1. [10] Случайная величина $X$ имеет функцию плотности $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1; 1]$ и $0$ за его пределами.

   (a) [3] Найдите условную вероятность $\mathbb{P}(X > 0.5 \mid X > 0)$.

   (b) [4] Найдите ковариацию $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, X^3)$.

   (c) [3] Найдите функцию плотности величины $Y = \ln|X|$.

2. [10] Илон и Маск независимо друг от друга подбрасывают правильную монетку. Илон подбрасывает $10$ раз, а Маск — $11$ раз. У Илона выпадает случайное количество $X$ орлов, у Маска — $Y$ орлов.

   (a) [2] Найдите вероятность $\mathbb{P}(X + Y = 7)$.

   (b) [4] Найдите вероятность $\mathbb{P}(Y > X)$.

   (c) [4] Найдите условное ожидание $\mathbb{E}(X \mid X + Y = 12)$.

   Подсказка: в быстром ответе на всю задачу остаётся один биномиальный коэффициент :)

3. [10] Пара студентов играет один матч в камень-ножницы-бумага. Матч состоит из нескольких раундов. Все игроки всегда выбирают равновероятно камень, ножницы и бумагу. Раунды играют до тех пор, пока не определится победитель.

   Обозначим $T$ — число ничьих раундов, а $S$ — общее число ножниц в матче у обоих игроков.

   (a) [3] Найдите энтропию $\mathbb{H}(T)$.

   (b) [7] Найдите энтропию $\mathbb{H}(S)$.

4. [10] Студенты фкн в составе 300 человек играют в камень-ножницы-бумага индивидуально до определения Самого Главного Везунчика. В каждой паре игроки играют один матч, состоящий из раундов камень-ножница-бумага до тех пор, пока не определится победитель. Проигравший раунд (и матч) игрок выбывает и далее в матчах не участвует. Все игроки всегда выбирают равновероятно камень, ножницы и бумагу.

   Обозначим $N$ — общее число раундов (не матчей!).

   (a) [2] Найдите вероятность $\mathbb{P}(N = 300)$.

   (b) [4] Найдите ожидание $\mathbb{E}(N)$.

   (c) [4] Найдите дисперсию $\mathbb{V}\mathrm{ar}(N)$.

5. [10] На сцене четыре закрытых двери. За одной из дверей — дорогой автомобиль, за остальными — козы. Ведущий шоу знает, что находится за каждой дверью, игрок шоу — не знает. Игрок хочет выиграть автомобиль. Шоу идёт так:

Шаг 1. Игрок встаёт возле одной из закрытых дверей.

Шаг 2. Ведущий открывает одну из дверей с козой, возле которой нет игрока. Остаётся закрытыми три двери, у одной из которых стоит игрок. Затем ведущий предлагает игроку возможность перейти к любой другой двери.

Шаг 3. Игрок перемещается или остаётся на месте.

Шаг 4. Ведущий снова открывает одну из дверей с козой, возле которой нет игрока. Остаётся закрытыми две двери, у одной из которых стоит игрок. Снова ведущий предлагает игроку возможность перейти к другой закрытой двери.

Шаг 5. Игрок перемещается или остаётся на месте.

Шаг 6. Игрок получает то, что находится за дверью, у которой он стоит.

(a) [7] Как выглядит оптимальная стратегия игрока?

(b) [3] Чему равна вероятность получения автомобиля при оптимальной стратегии?

6. [10] Пара величин $(X, Y)$ имеет функцию плотности $f(x, y) = 6xy^2$ на квадрате $[0; 1] \times [0; 1]$ и 0 вне квадрата.

   (a) [3] Найдите ожидание $\mathbb{E}(X/Y)$ и вероятностью $\mathbb{P}(X > Y)$.

   (b) [3] Найдите функцию распределения $F_X(t)$.

   (c) [1] Зависимы ли величины $X$ и $Y$?

   (d) [3] Найдите ожидание $\mathbb{E}(W)$, где $W = F(X, Y)$ и $F$ — совместная функция распределения.

Критерии и частичные ответы с решениями:

1. (a) 3 - верно; 2 - арифметическая ошибка при подсчете одного из интегралов; 1 - есть верная формула для условной вероятности, но сами вероятности вычесляются неверно (не та плотность интегрируется и тому подобное); 0,5 - нет верной формулы полной вероятности, но удалось верно посчитать какую-то из двух нужных вероятностей. Как правило, это относися к тем, кто вместо условной вероятности посчитал просто $\mathbb{P}(X > 0, 5)$.

$$\mathbb{P}(X > 0.5 \mid X > 0) = \frac{\mathbb{P}(X > 0.5, X > 0)}{\mathbb{P}(X > 0)} = \frac{\mathbb{P}(X > 0.5)}{\mathbb{P}(X > 0)}.$$

$\mathbb{P}(X > 0) = 1/2$ в силу четности плотности, при желании можно и явно посчитать:

$$\mathbb{P}(X > 0) = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 xdx = 1/2.$$

$$\mathbb{P}(X > 0.5) = \int_{0.5}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0.5}^1 xdx = 3/8.$$

Таким образом, $\mathbb{P}(X > 0.5 \mid X > 0) = 3/4$.

   (b) 4 - верно; штраф по (-1б) за каждое неверно посчитанное матожидание; 1 - есть верно написанная формула для ковариации.

$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, X^3) = \mathbb{E}(X \cdot X^3) - \mathbb{E}\, X \cdot \mathbb{E}(X^3) = \mathbb{E}(X^4) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(X^3)$.

$\mathbb{E}\, X = 0$ в силу четности плотности, действительно: $\int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_{-1}^1 x|x|dx$ — интеграл берется от нечетной функции по симметричному промежутку, значит он равен нулю.

$$\mathbb{E}(X^4) = \int_{\mathbb{R}} x^4 f(x)dx = \int_{-1}^1 x^4|x|dx = [\text{в силу четности и симметрии промежутка}] = 2\int_0^1 x^4 \cdot xdx =$$

Таким образом, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, X^3) = 1/3 - 0 = 1/3$.

(c) **Решение через поиск Ф.Р.:** Для начала найдем функцию распределения $Y$:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(\ln|x| \le y) = \mathbb{P}(|x| \le e^y) = \mathbb{P}(-e^y \le X \le e^y) = \begin{cases} F_X(e^y) - F_x(-e^y), & y \le 0 \\ 1, & y > 0 \end{cases}$$

Теперь найдем плотность, помня о том, что $F_x'(x) = f_x(x)$ и о формуле производной сложной функции:

$$f_Y(y) = F_y'(y) = \begin{cases} f_X(e^y) \cdot e^y - f_X(-e^y) \cdot (-e^y) = 2e^{2y}, & y \le 0 \\ 0, & y > 0 \end{cases}$$

3 - верно; 2 - ФР Y верное выражена через ФР X, но при подсчете плотности потерялась производная сложной функции и, соответственно, двойка в степени. либо была ошибка при выражении ФР, в результате потерялась двойка перед экспонентой в плотности, потеряно, что на положительных y плотность нулевая; 1 - есть верная связь ФР Y с ФР X, записанная через вероятность. Дальше неверно найдена ФР X, если она искалась, либо неверно сделан сразу переход к плотностям, либо нет дальнейших продвижений; 0,5 - есть понимание связи между случайными величинами (предлагается считать плотность y как плотность x в точке $e^y$).

**Решение через о-малые:** Рассмотрим

$$\mathbb{P}(Y \in [y, y+h]) = P(\ln|x| \in [y, y+h]) = \mathbb{P}(X \in [e^y, e^{y+h}]) + \mathbb{P}(X \in [-e^y, -e^{y+h}]) =$$

$$= [\text{в силу четности плотности}] = 2\,\mathbb{P}(X \in [e^y, e^{y+h}]) = \begin{cases} 2|e^y| \cdot (e^{y+h} - e^y) + o(e^{y+h} - e^y), & y \le 0 \\ o(e^{y+h} - e^y), & y > 0 \end{cases}$$

Преобразуем последнее выражение: $(e^{y+h} - e^y) = e^y(e^h - 1) = e^y(h + o(h))$, таким образом, $o(e^{y+h} - e^y) = o(h)$ и имеем

$$\mathbb{P}(Y \in [y, y+h]) = \begin{cases} 2e^y \cdot (e^y h + o(h)) + o(h) = 2e^{2y} h + o(h), & y \le 0 \\ o(h), & y > 0, \end{cases}$$

то есть $f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{2y}, & y \le 0 \\ 0, & y > 0. \end{cases}$.

3 - верно; 2 - верно написана вероятность попадания в нужный отрезок, но возникла проблема с работой с о-малыми при попытке привести к нужному виду; 1 - есть попытка записать нужную вероятность через о-малые, но нет понимания, что нужно перейти от $\delta x$ к $\delta y$;

2. (a) 2 - верно; 1 - ответ оставлен в виде суммы произведений биномиальных коэффициентов (либо эта сумма посчитана неверно), либо вместо искомой вероятности посчитано количество комбинаций, либо при подсчете через производящие функции ошибка из-за потери коэффициентов; $0.5$ - вычислены какие-то из вероятностей вида $\mathbb{P}(x = k, y = 7 - k)$; 0 - рассуждение, в котором считается, что все комбинации вида (x=k,y=7-k) равновероятны и предлагается считать вероятность как их количество, деленное на общее число возможных пар значений (то есть подсчеты типа $8/(11 \cdot 12)$;

Заметим, что величина $X+Y$ соответствует количеству орлов, выпавших при 21 независимом броске монетки, то есть имеет биномиальное распределение $X + Y \sim \text{Bin}(21, 1/2)$. А значит

$$\mathbb{P}(X + Y = 7) = C_{21}^7 (1/2)^7 (1/2)^{14} = C_{21}^7 (1/2)^{21}.$$

(b) 4 - верно получен ответ 1/2; 3 - есть небольшая дыра в обосновании равновероятности событий $(Y > X)$ и $(Y \leq X)$; 2 - ответ оставлен в виде двойной суммы биномиальных коэффициентов; 1 - ответ сведен к двойной сумме вероятностей событий, но эти вероятности не вычислены, либо вместо вероятностей посчитаны количества и ответ оставлен в виде двойной суммы; 0 - рассуждение, в котором считается, что все комбинации вида (x=k,y=m) равновероятны и предлагается считать вероятность как их количество, деленное на общее число возможных пар значений;

Покажем, что $\mathbb{P}(Y > X) = \mathbb{P}(Y \leq X)$, а значит равна $1/2$. Для этого построим биекцию между исходами из множества $(Y > X)$ и $(Y \leq X)$, перевернув все монетки. Действительно, пусть в исходной полученной последовательности было $X = x$, $Y = y$ орлов, $y > x$. Тогда после переворачивания монеток орлы с решками поменяются местами и получится последовательность, в которой $X = 10 - x$, $Y = 11 - y$, $x < y$, значит $-x > -y$, $10 - x > 10 - y$, а значит $10 - x \geq 11 - y$, то есть $X \geq Y$. Биекция между последовательностями построена, все возможные последовательности орлов и решек равновероятны (каждая последовательность имеет вероятность $(1/2)^{21}$), значит $\mathbb{P}(Y > X) = \mathbb{P}(Y \leq X) = 1/2$.

(c) 4 - верно; 3 - имеется дыра в обосновании/отсутствует обоснование условных матожиданий для отдельных монеток; 2 - Есть верная формула для подсчета УМО через суммы произведений биномиальных коэффициентов, но до числового ответа не доведено; $1.5$ - формула из «2» с небольшими недостатками; 1 - выписана верная формула для подсчета УМО;

Поставим $j$-й монетке из 21 случайную величину $I_j$, равной 1, если на этой монете выпал орел, и 0, если выпала решка. Заметим, что $X + Y = I_1 + \cdots + I_{21}$, $X = I_1 + \cdots + I_{10}$. Воспользуемся линейностью ожидания: $\mathbb{E}(X + Y \mid X + Y = 12) = 12$, так как $X + Y$ константа, но

$$12 = \mathbb{E}(X + Y \mid X + Y = 12) = \mathbb{E}(I_1 + \cdots + I_{21} \mid X + Y = 12) = 21\,\mathbb{E}(I_1 \mid X + Y = 12),$$

то есть $\mathbb{E}(I_1 \mid X + Y = 12) = 12/21$. Но тогда

$$\mathbb{E}(X \mid X + Y = 12) = \mathbb{E}(I_1 + \cdots + I_{10} \mid X + Y = 12) = 10\,\mathbb{E}(I_1 \mid X + Y = 12) = 120/21.$$

3. Для геометрического распределения с вероятностью $p$ энтропия равна $\mathbb{H}(X) = -\ln p - \ln(1-p)(1-p)/p$.

   Для $\mathbb{P}(T = k) = p(1-p)^k$ для $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ с $p = 2/3$.

   Отсюда $H(T) = 1.5 \ln 3 - \ln 2$.

   За верную формулу для $\mathbb{P}(T = k)$ — 1 балл.

   Для $S$ важна чётность, $\mathbb{P}(S = 2k) = (4/7)(1/7)^k$, $\mathbb{P}(S = 2k + 1) = (2/7)(1/7)^k$.

4. (a) По правилам одно поражение приводит к выбыванию ровно одного игрока. Как конкретно происходит сопоставление игроков — совершенно неважно. Матчей всегда будет сыграно 299 при любой схеме сопоставления.

   Нужна одна ничья с последующей победой и 288 побед за один раунд, $\mathbb{P}(N = 300) = 299 \cdot (2/9)(2/3)^{288}$.

   За неверный ответ $\mathbb{P}(N = 300) = (2/3)^{300}$ ставил 1 балл.

   (b) $\mathbb{E}(N) = 299 \cdot 1/p = 299 \cdot 3/2$.

   (c) $\mathbb{V}\mathrm{ar}(N) = 299 \cdot (1-p)/p^2 = 299 \cdot 3/4$.

5. Оптимальная стратегия: стоять, затем менять. Даёт вероятность выигрыша $3/4$.

   (a) 1 за чёткую тривиальную или нетривиальную(без объяснений) стратегию или 2 за нетривиальную с объяснением + до 5 за доп. обоснования.

   (b) 1 за какие-то правильные вероятности, 2 за правильную вероятность нетривиальной неоптимальной стратегии, 3 за правильную оптимальную.

   *Дисклеймер: это неприкольный стиль решения прикольной задачи и многим покажется неинтересным. Зато чётко и работает. Если вы считаете, что вы правы в своём решении, не аппелируйте исключительно к тому, что у вас ответ совпал, но в первую очередь задумывайтесь о корректности своего обоснования.*

   Здесь очень легко потерять условные и безусловные вероятности, поэтому следим за руками и дверями. В игре два момента принятия решений: после 1-й козы и после 2-й козы. Предлагается исследовать 4 чистых стратегии:

   (a) не менять выбор оба раза;

   (b) не менять в первый раз и во второй раз менять на любую доступную дверь (если несколько, то берём любую, например, ближайшую, информация про них одинаковая);

   (c) не менять во второй раз и в первый раз менять на любую доступную дверь (если несколько, то берём любую, например, ближайшую, информация про них одинаковая);

   (d) оба раза сменяем дверь.

   Основная сложность состоит в том, что ведущий открывает любоую дверь с козой и при этом такую, где игрока нет. Поэтому переход игрока открывает новые возможности для ведущего и усложняет анализ. Изначально предполагается, что 4 варианта расстановки автомобиля за дверью равновероятны, то есть, вероятность найти авто за одной конкретной дверью априори равна $1/4$.

   Стратегия «не меняем». Тут мы просто встали и ждём до конца игры. Мы выигрываем тогда и только тогда, когда встали на нужную дверь изначально. Вероятность выигрыша $1/4$.

   Далее сложнее. Рассмотрим 3 случайных величины $X_0, X_1, X_2$, обозначающие тип двери на инициализации, после первого решения и после второго решения. Авто обозначим за значение $1$ и козу за значение $0$. Во всех случаях нас интересует вероятность того, что $X_2 = 1$. Для этого используем формулу полной вероятности для гипотез вида $X_0 = i, X_1 = j$, так как они несовместны и в сумме дают весь $\Omega$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = 1) = \ & \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 0, X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_0 = 0, X_1 = 0) + \\
& + \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 0, X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_0 = 0, X_1 = 1) + \\
& + \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 1, X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 0) + \\
& + \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 1, X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 1).
\end{aligned}
$$

   Сейчас поймём, как это считать в каждой стратегии.

   Стратегия «Меняем во второй раз». В этом случае только первая и 4 вероятность могут быть ненулевыми, так как на старте и после первого решения всегда одинаковая дверь. С другой стороны, четвёртая равна нулю, так как автомобиль всего один, а на втором шаге мы сменили дверь. Остаётся

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 0, X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_0 = 0, X_1 = 0).$$

Посчитаем первую (не забываем, что дверь на старте и после первого решения одинаковы!):

$$\mathbb{P}(X_0 = 0, X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_0 = 0)\,\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

А вероятность

$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 0, X_1 = 0) = \frac{1}{2},$$

так как если игрок в козе изначально, одну козу исключило открытие, две оставшиеся двери — авто и коза и мы берём любую наугад. Итого вероятность выигрыша $3/8$.

Стратегия «Меняем в первый раз». Поскольку в первый раз поменяли дверь, $X_0 = X_1$ только если на старте была коза. Это зануляет чётвёртое слагаемое, но оставляет три первых. С другой стороны, второй раз мы не меняли, поэтому условные вероятности в третьем и первом слагаемом дадут $0$. В итоге остаётся

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 0, X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_0 = 0, X_1 = 1).$$

Прикидываем

$$\mathbb{P}(X_0 = 0, X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_0 = 0)\,\mathbb{P}(X_0 = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$

и (неожиданно, но попробуйте подумать, почему так, тут состояние двери известно)

$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 0, X_1 = 1) = 1.$$

Вероятность выигрыша, таким образом, $3/8$.

Стратегия «Меняем оба раза». Самый неочевидный случай. Из-за того, что меняем в первый раз, исключается четвёртое слагаемое. Из-за того, что меняем во второй раз, исключится второе. Остаётся только

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = 1) = {} & \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 0, X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_0 = 0, X_1 = 0) + \\ & + \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 1, X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 0).\end{aligned}$$

Далее по инструкции. Считаем

$$\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_0 = 1)\,\mathbb{P}(X_0 = 1) = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

и (откройте дверь сами в этом случае)

$$\mathbb{P}(X_0 = 0, X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_0 = 0)\,\mathbb{P}(X_0 = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$

И ещё осталось вычислить

$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 0, X_1 = 0) = 1$$

и

$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 1, X_1 = 0) = \frac{1}{2}.$$

В итоге вероятность выигрыша $1/2$.

6. (a) Ожидание считаем по определению

$$\mathbb{E}(X/Y) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x}{y} f(x,y) dxdy = \int_{[0,1]^2} \frac{x}{y} 6xy^2 dxdy = 1.$$

Вероятность тоже

$$\mathbb{P}(X > Y) = \int_{\mathbb{R}^2} I(x > y) f(x,y) dxdy = \int_0^1 \int_y^1 6xy^2 dxdy = \frac{2}{5}.$$

(b) Функция распределения — это

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t).$$

Много вариантов посчитать. Найдём плотность $X$

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1], \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Отсюда

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x) dx = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 1, \\ t^2, & t \in [0,1]. \end{cases}$$

(c) Здесь общий случай — два способа проверить: произведение плотностей должно равняться совместной плотности или то же через функции распределения. Найдём

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx = \begin{cases} 3y^2, & y \in [0,1], \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

В итоге $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ для всех $x, y$, поэтому величины независимы.

(d) Величины независимы, как мы выяснили, поэтому

$$F(X,Y) = F_X(x) F_Y(y).$$

Найдём вторую:

$$F_Y(s) = \int_{-\infty}^{s} f_Y(x) dx = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ 1, & s > 1, \\ s^3, & s \in [0,1]. \end{cases}$$

Теперь считаем, пользуясь независимостью:

$$\mathbb{E}(F(X,Y)) = \mathbb{E}(F_X(X) F_Y(Y)) = \mathbb{E}(F_X(X))\,\mathbb{E}(F_Y(Y)) = \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx \int_0^1 y^3 \cdot 3y^2 dy = \frac{1}{4}.$$

(a) 1.5 за каждый результат -0.2 за арифметику.

(b) 3 за правильную функцию распределения, с учётом 1 и 0. 2 без учёта 1 и 0. 1 за учёт 1 и 0, но неправильно в середине. 0 если плотность вместо функции распределения или аномальные интегралы.

(c) 1 если правильный критерий независимости. 0.2 если показана некоррелированность. 0 если получилась корреляция или странные объяснения или только ответ (ака "Да.").

(d) 3 за правильный результат и вычисление F. 1 только за вычисление F. -0.2 за арифметику. КРОМЕ ТОГО: во всей задаче кроме пункта (b), где есть отдельный критерий, не более одного раза снимается 0.2 за не указание граничных вещей. Например, что плотность или функция распределения не везде ненулевая.