

Домашнее задание 2

Дедлайн: 2025-02-23, 23:59.

Оцениваемые задачи:

1. Величины y_1, y_2, \dots, y_n независимы и равномерны на отрезке $[0; a]$ с неизвестным $a > 5$. Никола Тесла хочет оценить неизвестный параметр $b = \mathbb{P}(y_i > 5)$.

Рассмотрим две оценки: \hat{b}_n — доля наблюдений в выборке, оказавшихся больше 5 и $\hat{b}'_n = 1 - 2.5/\bar{y}$.

- а) Является ли оценка \hat{b}_n несмещённой? состоятельной?
- б) Является ли оценка \hat{b}'_n несмещённой? состоятельной?

2. Величины y_i независимы и имеют функцию плотности

$$f(y) = \begin{cases} 3y^2/\theta^3, & \text{если } y \in [0; \theta]; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- а) Найдите оценку $\hat{\theta}$ неизвестного параметра θ методом максимального правдоподобия.
- б) Является ли оценка $\hat{\theta}$ несмещённой?
- в) Является ли оценка $\hat{\theta}$ состоятельной?
- г) Найдите функцию плотности оценки $\hat{\theta}$.
- д) На какую величину нужно домножить оценку $\hat{\theta}$, чтобы она стала несмещённой?

Подсказка: ответ на пункт (б) можно получить без вычислений и интегралов :)

Неоцениваемые задачи в удовольствие:

3. Величина Y имеет биномиальное распределение $\text{Bin}(n, p)$.
 - а) Является ли оценка $\hat{p} = Y/n$ для p несмещённой? Если является смещённой, то скорректируйте оценку так, чтобы она стала несмещённой.
 - б) Чему равна теоретическая дисперсия σ^2 величины Y ?
 - в) Является ли оценка $\hat{\sigma}^2 = n\hat{p}(1 - \hat{p})$ для σ^2 несмещённой? Если является смещённой, то скорректируйте оценку так, чтобы она стала несмещённой.
4. Величины X_i независимы и одинаково распределены с неизвестными $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ и $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$.

Рассмотрим четыре оценки:

$$\hat{\mu}_A = (X_1 + X_2)/2, \quad \hat{\mu}_B = (X_1 + X_2 + X_3)/3, \quad \hat{\mu}_C = 2X_1 - X_2, \quad \hat{\mu}_D = (X_1 + X_2 + \dots + X_{20})/21.$$

- а) Какая из приведенных оценок для μ является несмещённой?
- б) У какой несмещённой оценки самая маленькая дисперсия?
- в) Выберите наиболее эффективную оценку в этом множестве по критерию MSE , если $\sigma = 0.5\mu$.

5. Величины X_1 и X_2 независимы и равномерны на отрезке $[0; a]$ с неизвестным a и $Y = \min\{X_1, X_2\}$.

- а) При каком β оценка $\hat{a} = \beta Y$ для параметра a будет несмещённой?
- б) При каком β оценка $\hat{a} = \beta Y$ для параметра a будет наиболее эффективной по критерию MSE ?

6. Величины X_i независимы и имеют закон распределения

x	0	1	a
$\mathbb{P}(X = x)$	1/4	1/4	2/4

- а) Постройте состоятельную оценку для неизвестного a .
- б) Возможно ли в этой задаче построить несмещённую оценку для a ?
-