Семинар 3

несмещенность / состоятельность / эффективность

полезное нер-во. **Неравенство Йенсена**

Если h - выпуклая $\boxed{\cup}$, то $E(h(X)) \geqslant h(E(X))$

Если h - строго выпуклая и $Var(X) > 0$, то $E(h(X)) > h(E(X))$

Упр. $X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots \sim$ незав $expo(rate = \lambda)$

неизв-ый пар-р

!! а) $\hat{\lambda}$ метод. моментов?

!! б) $\hat{\lambda}$ несмещенная?

в) $\hat{\lambda}$ состоятельная?

а) ЗБЧ: $\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{prob} E(X_1) = \frac{1}{\lambda}$

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \frac{1}{\hat{\lambda}}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{X_1 + \ldots + X_n}$$

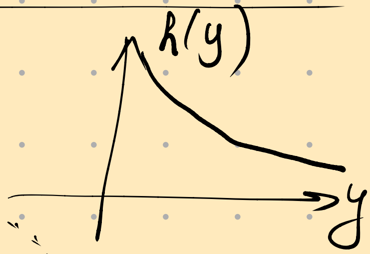
б) $E(\hat{\lambda}) = E\left(\frac{n}{X_1 + \ldots + X_n}\right) =$

$\boxed{\cup}$ стр. вып. $h(y) = y^2$ $h'' = 2 > 0$

$h(y) = \frac{n}{y}$

строго выпуклая

$\boxed{\text{дост:}}$ $h''(y)$



$= E\left(\frac{n}{X_1 + \ldots + X_n}\right) > \frac{n}{E(X_1 + \ldots + X_n)} = \frac{n}{n \cdot E(X_1)} = \frac{1}{E(X_1)} =$

нер-во Йенсена

$= \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \lambda$

$E(\hat{\lambda}) > \lambda$ $\hat{\lambda}$ - смещенная

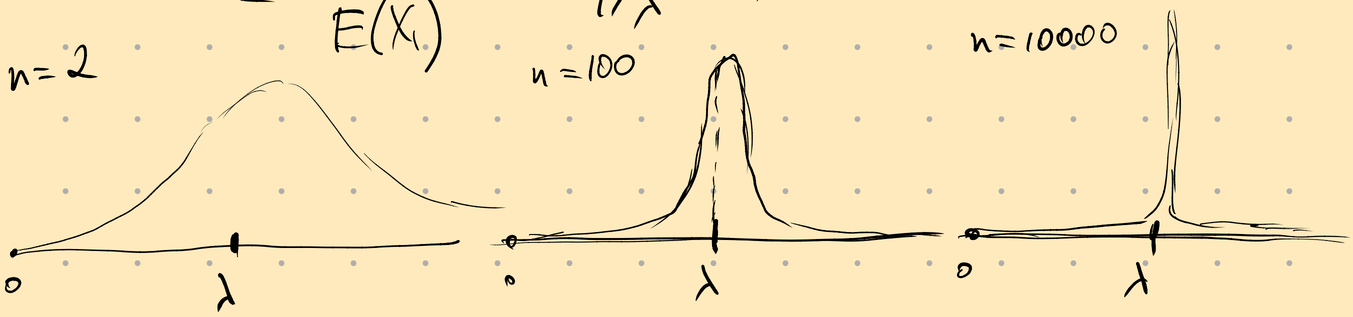
при фиксир-м n

в) состоятельность послед-сти $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3 \ldots)$

$$\left(\frac{1}{X_1}, \frac{2}{X_1+X_2}, \frac{3}{X_1+X_2+X_3}, \dots\right)$$

$$\operatorname{plim} \frac{n}{X_1+X_2+\dots+X_n} = \operatorname{plim} \frac{1}{\left(\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}\right)} \overset{\text{перест-ка plim и непр. ф-ции}}{=} \frac{1}{\operatorname{plim} \frac{X_1+\dots+X_n}{n}} \overset{\text{ЗБЧ}}{=}$$

$$= \frac{1}{E(X_1)} = \frac{1}{1/\lambda} = \lambda$$



Упр. $X_1, X_2, \dots, X_n \sim$ нерав, $E(X_i)=\mu$, $Var(X_i)\neq\sigma^2$ незав-но.
n - фиксир-но. $[n=100]$

$C = \{$ линейные по X_i // несмещённые оценки $\mu \}$

!! а) приведите по 2 примера $\hat{\mu} \in C$ и $\hat{\mu} \notin C$

? б) выберите в классе C наиболее эфф-ективную (по MSE).

пример1 $\hat{\mu} = X_1^2 + \cos X_2 \notin C$ $\quad$ $\hat{\mu}$ - нелин. по X_i

---

пример2 $\hat{\mu} = X_1 + 5X_2$ $\quad$ $E(\hat{\mu}) = E(X_1+5X_2) = \mu + 5\mu = 6\mu \neq \mu$

$\hat{\mu}$ - лин. по X_i смещённая $\quad$ $\hat{\mu} \notin C$

пример3 $\hat{\mu} = \frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_3$ $\quad$ $E(\hat{\mu}) = \frac{1}{3}E(X_1) + \frac{2}{3}E(X_2) =$

$= \frac{1}{3}\mu + \frac{2}{3}\mu = \mu$

$\hat{\mu} \in C$

пример4 $\hat{\mu} = 2X_1 - 3X_2 + 2X_7$ $\leftarrow$ лин. по X_i

$E(\hat{\mu}) = 2\cdot\mu - 3\mu + 2\mu = \mu$ $\quad$ $\hat{\mu} \in C$

5) догадка? наиболее эфф. оц. из C

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\cdot X_1 + \frac{1}{n}\cdot X_2 + \ldots + \frac{1}{n}\cdot X_n$$

проверим!

$$\boxed{MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}-\theta))^2}$$

в классе C несмещ-ые $\boxed{E(\hat{\theta}) = \theta}$ $\quad E(\hat{\theta}-\theta) \overset{?}{=} 0$

для класса C: $MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta})$

ищем в класс C оценку с наим. меньш $Var(\hat{\theta})$.

$$\hat{\theta} = \alpha_1\cdot X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n \cdot X_n \qquad \min_{\alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}} Var(\hat{\theta})$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n = 1$$

$$Var(\hat{\theta}) = Var(\alpha_1 \cdot X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n) =$$

$$= \alpha_1^2 \cdot Var(X_1) + \alpha_2^2 \cdot Var(X_2) + \ldots + \alpha_n^2 \cdot Var(X_n) =$$

$$= (\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2)\cdot \sigma^2$$

Задача без статистики:

$$\boxed{\begin{array}{l} \min\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \\ \text{при}\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1 \end{array}}$$

идея 1. свести к безусловному

$\to \alpha_1 = 1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \ldots - \alpha_n$

$$g(\alpha_2 \ldots \alpha_n) = (1-\alpha_2 - \ldots - \alpha_n)^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \to \min_{\alpha_2 \ldots \alpha_n}$$

идея 2. метод множ. Лагранжа

$$L(\alpha_1 \ldots \alpha_n, \lambda) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 + \lambda\cdot(1 - \alpha_1 - \alpha_2 \ldots - \alpha_n)$$

F.O.C. $\begin{cases} \partial L / \partial \lambda = 0 \\ \partial L / \partial \alpha_i = 0 \end{cases}$

идея 4. по индукции.

идея 3. через т. Пифагора.

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

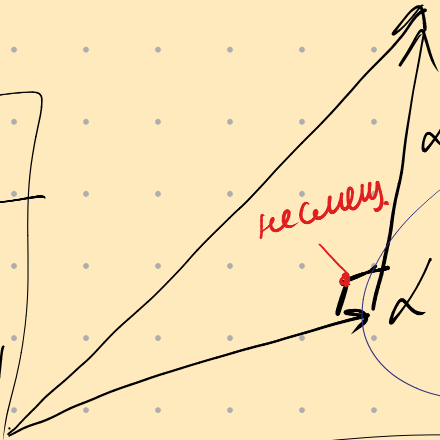
Цель: $\min Var(\hat{\lambda})$.

$\min(\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2)$

$\min \|\alpha\|^2$

выбирать α покороче!

несмещённость



$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$\alpha - \alpha^*$

несмещ.

$$\alpha^* = \begin{pmatrix} 1/n \\ 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}$$ — фикс. вектор

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$$

$$\alpha - \alpha^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \frac{1}{n} \\ \alpha_2 - 1/n \\ \alpha_3 - 1/n \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\alpha - \alpha^* \perp \alpha^*}$$

$$\langle \alpha - \alpha^*, \alpha^* \rangle = \left(\alpha_1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + \left(\alpha_2 - \frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + \ldots + \left(\alpha_n - \frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} =$$

$$= \sum \alpha_i \cdot \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n^2}\right) \times n =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0.$$

чтобы $\min \|\alpha\|^2$ берём $\alpha - \alpha^* = 0$

Упр 7.12 $X_i \sim$ незав экспон $Expo(\lambda)$ λ - неизв.

$n = 20$ лампочек.

$$X_{min} = \min(X_1, \ldots, X_{20})$$

набл: X_{min}

$(X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ не видим$)$

Сконструируйте несмещенную оценку для $\mu = E(X_i)$.

решение: $E(X_i) = \frac{1}{\lambda} = \mu$

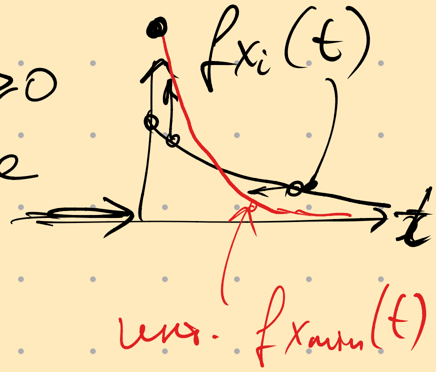
метод моментов? $? \ E(X_{min}) = $ $\boxed{\text{интуиция} < \frac{1}{\lambda}}$

$$E(X_{min}) = \int_0^{\infty} t \cdot f_{X_{min}}(t)\, dt$$

$\boxed{\text{ф. плотности } f_{X_{min}}(t)\ ?}$

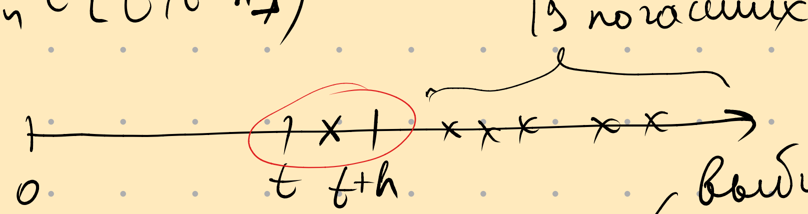
для любого фиксир-го X_i ф. плотн

$$f_{X_i}(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



рассуждение!

$$P(X_{min} \in [t; t+h]) =$$



выбираем одну из 20

$$= o(h) + 20 \cdot P(X_1 \in [t; t+h]) \cdot P(X_2 \geq t) \cdot P(X_3 \geq t) \cdot \ldots \cdot P(X_{20} \geq t)$$

$$= o(h) + 20 \cdot f_{X_1}(t) \cdot h \cdot \left(\int_t^{\infty} f_{X_i}(u)\, du \right)^{19} =$$

$$= o(h) + 20 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot h \cdot \left(e^{-\lambda t}\right)^{19} =$$

$$= o(h) + \underbrace{\boxed{20 \cdot \lambda \cdot e^{-20\lambda t}}}_{f_{X_{min}}(t)} \cdot h$$

рассуждение 2

$$P(X_{min} > t) = P(X_1 > t, X_2 > t, \ldots, X_{20} > t)$$

$$= \left(P(X_1 > t)\right)^{20} = \left(\int_t^{\infty} f_{X_1}(u)\,du\right)^{20} =$$

$$= \left(e^{-\lambda t}\right)^{20} = e^{-20\lambda t}$$

$$f_{X_{min}}(t) = F'_{X_{min}}(t) = \frac{dP(X_{min} \le t)}{dt} =$$

$$= \frac{d\left(1 - \exp(-20\lambda t)\right)}{dt} = 20 \cdot \lambda \cdot \exp(-20\lambda t)$$

$E(X_{min})$?

$$f_{X_{min}}(t) = \begin{cases} 20 \cdot \lambda \cdot \exp(-20\lambda t), & t \geq 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$X_i \sim Expo(\lambda)$

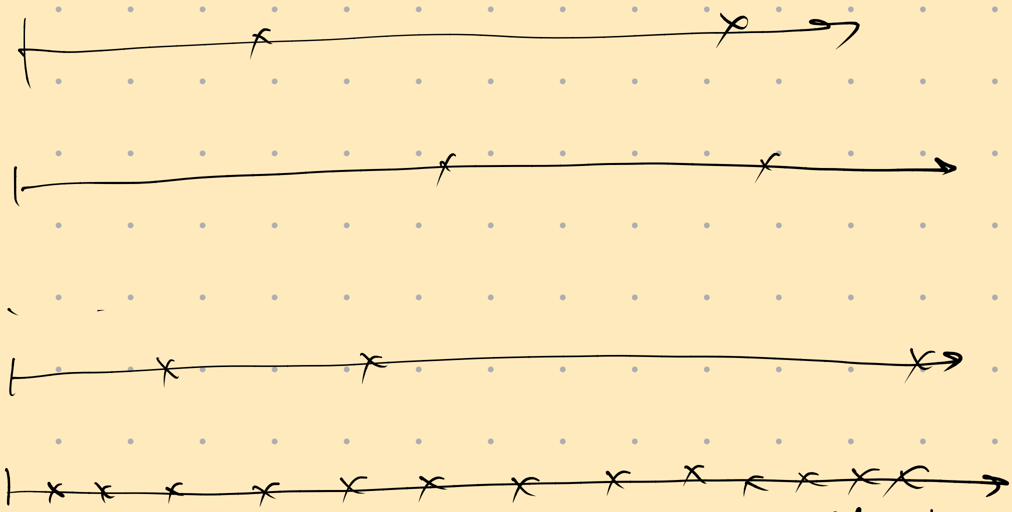
$X_{min} \sim Expo(20\lambda)$

лампа 1

лампа 2

лампа 20

в комб.



цель: несмещённо

$\hat{\mu}$ для $\mu = \frac{1}{\lambda}$

$$E(X_{min}) = \frac{1}{20\lambda}$$

$$E(X_{min}) = \frac{1}{20} \cdot \mu$$

X_{min} – смещённ (заниж.) оценка для μ.

$\hat{\mu} = 20 \cdot X_{min}$ – несмещённая для μ

$$E(\hat{\mu}) = 20 \cdot E(X_{min}) = 20 \cdot \frac{1}{20}\mu = \mu$$!!

б) $\hat{\mu}_n = n \cdot \boxed{\min(X_1, \ldots, X_n)}$

будет ли послед-сть сост-ой?

нет !!

$$P(\hat{\mu}_n > \mu + 1) \not\to 0$$

$\varepsilon = 1$

сост: $P(|\hat{\mu}_n - \mu| > \varepsilon) \to 0$