Сем 15

Задача

$Y_1, \dots, Y_n \sim$ незав. один. непр. распр-ные

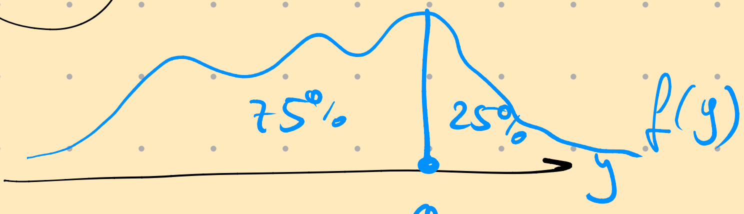
→ довер. инт для q

→ незав. распр y_i → число успех S → изв. распр.

$n = 201$.

а) точечную оценку для 75% квантиля.

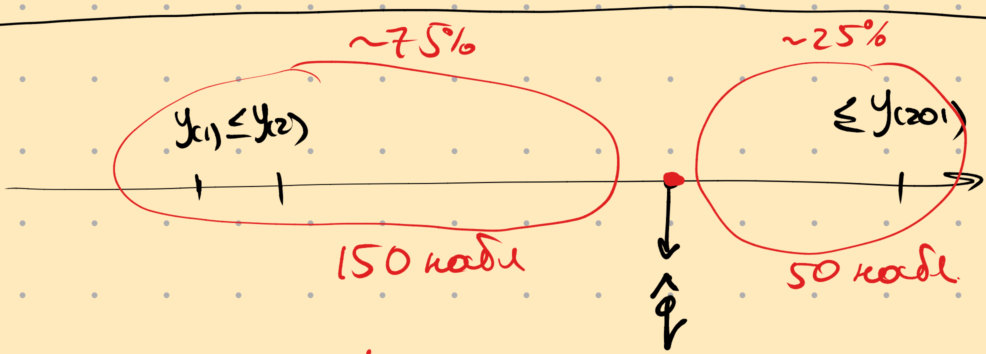
$P(y_i \le q) = 0{,}75$



точечную $\hat{q}$?

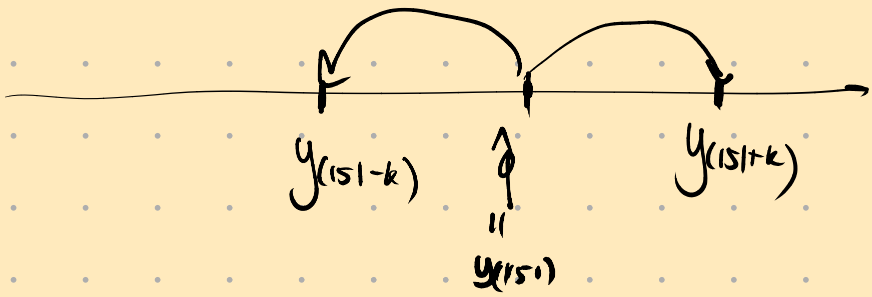
б) 95% интервал для q? [способ описать]

а)



$\hat{q} = y_{(151)}$!!

б)



$$P\left(q \in [y_{(151-k)}; y_{(151+k)}]\right) = 0{,}95$$

$$S = \text{кол-во}\{y_i > q\} = \text{кол-во}\{y_i \ge q\}$$

$$S = I(y_1 > q) + I(y_2 > q) + \dots + I(y_n > q)$$

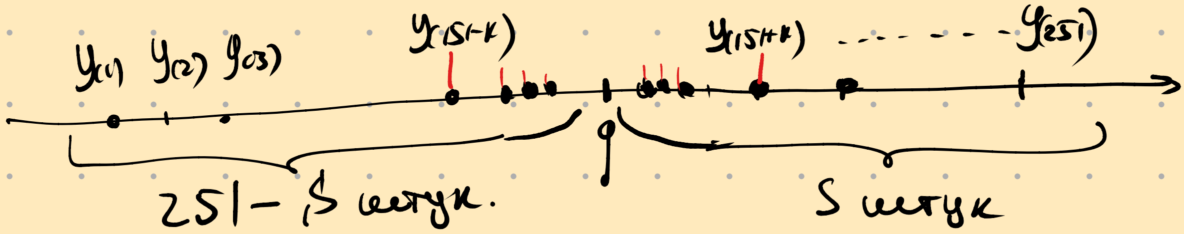
$$S \sim Bin(n = 251, p = 0{,}25)$$

$$E(S) = np = 251 \cdot 0{,}25 \approx 62.8$$

$$Var(S) = np\cdot(1-p) = 251 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 = \approx 47{,}1$$

$$\boxed{S \overset{approx}{\sim} N\left(\frac{251}{4}; \frac{251\cdot 3}{16}\right)}$$

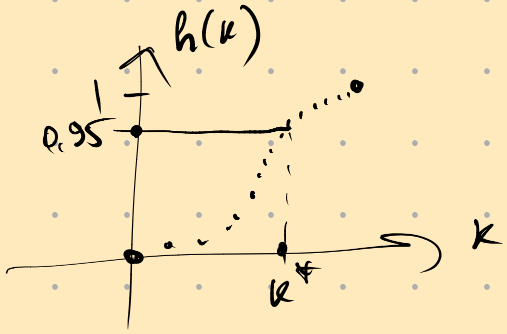
$$q \in [y_{(151-k)}; y_{(151+k)}] \iff S \in \ ?$$



$$\begin{cases} 251 - S \geq 151 - k \\ S \geq 251 - (151+k) + 1 \end{cases}$$

$$h(k) = P(S \in [101-k; 100+k]) = 0{,}95$$

$$\underline{S \sim Bin(n=251, p=\tfrac{1}{4})}$$



$$P\left(\underbrace{\frac{S - 62{,}8}{\sqrt{47.1}}}_{Z=} \in \left[\frac{101-k-62.8}{\sqrt{47.1}}; \frac{100+k-62.8}{\sqrt{47.1}}\right]\right) = 0{,}95$$

$$P\left(Z \in \left[\frac{38.25-k}{\sqrt{47.1}}; \frac{37.25+k}{\sqrt{47.1}}\right]\right) = 0{,}95$$

$$F(u) = P(Z \leq u)$$

$$h(k) = F\left(\frac{37.25+k}{\sqrt{47.1}}\right) - F\left(\frac{38.25-k}{\sqrt{47.1}}\right) = 0{,}95$$

$h(60) = 0{,}999\ldots$ $h(50) = 0{,}956$

$h(45) = 0{,}83\ldots$ $h(49) = 0{,}941$

$$P(q \in [y_{(101)}; y_{(201)}]) \approx 0{,}95$$

разница довер / предсказ. интервалы

задача. классич.

μ, σ^2 – неизв.

$y_1, y_2, \ldots, y_{25} \sim N(\mu; \sigma^2)$ незав

$\bar{y} = 10$ $\quad \dfrac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1} = \hat{\sigma}^2 = 81$

а) CI for μ (довер. для μ) 95%

б) PI for y_{26} (пред. для y_{26}) 95%

в) наск-ко сузи-ся ответы, если считать $\mu = 10$, ~~$\bar{y}=10$~~

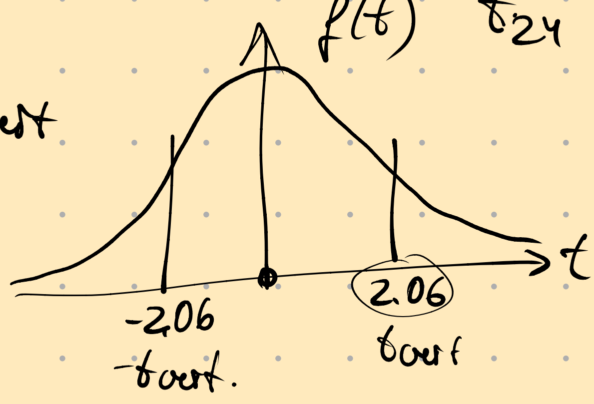
интуиц: какой шире? PI

источники случ-сти: ошибка оценив. → PI; случ. вел-на с буд y_{n+1} → PI; более важная

а)

$$T = \frac{\bar{y} - \mu}{se(\bar{y})} \sim t_{n-1} \quad t_{24} \qquad se(\bar{y}) = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}$$

$$-t_{crit} \le \frac{\bar{y} - \mu}{se(\bar{y})} \le t_{crit}$$



$$-2{,}06 \le \frac{\bar{y} - \mu}{se(\bar{y})} \le 2{,}06$$

μ?

$$\mu \in [\bar{y} - 2.06 \cdot se(\bar{y}); \bar{y} + 2.06 \cdot se(\bar{y})]$$

$$\mu \in \left[10 - 2.06 \cdot \sqrt{\frac{81}{25}}; 10 + 2.06 \cdot \sqrt{\frac{81}{25}}\right]$$

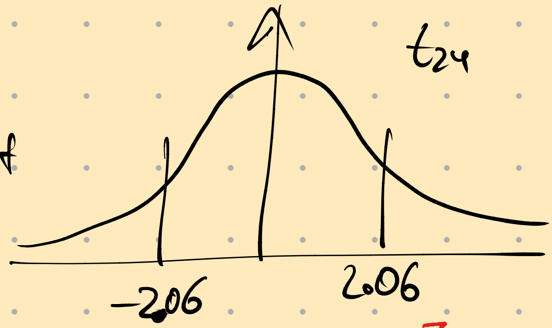
$\mu \in [6.3 ; 13.7]$

а) $T = \frac{\overset{\text{набл}}{\bar y} - \overset{\text{хотим накр.}}{\mu}}{se(\bar y)} \sim t_{n-1}$

se (числит) $= se(\bar y)$, μ - конст

б) $T = \frac{\bar y - y_{26}}{se(\bar y - y_{26})} \sim t_{n-1}$ $\quad \bar y = \frac{y_1 + \dots + y_{25}}{25}$

$-t_{crit} \le \frac{\bar y - y_{26}}{se(\bar y - y_{26})} \le t_{crit}$?



$y_{26} \in [\bar y - 2.06 \cdot se(\bar y - y_{26}) ; \bar y + 2.06 \cdot se(\bar y - y_{26})]$

$\bar y = 10$

$2\,Cov(y_{26}, \bar y)$

$\boxed{Var(\bar y - y_{26})} = Var(\bar y) + Var(y_{26}) + 0 =$

по обуч. выборке по $y_1, y_2 \dots y_{25}$

за пред. обуч. выборки

$= Var\left(\frac{y_1 + \dots + y_n}{n}\right) + \sigma^2 =$

$= \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 + \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \sigma^2 = \boxed{\sigma^2 \cdot \frac{n+1}{n}}$

$se(\bar y - y_{26}) = \sqrt{\hat\sigma^2 \cdot \frac{n+1}{n}} = \sqrt{81 \cdot \frac{26}{25}} = 9 \cdot \frac{\sqrt{26}}{5} \approx 9.18$

PI для y_{26}:

$[10 - 2.06 \cdot 9.18 ; 10 + 2.06 \cdot 9.18]$

$[-8.9 ; 28.9]$

обоснование:

$t = \frac{N(0;1)}{\sqrt{\chi^2_d / d}}$

$N(0;1)$, χ^2_d независ

$\bar{y} - y_{26} \sim N(0; \sigma^2 \frac{26}{25})$

$$\frac{\bar{y} - y_{26}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \cdot \frac{26}{25}}} = \frac{\frac{\bar{y} - y_{26}}{\sqrt{\sigma^2 \cdot \frac{n+1}{n}}}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \cdot \frac{26}{25} / (\sigma^2 \cdot \frac{26}{25})}} = \frac{N(0;1)}{\sqrt{\chi^2_{n-1}/(n-1)}}$$

$$\hat{\sigma}^2/\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{25}(y_i - \bar{y})^2}{(n-1)\cdot\sigma^2} = \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{\sigma^2} / (n-1)$$

если $y_1, \dots, y_n \sim N(\mu; \sigma^2)$
то $\frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

в) $\mu = 10$
Снов CI для μ?

100% CI для μ
$[10; 10]$ длина $= 0$. (раньше длина $= 7{,}4$)

Снов PI для y_{26}?
знаю в (в)

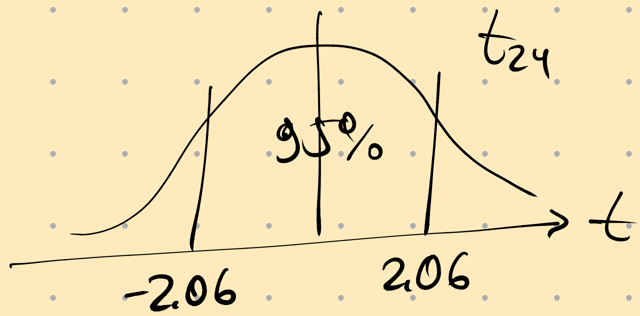
хочу пред. интервал

$$T = \frac{\mu - y_{26}}{se(y_{26})}$$

$se(\text{числит}) = se(y_{26})$

$Var(y_{26}) = \sigma^2$

$$se(y_{26}) = \sqrt{\hat{\sigma}^2} = \sqrt{81} = 9.$$



$$-2.06 \le \frac{10 - y_{26}}{9} \le 2.06$$

$$y_{26} \in [10 - 2.06 \cdot 9;\ 10 + 2.06 \cdot 9]$$

PI: $y_{26} \in [-8.54; 28.54]$

новая длина PI $= 37.1$

в мире роз-х пони
искусств. сит. с изв-м $\mu = 10$

честно с оценкой $\bar{y}$:

PI: $y_{26} \in [-8.9; 28.9]$

по честному 8

старая длина PI $= 37.8$