

## Формат

В работе будет 6 задач. Задачи имеют равный вес. Продолжительность работы 120 минут. Можно будет использовать в качестве разрешенной шпаргалки один лист А4 со всех шести его сторон.

## Вариант «Птолемей»

1. Случайные величины  $X$  и  $Y$  заданы на одном множестве исходов  $\Omega$  и величину  $W = \max\{X, Y\}$ .
  - а) Докажите, что случайная величина  $W$  измерима относительно сигма-алгебры  $\sigma(X, Y)$ .
  - б) Приведите два примера нетривиальных событий (отличных от  $\emptyset$  и  $\Omega$ ), которые лежат в  $\sigma(X, Y)$ , но при этом не лежат в  $\sigma(W)$ .
  - в) Верно ли, что  $\sigma(W) \cup \sigma(X, Y)$  — сигма-алгебра?

2. На числовой прямой  $\mathbb{R}$  заданы два набора подмножеств,  $\mathcal{A} = \{\text{все интервалы вида } (a; b], \text{ где } a, b \in \mathbb{R}\}$  и  $\mathcal{I} = \{\text{все интервалы вида } [a; b), \text{ где } a, b \in \mathbb{Q}\}$ .

Совпадают ли сигма-алгебры  $\sigma(\mathcal{A})$  и  $\sigma(\mathcal{I})$ ?

Если совпадают, то докажите их совпадение. Если не совпадают, то приведите два примера множеств, которыми эти сигма-алгебры отличаются.

3. Рассмотрим последовательность характеристических функций

$$\phi_n(x) = \exp(3it/n - 4(1 + 1/n^2)t^2)(0.3 \exp(it) + 0.7 \exp(-it)).$$

Обозначим с помощью  $L$  — случайную величину, соответствующую пределу данной последовательности.

- а) Найдите предел последовательности  $\phi_n$  при  $n \rightarrow \infty$ .
  - б) Представьте  $L$  в виде суммы двух величин с классическими законами распределения.
  - в) Найдите  $\mathbb{E}(L)$  и  $\mathbb{V}\text{ar}(L)$ .
  - г) Что можно утверждать про независимость случайных величин последовательности  $(X_n)$  с характеристическими функциями  $(\phi_n)$ ?
4. Клавдий подкидывает правильную монетку один раз. Если монетка выпадает орлом, то он складывает 50 независимых экспоненциально распределенных величин с интенсивностью 1 каждая. Если монетка выпадает решкой, то он складывает 100 независимых экспоненциально распределенных величин с интенсивностью 2 каждая. В результате Клавдий получает случайную величину  $K$ .
    - а) Найдите характеристическую функцию случайной величины  $K$ .
    - б) Разложите полученную характеристическую функцию  $\phi(t)$  в ряд Тейлора до  $o(t^2)$ .
    - в) Какой вероятностный смысл несёт величина  $\phi''(2025)$ ?
  5. Величины  $(u_n)$  независимы и одинаково распределены с ожиданием 10 и дисперсией 20. Моменты  $\mathbb{E}(u_n^3)$  и  $\mathbb{E}(u_n^4)$  конечны. Определим  $X_n = (u_1 + u_2 + \dots + u_n)^2/n^2$ .

- а) Найдите  $\lim \mathbb{E}(X_n)$ .

б) Найдите  $\lim \mathbb{V}\text{ar}(X_n)$ .

в) Найдите предел по вероятности  $\text{plim } X_n$ .

6. Величины  $X_n$  распределены биномиально  $\text{Bin}(n, 1/2)$ .

а) Найдите предел по распределению последовательности  $(X_n - \mathbb{E}(X_n))/\sqrt{\mathbb{V}\text{ar}(X_n)}$ .

б) Найдите предел по вероятности последовательности  $n \mathbb{V}\text{ar}(X_n)/(nX_n - X_n^2)$ .

в) Найдите предел по распределению последовательности  $\sqrt{n}(X_n - \mathbb{E}(X_n))/\sqrt{nX_n - X_n^2}$ .

Уточнение: можно опираться на центральную предельную теорему и леммы Слущкого.

## Вариант «Коперник»

1. Величины  $X_n$  имеют функцию плотности  $f(x) = nx^{n-1}$  на отрезке  $[0; 1]$ .

а) Найдите  $\lim \mathbb{E}(X_n)$ .

б) Найдите  $\lim \mathbb{V}\text{ar}(X_n)$ .

в) К чему и в каких смыслах (по вероятности, по распределению, в  $L^1$ , в  $L^2$ ) сходится последовательность  $X_n$ ?

2. Николаю нужно сложить 100 независимых величин, равномерных на отрезке  $[0; 1]$ . Однако каждую величину Николай забывает добавить в сумму с вероятностью 0.1, независимо значения величин и от того, добавил ли он остальные величины. В результате Николай получает случайную величину  $N$ .

а) Найдите характеристическую функцию случайной величины  $N$ .

б) Разложите полученную характеристическую функцию  $\phi(t)$  в ряд Тейлора до  $o(t^2)$ .

в) Найдите математическое ожидание и дисперсию  $N$ .

3. Величины  $(u_n)$  независимы и одинаково распределены с ожиданием 10 и дисперсией 20. Определим  $y_n = u_n + u_{n-1}$  и  $S_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$ .

а) Найдите  $\mathbb{E}(S_n)$  и  $\lim \mathbb{E}(S_n)$ .

б) Найдите  $\mathbb{V}\text{ar}(S_n)$  и  $\lim \mathbb{V}\text{ar}(S_n)$ .

в) Найдите предел по распределению последовательности  $(S_n - \mathbb{E}(S_n))/\sqrt{n}$ .

4. Последовательность  $(X_n)$  сходится по вероятности к величине  $X$ , а про случайную величину  $Y$  ничего не известно.

а) Вспомнив аддитивность вероятности, с обоснованием найдите предел  $\lim \mathbb{P}(|Y| \leq c_n)$ , если  $c_n \rightarrow \infty$ .

б) С обоснованием найдите предел по вероятности последовательности  $Y \cdot X_n$ .

Уточнение: в пункте (б) можно опираться только на определение сходимости по вероятности.

5. Царь Кощей может в пределах своего благостояния каждый день утром закупать или продавать мем-койн YAGA. Курс YAGA за каждые сутки независимо от других с вероятностью 0.8 растёт в 2 раза, а с вероятностью 0.2 падает в 10 раз.

Изначально у Кощей  $S_0 = 100$  рублей, инфляция в рублях равна нулю<sup>1</sup>.

Определим долгосрочную дневную процентную ставку  $r$  условием  $\text{plim}(S_n/S_0)^{1/n} = 1 + r$ .

- а) Чему равна долгосрочная дневная процентная ставка, если Кощей держит все свои деньги в YAGA?
- б) Как выглядит стратегия Кощей, максимизирующая долгосрочную дневную процентную ставку?

Подсказка: [https://en.wikipedia.org/wiki/Kelly\\_criterion](https://en.wikipedia.org/wiki/Kelly_criterion)

6. Царевна Несмеяна любит читать несмешные книжки. Всего у неё 8 книг,  $k$ -я по счёту книга оказывается несмешной с вероятностью  $1/k$ . Цель Несмеяны — максимизировать вероятность прочесть все несмешные книги за наименьшее число попыток.

Как выглядит оптимальная стратегия Несмеяны?

Подсказка: [https://en.wikipedia.org/wiki/Odds\\_algorithm](https://en.wikipedia.org/wiki/Odds_algorithm)

---

<sup>1</sup>это сказочная задача!

---