Упр. y_i – число пожаров в i-м городе

$(y_1, \ldots, y_n | \lambda) \sim$ незав Poiss(λ)

$n=3$
$y_1 = 0$
$y_2 = 2$
$y_3 = 2$

λ – неизв. пар-р. (СВ)

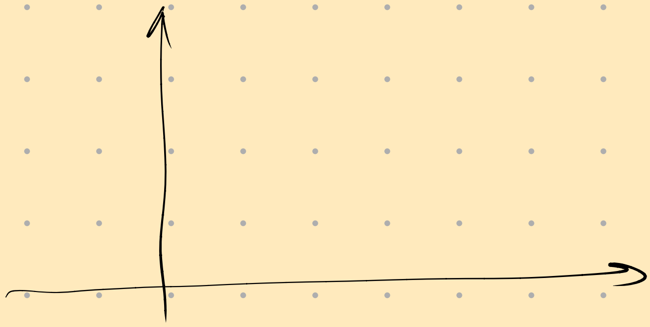
априорное распр. $\lambda \sim \text{Gamma}(3, 2)$

а) апостериорное λ $f(\lambda | y_1, y_2, y_3)$

б) $E(\lambda | y_1, y_2, y_3)$? $\text{Mode}(\lambda | y_1, y_2, y_3)$?

сравнить с априорными $E(\lambda)$, $\text{Mode}(\lambda)$?

до получения y_1, y_2, y_3 я думаю, что $\lambda \sim \text{Gamma}(1, 2)$



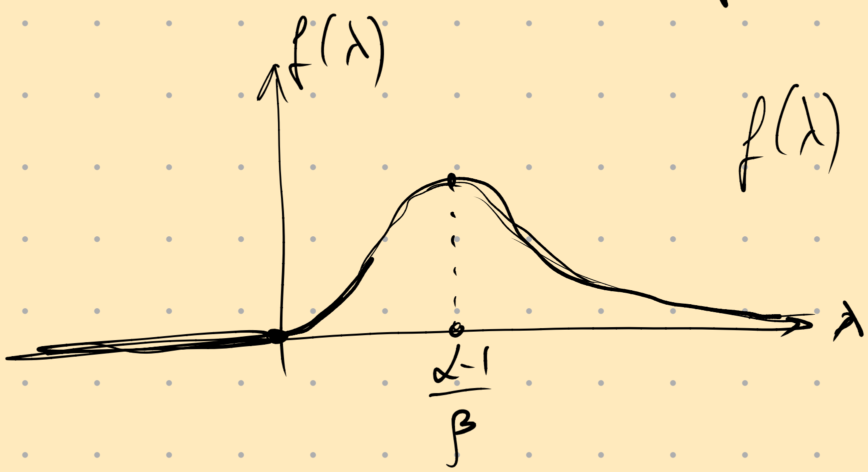
$x \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$

форма (shape) — α; интенсивн. (rate) — β

$$f(x) = \begin{cases} \boxed{\text{const}} \cdot e^{-\beta x} \cdot x^{\alpha - 1}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f(\lambda) = \begin{cases} \text{const} \cdot e^{-2\lambda} \cdot \lambda^{3-1}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f(\lambda) = \begin{cases} \text{const} \cdot e^{-2\lambda} \cdot \lambda^{2} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\beta x} \cdot x^{\alpha - 1} \\ 0 \end{cases}$$

$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$ [при целых]

$$E(\lambda) = \int_0^\infty \lambda f(\lambda)\, d\lambda = \ldots = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}5$$

$$\mathrm{Mode}(\lambda) = \arg\max_\lambda f(\lambda) = \ldots = \frac{\alpha - 1}{\beta} = \frac{3-1}{2} = 1$$

апостериорная плотность:

$$f(\lambda \mid y_1, y_2, y_3) = \frac{f(\lambda, y_1 = 0, y_2 = 2, y_3 = 2)}{P(y_1 = 0, y_2 = 2, y_3 = 2)} \propto f(\lambda, y_1 = 0, y_2 = 2, y_3 = 2) =$$

$$= f(\lambda) \cdot P(y_1 = 0, y_2 = 2, y_3 = 2 \mid \lambda) =$$

$$= \underbrace{f(\lambda)}_{\text{Gamma}(3,2)} \cdot \underbrace{P(y_1 = 0 \mid \lambda) \cdot P(y_2 = 2 \mid \lambda) \cdot P(y_3 = 2 \mid \lambda)}_{\text{Poiss}(\lambda)} \propto$$

пропорц. ! функция от λ !

$$\propto e^{-2\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{\cancel{0!}} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{\cancel{2!}} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{\cancel{2!}} \propto$$

$(y_i \mid \lambda) \sim \text{Poiss}(\lambda)$ $\quad E(y_i \mid \lambda) = \lambda$

$P(y_i = k \mid \lambda) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ $\quad \mathrm{Var}(y_i \mid \lambda) = \lambda$

$$\propto e^{-5\lambda} \cdot \lambda^6$$

апостериорная плотность

$$f(\lambda \mid y_1 = 0, y_2 = 2, y_3 = 2) = \begin{cases} \text{const} \cdot e^{-\overset{\beta}{5}\lambda} \cdot \lambda^{\overset{\alpha-1}{6}}, & \lambda \geq 0 \\ 0, & \lambda < 0 \end{cases}$$

$(\lambda \mid y_1 = 0, y_2 = 2, y_3 = 2) \sim \text{Gamma}(7, 5)$

$E(\text{Gamma}(\alpha, \beta)) = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$

$\mathrm{Mode}(\text{Gamma}(\alpha, \beta)) = \frac{\alpha - 1}{\beta}$

дискр. СВ

- равновероятная
- геом.
- биномиальн.
- гипер-геом.

СВ с плотностью.

- гамма Gamma (α, β)
- бета $[0;1]$
- экспоненц.
- ( ) ... мерное

- отриц. бином
- пуассон.
- бернулли $\{0,1\}$
- ...

- нормальное
- ...

λ, y_1, y_2, y_3, y_4

$(\lambda \mid y_1=0, y_2=2, y_3=2) \sim$
$\sim$ Гамма $(\ ; \ )$

Итог: $(\lambda \mid y_1=0, y_2=2, y_3=2) \sim$ Гамма $(7, 5)$

$$E(\lambda \mid y_1=0, y_2=2, y_3=2) = 7 \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

$$\text{Mode}(\lambda \mid y_1=0, \ldots, y_3=2) = \frac{7-1}{5} = 1{,}2$$

В общем виде.

В курсистском стиле

$$\underbrace{f_{\lambda \mid y_1, y_2, \ldots, y_n}}_{\text{всё это СВ}} \underbrace{(t \mid y_1^s, y_2^s, \ldots, y_n^s)}_{\text{точка, в к-рой считается плотность}} \propto$$

$$\propto f_\lambda(t) \cdot P(y_1 = y_1^s, y_2 = y_2^s, \ldots, y_n = y_n^s \mid \lambda = t) =$$

$$= f_\lambda(t) \cdot P(y_1 = y_1^s \mid \lambda = t) \cdot P(y_2 = y_2^s \mid \lambda = t) \cdot \ldots \cdot P(y_n = y_n^s \mid \lambda = t)$$

$$= \text{const} \cdot e^{-2t} \cdot t^2 \cdot e^{-t} \cdot \frac{t^{y_1^s}}{y_1^s!} \quad e^{-t} \cdot \frac{t^{y_2^s}}{y_2^s!} \ldots e^{-t} \cdot \frac{t^{y_n^s}}{y_n^s!}$$

$$\propto e^{-2t - nt} \cdot t^{2 + y_1^s + y_2^s + \ldots + y_n^s}$$

$$= \begin{cases} \text{const} \cdot e^{-(2+n) \cdot t} \cdot t^{2 + y_1^s + \ldots + y_n^s}, & t \geq 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$(\lambda \mid y_1 = y_1^s,\ y_2 = y_2^s, \ldots, y_n = y_n^s) \sim$$

$$\sim \text{Гамма}\left(2 + y_1^s + \ldots + y_n^s + 1,\ (2+n)\right)$$

в частном случае: $n=3$, $y_1 = 0,\ y_2 = 2,\ y_2 = 2$ $\boxed{\text{Гамма}(7, 5)}$

в вольном стиле

$$f(\lambda \mid y_1, y_2 \ldots y_n) \propto \ldots \underbrace{f(\lambda)}_{\text{плотн}} \cdot \underbrace{f(y_1 \mid \lambda) \cdot f(y_2 \mid \lambda) \cdot \ldots f(y_n \mid \lambda)}_{\text{условн. вер-сти}}$$

$$\propto e^{-2\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{y_1}}{y_1!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{y_2}}{y_2!} \cdot \ldots \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{y_n}}{y_n!}$$

$$= \begin{cases} \text{const} \cdot e^{-(2+n)\cdot\lambda} \cdot \lambda^{2+y_1+\ldots+y_n}, & \lambda \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$(\lambda \mid y_1, y_2 \ldots y_n) \sim \text{Гамма}\left(2 + \sum y_i + 1,\ 2+n\right)$$

Упр. Баскетболист бросает мяч в кольцо до 1-го попадания каждый день.

---

n - число дней

y_i – число попыток до 1-го поп-ия на i-ый день.

$n=3$, $y_1 = 3$, $y_2 = 2$, $y_3 = 2$

$$(y_1 \ldots y_n \mid p) \sim \text{независ},\ \text{Geom}(p)$$

$$P(y_i = k \mid p) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

до наблюдений априорное мнение: „баск-ст середнячок"

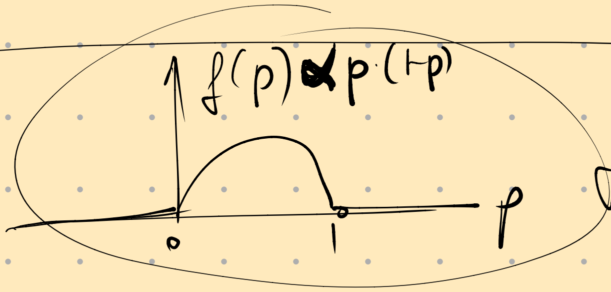
$$p \sim \text{Beta}(2, 2)$$

!! а) $E(p)$? $\text{Mode}(p)$?

б) $f(p|y_1=3, y_2=2, y_3=2)$

$E(p|y_1=3, \dots y_3=2)$?
$\text{Mode}(p|y_1=3, \dots y_3=2)$?

$f(p)$



$$f(p) = \begin{cases} const\cdot p^1\cdot(1-p)^1 & p\in[0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$E(p) = \frac{1}{2}$ $\text{Mode}(p) = \frac{1}{2}$

$W \sim Beta(\alpha, \beta)$
$E(W) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$
$\text{Mode}(W) = \frac{\alpha-1}{\alpha-1+\beta-1}$

$$f(p|y_1=3, y_2=2, y_3=2) \propto f(p)\cdot P(y_1=3|p)\cdot P(y_2=2|p)\cdot P(y_3=2|p) =$$

$$\propto \underbrace{p^1\cdot(1-p)^1}_{\text{априор плотн.}} \cdot (1-p)^2\cdot p^1 \cdot (1-p)^1\cdot p \cdot (1-p)^1\cdot p =$$

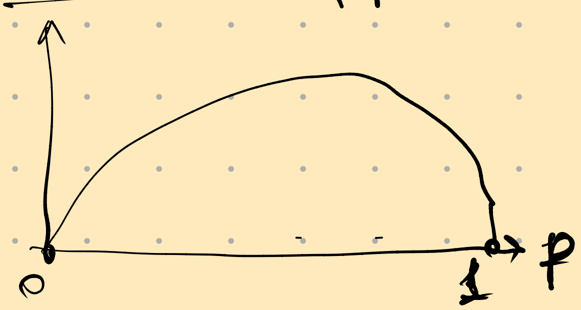
$$= p^4\cdot(1-p)^5 \propto \begin{cases} const\cdot p^4\cdot(1-p)^5, & p\in[0;1] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

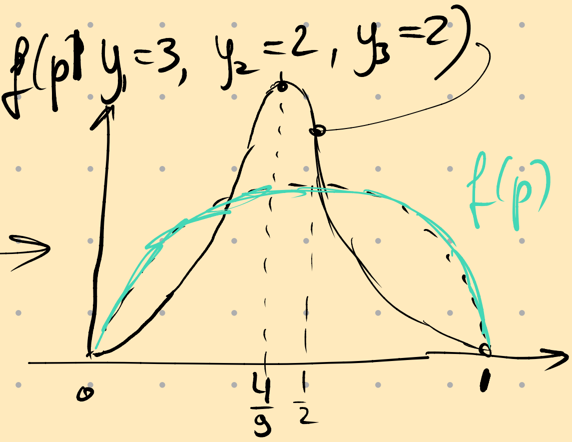
$$(p|y_1=3, y_2=2, y_3=2) \sim Beta(5, 6)$$

апостериорное $E(p|y_1=3, y_2=2\ y_3=2) = \frac{5}{5+6}$

$$\text{Mode}(p|y_1=3, y_2=2, y_3=2) = \frac{5-1}{5-1+6-1} = \frac{4}{9}$$

до получения наблюдений
априорно $f(p)$





$$(p \mid y_1, y_2, \dots, y_n) \sim \text{Beta}\left(1+n+1\ ;\ 1+\sum_{i=1}^{n}(y_i-1)+1\right)$$

$$\sim \text{Beta}\left(n+2\ ;\ \Sigma y_i - n + 2\right)$$