

Домашнее задание 5

Дедлайн: 2025-06-01, 23:59.

Оцениваемые задачи:

1. Величины (y_i) независимы и экспоненциально распределены с интенсивностью λ .
Количество наблюдений n велико. Тестируем гипотезу $H_0: \lambda = 2$ против альтернативы $\lambda \neq 2$.
 - а) Выведите формулы для теста отношения правдоподобия LR , теста множителей Лагранжа LM и теста Вальда W .
 - б) Проведите тесты для конкретной выборки с $n = 1000$, $\bar{y} = 2.2$ и уровня значимости 1%.
2. Величины (y_i) независимы и нормально распределены $\mathcal{N}(\mu, 1)$.
Количество наблюдений n велико. Тестируем гипотезу $H_0: \mu = 0$ против альтернативы $\mu \neq 0$.
 - а) Выведите формулы для теста отношения правдоподобия LR , теста множителей Лагранжа LM и теста Вальда W .
 - б) Проведите тесты для конкретной выборки с $n = 1000$, $\sum y_i = 1000$, $\sum y_i^2 = 4000$ и уровня значимости 1%.

Неоцениваемые задачи в удовольствие:

3. Гипотеза H_0 описывается 5-ю независимыми уравнениями, неограниченный максимум лог-правдоподобия равен $\ell_{UR} = -200$, а ограниченный — $\ell_R = -209$. Число наблюдений n велико. Альтернативная гипотеза состоит в том, что хотя бы одно уравнение не выполнено.
 - а) Отвергается ли H_0 на уровне значимости 1%?
 - б) Найдите p -значение.
4. Оценка неизвестного вектора параметров $a = (a_1, a_2, a_3)$ равна $\hat{a} = (1, 2, 3)$ с оценкой ковариационной матрицы

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{a}) = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 2 \\ & 16 & -1 \\ & & 10 \end{pmatrix}.$$

Число наблюдений велико. Рассмотрим гипотезу $H_0: a_1 = a_2 = a_3$ против альтернативы о том, что хотя бы одно уравнение не выполнено.

- а) Предложите естественную оценку \hat{b} для вектора $b = (a_1 - a_2, a_2 - a_3)$.
- б) Оцените ковариационную матрицу $\widehat{\text{Var}}(\hat{b})$.
- в) Переформулируйте H_0 в терминах вектора b .
- г) Проведите тест Вальда гипотезы H_0 на уровне значимости 5%.

5. Мы оцениваем три неизвестных параметра, $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. При максимизации с учётом ограничений гипотезы H_0 оказывается, что градиент лог-правдоподобия равен $\text{grad } \ell = (-0.1, 0.2, 0)$, а матрица Гессе в точке ограниченного экстремума равна

$$H = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ & -6 & 0 \\ & & -10 \end{pmatrix}$$

Число наблюдений велико.

- а) Чему равен градиент лог-правдоподобия в точке неограниченного экстремума?
б) Протестируйте H_0 на уровне значимости 1% с помощью теста множителей Лагранжа.
6. Вспомним классический хи-квадрат тест Пирсона на соответствие выборки заданному дискретному закону распределения со статистикой

$$S = \sum_{i=1}^k \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i},$$

где k — число клеток таблицы, f_i — количество наблюдений, попавших в i -ую клетку таблицы, а p_1, p_2, \dots, p_k — вероятности, предполагаемые в H_0 .

С каким тестом ($LR/LM/W$) совпадает данная статистика?

7.

8.
