Домашнее задание 9

Дедлайн: 2024-12-09, 23:59.

1. Величина X имеет стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0;1)$, а $Y \sim \mathcal{N}(10;16)$.

   а) Найдите функцию производящую моменты X.

   б) Найдите $\mathbb{E}(X^{2024})$.

   в) Найдите вероятность $\mathbb{P}(Y > 20)$ с помощью таблиц или компьютера.

   г) Найдите число a такое, что $\mathbb{P}(Y \in [10-a;10+a]) = 0.7$ с помощью таблиц или компьютера.

2. Величины U_1 и U_2 независимы и равномерно распределены на отрезке $[0;1]$, $Y_1 = R\cos\alpha$, $Y_2 = R\sin\alpha$, где $R = \sqrt{-2\ln U_1}$, $\alpha = 2\pi U_2$.

   а) Найдите совместную функцию плотности вектора $Y = (Y_1, Y_2)$.

   б) Как распределены величины Y_1 и Y_2? Независимы ли они?

   Запишем вектор Y как вектор-столбец и рассмотрим вектор $W = A \cdot Y$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

   в) Найдите ковариационную матрицу случайного вектора W.

   г) Найдите совместную функцию плотности вектора W и запишите её с помощью матрицы A.

3. Перед Алексеем Ивановичем три игровых автомата «однорукий бандит». Каждый «бандит» при игре против него приносит либо один фридрихсдор, либо ничего. Вероятности выигрыша равны p_1, p_2, p_3 и неизвестны Алексею.

   После окончания игры номер t, для выбора «бандита»-противника на $t+1$-ю игру, Алексей использует следующее правило.

   Он генерирует три независимых бета-распределенных случайных величины, $R_i \sim \text{Beta}(1+W_{it}, 1+L_{it})$. Здесь W_{it} и L_{it} — текущее количество выигрышей и проигрышей на i-м «бандите». Для следующей партии Алексей Иванович выбирает того «бандита», у которого величина R_i оказалась выше.

   а) С помощью 10^4 симуляций оцените ожидаемый выигрыш Алексея за 200 партий при $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.4$, $p_3 = 0.5$.

   Полина тоже любит играть с «однорукими бандитами». Отыграв партию номер t она выбирает для следующей партии того бандита, у которого больше величина

   $$\mathbb{E}(R_i \mid W_{it}, L_{it}) = \frac{1+W_{it}}{1+W_{it}+1+L_{it}}.$$

   Если оптимальных «бандитов» — несколько, то Полина равновероятно выбирает любого из них.

   б) С помощью 10^4 симуляций оцените ожидаемый выигрыш Полины за 200 партий при $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.4$, $p_3 = 0.5$.