

1. [10] Случайная величина X имеет функцию плотности $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1; 1]$ и 0 за его пределами.
 - (a) [3] Найдите условную вероятность $\mathbb{P}(X > 0.5 \mid X > 0)$.
 - (b) [4] Найдите ковариацию $\text{Cov}(X, X^3)$.
 - (c) [3] Найдите функцию плотности величины $Y = \ln|X|$.
2. [10] Илон и Маск независимо друг от друга подбрасывают правильную монетку. Илон подбрасывает 10 раз, а Маск — 11 раз. У Илона выпадает случайное количество X орлов, у Маска — Y орлов.
 - (a) [2] Найдите вероятность $\mathbb{P}(X + Y = 7)$.
 - (b) [4] Найдите вероятность $\mathbb{P}(Y > X)$.
 - (c) [4] Найдите условное ожидание $\mathbb{E}(X \mid X + Y = 12)$.

Подсказка: в быстром ответе на всю задачу остаётся один биномиальный коэффициент :)

3. [10] Пара студентов играет один матч в камень-ножницы-бумага. Матч состоит из нескольких раундов. Все игроки всегда выбирают равновероятно камень, ножницы и бумагу. Раунды играют до тех пор, пока не определится победитель.
Обозначим T — число ничьих раундов, а S — общее число ножниц в матче у обоих игроков.
 - (a) [3] Найдите энтропию $\mathbb{H}(T)$.
 - (b) [7] Найдите энтропию $\mathbb{H}(S)$.
4. [10] Студенты фкн в составе 300 человек играют в камень-ножницы-бумага индивидуально до определения Самого Главного Везунчика. В каждой паре игроки играют один матч, состоящий из раундов камень-ножница-бумага до тех пор, пока не определится победитель. Проигравший раунд (и матч) игрок выбывает и далее в матчах не участвует. Все игроки всегда выбирают равновероятно камень, ножницы и бумагу.
Обозначим N — общее число раундов (не матчей!).
 - (a) [2] Найдите вероятность $\mathbb{P}(N = 300)$.
 - (b) [4] Найдите ожидание $\mathbb{E}(N)$.
 - (c) [4] Найдите дисперсию $\text{Var}(N)$.
5. [10] На сцене четыре закрытых двери. За одной из дверей — дорогой автомобиль, за остальными — козы. Ведущий шоу знает, что находится за каждой дверью, игрок шоу — не знает. Игрок хочет выиграть автомобиль. Шоу идёт так:

Шаг 1. Игрок встаёт возле одной из закрытых дверей.

Шаг 2. Ведущий открывает одну из дверей с козой, возле которой нет игрока. Остаётся закрытыми три двери, у одной из которых стоит игрок. Затем ведущий предлагает игроку возможность перейти к любой другой двери.

Шаг 3. Игрок перемещается или остаётся на месте.

Шаг 4. Ведущий снова открывает одну из дверей с козой, возле которой нет игрока. Остаётся закрытыми две двери, у одной из которых стоит игрок. Снова ведущий предлагает игроку возможность перейти к другой закрытой двери.

Шаг 5. Игрок перемещается или остаётся на месте.

Шаг 6. Игрок получает то, что находится за дверью, у которой он стоит.

- (a) [7] Как выглядит оптимальная стратегия игрока?
 - (b) [3] Чему равна вероятность получения автомобиля при оптимальной стратегии?
6. [10] Пара величин (X, Y) имеет функцию плотности $f(x, y) = 6xy^2$ на квадрате $[0; 1] \times [0; 1]$ и 0 вне квадрата.
- (a) [3] Найдите ожидание $\mathbb{E}(X/Y)$ и вероятностью $\mathbb{P}(X > Y)$.
 - (b) [3] Найдите функцию распределения $F_X(t)$.
 - (c) [1] Зависимы ли величины X и Y ?
 - (d) [3] Найдите ожидание $\mathbb{E}(W)$, где $W = F(X, Y)$ и F — совместная функция распределения.

Критерии и частичные ответы с решениями:

1. (a) 3 - верно; 2 - арифметическая ошибка при подсчете одного из интегралов; 1 - есть верная формула для условной вероятности, но сами вероятности вычисляются неверно (не та плотность интегрируется и тому подобное); 0,5 - нет верной формулы полной вероятности, но удалось верно посчитать какую-то из двух нужных вероятностей. Как правило, это относится к тем, кто вместо условной вероятности посчитал просто $\mathbb{P}(X > 0, 5)$.

$$\mathbb{P}(X > 0.5 | X > 0) = \frac{\mathbb{P}(X > 0.5, X > 0)}{\mathbb{P}(X > 0)} = \frac{\mathbb{P}(X > 0.5)}{\mathbb{P}(X > 0)}.$$

$\mathbb{P}(X > 0) = 1/2$ в силу четности плотности, при желании можно и явно посчитать:

$$\mathbb{P}(X > 0) = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 xdx = 1/2.$$

$$\mathbb{P}(X > 0.5) = \int_{0.5}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0.5}^1 xdx = 3/8.$$

Таким образом, $\mathbb{P}(X > 0.5 | X > 0) = 3/4$.

- (b) 4 - верно; штраф по (-1б) за каждое неверно посчитанное матожидание; 1 - есть верно написанная формула для ковариации.

$$\text{Cov}(X, X^3) = \mathbb{E}(X \cdot X^3) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}(X^3) = \mathbb{E}(X^4) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(X^3).$$

$\mathbb{E}X = 0$ в силу четности плотности, действительно: $\int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_{-1}^1 x|x|dx$ — интеграл берется от нечетной функции по симметричному промежутку, значит он равен нулю.

$$\mathbb{E}(X^4) = \int_{\mathbb{R}} x^4 f(x)dx = \int_{-1}^1 x^4 |x|dx = [\text{в силу четности и симметрии промежутка}] = 2 \int_0^1 x^4 \cdot xdx =$$

Таким образом, $\text{Cov}(X, X^3) = 1/3 - 0 = 1/3$.

(с) **Решение через поиск Ф.Р.:** Для начала найдем функцию распределения Y :

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\ln|x| \leq y) = \mathbb{P}(|x| \leq e^y) = \mathbb{P}(-e^y \leq X \leq e^y) = \begin{cases} F_X(e^y) - F_X(-e^y), & y \leq 0 \\ 1, & y > 0 \end{cases}$$

Теперь найдем плотность, помня о том, что $F'_x(x) = f_x(x)$ и о формуле производной сложной функции:

$$f_Y(y) = F'_y(y) = \begin{cases} f_X(e^y) \cdot e^y - f_X(-e^y) \cdot (-e^y) = 2e^{2y}, & y \leq 0 \\ 0, & y > 0 \end{cases}$$

3 - верно; 2 - ФР Y верно выражена через ФР X , но при подсчете плотности потерялась производная сложной функции и, соответственно, двойка в степени. либо была ошибка при выражении ФР, в результате потерялась двойка перед экспонентой в плотности, потеряно, что на положительных y плотность нулевая; 1 - есть верная связь ФР Y с ФР X , записанная через вероятность. Дальше неверно найдена ФР X , если она искалась, либо неверно сделан сразу переход к плотностям, либо нет дальнейших продвижений; 0,5 - есть понимание связи между случайными величинами (предлагается считать плотность y как плотность x в точке e^y).

Решение через о-малые: Рассмотрим

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \in [y, y+h]) &= \mathbb{P}(\ln|x| \in [y, y+h]) = \mathbb{P}(X \in [e^y, e^{y+h}]) + \mathbb{P}(X \in [-e^y, -e^{y+h}]) = \\ &= [\text{в силу четности плотности}] = 2 \mathbb{P}(X \in [e^y, e^{y+h}]) = \begin{cases} 2|e^y| \cdot (e^{y+h} - e^y) + o(e^{y+h} - e^y), & y \leq 0 \\ o(e^{y+h} - e^y), & y > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Преобразуем последнее выражение: $(e^{y+h} - e^y) = e^y(e^h - 1) = e^y(h + o(h))$, таким образом, $o(e^{y+h} - e^y) = o(h)$ и имеем

$$\mathbb{P}(Y \in [y, y+h]) = \begin{cases} 2e^y \cdot (e^y h + o(h)) + o(h) = 2e^{2y}h + o(h), & y \leq 0 \\ o(h), & y > 0, \end{cases}$$

$$\text{то есть } f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{2y}, & y \leq 0 \\ 0, & y > 0. \end{cases}$$

3 - верно; 2 - верно написана вероятность попадания в нужный отрезок, но возникла проблема с работой с о-малыми при попытке привести к нужному виду; 1 - есть попытка записать нужную вероятность через о-малые, но нет понимания, что нужно перейти от δx к δy ;

2. (а) 2 - верно; 1 - ответ оставлен в виде суммы произведений биномиальных коэффициентов (либо эта сумма посчитана неверно), либо вместо искомой вероятности посчитано количество комбинаций, либо при подсчете через производящие функции ошибка из-за потери коэффициентов; 0.5 - вычислены какие-то из вероятностей вида $\mathbb{P}(x=k, y=7-k)$; 0 - рассуждение, в котором считается, что все комбинации вида $(x=k, y=7-k)$ равновероятны и предлагается считать вероятность как их количество, деленное на общее число возможных пар значений (то есть подсчеты типа $8/(11 \cdot 12)$;

Заметим, что величина $X+Y$ соответствует количеству орлов, выпавших при 21 независимом броске монетки, то есть имеет биномиальное распределение $X+Y \sim \text{Bin}(21, 1/2)$. А значит

$$\mathbb{P}(X+Y=7) = C_{21}^7 (1/2)^7 (1/2)^{14} = C_{21}^7 (1/2)^{21}.$$

- (b) 4 - верно получен ответ $1/2$; 3 - есть небольшая дыра в обосновании равновероятности событий $(Y > X)$ и $(Y \leq X)$; 2 - ответ оставлен в виде двойной суммы биномиальных коэффициентов; 1 - ответ сведен к двойной сумме вероятностей событий, но эти вероятности не вычислены, либо вместо вероятностей посчитаны количества и ответ оставлен в виде двойной суммы; 0 - рассуждение, в котором считается, что все комбинации вида $(x=k, y=m)$ равновероятны и предлагается считать вероятность как их количество, деленное на общее число возможных пар значений;

Покажем, что $\mathbb{P}(Y > X) = \mathbb{P}(Y \leq X)$, а значит равна $1/2$. Для этого построим биекцию между исходами из множества $(Y > X)$ и $(Y \leq X)$, перевернув все монетки. Действительно, пусть в исходной полученной последовательности было $X = x, Y = y$ орлов, $y > x$. Тогда после переворачивания монеток орлы с решками поменяются местами и получится последовательность, в которой $X = 10 - x, Y = 11 - y, x < y$, значит $-x > -y, 10 - x > 10 - y$, а значит $10 - x \geq 11 - y$, то есть $X \geq Y$. Биекция между последовательностями построена, все возможные последовательности орлов и решек равновероятны (каждая последовательность имеет вероятность $(1/2)^{21}$), значит $\mathbb{P}(Y > X) = \mathbb{P}(Y \leq X) = 1/2$.

- (с) 4 - верно; 3 - имеется дыра в обосновании/отсутствует обоснование условных матожиданий для отдельных монеток; 2 - Есть верная формула для подсчета УМО через суммы произведений биномиальных коэффициентов, но до числового ответа не доведено; 1.5 - формула из «2» с небольшими недостатками; 1 - выписана верная формула для подсчета УМО;

Поставим j -й монетке из 21 случайную величину I_j , равной 1, если на этой монете выпал орел, и 0, если выпала решка. Заметим, что $X + Y = I_1 + \dots + I_{21}, X = I_1 + \dots + I_{10}$. Воспользуемся линейностью ожидания: $\mathbb{E}(X + Y \mid X + Y = 12) = 12$, так как $X + Y$ константа, но

$$12 = \mathbb{E}(X + Y \mid X + Y = 12) = \mathbb{E}(I_1 + \dots + I_{21} \mid X + Y = 12) = 21 \mathbb{E}(I_1 \mid X + Y = 12),$$

то есть $\mathbb{E}(I_1 \mid X + Y = 12) = 12/21$. Но тогда

$$\mathbb{E}(X \mid X + Y = 12) = \mathbb{E}(I_1 + \dots + I_{10} \mid X + Y = 12) = 10 \mathbb{E}(I_1 \mid X + Y = 12) = 120/21.$$

3. Для геометрического распределения с вероятностью p энтропия равна $\mathbb{H}(X) = -\ln p - \ln(1-p)(1-p)/p$.

Для $\mathbb{P}(T = k) = p(1-p)^k$ для $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ с $p = 2/3$.

Отсюда $H(T) = 1.5 \ln 3 - \ln 2$.

За верную формулу для $\mathbb{P}(T = k) - 1$ балл.

Для S важна чётность, $\mathbb{P}(S = 2k) = (4/7)(1/7)^k, \mathbb{P}(S = 2k + 1) = (2/7)(1/7)^k$.

4. (a) По правилам одно поражение приводит к выбыванию ровно одного игрока. Как конкретно происходит сопоставление игроков — совершенно неважно. Матчей всегда будет сыграно 299 при любой схеме сопоставления.

Нужна одна ничья с последующей победой и 288 побед за один раунд, $\mathbb{P}(N = 300) = 299 \cdot (2/9)(2/3)^{288}$.

За неверный ответ $\mathbb{P}(N = 300) = (2/3)^{300}$ ставил 1 балл.

- (b) $\mathbb{E}(N) = 299 \cdot 1/p = 299 \cdot 3/2$.

- (c) $\mathbb{V}\text{ar}(N) = 299 \cdot (1-p)/p^2 = 299 \cdot 3/4$.

5. Оптимальная стратегия: стоять, затем менять. Даёт вероятность выигрыша $3/4$.
- (a) 1 за чёткую тривиальную или нетривиальную(без объяснений) стратегию или 2 за нетривиальную с объяснением + до 5 за доп. обоснования.
 - (b) 1 за какие-то правильные вероятности, 2 за правильную вероятность нетривиальной неоптимальной стратегии, 3 за правильную оптимальную.
- 6.
- (a) 1.5 за каждый результат -0.2 за арифметику.
 - (b) 3 за правильную функцию распределения, с учётом 1 и 0. 2 без учёта 1 и 0. 1 за учёт 1 и 0, но неправильно в середине. 0 если плотность вместо функции распределения или аномальные интегралы.
 - (c) 1 если правильный критерий независимости. 0.2 если показана некоррелированность. 0 если получилась корреляция или странные объяснения или только ответ (ака "Да").
 - (d) 3 за правильный результат и вычисление F. 1 только за вычисление F. -0.2 за арифметику. КРОМЕ ТОГО: во всей задаче кроме пункта (b), где есть отдельный критерий, не более одного раза снимается 0.2 за не указание граничных вещей (типа, что плотность или f . распределения не везде ненулевая).
-