Привет !!

Лекция 3

классич. [→ метод моментов
 → метод макс правд. → (θ – неизв, $y_1 \dots y_n$) → $\hat{\theta}$ оценка

Байесовский подход → априорное распр $f(\theta)$ → апостер распр $f(\theta | y_1 \dots y_n)$

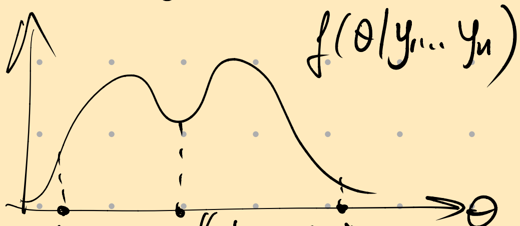
$y_1 \dots y_n$

$\downarrow$

$E(\theta | y_1 \dots y_n)$

$Med(\theta | y_1 \dots y_n)$

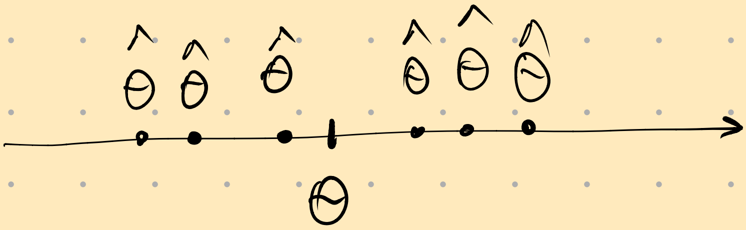
$Mode(\theta | y_1 \dots y_n)$



Свойства точечных оценок

Что такое „хорошая" оценка?

<u>Опр.</u> оценка $\hat{\theta}$ неизвестного пар-ра θ наз-ся несмещённой, если $E(\hat{\theta}) = \theta$ $\forall \theta$.

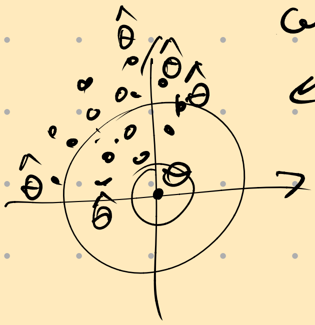


- провели эксп.
- получили выб-ку $y_1 \dots y_n$
- построили $\hat{\theta}$
  $\hat{\theta}(y_1 \dots y_n)$

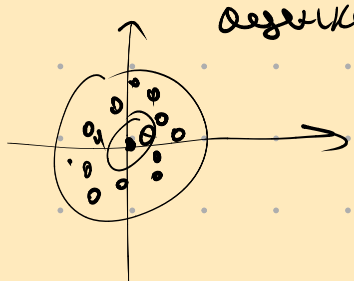
<u>пример:</u> θ – вес зол. слитка

$\hat{\theta}$ – результат взв. на несов. весах

смещенная



несмещенная оценка



Упр. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ~ независимы и один. распр.

$\mu = E(X_i)$ и $\sigma^2 = Var(X_i)$ - неизвестны. $\theta = \binom{\mu}{\sigma^2}$

смещ. несмещ.

$\hat{\mu}_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{n+1}$ $\quad \hat{\mu}_2 = X_3$ для μ

$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n}$ $\quad \hat{\sigma}_2^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ для σ^2

какие смещённые / несмещённые?

$$E(\hat{\mu}_1) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} E(X_1 + \ldots + X_n) =$$

$$= \frac{1}{n+1}(\mu + \mu + \mu + \ldots + \mu) = \frac{n}{n+1} \cdot \mu < \mu$$

$\hat{\mu}_1$ смещённая (в среднем чуть ниже неизв. пар-ра)

$$E(\hat{\mu}_2) = E(X_3) = \mu = \mu \quad \forall \mu \ !!$$

$\hat{\mu}_2$ несмещённая (в среднем попадает в неизв-ый пар-р)

$$E(\hat{\sigma}_1^2) = E\left(\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot E\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left((X_i - \bar{X})^2\right) \quad = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \left(\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

- $E\left((X_1 - \bar{X})^2\right)$? $= Var(X_1 - \bar{X}) + \left(E(X_1 - \bar{X})\right)^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} + 0^2$

$Var\, Y = E(Y^2) - (E(Y))^2$

$$E(X_1 - \bar{X}) = E(X_1) - E(\bar{X}) =$$

$$= \mu - E\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \mu - \frac{\mu + \mu + \ldots + \mu}{n} =$$

$$= \mu - \frac{n\mu}{n} = 0$$

$Var(X_1 - \bar{X}) =$ по здр. смыслу меньше vs $Var\, X_1$

$n=1$ $\quad X_1 - \overline{X} = 0$, $\quad X_1$

$n=2$ $\quad X_1 - \frac{X_1+X_2}{2}$

$n=3$ $\quad X_1 - \frac{X_1+X_2+X_3}{3}$

$Var(S-S) = Var\,0 = 0 < Var\,S$

$$= Var(X_1) + Var(\overline{X}) - 2\cdot Cov(X_1, \overline{X}) =$$

$$= \sigma^2 + Var\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right) - 2\cdot Cov\left(X_1, \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right)$$

$$= \sigma^2 + \frac{1}{n^2}\cdot Var(X_1+\ldots+X_n) -$$

X_i – незав

$$-2\cdot Cov\left(X_1, \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \frac{X_3}{n} \ldots + \frac{X_n}{n}\right) =$$

$$= \sigma^2 + \frac{1}{n^2} n\cdot \sigma^2 - 2\cdot\frac{1}{n}\cdot\sigma^2 = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{2\sigma^2}{n} =$$

$$= \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} < \sigma^2$$

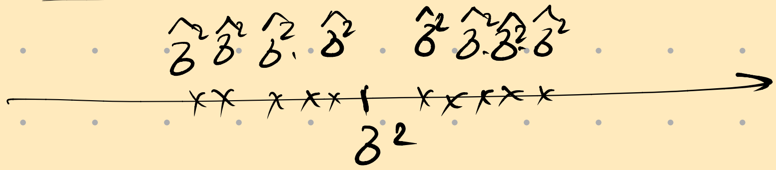
$$E\left(\frac{\Sigma(X_i-\overline{X})^2}{n}\right) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} < \sigma^2$$

$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\Sigma(X_i-\overline{X})^2}{n}$ смещённая оценка для σ^2

$$E(\hat{\sigma}^2) = E\left(\frac{\Sigma(X_i-\overline{X})^2}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1}\cdot n\cdot\left(\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\cdot(n\sigma^2 - \sigma^2) = \frac{(n-1)\sigma^2}{n-1} = \sigma^2$$

$\hat{\sigma}^2$ – несмещённая оценка для σ^2



эффективность – сравнительное свойство.

Опр. оценка $\hat{\Theta}$ – наиболее эффективная в некотором классе C, если* у $\hat{\Theta}$ наименьшая (в этом классе) среднеквадратичная ошибка mean squared

$(\ldots\ \hat{\Theta})^2$

$MSE(\hat\theta) = E((\ldots - \theta)^2)$

* есть разные способы измерять эффективность

Упр. $X_1, X_2, \ldots$ ~ нерав с неизвестными $E(X_i) = \mu$ и $Var(X_i) = \sigma^2$

$$C = \left\{ \hat\mu_1 = \frac{X_1 + \ldots + X_{10}}{10},\ \hat\mu_2 = \frac{X_1 + \ldots + X_{10}}{11} \right\}$$

При каком сочетании μ и σ^2 $\hat\mu_1$ будет эффективной в классе C?

т. Пифагора

$$MSE(\hat\theta) = E\left((\theta - \hat\theta)^2\right) = Var(\underset{\text{конст}}{\theta} - \underset{\text{оценка, СВ}}{\hat\theta}) + \left(E(\theta - \hat\theta)\right)^2$$

классич.

$$\underset{\text{среднекв. ошибка}}{MSE(\hat\theta)} = \underset{\text{дисперсия}}{Var(\hat\theta)} + \underset{\text{смещение}^2}{\left(E(\hat\theta - \theta)\right)^2}$$

среднекв. ошибка = дисперсия + смещение^2

Опр. $E(\hat\theta - \theta)$ наз-ся смещением (bias)

Упр.

θ – сколько денег в кошельке.

орёл. $\hat\theta = \theta - 500$ (1/2)

решкой $\hat\theta = \theta + 1000$ (1/2)

$\hat\theta - \theta \to -500,\ 1000$

$(\hat\theta - \theta)^2 \to 500^2,\ 1000^2$

$$MSE(\hat\theta) = E\left((\hat\theta - \theta)^2\right) = \frac{1}{2} \cdot 500^2 + \frac{1}{2} \cdot 1000^2$$

есть традиция $E(\hat\theta - \theta)^2$

для ясности буду писать явно

$E[L^2] + 20$

$\sum_{i=1}^{n} [a_i] + 7$

Упр. $X_1, X_2, \ldots \sim$ нерав с неизвестными $E(X_0)=\mu$ и $Var(X_i)=\sigma^2$

$$C=\left\{\hat{\mu}_1=\frac{X_1+\ldots+X_{10}}{10},\ \hat{\mu}_2=\frac{X_1+\ldots+X_{10}}{11}\right\}$$

При каком сочетании μ и σ^2 $\hat{\mu}_1$ будет эффективной в классе C?

$$MSE(\hat{\mu}_1)=Var(\hat{\mu}_1)+\left(E(\hat{\mu}_1)-\mu\right)^2=\frac{\sigma^2}{10}+(\mu-\mu)^2=\frac{\sigma^2}{10}$$

$$Var\left(\frac{X_1+\ldots+X_{10}}{10}\right)=\frac{1}{100}\cdot 10\cdot\sigma^2=\frac{\sigma^2}{10}$$

$$E(\hat{\mu}_1)=E\left(\frac{X_1+\ldots+X_{10}}{10}\right)=\frac{E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_{10})}{10}=$$

$$=\frac{10\mu}{\mu}=\mu$$

$$MSE(\hat{\mu}_2)=Var(\hat{\mu}_2)+\left(E(\hat{\mu}_2)-\mu\right)^2$$

$$Var\left(\frac{X_1+\ldots+X_{10}}{11}\right)=\frac{1}{121}\cdot 10\cdot\sigma^2=\frac{10\sigma^2}{121}$$

$$E(\hat{\mu}_2)=E\left(\frac{X_1+\ldots+X_{10}}{11}\right)=\frac{E(X_1)+\ldots+E(X_{10})}{11}=$$

$$=\frac{10\mu}{11}$$

смещение:

$$Bias(\hat{\mu}_2)=E(\hat{\mu}_2)-\mu=\frac{10\mu}{11}-\mu=-\frac{\mu}{11}$$

$$MSE(\hat{\mu}_2)=\frac{10\sigma^2}{121}+\left(-\frac{\mu}{11}\right)^2=\frac{10\sigma^2+\mu^2}{121}$$

когда $MSE(\hat{\mu}_1)<MSE(\hat{\mu}_2)$?

$$\frac{\sigma^2}{10}<\frac{10\sigma^2+\mu^2}{121}$$

$$121\sigma^2<100\sigma^2+10\mu^2$$

$$21\sigma^2<10\mu^2$$

Опр. последовательность $(\hat{\theta}_n)$ назыв-ся состоятельной (consistent) для пар-ра θ, если $\text{plim}\ \hat{} = \theta$.

$n \to \infty$

Инт: при большом кол-ве наблюдений $\hat{\theta}$ прибл. к θ.

Сленг: оценка состоятельна [подр-ся послед-ть]

Упр. $X_1, \dots, X_n, \dots$ ~ незав с неизв $E(X_i)=\mu$ $Var(X_i)=\sigma^2$

последовательности:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n+1} \qquad \left(\frac{X_1}{2}, \frac{X_1+X_2}{3}, \frac{X_1+X_2+X_3}{4}, \dots\right)$$

$$\hat{\mu}_2 = X_3 \qquad \text{состоятельна?} \qquad (X_3, X_3, X_3, X_3 \dots)$$

$$\text{plim}\, \hat{\mu}_1 = \text{plim} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n+1} = \text{plim}\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n} \cdot \frac{n}{n+1}\right) \overset{\text{ЗБЧ}}{=} E(X_1) \cdot 1 = \mu$$

„$\hat{\mu}_1$ состоят-ная оценка"

„послед-сть $(\hat{\mu}_{1,n})_{n=1}^{\infty}$ состоятельная"

$$\text{plim}\, \hat{\mu}_2 = \text{plim}_{n\to\infty} X_3 = \underset{\text{СВ.}}{X_3} \neq \mu \qquad \hat{\mu}_2 \text{ - не состоят-ая}$$

Упр.

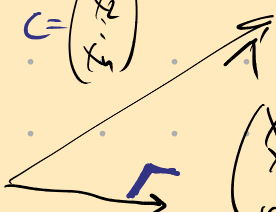
$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n} \qquad \hat{\sigma}_1^2 \text{ состоят-ая?}$$

$$\sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum \left(X_i^2 - 2X_i \cdot \bar{X} + \bar{X}^2\right) =$$

$$= \sum X_i^2 - 2 \sum X_i \bar{X} + \sum \bar{X}^2 =$$

$$= \sum X_i^2 - 2 n \cdot \bar{X} \bar{X} + n \cdot \bar{X}^2 = \sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2$$

$$c = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} X_1 - \bar{X} \\ X_2 - \bar{X} \\ \vdots \\ X_n - \bar{X} \end{pmatrix} = b$$

Убед $a \perp b$

$\langle a, b \rangle = 0$

$\|c\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|$

$(x_n - \bar{x})$

$a = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x} \\ \vdots \\ \bar{x} \end{pmatrix}$

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n} = \operatorname{plim} \frac{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}{n} =$$

$$= \operatorname{plim} \frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n} - \operatorname{plim} (\bar{X})^2 = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 =$$

$$= \operatorname{Var}(X_1) = \sigma^2$$

ЗБЧ: $\operatorname{plim} \bar{X} = \mu$

$$\operatorname{plim} \frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n} = E(X_1^2)$$

$\hat{\sigma}_1^2$ — сост-тна