Видно / слышно?

Лекция 6

Граница Крамера-Рао (Рао-Крамера)

„Слишком хороших оценок не бывает"

классич. подход: θ - неизв-ный пар-р [конст]

$\hat{\theta}$ - оценка неизвестного θ

/не обяз. макс. правдоподобия/

$E(\hat{\theta}) = m(\theta)$ м. быть $\neq \theta$

$\boxed{\text{Цель: какова нижняя граница для } Var(\hat{\theta})\text{?}}$

$$MSE(\hat{\theta}) = (\underbrace{E(\hat{\theta}) - \theta}_{\text{смещение}})^2 + \underbrace{Var(\hat{\theta})}_{\text{дисперсия}}$$

Простой факт: $Corr(X,Y) \in [-1;1]$?

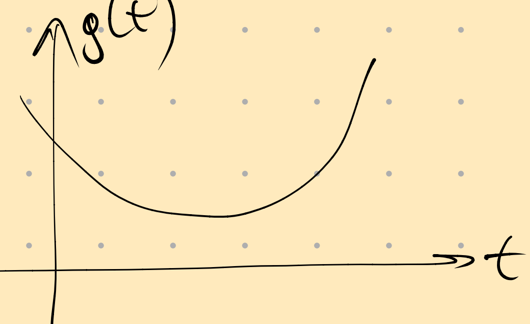
$Corr(X,Y) \xleftrightarrow{\text{аналог}} \cos(\vec{a},\vec{b})$

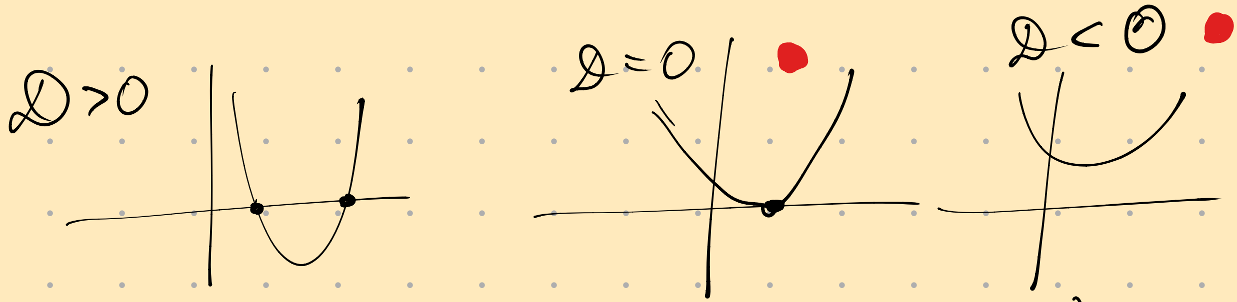
$\boxed{\text{форм-ка}}$

$$g(t) = Var(X+t\cdot Y) = Var(X) + t^2\cdot Var(Y) + 2t\cdot Cov(X,Y)$$

$Var(S) = E((S-E(S))^2)$

1. $g(t)$ - квадр. по t (парабола)
2. $g(t) \geq 0$
3. $Var(Y) \geq 0$ ветви вверх





$$\boxed{D \le 0}$$

$$g(t) = t^2 \cdot \underbrace{Var(Y)} + t \cdot \underbrace{2 \cdot Cov(X,Y)} + \underbrace{Var(X)}$$

$$D = \text{„}b^2 - 4ac\text{"} = 4\,Cov^2(X,Y) - 4\,Var(X) \cdot Var(Y)$$

$$\longrightarrow \quad Cov^2(X,Y) \le Var(X) \cdot Var(Y)$$

$$\frac{Cov^2(X,Y)}{Var X \cdot Var Y} \le 1$$

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var X \cdot Var Y}} \in [-1;1] \quad !!$$

$\hat{\theta}$ – произв-ая оценка (!) $\hat{\theta}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$f(y_1, y_2, \ldots, y_n \mid \theta) \leftarrow$ совм. ф-ция плотности
/с вер-стью аналогично, только Σ вместо $\int$

$l(\theta) = \ln L = \ln f(y_1, \ldots, y_n \mid \theta)$ – лог-функция правдоподобия.

$$Corr^2\left(\hat{\theta}, \frac{\partial l}{\partial \theta}\right) \le 1$$

произв. оценка

θ – скаляр.

$$Var\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right) = I_F$$

$$Var(\hat{\theta}_{ML}) \cdot Var\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right) \to 1$$

?

$$Var(\hat{\theta}_{ML}) \cdot I_F \to 1$$

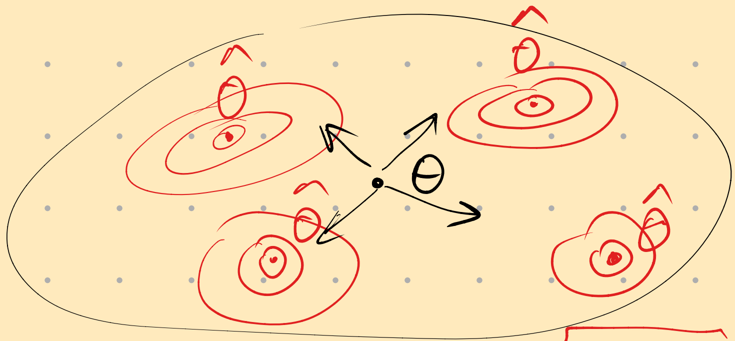
$$\frac{\mathrm{Cov}^2\left(\hat{\theta}, \frac{\partial l}{\partial \theta}\right)}{\mathrm{Var}(\hat{\theta}) \cdot \mathrm{Var}\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right)} \le 1$$

$$\boxed{\underbrace{\mathrm{Var}(\hat{\theta})}_{\text{(любая!)}} \geq \frac{\mathrm{Cov}^2\left(\hat{\theta}, \frac{\partial l}{\partial \theta}\right)}{\mathrm{Var}\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right)} = \frac{\mathrm{Cov}^2\left(\hat{\theta}, \frac{\partial l}{\partial \theta}\right)}{I_F}}$$

Граница Крамера-Рао

$$\mathrm{Cov}\left(\hat{\theta}, \frac{\partial l}{\partial \theta}\right) = E\left(\hat{\theta} \frac{\partial l}{\partial \theta}\right) - \underbrace{E(\hat{\theta})}_{m(\theta)} \cdot \underbrace{E\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right)}_{\boxed{E\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right) = 0.}} =$$

инт.



$$= E\left(\hat{\theta} \cdot \frac{\partial l}{\partial \theta}\right) = \int\int\int\ldots\int_{y_1 \ldots y_n} \boxed{\hat{\theta} \cdot \frac{\partial l}{\partial \theta}} \cdot \underbrace{f(y_1 \ldots y_n)}_{\text{плотн.}} \, dy_1 \ldots dy_n$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = \frac{\partial \ln f}{\partial \theta} = \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

$$\mathrm{Cov}\left(\hat{\theta}, \frac{\partial l}{\partial \theta}\right) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta} \cdot \cancel{\frac{1}{f}} \frac{\partial f}{\partial \theta} \cancel{f} \, dy =$$

$dy \leftarrow dy_1 \, dy_2 \ldots dy_n$

f - зависит от $y_1 \, y_2 \ldots y_n, \underline{\theta}$

$\hat{\theta}$ - зависит только от $y_1 \ldots y_n$

(!) $\hat{\theta}$ не зависит от θ /как функция/

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d}{d\theta}\left(\hat{\theta}\cdot f\right) dy \underset{\text{услов. регул.-сти}}{=} \frac{d}{d\theta} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}\cdot f\, dy = \frac{d}{d\theta} E(\hat{\theta}) = \frac{d\, m(\theta)}{d\theta}$$

$$\frac{d\,m(\theta)}{d\theta} = Cov\left(\hat{\theta}, \frac{\partial l}{\partial \theta}\right)$$

$$\boxed{\text{Граница Крамера – Рао.}}$$

$$Var(\hat{\theta}) \geqslant \frac{(m'(\theta))^2}{I_F} \qquad m(\theta) = E(\hat{\theta})$$

В частном случае,
если: $\hat{\theta}$ – несмещённая оценка для θ, $E(\hat{\theta}) = \theta$

$$m'(\theta) = \theta' = 1$$

то: $Var(\hat{\theta}) \geqslant \frac{1}{I_F}$ (!!)

любая оценка

у макс. правд.

$$Var(\hat{\theta}_{ML}) \cdot I_F \to 1$$

оценка мет. макс. правд.

Комменты:

1. Теорема Крамера-Рао не даёт гарантии, что оценка, дости-я нижнюю границу существует.

2. полезный факт:

$\hat{\theta}$ линейно выражается через $\frac{\partial l}{\partial \theta}$ $\iff$ $Corr\left(\hat{\theta}, \frac{\partial l}{\partial \theta}\right) = \pm 1$ $\iff$ $Var(\hat{\theta}) = \frac{(m'(\theta))^2}{I_F}$

произв.

легко проверить!

Упр $y_1, y_2, \dots y_n \sim$ незав Poiss(rate $= \lambda$)
λ - неизв. пар-р.

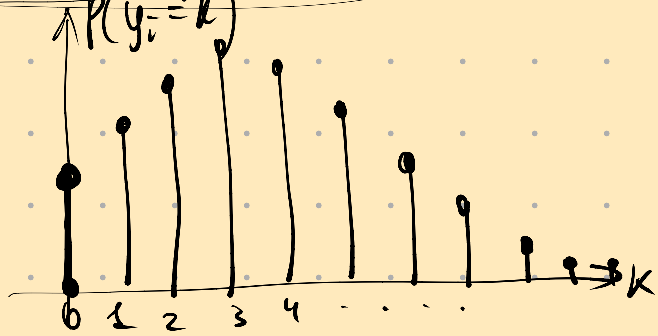
$$\hat{\lambda} = \frac{y_1 + y_2 \dots + y_n}{n}$$

а) $\hat{\lambda}$ - несмещенная?

б) достигает ли $\hat{\lambda}$ границу Крамера-Рао?

Реш $y_i \sim Poiss(\lambda)$

$$P(y_i = k) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}$$



$E(y_i) = \lambda$

$Var(y_i) = \lambda$

а) $E(\hat{\lambda}) = E\left(\frac{y_1 + \dots + y_n}{n}\right) =$

$$= \frac{E(y_1) + E(y_2) + \dots + E(y_n)}{n} = \frac{\lambda + \dots + \lambda}{n} =$$

$$= \lambda$$

$\hat{\lambda}$ - несмещённая

неравенство Крамера-Рао: $Var(\hat{\lambda}) \geq \frac{1}{I_F}$

б) путь крестьянина: $Var(\hat{\lambda})$?
I_F? $= Var\left(\frac{\partial \ell}{\partial \lambda}\right) = -E\left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda^2}\right)$
проверять нер-во.

путь самурая: правда ли, что $\hat{\lambda}$ линейно зависит от $\frac{\partial \ell}{\partial \lambda}$?

пуристски: y_i^R - с.в. y_i - конст по конкр. выборке.

$$L(y_1 \dots y_n|\lambda) = P(y_1^R = y_1, y_2^R = y_2, \dots, y_n^R = y_n|\lambda) =$$

$$= P(y_1^R = y_1|\lambda)\cdot P(y_2^R = y_2|\lambda)\cdot \ldots \cdot P(y_n^R = y_2|\lambda) =$$

независим. наблюд.

$$= \boxed{\exp(-\lambda)\cdot\frac{\lambda^{y_1}}{y_1!}\cdot\exp(-\lambda)\cdot\frac{\lambda^{y_2}}{y_2!}\cdot\ldots\cdot\exp(-\lambda)\cdot\frac{\lambda^{y_n}}{y_n!}}$$

$$\ell(\lambda) = \ln L = -\lambda + y_1\cdot\ln\lambda - \ln(y_1!)$$
$$-\lambda + y_2\cdot\ln\lambda - \ln(y_2!)$$
$$\ldots$$
$$-\lambda + y_n\cdot\ln\lambda - \ln(y_n!)$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial\lambda} = -1 + y_1/\lambda \; -1 + y_2/\lambda \; -1 + y_3/\lambda \ldots -1 + y_n/\lambda$$

$$= -n + \frac{\sum y_i}{\lambda}$$

СВ

$$\frac{\partial^2\ell}{\partial\lambda^2} = -\frac{\sum y_i}{\lambda^2}$$

неслуч.

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum y_i}{n}$$

С.В.

обяз-но не должно быть λ

неслуч.

$$\boxed{\hat{\lambda} = \frac{\lambda}{n}\cdot\left(\frac{\partial\ell}{\partial\lambda}\right) + \lambda}$$

м. быть λ.

$$\hat{\lambda} = \alpha\frac{\partial\ell}{\partial\lambda} + \beta$$

С.В.

неслуч.

$\hat{\lambda}$ достигает границу Крамера-Рао ✓

путь крестьянина:

$$Var(\hat{\lambda}) = Var\left(\frac{y_1 + \dots + y_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} n \cdot Var(y_1) =$$
$$= \frac{n}{n^2} \cdot \lambda = \frac{\lambda}{n}$$

$$I_F \to Var\left(\frac{\partial \ell}{\partial \lambda}\right)$$
$$I_F \to -E\left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda^2}\right) = -E\left(-\frac{\sum y_i}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{\lambda^2} E\left(\sum y_i\right) =$$
$$= \frac{1}{\lambda^2} \cdot n \cdot \lambda = \frac{n}{\lambda}$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda^2} = -\frac{\sum y_i}{\lambda^2}$$

$$Var(\hat{\lambda}) \geqslant \frac{1}{I_F}$$

$$\frac{\lambda}{n} = Var(\hat{\lambda}) = \frac{1}{I_F} = \frac{1}{n/\lambda}$$

(sufficient statistic)

достаточная статистика.

класич. подход: $y_1 \dots y_n$ → цель: сохранить не всю выборку, а только релевантную(?) инфо из нее.

θ - неизв пар-ра

Опр. $T(y_1 \dots y_n)$ наз-ся достаточной статистикой [$T(y_1 \dots y_n)$ м. быть скаляр или вектор] для неизвестного пар-ра θ, если

усл. закон распр $(y_1, y_2 \dots y_n | T)$ не зависит от θ.

Теорема [Нейман – Фишер] о факторизации.

формулировка 1! Функция $T(y_1 \dots y_n)$ является дост-ой статистикой, если и только если $\hat{\theta}_{ML}$ выражается через T.

формулировка 2 Функция $T(y_1 \dots y_n)$ является дост-ой статистикой, если и только если

$$f(y_1 \dots y_n | \theta) = a(y_1 \dots y_n) \cdot b(\theta, T(y_1 \dots y_n))$$

$\boxed{\text{Пример.}}$ $y_1, \ldots, y_n \sim Pois(\lambda)$

$$f(y_1 \ldots y_n \mid \theta) = \frac{\exp(-\lambda n) \cdot \lambda^{y_1 + \ldots + y_n}}{y_1! \, y_2! \cdots y_n!} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{y_1! \, y_2! \, y_3! \cdots y_n!}}_{a(y_1 \ldots y_n)} \cdot \underbrace{\exp(-\lambda n) \cdot \lambda^{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}}_{b(\theta, T)}$$

$T(y_1, \ldots y_n) = y_1 + \ldots + y_n$ — дост-ая статистика.

$$\ell = \underbrace{\ln a(y_1 \ldots y_n) - \lambda n + T(y_1 \ldots y_n) \cdot \ln \lambda}_{} \to \max_{\lambda}$$

$\hat{\lambda}_{ML} =$ функция от $T(y_1 \ldots y_n)$