→ метод моментов
→ метод максимального правдоподобия

→ Байесовский подход к оцениванию.

* неизв. параметры : θ
$\theta \in \mathbb{R}^d$ ← не случ. конст неизвестн.

Классический (частотный) задачи:
→ точечно оценить θ :)
→ точечно спрогн y_{T+1}
→ интервально оценить θ
→ интервально спрогн y_{T+1}

* наблюдаемые случ. величины
$y_1, y_2, y_3 \dots y_T$
модель: $f(y_1, \dots, y_T \mid \theta)$
* ненаблюд. случ. величины: y_{T+1}
модель $f(y_{T+1} \mid \theta)$

априорное мнение (распр) о θ

Байесовский подход
задачи:
→ точечно оценить θ :)
→ точечно спрогн y_{T+1}
→ интервально оценить θ
→ интервально спрогн y_{T+1}

→ неизв. параметры θ
θ - ненабл. СВ.
→ набл. случ. величины
$y_1, \dots, y_T$
модель: $f(y_1 \dots y_T \mid \theta)$
→ ненабл. СВ y_{T+1}
модель $f(y_{T+1} \mid \theta)$

Задача. $\boxed{\text{конст., неизв. пар-р.}}$

Классич. p - меткость баскет. (Вер-сть попасть в кольцо)

модель: $(y_1, y_2 \dots y_T \mid p) \sim$ незав. Bern(p)

y	0	1

$P(y_i = 5)$	$1-p$	p

$T = 5$

$y_1 = 1 \quad y_4 = 0$

$y_2 = 0 \quad y_5 = 1$

$y_3 = 1$

$$(y_{T+1} \mid p) \sim \text{Bern}(p)$$

$\hat{p}$? → метод мом → метод м.п.

$\hat{y}_{T+1}$?

ЗБЧ: $\bar{y} = \dfrac{y_1 + \ldots + y_T}{T} \xrightarrow[T \to \infty]{\text{prob}} E(y_1) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p$

$\boxed{\text{Метод моментов}}$

$$\bar{y} = \hat{p}$$

$$\hat{p}_{MM} = \bar{y} = \frac{1+0+1+1+0}{T} = 0{,}6 = \frac{3}{5}$$

$\boxed{\text{Метод макс правдоп.}}$

$$P(y_1 = 1, y_2 = 0, y_3 = 1, y_4 = 0, y_5 = 1 \mid p) \to \max_p$$

нез., модель

$$L(p) = P(y_1 = 1 \mid p) \cdot P(y_2 = 0 \mid p) \cdot \ldots \cdot P(y_5 = 1 \mid p) =$$

кол-во 1

$$= p \cdot (1-p) \cdot p \cdot (1-p) \cdot p = p^3 \cdot (1-p)^2$$

← кол-во 0

ф-ция правдоподобия

для конкр. выборки.

В общем виде:

$$L(p) = \prod_{i=1}^{T} P(y_i = y_i^s \mid p) = \ldots = p^{y_1^s + y_2^s + \ldots + y_T^s} \cdot (1-p)^{T - (y_1^s + y_2^s + \ldots + y_T^s)} =$$

СВ

то значение, к-рое пронаблюдали

$$= p^{\sum y_i^s} \cdot (1-p)^{T - \sum y_i^s}$$

$$L(p) = p^{\sum y_i} \cdot (1-p)^{T - \sum y_i}$$

С.В.

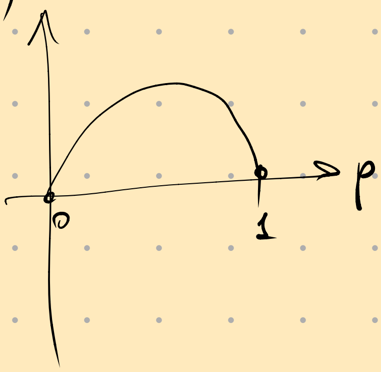
знач-ия из выборки

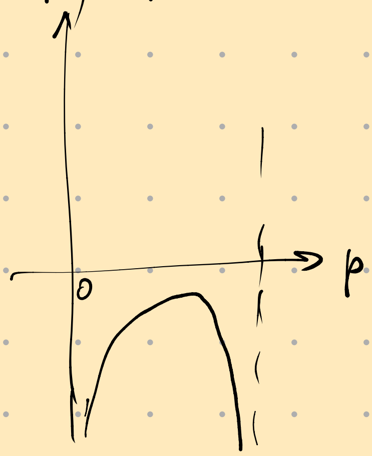
$$\max_p \ln\left(p^{\sum y_i}(1-p)^{T-\sum y_i}\right)$$

Опр $l(p)=\ln L(p)=$ — логарифмическая функция правдоподобия

$$= \sum y_i \cdot \ln p + (T-\sum y_i)\cdot \ln(1-p) \to \max_p$$

$$l'(p) = \frac{\sum y_i}{p} - \frac{T-\sum y_i}{1-p}$$





$p \in [0;1]$

$$\frac{\sum y_i}{\hat p_{ML}} - \frac{T-\sum y_i}{1-\hat p_{ML}} = 0$$

$\hat p_{ML}$ — оценка метод макс. правдоп.
maximum likelihood

$$\sum y_i \cdot (1-\hat p_{ML}) = \hat p_{ML} \cdot (T-\sum y_i)$$

$$\hat p_{ML} = \frac{\sum y_i}{T} = \frac{3}{5}$$

p — неизв. конст

y_i ~СВ

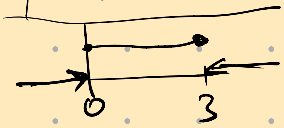
$\hat p = \frac{\sum y_i}{T}$ ← СВ

Байесовский подход.

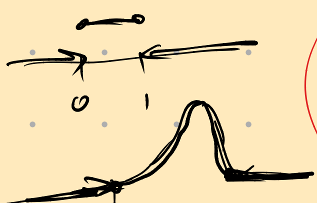
теперь: p — СВ (!)

Сформулировать мнение (закон распределения) p до получения данных $(y_1, y_2 \dots y_T)$.

ф. плотности



глупое мнение: $p \sim Unif[0;3]$



разумное мнение: $p \sim Unif[0;1]$

разумное мнение $p \sim Beta(10,3)$

оч. много

0 1

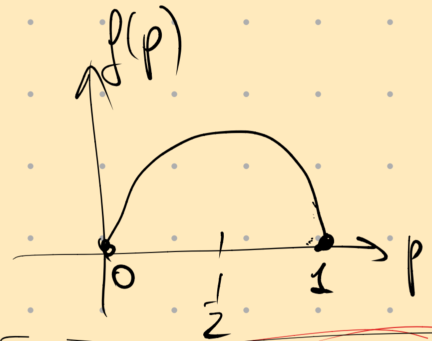
большая свобода.

Опр. Безусловное распр-ие неизв-х пар-в над-ся **априорным распределением**.

„широк середнячок"

$$\boxed{p \sim Beta(2,2)}$$

$$f(p) = \begin{cases} const \cdot p^{2-1} \cdot (1-p)^{2-1}, & p \in [0;1] \\ 0, & p \notin [0;1] \end{cases}$$



$$f(p) = \begin{cases} const \cdot p^{1} \cdot (1-p)^{1} & p \in [0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

→ модель: $(y_1, y_2 \dots y_T | p) \sim$ незав. $Bern(p)$

v	0	1
$P(y_i = v)$	$1-p$	p

$T=5$
$y_1=1$ $y_4=0$
$y_2=0$ $y_5=1$
$y_3=1$

$(y_{T+1} | p) \sim Bern(p)$

Опр условный закон распр-ия неизв-го пар-ра при условии имеющихся набл-ий над-ся **апостериорным распределением**

Упр найдем **апостер. распр** p.

априори „середнячок"

$p \sim Beta(2,2)$

модель: $(y_1 \dots y_T | p) \sim$ незав

$P(y_i = 1 | p) = p$

$$f(p) = \begin{cases} const \cdot p^{1} (1-p)^{1} & p \in [0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

можно восст из восстановить из $\int f(t)dt = 1$

Решаем 1

$$f(p | y_1=1, y_2=0, y_3=1, y_4=0, y_5=1) =$$ [Абьюз обозначения]

условная плотн.

непр. дискретные

совместная

$$= \frac{f(p, y_1=1, y_2=0 \ldots y_5=1)}{P(y_1=1, y_2=0, \ldots y_5=1)} \propto$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Вероятность.

→ двойное исп-ие.

$f(x)$ $f(y)$ $f(x|y)$

$f(5|4) \xrightarrow{?} f(y|x)$

$f_{y|x}(5|4)$

! нам интересна эта дробь как функция от p!
! знам. не зависит от p!

$$\propto f(p, y_1=1, y_2=0 \ldots y_5=1) =$$

приор

→ совместная f
→ не плотность
→ не вер-сть.

$$= f(p) \cdot f(y_1=1, y_2=0 \ldots y_5=1 | p) \propto$$

апр. плотность p

функция правдоп.

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A)$$

$$\propto \underbrace{p\cdot(1-p)}_{f(p)\ \text{с точн. до сомнож.}} \cdot \underbrace{p\cdot(1-p)\cdot p\cdot(1-p)\cdot p}_{f(y_1 \ldots y_5|p)} = p^4\cdot(1-p)^3$$

Итог: $f(p| y_1=1, y_2=0, y_3=1, y_4=0, y_5=1) =$

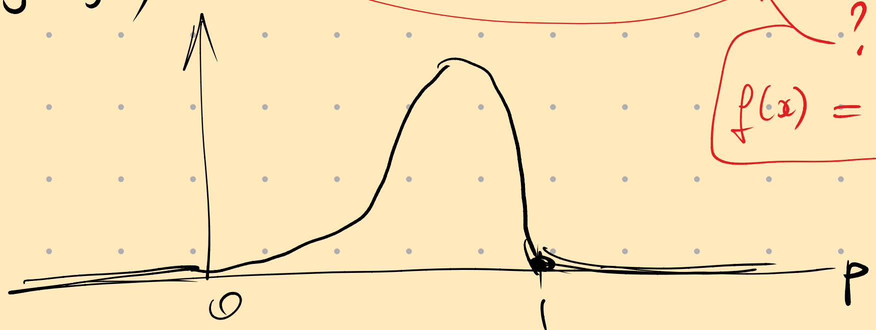
$$= \begin{cases} \text{const}\cdot p^4\cdot(1-p)^3, & p\in[0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Beta(5, 4)

? Beta(a, b)

$$f(x) = \text{const}\cdot x^{a-1}(1-x)^{b-1}$$

$f(p|y_1 \ldots y_5)$



* Как апостериорное распределение превратить в точечную оценку?

Три наиболее популярных идеи:

$$E(p|y_1=1,\dots y_5=1)$$

$$Mode(p|y_1=1,\dots y_5=1)$$

$$Med(p|y_1=1,\dots y_5=1)$$

$$(p|y_1=1, y_2=0\dots y_5=1) \sim Beta(5,4)$$

→ апостериорное ожидание p: $E(p|y_1=1,\dots y_5=1) = \frac{a}{a+b} = \frac{5}{9}$!!

→ априорное ожидание p: $E(p) = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$

$p \sim Beta(2,2)$

<u>Почему пропадает p в знаменателе?</u>

$$P(y_1=1, y_2=0, \dots y_5=1) =$$

$$= \int_{p=0}^{1} f(p, y_1=1, y_2=0, \dots y_5=1)\, dp =$$

$$= \int_0^1 \underbrace{const}\cdot p^4\cdot(1-p)^3\, dp = \dots =$$ конкр число

$$f(p|y_1\dots y_5) \sim Beta(5,4)$$

$$= \frac{8!}{4!\,3!}\, p^4\cdot(1-p)^3$$