Формат

В работе будет 6 задач. Задачи имеют равный вес. Продолжительность работы 120 минут. Можно будет использовать в качестве разрешенной шпаргалки один лист А4 со всех шести его сторон.

Вариант «Птолемей»

1. Случайные величины X и Y заданы на одном множестве исходов Ω и величину $W = \max\{X, Y\}$.

   а) Докажите, что случайная величина W измерима относительно сигма-алгебры $\sigma(X, Y)$.

   б) Приведите два примера нетривиальных событий (отличных от $\emptyset$ и Ω), которые лежат в $\sigma(X, Y)$, но при этом не лежат в $\sigma(W)$.

   в) Верно ли, что $\sigma(W) \cup \sigma(X, Y)$ — сигма-алгебра?

2. На числовой прямой $\mathbb{R}$ заданы два набора подмножеств, $\mathcal{A} = \{$все интервалы вида $(a; b],$ где $a, b \in \mathbb{R}\}$ и $\mathcal{I} = \{$все интервалы вида $[a; b),$ где $a, b \in \mathbb{Q}\}$.

   Совпадают ли сигма-алгебры $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$?

   Если совпадают, то докажите их совпадение. Если не совпадают, то приведите два примера множеств, которыми эти сигма-алгебры отличаются.

3. Рассмотрим последовательность характеристических функций

   $$\phi_n(x) = \exp(3it/n - 4(1 + 1/n^2)t^2)(0.3 \exp(it) + 0.7 \exp(-it)).$$

   Обозначим с помощью L — случайную величину, соответствующую пределу данной последовательности.

   а) Найдите предел последовательности ϕ_n при $n \to \infty$.

   б) Представьте L в виде суммы двух величин с классическими законами распределения.

   в) Найдите $\mathbb{E}(L)$ и $\mathbb{V}\mathrm{ar}(L)$.

   г) Что можно утверждать про независимость случайных величин последовательности (X_n) с характеристическими функциями (ϕ_n)?

4. Клавдий подкидывает правильную монетку один раз. Если монетка выпадает орлом, то он складывает 50 независимых экспоненциально распределенных величин с интенсивностью 1 каждая. Если монетка выпадает решкой, то он складывает 100 независимых экспоненциально распределенных величин с интенсивностью 2 каждая. В результате Клавдий получает случайную величину K.

   а) Найдите характеристическую функцию случайной величины K.

   б) Разложите полученную характеристическую функцию $\phi(t)$ в ряд Тейлора до $o(t^2)$.

   в) Какой вероятностный смысл несёт величина $\phi''(2025)$?

5. Величины (u_n) независимы и одинаково распределены с ожиданием 10 и дисперсией 20. Моменты $\mathbb{E}(u_n^3)$ и $\mathbb{E}(u_n^4)$ конечны. Определим $X_n = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)^2/n^2$.

   а) Найдите $\lim \mathbb{E}(X_n)$.

б) Найдите $\lim \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n)$.

в) Найдите предел по вероятности $\operatorname{plim} X_n$.

6. Величины X_n распределены биномиально $\mathrm{Bin}(n, 1/2)$.

а) Найдите предел по распределению последовательности $(X_n - \mathbb{E}(X_n))/\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n)}$.

б) Найдите предел по вероятности последовательности $n\,\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n)/(nX_n - X_n^2)$.

в) Найдите предел по распределению последовательности $\sqrt{n}(X_n - \mathbb{E}(X_n))/\sqrt{nX_n - X_n^2}$.

Уточнение: можно опираться на центральную предельную теорему и леммы Слуцкого.

Вариант «Коперник»

1. Величины X_n имеют функцию плотности $f(x) = nx^{n-1}$ на отрезке $[0; 1]$.

а) Найдите $\lim \mathbb{E}(S_n)$.

б) Найдите $\lim \mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n)$.

в) К чему и в каких смыслах (по вероятности, почти наверное, по распределению, в L^1, в L^2) сходится последовательность X_n?

2. Николаю нужно сложить 100 независимых величин, равномерных на отрезке $[0; 1]$. Однако каждую величину Николай забывает добавить в сумму с вероятностью 0.1, независимо значения величин и от того, добавил ли он остальные величины. В результате Николай получает случайную величину N.

а) Найдите характеристическую функцию случайной величины N.

б) Разложите полученную характеристическую функцию $\phi(t)$ в ряд Тейлора до $o(t^2)$.

в) Найдите математическое ожидание и дисперсию N.

3. Величины (u_n) независимы и одинаково распределены с ожиданием 10 и дисперсией 20. Определим $y_n = u_n + u_{n-1}$ и $S_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$.

а) Найдите $\mathbb{E}(S_n)$ и $\lim \mathbb{E}(S_n)$.

б) Найдите $\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n)$ и $\lim \mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n)$.

в) Найдите предел по распределению последовательности $(S_n - \mathbb{E}(S_n))/\sqrt{n}$.

4. Последовательность (X_n) сходится по вероятности к величине X, а про случайную величину Y ничего не известно.

а) Вспомнив аддитивность вероятности, с обоснованием найдите предел $\lim \mathbb{P}(|Y| \leq c_n)$, если $c_n \to \infty$.

б) С обоснованием найдите предел по вероятности последовательности $Y \cdot X_n$.

Уточнение: в пункте (б) можно опираться только на определение сходимости по вероятности.

5. Царь Кощей может в пределах своего благостояния каждый день утром закупать или продавать мем-койн YAGA. Курс YAGA за каждые сутки независимо от других с вероятностью 0.8 растёт в 2 раза, а с вероятностью 0.2 падает в 10 раз.

   Изначально у Кощея $S_0 = 100$ рублей, инфляция в рублях равна нулю[1].

   Определим долгосрочную дневную процентную ставку r условием $\operatorname{plim} S_n/(1+r)^n = S_0$.

   а) Чему равна долгосрочная дневная процентная ставка, если Кощей держит все свои деньги в YAGA?

   б) Как выглядит стратегия Кощея, максимизирующая долгосрочную дневную процентную ставку?

   Подсказка: https://en.wikipedia.org/wiki/Kelly_criterion

6. Царевна Несмеяна любит читать несмешные книжки. Всего у неё 8 книг, k-я по счёту книга оказывается несмешной с вероятностью $1/k$. Цель Несмеяны — максимизировать вероятность прочесть все несмешные книги за наименьшее число попыток.

   Как выглядит оптимальная стратегия Несмеяны?

   Подсказка: https://en.wikipedia.org/wiki/Odds_algorithm

[1]это сказочная задача!