Непараметрические тесты.

Общая идея.

Ситуация: $X_1 \dots X_{n_X}$ — случ. выборка из Law_X
$Y_1 \dots Y_{n_Y}$ — случ. выборка из Law_Y

законы распр. Law_X, Law_Y не известны.

→ классич. тесты $H_0: \mu_X = \mu_Y$
$H_1: \mu_X \neq \mu_Y$

м. быть медленной

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{se(\bar{X} - \bar{Y})} \xrightarrow[n_X, n_Y \to \infty]{dist} N(0;1)$$

$$se(\bar{X} - \bar{Y}) = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n_X} + \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{n_Y}}$$

Идея: потеряем (созн-но) часть инфо из выборок. Оставим только: $+ + + - - + - \dots$
ранги наблюдений.

Выигрыш: точное распр-ие при верной H_0 даже при малых n_X и n_Y.

Тест знаков (sign test)
[вар-т для двух выборок]

(X_1, Y_1)
(X_2, Y_2)
$\vdots$
(X_n, Y_n)

$X_1 \dots X_n$ — некий пок-ль до воздействия

$Y_1 \dots Y_n$ — тот же пок-ль после возд.

предп.: $D_i = Y_i - X_i$ один-во распр-ны, независимы
непрерывны

$P(D_i = d) = 0$
$P(D_i = D_j) = 0$ при $i \neq j$

$$H_0: \; p = P(D_i > 0) = \frac{1}{2}$$

$H_1: \ p > \frac{1}{2}$

тест знаков.

X_i	Y_i	$Sign_i$
2.2	6.7	+1
7.2	1.5	0
⋮		
2.8	3.9	+1

$W = \sum_{i=1}^{n} Sign_i$ — кол-во $\oplus$ (кол-во пар, где $Y_i > X_i$)

предп на X_i и Y_i слабые!

Теорема: при верных предп-х и H_0

$W \sim Bin(n, 0.5)$

(по опр-ию биноми-го распр)

Критерий: если $W \geq W_{crit}$, то H_0 отвергается

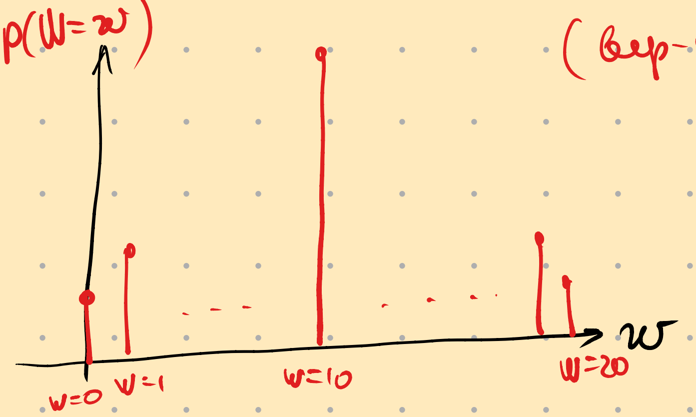
$W < W_{crit}$, то H_0 не отвергается

(вер-сти при H_0)

уровень значимости

$\alpha = 0.05$

$n = 20$



при H_0:

$P(W \geq 15) = 0.021...$

$P(W \geq 14) = 0.058$

⋮

с комп.

критерий: если $W \geq 15$, то H_0 отвергается

если $W \leq 14$, то H_0 не отверг.

$P(\text{отв. } H_0 \mid H_0 \text{ верна}) = 0.021$

p-значение $= P(W_{new} \geq W \mid H_0, W)$

→ построить дов. интервал для p.

[двусторонний]

$\boxed{\text{вар-т простой}}$ (через норм-ую аппроксимацию)

$$\hat{p} = \frac{W}{n}$$

Вильсона.

$$-z_{cr} \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq z_{crit}$$

⇒ решить кв. ур.

$[\hat{p}_L; \hat{p}_R]$

$\boxed{0.5 \in [\hat{p}_L; \hat{p}_R] \, ?}$

Вальда:

$$-z_{cr} \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \leq z_{crit}$$

⇒ решить лин. ур.

$$\begin{cases} H_0: p = 0.5 \\ H_1: p \neq 0.5 \end{cases}$$

[односторонний]

$0.5 \in [\hat{p}_L; 1]$? —— $\begin{cases} H_0: p = 0.5 \\ H_1: p < 0.5 \end{cases}$

$0.5 \in [0; \hat{p}_R]$? —— $\begin{cases} H_0: p = 0.5 \\ H_1: p > 0.5 \end{cases}$

Тест Манна-Уитни (Mann-Whitney)

[много имён, тест суммы рангов Уилкоксона..]

Wilcoxon rank-sum test

„Mann-Whitney U-test"

„U-тест Манна-Уитни"

Описание:

$X_1 \ldots\ldots X_{n_x}$

$Y_1 \ldots\ldots Y_{n_y}$

$X_1 \ldots X_{n_x} \; Y_1, Y_2 \ldots Y_{n_y}$

предположения:

① все набл. нез-мы

[есть вар-ты] ② $X_i \sim Law_x$ непр..

$Y_i \sim Law_y$ непр.

$H_0: Law_x \sim Law_y$

$H_1: P(X_i > Y_j) > \frac{1}{2}$

алгоритм: R_X – сумма рангов иксов.

$$R_X = \sum_{i=1}^{n_X} R_i^X$$

R_Y – сумма рангов игреков.

$$R_Y = \sum_{i=1}^{n_Y} R_i^Y$$

располагаем набл-ния по возрастанию.

пример.: X: 2.7, 3.5, 4.9
Y: 2.2, 3.3

	Y	X	Y	X	X
	2.2,	2.7,	3.3,	3.5,	4.9
ранги:	1,	2,	3,	4,	5

$R_X = 2+4+5 = 11 \leftarrow$ похоже на сумму числа обгонов.

$R_Y = 1+3 = 4.$

две версии теста

напрямую с рангами.

$R_X \overset{H_0}{\sim}$ спец. распр.

$E(R_X) \overset{H_0}{=}$

$Var(R_X) \overset{H_0}{=}$

критерий:
если $R_X \geq R_X^{crit}$, то H_0 отвергается.

$R_X = 11$

перейти от рангов к „число преимуществ"
„число обгонов"

	$X_1=2.7$	$X_2=3.5$	$X_3=4.9$
$Y_1=2.2$	1	1	1
$Y_2=3.3$	0	1	1

ставим 1, если $X_i > Y_j$.

$U_X = 5$

$U_X \overset{H_0}{\sim}$ спец. распр.

$E(U_X) = \ldots$

$Var(U_X) = \ldots$

упр. как U_X связано с R_X

ответ: ранги - это же сумм-ое число обгонов при сор-ии всех иксов всех.

теорема: $R_X = U_X + \dfrac{n_X \cdot (n_X+1)}{2}$

критерий: если $U_x \geq U_x^{crit}$, то H_0 отвергается

$$Var(R_x) = Var(U_x)$$
$$E(R_x) = E(U_x) + \frac{n_x \cdot (n_x+1)}{2}$$
$$R_x^{crit} = U_x^{crit} + \frac{n_x(n_x+1)}{2}$$

$$E(U_x) = \frac{n_x \cdot n_y}{2}$$ (половина таблички n_x на n_y)

$$Var(U_x) = Var(R_x) = \frac{n_x \cdot n_y \cdot (n_x + n_y + 1)}{12}$$ (неделю назад)

для малых n_x и n_y:

→ распр-ие R_x и U_x являются спец-ми. (есть в таблицах, пробито в гот-х ф-циях)

→ при n_x и $n_y \to \infty$

Теорема: Если H_0 верна, то

$$\frac{R_x - E(R_x)}{\sqrt{Var\, R_x}} \xrightarrow[n_x, n_y \to \infty]{dist} N(0;1) \qquad \frac{U_x - E(U_x)}{\sqrt{Var\, U_x}} \xrightarrow[n_x, n_y \to \infty]{dist} N(0,1)$$

похожий тест Wilcoxon signed rank test (тест знаковых рангов Уилкоксона)

Описание:

(X_1, Y_1)

$\vdots$

(X_n, Y_n)

X_i – до воздействия

Y_i – после воздействия

предп.: $D_i = X_i - Y_i$ один. непр. расп. незав.

$\boxed{\text{Алгоритм.}}$

$$WSR = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{sign(D_i)} \cdot \underbrace{Rank(|D_i|)}$$

$x_i \quad y_i$	D_i	$rank\|D_i\|$
$(2.7, 3.2)$	0.5	1
$(6.5, 11.3)$	4.8	3
$(2.8, 1.7)$	-1.1	2

$$WSR = 1 + 3 - 2$$

H_0: Law (D_i) симметр-но отн-но 0.

H_1: Law (D_i) симм-но отн-но $\mu_D < 0$.

При верной H_0 $WSR \sim$ спец. распр-ие.

$$\boxed{\begin{array}{c} E(WSR) \overset{H_0}{=} 0 \\ Var(T) = \dfrac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6} \end{array}}$$