last dance !!

• MDE = minimal detectable effect

минимальный детектируемый эффект.

$n = n_X + n_Y$

$X_1 \ldots X_{n_X}$ $\quad$ $Y_1 \ldots Y_{n_Y}$

n – число наблюдений (всего)

$H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$

$H_A: \mu_Y - \mu_X = \Delta$

$E(X_i) = \mu_X \quad E(Y_i) = \mu_Y$

Опр. MDE – минимальная Δ при к-рой можно провести тест H_0 против H_A при заданных вер-стях ошибки 1-го рода α и 2-го рода β.

- Все с.в. $X_1 \ldots X_{n_X}$, $Y_1 \ldots Y_{n_Y}$ незав.
- (X_i) один. распр.
- (Y_j) одинак. распр
- $n_X = p \cdot n \qquad n_Y = (1-p) \cdot n$

Упр.

- $X_1 \ldots X_{n_X} \sim N(\mu_X, \sigma^2)$
- $Y_1 \ldots Y_{n_Y} \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$

σ^2 одинаковая (для упрощ.)
σ^2 неизвестная

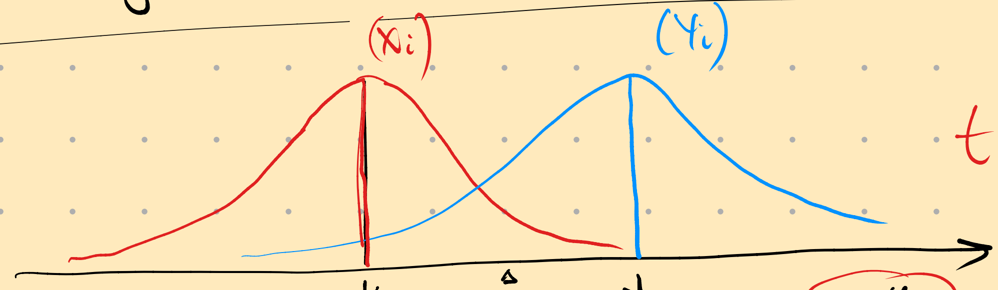
$n = n_X + n_Y \qquad n_X = p \cdot n \qquad n_Y = (1-p) \cdot n.$

$\alpha = 5\% \qquad \beta = 20\%$

$H_0: \mu_X = \mu_Y$

$H_A: \mu_Y - \mu_X = \Delta > 0$

Найдите MDE.



$$t = \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n_X} + \frac{\hat{\sigma}^2}{n_Y}}}$$

из H_0

Статистика: $t = \dfrac{\bar{Y} - \bar{X} - (\mu_Y^{H_0} - \mu_X^{H_0})}{se(\bar{Y} - \bar{X})} \overset{H_0}{\sim} t_{n_x + n_y - 2}$

Тест: если $t \geq t_{crit}$, то H_0 отвергается

$t < t_{crit}$, то H_0 не отвергается.

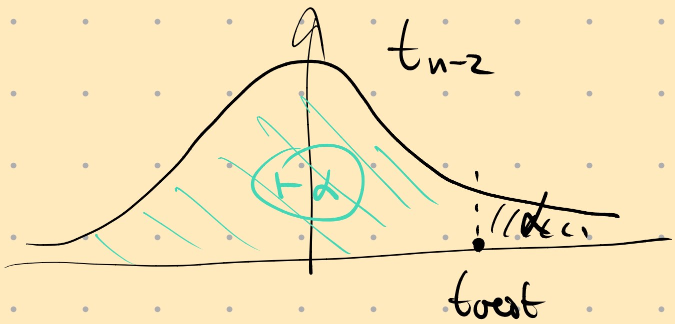
Шаг 1 с помощью t_{crit} обеспечим α!

$\alpha = P(\text{отв } H_0 \mid \underbrace{H_0 \text{ верна}}_{\mu_x = \mu_y})$

$$t = \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{se(\bar{Y} - \bar{X})} \overset{H_0}{\sim} t_{n-2}$$

$$P(t \geq t_{crit} \mid H_0 \text{ верна}) = \alpha$$

$\alpha = 5\%$



$t_{crit} = q_{1-\alpha}$ ← квантиль t распр-ия с $n-2$ степ. свободы.

Шаг 2. С помощью выбора Δ обеспечим $\beta = 0{,}2$.

$$\beta = P(\text{не отвергн. } H_0 \mid H_A \text{ верна})$$

$$\beta = P(t < t_{crit} \mid \underbrace{H_A \text{ верна}}_{\mu_Y - \mu_X = \Delta})$$

$$\beta = P\left(\frac{\bar{Y} - \bar{X}}{se(\bar{Y} - \bar{X})} < t_{crit} \;\middle|\; \mu_Y - \mu_X = \Delta\right)$$

t-распр.

$\to \Delta$ $\quad t_d = \dfrac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2_d}}$

приближении: $\dfrac{\bar{Y}-\bar{X}}{se(\bar{Y}-\bar{X})}$ хорошо аппр-ся норм-м.

[n велико либо σ^2 известна]

$$se(\bar{Y}-\bar{X}) = \sqrt{\widehat{Var}(\bar{Y}-\bar{X})} = \sqrt{\widehat{Var}\,\bar{Y} + \widehat{Var}\,\bar{X}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n_Y} + \frac{\hat{\sigma}^2}{n_X}} = \qquad n_X = p \cdot n, \quad n_Y = (1-p)\cdot n$$

$$= \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n\cdot(1-p)} + \frac{\hat{\sigma}^2}{np}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}\left(\frac{1}{1-p} + \frac{1}{p}\right)} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2 (p + 1 - p)}{np(1-p)}} =$$

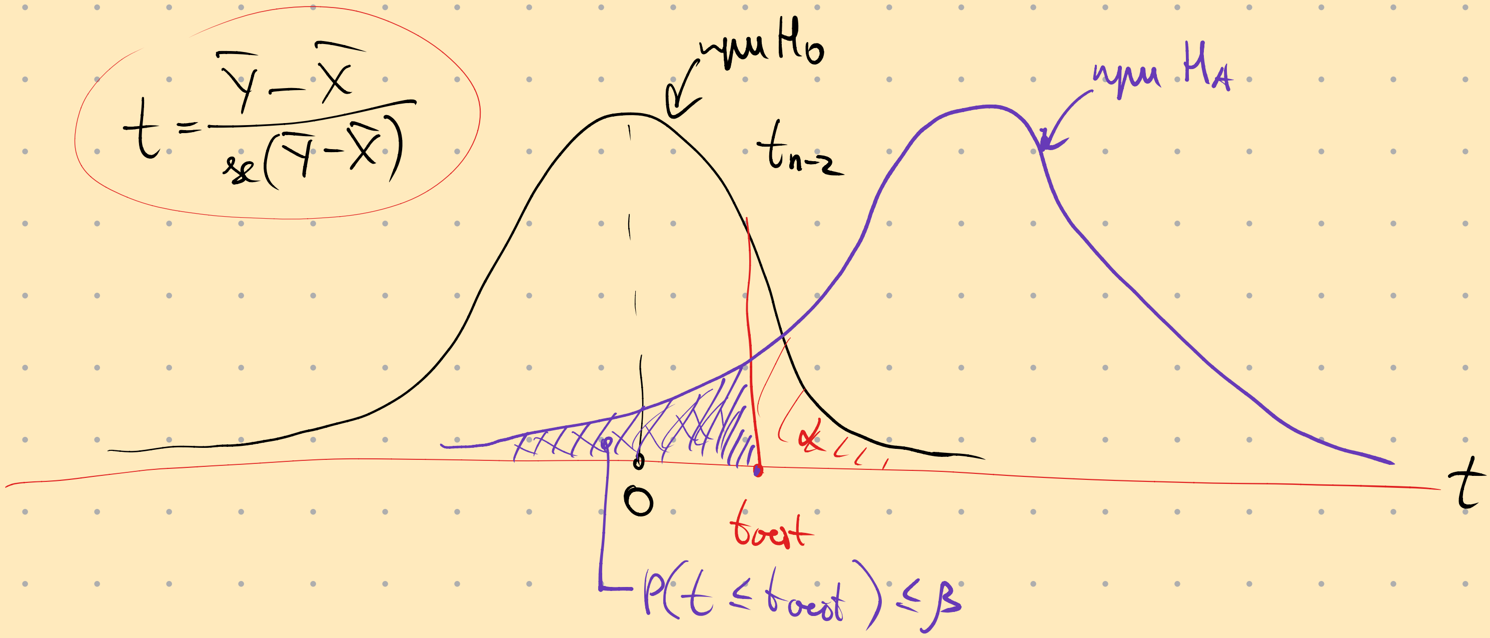
$$= \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{np(1-p)}} \approx \sqrt{\frac{\sigma^2}{np(1-p)}}$$

n велико
σ^2 известно

$$\boxed{P\left(\frac{\bar{Y}-\bar{X}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{np(1-p)}}} \le t_{crit} \,\middle|\, \begin{matrix} H_A \text{ верна} \\ \mu_Y - \mu_X = \Delta \end{matrix}\right) \le \beta}$$

MDE?
min Δ

$$t = \frac{\bar{Y}-\bar{X}}{se(\bar{Y}-\bar{X})}$$



MDE – решение ур-ия

$$P(t \le t_{\text{крит}} \mid H_A) = \beta$$

относит-но Δ.

при упрощ. предп-ии и верной H_A
$$\frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n\,p(1-p)}}} \sim N(?\,; 1)$$

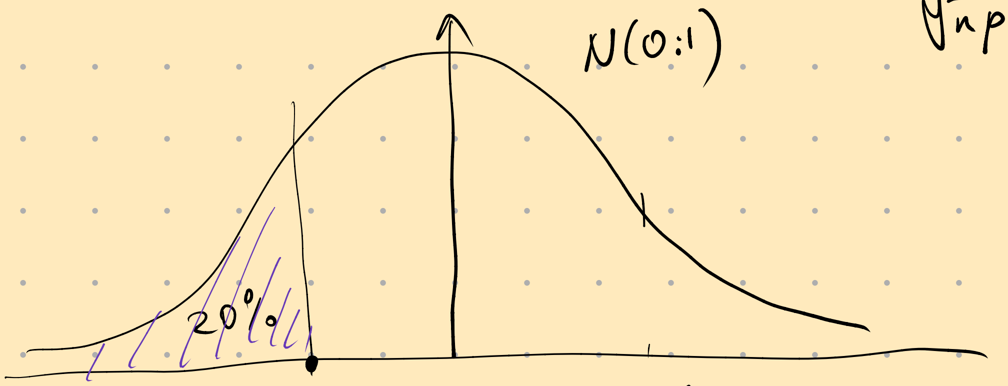
$$E\left(\frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{\dots}} \,\Big|\, H_A\right) = \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n\,p(1-p)}}}$$

$$P(t \le t_{\text{крит}} \mid H_A)$$

$$P\left(t - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{np(1-p)}}} \le t_{\text{крит}} - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\dots}}} \,\Big|\, H_A\right) = \beta.$$

упрощ. предп.

$$P\left(N(0;1) \le t_{\text{крит}} - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{np(1-p)}}}\right) = \beta.$$



$\alpha = 5\%$,
$\beta = 20\%$

$$N_{\text{крит}} = t_{\text{крит}} - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{np(1-p)}}}$$

$$MDE = \sqrt{\frac{\sigma^2}{np(1-p)}} \cdot (t_{\text{крит}} - N_{\text{крит}})$$

$$MDE \approx \sqrt{\frac{\sigma^2}{np(1-p)}} \cdot \left(Q(1-\alpha) - Q(\beta) \right)$$

Q - квантильная ф-ция для $N(0,1)$

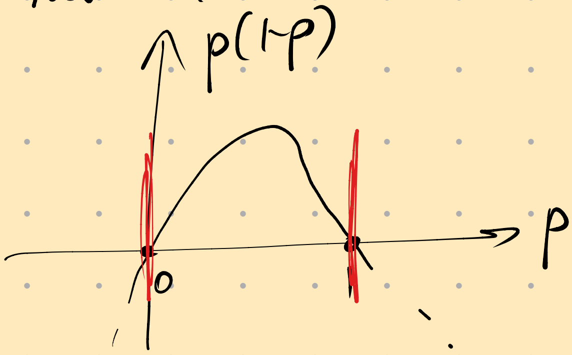
$Q = F^{-1}$

$$MDE \approx \sqrt{\frac{\sigma^2}{np(1-p)}} \cdot \underbrace{\left(Q(1-\alpha) + Q(1-\beta) \right)}_{\approx 2.5}$$

$\alpha = 5\%$ $\beta = 20\%$

доп. нюанс. Какая доля p обеспечивает min MDE?

$p \cdot (1-p)$



min MDE $\Leftrightarrow$ max $p(1-p) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$

Критерий Неймана-Пирсона.

Как при заданном $\alpha = P(\text{отк } H_0 \mid H_0 \text{ верна})$ обеспечить миним-ую $\beta = P(\text{не отв } H_0 \mid H_1 \text{ верна})$.

$H_0: f(x_1 \dots x_n) = f_0(x_1 \dots x_n)$

$H_1: f(x_1 \dots x_n) = f_1(x_1 \dots x_n)$

гипотезы простые

Критерий

оптимальное критическое мн-во K_{opt} имеет вид:

$$K_{opt} = \left\{ (x_1 \dots x_n) \;\middle|\; \frac{f_1(x_1 \dots x_n)}{f_0(x_1 \dots x_n)} \geq c \right\}$$

$x = (x_1 \dots x_n)$

Если:

① H_0 - простая, H_A - простая,

② $K_{opt} = \left\{ (x_1 \dots x_n) \;\middle|\; \dfrac{f_A(x)}{f_0(x)} \geq c \right\}$

③ для заданного α $\exists c$

$$P(X \in K_{opt} \mid H_0 \text{ верна}) = \alpha$$

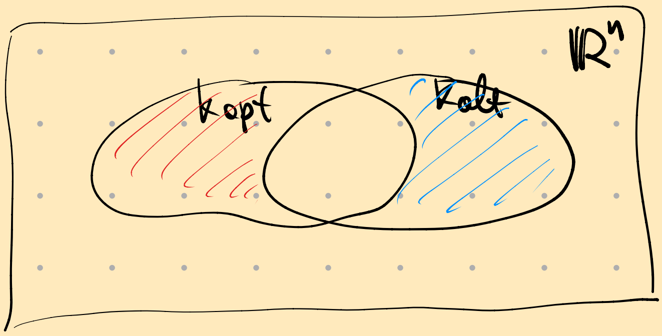
то: для любого другого статистического критерия с критич. областью K_{alt}, т. что $P(X \in K_{alt} \mid H_0 \text{ верна}) = \alpha$

выполнено нер-во:

$$P(X \in K_{opt} \mid H_A \text{ верна}) \geq P(X \in K_{alt} \mid H_A \text{ верна})$$

$$P(\text{отв. } H_0 \text{ исп-я } K_{opt} \mid H_A \text{ верна}) \geq P(\text{отв. } H_0 \text{ исп-я } K_{alt} \mid H_A)$$

док-во:



$K_{opt} \setminus K_{alt} = K_{opt} \setminus K$

$K_{alt} \setminus K_{opt} = K_{alt} \setminus K$

$K = K_{opt} \cap K_{alt}$

Шаг 1

$$P(X \in K_{opt} \setminus (K_{opt} \cap K_{alt}) \mid H_0) = P(X \in K_{alt} \setminus (K_{opt} \cap K_{alt}) \mid H_0)$$

$$\alpha = P(X \in K_{opt} \mid H_0) - P(X \in K_{opt} \cap K_{alt} \mid H_0)$$

$$\alpha = P(X \in K_{alt} \mid H_0) - P(X \in K_{opt} \cap K_{alt} \mid H_0)$$

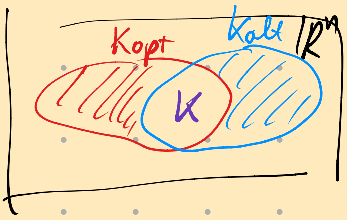
$\Downarrow$

Цель: $P(X \in K_{opt} \mid H_A) \geq P(X \in K_{alt} \mid H_A)$

$$P(X \in K_{opt} \setminus (K_{opt} \cap K_{alt}) \mid H_A) \geq P(X \in K_{alt} \setminus (K_{opt} \cap K_{alt}) \mid H_A)$$

цель: $P(X\in K_{opt}\setminus K\mid H_A) \geq P(X\in K_{alt}\setminus K\mid H_A)$

$$P(X\in K_{opt}\setminus K\mid H_A) =$$ рассм. случай с плотностями



$$= \int_{K_{opt}\setminus K} f_A(x)\,dx \geq \int_{K_{opt}\setminus K} c\cdot f_0(x)\,dx =$$

$$K_{opt} = \left\{x\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \frac{f_A(x)}{f_0(x)} \geq c\right\}$$

шаг 1

$$= c\int_{K_{opt}\setminus K} f_0(x)\,dx = c\cdot P(X\in K_{opt}\setminus K\mid H_0) =$$

$$= c\cdot P(X\in K_{alt}\setminus K\mid H_0) =$$

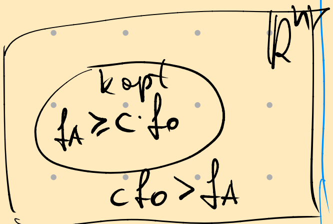
$$= \int_{K_{alt}\setminus K} c\cdot f_0(x)\,dx \geq \int_{K_{alt}\setminus K} f_A(x)\,dx = P(X\in K_{alt}\setminus K\mid H_A)$$

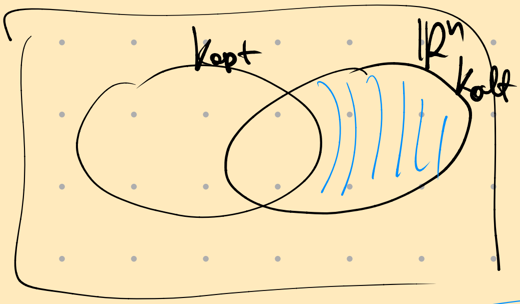
$dx = dx_1\, dx_2 \dots dx_n$

$$K_{opt} = \left\{x\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \frac{f_A}{f_0} \geq c\right\}$$

$$\mathbb{R}^n\setminus K_{opt} = \left\{x\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \frac{f_A}{f_0} < c\right\}$$

$cf_0 > f_A$





$$K_{alt}\setminus K \subseteq \mathbb{R}^n\setminus K_{opt}$$

область $K_{alt}\setminus K$ нах-ся за пределами области K_{opt}.

Итог: $P(X\in K_{opt}\mid H_0) = P(X\in K_{alt}\mid H_0) = \alpha$

$$P(X\in K_{opt}\mid H_A) \geq P(X\in K_{alt}\mid H_A)$$

$X \in K_{opt}$ — условие отвержения H_0 в критерии Неймана-Пирсона

$X \in K_{alt}$ — услов отвержения H_0 в конкурирующем критерии.

Упр. $n=1$ $\quad f(x) = \begin{cases} \gamma x^{\gamma-1}, & x \in [0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$H_0: \gamma = 2$
$H_*: \gamma = 1$

а) найдите критерий, к-рый $\min \beta$ при $\alpha = 0{,}05$

б) какая наим-ая β возможна?

$\alpha = P(\text{отв } H_0 \mid H_0 \text{ верна})$

$\beta = P(\text{не отв } H_0 \mid H_* \text{ верна})$

$$K_{opt} = \left\{ x \,\middle|\, \frac{f_*(x)}{f_0(x)} \geq c \right\}$$

$$K_{opt} = \left\{ x \,\middle|\, \frac{1 \cdot x^{1-1}}{2 \cdot x^{2-1}} \geq c \right\}$$

$$K_{opt} = \left\{ \frac{1}{2x} \geq c \right\}$$

самый лучший [$\min \beta$ при фикс α] критерий имеет вид: отвергнуть H_0, если $\frac{1}{2x} \geq c$ и не отвергнуть H_0 иначе.

$$\alpha = 0{,}05 = P(x \in K_{opt} \mid H_0) = P\left(\frac{1}{2x} \geq c \,\middle|\, H_0\right) =$$

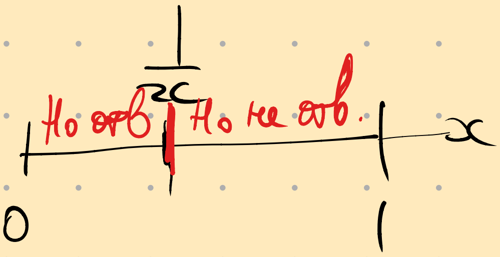
$$= P\left(x \le \frac{1}{2c} \,\middle|\, H_0\right) = \int_0^{1/2c} f_0(x)\,dx =$$

$$= \boxed{\int_0^{1/2c} 2x^{2-1}\,dx = 0{,}05}$$

$$\int_0^{1/2c} 2x\,dx = 0.05$$

$$x^2 \Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{2c}} = 0.05$$

$$\frac{1}{4c^2} = 0.05$$



$$4c^2 = 20$$

$$c^2 = 5$$

$$c > 0 \qquad c = \sqrt{5}$$

Опт критерий: $\begin{cases} \text{если } X \le \frac{1}{2\sqrt{5}}, \text{ то } H_0 \text{ отверг.} \\ \text{если } X > \frac{1}{2\sqrt{5}}, \text{ то } H_0 \text{ не отверг.} \end{cases}$

б) β?

$$\beta = P(\text{не отвергнуть } H_0 \mid H_A \text{ верна}) =$$

$$= P\left(X > \frac{1}{2c} \,\middle|\, H_A\right) = P\left(X > \frac{1}{2\sqrt{5}} \,\middle|\, H_A\right) =$$

$$= \int_{\frac{1}{2\sqrt{5}}}^{1} \underbrace{f_A(x)}_{\gamma=1}\,dx = \int_{\frac{1}{2\sqrt{5}}}^{1} 1 \cdot x^{1-1}\,dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2\sqrt{5}}}^{1} 1\,dx = 1 - \frac{1}{2\sqrt{5}} \simeq 0{,}78$$

Упр.

n наблюдений.

$X_1 \;\ldots\; X_{n/2}$

$Y_1 \;\ldots\; Y_{n/2}$

$n = 2000$

$X_i \in \{0, 1\}$

$Y_i \in \{0, 1\}$

- $X_1 \ldots X_{n/2}, Y_1 \ldots Y_{n/2}$ незав
- $P(X_i = 1) = p_X$
- $P(Y_i = 1) = p_Y$

$H_0: p_X = p_Y$

$H_A: p_Y - p_X = \Delta > 0$

$\alpha = 5\%$

$\beta = 20\%$

MDE?

$\hat{p}_X = 0{,}10$

$\hat{p}_Y = 0{,}12$

решение

Шаг 1 : $\alpha \to z_{crit}$

Шаг 2 : $\beta, z_{crit} \to$ min Δ

Шаг 1

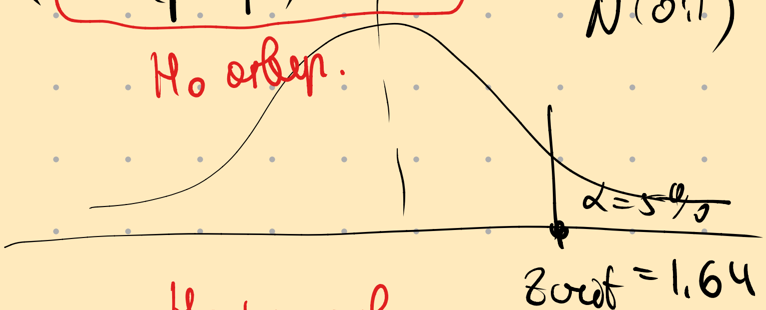
классич тест

$$z = \frac{\hat{p}_Y - \hat{p}_X}{se(\hat{p}_Y - \hat{p}_X)} \xrightarrow[H_0]{n \to \infty} N(0,1)$$

$$P\left(\boxed{\frac{\hat{p}_Y - \hat{p}_X}{se(\hat{p}_Y - \hat{p}_X)} \geq z_{crit}} \,\middle|\, H_0 \right) = \alpha = 5\%$$

$N(0,1)$

H_0 отвер.



Мо не отв

Шаг2

$$P\left(\boxed{\frac{\hat p_Y - \hat p_X}{se(\hat p_Y - \hat p_X)} < z_{crit}} \,\middle|\, H_A\right) \le \beta = 20\%$$

решаем равенство:

$$P\left(\frac{\hat p_Y - \hat p_X}{se(\hat p_Y - \hat p_X)} < z_{crit} \,\middle|\, p_Y = p_X + \Delta\right) = \beta$$

$$\hat p_Y = \frac{\sum Y_i}{n/2} \qquad \hat p_X = \frac{\sum X_i}{n/2}$$

$$\sum Y_i \sim Bin\left(n/2,\, p_Y\right) \overset{approx}{\sim} N\left(\frac{n}{2}\cdot p_Y,\ \frac{n}{2} p_Y(1-p_Y)\right)$$

$$\sum X_i \sim Bin\left(n/2,\, p_X\right) \overset{approx}{\sim} N\left(\frac{n}{2} p_X,\ \frac{n}{2} p_X(1-p_X)\right)$$

$n = 2000$ $\qquad se(\hat p_Y - \hat p_X) \simeq \sqrt{Var(\hat p_Y - \hat p_X)}$

$$z = \frac{\hat p_Y - \hat p_X}{se(\hat p_Y - \hat p_X)} \overset{approx}{\sim} N(?, 1)$$

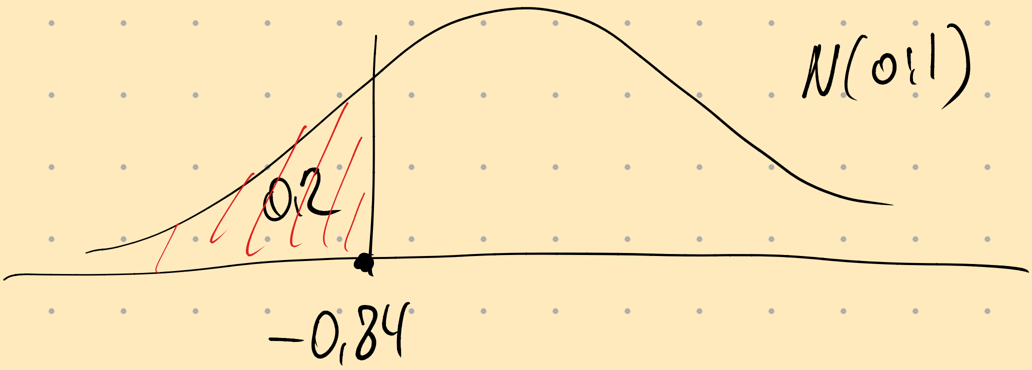
$$E(z \mid H_A) \simeq \frac{\Delta}{\sqrt{Var(\hat p_Y - \hat p_X)}} = \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{2}{n} p_Y(1-p_Y) + \frac{2}{n} p_X(1-p_X)}}$$

$$Var(\hat p_Y) = Var\left(\frac{\sum Y_i}{n/2}\right) = \frac{2^2}{n^2} Var(Y_i) =$$
$$= \frac{2^2}{n^2} \cdot \frac{n}{2} p_Y \cdot (1-p_Y)$$
$$= \frac{2}{n} p_Y(1-p_Y)$$

$$P(z < z_{crit} \mid H_A) = \beta$$

1.64

$$P\left(z - \frac{\Delta}{\sqrt{Var(\hat{p}_Y - \hat{p}_X)}} < z_{crit} - \frac{\Delta}{\sqrt{Var(\hat{p}_Y - \hat{p}_X)}} \right) = 0{,}2$$



$$z_{crit} - \frac{\Delta}{\sqrt{Var(\hat{p}_Y - \hat{p}_X)}} = -0{,}84$$

$$\frac{\Delta}{\sqrt{Var(\hat{p}_Y - \hat{p}_X)}} = 1.64 + 0{,}84 = 2.48$$

$$\Delta = 2.48 \cdot \sqrt{\frac{2}{n} p_Y(1-p_Y) + \frac{2}{n} p_X(1-p_X)}$$

$$\hat{\Delta} = 2.48 \cdot \sqrt{\frac{1}{1000} \left(0.12 \cdot 0.88 + 0{,}10 \cdot 0{,}90 \right)} =$$

$$= 0.035$$

Таблички : до 22 июня 23:59 будут френ. аво.
до 23 июня 23:59 можно все / отк.