Лекция 4

Интервальные оценки.

Классический подход.

θ – неизв. пар-р – константа

$y_1 \dots y_n | \theta$ – набл. с.в.

$\hat{\theta}_{ML}$, $\hat{\theta}_{MM}$ – метод макс. правдоподобия

Байесовский подход.

$f(\theta)$ – априорный закон расп.

$y_1 \dots y_n | \theta$ – набл. с.в.

$f(\theta | y_1 \dots y_n)$ – апостер. плотность.

$\to E(\theta | y_1 \dots y_n)$

$\to Mode(\theta | y_1 \dots y_n)$

$\to Med(\theta | y_1 \dots y_n)$

Интервалы в байесовском подходе.

Опр Байесовский [область] интервал [априорный / апостериорный] для параметра θ с вер-стью покрытия $(1-\alpha)$

априорный: $P(\theta \in [q_L, q_R]) = 1-\alpha$

апостериорный: $P(\theta \in [q_L; q_R] | y_1 \dots y_n) = 1-\alpha$

credible interval. [байесовский / правдоподобный]

Упр.

$a \sim U[0;100]$

$(y_1, y_2 | a) \sim$ незав $U[0;a]$

$y_1 = 5 \quad y_2 = 6.$

а) апостер. плотность a.

б) (любой) 94% байесовский апостер. интервал.

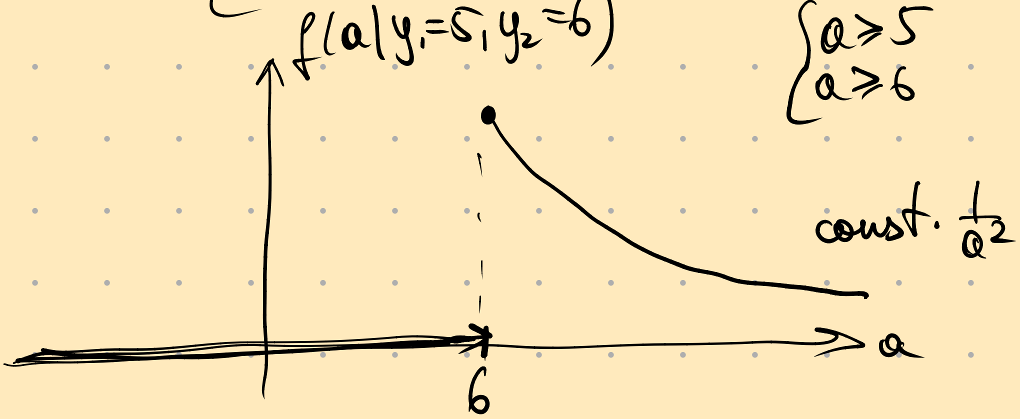
$$f(a) = \begin{cases} 1/100 & a \in [0;100] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f(a | y_1, y_2) = \frac{f(a) \cdot f(y_1, y_2 | a)}{f(y_1, y_2)} \propto f(a) \cdot f(y_1, y_2 | a)$$

$$f(y_1 | a) = \begin{cases} \frac{1}{a} & y_1 \le a \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad f(y_2|a) = \text{—//—}$$

$$f(a | y_1, y_2) \propto \begin{cases} \cancel{\frac{1}{100}} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}, & y_1, y_2 \le a \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

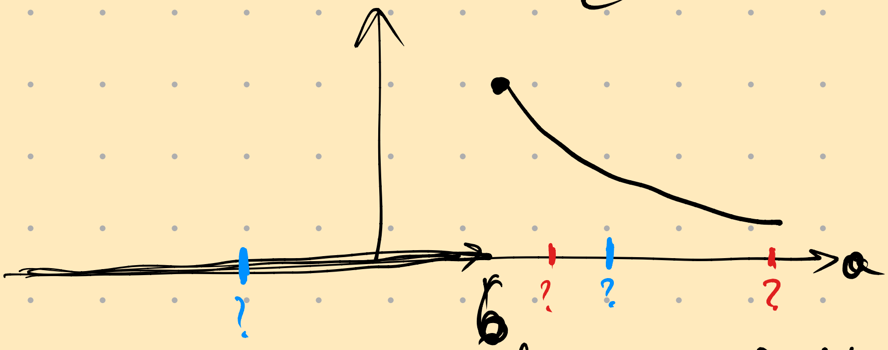
$$\begin{cases} a \ge 5 \\ a \ge 6 \end{cases}$$



$$\int_6^{\infty} f(a | y_1, y_2)\, da = 1 \qquad \int_6^{\infty} \text{const} \cdot \frac{1}{a^2}\, da = 1$$

$$\text{const} = \frac{1}{\int_6^{\infty} \frac{1}{a^2}\, da} = \frac{1}{-\frac{1}{a}\Big|_6^{\infty}} = 6$$

$$f(a \mid y_1=5, y_2=6) = \begin{cases} 6/a^2 & a \geq 6 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$



- байесовский интервал можно построить не одного.

популярные варианты:

1) самый короткий HPD interval = highest posterior density interval
апостериорный интервал наивысшей плотности.

в нашем: $[q_L; q_R]$ $\quad q_L = 6 \quad \int_6^{q_R} 6\frac{1}{a^2}\,da = 0{,}94.$

$$-\frac{6}{a}\Big|_6^{q_R} = -\frac{6}{q_R} + 1 = 0{,}94$$

$$\frac{6}{q_R} = 0{,}06$$

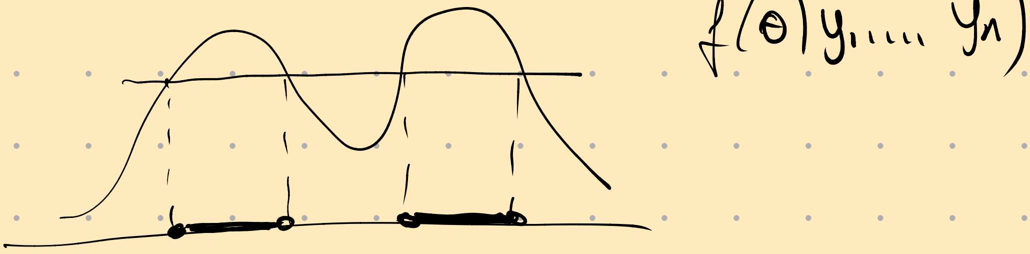
$$q_R = 100.$$

94% байес. апостер. интервал $[6; 100]$

$$P(a \in [6;100] \mid y_1=5, y_2=6) = 0{,}94$$

трудности:

- [на компьютере будет хр-ся не формула апостериорной плотности, а большая выборка]
- мультимодальная плотность

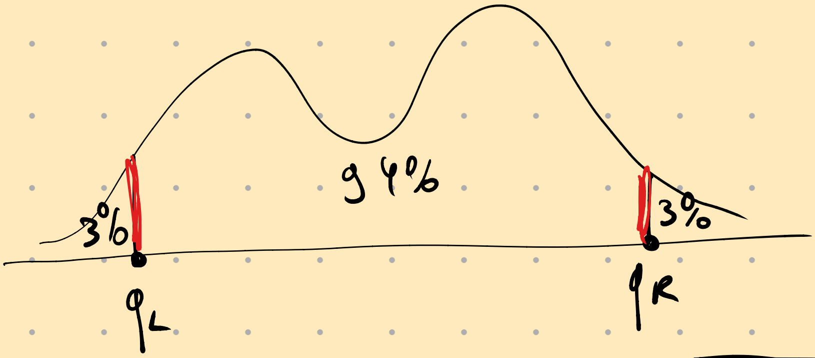


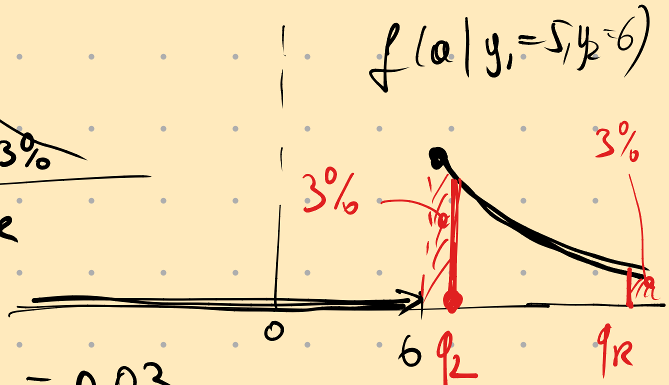
HPD-region — область наивысшей апост. плотности может состоять из неск-х кусков

плюсы:

• самая короткая область.

$\boxed{2}$ симметричный по вероятности.





в нашем: $\int_6^{q_L} 6/a^2\, da = 0{,}03 \longrightarrow q_L$

$$\int_{q_R}^{\infty} 6/a^2\, da = 0{,}03 \longrightarrow q_R$$

плюсы:

• из одного куска
• очень легко считать по выборке.

минусы

• может не сод-ть самые вер-ные
• может содержать невозможные значения
• не самый короткий

CrI = credible interval

BI

Интервалы в классическом подходе.

опр $[q_L; q_R]$ — confidence interval /доверительный интервал/ уровня (с вероятностью накрытия) $(1-\alpha)$

$q_L(y_1, \ldots, y_n)$ и $q_R(y_1, \ldots, y_n)$ (!)

$$P(\theta \in [q_L, q_R]) = 1-\alpha$$

опр. $[q_L; q_R]$ — asymptotic conf. interval (асимптотич. дов. интервал) уровня $(1-\alpha)$ если:

$$\lim_{n\to\infty} P(\theta \in [q_L; q_R]) = 1-\alpha$$

(!) $q_L(y_1, \ldots, y_n)$, $q_R(y_1, \ldots, y_n)$

Упр (9.4) $X \sim \text{expo}(\lambda)$ $\qquad E(X) = \frac{1}{\lambda} = \mu$

$\mu = E(X)$ — мат. ожид.

$\lambda = \frac{1}{\mu}$ — интенсивность

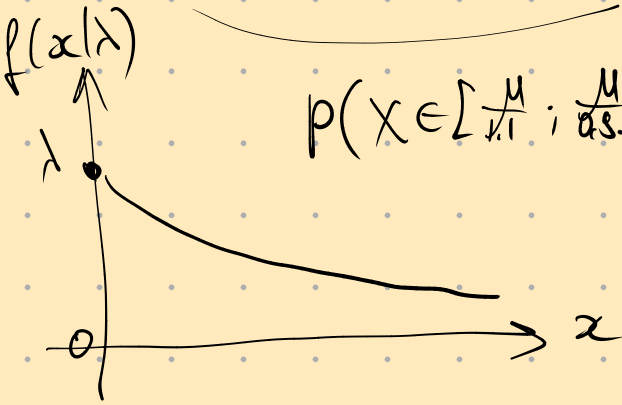
$\lambda \cdot \mu = 1$

а) $P(\mu \in [0{,}9X; 1{,}1X]) = ?$

б) 95% CI для μ ?

конст СВ СВ

$$P\left(X \in \left[\frac{\mu}{1.1}; \frac{\mu}{0.9}\right]\right) = P(\mu \in [0.9X; 1.1X])$$



$$P\left(X \in \left[\frac{\mu}{1.1}; \frac{\mu}{0.9}\right]\right) = \int_{\mu/1.1}^{\mu/0.9} \lambda \cdot \exp(-\lambda x)\, dx =$$

$$= -\exp(-\lambda x)\Big|_{x=\mu/1.1}^{x=\mu/0.9} =$$

$$= -\exp\left(-\frac{1}{0.9}\right) + \exp\left(-\frac{1}{1.1}\right) \approx$$

$$\approx 0{,}07$$

- довер-х интервалов с заданной вер-стью накрытия бесконечно много.

например:

$P(\mu \in [0, k \cdot X]) = 0{,}95 \quad k?$

традиция: с Фишера дов.: 95%

байесов: 94%

$0 < \mu < kX \qquad X > \frac{\mu}{k}$

$$\int_{\mu/k}^{\infty} f(x)\,dx = 0{,}95$$

$$-\exp(-\lambda x)\Big|_{x=\mu/k}^{+\infty} = 0{,}95$$

$\mu \cdot \lambda = 1$

$$\exp\left(-\frac{1}{k}\right) = 0{,}95$$

$$-\frac{1}{k} = \ln 0{,}95$$

$$k = -\frac{1}{\ln 0{,}95} \approx 19.5$$

95% CI для μ : $[0;\ 19.5X]$

$\boxed{\text{Нюанс}}\ \boxed{!}$ 95% отн-ся не к конкретному интервалу, а к процедуре построению.

Верно: $P(\mu \in [0;\ 19.5X]) = 0{,}95$

в данных $X = 10$

реализация довер-го интервала $[0;\ 195]$

Неверно: ~~$P(\mu \in [0;\ 195]) = 0{,}95$~~

$P(\mu \in [0;\ 195]) \overset{?}{=}$ то ли 1, то ли 0 и мы никогда не узнаем.

CI = confidence interval.

Дельта - метод.

Если $(Y_n - \theta) \cdot \sqrt{n} \xrightarrow{dist} N(0;\ \sigma^2)$

и $g(u)$ – диф-мая ф-ция,

идея: любая хорошая ф-ция от среднего арифм-кого тоже приблиз. но нормально распр-на

$\overline{X}$ ← тоже $N(?;\ ?)$

т.что $g'(\theta) \neq 0$, то

$$\left(g(Y_n) - g(\theta)\right) \cdot \sqrt{n} \xrightarrow{dist} N\left(0; \sigma^2 \cdot \left(g'(\theta)\right)^2\right)$$

док-во.

$$g(Y_n) = g(\theta) + g'(\tilde{\theta}) \cdot (Y_n - \theta)$$

$\tilde{\theta}$ – между θ и Y_n

$$\sqrt{n}\,(Y_n - \theta) \xrightarrow{dist} N(0; \sigma^2) \Rightarrow Y_n \xrightarrow{dist/prob} \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{\theta} \xrightarrow{dist/prob} \theta \Rightarrow g'(\tilde{\theta}) \xrightarrow{dist/prob} g'(\theta)$$

$$g(Y_n) - g(\theta) = g'(\tilde{\theta}) \cdot (Y_n - \theta)$$

$$\sqrt{n}\,\left(g(Y_n) - g(\theta)\right) = \boxed{g'(\tilde{\theta})} \cdot \boxed{\sqrt{n}\,(Y_n - \theta)}$$

$$g'(\tilde{\theta}) \xrightarrow{dist/prob} g'(\tilde{\theta}) \qquad \sqrt{n}\,(Y_n - \theta) \xrightarrow{dist} N(0; \sigma^2)$$

по лемма Слуцкого:

$$\sqrt{n} \cdot \left(g(Y_n) - g(\theta)\right) \xrightarrow{dist} N\left(0; \sigma^2 \cdot \left(g'(\tilde{\theta})\right)^2\right)$$

$\square$

<u>лемма Слуцкого:</u>

если $W_n \xrightarrow{dist} W$, $R_n \xrightarrow{dist/prob} c$, то $R_n \cdot W_n \xrightarrow{dist} cW$.
