

Домашнее задание 3

Дедлайн: 2024-10-08, 21:00.

1. В анкету включён вопрос, на который респонденты стесняются отвечать правдиво. Например, «Берёте ли Вы взятки?» или «Употребляете ли Вы наркотики?» Чтобы стимулировать респондентов отвечать правдиво, используют следующий прием. Перед ответом на вопрос респондент в тайне от анкетирующего подкидывает один раз специальную монетку, на гранях которой написано «Да = А, Нет = Б», и «Да = Б, Нет = А». Ответ «Да» на нескромный вопрос является верным для доли p всех людей. Монетка неправильная и выпадает стороной «Да = А, Нет = Б» с вероятностью 0.6.

- Какова вероятность того, что ответ «Да» для данного индивида верен, если он написал «А» и следовал указаниям монетки?
- Какова вероятность того, что ответ «Да» для данного индивида верен, если он подбрасывал специальную монету 3 раза, следовал каждый раз предлагаемой кодировке и написал «А», «Б», «А»?

2. Илон Маск изобрёл новый кубик под названием Model-6. Он взял правильный игральный кубик и правильный кубик с неподписанными гранями. Он подкинул шесть раз правильный игральный кубик и заполнил по очереди все грани изначально чистого кубика результатами бросков правильного кубика.

- Какова вероятность того, что в первом броске Model-6 выпало 6, если во втором броске Model-6 выпало 6?
- Зависимы ли результаты бросков Model-6?
- Чему равно ожидаемое количество шестёрок, выпавших в процессе изготовления Model-6, если при шести бросках Model-6 выпало три шестёрки?

3. Алиса и Боб снова подкидывают монетку неограниченное число раз. Монетка выпадает решкой H и орлом T равновероятно. Алиса выигрывает, если последовательность HNT выпадет раньше, а Боб — если раньше выпадет HTH .

Рассмотрим множество исходов этого эксперимента $\Omega = \{HNT, HTH, HHNT, THNT, THTH, \dots\}$ и производящую функцию исходов $f(H, T) = HNT + HTH + HHNT + THNT + THTH + \dots$. Здесь аргументы H и T некоммутативны. Обозначим X — количество решек H , Y — количество орлов T .

- Укажите, как с помощью производных и подстановок раздобыть из функции $f(H, T)$ величины $\mathbb{P}(X = 10)$, $\mathbb{P}(X = 5, Y = 5)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^3)$, $\mathbb{E}(X^2Y^3)$.
- С помощью метода первого шага составьте систему линейных уравнений, из которой можно найти $f(H, T)$.
- Решите эту систему, предполагая коммутативность H и T .
- Завершите вычисление $\mathbb{P}(X = 10)$, $\mathbb{P}(X = 5, Y = 5)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^3)$, $\mathbb{E}(X^2Y^3)$.

Явное уточнение: конечно, в этой задаче можно использовать `sympy` или другой пакет для символического решения системы или вычисления производных.