Домашнее задание 5

Дедлайн: 2024-10-23, 21:00.

1. Случайная величина X распределена равномерно на $[0; 10]$, $Y = X^2$.

   а) Найдите дисперсию $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$, стандартное отклонение σ_Y.

   б) Найдите $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)$, $\mathbb{C}\mathrm{orr}(X, Y)$.

   в) Найдите $\mathbb{C}\mathrm{ov}(6X + 2Y + 7, -2Y + 15)$, $\mathbb{C}\mathrm{orr}(5 - 6X, 8 + 9Y)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(2Y + 7)$.

   г) Предложите любую неслучайную функцию h такую, что $\mathbb{C}\mathrm{orr}(h(X), X) = 0$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(h(X)) > 0$.

2. Назовём наилучшей линейной аппроксимацией величины Y с помощью величины X функцию вида $\hat{Y} = \alpha + \beta X$, где α и β — константы, при которых величина $\mathbb{E}((Y - \hat{Y})^2)$ минимальна.

   а) Известно, что $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) = 10$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 40$, найдите β.

   б) Дополнительно известно, что $\mathbb{E}(Y) = 10$, $\mathbb{E}(X) = 80$, найдите α.

   Допустим, что $a + bR$ — наилучшая линейная аппроксимация L с помощью R, а $c + dL$ — наилучшая линейная аппроксимация R с помощью L.

   в) Выразите произведение bd через корреляцию $\mathbb{C}\mathrm{orr}(R, L)$.

3. В анализе временных рядов иногда используют концепцию частной корреляции. Частная корреляция между величинами X и Y, очищенными от связи с величиной W, равна обычной корреляции между величинами $X^* = X - \alpha W$ и $Y^* = Y - \beta W$, где константы α и β находятся из условия некоррелированности X^* с W и некоррелированности Y^* с W.

$$\mathrm{pCorr}(X, Y; W) = \mathbb{C}\mathrm{orr}(X^*, Y^*), \text{ где } \begin{cases} X^* = X - \alpha W, & \mathbb{C}\mathrm{ov}(X^*, W) = 0, \\ Y^* = Y - \beta W, & \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y^*, W) = 0. \end{cases}$$

   Величины Y_1, Y_2, Y_3 независимы и равномерны на отрезке $[0; 1]$, $S_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3$.

   Найдите $\mathbb{C}\mathrm{orr}(Y_1, Y_2)$ и $\mathrm{pCorr}(Y_1, Y_2; S_3)$.