

1. [10] Величины  $(X_n)$  независимы и одинаково распределены с плотностью  $f(x) = 2 - 2x$  на отрезке  $[0; 1]$ .
  - а) [2] Найди число  $c$  такое, что величина  $X_1$  не превышает  $c$  с вероятностью  $1/4$ .
  - б) [2] Найдите энтропию случайной величины  $X_1$ .
  - в) [2] Найдите совместную энтропию пары  $(X_1, X_2)$ .
  - г) [4] Найдите функцию плотности величины  $Y = \exp(X)$ .
2. [10] Совместная функция плотности вектора  $(X, Y)$  равна  $f(x, y) = 6xy^2$  на квадрате  $[0; 1] \times [0; 1]$  и 0 за его пределами.
  - а) [2] Найдите вероятность  $\mathbb{P}(X > Y > X/2)$ .
  - б) [6] Найдите  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\mathbb{E}(XY)$ ,  $\text{Cov}(X, Y)$ .
  - в) [2] Зависимы ли величины  $X$  и  $Y$ ?

В этой задаче в этот раз можно оставить ответ в виде аккуратно выписанного интеграла :)

3. [10] Глеб Жеглов каждый день ловит одного преступника. С вероятностью 0.2 на преступный путь вместо пойманного преступника встают два новых горожанина. Изначально в городе 1 преступник.

Обозначим за  $T$  день поимки последнего преступника в городе.

- а) [2] Найдите  $\mathbb{P}(T = 4)$ .
  - б) [5] Найдите ожидание  $\mathbb{E}(T)$  и дисперсию  $\text{Var}(T)$ .
  - в) [3] Найдите функцию  $m(u)$ , производящую моменты  $T$ .
4. [10] Эксперт пытается определить, говорит ли подозреваемый правду, с помощью детектора лжи. Если подозреваемый говорит правду, то эксперт ошибочно выявляет ложь с вероятностью 0.2. Если подозреваемый обманывает, то эксперт выявляет ложь с вероятностью 0.9. В деле об одиночном нападении подозревают десять человек, один из которых виновен и будет лгать, остальные — невиновны и говорят правду.

Эксперт выбрал двух подозреваемых, Алису и Боба, наугад.

- а) [3] Какова вероятность того, что детектор покажет, что Алиса лжёт?
  - б) [3] Какова вероятность того, что Алиса невиновна, если детектор показал, что она лжёт?
  - в) [4] Какова вероятность того, что Алиса невиновна, если детектор показал, что она лжёт, и показал, что Боб говорит правду.
5. [10] Алиса выбирает один раз равномерно распределённой число от 0 до 3. Если число оказывается больше 1, то она заменяет его на 2, а затем выплачивает получившуюся величину Бобу. Обозначим  $X$  — выигрыш Боба.
  - а) [5] Найдите  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\text{Var}(X)$ .
  - б) [5] Найдите функцию распределения  $F(x)$  величины  $X$  и постройте её график.

6. [10] У Илона Маска 101 золотая монета. Он подкидывает каждую из них. Пусть  $X$  монеток выпали решкой вверх. Затем Илон повторно подкидывает те монетки, которые лежат орлом вверх. После второго раунда в общей сложности  $Y$  монеток лежат решкой вверх.
- а) [4] Найдите ожидание  $\mathbb{E}(Y)$ , дисперсию  $\text{Var}(Y)$ .
  - б) [3] Найдите наиболее вероятное значение величины  $Y$ .
  - в) [3] Найдите  $\text{Cov}(X, Y)$ .