→ дельта - метод №4 CI для a асу.

Упр) $X_1, \dots, X_n$ ~ незав. $F(x) = \begin{cases} x^a/2^a & x \in [0;2] \\ 0, & x<0 \\ 1, & x>2 \end{cases}$

а) $\hat{a}_{MM}$? ММ = метод моментов

б) с помощью оценки метода моментов постройте оценку для $b = P(X>1)$

в) найдите $se(\hat{a})$, $se(\hat{b})$

г) 99% асу CI для a.
95% асу CI для b.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} a x^{a-1}/2^a, & x \in [0;2] \\ 0, & x \notin [0;2] \end{cases}$$

есть варианты:

по умолч.!! $E(X_1) = \dots$

$E(X_1^2) = \dots$

$E(X_1^{2025}) = \dots$

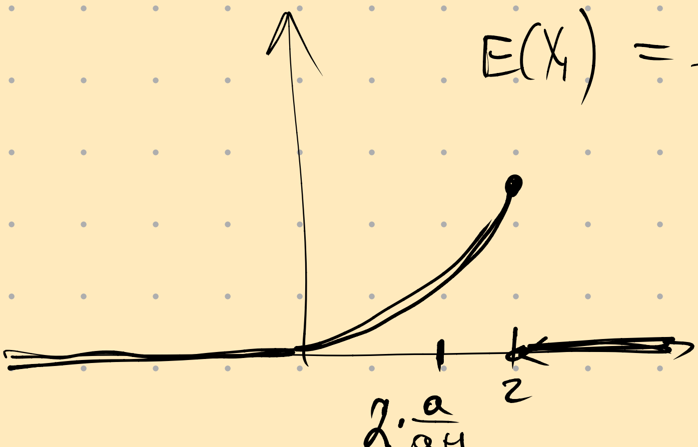
$E(\cos X_1) = \dots$

$E(\ln X_1) = \dots$

В теории:

$$E(X_1) = \int_0^2 x \cdot f(x)\,dx = \int_0^2 x \cdot a x^{a-1}/2^a\,dx = \frac{a}{2^a}\int_0^2 x^a\,dx = \frac{a}{2^a} \cdot \frac{x^{a+1}}{a+1}\Bigg|_{x=0}^{x=2} =$$

$$E(X_1) = \frac{a \cdot 2^{a+1}}{2^a \cdot (a+1)} = \frac{a}{a+1} \cdot 2 \in [0;2] \quad a>0$$



$a = 1000000$

$E(X_1) \approx 2$

Теор. результат **Метод моментов.**

$$E(X_1) = 2 \cdot \frac{a}{a+1} \qquad \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = 2 \cdot \frac{\hat{a}}{\hat{a}+1}$$

$a \to \hat{a}$

$E(X_1) \to \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$

$$\bar{X} = \frac{2\hat{a}}{\hat{a}+1} \qquad (\hat{a}+1)\cdot\bar{X} = 2\hat{a}$$

$$\hat{a}\bar{X} + \bar{X} = 2\hat{a}$$

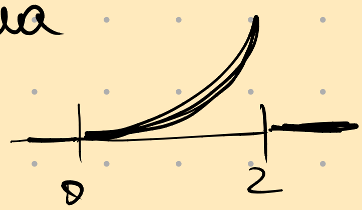
$$\hat{a} = \frac{\bar{X}}{2 - \bar{X}}$$

[общ. рек: получил ответ → проверь в крайних случаях]

$$\bar{X} = 1{,}9999 \Rightarrow \hat{a} \approx \frac{2}{0.0001} = 20000$$

a - велико $\Rightarrow \bar{X} \approx 2 \Rightarrow 2 - \bar{X} \approx 0 \Rightarrow$ $Var(\hat{a})$ велика

a - велико $\Rightarrow I_F$ мала



б) $b = P(X_i > 1) = P(X_1 > 1) =$

$$= \int_1^2 f(x)\,dx = \ldots$$

$$F(x) = \begin{cases} x^a/2^a & x \in [0;2] \\ 0, & x < 0 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$= P(X \le 2) - P(X \le 1) = 1 - F(1)$$

быстрее

$$= 1 - \frac{1^a}{2^a} = 1 - \frac{1}{2^a} \quad \Downarrow$$

$$b = 1 - \frac{1}{2^a} \qquad \hat{b} = 1 - \frac{1}{2^{\hat{a}}} = 1 - 2^{-\hat{a}} =$$

$$= 1 - 2^{\frac{\bar{X}}{\bar{X}-2}} \quad \Downarrow$$

в) $se(\hat{a}) = \sqrt{\widehat{Var}(\hat{a})}$

дельта-метод.

$\boxed{\text{идея! замените оценку на линейную аппроксимацию около истинного значения пар-ра}}$

$$\hat{a} = \frac{\bar{X}}{2-\bar{X}} = \frac{\bar{X}-2+2}{2-\bar{X}} = -1 + \frac{2}{2-\bar{X}}$$

нелинейная ф-ция от $\bar{X}$

$$\hat{a} = h(\bar{X}) = -1 + \frac{2}{2-\bar{X}}$$

$$h(t) = -1 + \frac{2}{2-t} \approx \boxed{h(\mu) + h'(\mu)\cdot(t-\mu)}$$

находим

$\mu = E(X_1)$

З.Б.Ч. $\operatorname{plim} \bar{X} = E(X_1) = \mu$

точка, в окрестности к-рой будем раскладывать,

$$\mu = \frac{2a}{a+1} \qquad h(\mu) = -1 + \frac{2}{2-2\frac{a}{a+1}} =$$

$$= -1 + \frac{1}{1-\frac{a}{a+1}} = -1 + \frac{a+1}{a+1-a} =$$

$$= -1 + a + 1 = a$$

$$h(\mu) = a$$

$$h'(t) = \left(-1 + \frac{2}{2-t}\right)' = 2\cdot(2-t)^{-2}$$

$$h'(\mu) = h'\left(\frac{2a}{a+1}\right) = 2\cdot\left(2 - \frac{2a}{a+1}\right)^{-2} = 2\cdot\left(\frac{2a+2-2a}{a+1}\right)^{-2} =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{2}{a+1}\right)^{-2} = \frac{(a+1)^2}{2}$$

!

$$h(t) = -1 + \frac{2}{2-t} \approx a + \frac{(a+1)^2}{2}\cdot\left(t - \frac{2a}{a+1}\right)$$

нет a неизв. $\xrightarrow{\Downarrow}$ куча неизв-х a

по t нелин $\xrightarrow{\Downarrow}$ линейна по t

$$\hat{a} = h(\bar{X}) \approx a + \frac{(a+1)^2}{2}\cdot\left(\bar{X} - \frac{2a}{a+1}\right)$$

с.в.

неслуч.

стало легко считать $E(\hat{a}) \approx$ $\boxed{Var(\hat{a}) \approx}$

$$Var(\hat{a}) = E(\hat{a}^2) - \left(E(\hat{a})\right)^2$$

(если точно) ⇓

$$E(\hat{a}) = E\left(\frac{\bar{X}}{2-\bar{X}}\right) \overset{\text{точно}}{=} \int\int\int\ldots\int \frac{\bar{x}}{2-\bar{x}} f(x_1 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

$\bar{X}$ – нелинейн. закон

$$Var(\hat{a}) \approx Var\left(a + \frac{(a+1)^2}{2}\left(\bar{X} - \frac{2a}{a+1}\right)\right) = \left(\frac{(a+1)^2}{2}\right)^2 \cdot Var(\bar{X}) =$$

конст

$$= \frac{(a+1)^4}{4} Var\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{(a+1)^4}{4} \cdot \frac{Var(X_1) \cdot n}{n^2} =$$

$$= \frac{(a+1)^4}{4} \cdot \frac{Var(X_1)}{n}$$

⇓

$$Var(X_1) = E(X_1^2) - \left(E(X_1)\right)^2$$

$$E(X_1) = 2\frac{a}{a+1} \quad (\text{было})$$

$$E(X_1^2) = \int_0^2 x^2 \cdot f(x)\,dx = \int_0^2 x^2 \cdot a x^{a-1} / 2^a \, dx =$$

$$= \frac{a}{2^a}\int_0^2 x^{a+1}\,dx = \frac{a}{2^a} \cdot \frac{x^{a+2}}{a+2}\Bigg|_{x=0}^{x=2} =$$

$$= \frac{a \cdot 2^{a+2}}{2^a \cdot (a+2)} = \frac{4a}{a+2}$$

$$Var(X_1) = \frac{4a}{a+2} - \left(\frac{2a}{a+1}\right)^2 = \frac{4a}{a+2} - \frac{4a^2}{(a+1)^2}$$

⇓

$$\boxed{Var(\hat{a}) \approx \frac{(a+1)^4}{4} \cdot \frac{Var(X_1)}{n}} = \frac{(a+1)^4}{4} \cdot \left(\frac{4a}{a+2} - \frac{4a^2}{(a+1)^2}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{(a+1)^4}{n} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{a+2} - \frac{a}{(a+1)^2}\right)$$

$$\hat{Var}(\hat a) = \left(\frac{\hat a+1}{n}\right)^4 \cdot \hat a \cdot \left(\frac{1}{\hat a+2} - \frac{\hat a}{(\hat a+1)^2}\right)$$

$$se(\hat a) = \sqrt{\hat{Var}(\hat a)}$$

для примера
$n=1000$
$\bar X = 1.5$

$$\Rightarrow \hat a = \frac{\bar X}{2-\bar X} = \frac{1.5}{2-1.5} = 3$$

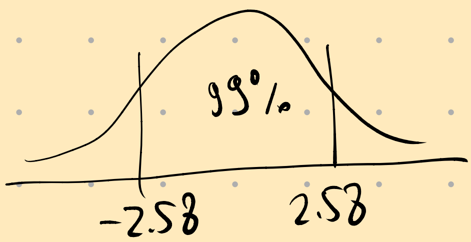
$$\hat{Var}(\hat a) = \left(\frac{4}{1000}\right)^4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{4^2}\right) = \left(\frac{1}{250}\right)^4 \cdot \frac{3\cdot(4^2-15)}{5\cdot 4^2} = \frac{1}{250^4}\cdot\frac{3}{5\cdot 4^2}$$

$$se(\hat a) = \sqrt{\hat{Var}(\hat a)} = \frac{1}{250^2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 3.1\cdot 10^{-6}$$

2) $\hat a = 3$
$se(\hat a) = 3.1\cdot 10^{-6}$

99% asy CI для a

$$[\hat a - 2.58\cdot se(\hat a);\ \hat a + 2.58\cdot se(\hat a)]$$



$\hat a = 3 \Rightarrow a \approx 3 \Rightarrow I_F$ велика $\Rightarrow$ большая точность оценивания

$$\hat b = 1 - \frac{1}{2^{\hat a}}$$ $\longrightarrow$ заменим на непрерывную ф-цию от $\hat a$

$$\hat b = h(\hat a) \qquad h(t) = 1 - \frac{1}{2^t} = 1 - \frac{1}{e^{t\ln 2}} = 1 - e^{-t\ln 2}$$

$$h(t) \approx h(a) + h'(a)\cdot(t-a)$$

plim $\hat a = a$

$$\hat b = h(\hat a) \approx h(a) + h'(a)\cdot(\hat a - a)$$

$$Var(\hat b) \approx Var(\cancel{h(a)} + h'(a)\cdot(\hat a - \cancel{a}))$$

конст конст СВ конст

$$\operatorname{Var}(\hat{b}) \approx \left(h'(a)\right)^2 \cdot \operatorname{Var}(\hat{a})$$

$$h(t) = 1 - \exp(-t \ln 2)$$

$$h'(a) = 0 - \exp(-a \ln 2)\cdot(-\ln 2)$$

$$h'(a) = \ln 2 \cdot \exp(-a \ln 2)$$

не знаем и никогда не узнаем т.к a - неизв. пар $\rightarrow$

$$\operatorname{Var}(\hat{b}) \approx (\ln 2)^2 \cdot \left(\exp(-a \ln 2)\right)^2 \cdot \operatorname{Var}(\hat{a})$$

$$\boxed{\operatorname{Var}(56 + 9R - 47) = \operatorname{Var}(9R) = 9^2 \cdot \operatorname{Var}(R) = 81 \cdot \operatorname{Var}(R)}$$

конст СВ конст

можем оценить:

$$se(\hat{b}) = \sqrt{\widehat{\operatorname{Var}}(\hat{b})} =$$

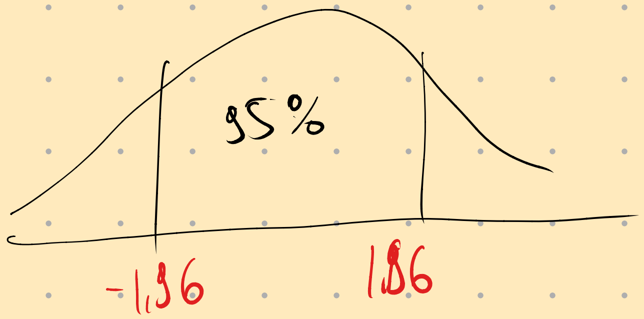
$$= \sqrt{(\ln 2)^2 \left(\exp(-\hat{a} \ln 2)\right)^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{250^4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4^2}}_{\widehat{\operatorname{Var}}(\hat{a})}}$$

$$se(\hat{b}) = \ln 2 \cdot \exp(-\hat{a} \ln 2) \cdot \underbrace{\boxed{se(\hat{a})}}_{\sqrt{\widehat{\operatorname{Var}}(\hat{a})}}$$

$$se(\hat{b}) = \ln 2 \cdot \exp(-3 \cdot \ln 2) \cdot 3.1 \cdot 10^{-6} = 2.68 \cdot 10^{-5}$$

$$\hat{b} = 1 - \frac{1}{2^{\hat{a}}} = 1 - \frac{1}{2^3} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{\hat{b} - b}{se(\hat{b})} \xrightarrow{dist} N(0;1)$$



95% asy CI для b

$$b \in \left[\hat{b} - 1.96 \cdot se(\hat{b});\ \hat{b} + 1.96 \cdot se(\hat{b})\right]$$

Упр. $\hat{a} = 3$, $\hat{b} = 4$

$$\widehat{Var}\left(\begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0.01 & 10^{-4} \\ 10^{-4} & 0.02 \end{pmatrix}$$

оценки: $\begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\end{pmatrix}$ asy N.

$\hat{a} = 3 \quad se(\hat{a}) = \sqrt{\widehat{Var}(\hat{a})} = 0.1$

$[\hat{a} - 1.96 \cdot se(\hat{a}) ; \hat{a} + 1.96 \, se(\hat{a})]$

$[3 - 1.96 \cdot 0.1 ; 3 + 1.96 \cdot 0.1]$

a) 95% asy CI для a

б) 95% asy CI для $a^2 \cdot b^3 = \theta$

$$\hat{\theta} = \hat{a}^2 \cdot \hat{b}^3 = 3^2 \cdot 4^3 = 576$$

$[\hat{\theta} - 1.96 \cdot se(\hat{\theta}); \hat{\theta} + 1.96 \cdot se(\hat{\theta})]$

$$\hat{\theta} = h(\hat{a}, \hat{b}) \approx h(a,b) + h'_a \cdot (\underbrace{\hat{a} - a}_{\text{СВ}}) + h'_b \cdot (\underbrace{\hat{b} - b}_{\text{СВ}})$$

$$Var(\hat{\theta}) \approx (h'_a)^2 \cdot Var(\hat{a}) + (h'_b)^2 \cdot Var(\hat{b}) + 2 \cdot h'_a \cdot h'_b \cdot Cov(\hat{a}, \hat{b})$$

$$\widehat{Var}(\hat{\theta}) \approx (h'_a)^2 \widehat{Var}(\hat{a}) + (h'_b)^2 \cdot \widehat{Var}(\hat{b}) + 2 \cdot h'_a \cdot h'_b \cdot \widehat{Cov}(\hat{a}, \hat{b}) =$$

$$= (2\hat{a} \cdot \hat{b}^3)^2 \cdot 0.01 + (\hat{a}^2 \cdot 3\hat{b}^2)^2 \cdot 0.02 + 2 \cdot (2\hat{a}\hat{b}^3) \cdot (\hat{a}^2 \cdot 3\hat{b}^2) \cdot 10^{-4}$$

из матрицы.

$$se(\hat{\theta}) = \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\theta})}$$

$$[\hat{\theta} - 1.96 \cdot se(\hat{\theta}) ; \hat{\theta} + 1.96 \, se(\hat{\theta})]$$