Лекция 7

Распределения связанные с нормальным (с идеей проекции).

Нормальное распределение.

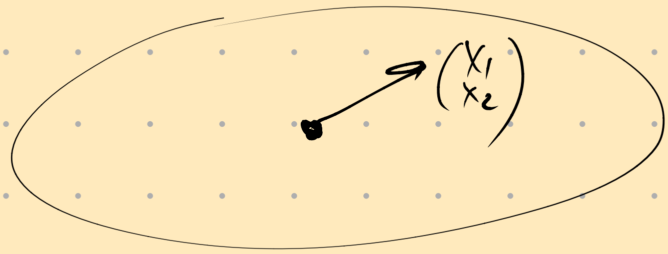
Аксиоматика Гершеля - Максвелла

$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ на примере $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Аксиома 1}}$ Независимость компонент вектора.

$\boxed{\text{Аксиома 2}}$ Инвариантность закона распр-ия к повороту.

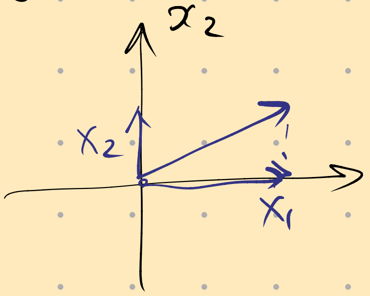
$\to X_i \sim N(0; \sigma^2)$



Следствие из аксиом?

[$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ имеет функцию плотности $f(x_1, x_2)$]

① $\boxed{\text{Нез}}$: $\Rightarrow f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$



② $\boxed{\text{Инв.}}$ $\Rightarrow X_1 \sim X_2$

$f(x_1, x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$

③ $\boxed{\text{Инв}}$ $\Rightarrow$ ф-ция плотности не может от направления вектора, а может только от длины.

$f(x_1, x_2) = h(x_1^2 + x_2^2)$ зависит только $\|x\|$!

④ : ② и ③ $\quad h(x_1^2 + x_2^2) = g(x_1^2)\cdot g(x_2^2)$

Ага! Что это за g и h?

Экспонента где-то рядом!

$$h(a+b) = g(a)\cdot g(b) \quad \forall a, b$$

$$h(a+0) = g(a)\cdot const$$

$$\boxed{g(a+b)\cdot const = g(a)\cdot g(b)}$$

[предп. дифф. $g()$] $\quad g'(a+b)\cdot const = g'(a)\cdot g(b)$

$a=0$ $\quad \boxed{g'(b)\cdot const = g'(0)\cdot g(b)}$

$$g'(b) = const\cdot g(b)$$

$$g(b) = \exp(c\cdot b)$$

Акс1 + Акс2 : $\boxed{f(x) = const\cdot \exp(const\cdot x^2)}$

$X_i \sim N(\mu; \sigma^2)$ $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

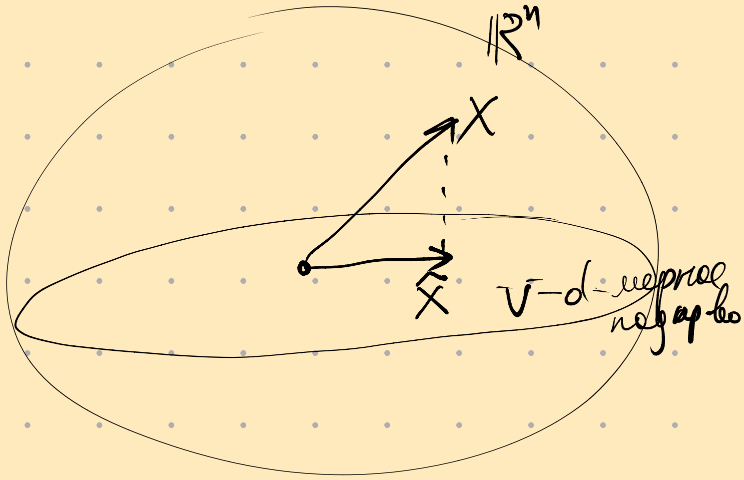
$X_i \sim N(0; \sigma^2)$ $\quad \boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}$!!

Итог: $\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ Акс1 компоненты X_i незав. Акс2 закон распр-ия не изм-ся при повороте. $\iff \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & & 0 \\ 0 & \sigma^2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \sigma^2 \end{pmatrix}\right)$

Три искусств. распр-ния χ^2, t, F.

Определение хи-квадрат-распределение, χ^2

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ - вектор} \quad X_i \sim N(0;1), \ (X_i) \text{ независ.}$$



в $\mathbb{R}^n$ выделено d-мерное подпр-во.

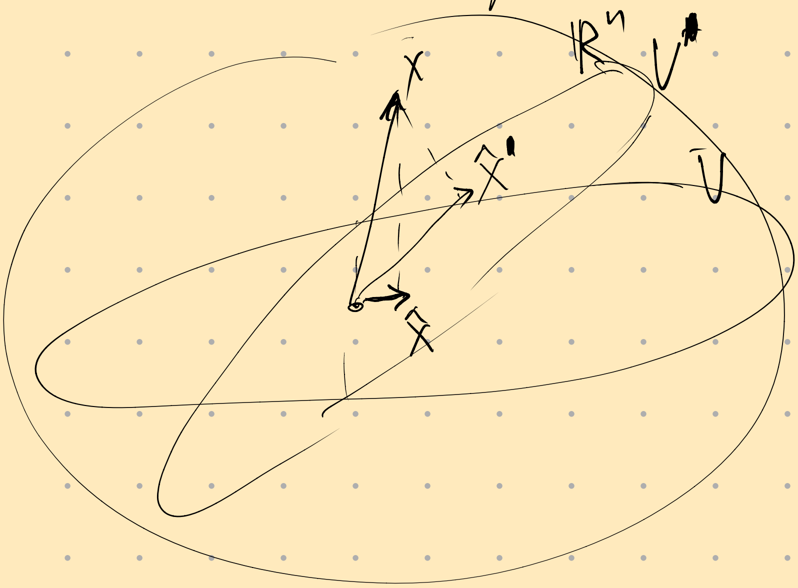
$V = Span(v_1, v_2 \ldots\ldots v_d)$

$\hat X$ – проекция X на V

закон распределения $Q = \|\hat X\|^2$ наз-ся χ^2-распределением (СВ) с d степенями свободы.

Св-ва:

1. $Q \geq 0$!!
2. Закон распр-ия не зависит от n, не зависит от конкр-ного выб-ра V, а зависит только от d.



$\dim V = \dim V'$

$\hat X'$ – проекц. на V'

$\hat X$ – проекц. на V

$\|\hat X'\| \sim \|\hat X\|$

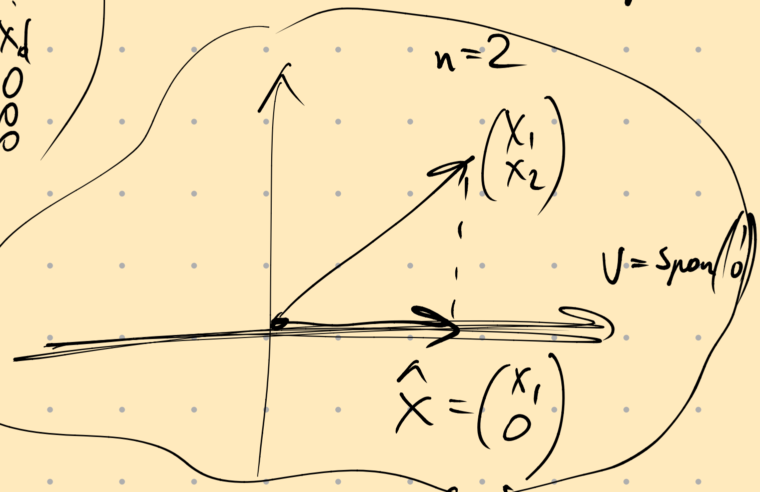
Следствие:

③ Если выбрать в качестве $V = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

d первых базисных векторов $\mathbb{R}^n$

$$X = \begin{pmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix} \qquad \hat{X} = \begin{pmatrix}X_1\\ X_2\\ \vdots\\ X_d\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$Q = \|\hat{X}\|^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_d^2$$



Если X_i – незав $N(0;1)$
то $Q = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_d^2$ имеет
χ^2-распределение с d степенями свободы.

на комп.

таблицы.

Упр: найти ф. плотности для χ_1^2, χ_2^2, χ_k^2?

Упр. $Q \sim \chi^2_k$ $\quad E(Q)$? $\quad \mathrm{Var}(Q)$?

$$E(Q) = E(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_d^2) = d \cdot E(X_1^2) = d$$

$X_1 \sim N(0;1)$

$E(X_1^2) = 1$

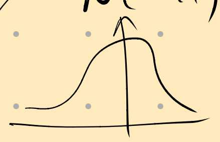
$\mathrm{Var}(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2$

$$\mathrm{Var}(Q) = \mathrm{Var}(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_d^2) = \underbrace{\mathrm{Var}(X_1^2) + \dots + \mathrm{Var}(X_d^2)}_{\text{незав. мы}} = d \cdot \mathrm{Var}(X_1^2) = 2d$$

$$\mathrm{Var}(X_1^2) = E\left((X_1^2)^2\right) - \left(E(X_1^2)\right)^2 = E(X_1^4) - 1^2 = 3 - 1^2 = 2$$

Иссерлиса MGF интеграл по частям

$N(0;1)$



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$m(t) = e^{-t^2/2} = 1 - t^2/2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^2 \dots$$

$m'(0) = E(X_1)$

$m''(0) = E(X_1^2)$

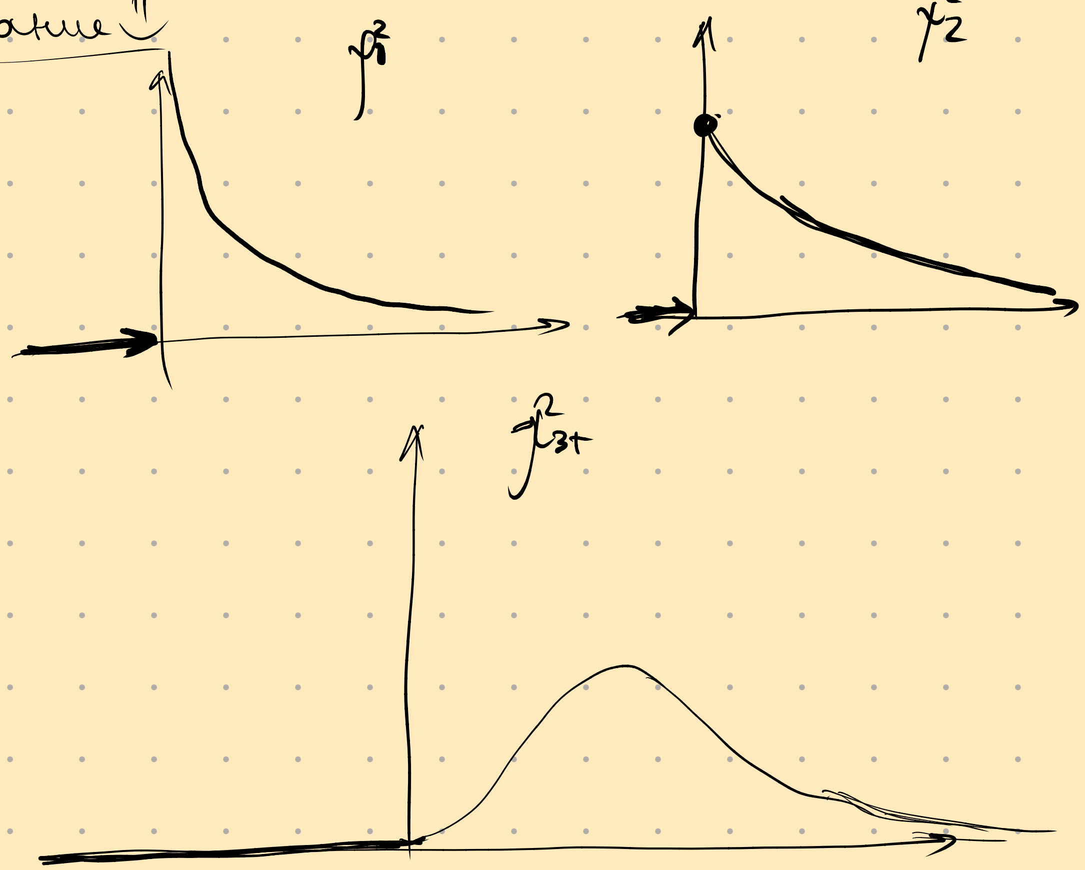
$m'''(0) = E(X_1^3)$

$m''''(0) = E(X_1^4)$

$$m''''(0) = \frac{1}{8}\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot = 3$$

$$Q \sim \chi^2_d \Rightarrow E(Q) = d \qquad Var(Q) = 2d$$

обещание !!



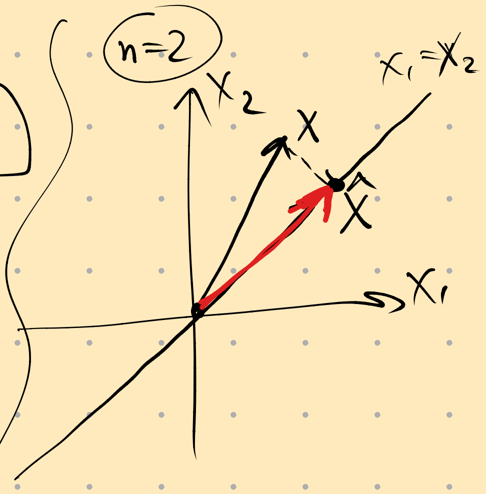
Упр.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

$\boxed{X_1, X_2 \ldots \sim \text{незав } N(0;1)}$

$$V = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$\dim \mathbb{R}^n = n$



$\dim V = 1$

а) $\dim V$? $\hat{X}$ – проекция X на V?

$Q = \|\hat{X}\|^2$ формула для Q?

$Q \sim ?$

б) $W = V^{\perp}$ $\tilde{X}$ – проекция X на W?

$\dim W$? $R = \|\tilde{X}\|^2$ формула R? $R \sim ?$

а) базис в V: $e = \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

$\langle X, e\rangle = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

$\langle e, e\rangle = 1+1+1+\ldots 1 = n$

$$\hat{X} = \frac{\langle X, e\rangle}{\langle e, e\rangle} \cdot e = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{X}\\\bar{X}\\\bar{X}\\\vdots\\\bar{X}\end{pmatrix}$$

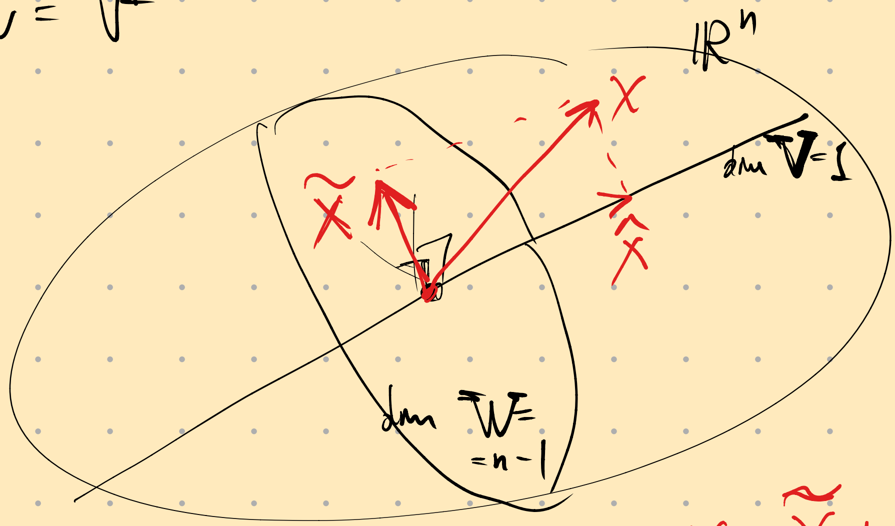
$\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}$ пр на Span$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}$!!

$$Q = \left\| \begin{pmatrix}\bar{X}\\\vdots\\\bar{X}\end{pmatrix} \right\|^2 = n \cdot \bar{X}^2$$

χ^2-распр-ие с $\boxed{d=1}$ 1-ой степенью свободы !!

$E(Q) = 1 \quad Var(Q) = 2$

б) $W = V^{\perp}$



dim $W = n-1$

$X = \tilde{X} + \hat{X}$

$$\tilde{X} = X - \hat{X} = \begin{pmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_n\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\bar{X}\\\bar{X}\\\bar{X}\\\vdots\\\bar{X}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X_1 - \bar{X}\\X_2 - \bar{X}\\\vdots\\X_n - \bar{X}\end{pmatrix}$$

$$R = \|\tilde{X}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2\text{-распр-ие с } (n-1) \text{ степенью свободы.}$$

$E(R) = n-1 \quad Var(R) = 2(n-1)$

Опр. [мотив: после будем использовать]

Если случ. величина Y представима в виде

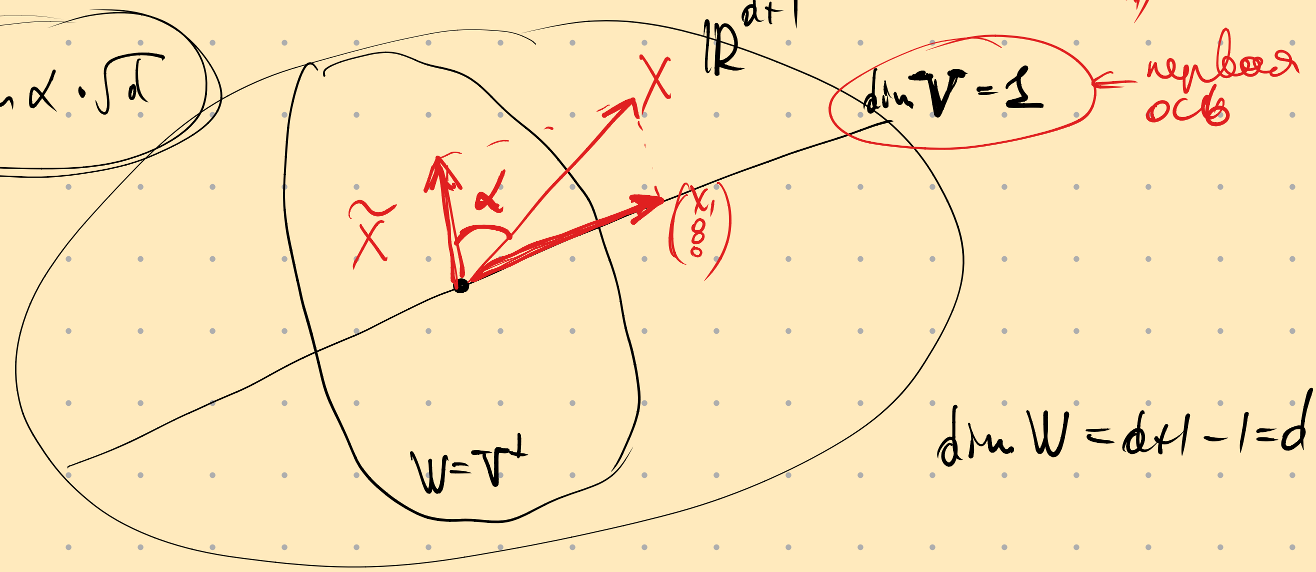
$$Y = \frac{X_1}{\sqrt{Q/d}}, \text{ где } X_1 \sim N(0;1), \quad Q \sim \chi^2_d$$

и X_1 и Q незав-мы,

то закон распр-ия Y наз-ся t-распределением с d степенями свободы. [распределение Стьюдента]

$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{d+1} \end{pmatrix}$ незав $X_i \sim N(0;1)$

$Y = \tan\alpha \cdot \sqrt{d}$



$\dim W = d+1-1 = d$

Опр. Если случайная величина Y представима в виде

$$Y = \frac{Q_1/d_1}{Q_2/d_2}, \text{ где } Q_1 \sim \chi^2_{d_1}, \quad Q_2 \sim \chi^2_{d_2}$$

и Q_1 и Q_2 независ-мы,

то закон распр-ия СВ Y наз-ся распределением Фишера [F-распределением] с (d_1, d_2)-степенями свободы.

Упр. а) $Y \sim t_5$ мн-во значений Y? $\mathbb{R}$

б) $Y \sim F_{5,6}$ мн-во значений Y: $[0; \infty)$