Упр.

$X_1, X_2, \ldots, X_{1000}$ X_i — незав., один. распр.

$E(X_i)=\mu$ $Var(X_i)=\sigma^2$ — неизв.

$n=1000$

$\bar{x}=20$

$\hat{\sigma}^2=4000$

а) $H_0: \mu=21$ $H_1: \mu\neq 21$

$\alpha = P(\text{отвергн. } H_0 \mid H_0 \text{ верна}) = 0.05$

постройте критерий на базе $T=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}}$ в трёх вар-тах.

$K_1=\{T\geq T_{crit}\}$ $K_2=\{T\leq T_{crit}\}$ $K_3=\{|T|\geq T_{crit}\}$

б) какой из трёх вариантов предпочтительнее?

а₁) $P((X_1\ldots X_n)\in K_1 \mid \mu=21)=0.05$

K — критич. область = область, где H_0 отвергается.

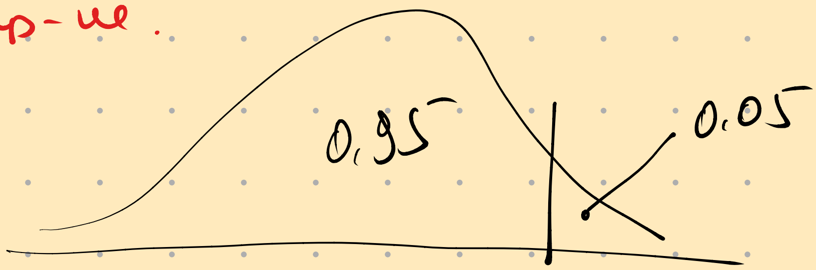
$$P\left(\frac{\bar{X}-21}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}} \geq \overset{?}{T_{crit}} \,\Big|\, \mu=21\right)=0.05$$

$$T=\frac{\bar{X}-21}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}} \xrightarrow[dist]{n\to\infty} N(0;1)$$

$n=1000$

частое обозначение для тест-ов статистики, а не намёк на t-распр-ие.

$$P(N(0;1)\geq T_{crit})=0.05$$



$T_{crit}=1.64$

H_0 не отвергается | H_0 отвергнуть

критерий:

$\bar{X} - 1$

$$\begin{cases} \text{если } \dfrac{\bar X - 21}{\sqrt{\hat\sigma^2/n}} \geq 1.64, \text{ то } H_0 \text{ отвергается} \\ \text{если } \dfrac{\bar X - 21}{\sqrt{\hat\sigma^2/n}} < 1.64, \text{ то } H_0 \text{ не отвергается} \end{cases}$$

$$\alpha = P(\text{ошибки I рода} \mid H_0 \text{ верна}) =$$
$$= P(\text{отвергнуть } H_0 \mid H_0 \text{ верна}) = 0{,}05$$

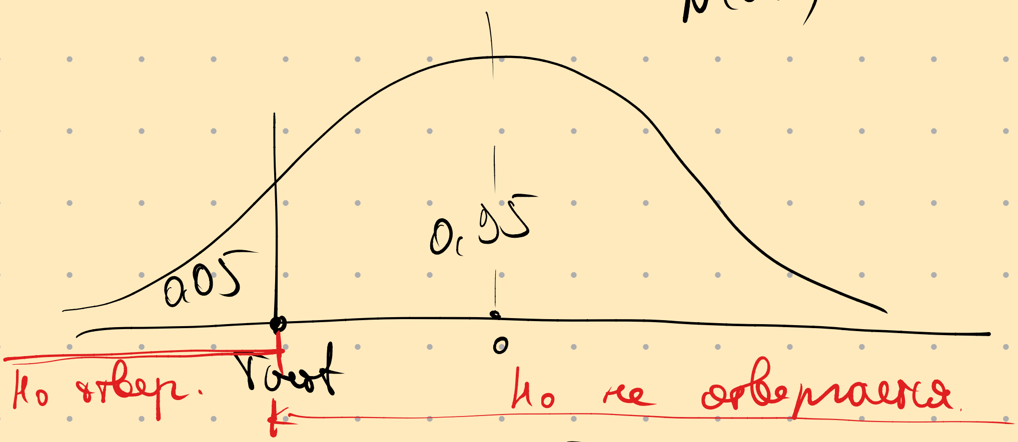
<u>применить</u> ↓

$$T = \frac{20-21}{\sqrt{\frac{4000}{1000}}} = \frac{-1}{2} = -0.5$$

H_0 не отвергается.

(a_2) ... $P(N(0;1) \le T_{test}) = 0{,}05$

$N(0;1)$

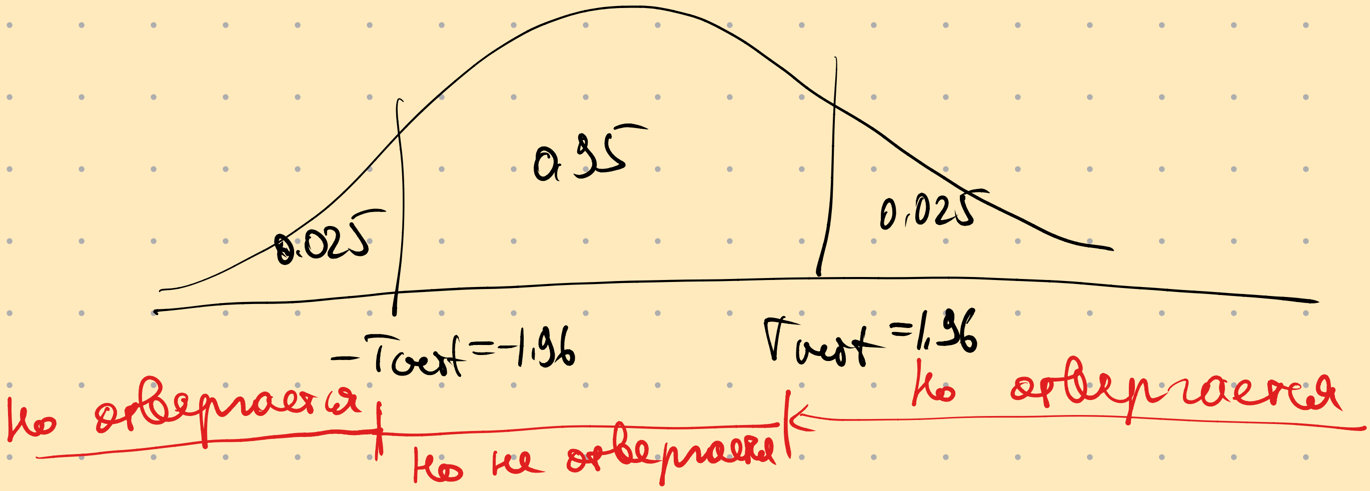


критерий №2
$$\begin{cases} \text{если } T = \dfrac{\bar X - 21}{\sqrt{\hat\sigma^2/n}} \le -1.64, \text{ то } H_0 \text{ отверг.} \\ \text{если } T > -1.64, \text{ то } H_0 \text{ не отвергается} \end{cases}$$

$$\alpha = P(\text{отвергнуть } H_0 \mid H_0 \text{ верна}) = 0.05$$

(a_3) ...... $T = \dfrac{\bar X - 21}{\sqrt{\hat\sigma^2/n}} \xrightarrow[dist]{n\to\infty} N(0;1)$

$$P\left(|N(0;1)| \geq T_{test}\right) = 0{,}05$$



критерий 3:

$$\begin{cases} \text{если} \quad T=\dfrac{\bar{X}-21}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}} \quad |T|\geq 1.96, \text{ то } H_0 \text{ отверг.} \\ \text{если} \quad |T|<1.96, \text{ то } H_0 \text{ не отвергается.} \end{cases}$$

какой лучше?

б)

$$\pi(\mu,\sigma^2)=P(H_0 \text{ отвергнем} \mid \mu,\sigma^2)$$

подразумевая
μ_T - истинное
μ_0 - из гипотезы H_0

$H_0: \mu=21 \quad \sigma^2>0$ (сложная)

$H_1: \mu\neq 21 \quad \sigma^2>0$ (сложная)

тест 1 $\{H_0 \text{ отверг}\}=\{T\geq 1.64\}$

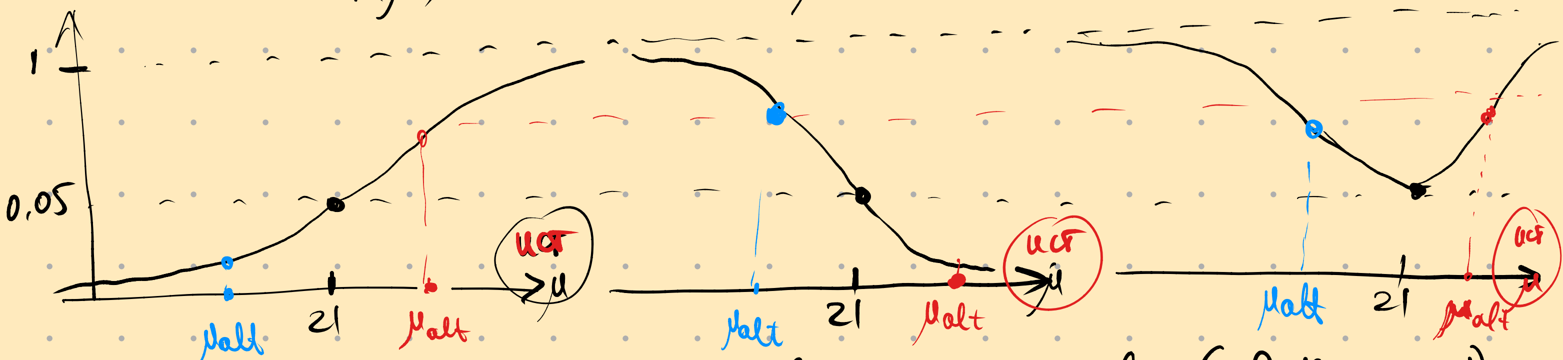
тест 2 $\{H_0 \text{ отверг}\}=\{T\leq -1.64\}$

тест 3 $\{H_0 \text{ отверг}\}=\{|T|\geq 1.96\}$

$\pi(\mu)=P(\text{отв. } H_0 \mid \mu)$

зафиксируем $\sigma^2=1$

$\pi_1(\mu)$ $\pi_2(\mu)$ $\pi_3(\mu)$ выберем!!



$\boxed{\text{по постр.:}}$ для всех 3-х тестов $P(\text{отв. } H_0 \mid \mu=21)=$

$\boxed{\text{Хочу } P(\text{отв } H_0 \mid \text{верна } H_1) \text{ побольше.}}$ $\alpha = 0{,}05$

(!) разделите μ истинное, и μ, к-торое вычит-ся в формуле (!)

→ в формуле вычитается μ_0 из H_0.

$$T = \frac{\overline{X} - 21}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}} \quad \leftarrow \text{зн. из } H_0$$

по ЗБЧ: $\overline{X} \approx \mu$ наст.

$$\mu_{TRUE} >> 0 \overset{\text{скорее всего}}{\Longrightarrow} T >> 0.$$

$$\mu_{TRUE} << 0 \overset{\text{скорее всего}}{\Longrightarrow} T << 0$$

→ Д3.

Мораль: При распространённых ситуации.
→ $\alpha = P(\text{отверг } H_0 \mid H_0 \text{ верна})$ задана.

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$$

Критерий опт.: $\max\limits_{\mu > \mu_0}$: $P(\text{отверг } H_0 \mid \mu)$.

$$\begin{cases} \text{если } T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}} \geq T_{crit}, \text{ то } H_0 \text{ отвергается} \\ \text{если } T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}} < T_{crit}, \text{ то } H_0 \text{ не отверг.} \end{cases}$$

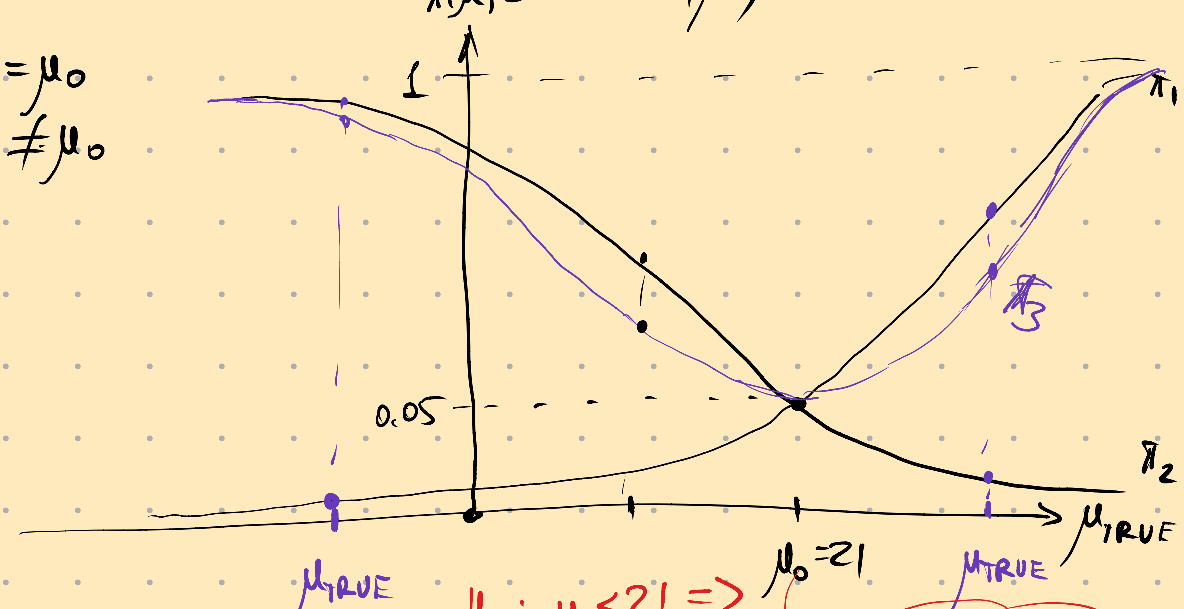
$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases} \qquad \alpha \text{ - задана.}$$

опт. критерий:

$$\begin{cases} \text{если } T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}} \leq T_{crit}, \text{ то } H_0 \text{ отвергн.} \\ \text{иначе — не отвергается.} \end{cases}$$

$\pi(\mu) = P(\text{отв } H_0 \mid \mu)$

$$\begin{cases} H_0: \mu=\mu_0 \\ H_1: \mu\neq\mu_0 \end{cases}$$



$H_1: \mu < 21 \Rightarrow$ у теста 2: π_2 выше

$H_1: \mu > 21 \Rightarrow$ у теста 1 π_1 выше

осторожный тест №3.

$\alpha = 0.05 = P(\text{отв } H_0 \mid H_0 \text{ верна}) = 0.05$

конвенция

$$\begin{cases} H_0: \mu=\mu_0 \\ H_1: \mu\neq\mu_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{если } |T| \geq T_{crit}, & H_0 \text{ отв} \\ \text{если } |T| < T_{crit}, & H_0 \text{ не отв.} \end{cases}$$

Упр подбр. монетку y_i: 1 орёл, 0 решка. 400 раз: 150 орлов. p – вер-сть орла

а) $H_0: p=\frac{1}{2}$, $H_1: p<\frac{1}{2}$ $\quad \alpha = P(\text{отв } H_0 \mid H_0 \text{ верна}) = 0.05$

разр-ть и провести тест!!

б) $H_0: p=\frac{1}{2}$, $H_1: p>\frac{1}{2}$ $\quad \alpha = 0.05$

в) $H_0: p=\frac{1}{2}$, $H_1: p\neq\frac{1}{2}$ $\quad \alpha = 0.05$

$$T = \frac{\hat{p} - p_0}{se(\hat{p})} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\widehat{var}(\hat{p})}} \xrightarrow[n\to\infty]{dist} N(0,1)$$

$\hat{p} = \frac{\sum y_i}{n}$ $\qquad \sum y_i \sim Bin(n, p)$

$Var(\sum y_i) = n p \cdot (1-p)$

$Var(\hat{p}) = \frac{1}{n^2} \cdot n p (1-p)$

! T — это не намёк на t-распределение!

$$T = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} = \frac{\hat{p} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$$

(а) $H_0: p = \frac{1}{2}$, $H_1: p < \frac{1}{2}$

$\alpha = P(H_0 \text{ отв} \mid p = \frac{1}{2})$

опт крит.

$\max P(H_0 \text{ отв} \mid p), \ p < \frac{1}{2}$

$\begin{cases} \text{если } T \le T_{крит}, \text{ то } H_0 \text{ отвергается} \\ \text{если } T > T_{крит}, \text{ то } H_0 \text{ не отверг.} \end{cases}$

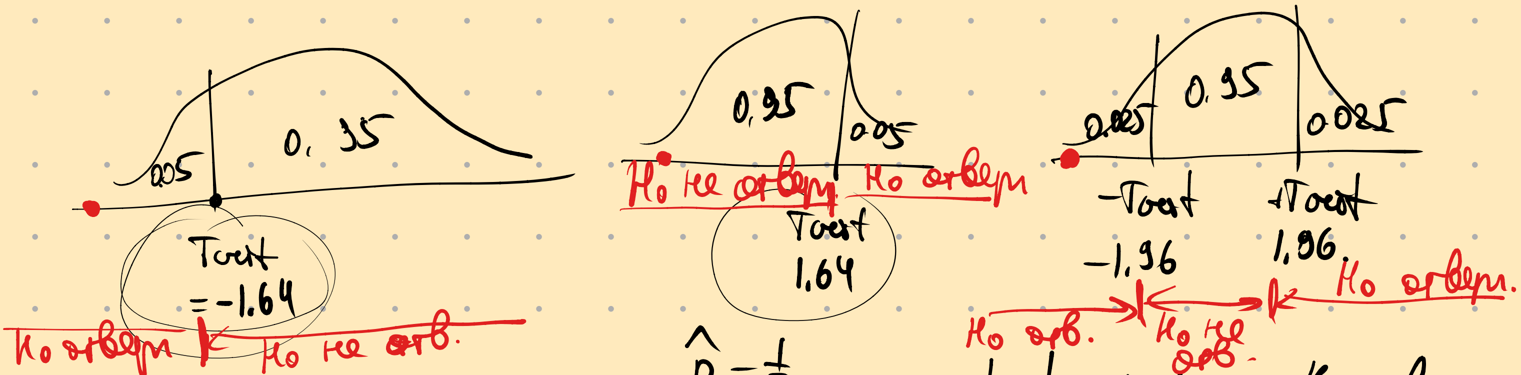
(б) $H_0: p = \frac{1}{2}$, $H_1: p > \frac{1}{2}$ $\rightarrow$ опт. критерий

$\begin{cases} \text{если } T \ge T_{крит}, \text{ то } H_0 \text{ отверг.} \\ \text{если } T < T_{крит}, \text{ то } H_0 \text{ не отверг.} \end{cases}$

(в) $H_0: p = \frac{1}{2}$, $H_1: p \ne \frac{1}{2}$ $\rightarrow$ остор. критерий

$\begin{cases} \text{если } |T| \ge T_{крит}, \text{ то } H_0 \text{ отверг.} \\ \text{если } |T| < T_{крит}, \text{ то } H_0 \text{ не отверг.} \end{cases}$

(а) (б) (в)



[б]: $\begin{cases} \text{если } T = \frac{\hat{p} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}, \ |T| \ge 1{,}96, \text{ то } H_0 \text{ отверг.} \\ \text{если } |T| < 1{,}96, \text{ то } H_0 \text{ не отверг.} \end{cases}$

$\hat{p} = \frac{150}{400} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

$T = \frac{\hat{p} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} = \frac{\frac{3}{8} - \frac{1}{2}}{\ldots} \cdot 20 =$

$$\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n} \quad \sqrt{\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}}$$

$$= \frac{-1/8 \cdot 20}{\sqrt{15}/8} = \frac{-20}{\sqrt{15}} = -5{,}16 = T$$

$n = 400$

$\hat{p} = \frac{3}{8} \approx 0{,}375$ не похоже на $1/2$

вывод:

(а) H_0 отверг.

(б) H_0 не отверг.

(в) H_0 отверг.

? $\rightarrow \begin{cases} H_0: p = \frac{1}{2} \\ H_1: p > \frac{1}{2} \end{cases}$

обозначения для тестовой статистики

- универсально: T или S
- с намёком на распр-на. статистики при H_0

$t = \ldots \rightarrow t_{df}$

$z = \ldots \rightarrow N(0;1)$

$F = \ldots \rightarrow F_{df_1, df_2}$

...

- по именам авторов/названию теста.

LR, DF, KPSS, ...