1. Время до прихода автобуса в i-й день — случайная величина x_i, имеющая экспоненциальное распределение с неизвестной интенсивностью λ. Величины x_i независимы. Если автобус не приходит за 10 минут, то я ухожу с остановки и иду пешком. Вектор y содержит время, проведённое мной на остановке в каждый день.

   а) [4] Найдите оценку λ методом максимального правдоподобия по выборке $y = (5, 10, 6, 10)$.

   б) [4] Найдите оценку λ методом максимального правдоподобия по произвольной выборке y.

   в) [2] Оцените методом максимального правдоподобия вероятность того, что я иду пешком по произвольной выборке y.

2. Величины (x_i) независимы и равномерно распределены на отрезке $[-a, 2a]$ с неизвестным $a > 0$. Я наблюдаю величины $y_i = |x_i|$.

   а) [4] Найдите $\mathbb{E}(y_i)$ и $\mathbb{E}(y_i^2)$.

   б) [3] Постройте оценку метода моментов параметра a для произвольной выборки y_1, y_2, ..., y_n, используя первый момент.

   в) [3] Постройте оценку метода моментов параметра a для произвольной выборки y_1, y_2, ..., y_n, используя второй момент.

3. Величины (X_i) независимы и экспоненциально распределены с интенсивностью λ.

   Рассмотрим оценку неизвестного параметра $a = 1/\lambda^2$:

$$\hat{a} = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}{2n+1}$$

   а) [5] Является ли оценка несмещённой?

   б) [5] Является ли оценка состоятельной?

4. Величины (X_i) независимы и одинаково распределены с ожиданием $2a$ и дисперсией a^2.

   Известно, что оценка $\hat{b} = (4 + 3\bar{X})/(3 + \bar{X})$ является состоятельной для параметра b. По выборке из 1000 наблюдений оказалось, что $\bar{X} = 2$.

   а) [7] Найдите стандартную ошибку $se(\hat{b})$ с помощью дельта-метода.

   б) [3] Постройте 95% асимптотический доверительный интервал для b.

5. Илон Маск оценивает один неизвестный параметр a методом максимального правдоподобия. По выборке из 1000 наблюдений оказалось, что $\hat{a} = 12$, а вторая производная лог-правдоподобия равна $\ell''(\hat{a}) = -400$.

   а) [5] Оцените информацию Фишера.

   б) [3] Постройте 95% асимптотический доверительный интервал для a.

   в) [2] Постройте 95% асимптотический доверительный интервал для a^3 любым способом.

6. Среди 100 случайно выбранных рептилоидов 20 любят вышки 5G. Постройте асимпотический 95%-й доверительный интервал для доли рептилоидов, любящих вышки 5G, двумя способами:

а) [5] Используя статистику $(\hat{p}-p)/\sqrt{\widehat{\mathbb{V}\mathrm{ar}}(\hat{p})}$ с решением линейного неравенства.

б) [5] Используя статистику $(\hat{p}-p)/\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(\hat{p})}$ с решением квадратного неравенства.

Ответы и подсказки

1. Заметим, что $\mathbb{P}(y_i = 10) = \mathbb{P}(x_i \geq 10) = \exp(-10\lambda)$. Функция правдоподобия для данной выборки равна $f(y_1, y_2, y_3, y_4) = \lambda \exp(-5\lambda) \exp(-10\lambda)\lambda \exp(-6\lambda) \exp(-10\lambda)$.

   Максимум достигается в точке $\hat{\lambda} = 2/31$.

   В общем случае $\hat{\lambda} = K/\sum y_i$, где K — число наблюдений равных 10.

   Оценка вероятности получается заменой λ на $\hat{\lambda}$ в формуле для вероятности и равна $\hat{p} = \exp(-10\hat{\lambda})$.

2. $\mathbb{E}(y_i) = 5/6a$, $\mathbb{E}(y_i^2) = a^2$; $\hat{a}_1 = 6/5\bar{y}$, $\hat{a}_2 = \sqrt{\sum y_i^2/n}$.

3. $\mathbb{E}(\hat{a}) = \frac{1}{\lambda^2}\frac{2n}{2n+1} \neq a$, оценка смещённая. $\operatorname{plim}\hat{a} = a$, оценка состоятельная.

4. $\hat{a} = 1$, $\hat{b} = 2$, $se(\bar{x}) = \hat{a}/\sqrt{1000} = 1/\sqrt{1000}$, $\hat{b} = h(\bar{x})$, $h'(b) = h'(2a) = 5/(2a+3)^2$, $se(\hat{b}) = 5/5^2 se(\bar{x})$.

5. $\hat{I} = 400$, $se(\hat{a}) = 1/sqrt400 = 0.05$, доверительный интервал $12 \pm 1.96 \cdot se(\hat{a})$.

6. $\hat{p} = 0.2$, в одном случае решаем относительно p неравенство $|(\hat{p}-p)/\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}| \leq z_{cr}$, во втором случае — $|(\hat{p}-p)/\sqrt{p(1-p)/n}| \leq z_{cr}$