

Формат

В контрольной будет 6 задач. Задачи имеют равный вес. Продолжительность работы 120 минут. Можно будет использовать в качестве разрешенной шпаргалки один лист А4 со всех шести его сторон.

Вариант «Гоген»

1. Величины (X_i) независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, a]$, где $a > 0$. Я наблюдаю величину X_i , если $X_i > a/2$ и 0, если $X_i \leq a/2$.
 - а) Постройте оценку максимального правдоподобия, если я пронаблюдал значения 5, 6, 0.
 - б) Постройте оценку максимального правдоподобия для произвольной выборки y_1, y_2, \dots, y_n .
2. Величины (X_i) независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, a]$, где $a > 0$. Я наблюдаю величину X_i , если $X_i > a/2$ и 0, если $X_i \leq a/2$.
 - а) Постройте оценку метода моментов, если я пронаблюдал значения 5, 6, 0.
 - б) Постройте оценку метода моментов для произвольной выборки y_1, y_2, \dots, y_n .

3. Величины (X_i) независимы и одинаково распределены с ожиданием a , дисперсией $2a$ и конечными остальными моментами.

Рассмотрим оценку неизвестного a :

$$\hat{a} = ((X_1 - X_2)^2 + (X_2 - X_3)^2 + \dots + (X_{n-1} - X_n)^2)/4n.$$

- а) Является ли оценка несмещённой?
 - б) Является ли оценка состоятельной?
4. Величины (X_i) независимы и одинаково распределены с ожиданием a и дисперсией $2a$. Известно, что оценка $\hat{b} = (1 + \bar{X})/(2 + \bar{X})$ является состоятельной для параметра b . По выборке из 1000 наблюдений оказалось, что $\bar{X} = 2$.
 - а) Найдите стандартную ошибку $se(\hat{b})$ с помощью дельта-метода.
 - б) Постройте 95% асимптотический доверительный интервал для b .
 5. Илон Маск оценивает два параметра, a и b , методом максимального правдоподобия. По выборке из 1000 наблюдений оказалось, что $\hat{a} = 2$, $\hat{b} = 3$. Матрица Гессе в точке максимума равна $H = \begin{pmatrix} -100 & 2 \\ 2 & -400 \end{pmatrix}$.
 - а) Оцените информацию Фишера.
 - б) Постройте 95% асимптотический доверительный интервал для a .
 - в) Постройте 95% асимптотический доверительный интервал для $a - b$.
 6. Среди 500 рептилоидов 200 любят вышки 5G. Среди 700 жителей Нибиру вышки 5G любят 300 жителей.

Постройте 99%-й доверительный интервал для разницы долей рептилоидов и нибирутян, любящих вышки 5G.

Вариант «Рафаэль»

1. Вася и Петя независимо друг от друга прочитали всю Википедию. Вася всего нашёл 100 опечаток, Петя — 200 опечаток. При этом 80 опечаток оказались найдены и Петей, и Васей.

Оцените количество опечаток в Википедии методом максимального правдоподобия.

2. Я заказываю капучино в вышкинской кафешке. Бариста спрашивает меня последние четыре цифры номера, чтобы начислить бонус. Я называю четыре цифры моего номера. Касса выдаёт 5 совпадений и я замечаю, что касса ищет любое совпадение цифр в номере подряд, а не только последних.

- а) Оцените количество клиентов бонусной программы кафешки с помощью метода моментов.
- б) Явно запишите все сделанные предположения.

3. Величины X_1, X_2, \dots, X_n независимы и нормально распределены $\mathcal{N}(\mu; \theta - \mu^2)$ с неизвестными параметрами μ и θ .

Рассмотрим оценку неизвестного параметра θ ,

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} + (\bar{X})^2.$$

- а) Является ли оценка несмещённой?
- б) Является ли оценка состоятельной?

4. Джеймс Бонд неизвестным способом раздобыл оценку неизвестного параметра интенсивности экспоненциального распределения величины R , $\hat{\lambda} = 5$ со стандартной ошибкой $se(\hat{\lambda}) = 0.16$. Способ является состоятельным и асимптотически нормальным.

Целевой неизвестный параметр b — это вероятность $\mathbb{P}(R > 2)$.

- а) Предложите простую состоятельную и асимптотически нормальную оценку для неизвестного b .
- б) Найдите стандартную ошибку $se(\hat{b})$ с помощью дельта-метода.
- в) Постройте 95% асимптотический доверительный интервал для b .

5. Наблюдения независимы и одинаково распределены с неизвестным параметром a . В первый день Торопунька собрал 1000 наблюдений, а во второй день — ещё 500 наблюдений.

- а) Во сколько раз отличается ожидаемая информация Фишера по первому дню и по всей выборке?
- б) Какой будет ширина 95%-го асимптотического доверительного интервала для a , если по всей выборке оценка информации Фишера оказалась равной 400?

6. У 500 рептилоидов средний рост оказался 2 метра с несмещённой оценкой дисперсии 9 м^2 . У 700 жителей Нибиру — средний рост оказался 3 метра с несмещённой оценкой дисперсии 4 м^2 .

Постройте асимптотический 95%-й доверительный интервал для разницы ожидаемого роста рептилоида и нибирутянина.