

## Домашнее задание 1

Дедлайн: 2025-02-04, 23:59.

- Случайные величины  $y_i$  независимы и одинаково распределены с  $\mathbb{P}(y_i = 0) = a$ ,  $\mathbb{P}(y_i = 1) = 2a$ ,  $\mathbb{P}(y_i = 2) = 1 - 3a$ . В выборке  $y_1, y_2, \dots, y_n$  оказалось  $N_0$  нулей,  $N_1$  единиц и  $N_2$  двоек.
  - Найдите оценку  $\hat{a}$  параметра  $a$  методом моментов используя  $\mathbb{E}(y_i)$ .
  - Найдите оценку  $\hat{a}$  параметра  $a$  методом моментов используя  $\mathbb{E}(y_i^2)$ .
  - Найдите оценку  $\hat{a}$  параметра  $a$  методом максимального правдоподобия.
- Случайные величины  $y_i$  независимы и нормально распределены  $\mathcal{N}(2a; a)$  с неизвестным параметром  $a$ .
  - Найдите оценку  $\hat{a}$  параметра  $a$  методом моментов используя  $\mathbb{E}(y_i)$ .
  - Найдите оценку  $\hat{a}$  параметра  $a$  методом моментов используя  $\mathbb{E}(y_i^2)$ .
  - Найдите оценку  $\hat{a}$  параметра  $a$  методом максимального правдоподобия.
- В отделении банка 5 клиентских окошек. Время обслуживания каждого клиента имеет экспоненциальное распределение с неизвестной интенсивностью  $\lambda$ . Я был в очереди последним, и когда я встал к освободившемуся окошку номер 5, все остальные окошки ещё обслуживали клиентов. Через 3 минуты обслужили клиента в окошке 3, через 7 минут — клиента в окошке номер 4, а потом я освободился и ушёл.
  - Найдите оценку  $\hat{a}$  параметра  $a$  методом моментов, используя любое математическое ожидание.
  - Найдите оценку  $\hat{a}$  параметра  $a$  методом максимального правдоподобия.

Примечание: если в данной задаче возникает нерешаемое в явном виде уравнение, то, конечно, можно и нужно воспользоваться подходящим численным методом.

## Домашнее задание 2

Дедлайн: 2025-02-23, 23:59.

Оцениваемые задачи:

- Величины  $y_1, y_2, \dots, y_n$  независимы и равномерны отрезке на  $[0; a]$  с неизвестным  $a > 5$ . Никола Тесла хочет оценить неизвестный параметр  $b = \mathbb{P}(y_i > 5)$ .  
Рассмотрим две оценки:  $\hat{b}_n$  — доля наблюдений в выборке, оказавшихся больше 5 и  $\hat{b}'_n = 1 - 2.5/\bar{y}$ .
  - Является ли оценка  $\hat{b}_n$  несмещённой? состоятельной?
  - Является ли оценка  $\hat{b}'_n$  несмещённой? состоятельной?
- Величины  $y_i$  независимы и имеют функцию плотности

$$f(y) = \begin{cases} 3y^2/\theta^3, & \text{если } y \in [0; \theta]; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- а) Найдите оценку  $\hat{\theta}$  неизвестного параметра  $\theta$  методом максимального правдоподобия.
- б) Является ли оценка  $\hat{\theta}$  несмещённой?
- в) Является ли оценка  $\hat{\theta}$  состоятельной?
- г) Найдите функцию плотности оценки  $\hat{\theta}$ .
- д) На какую величину нужно домножить оценку  $\hat{\theta}$ , чтобы она стала несмещённой?

Подсказка: ответ на пункт (б) можно получить без вычислений и интегралов :)

Неоцениваемые задачи в удовольствие:

3. Величина  $Y$  имеет биномиальное распределение  $\text{Bin}(n, p)$ .

- а) Является ли оценка  $\hat{p} = Y/n$  для  $p$  несмещённой? Если является смещённой, то скорректируйте оценку так, чтобы она стала несмещённой.
- б) Чему равна теоретическая дисперсия  $\sigma^2$  величины  $Y$ ?
- в) Является ли оценка  $\hat{\sigma}^2 = n\hat{p}(1 - \hat{p})$  для  $\sigma^2$  несмещённой? Если является смещённой, то скорректируйте оценку так, чтобы она стала несмещённой.

4. Величины  $X_i$  независимы и одинаково распределены с неизвестными  $\mathbb{E}(X_i) = \mu$  и  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ .

Рассмотрим четыре оценки:

$$\hat{\mu}_A = (X_1 + X_2)/2, \quad \hat{\mu}_B = (X_1 + X_2 + X_3)/3, \quad \hat{\mu}_C = 2X_1 - X_2, \quad \hat{\mu}_D = (X_1 + X_2 + \dots + X_{20})/21.$$

- а) Какая из приведенных оценок для  $\mu$  является несмещённой?
  - б) У какой несмещённой оценки самая маленькая дисперсия?
  - в) Выберите наиболее эффективную оценку в этом множестве по критерию  $MSE$ , если  $\sigma = 0.5\mu$ .
5. Величины  $X_1$  и  $X_2$  независимы и равномерны на отрезке  $[0; a]$  с неизвестным  $a$  и  $Y = \min\{X_1, X_2\}$ .
- а) При каком  $\beta$  оценка  $\hat{a} = \beta Y$  для параметра  $a$  будет несмещённой?
  - б) При каком  $\beta$  оценка  $\hat{a} = \beta Y$  для параметра  $a$  будет наиболее эффективной по критерию  $MSE$ ?

6. Величины  $X_i$  независимы и имеют закон распределения

$x$	0	1	$a$
$\mathbb{P}(X = x)$	1/4	1/4	2/4

- а) Постройте состоятельную оценку для неизвестного  $a$ .
- б) Возможно ли в этой задаче построить несмещённую оценку для  $a$ ?