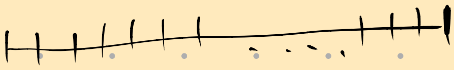
Пуассоновский поток.

* предельный случай биномиального распр-ия.



1 час времени

разбили час на $n >> 0$ равных промежутков

$\boxed{X \sim Bin(n, p)}$ X – кол-во зафиксир-х произошедших событий

$$P(X=k) = C_n^k\, p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$
$$E(X) = np$$
$$Var(X) = np(1-p)$$

λ 0

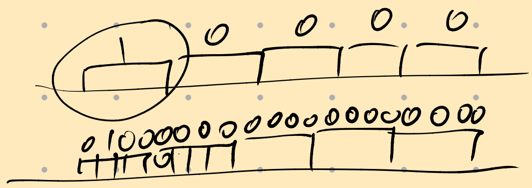
вывести:

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$X_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

$n \to \infty$ здр. смысл

$$\boxed{E(X) = \lambda = const}$$



$n \to \infty$

$$E(X) = np = \lambda = const$$
$$p = \frac{\lambda}{n} \to 0$$

Упр. $\lim P(X=k)$?

$$\lim P(X=2) \;? = \lim_{n\to\infty} C_n^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n-1)}{2} \cdot \frac{\lambda^2}{n^2} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-2} = \frac{\lambda^2}{2} \cdot e^{-\lambda}$$

$a = -\lambda$

зам.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$
$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \to e^a$$

$$P(X=3) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda}$$

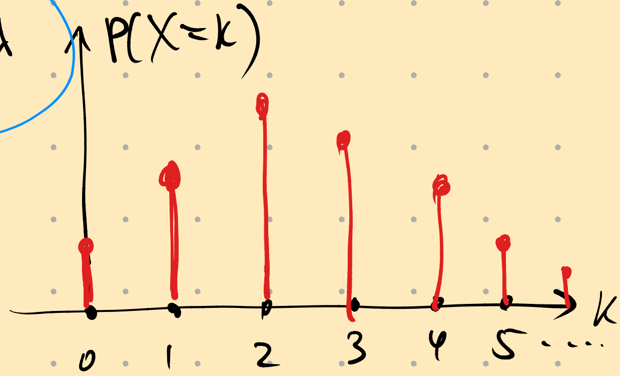
$$P(X=k) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $X \sim Poiss(\lambda)$ распределение Пуассона с параметром/интенсивностью λ

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$E(X) = \lambda$

$Var(X) = \lambda$



$Poiss(\lambda)$ $\{0,1,2,3,4,\dots\}$ — один пар-р

$Bin(n,p)$ $\{0,1,2,\dots n\}$ — 2 параметра

Опр. (X_t) - случайный процесс — набор случ-х величин, проиндексированных неким индексом t.

→ дискретное время: $(X_0, X_1, X_2, \dots\dots)$

→ непрерывное время $(X_t)_{t=0}^{\infty}$

Опр. $t \in [0; +\infty)$ Пуассоновский поток событий с интенсивностью λ.

$(X_t) \sim PP(\lambda)$ — Poisson process.

мотив: X_t — количество „происшествий" за период от 0 до t.

---

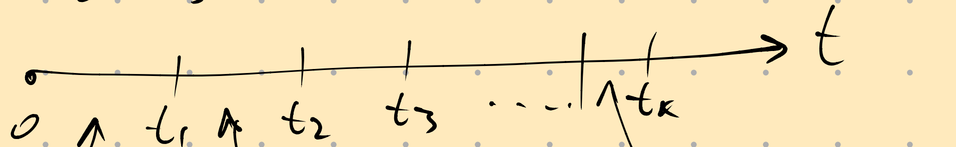
① $X_0 = 0$

② у $\boxed{X_{t+h} - X_t}$ закон распределения зависит только от h.

$P(X_{t+h} - X_t = k)$ - не зависит от t

③ приращения независимы.

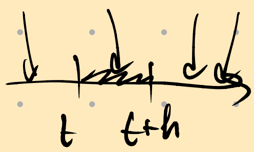
$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots t_k$



СВ: $X(t_1)-X(0)$ $X(t_2)-X(t_1)$ $X(t_k)-X(t_{k-1})$

независимы

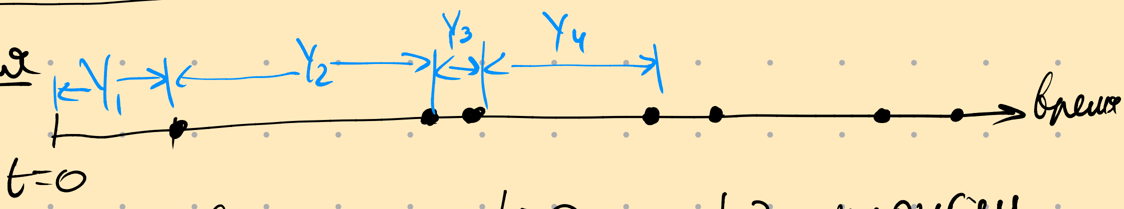
④ За малый интервал времени вер-сть одного происшествия примерно пропор-на длине интервала, а вер-сть 2-х и более происшествий пренебрежимо мала.



$$P(X(t+h)-X(t)=1) = \underline{\lambda\cdot h} + o(h)$$
$$P(X(t+h)-X(t)\geq 2) = o(h)$$

Следствия

①



Y_1 – время от $t=0$ до 1-го происш.

Y_2 – // — 1-го происш. до 2-го происш.

Y_k – // — $(k-1)$-го до k-го происш.

$Y_1, Y_2, Y_3 \ldots$ независимы и имеют $Expo(\lambda)$.

② $X_{t+h} - X_t \sim Poiss(\lambda\cdot h)$

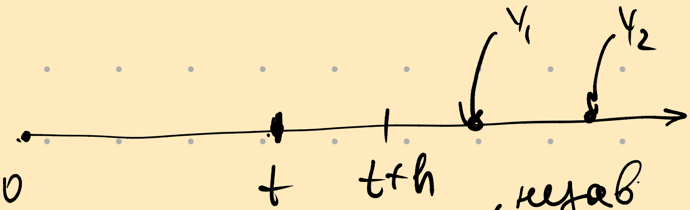
в частности $X_{t+1} - X_t \sim Poiss(\lambda)$

Док-во

$$P(X_{t+h}-X_t=0) = 1 - P(X_{t+h}-X_t \geq 2) - P(X_{t+h}-X_t=1) =$$
$$= 1 - o(h) - \lambda h - o(h) =$$
$$= 1 - \lambda h + o(h).$$

$h \to 0 \quad P(X_{t+h}-X_t=0) \to 1$

$$P(\underbrace{Y_1 > t+h}) =$$



незав

$$= P(\underbrace{X_t - X_0 = 0}, X_{t+h} - X_t = 0) =$$

$$= \underbrace{P(X_t - X_0 = 0)} \cdot \underbrace{P(X_{t+h} - X_t = 0)} =$$

за период от 0 до t было 0 происшеств.

$$= P(Y_1 > t) \cdot (1 - \lambda h + o(h))$$

$$P(Y_1 > a) = 1 - \underbrace{P(Y_1 \le a)} = 1 - F(a)$$

$$1 - P(Y_1 \le t+h) = (1 - P(Y_1 \le t)) \cdot (1 - \lambda h + o(h))$$

$$1 - F(t+h) = \underbrace{(1 - F(t))}_{\in [0;1]} \cdot (1 - \lambda h + o(h))$$

$$1 - F(t+h) = 1 - F(t) - \lambda h + F(t) \cdot \lambda h + o(h)$$

$$\boxed{o(h) \cdot q = o(h), \quad q \in [0;1]}$$

$$F(t+h) - F(t) = \lambda \cdot h - F(t) \cdot \lambda h + o(h)$$

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \lambda - F(t) \cdot \lambda + \frac{o(h)}{h} \qquad h \to 0$$

$$\boxed{F'(t) = \lambda - F(t) \cdot \lambda + 0}$$

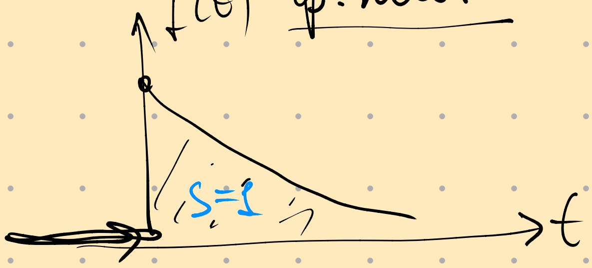
$F(t)$ ф. распр.

$$\Big\downarrow \frac{d}{dt}$$

$F'(t) = f(t)$ ф. плотн.

$$F''(t) = -F'(t) \cdot \lambda$$

$$\boxed{f'(t) = -\lambda \cdot f(t)}$$



$$\hookrightarrow f(t) = c\cdot\exp(-\lambda t)$$

$$\boxed{\int_0^\infty f(t)\,dt = 1}$$

$$\int_0^\infty c\cdot\exp(-\lambda t)\,dt = 1$$

$$c\cdot\frac{1}{\lambda} = 1$$

$$c = \lambda$$

$$Y_1 \sim Expo(\lambda).$$

$$\boxed{f(t) = \begin{cases} \lambda\cdot e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}}$$

$$\underbrace{P(X_t = 0)}_{\text{за } [0;t] \text{ было 0 происш.}} = \underbrace{P(Y_1 > t)}_{\text{первое происш. произошло позже } t} = \int_t^{+\infty} \lambda\cdot\exp(-\lambda u)\,du = e^{-\lambda t}$$

$$P(X_t = 1) \overset{?}{=}$$

$$P(X_{t+h} = 1) =$$

$$= P(X_t = 1, \underbrace{X_{t+h} - X_t = 0}_{\text{аксн4}}) + P(X_t = 0, \underbrace{X_{t+h} - X_t = 1}_{\text{аксн4}})$$

$$\overset{\text{незав. прир.}}{=} P(X_t = 1)\cdot(1 - \lambda h + o(h)) + P(X_t = 0)\cdot(\lambda h + o(h))$$

$$P(X_{t+h} = 1) = P(X_t = 1)\cdot(1 - \lambda h) + e^{-\lambda t}\cdot\lambda h + o(h)$$

$$P(X_{t+h} = 1) - P(X_t = 1) = -P(X_t = 1)\cdot\lambda h + e^{-\lambda t}\cdot\lambda h + o(h)$$

делим на h и $h \to 0$

$$\frac{P(X_{t+h}=1)-P(X_t=1)}{h} = -P(X_t=1)\cdot\lambda + e^{-\lambda t}\cdot\lambda + \frac{o(h)}{h}$$

$$\boxed{\frac{d\,P(X_t=1)}{dt} = -P(X_t=1)\cdot\lambda + e^{-\lambda t}\cdot\lambda}$$

$$P(X_t=1) = a(t)$$

$$a'(t) = -a(t)\cdot\lambda + e^{-\lambda t}\cdot\lambda$$

догадка

$$a(t) = e^{-\lambda t}\cdot \boxed{c(t)}$$

$$a'(t) = -\lambda\cdot e^{-\lambda t}\cdot c(t) + e^{-\lambda t}\cdot c'(t)$$

$$\cancel{-\lambda e^{-\lambda t}\cdot c(t)} + e^{-\lambda t}\cdot c'(t) = \cancel{-e^{-\lambda t}\cdot c(t)\cdot\lambda} + e^{-\lambda t}\cdot\lambda$$

$$c'(t) = \lambda$$

$$c(t) = \lambda t + d$$

$$P(X_t=1) = a(t) = e^{-\lambda t}\cdot(\lambda t + d)$$

$$t\to 0 \quad P(X_t=1)\to 0 \quad \Rightarrow \quad d=0$$

$$P(X_t=1) = e^{-\lambda t}\cdot\lambda t$$

$Y_1 \sim Expo(\lambda)$

$$P(X_t=0) = e^{-\lambda t}$$

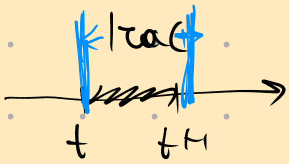
$$P(X_t=1) = e^{-\lambda t}\cdot\lambda t$$

$Y_1, Y_2, Y_3 \ldots \sim$ незав $Expo(\lambda)$

$$P(X_t=k) = e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$X_1 \sim Poiss(\lambda)$

$X_2 - X_1 \sim X_1 \sim Poiss(\lambda)$



$$P(X_{t+1} - X_t = k) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!} \leftarrow Poiss(\lambda)$$

$$P(X_{t+h} - X_t = k) = e^{-\lambda h}\cdot\frac{(\lambda h)^k}{k!} \leftarrow Poiss(\lambda h)$$

---

poisson process

Теорема. Если $(X_t^A) \sim PP(\lambda_A)$ и $(X_t^B) \sim PP(\lambda_B)$ и они независимы, то

$$S_t = X_t^A + X_t^B \sim PP(\lambda_A + \lambda_B)$$

док-во → проверка аксиом!

① $S_0 = X_0^A + X_0^B = 0 + 0$!!

② $S_{t+h} - S_t = \underbrace{X^A_{t+h} - X^A_t} + \underbrace{(X^B_{t+h} - X^B_t)}$

$P(X^B_{t+h} - X^B_t = l)$ зависит от h, но не от t

$P(X^A_{t+h} - X^A_t = k)$ = зависит от h, но не от t

$$\mathbb{P}(\Delta S = 3) = P(\Delta X^A = 0, \Delta X^B = 3) + P(\Delta X^A = 1, \Delta X^B = 2) + P(\Delta X^A = 2, \Delta X^B = 1) + P(\Delta X^A = 3, \Delta X^B = 0)$$

RHS не зависит от t

аксиомы ③ и ④ для (S_t) тоже ок-ся верны.