семинар. 09. статистика / тест Уэлча.

Цель

асимп CI для $\mu_a - \mu_b$

$$R = \frac{\bar{x}_a - \bar{x}_b - (\mu_a - \mu_b)}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_a^2}{n_a} + \frac{\hat{\sigma}_b^2}{n_b}}}$$

$n \to \infty$: $N(0;1)$

при небольших n: t_ν?

незав.

$$t_\nu = \frac{N(0;1)}{\sqrt{\chi^2_\nu / \nu}}$$

мяк: $(x_i \mid g_i = a) \sim Law_a$

$(x_i \mid g_i = b) \sim Law_b$

для произв-го Law $\bar{x}_a$ и $\hat{\sigma}_a^2$ зависимы!

для Норм: $\bar{x}_a$ и $\hat{\sigma}_a^2$ независимы в силу аксиом Г-М.

→ мы не получим в точности t_ν. по ЦПТ $N(0;1)$

$$R = \frac{\bar{x}_a - \bar{x}_b - (\ a - \ b)}{\ldots} = \frac{\left(\bar{x}_a - \bar{x}_b - (\mu_a - \mu_b)\right) / \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_a^2}{n_a} + \frac{\hat{\sigma}_b^2}{n_b}}}{\ldots}$$

$$\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_a^2}{n_a} + \frac{\hat{\sigma}_b^2}{n_b}} \qquad \sqrt{\left(\frac{\hat{\sigma}_a^2}{n_a} + \frac{\hat{\sigma}_b^2}{n_b}\right) \Big/ \left(\frac{\sigma_a^2}{n_a} + \frac{\sigma_b^2}{n_b}\right)}$$

Хочу:

$$LHS = \frac{\frac{\hat{\sigma}_a^2}{n_a} + \frac{\hat{\sigma}_b^2}{n_b}}{\frac{\sigma_a^2}{n_a} + \frac{\sigma_b^2}{n_b}}$$

было похоже на $\frac{\chi_v^2}{v}$

RHS:

$$\frac{\chi_v^2}{v} \geqslant 0 \quad \Downarrow$$

$LHS \geqslant 0$ С.В.

$$E(LHS) = E\left(\frac{\frac{\hat{\sigma}_a^2}{n_a} + \frac{\hat{\sigma}_b^2}{n_b}}{\frac{\sigma_a^2}{n_a} + \frac{\sigma_b^2}{n_b}}\right) = \frac{\frac{\sigma_a^2}{n_a} + \frac{\sigma_b^2}{n_b}}{\frac{\sigma_a^2}{n_a} + \frac{\sigma_b^2}{n_b}} = E\left(\frac{\chi_v^2}{v}\right) = \frac{v}{v} = 1$$

$$E(\chi_v^2) = v$$
$$Var(\chi_v^2) = 2v$$

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{\sum_a (x_i - \bar{x}_a)^2}{n_a - 1}$$

$$E(\hat{\sigma}_a^2) = \sigma_a^2$$

$$Var\left(\frac{\chi_v^2}{v}\right) = \frac{1}{v^2} \cdot Var(\chi_v^2) = \frac{2v}{v^2} = \frac{2}{v}$$

$$Var(LHS) = \frac{2}{v}$$

$$Var(LHS) = Var\left(\frac{\frac{\hat{\sigma}_a^2}{n_a} + \frac{\hat{\sigma}_b^2}{n_b}}{\underbrace{\frac{\sigma_a^2}{n_a} + \frac{\sigma_b^2}{n_b}}_{c}}\right) = \frac{1}{c^2} \cdot Var\left(\frac{\hat{\sigma}_a^2}{n_a} + \frac{\hat{\sigma}_b^2}{n_b}\right) =$$

незав

$$= \frac{1}{c^2} \cdot \left(Var\left(\frac{\hat{\sigma}_a^2}{n_a}\right) + Var\left(\frac{\hat{\sigma}_b^2}{n_b}\right)\right) = \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{n_a^2} \cdot Var(\hat{\sigma}_a^2) + \frac{1}{n_b^2} \cdot Var(\hat{\sigma}_b^2)\right) \quad \Downarrow$$

что-то надо доп. предп.

$\boxed{\text{Предп}}$ $(x_i | g_i = a) \sim N(\mu_a; \sigma_a^2)$

$(x_i | g_i = b) \sim N(\mu_b; \sigma_b^2)$

$$\frac{\sum_a (x_i - \bar{x}_a)^2}{\sigma_a^2} = \frac{\hat{\sigma}_a^2 \cdot (n_a - 1)}{\sigma_a^2} \sim \chi^2_{n_a - 1}$$

$$\operatorname{Var}\left(\frac{\hat{\sigma}_a^2 (n_a - 1)}{\sigma_a^2}\right) = 2(n_a - 1)$$

$$\operatorname{Var}(\hat{\sigma}_a^2) = \frac{2(n_a - 1) \cdot (\sigma_a^2)^2}{(n_a - 1)^2}$$

$$\operatorname{Var}(LHS) = \frac{1}{C^2} \cdot \left(\frac{1}{n_a^2} \cdot \frac{2\sigma_a^4}{n_a - 1} + \frac{1}{n_b^2} \cdot \frac{2\sigma_b^4}{n_b - 1}\right) = \frac{2}{\nu} \quad \operatorname{Var}(RHS)$$

$$\nu = \frac{c^2}{\frac{\sigma_a^4}{n_a^2(n_a - 1)} + \frac{\sigma_b^4}{n_b^2(n_b - 1)}} = \frac{\left(\frac{\sigma_a^2}{n_a} + \frac{\sigma_b^2}{n_b}\right)^2}{\frac{\sigma_a^4}{n_a^2(n_a - 1)} + \frac{\sigma_b^4}{n_b^2(n_b - 1)}};$$

исходные дисперсии

$\boxed{\text{практический результат}}$

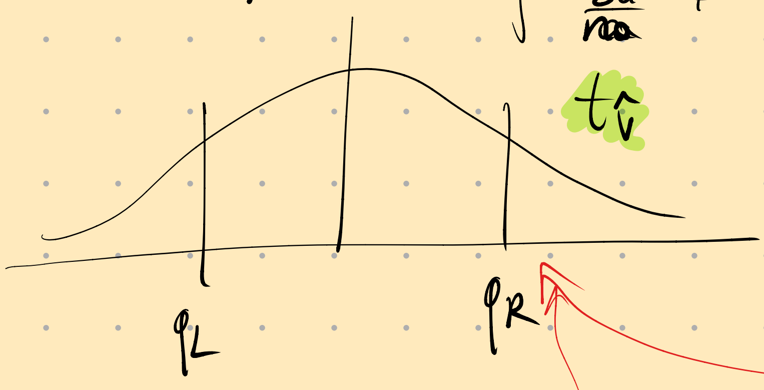
CI: для $\mu_a - \mu_b$ $\quad (x_i | g_i = a) \sim Law_a \quad$ с $E(x_i | g_i = a) = \mu_a \in \mathbb{R}$

$(x_i | g_i = b) \sim Law_b \quad \operatorname{Var}(x_i | g_i = a) = \sigma_a^2 \in \mathbb{R}$

решить

$$q_L \leq R = \frac{\bar{x}_a - \bar{x}_b - (\mu_a - \mu_b)}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_a^2}{n_a} + \frac{\hat{\sigma}_b^2}{n_b}}} \leq q_R$$

$t_{\hat{\nu}}$



$$\hat{\nu} = \frac{\left(\frac{\hat{\sigma}_a^2}{n_a} + \frac{\hat{\sigma}_b^2}{n_b}\right)^2}{\frac{\hat{\sigma}_a^4}{n_a^2(n_a - 1)} + \frac{\hat{\sigma}_b^4}{n_b^2(n_b - 1)}}$$

≈ 1950

asy CI

$$\mu_a - \mu_b \in [\bar{x}_a - \bar{x}_b - q_R \cdot se(\bar{x}_a - \bar{x}_b); \; \bar{x}_a - \bar{x}_b + q_R \cdot se(\bar{x}_a - \bar{x}_b)]$$

$$se(\bar{x}_a - \bar{x}_b) = \sqrt{\frac{\hat\sigma_a^2}{n_a} + \frac{\hat\sigma_b^2}{n_b}}$$

Welch t-stat
Welch t-test.

плохая практика
↳ ① использовать дов. интервал для $\mu_a - \mu_b$
с предпосылкой о $\sigma_a^2 = \sigma_b^2$

equal variance t-stat.

$$t = \frac{\bar{x}_a - \bar{x}_b - (\mu_a - \mu_b)}{\sqrt{\frac{\hat\sigma^2}{n_a} + \frac{\hat\sigma^2}{n_b}}}$$

одна и та же $\hat\sigma^2$

плохая практика
↳ ② двухшаговая процедура.

Шаг 1. CI для $\frac{\sigma_a^2}{\sigma_b^2} \in [\ell_L; \ell_R]$

в реальности всегда нужно идти сюда.

$1 \in$ CI для $\frac{\sigma_a^2}{\sigma_b^2}$ → **Шаг 2** CI для для $\mu_a - \mu_b$ предполагая $\sigma_a^2 = \sigma_b^2$

$1 \notin$ CI для $\frac{\sigma_a^2}{\sigma_b^2}$ → CI для $\mu_a - \mu_b$, предп-ая $\sigma_a^2 \neq \sigma_b^2$

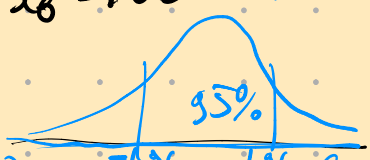
в реале: $\sigma_a^2 \neq \sigma_b^2$

Упр. $n_a = 1000$ $n_b = 200$

верю: $(x_i \mid g_i = a) \sim \exp(\lambda_a)$ незав
$(x_i \mid g_i = b) \sim \exp(\lambda_b)$

$\bar{x}_a = 10$
$\bar{x}_b = 10{,}5$

$N(0;1)$



т.к. n_a, n_b велики

95% асу CI для $\mu_a - \mu_b$?

$N(0;1)$

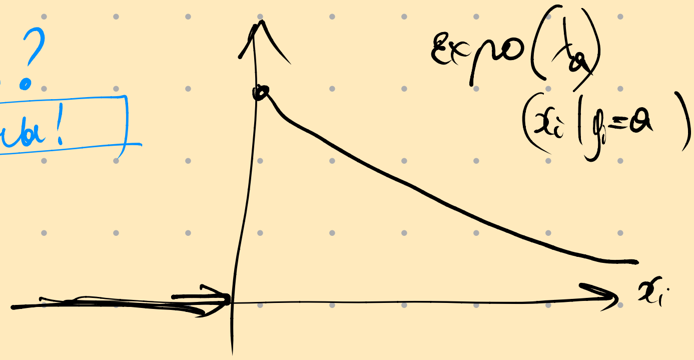
$$\mu_a - \mu_b \in \left[\bar{x}_a - \bar{x}_b - f_R \cdot se(\bar{x}_a - \bar{x}_b);\ \bar{x}_a - \bar{x}_b + f_R\, se(\bar{x}_a - \bar{x}_b)\right]$$

$$\left[-0.5 - 1.96 \cdot ?\ ;\ -0.5 + 1.96 \cdot ?\right]$$

$$se(\bar{x}_a - \bar{x}_b) = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_a^2}{n_a} + \frac{\hat{\sigma}_b^2}{n_b}} \approx \sqrt{\frac{(\bar{x}_a)^2}{n_a} + \frac{(\bar{x}_b)^2}{n_b}}$$

где раздобыть?

[не даны!]



$$E(x_i | g_i = a) = \frac{1}{\lambda_a} = \mu_a$$

$$Var(x_i | g_i = a) = \frac{1}{\lambda_a^2}$$

$\hat{\lambda}_a = \frac{1}{\bar{x}_a}$ ← сост-ая оценка для λ_a.

$(\bar{x}_a)^2$ = сост-ая оценка для $Var(x_i | g_i = a)$

$$se(\bar{x}_a - \bar{x}_b) = \sqrt{\frac{10^2}{1000} + \frac{10.5^2}{200}} \approx 0.81$$

реализ. asy CI $\quad [-0.5 - 1.96 \cdot 0.81;\ -0.5 + 1.96 \cdot 0.81]$

354. $\bar{x}_a \quad \frac{\sum_a x_i}{n_a} \xrightarrow{plim} \mu_a = E(x_i | g_i = a)$

$\bar{x}_a$ — это сост-ая оценка для μ_a

$$plim\ \bar{x}_a = \mu_a = \frac{1}{\lambda_a}$$

$$plim\ \frac{1}{\bar{x}_a} = \frac{1}{\mu_a} = \lambda_a$$

$$plim\ (\bar{x}_a)^2 = \mu_a^2 = \left(\frac{1}{\lambda_a}\right)^2 = \frac{1}{\lambda_a^2} = \sigma_a^2$$

$\bar{x}_a^2$ — это состоятельная оценка для σ_a^2

Упр.

	кол-во набл	$\sum x_i$	$\sum x_i^2$
a	1000	4000	20000
b	200	500	2000

предп.
набл. незав.
$(x_i | g_i = a) \sim Law_a$
с кон. ожид и дисп.
$(x_i | g_i = b) \sim Law_b$

асу CI для $\mu_a - \mu_b$
99%

наст. μ_a и σ_a^2 мы не знаем и никогда не узнаем.

$$\hat{\mu}_a = \bar{x}_a = \frac{4000}{1000} = 4$$

$$\hat{\mu}_b = \bar{x}_b = \frac{500}{200} = 2.5$$

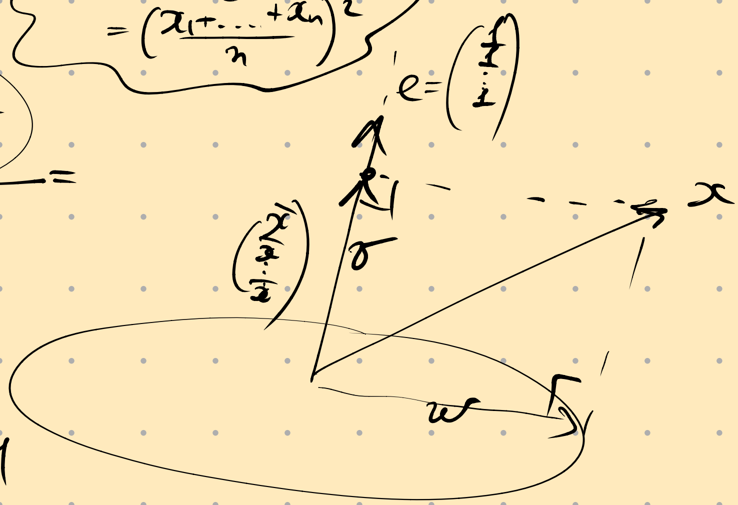
квадрат длины проекции

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{\sum_a (x_i - \bar{x})^2}{n_a - 1} = \frac{\sum_a (x_i^2 + \bar{x}_a^2 - 2x_i\bar{x}_a)}{n_a - 1} =$$

$$= \frac{\sum_a x_i^2 + n_a \cdot \bar{x}_a^2 - 2\bar{x}_a \cdot \sum_a x_i}{n_a - 1} = \frac{\sum_a x_i^2 + n_a \cdot \bar{x}_a^2 - 2 \cdot \bar{x}_a \cdot n \cdot \bar{x}_a}{n_a - 1} =$$

$$\bar{x}^2 = (\bar{x})^2 = \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^2$$

$$= \frac{\sum x_i^2 - n_a \cdot \bar{x}_a^2}{n_a - 1} =$$



$$= \frac{20000 - 1000 \cdot 4^2}{1000 - 1} \approx 4$$

$$\|x\|^2 = \|\sigma\|^2 + \|w\|^2$$

$$\sum_a x_i^2 = n_a \cdot \bar{x}_a^2 + \sum_a (x_i - \bar{x}_a)^2$$

$$\hat{\sigma}_b^2 = \frac{2000 - 200 \cdot 2.5^2}{200 - 1} =$$

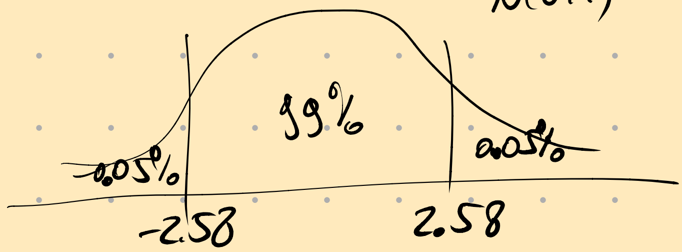
$$= 3.77$$

асу 99% CI $\mu_a - \mu_b$

$$\left[\ 4-2.5 - q_R \cdot se(\bar{x}_a - \bar{x}_B)\ ;\ 4-2.5 + q_R \cdot se(\bar{x}_a - \bar{x}_B)\ \right]$$

$$se(\bar{x}_a - \bar{x}_B) = \sqrt{\frac{4}{1000} + \frac{3.77}{200}} \approx 0.15$$

$N(0;1)$



pearl. 99 CI ghe $\mu_a - \mu_B$

$$\left[\ 1.5 - 2.58 \cdot 0.15\ ;\ 1.5 + 2.58 \cdot 0.15\ \right]$$