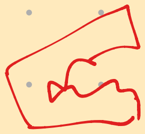
$\boxed{3} \sim \boxed{5}$

$\boxed{a_3 = 0}$

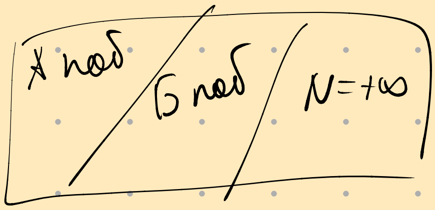
$\boxed{1} \sim \boxed{2}$

$a_1 = a_2$

$$a_1 = P(A\ \text{поб} \mid \boxed{1}) = \frac{1}{3}$$

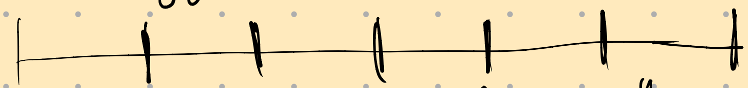


$\Omega = \{А \text{ поб}\} \cup \{Б \text{ поб}\} \cup \{\text{игра } \infty \text{ долго}\}$



$P(N=+\infty) \overset{?}{=} 0$

→ не будем считать поб В.

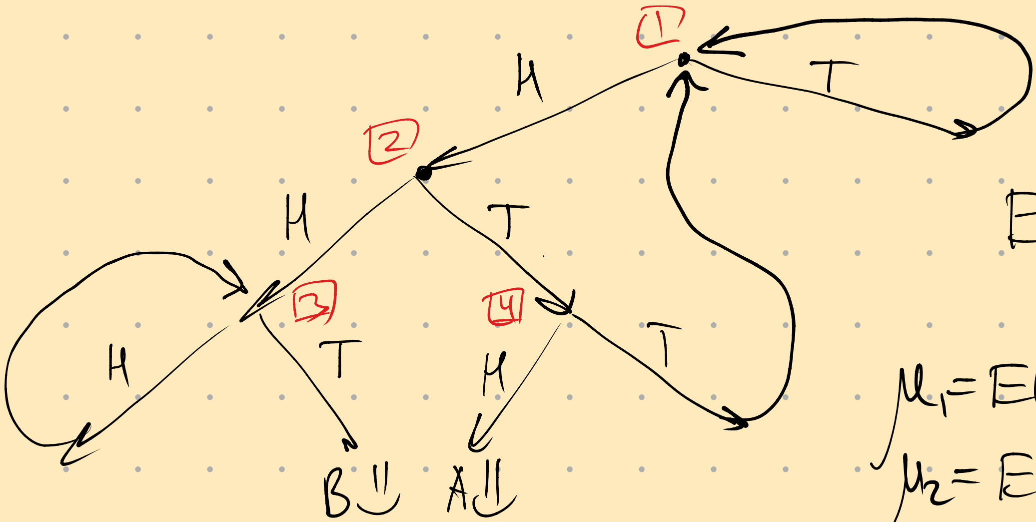
→ 

будем засчит победы А только при $n=3k$

$N' \geq N \qquad P(N'=+\infty) =$

$$= \left(1-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{8}\right)\cdot\ldots = 0$$

$$P(А \text{ поб}) + P(Б \text{ поб}) = 1$$



$E(N) = \mu$

$\mu_1 = E(N \mid \text{старт } \boxed{1})$

$\mu_2 = E(N \mid \text{старт } \boxed{2})$

....

$$\mu_3 = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot(1+\mu_3) \qquad \mu_4 = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}(1+\mu_1)$$

$\boxed{3}\to\boxed{3}$ в среднем $\boxed{3}\to\ldots\to\boxed{k}$

$$\mu_2 = \frac{1}{2}(1+\mu_3) + \frac{1}{2}(1+\mu_4) \qquad \mu_1 = \frac{1}{2}(\mu_2+1) + \frac{1}{2}(\mu_1+1)$$

$$\begin{cases} 2\mu_1 = \mu_2 + \mu_1 + 2 \\ 2\mu_2 = \mu_3 + \mu_4 + 2 \\ 2\mu_3 = \mu_3 + 2 \\ 2\mu_4 = \mu_1 + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \mu_1 = \mu_2 + 2 \\ 2\mu_2 = \mu_4 + 4 \\ \mu_3 = 2 \\ 2\mu_4 = \mu_1 + 2 \end{cases} \Rightarrow \ldots\ldots\ \text{ответ.}$$

$$E(N) = \mu_1$$

---

* разложение СВ в сумму

свойство: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

$E(X) \overset{\text{по опр}}{=} \sum\limits_x x \cdot P(X=x)$ [долго]

$\boxed{\text{использовать}}$

<u>Задача</u>

Маша : 30 пар туфель

пёс Шарик

случайно утащил погрызть 17 туфель [без разбору на лев/прав].

N – кол-во целых пар, оставшихся у М.

а) $N \in \{13, 14, 15, \ldots\ldots, 30-9\}$

$$E(N) = \sum_n n \cdot P(N=n) = 13 \cdot \frac{C_{30}^{17} \cdot 2^{17}}{C_{60}^{17}} + \ldots$$

$$P(N=13) = \frac{C_{30}^{17} \cdot 2^{17}}{C_{60}^{17}}$$

$$N = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_{30}$$

$Y_1 \nearrow 1$, если пара №1 уцелела

$Y_1 \searrow 0$, если пара №1 не уцелела

$Y_{30} \nearrow 1$, если пара №30 ужинала
$\searrow 0$ – . . . – – – –

$\boxed{\text{опр.}}$ СВ, принимающая значения 0 или 1, наз-ся индикатором.

$Y_1, \dots, Y_{30}$ – хитро зависимы
(например, $Y_1 = 1, Y_2 = 1 \dots; Y_{30} = 1$ неверно)

$\boxed{\text{не помеха!}}$ $E(N) = E(Y_1) + \dots + E(Y_{30})$

y	0	1
$P(Y_1 = y)$	$1 - \frac{C_{58}^{17}}{C_{60}^{17}}$	

$$E(Y_1) = 0 \cdot P(Y_1 = 0) + 1 \cdot \frac{C_{58}^{17}}{C_{60}^{17}}$$

$1 - P(Y_1 = 1)$

$$P(Y_1 = 1) = \frac{C_{58}^{17}}{C_{60}^{17}}$$

$E(Y_2)$?

y	0	1
$P(Y_2 = y)$		

$$P(Y_2 = 1) = \frac{C_{58}^{17}}{C_{60}^{17}}$$

$$E(N) = 30 \times \frac{C_{58}^{17}}{C_{60}^{17}}$$

! Мы молодцы!

! можно использовать!
для док-ва комбин. !
тождеств

Условные вер-сти.

идея: новая инфо $\Rightarrow$ пересчёт вер-стей.

x	-2	-1	0	1
$P(X = x)$	0,2	0,3	0,1	0,4
$P(X = x \mid \text{Info})$	0	0	0,2	0,8

$P(X = 1) = 0{,}4$

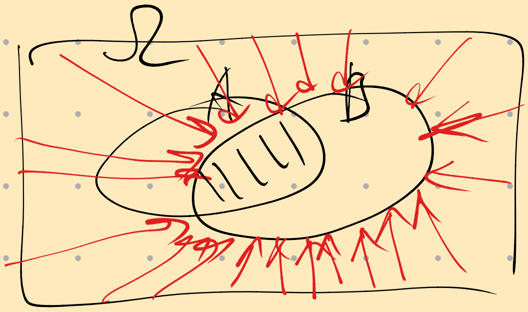
$E(X) = -0{,}4 - 0{,}3 + 0{,}4 = -0{,}3$

$P(X = 1 \mid X \geq 0) = 0{,}8$

$\text{Info} = \{X \geq 0\}$ $\qquad E(X \mid X \geq 0) = 1 \cdot 0{,}8$

* занули вер-ти невозм.

* отмасштаб к 1 оставшиеся.



B – произошло

A, B – события
X – СВ

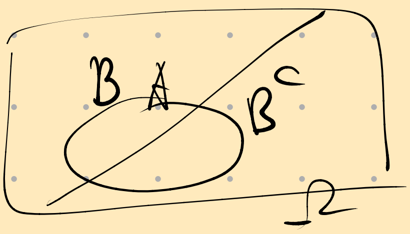
опр. $$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ [если $P(B) > 0$]

I_B – индикатор B

опр. $$E(X \mid B) = \frac{E(X \cdot I_B)}{P(B)}$$

$\boxed{\text{Свойства}}$

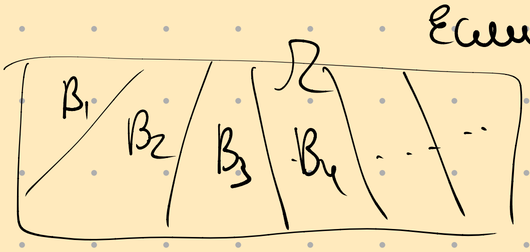
* формула полной вер-сти (law of total probability)



$$\boxed{P(A \mid B) \cdot P(B) = P(A \cap B)}$$

ф-ла полной вер-сти
$$\begin{cases} P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\ P(A) = P(A \mid B) \cdot P(B) + P(A \mid B^c) \cdot P(B^c) \end{cases}$$

обобщение:



Если: $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$

$B_i \cap B_j = \emptyset$ (при $i \neq j$)

$P(B_j) > 0$

то: $$P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A \mid B_j) \cdot P(B_j)$$

формула Байеса. [портрет якобы Байеса → → не его] :)

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B|A)\cdot P(A) + P(B|A^c)P(A^c)}$$

$P(A|B)$ выразили через $P(B|A)$, $P(B|A^c)$

---

* линейность
  X, Y – СВ c – константа
  B – событие

$$E(X+Y|B) = E(X|B) + E(Y|B)$$

$$E(c\cdot X|B) = c\,E(X|B)$$

* формула полного ожидания.

$$E(X) = E(X|B)\cdot P(B) + E(X|B^c)\cdot P(B^c)$$

док-во:

$$E(X) \vee \frac{E(X\cdot I_B)}{P(B)}\cdot P(B) + \frac{E(X\cdot I_{B^c})}{P(B^c)}\cdot P(B^c)$$

$$E(X) \vee E(X\cdot I_B + X\cdot I_{B^c}) = E(X\cdot 1) \quad :)$$

$$I_B + I_{B^c} \overset{?}{=} 1$$

опр события A и B наз-ся независимы,

если $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

Мотивация: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\cdot P(B)}{P(B)} = P(A) \qquad P(B|A) = \ldots = P(B)$$

$$P(A|B) = P(A) \qquad P(B|A) = P(B)$$

опр.

$\mathcal{A}$ – набор событий

набор событий независим в совокупности, если любое событие из $\mathcal{A}$ независимо с любым пересечением остальных событий.

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

A_2 незав $A_3 \cap A_4$

A_3 незав $A_1 \cap A_2 \cap A_4$

...

Пример.

Монетка (прав) 2 раза.

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$$

A_1 = в 1-ый бросок выпала H

A_2 = во 2-ой бросок выпала H

A_3 = результаты бросков идентичные

A_1 незав A_2? да

A_2 незав A_3? да

A_1 незав A_3? да

$\{A_1, A_2, A_3\}$ – незав в сов? нет

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = \underbrace{P(A_1)}_{1/2} \cdot \underbrace{P(A_2)}_{1/2}$$

$$P(A_1 \cap A_3) \overset{?}{=} P(A_1) \cdot P(A_3)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4}$$

$$A_2 \cap A_3 \Rightarrow A_1$$

$$P(A_1 \cap (A_2 \cap A_3)) \neq P(A_1) \cdot P(A_2 \cap A_3)$$