Формат

В контрольной работе будет 6 задач. Задачи имеют равный вес. Продолжительность работы 120 минут. Пользоваться справочными материалами нельзя. В ноябре 2024 в контрольную работу могут войти любые темы пройденные до зачётной недели, за исключением: условной функции плотности и преобразование совместной функции плотности с помощью якобиана.

Демо «Тыква»

1. Погода завтра может быть ясной с вероятностью 0.3 и пасмурной с вероятностью 0.7. Вне зависимости от того, какая будет погода, Маша даёт верный прогноз с вероятностью 0.8. Вовочка, не разбираясь в погоде, делает свой прогноз по принципу: с вероятностью 0.9 копирует Машин прогноз, и с вероятностью 0.1 меняет его на противоположный.

   а) Какова вероятность того, что Маша спрогнозирует ясный день?

   б) Какова вероятность того, что Машин и Вовочкин прогнозы совпадут?

   в) Какова вероятность того, что день будет ясный, если Маша спрогнозировала ясный?

   г) Какова вероятность того, что день будет ясный, если Вовочка спрогнозировал ясный?

2. В корзине лежат 10 не отличимых на ощупь яблок: 2 красных и 8 зелёных. Я наугад равновероятно на ощупь достаю одно из яблок. Красное я сразу съедаю, а зелёное — возвращаю обратно в корзину. Затем я снова и снова достаю яблоки по данным правилам до тех пор, пока не съем оба красных.

   Найдите математическое ожидание и дисперсию количества извлечений яблок.

3. Илон Маск подбрасывает монетку 30 раз. За каждые две решки подряд он получает выигрыш 100 рублей.

   Найдите математическое ожидание и дисперсию суммарного выигрыша Илона.

4. Случайная величина X имеет функцию плотности $f(x) = x/2$ на отрезке $[0; 2]$.

   а) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{P}(X < 1)$ и $\mathbb{E}(X \mid X < 1)$.

   б) Найдите функцию производящую моменты $m(t)$ для величины X.

   в) Найдите фукнцию распределения величины $Y = 2X$.

5. Величина X — это число очков, которое выпадет на правильном игральном кубике. При прогнозировании X аналитик Василий равновероятно ошибается на ± 0.5 вне зависимости от X. Обозначим прогноз Василия буквой Y.

   а) Найдите $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)$.

   б) Найдите энтропии $\mathbb{H}(X)$, $\mathbb{H}(Y)$ и условные энтропии $\mathbb{H}(Y \mid X)$ и $\mathbb{H}(X \mid Y)$.

6. Пара величин (X, Y) имеет совместную функцию плотности $f(x, y) = 1.5x^2 + y$ на квадрате $[0; 1] \times [0; 1]$.

   а) Найдите $\mathbb{P}(X > Y)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$.

   б) Найдите совместную функцию распределения $F(x, y)$.

   в) Найдите функцию плотности $f_X(x)$ величины X.

Демо «Летучая мышь»

1. В колоде 53 карты: один джокер, которого можно засчитать за любую карту, и 13 достоинств от двойки до туза по 4 масти. Игрок случайным образом получает 5 карт из колоды.

   а) Какова вероятность того, что полученную комбинацию можно интепретировать как фулл-хаус (три карты разных мастей одного достоинства и ещё две карты разных мастей другого достоинства)?

   б) Какова вероятность того, что полученную комбинацию можно интепретировать как стрит-флэш (пять идущих подряд карт одной масти)?

2. На побережье одна за одной набегают волны. Высота каждой волны — равномерная на $[0;1]$ случайная величина. Высоты волн независимы. Пираты называют волну «большой», если она больше предыдущей и больше следующей. Пираты называют волну «рекордной», если она больше всех предыдущих волн от начала наблюдения. Обозначим события $B_i = \{i - \text{я волна была большой}\}$ и $R_i = \{i - \text{я волна была рекордной}\}$.

   а) Найдите $\mathbb{P}(B_1 \mid B_2), \mathbb{P}(B_1 \mid B_3)$.

   б) Найдите $\mathbb{P}(R_{2024} \mid R_{2025}), \mathbb{P}(R_{2024} \mid B_{2024})$.

   в) Укажите любую функцию $a(n)$ такую, что $a(n) = O(\mathbb{E}(X_n))$, где X_n — количество рекордных волн среди n волн.

3. Глеб Жеглов каждый день ловит одного преступника. Однако с вероятностью 0.05 вместо одного пойманного на преступный путь встают w новых граждан. Изначально в городе живёт n преступников. Сколько дней в среднем пройдёт до полного искоренения преступности в городе?

   а) Решите задачу при $n = 1$ и $w = 1$.

   б) Решите задачу при произвольных n и w.

4. На единичной окружности с центром в начале координат (не внутри!) в случайные точки приползли три муравья. Три точки независимы и равномерно распределены по окружности. Два муравья могут общаться друг с другом, если угол между ними меньше прямого.

   а) Какова вероятность того, что все три муравья смогут не перемещаясь общаться друг с другом (возможно через посредника)?

   б) Какова вероятность того, что все три муравья смогут не перемещаясь общаться друг с другом через посредника, если угол между муравьём один и муравьём два больше прямого?

   в) Найдите функцию плотности координат первого муравья.

5. Величины X_n независимы и равны $(+1)$ с вероятностью $1/2n$, (-1) — с вероятностью $1/2n$, 0 — с вероятностью $1 - 1/n$. Определим $Y_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} X_i / n$.

   Оцените вероятность $\mathbb{P}(|Y_n| \geq 1)$ с помощью неравенства Чебышёва.

6. Пара величин (X, Y) имеет совместную функцию плотности $f(x, y) = x + by$ на квадрате $[0;1] \times [0;1]$.

   а) Найдите значение параметра b.

   б) Найдите функцию плотности величины X и энтропию $\mathbb{H}(X)$.

   в) Найдите корреляцию $\mathrm{Corr}(X, Y)$.