Упр. мн-м метод моментов + дельта-метод

для построения асимптотич-го CI.

$n = 10000$ $y_1 \ldots y_n \sim$ незав $Expo(\lambda)$

а) $\hat{\lambda}$ с помощью метода моментов. $(E(y_i))$

б) построить 95% CI для неизв-го λ
[асимптотический]

$$E(y_i) = \frac{1}{\lambda} = \int_0^\infty \lambda \cdot \exp(-\lambda y)\,dy$$

а) $$\frac{y_1 + \ldots + y_n}{n} = \frac{1}{\hat{\lambda}}$$ $$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{y}}$$

$n = 10000$
$y_1 + \ldots y_2 = 20000$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{20000}{10000}} = 0{,}5$$ шаг 1

инт. дельта-методом: по ЦПТ $\bar{y} \overset{\cdot}{\sim} N(\cdot, \cdot)$

$$\hat{\lambda} = g(\bar{y}) = \frac{1}{\bar{y}} \overset{\cdot}{\sim} N(\cdot, \cdot)$$ шаг 2

док-во: разложение в ряд Тейлора.

CI шаг 3

Шаг 1. по ЦПТ: $\bar{y} \overset{approx}{\sim} N(?;?)$

$$E(\bar{y}) = E\left(\frac{y_1+\ldots+y_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(E(y_1)+\ldots+E(y_n)\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}+\ldots+\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(\bar{y}) = Var\left(\frac{y_1+\ldots+y_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Var(y_1+\ldots+y_n) = \frac{1}{n^2}\cdot n \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{n\lambda^2}$$

$$\frac{Var(y_1)}{n}$$

$$\bar{y} \overset{approx}{\sim} N\left(\frac{1}{\lambda}; \frac{1}{n\lambda^2}\right)$$

$\hat{\lambda} \xrightarrow{prob} \lambda$

$\hat{\lambda} = 0{,}5 \quad \lambda \approx 0{,}5$

$$\bar{y} \overset{approx}{\sim} N\left(\frac{1}{0{,}5}; \frac{1}{10000\cdot 0{,}5^2}\right) = N\left(2; \frac{1}{2500}\right)$$

Шаг 2 $\quad \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{y}} \approx g(\mu) + g'(\mu)\cdot(\bar{y}-\mu) =$

$\boxed{\text{ряд Тейлора в окрестности при } \bar{y} = \mu = \frac{1}{\lambda}}$

$g(u) = \frac{1}{u}$

$g'(u) = -\frac{1}{u^2}$

$$= \frac{1}{\mu} + \left(-\frac{1}{\mu^2}\right)\cdot(\bar{y}-\mu) =$$

$$= \lambda - \lambda^2\cdot\left(\bar{y}-\frac{1}{\lambda}\right)$$

← кажется стало сложнее! но! $\bar{y}$ – СВ входит линейно, λ – константа

по дельта-методу

$$\hat{\lambda} \overset{approx}{\sim} N(?;?)$$

$$E(\hat{\lambda}) \approx E\left(\lambda - \lambda^2\cdot\left(\bar{y}-\frac{1}{\lambda}\right)\right) = \lambda - \lambda^2\cdot\left(E(\bar{y}) - \frac{1}{\lambda}\right) = \lambda - \lambda^2\cdot 0 = \lambda$$

$$Var(\hat{\lambda}) \approx Var\left(\lambda - \lambda^2\cdot\left(\bar{y}-\frac{1}{\lambda}\right)\right) = Var(-\lambda^2\cdot\bar{y}) = \lambda^4\cdot Var(\bar{y}) =$$

$\lambda = const$

$$= \lambda^4 \cdot \frac{1}{n\lambda^2} = \frac{\lambda^2}{n}$$

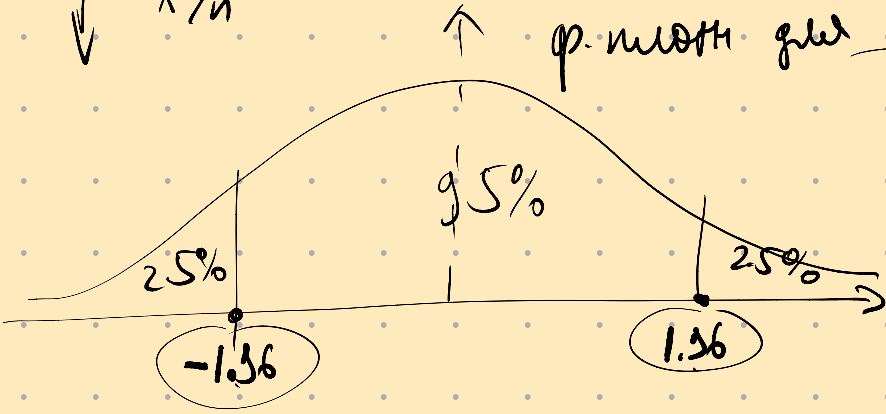
$$\hat{\lambda} \overset{approx}{\sim} N\left(\lambda ; \frac{\lambda^2}{n}\right)$$

Шаг 3 CI $N(\mu; \sigma^2) \longrightarrow N(0;1)$

$$\frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{n}}} \overset{approx}{\sim} N(0;1)$$

$$\frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\hat{\lambda}^2/n}} \overset{approx}{\sim} N(0;1) \qquad \hat{\lambda} \xrightarrow[dist]{prob} \lambda$$

ф. плотн для $N(0;1)$



$$P\left(\boxed{-1,96 \le \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\hat{\lambda}^2/n}} \le 1,96}\right) \xrightarrow{n \to \infty} 0,95$$

$$-1,96 \le \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\hat{\lambda}^2/n}} \le 1,96$$

$\times(-1)$

$$-1,96 \le \frac{\lambda - \hat{\lambda}}{\sqrt{\hat{\lambda}^2/n}} \le 1,96$$

$$-1,96\sqrt{\hat{\lambda}^2/n} \le \lambda - \hat{\lambda} \le 1,96 \cdot \sqrt{\hat{\lambda}^2/n}$$

$\hat\lambda - 1{,}96\sqrt{\hat\lambda^2/n} \le \lambda \le \hat\lambda + 1{,}96\sqrt{\hat\lambda^2/n}$

верно

$$P\left(\lambda \in \left[\hat\lambda - 1{,}96\sqrt{\hat\lambda^2/n};\ \hat\lambda + 1{,}96\cdot\sqrt{\hat\lambda^2/n}\right]\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0{,}95$$

asy CI для λ: №1 $\left[\hat\lambda - 1{,}96\sqrt{\hat\lambda^2/n};\ \hat\lambda + 1{,}96\cdot\sqrt{\hat\lambda^2/n}\right]$

$\hat\lambda = \frac{1}{\bar y}$

нигде нет неизв-го λ.

$\hat\lambda = 0{,}5$

$[0{,}5 - 2\cdot\sqrt{0{,}5^2/10000};\ 0{,}5 + 2\sqrt{0{,}5^2/10000}]$

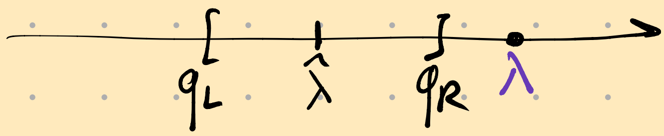
$[0{,}5 - 0{,}01;\ 0{,}5 + 0{,}01]$

$[0{,}49,\ 0{,}51]$

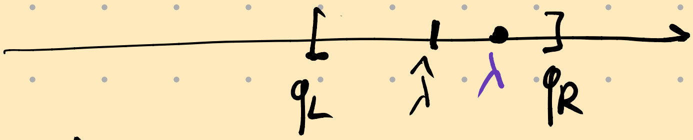
неверно: $\cancel{P(\lambda \in [0{,}49; 0{,}51]) = 0{,}95}$

λ – неизв. конст.

эксп. №1 $n = 10000$



эксп №2 $n = 10000$



число наблюдений

число экспериментов

эксп № n_{exp}

n_{exp} велико, примерно в 95% всех экспериментов неизв. нам λ накрыто дов-м интервалом

Вариация решения после шага 1.

$$\bar y \overset{approx}{\sim} N\left(\frac{1}{\lambda}; \frac{1}{n\lambda^2}\right)$$

$$\frac{\bar y - \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\frac{1}{n\lambda^2}}} \overset{approx}{\sim} N(0;1)$$

$\operatorname{plim}_{n\to\infty} \hat\lambda = \lambda$

$$\frac{\bar y - \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{1/n\hat\lambda^2}} \overset{approx}{\sim} N(0;1) \qquad \hat\lambda \approx \lambda$$

$$P\left(-1{,}96 \le \frac{\bar y - 1/\lambda}{\sqrt{1/n\hat\lambda^2}} \le 1{,}96\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0{,}95$$

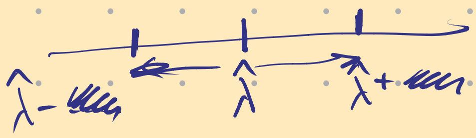
↓ решаем нер-во

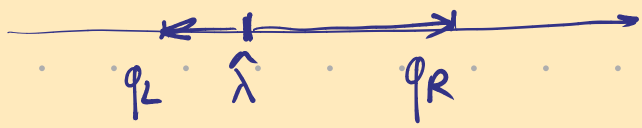
$$P\left(1/\lambda \in \left[\bar y - 1{,}96\cdot\sqrt{1/n\hat\lambda^2};\ \bar y + 1{,}96\sqrt{1/n\hat\lambda^2}\right]\right) \to 0{,}95$$

$$P\left(\lambda \in \left[\frac{1}{\bar y + 1{,}96\sqrt{1/n\hat\lambda^2}};\ \frac{1}{\bar y - 1{,}96\sqrt{1/n\hat\lambda^2}}\right]\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0{,}95$$

95 % asy CI N2 $\left[\frac{1}{\bar y + 1{,}96\sqrt{1/n\hat\lambda^2}};\ \frac{1}{\bar y - 1{,}96\sqrt{1/n\hat\lambda^2}}\right]$

CI N1 симметр. отн-но $\hat\lambda$ CI N2





Упр $y_1, \ldots, y_n \sim$ незав $U[0;a]$

a) $\hat a$ методом моментов $[E(y_i)]$

б) asy 95% CI симметр-веб отн-но $\hat a$.

$$E(y_i) = \frac{a+0}{2}$$

$$\frac{y_1 + \ldots + y_n}{n} = \frac{\hat a + 0}{2} \qquad \hat a = 2\bar y$$

a

б) approx

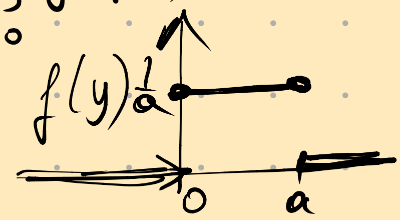
$$\bar{y} \overset{approx}{\sim} N(?, ?)$$

$$E(\bar{y}) = E(y_1) = \frac{a}{2}$$

$$Var(\bar{y}) = \frac{Var(y_1)}{n} = \frac{a^2/12}{n}$$

$$Var(y_1) = \underbrace{E(y_1^2)}_{} - (E(y_1))^2$$

$$\int_0^a y^2 \cdot f(y)\,dy =$$



$$= \int_0^a y^2 \cdot \frac{1}{a}\,dy$$

$$\bar{y} \overset{approx}{\sim} N\left(\frac{a}{2}; \frac{a^2}{12n}\right)$$

$$\hat{a} = 2 \cdot \bar{y}$$

← уже линейная функция !! дельта-метод с рядом Тейлора не нужен !!!

$$\hat{a} \overset{approx}{\sim} N\left(a; \frac{a^2}{3n}\right)$$

$$\frac{\hat{a} - a}{\sqrt{a^2/3n}} \overset{approx}{\sim} N(0;1)$$

$$\frac{\hat{a} - a}{\sqrt{\hat{a}^2/3n}} \overset{approx}{\sim} N(0;1)$$

$$P\left(-1{,}96 \le \frac{\hat{a} - a}{\sqrt{\hat{a}^2/3n}} \le 1{,}96\right) \xrightarrow{n \to \infty} 0{,}95$$

$$P\left(a \in \left[\hat{a} - 1{,}96\sqrt{\hat{a}^2/3n}\,;\ \hat{a} + 1{,}96\sqrt{\hat{a}^2/3n}\right]\right) \xrightarrow{n \to \infty} 0{,}95,$$ где

$$\hat{a} = \frac{\bar{y}}{2}$$

Упр. $y_1, y_2, \ldots, y_n \sim Geom(p)$

y_i – число попыток до 1-го успеха (p = вер-сть успеха в отдельной попытке)

$n = 10000$

а) $\hat{p}$ методом моментов

б) asy 95% CI для p (симмер. отн-но $\hat{p}$)

$$E(y_i) = \frac{1}{p}$$

$$\frac{y_1 + \ldots + y_n}{n} = \frac{1}{\hat{p}} \qquad \hat{p} = \frac{1}{\bar{y}}$$

по ЦПТ $\bar{y} \overset{approx}{\sim} N(?, ?)$

plim $\bar{y} = E(y_1)$

ряд Тейлора в т. $\mu = E(y_1)$

$$E(\bar{y}) = E(y_1) = \frac{1}{p} = \mu$$

$$Var(\bar{y}) = Var\left(\frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} n \cdot Var(y_1) = \frac{Var(y_1)}{n}$$

$$= \frac{1-p}{p^2} \cdot \frac{1}{n}$$

дельта-метод.

$$g(u) = \frac{1}{u} \qquad g'(u) = -\frac{1}{u^2}$$

$$\hat{p} = g(\bar{y}) \approx g(\mu) + g'(\mu) \cdot (\bar{y} - \mu)$$

$$\hat{p} \approx g\left(\frac{1}{p}\right) + g'\left(\frac{1}{p}\right) \cdot \left(\bar{y} - \frac{1}{p}\right) = p - p^2 \cdot \left(\bar{y} - \frac{1}{p}\right)$$

$$E(\hat{p}) \approx E\left(\underset{\text{const}}{p} - \underset{\text{const}}{p^2} \cdot \left(\underset{\text{СВ}}{\bar{y}} - \underset{\text{const}}{\frac{1}{p}}\right)\right) = p - p^2 \cdot \underbrace{\left(E(\bar{y}) - \frac{1}{p}\right)}_{=0} = p$$

$$Var(\hat{p}) \approx Var\left(p - p^2 \cdot \left(\bar{y} - \frac{1}{p}\right)\right) = Var(-p^2 \cdot \bar{y}) = p^4 \cdot Var(\bar{y}) = \frac{p^4 \cdot (1-p)}{n \; 2} =$$

$$= p^2 \cdot (1-p) \frac{1}{n}$$

$$\hat{p} \overset{approx}{\sim} N\left(p; \frac{p^2}{n} \cdot (1-p)\right)$$

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p^2(1-p) \cdot \frac{1}{n}}} \overset{approx}{\sim} N(0; 1)$$

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\hat{p}^2 \cdot (1-\hat{p}) \cdot \frac{1}{n}}} \overset{approx}{\sim} N(0; 1)$$

$$P\left(-1{,}96 \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\hat{p}^2(1-\hat{p})\frac{1}{n}}} \leq 1{,}96\right) \xrightarrow{n \to \infty} 0{,}95$$

$$P\left(p \in \left[\hat{p} - 1{,}96\sqrt{\frac{\hat{p}^2(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + 1{,}96\sqrt{\frac{\hat{p}^2 \cdot (1-\hat{p})}{n}}\right]\right) \xrightarrow{n \to \infty} 0{,}95$$

asy 95% CI для p: $\left[\hat{p} - 1{,}96\sqrt{\frac{\hat{p}^2(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + 1{,}96\sqrt{\frac{\hat{p}^2 \cdot (1-\hat{p})}{n}}\right]$

есть выборка: $n = 10000$, $\sum_{i=1}^{n} y_i = 20000$ $\Rightarrow$ $\bar{y} = 2$ $\quad \hat{p} = \frac{1}{\bar{y}} = 0{,}5$

$$\left[0{,}5 - 2\sqrt{\frac{0{,}5^2 \cdot 0{,}5}{10000}}; 0{,}5 + 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5^2 \cdot 0{,}5}{10000}}\right]$$

$$[0{,}5 - 0{,}007; 0{,}5 + 0{,}007]$$

реализ. дов. го интервала. $\rightarrow [0{,}493; 0{,}507]$