

1. [10] Совместные расходы Императора и Императрицы  $(X, Y)$  равномерно распределены в полукруге  $y = \sqrt{10 - x^2 + 2x}$ .
  - (a) [4] Найдите функцию плотности расходов Императрицы  $Y$ .
  - (b) [3 + 3] Найдите условные ожидание  $\mathbb{E}(X | Y)$  и дисперсию  $\mathbb{Var}(X | Y)$ .
2. [10] Сила удара меча у опытного самурая равномерно распределена на отрезке  $[2; 5]$ , а у неопытного — равномерно на отрезке  $[1; 4]$ . Сёгун Минамото-но Ёритомо подбрасывает монетку 500 раз и набирает столько опытных самураев, сколько выпало решек. Затем сёгун подбрасывает монетку ещё 500 раз и набирает столько неопытных самураев, сколько выпало решек.
  - (a) [6] Как примерно распределена суммарная сила всех самураев  $S$ ? Укажите математическое ожидание и дисперсию.
  - (b) [4] Какова вероятность того, что суммарная сила всех ударов превысит 1550?
3. [10] Известно условные распределения  $(X | Y) \sim \mathcal{N}(-Y/9 + 11/9, 35/9)$ ,  $(Y | X) \sim \mathcal{N}(-X/4 + 9/4, 35/4)$ .
  - (a) [7] Найдите совместный закон распределения вектора  $(2X + Y, Y - X)$ .
  - (b) [3] Найдите ковариацию  $\mathbb{Cov}((2X + Y)^2, Y - X)$ .
4. [10] Телефонные звонки поступают сёгуну Минамото-но Ёритомо согласно пуассоновскому потоку с интенсивностью  $\lambda$ . Обозначим  $X_t$  — число поступивших звонков от начала наблюдений до момента времени  $t$  в часах. Известно, что  $\mathbb{Var}(X_7 - X_3) = 10$ .
  - (a) [2] Найдите интенсивность  $\lambda$ .
  - (b) [5] Найдите ожидание  $\mathbb{E}(X_6 - X_4 | X_7 - X_3 = 2)$ .
  - (c) [3] Найдите ковариацию  $\mathbb{Cov}(X_7 - X_3, X_6 - X_4)$ .
5. [10] Самурай А хватается за верёвку в форме окружности в произвольной точке. Самурай Б берёт катану и с завязанными глазами разрубает верёвку в четырёх случайных независимых равномерно распределённых местах. Самурай А забирает себе тот кусок, за который держится. Самурай Б забирает все оставшиеся куски верёвки. Вся верёвка имеет единичную длину.
  - (a) [4] Чему равна ожидаемая длина куска верёвки, доставшегося самураю А?
  - (b) [6] Найдите вероятность того, что у самурая А верёвка окажется длиннее, чем сумма верёвок у самурая Б.
6. [10] Сёгун Минамото-но Ёритомо хочет отбирать на службу только опытных самураев. Сила удара меча у опытного самурая равномерно распределена на отрезке  $[2; 5]$ , а у неопытного — равномерно на отрезке  $[1; 4]$ .  
 Испытуемый самурай бьёт мечом до тех пор, пока не ударит с силой больше 3.5. Если номер успешной попытки меньше либо равен  $k$ , то Ёритомо принимает самурая на работу.  
 Существует два типа ошибок. Ошибка первого рода: на работу взяли неопытного самурая. Ошибка второго рода: опытному самураю отказали в работе.
  - (a) [3] Найдите вероятности ошибок первого и второго рода при  $k = 3$ .
  - (b) [7] Постройте кривую зависимости ошибки второго рода от ошибки первого рода при различных порогах  $k$ .