Экзамен

теорвер

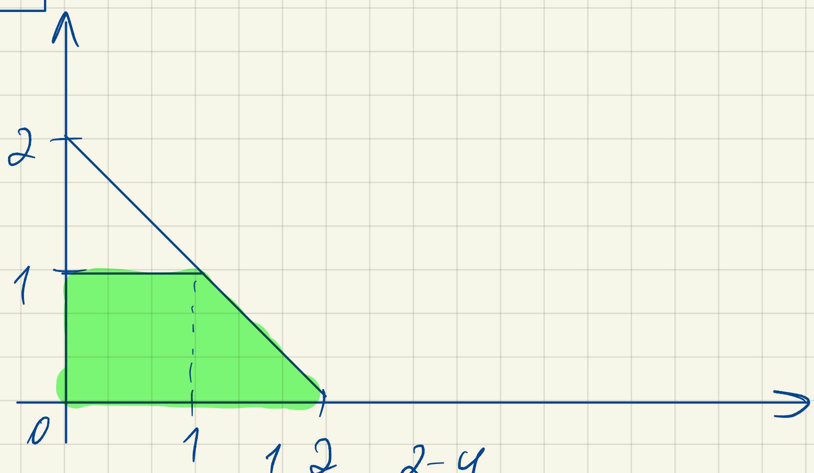
Б1 + Б2

№1.

1. [10] Совместные расходы Императора и Императрицы (X, Y) равномерно распределены в области, заданной неравенствами $0 \le Y \le 1$, $0 \le X \le 2$, $X + Y \le 2$.

   (a) [3] Найдите функцию плотности расходов Императора X.

   (b) [3 + 4] Найдите условные ожидание $\mathbb{E}(X \mid Y)$ и дисперсию $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X \mid Y)$.



a) $S = \int_0^1 dy \int_0^{2-y} dx = \frac{3}{2}.$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{S} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}.$$

$$f_X(x) = \int_0^{\min(1,2-x)} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^{\min(1,2-x)} \frac{2}{3}\,dy = \begin{cases} \frac{2}{3}, & x \in [0,1) \\ \frac{2}{3}(2-x), & x \in [1,2] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

б) $f_Y(y) = \int_0^{2-y} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^{2-y} \frac{2}{3}\,dx = \frac{2}{3}(2-y).$

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\cancel{\frac{2}{3}}}{\cancel{\frac{2}{3}}(2-y)} = \begin{cases} \frac{1}{2-y}, & x \in [0, 2-y] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X|Y) = \int_0^{2-y} x f_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_0^{2-y} \frac{x}{2-y}\,dx = \frac{2-y}{2}.$

- $Var(X|Y) = \mathbb{E}(X^2|Y) - [\mathbb{E}(X|Y)]^2 =$

$$= \underbrace{\frac{(2-y)^2}{3}}_{\int_0^{2-y} x^2 \frac{1}{2-y}\,dx} - \left(\frac{2-y}{2}\right)^2 = \frac{(2-y)^2}{12}$$

Критерии:

а) 1 балл — ответ без решения

+1 балл, если верно найдена $f_X(x)$ на $[0,1]$ или на $[1,2]$

+1 балл, если верно найдена $f_{X,Y}(x,y)$

б) −1 балл, если арифм. ошибка

−1 балл, если не досчитано

№2.

2. [10] Сила удара меча у опытного самурая равномерно распределена на отрезке [2; 5], а у неопытного — равномерно на отрезке [1; 4]. Собрались как-то вместе 500 самураев и ударили мечом по разу, независимо друг от друга.

   (a) [4] Какова вероятность того, что суммарная сила всех ударов превысит 1500, если среди самураев 200 опытных?

   (b) [6] Сколько было опытных самураев, если вероятность того, что суммарная сила ударов опытных превзойдёт суммарную силу неопытных равна 0.6?

□

a) $\mathbb{E}(X_{\text{опыт.}}) = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{2+5}{2} = \dfrac{7}{2}$

$Var(X_{\text{опыт.}}) = \dfrac{(b-a)^2}{12} = \dfrac{3}{4}$

$\mathbb{E}(X_{\text{неопыт.}}) = \dfrac{5}{2}$

$Var(X_{\text{неопыт.}}) = \dfrac{3}{4}$

S — общее кол-во самураев.

$\mathbb{E}(S) = 200 \cdot \dfrac{7}{2} + 300 \cdot \dfrac{5}{2} = 1450$

$Var(S) = 200 \cdot \dfrac{3}{4} + 300 \cdot \dfrac{3}{4} = 375$

Стандартизируем:

$$\mathbb{P}\left(\frac{S-\mathbb{E}(S)}{\sqrt{Var(S)}} > \frac{1500-1450}{\sqrt{375}}\right) = \left|Z \sim \mathcal{N}(0,1)\right| =$$

$$= \mathbb{P}(Z > 2{,}5819) = 1 - \Phi(2{,}5819).$$

д) k — опыт., $500-k$ — неопыт.

$Y := S_{\text{опыт.}} - S_{\text{неопыт.}}$

$$\mathbb{E}(Y) = k \cdot \frac{7}{2} - (500-k)\cdot\frac{5}{2} = 6k - 1250$$

$$\mathrm{Var}(Y) = k\cdot\frac{3}{4} + (500-k)\cdot\frac{3}{4} = 375$$

здесь плюс!!! Это одна из самых распространенных ошибок. Получали квадратное ур-ние на k и бросали. Но тут всё гораздо проще!

$$\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) - \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) = \mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$$\mathbb{P}(Y > 0) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{0 - \mathbb{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(Z > \frac{6k-1250}{\sqrt{375}}\right) = 0{,}6$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{6k-1250}{\sqrt{375}}\right) = 0{,}4$$

$$\Rightarrow \frac{6k-1250}{\sqrt{375}} = -0{,}25$$

$\Rightarrow$ $k \approx 209$ самурасв.

были варианты и 207, но тоже засчитывала целиком!

Критерии:

а) +1 балл — верно найдено $\mathbb{E}S$

+1 балл — верно найдено распр-е Опыт.

+1 балл — верно найдено распр-е Неопыт.

−1 балл — ошибка при написании рав-ва $\mathbb{P}(\ldots \geq \ldots) = 1 - \Phi(\ldots)$.

б) 2 балла — всё верно, но перепутано с условием а), т.е. добавлено 1500

+1 балл — верно найдено $\mathbb{E}S$

+1 балл — верно найдена $Var(S)$

+1 балл — использовано верное значение таблицы $\Phi(-0{,}25) = 0{,}4$.

−1 балл — арифм. ошибка.