

## Домашнее задание 13

Дедлайн: 2025-03-16, 23:59.

Оцениваемые задачи:

1. Неправильный кубик выпадает с вероятностью 0.5 шестеркой вверх. Остальные пять граней выпадают равновероятно. Случайная величина  $X$  — остаток от деления номера грани на два,  $Y$  — остаток от деления номера грани на три.

- а) Найдите  $\mathbb{E}(Y | X)$ ,  $\mathbb{V}\text{ar}(X | Y)$  и  $\mathbb{P}(X = 1 | Y)$ .  
б) Найдите  $\text{Cov}(\mathbb{E}(Y | X), \mathbb{E}(X | Y))$ ,  $\text{Cov}(\mathbb{E}(Y | X), X)$ .

2. Цена литра молока,  $X$ , распределена равномерно на отрезке  $[1; 2]$ . Количество молока, которое дает корова Мурка,  $Y$ , распределено экспоненциально с  $\lambda = 1$ . Надои не зависят от цены. Величина  $S$  — выручка кота Матроскина от продажи всего объема молока.

- а) Найдите  $\mathbb{E}(S | X)$ ,  $\mathbb{V}\text{ar}(S | X)$ .  
б) Найдите функцию плотности величины  $\mathbb{V}\text{ar}(S | X)$

Бесценные задачи в удовольствие:

3. Рассмотрим независимые равномерные случайные величины  $X_1 \sim \text{Unif}[0; 1]$ ,  $X_2 \sim \text{Unif}[-1; 2]$  и  $Y_i = X_i^2$ .

Найдите  $\mathbb{E}(X_1 | Y_1)$  и  $\mathbb{E}(X_2 | Y_2)$ .

4. Величина  $X$  равномерна на отрезке  $[0; 1]$ . Определим событие  $A = \{X > 0.1\}$ , величину  $Y = X^2$  и сигма-алгебру  $\mathcal{F} = \sigma(A)$ .

Найдите  $\mathbb{E}(Y | \mathcal{F})$ ,  $\mathbb{E}(I_A | \sigma(Y))$  и  $\mathbb{E}(I_A + Y | Y - I_A)$ .

5. Кот Матроскин ловит карасей до тех пор, пока не поймает карася длиной более полуметра. Длины карасей независимы и равномерны от 0 до 1 метра. Обозначим буквой  $N$  количество пойманных карасей, а буквой  $S$  — их суммарную длину.

Найдите  $\mathbb{E}(S | N)$ ,  $\mathbb{V}\text{ar}(S | N)$ ,  $\mathbb{E}(S)$ ,  $\mathbb{V}\text{ar}(S)$ .

6. Величины  $X_1, \dots, X_{100}$  независимы и равномерны на  $[0; 1]$ . Обозначим  $L = \max\{X_1, X_2, \dots, X_{80}\}$ ,  $R = \max\{X_{81}, X_{82}, \dots, X_{100}\}$  и  $M = \max\{X_1, \dots, X_{100}\}$ .

- а) Найдите  $\mathbb{P}(L > R | L)$ ,  $\mathbb{P}(L > R | R)$  и  $\mathbb{P}(L > R | M)$ .  
б) Найдите  $\mathbb{E}(X_1 | L)$  и  $\mathbb{E}(X_1 | \min\{X_1, \dots, X_{100}\})$ .