1. В пруду встречаются караси, щуки и налимы. Кот Матроскин поймал 200 рыб: 50 карасей, 70 щук и 80 налимов. Кот Леопольд поймал 100 рыб: 10 карасей, 40 щук и 50 налимов.

   а) [7] С помощью критерия хи-квадрат Пирсона на уровне значимости 5% проверьте гипотезу о независимости вида выловленной рыбы от рыбака. Альтернативная гипотеза состоит в том, что распределение видов рыбы зависит от рыбака.

   б) [3] Укажите p-значение для теста из пункта (а) с помощью подходящей функции распределения. Явно напишите, какая функция распределения используется.

   Квантили уровня 95% для χ^2-распределение: $\chi^2_1 = 3.84$, $\chi^2_2 = 5.99$, $\chi^2_3 = 7.81$.

2. Сёгун Минамото-но Ёритомо хочет отбирать на службу только опытных самураев. Сила удара меча у опытного самурая равномерно распределена на отрезке $[3; 7]$, а у неопытного — равномерно на отрезке $[0; 4]$.

   Испытуемый самурай бьёт мечом и если сила удара оказалась больше порога a, то Ёримото принимает самурая на работу.

   Существует два типа ошибок. Ошибка первого рода: на работу взяли неопытного самурая. Ошибка второго рода: опытному самураю отказали в работе.

   а) [3] Найдите вероятности ошибок первого и второго рода при $a = 3.5$.

   б) [7] Постройте кривую зависимости ошибки второго рода от ошибки первого рода при различных порогах a.

3. [10] Независимые величины X_1, X_2 распределены равномерно на отрезке $[0, a]$, где a — неизвестный параметр. Мы наблюдаем только X_1. Постройте 95%-й предиктивный интервал вида $[0, kX_1]$ для X_2.

4. Величины (x_i) независимы и одинаково распределены с неизвестным ожиданием μ_x и конечной дисперсией. Величины (y_i) независимы и одинаково распределены со своим неизвестным ожиданием μ_y и конечной дисперсией. По независимым выборкам размера $n_x = 1000$, $n_y = 500$ оказалось, что $\bar{x} = 20$, $\bar{y} = 21$, а несмещённые выборочные дисперсии равны 200 и 300 соответственно.

   Винни-Пух хочет протестировать гипотезу H_0: $\mu_x = \mu_y$ против альтернативы H_1: $\mu_y > \mu_x$ на уровне значимости 2.5%.

   а) [7] Проведите данные тест с помощью сравнения критического и наблюдаемого значения классической статистики.

   б) [3] Укажите p-значение для теста из пункта (а) с помощью подходящей функции распределения.

5. [10] Комиссар Жильбер измерил время приезда в минутах четырёх жёлтых такси, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, и четырёх белых такси $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Предположим, что законы распределения времени приезда непрерывны и могут отличаться только сдвигом на параметр μ. Наблюдения независимы. Жильбер хочет проверить с помощью теста Манна-Уитни гипотезу $\mu = 0$ против альтернативы $\mu \neq 0$ на уровне значимости 5%.

   а) [4] Чему равно максимально возможное значение статистики Манна Уитни в данном эксперименте? Чему равна вероятность данного значения при верной H_0?

б) [6] Проведите тест для выборок $x = (3.5, 6.5, 3.4, 2.8)$ и $y = (1.9, 2.5, 5.9, 1.6)$. Будет считать, что в данном случае корректно использовать нормальную аппроксимацию вместо точного закона распределения Манна-Уитни.

6. Априорная функция плотности параметра a равна $2a$ на отрезке $[0, 1]$ и нулю иначе. Наблюдаемая величина X распределена равномерно на отрезке $[0, a]$ при фиксированном a.

   У нас есть единственное наблюдение, $X = 0.7$.

   а) [5] Найдите апостериорное распределение параметра a.

   б) [3] Найдите апостериорное ожидание и медиану параметра a.

   в) [2] Постройте любой 94% апостериорный интервал для a.