Пуассоновский поток.

→ бета и гамма-распределение.

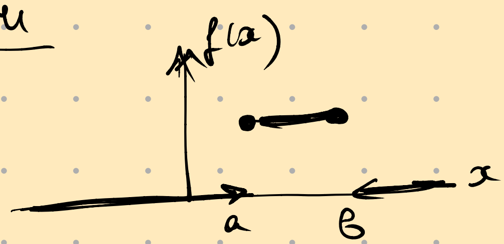
промежуточный итог

дискретные

- **Bin(n,p)**
  - число решек при n бросках монетки
- **Geom(p)**
  - число бросков монетки до 1-ой решки
  - число орлов до 1-ой решки
- **NegBin(r,p)**
  обобщ. геом.
  - число орлов до r решек (не об. подряд)
- **HypGeom(A,N,n)**
  всего N фруктов, из них A яблок; выбираем (без повт) n фруктов
  - кол-во выбранных яблок
- **Pois(λ)**
  - предельный случай Bin(n,p): $n \to \infty$, $p \to 0$, $n \cdot p \to \lambda$
  - при [4 предп PPP]: кол-во происшествий за 1-цу времени

с ф-цией плотности

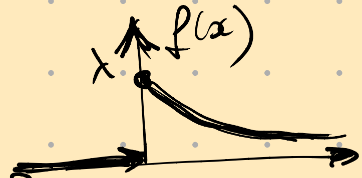
- **Unif[a;b]** равномерное



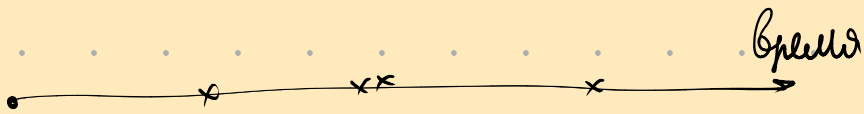
- **Expo(λ)**

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

[время между происш-ями в PP]



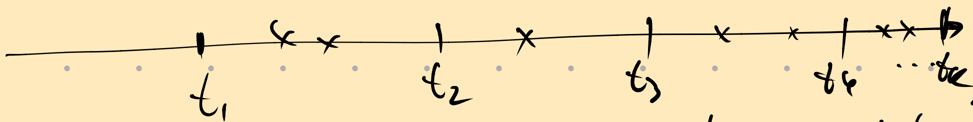
- **Beta**
- **Gamma**



$(X_t) \sim PP(\lambda)$: (X_t) – кол-во „происшествий" на $[0;t]$

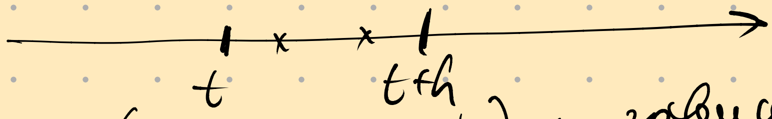
① $X_0 = 0$

② приращения $(X_{t_2} - X_{t_1})$ и $(X_{t_3} - X_{t_2})$ и ... и $(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})$ независимы



$[t_1 \leq t_2 \leq t_3 \ldots \leq t_k]$

③ распределение $X_t - X_s$ зависит только от $(t-s)$



$P(X_{t+h} - X_t = k)$ ← зависит от k, от h, но не от t

(4). • За малый промежуток времени вер-сть 2 и более событий пренебр. мала.

$$\begin{cases} P(X_\Delta = 1) = \lambda\cdot\Delta + o(\Delta) \\ P(X_\Delta \geq 2) = o(\Delta) \end{cases}$$

$\to P(X_\Delta = 0) = 1 - \lambda\Delta + o(\Delta)$

• вер-сть ровно 1-го события примерно пропорц-на длине промеж.

Теорема (1, 2, 3, 4) $\Rightarrow$ $P(X_t = k) = \exp(-\lambda t)\cdot\frac{(\lambda t)^k}{k!}$

$Y_1, Y_2, \dots$ — это время между происш-ями

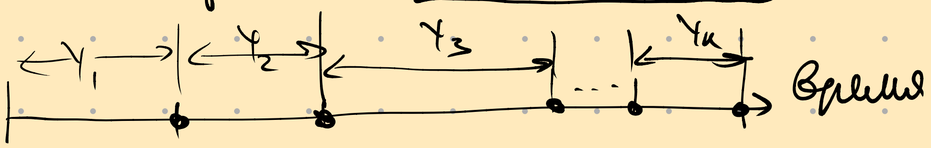
(Y_i) ~ независимы

$Y_i \sim Expo(\lambda)$

• Как распределена сумма $S = \underbrace{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k}$?

$S \in [0; +\infty)$

Гамма



• Как распределены различные доли времени? R?

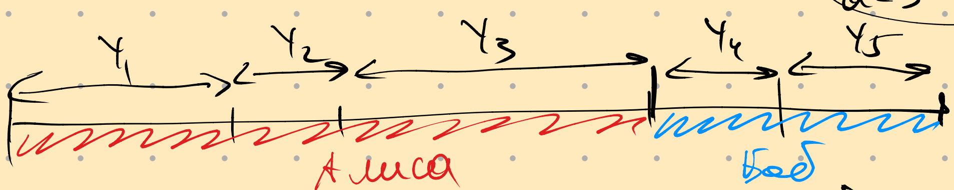
Алиса: a покупателей

Боб: b покупателей.

$R \in [0; 1]$

Beta

a=3 b=2



R = доля времени работы Алисы

$$R = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_a}{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{a+b}}$$

→ дифф. формы — очень удобный инструмент для перехода в другие коорд-ты.

Упр. Y_1, Y_2, Y_3 ~ незав. $\boxed{Expo(\lambda)}$

$\downarrow$

R_1, R_2, S

$S = Y_1 + Y_2 + Y_3$

$R_1 = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} \qquad R_2 = \frac{Y_1 + Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$

$\boxed{f_{R_1, R_2, S}(r_1, r_2, s) \ ?}$

станд. путь (через м-цу якоби)

Шаг 1. $f(y_1, y_2, y_3)$?

Шаг 2. Выражаем y_1, y_2, y_3 через новые: r_1, r_2, s.

Шаг 3. Находим $J = \frac{\partial old}{\partial new}$ $[3 \times 3]$

Шаг 4. $f_{R_1, R_2, S}(r_1, r_2, s) = f(y_1(r_1, r_2, s), y_2(r_1, r_2, s), y_3(r_1, r_2, s)) \cdot |\det J|$

Шаг 1. $f(y_1, y_2, y_3) \overset{\text{незав}}{=} f(y_1) \cdot f(y_2) \cdot f(y_3) = \lambda \cdot \exp(-\lambda y_1) \cdot \lambda \cdot \exp(-\lambda y_2) \cdot \lambda \exp(-\lambda y_3)$

$$f(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} \lambda^3 \cdot \exp(-\lambda y_1 - \lambda y_2 - \lambda y_3) & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Шаг 2 новые через старые:

$$\begin{cases} s = y_1 + y_2 + y_3 \\ r_1 = y_1 / (y_1 + y_2) \\ r_2 = (y_1 + y_2) / (y_1 + y_2 + y_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = y_1 + y_2 + y_3 \\ r_2 \cdot s = y_1 + y_2 \\ r_1 \cdot r_2 \cdot s = y_1 \end{cases}$$

старые через новые:

$$\begin{cases} y_1 = r_1 r_2 s \\ y_2 = r_2 s - r_1 r_2 s \\ y_3 = s - r_2 s \end{cases}$$

недеформально дифференциальная форма

пример.
$$x^2 \cdot y \cdot z \cdot dx \wedge dy + (x^2+y) \cdot dx \wedge dz$$

Свойства.

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

① $\det \begin{pmatrix} | & | & | \\ c & c & c_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = 0$

② $\det \begin{pmatrix} | & | & | \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} | & | & | \\ c_2 & c_1 & c_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$

Свойства.

$$da \wedge da = 0$$

$$da \wedge db = -db \wedge da$$

Упр. $x^2 y z \cdot dx \wedge dy \wedge dz + x^2\, \underbrace{dx \wedge dx \wedge dy}_{=0} + x^3 y\, dy \wedge dx \wedge dz =$

$$= (x^2 y z - x^3 y)\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

Способ смены координат через дифф. формы.

Шаг 1 Напишите
$$f(y_1, y_2, y_3)\, dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3$$

Шаг 2 подставьте $y_1\ y_2\ y_3$ через новые пер-ые.

Шаг 3 Упростите.

Ответ: $f_{R_1 R_2 S}(r_1, r_2, s)\, dr_1 \wedge dr_2 \wedge ds$

$$f(y_1, y_2, y_3) = \lambda^3 \cdot \exp(-\lambda y_1 - \lambda y_2 - \lambda y_3)$$

$$\begin{cases} y_1 = r_1 r_2 s \\ y_2 = r_2 s - r_1 r_2 s \\ y_3 = s - r_2 s \end{cases}$$

подставим в $f(y_1, y_2, y_3)$ и в $dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3$
и перемножим!

$$f(y_1, y_2, y_3) \cdot dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 =$$

$y_1+y_2+y_3$

$$= \underbrace{\lambda^3 \exp(-\lambda(s))}\cdot \boxed{d(\tau_1\tau_2 s)\wedge d(\tau_2 s - \tau_1\tau_2 s)}\wedge$$
$$\wedge\, d(s-\tau_2 s) =$$

$$= \text{упростить!}$$

① $$d(\tau_1\tau_2 s)\wedge d(\tau_2 s - \tau_1\tau_2 s) =$$
$$= d(\tau_1\tau_2 s)\wedge\left(d(\tau_2 s) - d(\tau_1\tau_2 s)\right) =$$
$$= d(\tau_1\cdot\tau_2 s)\wedge d(\tau_2 s) =$$
$$= \left(d\tau_1\cdot\tau_2 s + \tau_1\cdot d(\tau_2 s)\right)\wedge d(\tau_2 s) =$$
$$= \tau_2 s\cdot d\tau_1\wedge d(\tau_2 s)$$

$da\wedge da = 0$
$da\wedge db = -db\wedge da$

② $$dy_1\wedge dy_2\wedge dy_3 = \tau_2 s\cdot d\tau_1\wedge d(\tau_2 s)\wedge d(s-\tau_2 s) =$$
$$= \tau_2 s\, d\tau_1\wedge d(\tau_2 s)\wedge(ds - d(\tau_2 s)) =$$
$$= \tau_2 s\, d\tau_1\wedge d(\tau_2 s)\wedge ds =$$
$$= \tau_2 s\cdot d\tau_1\wedge(d\tau_2\cdot s + ds\cdot\tau_2)\wedge ds =$$
$$= \boxed{\tau_2 s^2\cdot\ d\tau_1\wedge d\tau_2\cdot ds.}$$

$\overset{0}{}$!!

ответ: $f(y_1, y_2, y_3)\, dy_1\wedge dy_2\wedge dy_3 \to f_{R_1R_2S}(\tau_1, \tau_2 s)\cdot d\tau_1\wedge d\tau_2\wedge ds$

ответ: $\boxed{\lambda^3\cdot\exp(-\lambda s)\cdot\tau_2\cdot s^2}\cdot d\tau_1\wedge d\tau_2\wedge ds$

$f_{R_1R_2S}(\tau_1, \tau_2, s)$

Вер-ный итог.

$$f_{R_1R_2S}(\tau_1, \tau_2, s) = \lambda^3\cdot\exp(-\lambda s)\cdot s^2\cdot\tau_2\cdot 1$$

расталось в произведение
$f_S(s) \cdot f_{R_1}(r_1) \cdot f_{R_2}(r_2)$

СВ: R_1, R_2, S независимые.

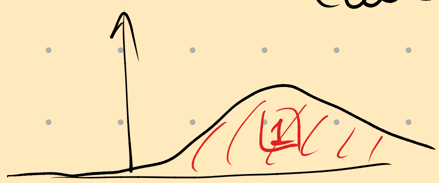
В общем случае?

$S = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_k$

$f_S(s) = const \cdot \exp(-\lambda s) \cdot s^{k-1}$

Определение
СВ S имеет гамма-расп. ие Gamma (λ, k)

если $f_S(s) = \boxed{const} \cdot \exp(-\lambda s) \cdot s^{k-1}$



const?

$$\boxed{\int_0^\infty f_S(s)\, ds = 1}$$

$$const = \frac{1}{\int_0^\infty \exp(-\lambda s) \cdot s^{k-1} ds} =$$

$$= \frac{1}{\int_0^\infty \exp(-t) \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} \frac{dt}{\lambda}} =$$

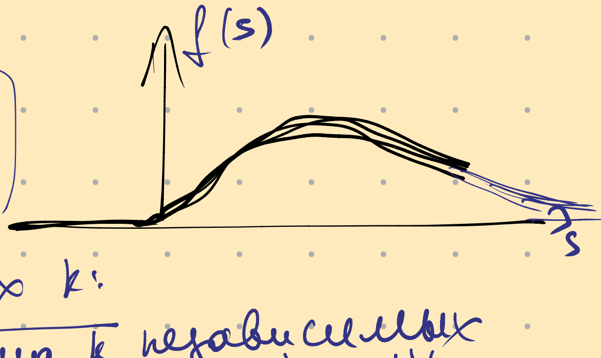
$$\begin{cases} \lambda s = t \\ s = \frac{t}{\lambda} \\ ds = \frac{dt}{\lambda} \end{cases}$$

$$= \frac{\lambda^k}{\boxed{\int_0^\infty \exp(-t) \cdot t^{k-1} dt}}$$

Опр. Гамма функция
$$\Gamma(k) = \int_0^\infty \exp(-t) \cdot t^{k-1} dt.$$

Опр
$S \sim$ Gamma (λ, k)

$$f(s) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \cdot \exp(-\lambda s) \cdot s^{k-1}$$



смысл?

$\lambda > 0$
$k > 0$

при натур-х k:
S - сумма k независимых $Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_k$

$Y_i \sim expo(\lambda)$

Теорема. $\left(\begin{matrix}\lambda>0\\ k>0\end{matrix}\right)$

$$E(S) = E(Y_1+Y_2+\dots+Y_k) = k\cdot E(Y_1) = k\cdot\frac{1}{\lambda}$$

[док-во для $k\in\mathbb{N}$

[результат верен для $k>0$]

$$Var(S) = Var(Y_1+\dots+Y_k) = k\cdot Var(Y_1) = k\cdot\frac{1}{\lambda^2}$$

незав