# Семинар 18

**Упр:**

$X_1, \dots, X_n \sim$ незав $Unif[0,1]$

рассмотрим бутстрэп выборку №1: $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$.

а) $P(X_1^* = X_1)$?

б) $E(\bar{X}^*)$, $Var(\bar{X}^*)$

в) $cov(\bar{X}, \bar{X}^*)$

г) $f_{X_1^*}(t)$?

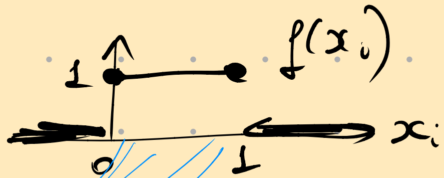
а) $P(X_1^* = X_1)$? $= \frac{1}{n}$

в силу $F(x_i)$ непр-на $P(X_i = X_j) = 0$ (при $i \neq j$)

исх-ая выборка $X_1 \; \dots \; X_n$

бут-выборка №1 $X_1^* \; \dots \; X_n^*$

б) интуиция:




исх-ая выб-ка $X_1 \; \dots \; X_n$

бут-выборка $X_1^* \; \dots \; X_n^*$

$X_1^* \sim X_1$

$E(X_1^*) = E(X_1) = \frac{1}{2}$

$Var(X_1^*) = Var(X_1) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{12}$

$$E(\bar{X}^*) = \frac{E(X_1^* + \dots + X_n^*)}{n} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{2}$$

$$F_{X_1^*}(t) = P(X_1^* \le t) = P(X_1^* \le t, X_1^* = X_1) + \dots + P(X_1^* \le t, X_n = X_1^*)$$

$$= P(X_1 \le t, X_1^* = X_1) + \dots + P(X_n \le t, X_1^* = X_n)$$

$$= (X_1 \le t) \cdot P(X_1^* = X_1) + \dots \; P(X_n \le t) \cdot P(X_1^* = X_n) =$$

$$= P(X_1 \le t)\cdot\frac{1}{n} + \dots + P(X_n \le t)\cdot\frac{1}{n} =$$

$$= F_{X_1}(t)\cdot\frac{1}{n}\cdot n = F_{X_1}(t) \quad ✓$$

---

интуиция: между $X_1 \dots X_n$ нет зав-сти.
между $X_1^* \dots X_n^*$ есть завис-сть.

$$Var(\overline{X}) = Var\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\underbrace{Var(X_1+\dots+X_n)}_{\text{незав}} =$$

$$= \frac{1}{n^2}(Var X_1 + Var X_2 + \dots + Var X_n)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{12}\cdot n\right) = \frac{1}{12n} \quad ✓$$

$$Var(\overline{X}^*) =$$

$$= Var\left(\frac{X_1^* + \dots + X_n^*}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot Var(X_1^* + \dots + X_n^*) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot\Big[Var X_1^* + \dots + Var X_n^* + 2Cov(X_1^*, X_2^*) + 2Cov(X_1^*, X_3^*) \dots + 2Cov(X_{n-1}^*, X_n^*)\Big]$$

$$\boxed{X_i^* \sim X_j}$$

$$Var X_1^* = Var X_1 = \frac{1}{12}$$

в силу выборки с возвр

$$\underline{Cov(X_1^*, X_2^*)} = Cov(X_1^*, X_3^*) = \dots = Cov(X_{n-1}^*, X_n^*)$$

$$Cov(X_1^*, X_2^*) = E(X_1^* X_2^*) - \underbrace{E(X_1^*)}_{= EX_1 = \frac{1}{2}}\cdot\underbrace{E(X_2^*)}_{= EX_2 = \frac{1}{2}} \quad ✓$$

$$\frac{\sigma^2}{n} = \frac{Var X_i}{n}$$

$X_i \sim Unif[0,1]$

сведём к исх-ой выборке через постановку условия/индикаторы.

$$X_1^* = X_1\cdot I_1 + X_2\cdot I_2 + \dots + X_n\cdot I_n$$

разложение в сумму.

среди $I_1, I_2 \dots I_n$ ровно одна единица и $(n-1)$ Ноль.

$$X_2^* = X_1 \cdot J_1 + X_2 \cdot J_2 + \dots + X_n \cdot J_n$$

среди $J_1 \dots J_n$ ровно одна единица и $(n-1)$ ноль

$I_1 \dots I_n$ – зависимы между собой (среди ровно одна 1)

независимы

$J_1 \dots J_n$

$$\underline{E(X_1^* X_2^*)} = \overbrace{E(X_1^2 \cdot I_1 J_1) + \dots + E(X_n^2 \cdot I_n \cdot J_n)}^{n \text{ штук.}}$$

$$+ E(X_1 \cdot X_2 I_1 \cdot J_1) + \dots + E(X_n X_{n-1} I_n J_{n-1})$$

$(n^2-n)$ штук.

$$= n \cdot E(X_1^2 I_1 J_1) + (n^2-n) \cdot E(X_1 X_2 \cdot I_1 J_2) =$$

выбор наблюдения в бут. выборку не связан со значением наблюдения

$$= n \cdot E(X_1^2) \cdot E(I_1 \cdot J_1) + (n^2-n) \cdot E(X_1 \cdot X_2) \cdot E(I_1 J_2) =$$

$I_1 \dots I_n$ не зав. $J_1 \dots J_n$

$X_1$ не зав $X_2$

$$= n \cdot E(X_1^2) \cdot E(I_1) \cdot E(J_1) + (n^2-n) \cdot E(X_1 X_2) \cdot E(I_1) \cdot E(J_2)$$

$$E(I_1) = P(I_1 = 1) = P(\text{в качестве } X_1^* \text{ будет выбран } X_1) = \frac{1}{n}$$

$$= n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \Big[ \underbrace{E(X_1^2)}_{Var\, X_1 + (E(X_1))^2} + (n-1) \cdot \underbrace{E(X_1 \cdot X_2)}_{EX_1 \cdot EX_2} \Big] =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \Big[ \sigma^2 + \mu^2 + (n-1) \cdot \mu \cdot \mu \Big] =$$

$$= \frac{1}{n} \Big[ \sigma^2 + n \cdot \mu^2 \Big] = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\underline{E(X_1^* X_2^*) = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}}$$

сравнить с $E(X_1 \cdot X_2) \overset{\text{незав. набл.}}{=} E(X_1) \cdot E(X_2) = \mu \cdot \mu = \mu^2$

$X_1^*$ и $X_2^*$ зависимы

---

$$Cov(X_1^*, X_2^*) = E(X_1^* X_2^*) - E(X_1^*) \cdot E(X_2^*) = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \mu \cdot \mu =$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{12n}$$

$X_i \sim Unif[0;1]$

$X_i^* \sim Unif[0,1]$

---

$$\underline{Var(\bar{X}^*)} = \frac{1}{n^2} \Big[ n \cdot \underbrace{Var(X_1^*)}_{Var\, X_1} + n \cdot (n-1) \cdot Cov(X_1^*, X_2^*) \Big] =$$

$\boxed{\text{! сомнения в априори !}}$

$$= \frac{1}{n} \Big[ \sigma^2 + (n-1) \cdot \frac{\sigma^2}{n} \Big] = \frac{1}{n} \Big[ \sigma^2 + \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} \Big]$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sigma^2 \cdot \Big(2 - \frac{1}{n}\Big) \neq Var(\bar{X})$$

---

$$Cov(\bar{X}, \bar{X}^*) = Cov\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}, \frac{X_1^* + \ldots + X_n^*}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_i \sum_j Cov(X_i, X_j^*) = \frac{n^2}{n} \cdot Cov(X_1, X_1^*) = n \cdot Cov(X_1, X_1^*)$$

$$! \quad Cov(X_1, X_1^*) = Cov(X_1, X_2^*)$$

$$Cov(X_1, X_1^*) = Cov(X_1,\ X_1 \cdot I_1 + X_2 \cdot I_2 + \dots + X_n \cdot I_n) =$$

$$= Cov(X_1, X_1 \cdot I_1) + Cov(X_1, X_2 \cdot I_2) + \dots + Cov(X_1, X_n I_n)$$

не зав

$$= Cov(X_1, X_1 \cdot I_1) + 0 =$$

$$= E(X_1 \cdot X_1 I_1) - E(X_1) \cdot E(X_1 I_1) =$$

$(I_1, \dots, I_n)$ не зав от $(X_1, \dots, X_n)$

$$= E(X_1^2) E(I_1) - E(X_1) \cdot E(X_1) \cdot E(I_1) =$$

индикаторы $I_1, \dots, I_n$ зависимы между собой

$$E(I_1) = P(I_1 = 1) = \frac{1}{n}$$

$$= E(X_1^2) \cdot \frac{1}{n} - E(X_1) \cdot E(X_1) \frac{1}{n} =$$

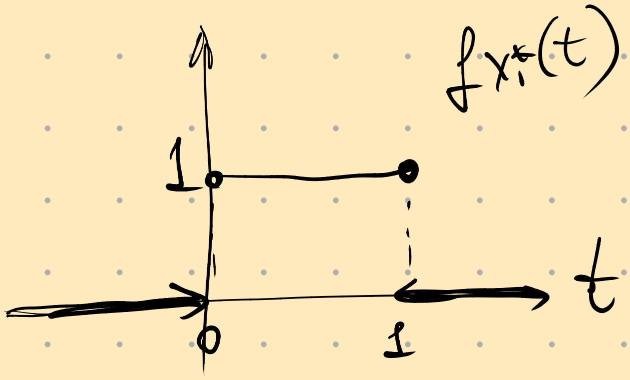
$$= \frac{1}{n}\left[E(X_1^2) - EX_1 \cdot EX_1\right] = \frac{1}{n} \cdot Var X_1 = \frac{\sigma^2}{n} =$$

$$= \frac{1}{12n}$$

Итог: $Cov(\bar{X}, \bar{X}^*) = n \cdot Cov(X_1, X_1^*) = n \cdot \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2 = \frac{1}{12}$

---

2) $F_{X_1}(t) = F_{X_1^*}(t) \Rightarrow f_{X_1}(t) = f_{X_1^*}(t)$




---

$$E(Y) = E(E(Y|X))$$

1. навешиваем условия

$$Var(Y) = Var(E(Y|X)) + E(Var\, Y|X))$$

$$Var(\overline{X}^*) = \underbrace{Var(E(\overline{X}^*|X_1 \dots X_n))} + \underline{E(Var(\overline{X}^*|X_1 \dots X_n))}$$

фикс $X_1 \dots X_n$

$$E(\overline{X}^*|X_1 \dots X_n) = E\left(\frac{X_1^* + \dots + X_n^*}{n} \Big| X_1 \dots X_n\right) =$$

$$= \frac{n}{n} E(X_1^*|X_1 \dots X_n) = \frac{n}{n} \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot X_1 + \frac{1}{n} X_2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot X_n\right) = \overline{X}$$

$$Var(E(\overline{X}^*|X_1 \dots X_n)) = Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$Var(\overline{X}^*|X_1 \dots X_n) =$$ фиксир-ные $X_1 \dots X_n$

$$= Var\left(\frac{X_1^* + \dots + X_n^*}{n} \Big| X_1 \dots X_n\right) =$$

$$= \frac{n}{n^2} \cdot Var(X_i^*|X_1 \dots X_n) =$$

$$= \frac{1}{n} \underline{Var(X_1^*}|X_1 \dots X_n) =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n} \cdot (X_1 - \overline{X})^2 + \frac{1}{n} \cdot (X_2 - \overline{X})^2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot (X_n - \overline{X})^2\right]$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

$$E(Var(\overline{X}^*|X_1 \dots X_n)) = E\left(\frac{1}{n^2} \sum (X_i - \overline{X})^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n} E((X_1 - \overline{X})^2) =$$

$$E(Y^2) = Var\, Y + (E\,Y)^2$$

$$= \frac{1}{n} Var(X_1 - \overline{X}) + (E(X_1 - \overline{X}))^2 =$$

$$E(X_1) = E(\overline{X}) = \mu$$

$$= \frac{1}{n} \underline{Var(X_1 - \overline{X})} + 0^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\left(Var\, X_1 + Var\, \overline{X} - 2\, Cov(X_1, \overline{X})\right) = \frac{1}{n}\left[\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - 2\, Cov\left(X_1, \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - 2 \cdot \frac{\sigma^2}{n}\right] = \left[\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}\right] \frac{1}{n}$$

Итог: $Var(\overline{X}^*) = Var(E(\overline{X}^*|X_1 \dots X_n)) + E(Var(X^*|X_1, \dots X_n)) =$

$= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n^2} = \frac{2\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n^2} =$

$= \frac{\sigma^2}{n} \cdot (2 - \frac{1}{n})$

Шаг 1 — исх-ая выб-ка $X_1, \dots, X_n$

Шаг 2 — бутстрэп выб №1 $X_1^*, \dots, X_n^*$

случ-сть связана только с шагом 2 → $E(X_i^*|X_1, \dots, X_n)$ ? → $Var(X_i^*|X_1, \dots X_n)$

случ-сть связана с обоими шагами → $E(X_i^*)$ → $Var(X_i^*)$