Сем 12 :)

- p-value
- χ^2-тест Пирсона

Упр. опросили 500 рептилоидов. [случ. выборка]
240 любят вишню 5б.

протестировать:

а) $H_0: p = 0.5$
$H_1: p \neq 0.5$

$\boxed{\alpha = P(\text{отверг } H_0 \mid H_0 \text{ верна}) = 0{,}05}$

→ с помощью стандартной статистики Вальда
$$T = \frac{\hat{p} - p}{se(\hat{p})}$$

→ посчитать p-value.

б) $H_0: p = 0.5$
$H_1: p < 0.5$
—//—

в) $H_0: p = 0.5$
$H_1: p > 0{,}5$
—//—

общее: $\hat{p} = \frac{240}{500} = \frac{48}{100} = 0.48$

предполагаемое в H_0 $(p = 0.5)$

$$T = \frac{\hat{p} - p}{se(\hat{p})} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\text{Var}(\hat{p})}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$$

$$\hat{p} = \frac{X}{n}$$

$$\text{Var}(\hat{p}) = \frac{1}{n^2} \cdot \text{Var}(X) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

$X \sim Bin(n, p)$
$E(X) = np$
$\text{Var}(X) = np(1-p)$

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{p}) = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}$$

$$se(\hat{p}) = \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{p})} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$T_{obs} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} = \frac{0{,}48 - 0{,}5}{\sqrt{0{,}48 \cdot 0{,}52/500}} = -0{,}89 \to а, б, в$$

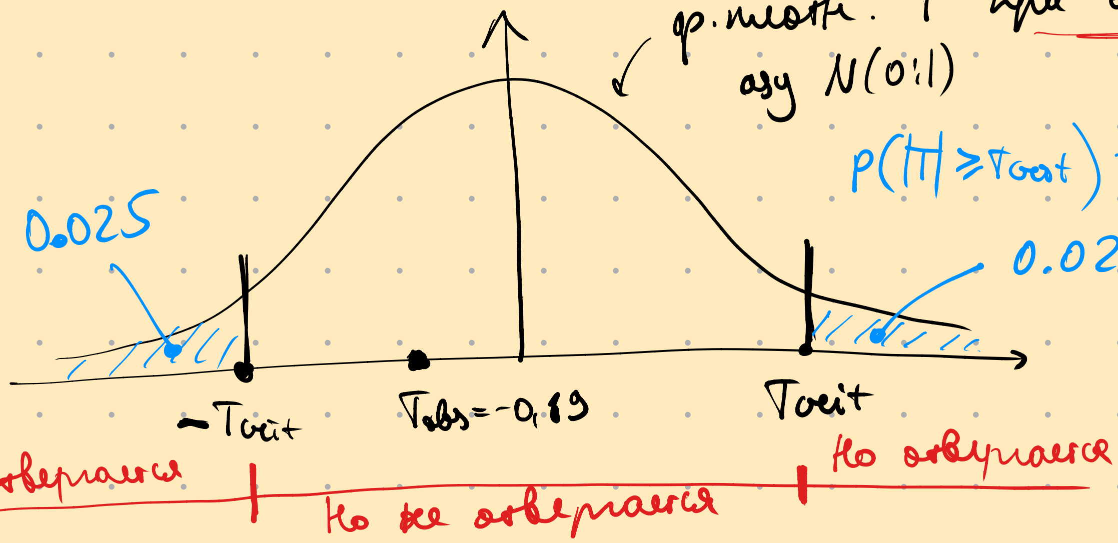
!! а) $H_0: p = 0{,}5$ против $H_1: p \neq 0{,}5$

$$K = (-\infty; T^L_{crit}) \cup (T^R_{crit}; +\infty)$$

если $T \in K$ то H_0 отвергается

ф. плотн. T при верной H_0 асу $N(0;1)$

$P(|T| \geq T_{crit}) = 0{,}05$



T_{crit} ? $P(N(0;1) \leq T_{crit}) = 0{,}975$

$T_{crit} = 1{,}96$

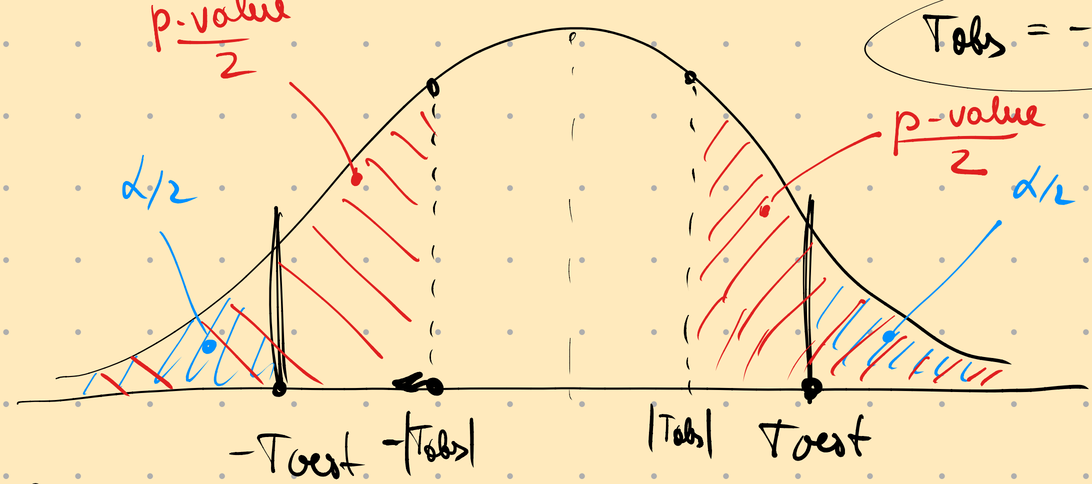
Тест: $\begin{cases} \text{если } |T| \geq 1{,}96, \text{ то } H_0 \text{ отвергается} \\ \text{если } |T| < 1{,}96, \text{ то } H_0 \text{ не отвергается} \end{cases}$

$\alpha = P(\text{отв } H_0 \mid H_0 \text{ верн}) = 0{,}05$

$T_{obs} = -0{,}89 \Rightarrow H_0$ не отвергается.

на языке p-значений

Тест $\begin{cases} \text{если } p\text{-value} < \alpha, \text{ то } H_0 \text{ отвергается} \\ \text{если } p\text{-value} \geq \alpha, \text{ то } H_0 \text{ не отвергается} \end{cases}$



$T_{obs} = -0{,}89$

$\alpha = 0{,}05$

p-value $= 0{,}37$

H0 отверг.:

$|T_{obs}| > T_{crit} \iff \text{p-value} < \alpha$

H0 не отверг

$|T_{obs}| \leq T_{crit} \iff \text{p-value} \geq \alpha$

$$\text{p-value} = 2 \cdot P(N(0;1) \geq |T_{obs}|) =$$

$$= 2 \cdot P(N(0;1) \geq 0.89) = 2 \cdot 0{,}185 = 0{,}37$$

табл/комп

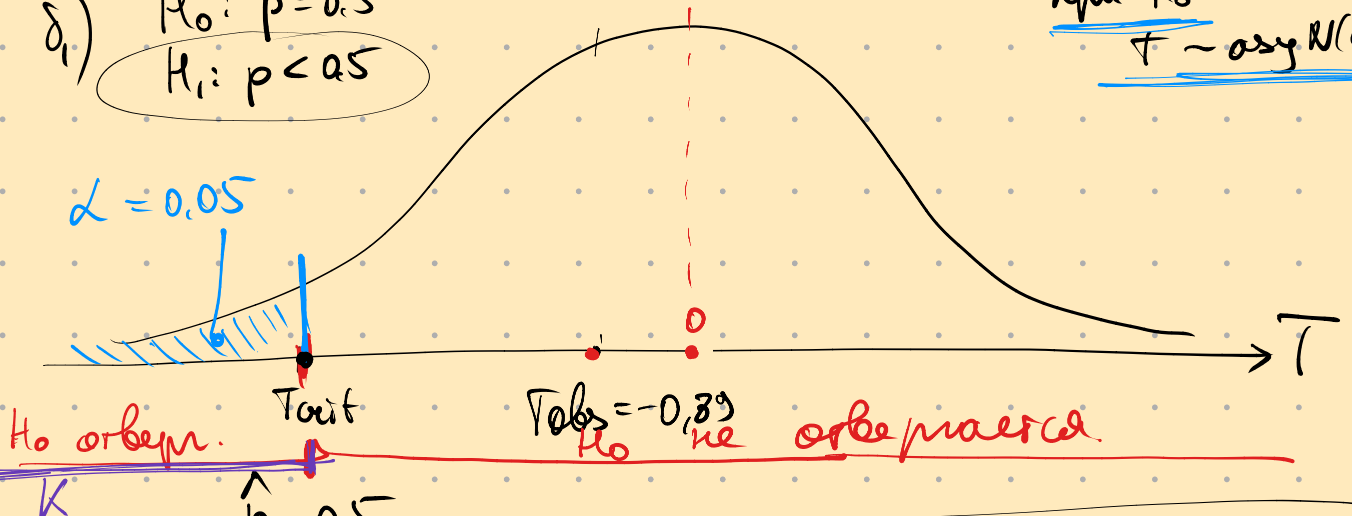
Вывод: $0.37 \geq 0.05 \Rightarrow$ H0 не отвергается

б) $H_0: p = 0.5$

$H_1: p < 0.5$

при H0

$T \sim asy\, N(0;1)$



$$T = \frac{\hat{p} - 0.5}{se(\hat{p})}$$

$\alpha = P(\text{отв } H_0 \mid H_0 \text{ верна}) = 0.05$

$$P(N(0;1) < T_{crit}) = 0{,}05 \quad (\text{по табл/комп})$$

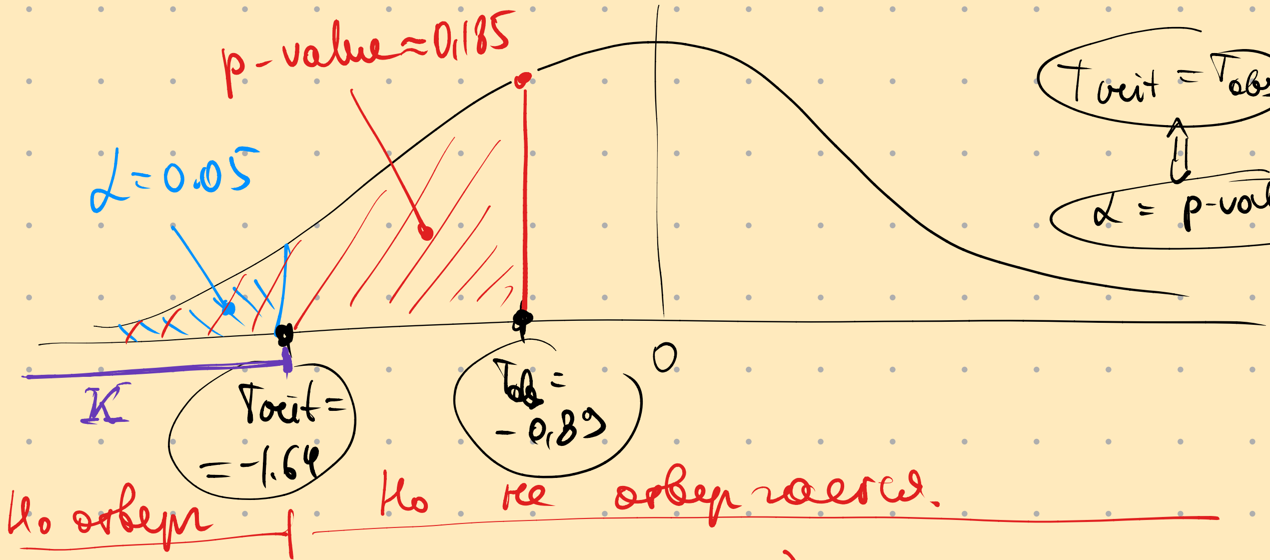
$T_{crit} = -1,64$

Тест: Если $T_{obs} < -1,64$, то H_0 отвергается

Если $T_{obs} \geq -1,64$, то H_0 не отвергается.

переходим к p-value

площадь α так же расположена отн-но T_{crit}, как и площадь p-value отн-но T_{obs}.



$T_{crit} = T_{obs}$

$\Updownarrow$

$\alpha = \text{p-value}$

$\text{p-value} = P(N < -0,89) \approx 0.185$

на языке p-значений

Тест: если p-value $< \alpha$, то H_0 отвергаеся

если p-value $\geq \alpha$, то H_0 не отвергается

p-value $= 0.185$, $\alpha = 0,05$ $\Rightarrow$ H_0 не отвергается.

Q почему

а) при $H_0: p = 0.5$, $H_1: p \neq 0.5$ $K = (-\infty; -T_{crit}) \cup (T_{crit}; +\infty)$

б) при $H_0: p = 0.5$, $H_1: p < 0.5$ $K = (-\infty; T_{crit})$?

$\alpha = P(\text{отв } H_0 \mid H_0 \text{ верна}) = P(T_{obs} \in K \mid H_0 \text{ верна})$

Интуиция: а)

$$T = \frac{\hat{p} - 0{,}5}{se(\hat{p})}$$

вычитаю предп знач в H_0

$H_0: p = 0{,}5$

$H_1: p \neq 0{,}5$

если H_0 верна, то $T \sim N(0;1)$ (около 0)

если H_1 верна $p = 0{,}99$ — T сильно правее нуля (сильно положит)

если H_1 верна $p = 0{,}01$ — T сильно левее нуля

$\to \approx \hat{p} \approx 0{,}01 \qquad T = \frac{\hat{p} - 0{,}5}{se(\hat{p})}$

значения $T = \frac{\hat{p} - 0{,}5}{se(\hat{p})}$

около 0 не противоречат H_0

далеко 0 (и влево, и вправо) говорят в пользу H_1

б)

$H_0: p = 0{,}5$ — если H_0 верна то $T = \frac{\hat{p} - 0{,}5}{se(\hat{p})} \overset{asy}{\sim} N(0;1)$

$H_1: p < 0{,}5$ — если H_1 верна $p = 0{,}01$, то T сильно левее нуля.

в)

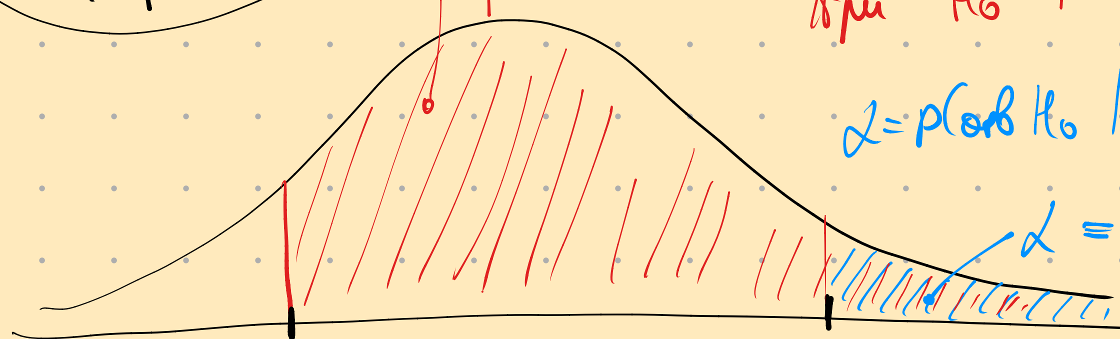
$H_0: p = 0{,}5$

$H_1: p > 0{,}5$

$$T_{obs} = \frac{\hat{p} - 0{,}5}{se(\hat{p})} = -0{,}89.$$

При $H_0: T \overset{asy}{\sim} N(0;1)$

$\alpha = P(\text{отв } H_0 \mid H_0 \text{ верна})$



$T_{obs}=-0.89$ T_{crit}

K

H_0 не отвергается H_0 отвергается

$$P(N(0;1) > T_{crit}) = 0.05$$

$$T_{crit} = 1.64$$

Способ 1: $T_{obs} = -0.89$ $T_{crit} = 1.64$

Если $T > T_{crit}$, то H_0 отвергается [иначе - нет]

H_0 не отвергается.

Способ 2: через p-value $\alpha = 0.05$

на языке p-значений

Тест: если p-value $< \alpha$, то H_0 отвергается; если p-value $\geq \alpha$, то H_0 не отвергается

$$p\text{-value} = P(N(0;1) > -0.89) = 0.815$$

$$p\text{-value} \geq \alpha \Rightarrow H_0 \text{ не отвергается}$$

Упр.

	карась	щуки	сельдь
факт. кол-во	20	30	40

$\boxed{\alpha = 0.05}$

$H_0: \begin{cases} p_1 = 0.2 \\ p_2 = 0.2 \\ p_3 = 0.6 \end{cases}$

H_1: хотя бы одна вер-сть не как в H_0

H_1: не H_0.

→ проведите тест

→ посчитайте p-value

$(N_i - \hat{N}_i)^2$ $\sum^{k} N_i^2$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - N\hat{p}_i)^2}{N\hat{p}_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{N_i^2}{N\hat{p}_i} - N$$

$\hat{p}_i = p_i$

$N = 90$

N_i	20	30	40
$N \cdot \hat{p}_i$	18	18	54

$$\boxed{\chi^2 = \frac{20^2}{18} + \frac{30^2}{18} + \frac{40^2}{54} - 90 = 11{,}85}$$

при H_0 и $N \to \infty$ $\quad \chi^2 \xrightarrow{dist} \chi^2_d$

$$d = \underbrace{df_{UR}}_{\text{число своб-х пар-в в } H_0 \text{ или } H_1} - \underbrace{df_R}_{\text{число своб-х пар-в в } H_0}$$

R = restricted

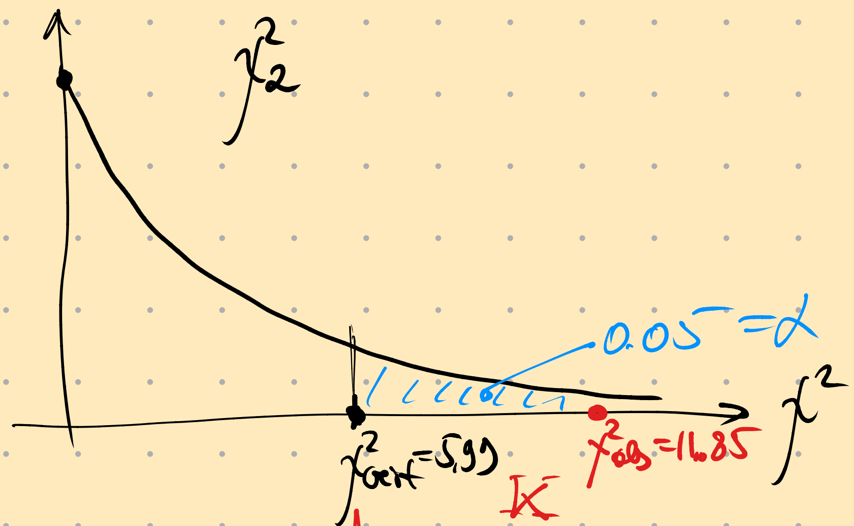
UR = unrestricted

$df_R = 0$ (нет)

$p_1 + p_2 + p_3 = 1$

Кор	Изуна	Сом
p_1	p_2	$1 - p_1 - p_2$

$df_{UR} = 2$ (p_1 и p_2)

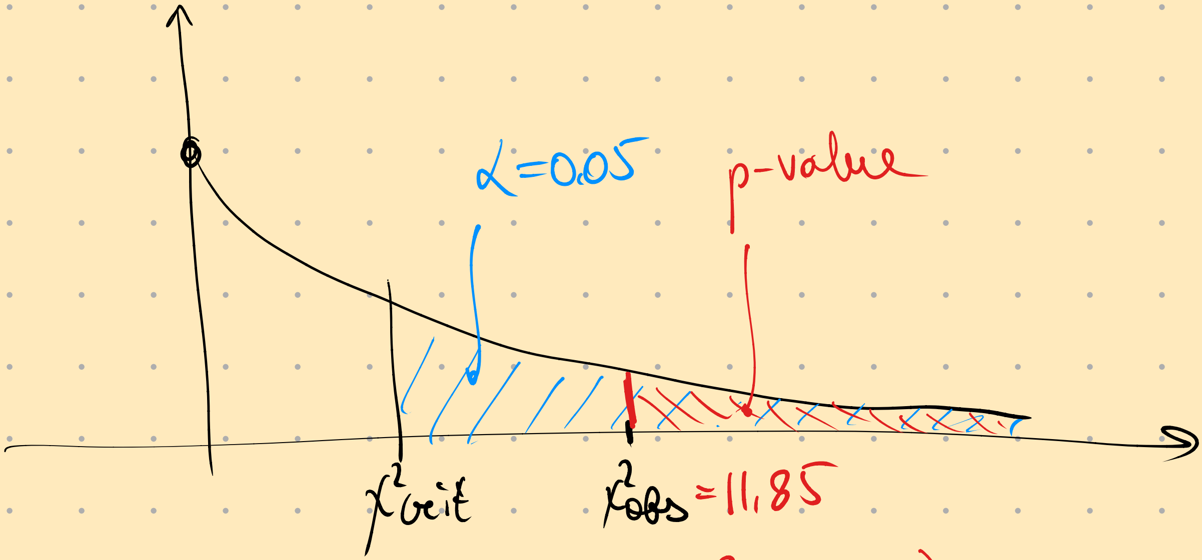


H_0 не отвергается $\quad$ H_0 отвергается

$P(\chi^2_2 > \chi^2_{crit}) = 0.05$

$\chi^2_{crit} = 5{,}99$ (калин / table)

$\chi^2_{obs} > \chi^2_{crit} \Rightarrow H_0$ отвергается.



$$p\text{-value} = P(\chi^2_2 > 11.85) = 0{,}00267$$

на языке p-значений

тест $\begin{cases} \text{если } p\text{-value} < \alpha, \text{ то } H_0 \text{ отвергается} \\ \text{если } p\text{-value} \geq \alpha, \text{ то } H_0 \text{ не отвергается} \end{cases}$

$p\text{-value} = 0.00267 < \alpha = 0.05 \Rightarrow H_0$ отверг.