13 мая 13:00 ‼ Лекция 16

Тесты Вальда, множителей Лагранжа и отношения правдоподобия.

W = Wald

LR = likelihood ratio

LM = Lagrange multiplier

парам тесты

W и похожие, LR, LM, экзотика ‼

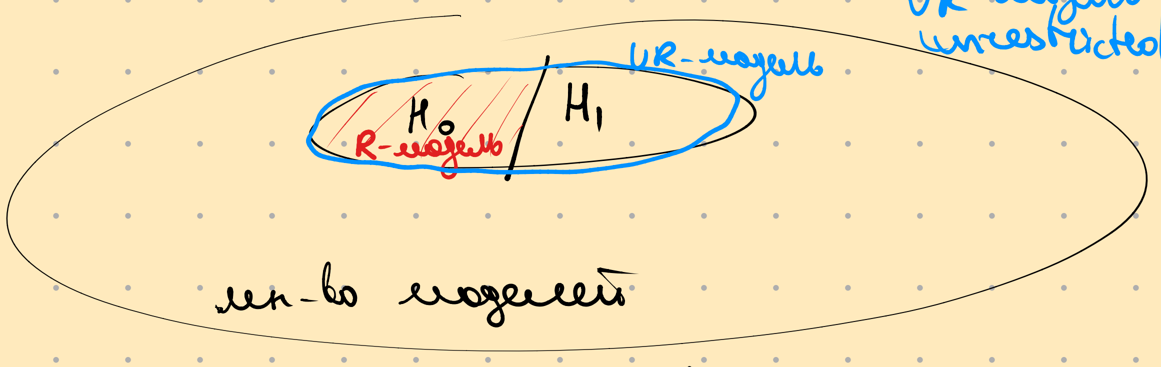
Канва:

наблюдения: $y_1 \dots y_n$ [иногда нез-мы]

Вектор неизв-х пар-в: $\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_k \end{pmatrix}$

R = restricted = H_0

UR-модель = H_0 или H_1 unrestricted



$f(y_1 \dots y_n | \theta)$ — совместная ф. плотности [можно и дискр]

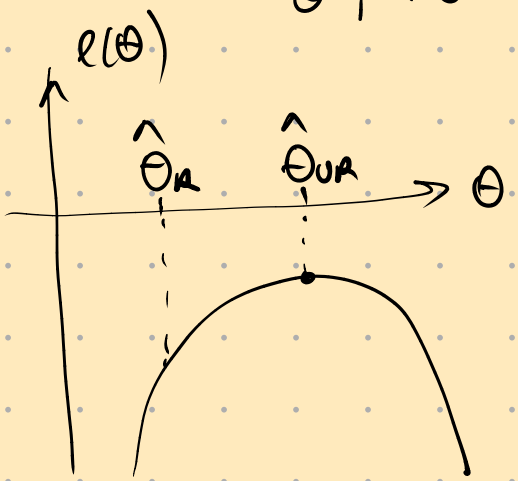
$L(\theta) = f(y_1 \dots y_n | \theta)$ — ф. правдоподобия

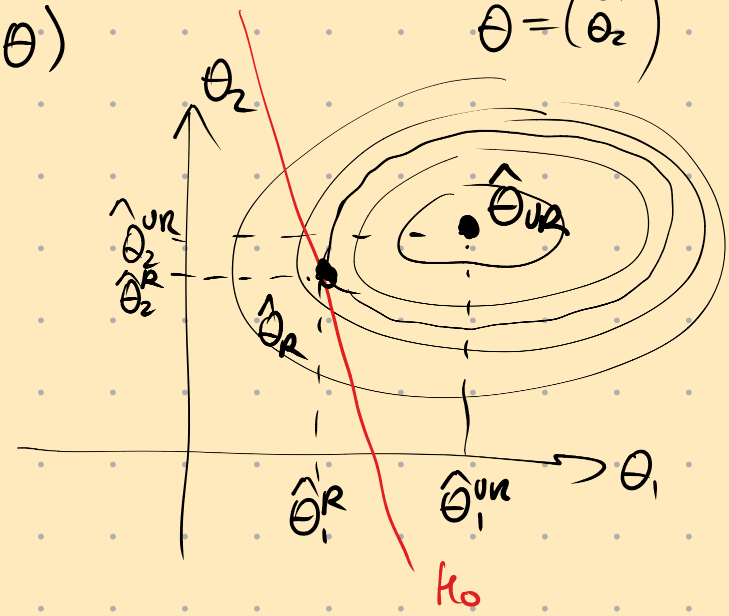
$\ell(\theta) = \ln L(\theta)$ — лог-ф. правдоподобия.

$$\hat\theta_{UR} = \underset{\theta,\ H_0 \text{ или } H_1}{\arg\max}\ \ell(\theta)$$

$$\hat\theta_{R} = \underset{\theta,\ H_0}{\arg\max}\ \ell(\theta)$$

$\theta = \begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}$





вектор

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta}(\hat\theta_{UR}) = 0 \ \Downarrow \qquad \ell(\hat\theta_{UR}) \geq \ell(\hat\theta_R) \ \Downarrow$$

интуиция: если $\ell(\hat\theta_{UR}) - \ell(\hat\theta_R)$ велика, то интуитивно хочется отвергнуть H_0; если $\ell(\hat\theta_{UR}) - \ell(\hat\theta_R)$ не велика, хочется не отвергнуть H_0.

это и есть LR тест.

$$LR = 2\cdot\left(\ell(\hat\theta_{UR}) - \ell(\hat\theta_R)\right)$$

Если [выполнены условия регулярности для ℓ]

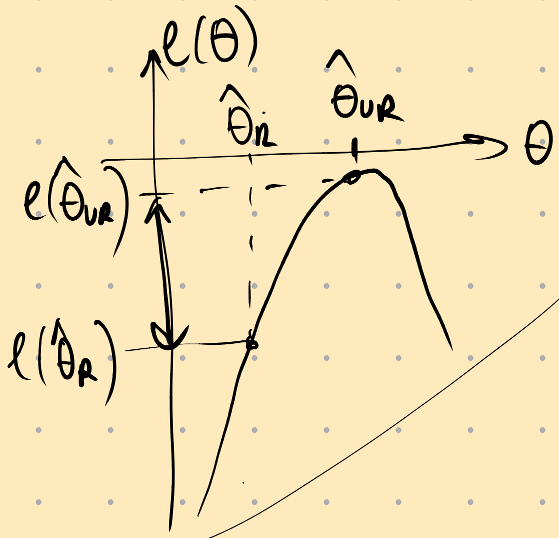
то:

$$LR \xrightarrow[H_0,\ n\to\infty]{dist} \chi^2_{df}$$

df = число независимых ур-ий в H_0 = $p - p_R$

p_{UR} - число своб-х пар-в в UR-модели
p_R - // ———— в R-модели

LR-тест: если $LR > \chi^2_{крит}$, то H_0 отвергается
$LR \le \chi^2_{крит}$, то H_0 не отвергается.



Упр.

$y_1, y_2, \ldots, y_{100}$ кругов

$P(y_i = 1) = \theta$
$P(y_i = 0) = 1 - \theta$

$n = 100$
$\sum y_i = 60$

$H_0: \theta = \frac{1}{2}$
$H_1: \theta \ne \frac{1}{2}$

а) на ур-не значимости 5% протестировать H_0 против H_A с помощью LR-теста.

$\hat{\theta}_R = \frac{1}{2}$!! $H_0: \theta = \frac{1}{2}$

$\hat{\theta}_{UR}$?

правдоподобие для конкретной выборки

$P(y_1 = 1, y_2 = 0, y_3 = 1, \ldots y_{100} = 1) =$
$= \theta \cdot (1-\theta) \cdot \theta \cdot \ldots \cdot \theta$

в общем случае правд-от выборки $y_1 \ldots y_n$:

$$L(\theta) = \theta^{\text{кол-во 1 в выборке}} \cdot (1-\theta)^{\text{кол-во 0 в выборке}}$$

$$L(\theta) = \theta^{\sum y_i} \cdot (1-\theta)^{n - \sum y_i}$$

$$\ell(\theta) = \sum y_i \cdot \ln \theta + (n - \sum y_i) \cdot \ln(1-\theta)$$

$\boxed{UR}$ $\max\limits_{\theta} \ell(\theta)$

$\boxed{R}$ $\hat{\theta}_R = \frac{1}{2}$

$$\ell' = \frac{\sum y_i}{\theta} + \frac{(n - \sum y_i)}{1-\theta} \cdot (-1)$$

$\ell'=0 \qquad \frac{\sum y_i}{\hat\theta_{UR}} = \frac{n-\sum y_i}{1-\hat\theta_{UR}} \qquad \ell''<0$

$$(1-\hat\theta_{UR})\sum y_i = \hat\theta_{UR}(n-\sum y_i)$$

$$\hat\theta_{UR} = \frac{\sum y_i}{n}$$

$$LR = 2\left(\ell(\hat\theta_{UR}) - \ell(\hat\theta_R)\right) =$$

$$=2\cdot\left[\sum y_i \ln\left(\frac{\sum y_i}{n}\right) + (n-\sum y_i)\cdot\ln\frac{n-\sum y_i}{n} - \left(\sum y_i \cdot \ln\frac{1}{2} + (n-\sum y_i)\ln\frac{1}{2}\right)\right]$$

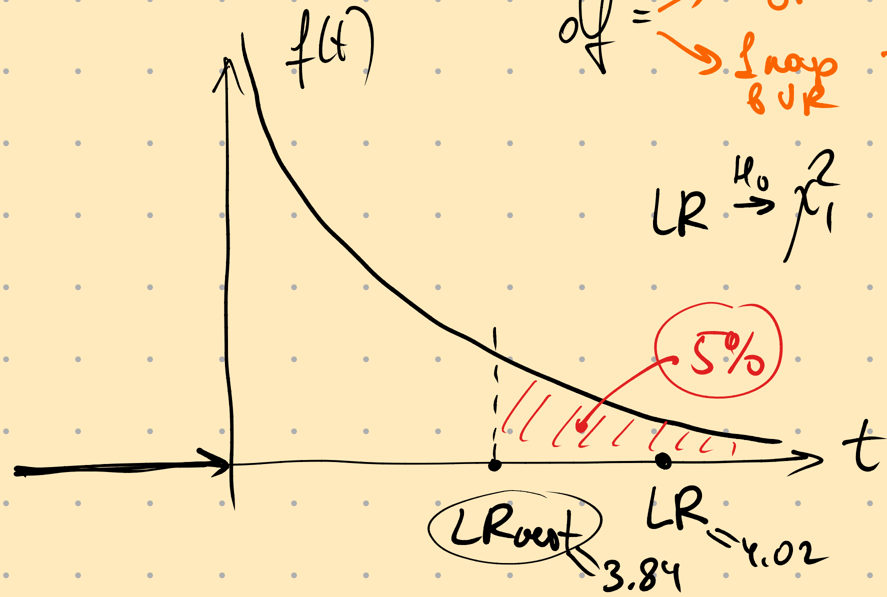
$\sum y_i = 60 \quad n=100$

$= \dots = 4.02$

при верной H_0 при $n\to\infty$ $\quad LR \xrightarrow{dist} \chi^2_{df}$

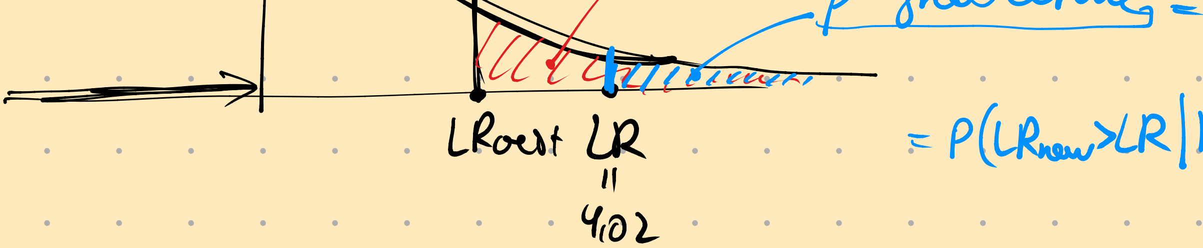
$df =$ 1 ур-ие → 1 огр в UR − 0 огр в R $= 1$ $\qquad \chi^2_1$.

$$LR \xrightarrow{H_0} \chi^2_1$$



Вывод: т.к. $\underbrace{LR}_{4.02} > \underbrace{LR_{crit}}_{3.84}$, то H_0 отвергается.

б) проведите тот же тест через p-значения.



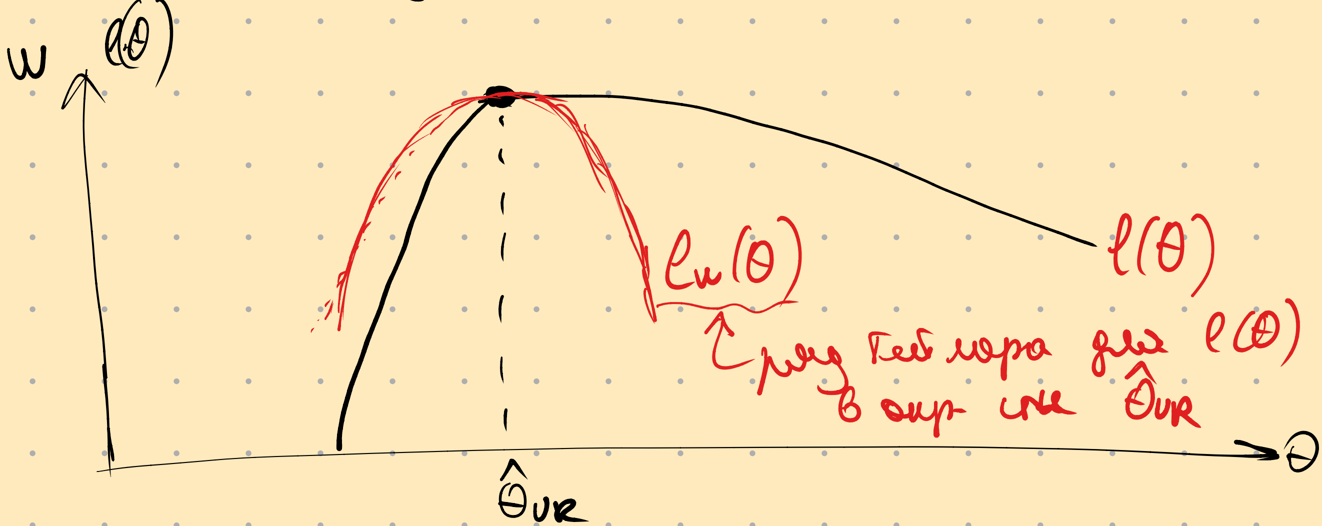
p-значение $= P(LR_{new} > LR \mid H_0, LR)$

$$= P(\chi^2_1 > 4{,}02) = 1 - F_{\chi^2}(4{,}02) = 0{,}045$$

Вывод: т.к. p-value $= 0{,}045 < 0{,}05$, то H_0 отвергается.

Недостаток LR-теста: нужно оценивать две модели: $\hat\theta_R$, $\hat\theta_{UR}$

идея: тесты W и LM позволяют избежать одну из оптимизаций!



$\boxed{\text{идея W:}}$ замена $\ell(\theta)$ на её квадр. ую аппр-цию в окрестности $\hat\theta_{UR}$

$$W = 2\cdot\left(\ell_w(\hat\theta_{UR}) - \ell_w(\hat\theta_R)\right) =$$

$$\ell_w(\theta) = \ell(\hat\theta_{UR}) + \left(\frac{\partial \ell}{\partial\theta}\right)^T\Bigg|_{\hat\theta_{UR}} \cdot (\theta - \hat\theta_{UR}) + \frac{1}{2}(\theta - \hat\theta_{UR})^T \cdot \frac{\partial^2 \ell}{\partial\theta^2}\Bigg|_{\hat\theta_{UR}} \cdot (\theta - \hat\theta_{UR})$$

в скал θ:

$$\ell_w(\theta) = \ell(\hat\theta_{UR}) + \ell'(\hat\theta_{UR})\cdot(\theta - \hat\theta_{UR}) + \frac{1}{2}\ell''(\hat\theta_{UR})\cdot(\theta - \hat\theta_{UR})^2$$

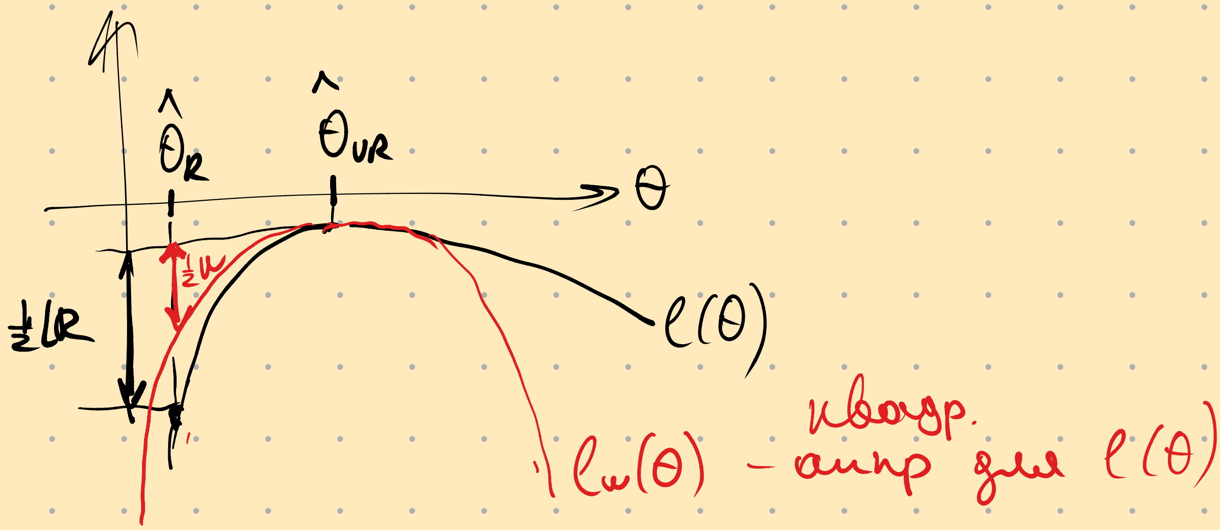
$$\left.\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right|_{\hat\theta_{UR}} = 0 \quad \Downarrow$$

$$\ell_w(\hat\theta_{UR}) = \ell(\hat\theta_{UR})$$

$$\ell_w(\hat\theta_{R}) = \ell(\hat\theta_{UR}) + \frac{1}{2}\cdot(\hat\theta_R - \hat\theta_{UR})^T \cdot \left.\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2}\right|_{\hat\theta_{UR}} \cdot (\hat\theta_R - \hat\theta_{UR})$$

$$W = (\hat\theta_{UR} - \hat\theta_R)^T \cdot \left(-\left.\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2}\right|_{\hat\theta_{UR}}\right) \cdot (\hat\theta_{UR} - \hat\theta_R)$$

$$W \xrightarrow[H_0]{dist,\ n\to\infty} \chi^2_{df} \qquad \lim_{H_0, n\to\infty} \frac{W}{LR} = 1$$



Упр

повтор, только не LR, а W

Упр.

$y_1, y_2, \ldots, y_{100}$ кедов

$P(y_i = 1) = \theta$

$P(y_i = 0) = 1 - \theta$

$H_0: \theta = \frac{1}{2}$

$H_1: \theta \neq \frac{1}{2}$

$n = 100$

$\sum y_i = 60$

а) на ур-не значимости 5% протестировать H_0 против H_A с помощью W-теста.

$$W = (\hat\theta_{UR} - \hat\theta_R)^T \cdot \left(-\left.\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2}\right|_{\hat\theta}\right) \cdot (\hat\theta_{UR} - \hat\theta_R)$$

$|\hat{\theta}_{UR}$

из предыдущего решения:

$$\hat{\theta}_{UR}=0.6 \qquad \hat{\theta}_R=\frac{1}{2} \qquad \ell(\theta)=\sum y_i\cdot\ln\theta+\left(n-\sum y_i\right)\cdot\ln(1-\theta)$$

$$\ell'(\theta)=\frac{\sum y_i}{\theta}-\frac{n-\sum y_i}{1-\theta}$$

$$\ell''(\theta)=-\frac{\sum y_i}{\theta^2}-\frac{\left(n-\sum y_i\right)}{(1-\theta)^2}$$

$$\ell''(\hat{\theta}_{UR})=-\frac{60}{0.6^2}-\frac{40}{0.4^2}=-\frac{100}{0.6}-\frac{100}{0.4}\approx-416.66\ldots$$

$$W=(0.6-0.5)\cdot417\cdot(0.6-0.5)=4.17$$

$$W\xrightarrow[H_0,\,dist]{n\to\infty}\chi^2_1$$

В скалярном случае:

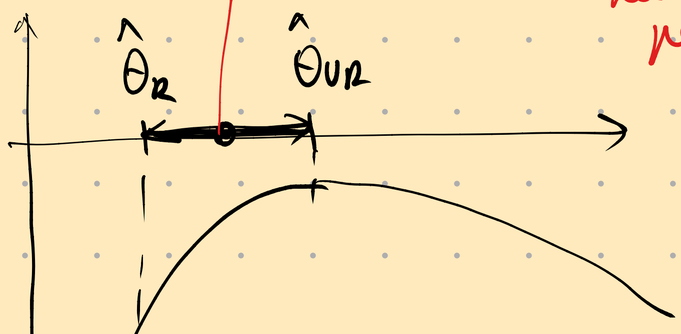
$$W=\frac{\left(\hat{\theta}_{UR}-\hat{\theta}_R\right)^2}{1/-\ell''(\hat{\theta}_{UR})}=\left(\frac{\hat{\theta}_{UR}-\hat{\theta}_R}{\sqrt{\frac{-1}{\ell''(\hat{\theta}_{UR})}}}\right)^2=\left(\frac{\hat{\theta}_{UR}-\theta_0}{se(\hat{\theta}_{UR})}\right)^2$$

предполагаемое значение пар-ра в H_0

$$-\ell''(\hat{\theta}_{UR})=\hat{I}_{UR}$$

$$\sqrt{1/\hat{I}_{UR}}=se(\hat{\theta}_{UR})$$

$$\frac{\hat{\theta}_{UR}-\theta_0}{se(\hat{\theta}_{UR})}\xrightarrow[n\to\infty,\ H_0]{dist}N(0;1)$$



W осн-ка на этой разнице.

Упр. оценили неогр модель $\hat\theta_{UR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$n = 1000$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta}\Big|_{\hat\theta_{UR}} = \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ 1 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

1ур-ие.

$H_0: \theta_1 = \theta_2$

$H_A: \theta_1 \neq \theta_2$

LR-тест:

1. надо доц-но $\hat\theta_R$ $\max\limits_{\theta_1=\theta_2} \ell(\theta)$

2. $LR = 2(\ell(\hat\theta_{UR}) - \ell(\hat\theta_R)) \xrightarrow[H_0]{n\to\infty} \chi^2_1$

в UR модели : 2 пар-ра (θ_1, θ_2)

в R модели : 1 своб. пар-р (θ_1, θ_1)

$df = $ → 1 уравн. в H_0 → $2 - 1 = 1$

$\alpha = \theta_1 - \theta_2$

$H_0: \alpha = 0$

$H_1: \alpha \neq 0$

из H_0

$$W = \left(\frac{\hat\theta_{UR} - \hat\theta_R}{se(\hat\theta_{UR})} \right)^2$$

$\hat a_{UR} = 5 - 6 = -1$

$\hat a_R = 0$

$$se(\hat a_{UR}) = \sqrt{\hat{Var}(\hat a_{UR})}$$

$$Var(\hat a_{UR}) = Var(\hat\theta_1 - \hat\theta_2) = Var(\hat\theta_1) + Var(\hat\theta_2) - 2Cov(\hat\theta_1, \hat\theta_2)$$

$$\hat{Var}(\hat\theta) = \hat I^{-1} = \left(-\frac{\partial^2\ell}{\partial\theta^2}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 20 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{199} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

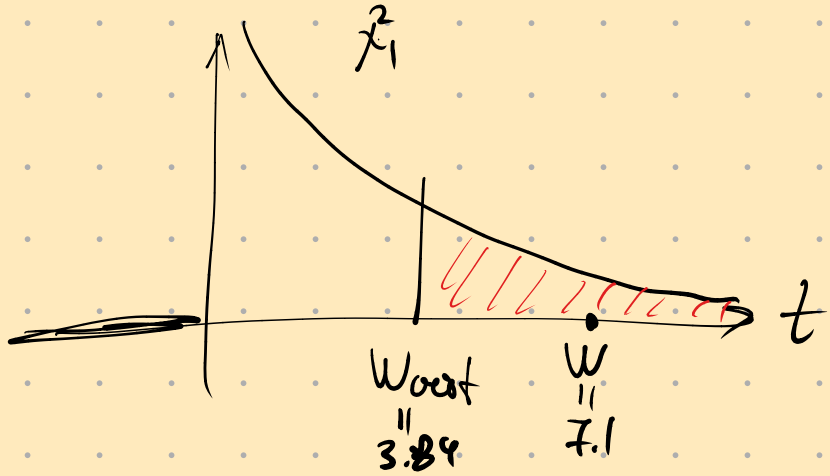
$$= \begin{pmatrix} \frac{20}{199} & \frac{1}{199} \\ \frac{1}{199} & \frac{10}{199} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Var}(\hat\theta_1) & \hat{Cov}(\hat\theta_1, \hat\theta_2) \\ \hat{Cov}(\hat\theta_1, \hat\theta_2) & \hat{Var}(\hat\theta_2) \end{pmatrix}$$

$$\hat{Var}(\hat a_{UR}) = \frac{20}{199} + \frac{10}{199} - 2 \cdot \frac{1}{199} = \frac{28}{199}$$

$$se(\hat{\Theta}_{UR}) = \sqrt{\frac{28}{199}}$$

$$W = \left(\frac{-1-0}{\sqrt{\frac{28}{199}}}\right)^2 = \frac{199}{28} \approx 7.1 \leftarrow \text{сравнив с } \chi^2_1$$

$$\boxed{\text{без квадрата: } \frac{-1-0}{\sqrt{\frac{28}{199}}}} \leftarrow \text{сравнив с } N(0;1)$$



Вывод: т.к. $W > W_{crit}$, то H_0 отвергается.