Лекция 5

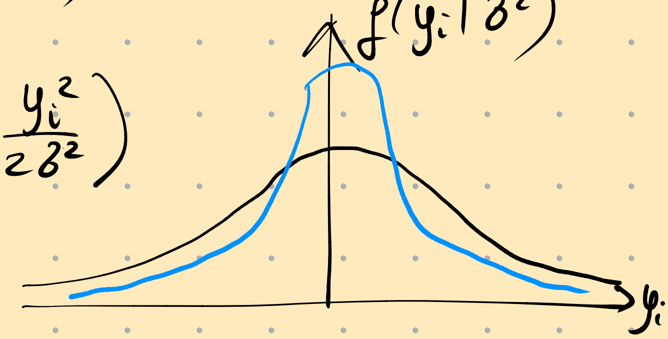
Было:
→ BI в рамках байесовского подхода
→ CI асимпт. с помощью дельта-метода /на примере мет. моментов/

Сегодня:
→ CI для Θ для метода максим. правдоп.
- дельта-метод.
- стат. результаты спец-ые для метода макс. правдоподобия.

$\boxed{\text{Упр}}$ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ независимы $N(0; \sigma^2)$
а) метод. макс. правд. $\hat{\sigma}^2$
б) асимпт. CI для σ^2 [95%] [дельта-мет. ЦПТ]

$$L(y_1 \ldots y_n | \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i | \sigma^2) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{y_i^2}{2\sigma^2}\right)$$



$$\ell(\sigma^2) = \ln L = \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{1}{2}(\ln 2\pi + \ln \sigma^2) - \frac{y_i^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} - \frac{y_i^2}{2(\sigma^2)^2} \cdot (-1)$$

$$\sum\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\hat{\sigma}^2} + \frac{y_i^2}{2\hat{\sigma}^4}\right) = 0.$$

[можно проверить $\ell'' < 0$]

$$\sum\left(-\hat{\sigma}^2 + y_i^2\right) = 0$$

$$-n \cdot \hat{\sigma}^2 + \sum y_i^2 = 0$$

$$\boxed{\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum y_i^2}{n}}$$

$n = 1000$
$\sum y_i^2 = 4000$

$$\hat{\sigma}^2 = 4$$

б) $\boxed{95\% \text{ asy CI?}}$ $\quad P(\sigma^2 \in [\,?\,;\,?\,]) \to 0.95$

ЦПТ строго: если: $w_1, w_2, \ldots, w_n \sim$ незав одинак. распр. $/E(w_i) = \mu < \infty$, $Var(w_i) = \sigma^2 < \infty/$

то: $$\frac{\sum w_i - E(\sum w_i)}{\sqrt{Var(\sum w_i)}} \xrightarrow[n\to\infty]{dist} N(0;1)$$

Боевое: $$\sum w_i \overset{approx}{\sim} N(?\,;\,?)$$

ЦПТ. строго: $$\frac{\frac{\sum y_i^2}{n} - E\left(\frac{\sum y_i^2}{n}\right)}{\sqrt{Var\left(\frac{\sum y_i^2}{n}\right)}} \xrightarrow{dist} N(0;1)$$

$n = 1000$

практ.: $$\frac{\frac{\sum y_i^2}{n} - E(\cdot)}{\sqrt{Var(\cdot)}} \overset{approx}{\sim} N(0;1)$$

$$E\left(\frac{\sum y_i^2}{n}\right) = \frac{n \cdot E(y_i^2)}{n} = E(y_1^2) = Var(y_1) + (E(y_1))^2 =$$
$$= \sigma^2 + 0^2 = \sigma^2$$

$$Var\left(\frac{\sum y_i^2}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot Var(y_1^2) = \frac{1}{n}\left[Var(y_1^2)\right] =$$
$$= \frac{1}{n} \cdot \left[E(y_1^4) - (E(y_1^2))^2\right] = \frac{E(y_1^4)}{n}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma^2 & & & \\ & \sigma^2 & & \\ & & \sigma^2 & \\ & & & \sigma^2 \end{pmatrix}\right)$$

$$E(y_1^2) = \sigma^2$$
$$E(y_1^4) = \int_{-\infty}^{\infty} y_1^4 \cdot f(y_1)\, dy_1$$ ← верно, но лень !!

Теорема [Иссерлис] Если: $\begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_4 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix}; C\right)$

то $E(R_1 R_2 R_3 R_4) =$ сложить все возможные:

тренвы

$\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$ 0

$\mu_1\mu_2 C_{34}$ 0

$C_{12}C_{34}$

$$E(y_1^4) = E(y_1 \, y_2 \, y_3 \, y_4) = \underbrace{\sigma^2 \cdot \sigma^2}_{C_{12} C_{34}} + \underbrace{\sigma^2 \sigma^2}_{C_{14} C_{23}} + \underbrace{\sigma^2 \cdot \sigma^2}_{C_{13} C_{24}} = 3\sigma^4$$

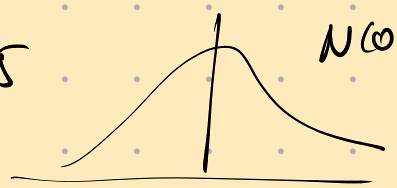
ЦПТ:
$$\frac{\frac{\sum y_i^2}{n} - \sigma^2}{\sqrt{\frac{3\sigma^4}{n}}} \overset{appr.}{\sim} N(0;1)$$

неуб-ая

$$P\left(-1{,}96 \leq \frac{\hat{\sigma}^2 - \sigma^2}{\sqrt{\frac{3(\hat{\sigma}^2)^2}{n}}} \leq 1{,}96\right) \approx 0{,}95$$

$$\sigma^2 \approx \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum y_i^2}{n}$$

N(0;1)



решаем нерав-во:

$$\sigma^2 \in \left[\hat{\sigma}^2 - 1{,}96\sqrt{\frac{3(\hat{\sigma}^2)^2}{n}} ; \hat{\sigma}^2 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{3\hat{\sigma}^2}{n}}\right]$$

реализация CI: $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum y_i^2}{n}$

$$\sigma^2 \in \left[4 - 1{,}96\sqrt{\frac{12}{1000}} ; 4 + 1{,}96\sqrt{\frac{12}{1000}}\right]$$

Терминология

$\ell(\theta)$ – лог-ф-ция правдоподобия

- $\ell'(\theta)$ $\quad \frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta_1}, \ldots \frac{\partial \ell}{\partial \theta_p}\right)$ – score-function.
- $Var(\ell'(\theta))$ $\quad Var\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right) = \begin{bmatrix} Var\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta_1}\right) & Cov\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \ell}{\partial \theta_2}\right) & \ldots \\ Cov\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta_2}, \frac{\partial \ell}{\partial \theta_1}\right) & Var\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta_2}\right) & \ldots \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$

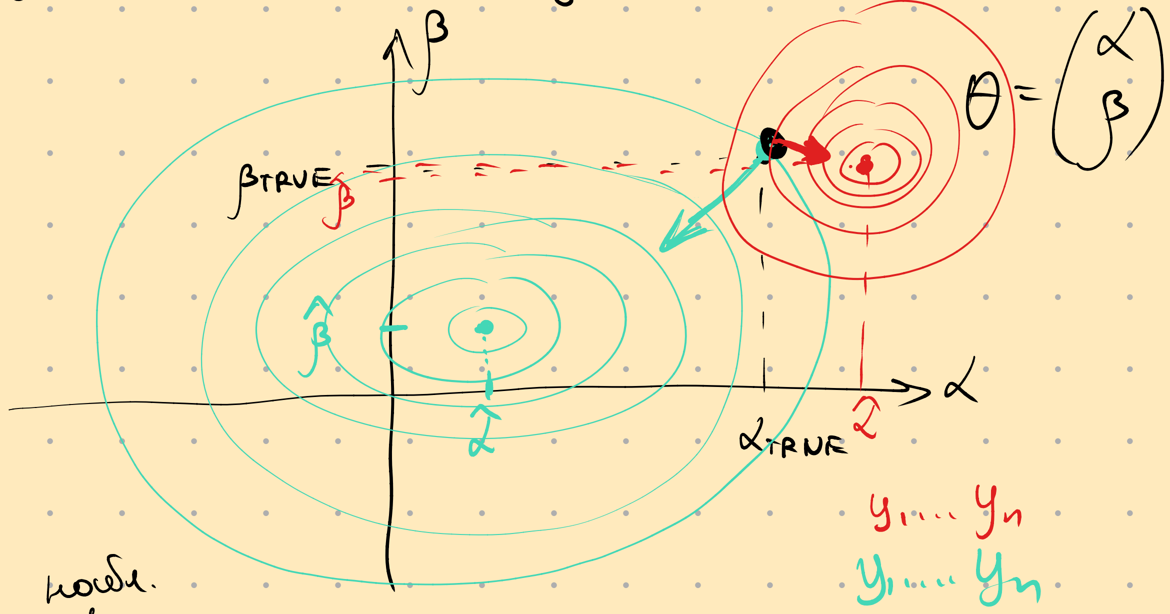
информация Фишера

$I_F = Var(\ell'(\theta))$ /θ скаляр/

$I_F = Var\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right)$ /θ-вектор/

матрица.

в точке истинного значения параметра.



$$l(\underbrace{y_1 \dots y_n}_{\text{набл.}} | \alpha, \beta) \longrightarrow \max_{\alpha, \beta}$$

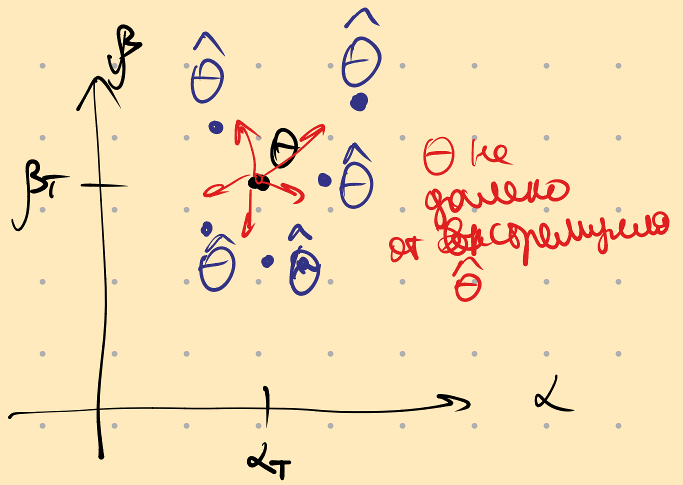
$\hat\alpha, \hat\beta$

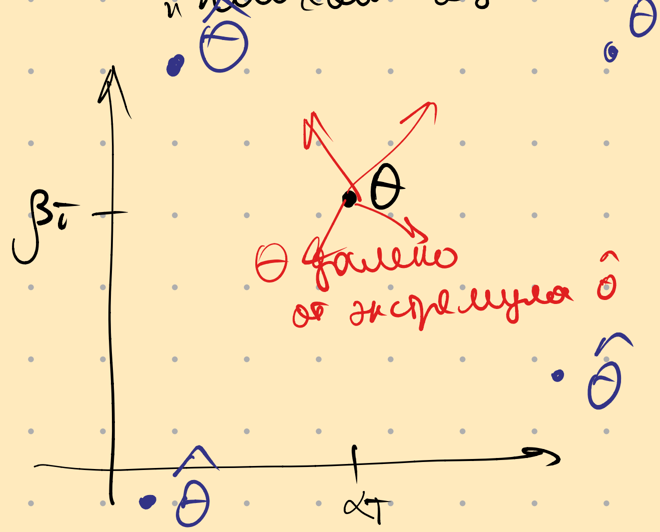
$I_F = Var\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right)$

$\frac{\partial l}{\partial \theta}$ — градиент — случ-ный вектор

ситуация „хорошей" оценки

ситуация „плохой" оценки





идея, интуиция

интуиция $Var(l'(\theta))$ — сколько много о неизв-м параметре θ в среднем несёт выборка.

<u>Теорема</u> если (выполнены условия регуляр-ности) то: $E\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right) = 0$.

!! польза: – в док-ве – легко считать $E(.)$

$$Var\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right) = E\left(\frac{\partial l}{\partial \theta} \cdot \left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right)^T\right) = -E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \theta \partial \theta^T}\right)$$

регулярность правдоп-ия [есть родные шару] $f(y_1 \dots y_n | \theta)$ – совм. плотн.

(!) ① множество $\{f(y_1 \dots y_n|\theta) > 0\}$ не зависит от θ.

② $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ существует

③ можно переставлять произв. и интеграл для $f(y_1 \dots y_n|\theta)$

специально под док-во

техн

[док-во] для скалярного

Шаг 1

$$E\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right) = \int\limits_{y_1} \dots \int\limits_{y_n} \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \cdot f(y_1 \dots y_n|\theta)\, dy_1\, dy_2 \dots dy_n =$$

y_i – СВ
θ – конст.

$$\ell = \ln f(y_1 \dots y_n)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \frac{1}{f(y_1 \dots y_n)} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

$$= \int\limits_{y_1} \dots \int\limits_{y_n} \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot f\, dy_1 \dots dy_n =$$

$$= \int\limits_{y_1} \dots \int\limits_{y_n} \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot dy_1 \dots dy_n =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta} \boxed{\int\limits_{y_1} \dots \int\limits_{y_n} f(y_1 \dots y_n)\, dy_1 \dots dy_n} = \frac{\partial 1}{\partial \theta} = 0.$$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right) = E\left(\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right)^2\right) - \underbrace{\left(E\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right)\right)^2}_{0} = E\left(\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right)^2\right)$$

Шаг 2

$$\ell = \ln f \qquad \frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \frac{1}{f} \cdot f'$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2}\right) = \qquad \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} = \left(\frac{f'}{f}\right)'_\theta =$$

$$= E\left(\frac{f'' \cdot f - f' \cdot f'}{f^2}\right) = \qquad = \frac{f'' f - f' f'}{f^2}$$

$$= \int_y \frac{f''f - f'f'}{f^2} \cdot f \cdot dy = \int_y f'' dy - \int \frac{f'}{f} \cdot \frac{f'}{f} \cdot f\, dy =$$

$y \in \mathbb{R}^n$

$\boxed{f' = \frac{\partial f}{\partial \theta}}$

переставим $''$ и $\int$

$$= \left(\int_y f\, dy\right)''_{\theta\theta} - E\left(\frac{f'}{f} \cdot \frac{f'}{f}\right) = 1''_{\theta\theta} - E(\ell' \cdot \ell')$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2}\right) = -E\left(\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right)^2\right) \qquad E\left(\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right)^2\right) = Var\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right).$$

Теорема

Если [условия регулярности] [$y_1 \dots y_n$ ~ нез., один. расп.] то

$\hat\theta$ - оценка макс. правд.

① [скалярно]

$$\frac{\hat\theta - \theta}{\sqrt{Var(\hat\theta)}} \xrightarrow[n\to\infty]{dist} N(0;1)$$

$P(\theta \in [\hat\theta - 1.96\sqrt{Var}; \hat\theta + 1.96\sqrt{Var}]) \to 0.95$

[векторно]

$$(Var(\hat\theta))^{-\frac{1}{2}}(\hat\theta - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{dist} N(0; I)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

②

$$Var(\hat\theta) \cdot I_F \xrightarrow{n\to\infty} 1 \quad \text{(скал.)}$$

$Var(\hat\theta) \approx I_F^{-1}$

$$Var(\hat\theta) \cdot I_F \xrightarrow{n\to\infty} I$$

I_F — инфо Фишера; I — ед. матрица

③

$$-\left.\frac{\partial^2 \ell}{\partial\theta\partial\theta^T}\right|_{\hat\theta} \cdot I_F^{-1} \xrightarrow{prob} 1 \quad (I)$$

$$(-H) \cdot I_F^{-1} \to 1$$

$\hat I_F = -H$

$(-H)$ — минус матрица Гессе

на практике!

Упр: $\hat\sigma^2 = \frac{\sum y_i^2}{n}$, $\hat\sigma^2 = 4$

① посчитали $\hat\theta$

② посчитали H (м-цу Гессе)

$$\hat I_F = -H$$

③ посчитаем $\widehat{Var}(\hat{\theta}) = \hat{I}_F^{-1}$

④ построим CI для θ.

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2} - \frac{y_i^2}{2(\sigma^2)^2}\cdot(-1)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l}{(\partial \sigma^2)^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)}{(\sigma^2)^2} + \frac{y_i^2}{2(\sigma^2)^3}\cdot(-2)\right) = \Big|_{\hat{\sigma}^2=4}$$

$$= +\frac{n}{2\sigma^4} - \frac{\sum y_i^2}{\sigma^6} = \frac{1000}{2\cdot 16} - \frac{4000}{64} =$$

$$= -31.25 = H$$

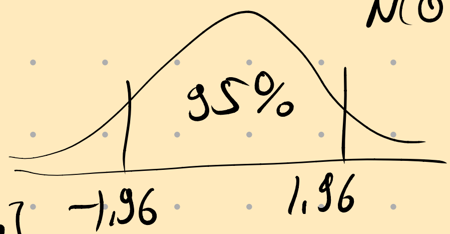
$$\hat{I}_F = -H = 31.25$$ ← оценка инфо Фишера

$$\widehat{Var}(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{31.25} \approx 0.032$$ ← оценка дисперсии оценки параметра.

строим CI (асимпт)

$$P\left(-1.96 \le \frac{\hat{\theta}-\theta}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\theta})}} \le 1.96\right) \to 0.95 \quad n\to\infty$$

$N(0;1)$



асу CI:

$$\theta \in \left[\hat{\theta} - 1.96\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\theta})};\ \hat{\theta} + 1.96\cdot\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\theta})}\right]$$

реализация дов. инт.:

$$\theta \in \left[4 - 1.96\cdot\sqrt{0.032};\ 4 + 1.96\cdot\sqrt{0.032}\right]$$

// □