Семинар 6

Упр) $y_1, y_2, \dots, y_n$ — незав $Expo(\lambda)$

$E(y_i)=\frac{1}{\lambda}$ $\qquad \text{plim}_{n\to\infty} \frac{y_1+\dots+y_n}{n} = E(y_i)=\frac{1}{\lambda}$

$$\hat\lambda_{MM} = \frac{1}{\bar y} = \frac{1}{\left(\frac{y_1+\dots+y_n}{n}\right)} \qquad \text{plim}\ \hat\lambda_{MM}=\lambda.$$

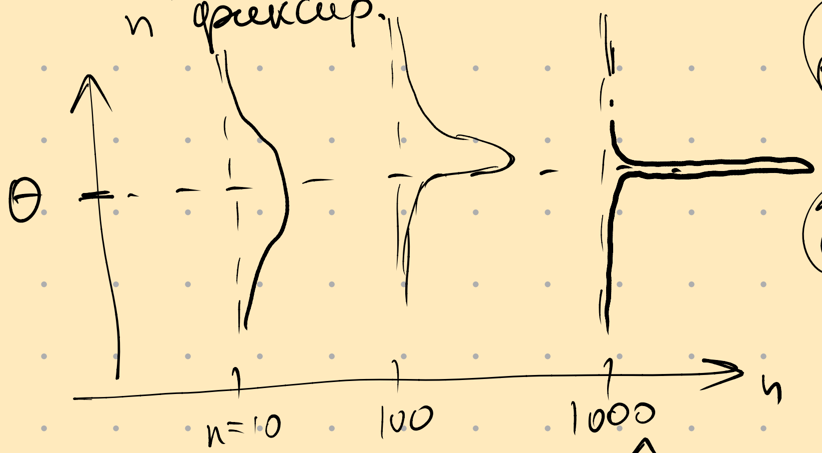
а) $\hat\lambda_{MM}$ несмещ? состоят?

б) достигает ли $\hat\lambda_{MM}$ границу Крамера-Рао?

напоминание: $\text{plim}\ \hat\lambda_n=\lambda$ $\quad (\hat\lambda_n)$ — состоятельная [послед-сть] оценок.

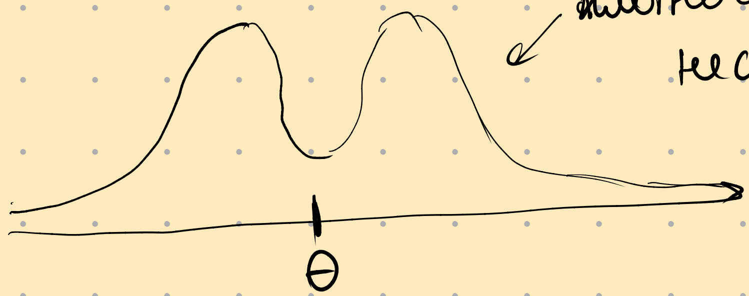
$E(\hat\lambda_n)=\lambda$ $\quad \hat\lambda_n$ — несмещённая оценка.

n фиксир.



$\hat\Theta$ — СВ.

$(\hat\Theta_n)$ — сост-ая.



плотность $\hat\Theta$

несмещённость

n - фиксир-но.

а) $\boxed{\text{сост-ая!}}$ $\operatorname{plim} \hat\lambda_{MM} = \operatorname{plim} \frac{1}{\bar y} = \frac{1}{\operatorname{plim} \bar y} = \frac{1}{E(y_1)} = \frac{1}{1/\lambda} = \lambda$

а) смещ/несмещ?

$$E(\hat\lambda) = E\left(\frac{1}{\bar y}\right) \geq \frac{1}{E(\bar y)} = \frac{1}{E\left(\frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}\right)} =^{*}$$

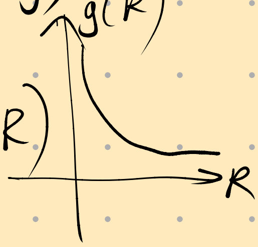
нерав-во Йенсена

$$E(g(R)) \geq g(E(R))$$

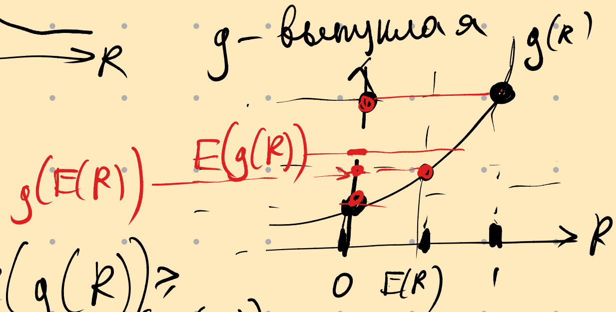
$y_i \geq 0$

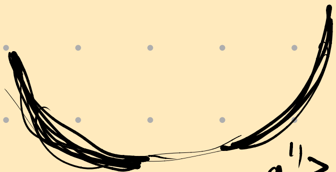
$\bar y \geq 0$

$\frac{1}{R} = g(R)$



g – выпуклая





$g'' > 0$ $\quad$ $g'' > 0$

$$E(g(R)) \geq g(E(R))$$

$$* = \frac{1}{\left(\frac{E(y_1) + E(y_2) + \ldots E(y_n)}{n}\right)} = \frac{n}{n \cdot E(y_1)} = \frac{1}{E(y_1)} = \frac{1}{1/\lambda} = \lambda$$

$g'' < 0$

$$E(g(R)) \leq g(E(R))$$

$$E(\hat\lambda_{MM}) \geq \lambda$$

$$\boxed{\text{если } Var(R) > 0,\ g \text{ – строго вып, то } E(g(R)) > g(E(R))}$$

$E(\hat\lambda_{MM}) > \lambda$ $\quad$ $\hat\lambda_{MM}$ – смещённая.

б) Нер-во Крамера-Рао

несмещённых: $Var(\hat\theta_{unbiased}) \geq \frac{1}{I_F}$

произв-х: $Var(\hat\theta) \geq \frac{(m'(\theta))^2}{I_F}$, где $m(\theta) = E(\hat\theta)$

критерий достижимости границы Крамера-Рао.

$\hat\theta$ линейно зависит от $\frac{\partial \ell}{\partial \theta}$

[неслучайными возможно неизвестными,

коэфф-ии }

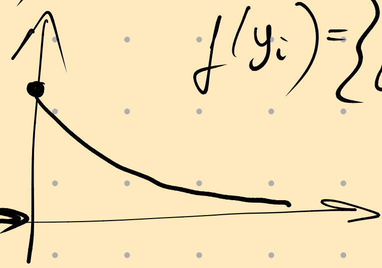
$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{y}} \qquad \frac{\partial \ell}{\partial \theta}?$$

$$L(\lambda) = f(y_1, y_2, \dots, y_n \mid \lambda) = ? \prod_{i=1}^{n} f(y_i) =$$

$$f(y_i) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y_i} \\ 0, \; y_i < 0 \end{cases}$$

$$= \lambda e^{-\lambda y_1} \cdot \lambda e^{-\lambda y_2} \cdot \ldots \cdot \lambda e^{-\lambda y_n}$$

$$= \lambda^n \cdot \exp(-\lambda \cdot (y_1 + y_2 + \dots + y_n))$$



$$\ell(\lambda) = \ln L = n \ln \lambda - \lambda \cdot (y_1 + \dots + y_n)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - (y_1 + \dots + y_n)$$

конст

СВ

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{y_1 + \dots + y_n}$$

конст

СВ.

СВ

$$\hat{\lambda} \overset{?}{=} \boxed{?} + \boxed{?} \frac{\partial \ell}{\partial \lambda}$$

конст

СВ

$$\hat{\lambda} = \left(\frac{n}{\lambda} - \frac{\partial \ell}{\partial \lambda}\right)^{-1} \cdot n$$

← нелинейная ф-ция (!)

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{y_1 + \dots + y_n}$$

— не достигает границы Кр-Рао.

в) А есть некая $\hat{\lambda}$, которая бы достигала ф-цию К.Р?

допустим есть !!

$$\boxed{\hat{\lambda} = \alpha + \beta \cdot \frac{\partial \ell}{\partial \lambda}}$$

неизв. конст

$$\boxed{\hat{\lambda} = \alpha + \beta \cdot \left(\frac{n}{\lambda} - \sum y_i\right)}$$

$\hat{\lambda}$ не может содержать λ в формуле!

может содержать: $y_1, y_2 \dots y_n, n$.

$$\hat{\lambda} = \left(\alpha + \frac{\beta n}{\lambda}\right) - \beta \cdot \sum y_i$$

нет λ нет λ

например:

$$\begin{cases}\beta = 1 \\ \alpha = -\dfrac{n}{\lambda}\end{cases}$$

$$\hat{\lambda} = 0 - \sum_{i=1}^{n} y_i$$ ← достигает гр. Кр-Рао.

сост?
несмещ?

$$E(\hat{\lambda}) = -n \cdot \frac{1}{\lambda} < 0 \neq \lambda$$

смещённая

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \hat{\lambda}_n = \operatorname{plim}\left(-\sum y_i\right) =$$

$$= \operatorname{plim}\left(-\frac{\sum y_i}{n} \cdot n\right) =$$

$$= \operatorname{plim}\left(-\frac{\sum y_i}{n}\right) \cdot \operatorname{plim} n =$$

$$= -E(y_1) \cdot (+\infty) = -\infty \neq \lambda$$

например.

$$\alpha = 0 \qquad \hat{\lambda}_{BAD} = 0$$
$$\beta = 0$$

$$\boxed{\begin{matrix} E(\hat{\lambda}_{BAD}) = 0 \neq \theta \text{ смещ.} \\ \operatorname{Var}(\hat{\lambda}_{BAD}) = 0 \end{matrix}}$$

2) $\nexists$ есть ли состоят-ая оценка, к-рая бы достигала границу Крамера-Рао?

(1) $$\hat{\lambda}_n = \left(\alpha + \frac{\beta n}{\lambda}\right) - \beta \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i$$

нет λ нет λ

$$\operatorname{plim} \hat{\lambda}_n = \lambda$$ (2)

$$\operatorname{plim}\left[\underbrace{\left(\alpha + \frac{\beta n}{\lambda}\right)}_{\text{нет } \lambda} - \underbrace{\beta n}_{\text{нет } \lambda} \cdot \frac{\sum y_i}{n}\right] = \lambda$$

$$\operatorname{plim} \frac{\sum y_i}{n} = E(y_1) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\operatorname{plim}\left[q(n) - r(n) \cdot \frac{\sum y_i}{n}\right] \stackrel{?}{=} \lambda$$

$\to \frac{1}{\lambda}$ нет!

(Упр) $y_1, \dots, y_n \sim N(\mu; 1)$ незав.

$E(y_i)$, $Var(y_i)$

$$\hat{\mu} = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} \qquad \hat{\mu}(y_1 \dots y_n)$$

набл: $y_1, y_2, \dots, y_n$

хотим оценить: μ (не знаем)

а) несмещ? сост-ная?

б) достигает ли нр. Кр-Рао?

а$_1$)
$$E(\hat{\mu}) = E\left(\frac{y_1 + \dots + y_n}{n}\right) = \frac{E(y_1) + E(y_2) + \dots + E(y_n)}{n} = \frac{\mu + \mu + \dots + \mu}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

несмещённая

а$_2$)
$$\text{plim}\,\hat{\mu} = \text{plim}\,\overline{Y} = E(y_1) = \mu$$
состоят.

б) Кр-Рао?

$\to$ по неравенству

$Var(\hat{\mu})$?

I_F?

$$Var(\hat{\mu}) \geq \frac{1}{I_F}$$

$=$

$\to$ по самур-сти

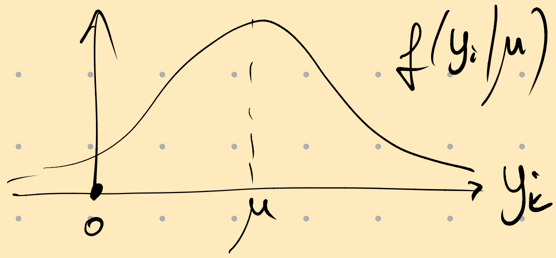
$\hat{\mu}$ линейно зав-т от $\frac{\partial \ell}{\partial \mu}$?

$$Var(\hat{\mu}) = Var\left(\frac{y_1 + \dots + y_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(Var(y_1) + \dots + Var\,y_n\right) = \frac{1}{n^2} \cdot (1 + 1 + \dots + 1) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

!! ☺

$$I_F \to Var\left(\frac{\partial \ell}{\partial \mu}\right) = \dots$$
$$I_F \to -E\left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu^2}\right) = \dots$$

$$L(y_1 \dots y_n) = f(y_1 \dots y_n | \mu) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i | \mu)$$



$\boxed{\sigma^2 = 1}$

$$f(y_i|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{(y_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

ф. правдоп.:

$$L = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(y_i-\mu)^2\right)$$

лог. ф. правдоп.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = (2\pi)^{-1/2}$$

$$l = \ln L = \sum\left[-\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}(y_i-\mu)^2\right]$$

score-function

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \sum -\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(y_i-\mu)\cdot(-1) = \sum(y_i-\mu) = \sum y_i - \sum \mu = \sum y_i - n\mu$$

$$I_F = Var\left(\frac{\partial l}{\partial \mu}\right) = Var\left(\sum y_i - n\mu\right) = Var\left(\sum y_i\right) = Var(y_1) + Var(y_2) + \ldots + Var(y_n) = 1 + 1 + \ldots + 1 = n.$$

$$Var(\hat{\mu}) \geq \frac{1}{I_F}$$ ← нер-во Крамера-Рао

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$ достигнута граница.

критерий линейности (второй способ)

можно ли $\hat{\mu} = \alpha + \beta \cdot \frac{\partial l}{\partial \mu}$?

СВ

неслуч. (возм. содержат n, λ)

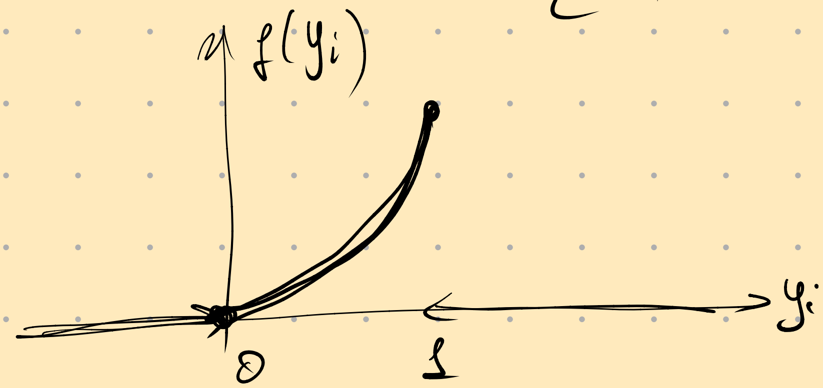
$$\frac{y_1 + \ldots + y_n}{n} = \alpha + \beta \cdot \left(\sum y_i - n \quad\right)$$

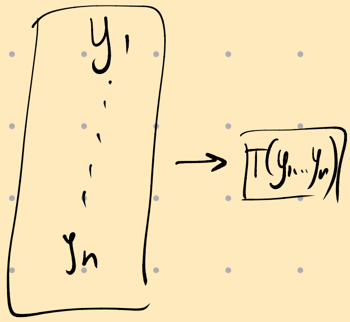
$$\frac{y_1 + \dots + y_n}{n} = \mu + \frac{1}{n}\left(\sum y_i - n\mu\right)$$

да, можно!

Упр. $y_1, y_2, \dots\dots, y_n \sim$ незав.

$$f(y_i) = \begin{cases} \theta \cdot y_i^{\theta-1}, & y_i \in [0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$





Найдите любую дост-ую статистику

$$L(\theta) = f(y_1 \dots y_n) = \theta \cdot y_1^{\theta-1} \cdot \theta \cdot y_2^{\theta-1} \cdot \dots\dots \cdot \theta y_n^{\theta-1} =$$

$$= 1 \cdot \theta^n \cdot (y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n)^{\theta-1}$$

$$L(\theta) = a(y_1 \dots y_n) \cdot b(\theta, T)$$

$T(y_1, y_2 \dots y_n)$ — дост-ая статистика

$$b(\theta, T) = \theta^n \cdot T^{\theta-1}$$

$$T = T(y_1, y_2, \dots y_n) = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot \dots \cdot y_n$$

ответ: $T_1 = y_1 \cdot \dots \cdot y_n$

или $T_2 = \sum \ln y_i$ $\qquad T_3 = (y_1 \cdot \dots \cdot y_n)^3$