

1. [10] Совместные расходы Императора и Императрицы (X, Y) равномерно распределены в области, заданной неравенствами $0 \leq Y \leq 1$, $0 \leq X \leq 2$, $X + Y \leq 2$.
 - (a) [3] Найдите функцию плотности расходов Императора X .
 - (b) [3 + 4] Найдите условные ожидания $\mathbb{E}(X | Y)$ и дисперсию $\text{Var}(X | Y)$.
2. [10] Сила удара меча у опытного самурая равномерно распределена на отрезке $[2; 5]$, а у неопытного — равномерно на отрезке $[1; 4]$. Собрались как-то вместе 500 самураев и ударили мечом по разу, независимо друг от друга.
 - (a) [4] Какова вероятность того, что суммарная сила всех ударов превысит 1500, если среди самураев 200 опытных?
 - (b) [6] Сколько было опытных самураев, если вероятность того, что суммарная сила ударов опытных превзойдёт суммарную силу неопытных равна 0.6?
3. [10] Известно, что $X \sim \mathcal{N}(1, 2)$, $(Y | X) \sim \mathcal{N}(2X, 4)$.
 - (a) [7] Найдите условное распределение $(X | Y)$.
 - (b) [3] Найдите ковариацию $\text{Cov}(X^2, Y)$.
4. [10] Телефонные звонки поступают сёгуну Минамото-но Ёритомо согласно пуассоновскому потоку с интенсивностью λ . Сёгун сегодня немного рассеян и берёт трубку на каждый звонок независимо от других с вероятностью p . Рассмотрим процесс (Y_t) количества телефонных звонков, отвеченных Ёритомо к моменту времени t .
 - (a) [7] Используя аксиомы пуассоновского потока, докажите, что (Y_t) — пуассоновский поток.
 - (b) [3] Какова вероятность того, что между первым поступившим звонком и первым принятым звонком пройдёт не менее получаса при $\lambda = 4$ звонка в час и $p = 0.5$?
5. [10] Десять самураев случайно независимо друг от друга встали равномерно вдоль аллеи единичной длины из криптомерий. Обозначим S_1, S_2, \dots, S_{10} их координаты в порядке возрастания и определим вектор $W = (S_3, S_5, S_9)$.
 - (a) [4] Найдите совместную функцию плотности вектора W .
 - (b) [2 + 4] Найдите вектор ожиданий $\mathbb{E}(W)$ и ковариационную матрицу $\text{Var}(W)$.
6. [10] Сёгун Минамото-но Ёритомо хочет отбирать на службу только опытных самураев. Сила удара меча у опытного самурая равномерно распределена на отрезке $[2; 5]$, а у неопытного — равномерно на отрезке $[1; 4]$.

Испытуемый самурай бьёт мечом и если сила удара оказалась больше порога a , то Ёритомо принимает самурая на работу.

Существует два типа ошибок. Ошибка первого рода: на работу взяли неопытного самурая. Ошибка второго рода: опытному самураю отказали в работе.

 - (a) [3] Найдите вероятности ошибок первого и второго рода при $a = 3.5$.
 - (b) [7] Постройте кривую зависимости ошибки второго рода от ошибки первого рода при различных порогах a .