

Формат

В экзамене будет 6 задач: четыре задачи по темам второго семестра и две — по темам первого. В демо версиях сделан акцент на темы второго семестра. Задачи имеют равный вес. Продолжительность работы 120 минут. Можно будет использовать в качестве разрешенной шпаргалки один лист А4 со всех шести его сторон.

Вариант «Лискевич»

1. Рассмотрим стандартный винеровский процесс (W_t) .

а) Найдите $\mathbb{E}(W_4 | W_5)$, $\mathbb{E}(W_5 | W_4)$, $\mathbb{V}\text{ar}(W_4 | W_5)$, $\mathbb{V}\text{ar}(W_5 | W_4)$.

б) При каком α процесс $\exp(6W_t + \alpha t)$ будет мартингалом?

2. Процессы (W_t) и (V_t) — стандартные винеровский процессы, независимые между собой. Если возможно, найдите все такие α и β , чтобы процессы (X_t) и (Y_t) были стандартными винеровскими

$$X_t = \alpha W_t + (1 - \alpha)V_t, \quad Y_t = \cos(42)W_t + \sin(\beta)V_t.$$

3. На первом шаге мы случайно выбираем X по равномерному закону на отрезке $[0; 2]$. На втором шаге мы случайно выбираем Y по Пуассону с интенсивностью $\lambda = X$.

а) Найдите $\mathbb{E}(Y)$ и $\mathbb{V}\text{ar}(Y)$.

б) Найдите функцию плотности случайной величины $\mathbb{V}\text{ar}(Y | X)$.

4. Илон Маск каждый день зарабатывает случайное количество DOGE-койнов Y_t , экспоненциально распределённое с интенсивностью $1/10^6$. Зарботки за разные дни независимы.

Обозначим за τ тот день, когда его заработок впервые превысит 10^6 DOGE, а суммарный заработок — за $S = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_\tau$.

а) Как распределена величина τ ? Найдите $\mathbb{E}(\tau)$.

б) Найдите α , чтобы процесс $M_t = \sum_{k=1}^t Y_k - \alpha t$ был мартингалом.

в) Найдите $\mathbb{E}(S)$.

5. Неправильная монетка выпадает орлом с вероятностью $p = 0.3$. При выпадении орла игрок зарабатывает $X_t = +1$, а при выпадении решки — $X_t = -1$. Обозначим суммарный выигрыш игрока как $S_t = X_1 + X_2 + \dots + X_t$ и τ — первый момент времени, когда S_t достигнет 100 или -50 .

а) Найдите α такое, что процесс $M_t = S_t - \alpha t$ — мартингал.

б) Найдите β такое, что процесс $Y_t = \exp(\beta S_t)$ — мартингал.

в) Найдите $\mathbb{P}(S_\tau = 100)$.

г) Найдите $\mathbb{E}(\tau)$.

Подсказка: достаточно применить теорему Дуба к M_t и Y_t .

6. В одной корзине лежат бильярдные шары с номерами от 3 до 9, во второй — с номерами от 1 до 7. Мы выбираем случайно равновероятно один шар из первой корзины и один шар — из второй. Из полученных двух шаров мы равновероятно один называем X , а второй — Y .

- а) Найдите $\mathbb{E}(Y \mid X)$.
 б) Найдите $\text{Var}(Y \mid X)$.

Вариант «Рафаэль»

1. Рассмотрим дискретное время t , фильтрацию (\mathcal{F}_t) и некую случайную величину τ , принимающую значения из множества $\{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$.

Какие из приведённых условий эквивалентны, какие являются следствием других?

- A: $\forall t \in \{0, 1, 2, \dots\} : \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$
 B: $\forall t \in \{0, 1, 2, \dots\} : \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$
 C: $\forall t \in \{0, 1, 2, \dots\} : \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$

2. Макака снова нажимает равновероятно кнопки от А до Я на печатающей машинке. Конец света наступает, когда макака впервые напечатает слово «АБРАКАДАБРА», обозначим этот момент величиной τ .

- а) Сконструируйте мартингал, позволяющий найти $\mathbb{E}(\tau^2)$.
 б) Найдите $\mathbb{E}(\tau^2)$.

Подсказка: если в момент t добавлять в казино $t^2 - (t-1)^2$ рублей, то к моменту t в казино окажется t^2 рублей, <https://www.jeremykun.com/2014/03/03/martingales-and-the-optional-stopping-theorem/>.

3. Величины X_1, X_2, \dots, X_n независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, a]$, рассмотрим величину $Y = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ и её ожидание $h(a) = \mathbb{E}(Y)$.

- а) Выпишите уравнение, связывающее $h(a+u)$ и $h(a)$, с точностью до $o(u)$.
 б) Выпишите дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $h(a)$.
 в) Укажите начальное условие, которому удовлетворяет функция $h(a)$.

4. Величины X_1, X_2, \dots, X_n независимы и имеют гамма-распределение $\text{Gamma}(\alpha, \lambda)$. Мы складываем случайное количество слагаемых N , где N независима от (X_i) и имеет пуассоновское распределение $\text{Pois}(\mu)$. Получаемую сумму обозначим $S = \sum_{k=1}^N X_k$.

- а) Найдите $\mathbb{E}(\exp(uS) \mid N)$.
 б) Найдите функцию, производящую моменты величины S .

Комментарий: функцию, производящую моменты гамма-распределения можно считать известной.

5. Величины X_1 и X_2 независимы и экспоненциально распределены с параметром λ .

- а) Найдите закон распределения $Y_1 = \exp(-X_1)$.

- б) Найдите функцию плотности величины $X_1 - X_2$.
- в) Найдите функцию плотности величины $|X_1|$.
6. Аня, Бэлла, Вова и Дима учатся в одной группе. Два студента в любой паре общаются друг с другом с вероятностью p независимо от других пар. Если студенты общаются, то любой слух, известный одному, будет известен другому.
- а) Какова вероятность того, что слух дойдёт до Димы, если Аня только что узнала новый слух?
- б) Какова вероятность того, что слух дойдёт до Димы, если Аня только что узнала новый слух и не общается с Бэллой?
- в) Какова вероятность того, что слух дойдёт до Димы, если Аня только что узнала новый слух и Бэлла не общается с Вовой?

Немножко ответов и подсказок:

1. A эквивалентно B , из A следует C ;
2. Первый игрок приносит в казино 1 рубль, второй — 3 рубля, третий — 5 рублей, ... Внутри казино игроки играют в справедливую игру. Каждый игрок в каждый момент времени ставит все деньги на очередную букву слова АБРАКАДАБРА. Мартингалом будет $M_t = S_t - t^2$, где S_t — сумма денег у игроков внутри казино,

$$S_\tau = 33(2\tau - 1) + 33^4(2(\tau - 3) - 1) + 33^{11}(2(\tau - 10) - 1).$$

По теореме Дуба $\mathbb{E}(\tau^2) = \mathbb{E}(S_\tau)$.

3. Величина u мала. Разобьём отрезок $[0, a + u]$ на две части: большую, $[0, a]$, и малую, $[a, a + u]$. Либо все n величин лягут на отрезок $[0, a]$, либо одна величина ляжет на малую часть $[a, a + u]$. Вероятностью того, что две и более величин лягут на малую часть отрезка можно пренебречь:

$$h(a + u) = \left(\frac{a}{a + u}\right)^n h(a) + C_n^1 \left(\frac{a}{a + u}\right)^{n-1} \left(\frac{u}{a + u}\right) \cdot a + o(u).$$