

Домашнее задание 6

Дедлайн: 2025-06-18, 23:59.

Оцениваемые задачи:

1. Случайные величины y_1, \dots, y_n независимы и одинаково распределены с $\mathbb{P}(y_i = 1) = p$ и $\mathbb{P}(y_i = 0) = 1 - p$. Рассмотрим бутстрэп-выборку y_1^*, \dots, y_n^* .
 - а) Найдите $\mathbb{P}(y_1^* = y_1)$ и $\mathbb{P}(y_1^* = y_2^*)$.
 - б) Найдите $\mathbb{E}(y_i^*)$ и $\mathbb{Var}(y_i^*)$.
 - в) Найдите $\mathbb{Cov}(y_1^*, y_2^*)$.
2. Винни-Пух хочет проверить 5 нулевых гипотез. Он посчитал p -значения для каждой из них, $p = (0.03, 0.04, 0.08, 0.15, 0.30)$.
 - а) Какие гипотезы отвергнет алгоритм Холма — Бонферонни, гарантирующий $FWER = 0.2$?
 - б) Какие гипотезы отвергнет алгоритм Беньямини — Хохберга, гарантирующий $FDR = 0.2$?

Неоцениваемые задачи в удовольствие:

3. Величины y_1, \dots, y_n независимы и одинаково распределены с функцией плотности

$$f(y) = \begin{cases} \exp(a - y) & \text{если } y \geq a, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$
 - а) Найдите оценку неизвестного параметра a методом максимального правдоподобия.
 - б) Какова фактическая вероятность накрытия параметра a при построении наивного бутстрэп доверительного интервала с номинальной вероятностью накрытия 95%?
4. Опишите алгоритм наивного бутстрэпа для построения 95% доверительного интервала для истинной медианы распределения.
5. У исследователя всего две нулевых гипотезы. Каждая из них априорно верно с вероятностью 0.2 независимо от других. При верной отдельной нулевой гипотезы H_j распределение соответствующей ей тестовой статистики непрерывно. Для упрощения будем считать, что если отдельная нулевая гипотеза H_j не верна, то её p -значение в точности равно 0.
 - а) Вспомните, как распределено p -значение при верной нулевой гипотезе.
 - б) Рассмотрим алгоритм Холма — Бонферонни, гарантирующий $FWER = 0.2$. Какова условная вероятность того, что он отвергнет конкретную нулевую гипотезу с известным p -значением равным u ?
 - в) Рассмотрим алгоритм Беньямини — Хохберга, гарантирующий $FDR = 0.2$. Какова условная вероятность того, что он отвергнет конкретную нулевую гипотезу с известным p -значением равным u ?
6. В одном из вариантов бутстрэпа (subsampling bootstrap) в бутстрэп выборку попадает $m < n$ наблюдений без повторов из исходной выборки в n наблюдений. Предположим, что исходные n наблюдений y_1, y_2, \dots, y_n независимы и равномерны $\text{Unif}[0, 1]$. Рассмотрим бутстрэп выборку y_1^*, \dots, y_m^* .

- а) Как распределено y_i^* ?
- б) Найдите $\text{Corr}(y_1^*, y_2^* \mid y_1, y_2, \dots, y_n)$.
- в) Найдите $\text{Corr}(y_1^*, y_2^*)$.