Вредно ли? 1/

Упр. $y_1, y_2, \dots, y_n$ ~ незав., $Expo(\lambda)$

Найдите $\hat{\lambda}$ метод максимального правдоподобия.

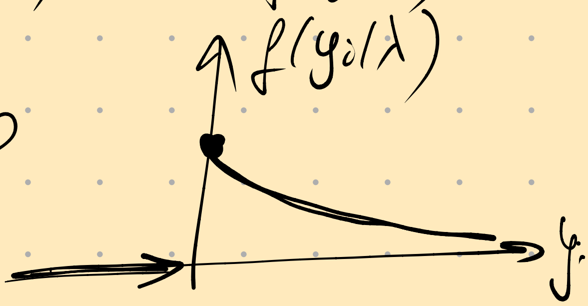
$n=5$: $\boxed{y_1=5 \quad y_2=3 \quad y_3=6 \quad y_4=7 \quad y_5=10}$

в дискретном: $\max_{\lambda} \underbrace{P(y_1=5, y_2=3, \dots y_5=10 | \lambda)}_{=0}$

при наличии совместной плотности: $\max_{\lambda} f(y_1, \dots, y_5 | \lambda)$

$$f(y_1 \dots y_n | \lambda) = f(y_1|\lambda) \cdot f(y_2|\lambda) \cdot \ldots \cdot f(y_n|\lambda) =$$

$$f(y_i|\lambda) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda y_i}, & y_i > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



$$= \lambda \cdot e^{-\lambda y_1} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda y_2} \cdot \ldots \cdot \lambda e^{-\lambda y_n}$$

наблюдаем: $\boxed{y_1\ y_2 \dots y_n}$

неизв. параметр: λ. хотим найти $\hat{\lambda}$.

$$\boxed{\max_{\lambda} f(y_1 \dots y_n | \lambda)}$$

! Логарифм. !

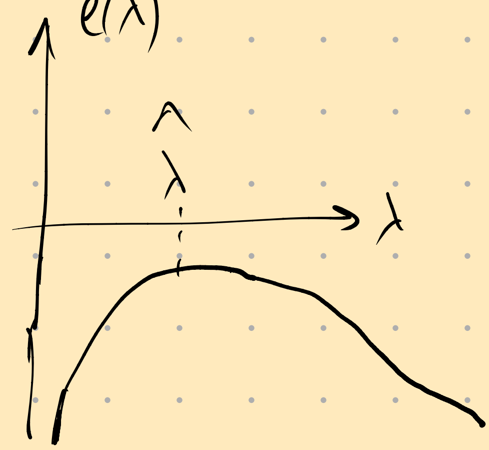
$$\ell(\lambda) = \ln f = \ln\left(\lambda^n \cdot e^{-\lambda y_1} \cdot e^{-\lambda y_2} \cdot \ldots \cdot e^{-\lambda y_n}\right) =$$

$$= n \cdot \ln\lambda - \lambda y_1 - \lambda y_2 - \dots - \lambda y_n$$

! $\boxed{\text{Ловушка}}$.

! может быть

$\boxed{\lambda \geq 0}$ ← может быть угловое/краевое решение.



$$l'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - y_1 - y_2 - \dots - y_n$$

$l'(\lambda) = 0$ → формально

$$\frac{n}{\hat\lambda} - y_1 - y_2 - \dots - y_n = 0.$$

то, что произошло, это самое частое событие.

$$\frac{n}{\hat\lambda} = y_1 + \dots + y_n$$

оценка метода максим-го правдоп-ия. → $\hat\lambda = \frac{n}{y_1 + y_2 + \dots y_n}$

! Метод моментов и метод максим-го правдоп-ия не всегда дают совп-ие оценки.

$$\hat\lambda = \frac{5}{5 + 3 + \dots + 10}$$

$\boxed{\text{Терминология:}}$

$\hat\lambda = \frac{n}{y_1 + \dots y_n}$ | $\hat\lambda = \frac{n}{y_1 + \dots + y_n}$ estimator

оценка

$\hat\lambda = \frac{5}{5 + 3 + \dots + 10}$ | $\hat\lambda = \frac{5}{5 + 3 + \dots + 10}$ estimate

Упр. $y_1, y_2, \dots, y_n \sim Unif[-a;a]$ незав.

$n=5$ $\quad y_1=5 \quad y_2=3 \quad y_4=-7 \quad y_5=10$

$y_3=-8$

Найдём оценку $\hat{a}$ методом максим-го правдоподобия.

$$P(y_1=5, y_2=3, y_3=-8, y_4=-7, y_5=10 \mid a) = 0$$

т.к. есть совм. плотн.

$$\max_a f(y_1, y_2, \dots, y_n \mid a)$$

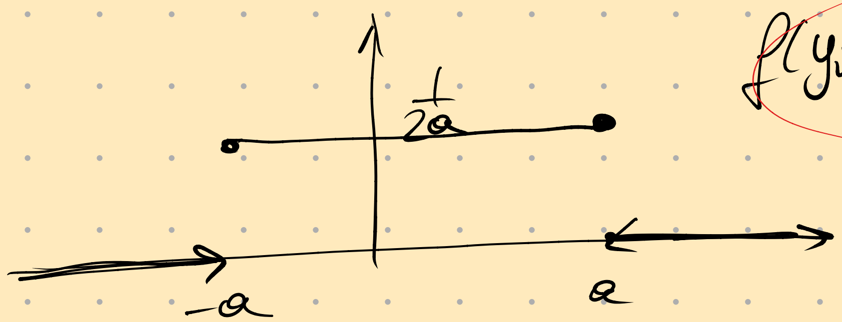
$$f(y_1, \dots, y_n \mid a) = f(y_1 \mid a) \cdot f(y_2 \mid a) \cdot \ldots \cdot f(y_n \mid a)$$

незав $y_1 \dots y_n$

Заглянем в ловушку!

Сейчас спец-но идёт неправ. реш-ие!

$$f(y_i \mid a) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & y_i \in [-a;a] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



ошибка!

$$f(y_1, \dots, y_n \mid a) = \cancel{\frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{2a} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2a}}$$

$$\ell(a) = \ln f = \ln\left(\left(\frac{1}{2a}\right)^n\right) = n \cdot \ln\left(\frac{1}{2a}\right) = -n \ln(2a) =$$

$$= -n \ln 2 - n \ln a.$$

$$\ell'(a) = -\frac{n}{a}$$

$$-\frac{n}{\hat{a}} = 0 \qquad \hat{a} \text{ нет!!}$$

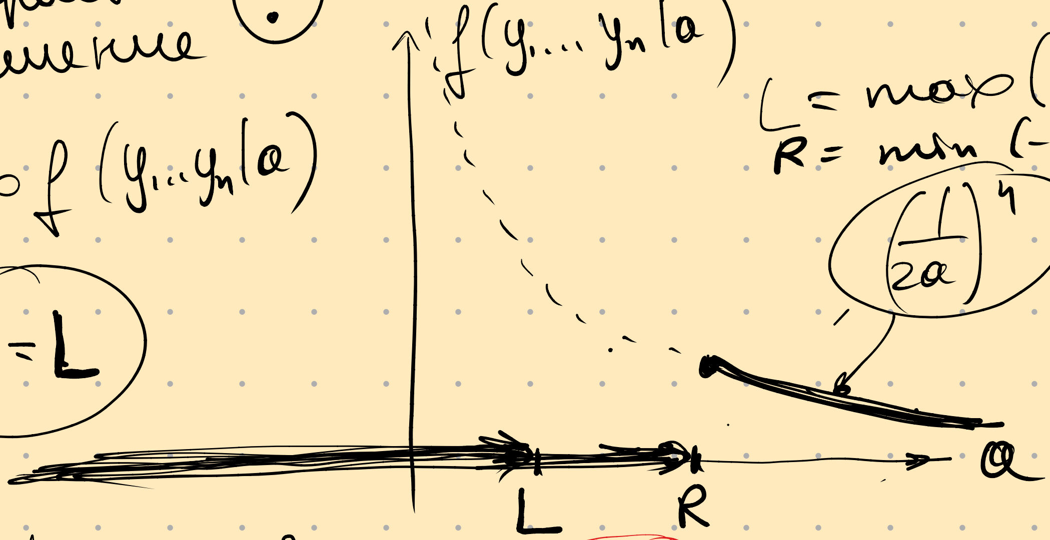
Правильное решение:

$$f(y_1 \dots y_n | a) = \begin{cases} \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{2a}\cdots\frac{1}{2a}, & \text{если: } \begin{cases} y_1\in[-a;a] \\ y_2\in[-a;a] \\ \vdots \\ y_n\in[-a;a]\end{cases} \\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

(!) Краевое решение (!)

$$\max_a f(y_1 \dots y_n | a)$$

$$\hat a = L$$



$L = \max(y_1 \dots y_n)$

$R = \min(-y_1, -y_2, \dots, -y_n)$

(неизв. пар-р)

$$\begin{cases} y_1\in[-a;a] \\ y_2\in[-a;a] \\ \vdots \end{cases} \to \begin{cases} -a \le y_1 \le a \\ -a \le y_2 \le a \\ \vdots \\ -a \le y_n \le a \end{cases} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{cases} a \geq y_1 \\ a \geq -y_1 \\ a \geq y_2 \\ a \geq -y_2 \\ \vdots \end{cases}$$

$-8, -7, 3, 5, 10$

$L = 10$

$R =$

$a \geq y_1, \; a \geq y_2 \dots \Rightarrow$ $a \geq \max(y_1 \dots y_n)$

$a \geq -y_1, \; a \geq -y_2 \dots \Rightarrow$ $a \geq \min(-y_1, -y_2, \dots -y_n)$

$$\boxed{\begin{aligned} L &= \max(y_1 \dots y_n) \\ R &= \min(-y_1, -y_2, \dots -y_n)\end{aligned}}$$

$a \geq \max(L, R)$

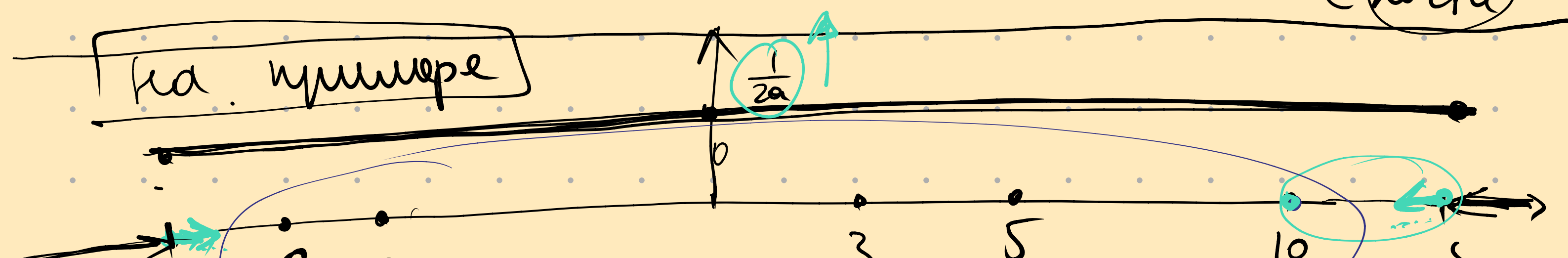
оценка метода максимального правд.

$\hat a = \max(L, R)$

$$\boxed{\hat a = \max(|y_1|, |y_2|, \dots |y_n|)}$$

почти

на примере



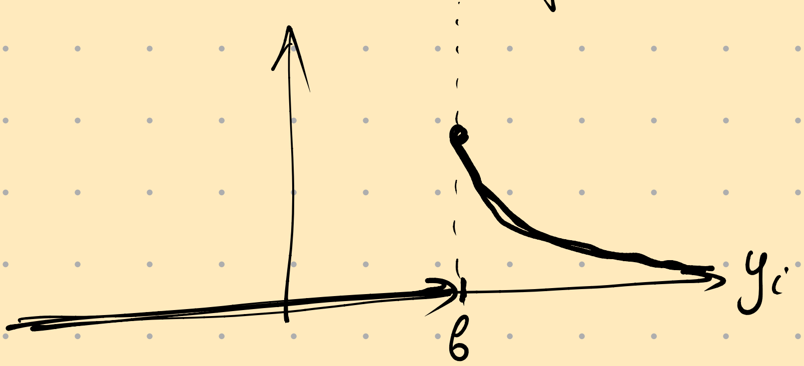
$-a \quad -8 \quad -7$

$-a \le y_1, y_2, \dots y_n \le a$ $\quad$ (ad) $\quad \frac{1}{2a}$ ↑

$\hat{a} = 10 \quad [\max(y_1 \dots y_n)]$

Упр. $y_1, y_2 \dots y_n$ ~ незав и имеют ф-цию плотности.

$$f(y_i|\lambda, b) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (y_i - b)}, & y_i \ge b \\ 0, & y_i < b \end{cases}$$



Найдите оценки $\hat{\lambda}$ и $\hat{b}$ методом максим-го правдоподобия.

$$\max_{\lambda, b} f(y_1 \dots y_n|\lambda, b) \longrightarrow \boxed{\hat{\lambda}, \hat{b}}$$

(!) Ловушка (!)

$$\max_{\lambda, b} f(y_1 \dots y_n|\lambda, b) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda(y_1 - b)} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda(y_2 - b)} \cdots \lambda e^{-\lambda(y_n - b)} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

если $\begin{cases} y_1 \ge b \\ y_2 \ge b \\ y_3 \ge b \\ \vdots \\ y_n \ge b. \end{cases}$

$$f = \begin{cases} \lambda^n \cdot \exp(-\lambda y_1 + \lambda b - \lambda y_2 + \lambda b \dots - \lambda y_n + \lambda b) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$\begin{cases} b \le y_1 \\ b \le y_2 \end{cases} \qquad b \le \min(y_1 \dots y_n) = L$

$$\begin{cases} \\ \vdots \\ b \le y_n \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} \lambda^n \cdot \exp(-\lambda \cdot y_1 - \lambda y_2 - \ldots - \lambda y_n + n \cdot \lambda \cdot b) & \boxed{\text{если } b \le L} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f \to \max_{\lambda, b}$$

относительно b ф-ция : возрастает

$\boxed{\text{оптим-ое } \hat{b} = L}$

краевое решение

подставим оптим-ое $\hat{b}$ и промаксими-зируем по λ.

$$f = \lambda^n \cdot \exp(-\lambda y_1 - \lambda y_2 \ldots - \lambda y_n + n \cdot \lambda \cdot L)$$

$$\max_{\lambda} f \iff \max_{\lambda} \ln f$$

$$l(\lambda) = \ln f = n \cdot \ln \lambda - \lambda y_1 - \lambda y_2 \ldots - \lambda y_n + n \lambda L$$

$$l'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - y_1 - y_2 - \ldots y_n + nL$$

по λ

$$\frac{n}{\hat{\lambda}} - y_1 - y_2 \ldots - y_n + n \cdot L = 0.$$

$$\frac{n}{\hat{\lambda}} = \sum y_i - nL$$

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum y_i - nL}$$

Ответ:

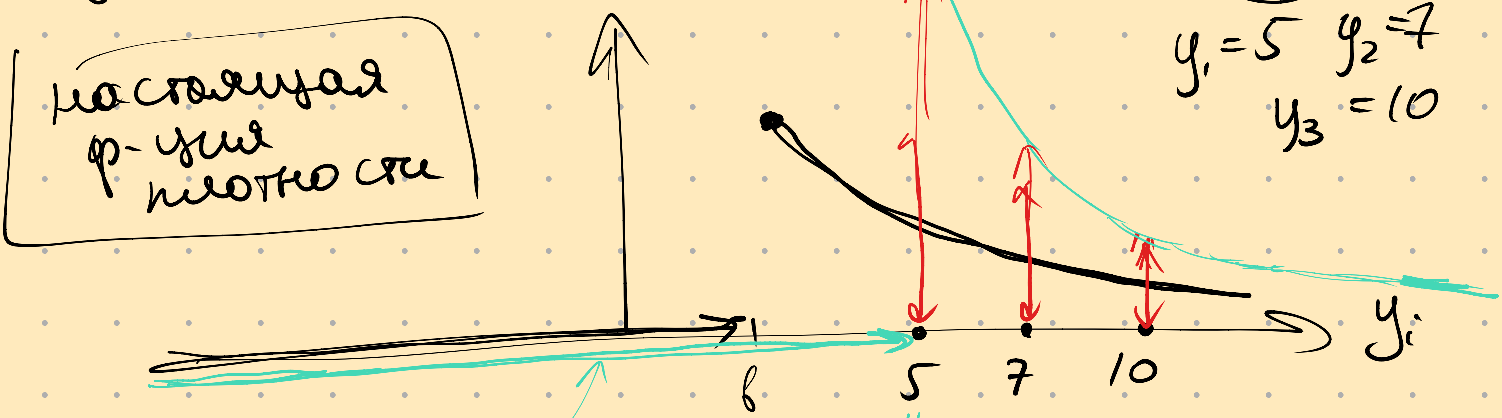
$$\begin{cases} \hat{b} = L \\ \hat{\lambda} = \dfrac{n}{\sum y_i - nL} \end{cases}, \text{ где } L = \min(y_1 \dots y_n)$$

$b \le y_1 \quad b \le y_2 \quad b \le y_3$

$n=3$

$y_1 = 5 \quad y_2 = 7$

$y_3 = 10$



наша оценка ф-ции плотности

$5 = \hat{b} = L = \min(y_1, y_2, y_3)$

$\hat{b} \le y_1 \quad \hat{b} \le y_2 \quad \hat{b} \le y_3$

$\sum y_i - nL \ge 0$ $\quad \hat{\lambda} \ge 0$

разумное