

1. Время до прихода автобуса в i -й день — случайная величина x_i , имеющая экспоненциальное распределение с неизвестной интенсивностью λ . Величины x_i независимы. Если автобус не приходит за 10 минут, то я уйду с остановки и иду пешком. Вектор y содержит время, проведённое мной на остановке в каждый день.

- а) [4] Найдите оценку λ методом максимального правдоподобия по выборке $y = (5, 10, 6, 10)$.
- б) [4] Найдите оценку λ методом максимального правдоподобия по произвольной выборке y .
- в) [2] Оцените методом максимального правдоподобия вероятность того, что я иду пешком по произвольной выборке y .

2. Величины (x_i) независимы и равномерно распределены на отрезке $[-a, 2a]$ с неизвестным $a > 0$. Я наблюдаю величины $y_i = |x_i|$.

- а) [4] Найдите $\mathbb{E}(y_i)$ и $\mathbb{E}(y_i^2)$.
- б) [3] Постройте оценку метода моментов параметра a для произвольной выборки y_1, y_2, \dots, y_n , используя первый момент.
- в) [3] Постройте оценку метода моментов параметра a для произвольной выборки y_1, y_2, \dots, y_n , используя второй момент.

3. Величины (X_i) независимы и экспоненциально распределены с интенсивностью λ .

Рассмотрим оценку неизвестного параметра $a = 1/\lambda^2$:

$$\hat{a} = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}{2n + 1}$$

- а) [5] Является ли оценка несмещённой?
- б) [5] Является ли оценка состоятельной?

4. Величины (X_i) независимы и одинаково распределены с ожиданием $2a$ и дисперсией a^2 .

Известно, что оценка $\hat{b} = (4 + 3\bar{X})/(3 + \bar{X})$ является состоятельной для параметра b . По выборке из 1000 наблюдений оказалось, что $\bar{X} = 2$.

- а) [7] Найдите стандартную ошибку $se(\hat{b})$ с помощью дельта-метода.
- б) [3] Постройте 95% асимптотический доверительный интервал для b .

5. Илон Маск оценивает один неизвестный параметр a методом максимального правдоподобия. По выборке из 1000 наблюдений оказалось, что $\hat{a} = 12$, а вторая производная лог-правдоподобия равна $\ell''(\hat{a}) = -400$.

- а) [5] Оцените информацию Фишера.
- б) [3] Постройте 95% асимптотический доверительный интервал для a .
- в) [2] Постройте 95% асимптотический доверительный интервал для a^3 любым способом.

6. Среди 100 случайно выбранных рептилоидов 20 любят вышки 5G. Постройте асимптотический 95%-й доверительный интервал для доли рептилоидов, любящих вышки 5G, двумя способами:

- а) [5] Используя статистику $(\hat{p} - p)/\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{p})}$ с решением линейного неравенства.
- б) [5] Используя статистику $(\hat{p} - p)/\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{p})}$ с решением квадратного неравенства.