1. [10] Случайная величина X имеет функцию плотности $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1; 1]$ и 0 за его пределами.

   (a) [3] Найдите условную вероятность $\mathbb{P}(X > 0.5 \mid X > 0)$.

   (b) [4] Найдите ковариацию $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, X^3)$.

   (c) [3] Найдите функцию плотности величины $Y = \ln|X|$.

2. [10] Илон и Маск независимо друг от друга подбрасывают правильную монетку. Илон подбрасывает 10 раз, а Маск — 11 раз. У Илона выпадает случайное количество X орлов, у Маска — Y орлов.

   (a) [2] Найдите вероятность $\mathbb{P}(X + Y = 7)$.

   (b) [4] Найдите вероятность $\mathbb{P}(Y > X)$.

   (c) [4] Найдите условное ожидание $\mathbb{E}(X \mid X + Y = 12)$.

   Подсказка: в быстром ответе на всю задачу остаётся один биномиальный коэффициент :)

   Фамилия, имя и группа: ....

3. [10] Пара студентов играет один матч в камень-ножницы-бумага. Матч состоит из нескольких раундов. Все игроки всегда выбирают равновероятно камень, ножницы и бумагу. Раунды играют до тех пор, пока не определится победитель.

   Обозначим T — число ничьих раундов, а S — общее число ножниц в матче у обоих игроков.

   (a) [3] Найдите энтропию $\mathbb{H}(T)$.

   (b) [7] Найдите энтропию $\mathbb{H}(S)$.

4. [10] Студенты фкн в составе 300 человек играют в камень-ножницы-бумага индивидуально до определения Самого Главного Везунчика. В каждой паре игроки играют один матч, состоящий из раундов камень-ножница-бумага до тех пор, пока не определится победитель. Проигравший раунд (и матч) игрок выбывает и далее в матчах не участвует. Все игроки всегда выбирают равновероятно камень, ножницы и бумагу.

   Обозначим N — общее число раундов (не матчей!).

   (a) [2] Найдите вероятность $\mathbb{P}(N = 300)$.

   (b) [4] Найдите ожидание $\mathbb{E}(N)$.

   (c) [4] Найдите дисперсию $\mathbb{V}\mathrm{ar}(N)$.

Фамилия, имя и группа: ....

5. [10] На сцене четыре закрытых двери. За одной из дверей — дорогой автомобиль, за остальными — козы. Ведущий шоу знает, что находится за каждой дверью, игрок шоу — не знает. Игрок хочет выиграть автомобиль. Шоу идёт так:

Шаг 1. Игрок встаёт возле одной из закрытых дверей.

Шаг 2. Ведущий открывает одну из дверей с козой, возле которой нет игрока. Остаётся закрытыми три двери, у одной из которых стоит игрок. Затем ведущий предлагает игроку возможность перейти к любой другой двери.

Шаг 3. Игрок перемещается или остаётся на месте.

Шаг 4. Ведущий снова открывает одну из дверей с козой, возле которой нет игрока. Остаётся закрытыми две двери, у одной из которых стоит игрок. Снова ведущий предлагает игроку возможность перейти к другой закрытой двери.

Шаг 5. Игрок перемещается или остаётся на месте.

Шаг 6. Игрок получает то, что находится за дверью, у которой он стоит.

   (a) [7] Как выглядит оптимальная стратегия игрока?
   (b) [3] Чему равна вероятность получения автомобиля при оптимальной стратегии?

6. [10] Пара величин (X, Y) имеет функцию плотности $f(x, y) = 6xy^2$ на квадрате $[0; 1] \times [0; 1]$ и 0 вне квадрата.

   (a) [3] Найдите ожидание $\mathbb{E}(X/Y)$ и вероятностью $\mathbb{P}(X > Y)$.
   (b) [3] Найдите функцию распределения $F_X(t)$.
   (c) [1] Зависимы ли величины X и Y?
   (d) [3] Найдите ожидание $\mathbb{E}(W)$, где $W = F(X, Y)$ и F — совместная функция распределения.

Фамилия, имя и группа: ....

1.

2.

3. Для геометрического распределения с вероятностью p энтропия равна $\mathbb{H}(X) = -\ln p - \ln(1-p)(1-p)/p$.

   Для $\mathbb{P}(T = k) = p(1-p)^k$ для $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ с $p = 2/3$.

   Отсюда $H(T) = 1.5 \ln 3 - \ln 2$.

4. (a) Нужна одна ничья и 288 побед за один раунд, $\mathbb{P}(N = 300) = 299 \cdot (2/9)(2/3)^{288}$.

   За неверный ответ $\mathbb{P}(N = 300) = (2/3)^{300}$ поставил 1 балл.