1. [10] Величины (X_n) независимы и равномерно распределены на отрезке $[1; 2]$.

   а) [5] Найдите предел по вероятности

   $$\operatorname{plim} \frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}{n}.$$

   б) [5] Найдите предел по вероятности

   $$\operatorname{plim} \frac{(X_1 - X_2)^2 + (X_2 - X_3)^2 + \cdots + (X_{n-1} - X_n)^2}{3n + 2025}.$$

2. [10] Рассмотрим две последовательности нормально распределённых случайных величин,

   $$X_n \sim \mathcal{N}((2n+1)/n; (4n^2+1)/n^2) \quad \text{и} \quad Y_n \sim \mathcal{N}((2n+1)/n; (4n+1)/n^2).$$

   а) [2 + 2 + 2] К чему сходятся по распределению последовательности (X_n), (Y_n) и $(X_n Y_n)$?

   б) [2 + 2] Если возможно, приведите пример, когда последовательность (X_n) сходится по вероятности и когда она не сходится по вероятности.

3. [10] Величины X_1, X_2, X_3 независимы и равномерно распределены на отрезке $[1; 2]$. Найдите характеристическую функцию случайной величины Y,

$$Y = \begin{cases} X_1, \text{ если } X_1 > 1.5 \text{ и } X_2 > 1.5, \\ X_1 + X_2 + X_3, \text{ иначе.} \end{cases}$$

4. [10] Характеристическая функция величины X равна $\phi(t) = \exp(2\exp(-2it))/\exp(2)$.

   а) [6] Какое распределение имеет величина X?

   б) [4] Найдите $\mathbb{E}(X)$ и $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$.

5. [10] Немного сигма-алгебр для настоящего самурая!

   а) [2] Множество всех исходов равно $\Omega = \{a, b, c\}$. Случайная величина Y определена как $Y(a) = -1$, $Y(b) = 1$, $Y(c) = 2$. Найдите сигма-алгебру $\sigma(\cos Y)$.

   б) [4] Верно ли, что $\sigma(X) \subseteq \sigma(X^2)$ для произвольной случайной величины X? Докажите или приведите контр-пример.

   в) [4] Верно ли, что $\sigma(X^2) \subseteq \sigma(X)$ для произвольной случайной величины X? Докажите или приведите контр-пример.

   Примечание: здесь $\sigma(R)$ — минимальная сигма-алгебра, порождённая величиной R, а не стандартное отклонение :)

6. [10] Каждый день в заезде участвую только две лошади: Юлиус и Фру-фру. Ставки на Фру-фру принимаются с коэффициентом 2, то есть при победе Фру-фру ставка будет возвращена в двойном размере. Ставки на Юлиуса принимаются с коэффициентом 4. Вероятность победы Фру-фру равна $2/3$.

   Игрок начинает со стартовой суммой $S_0 = 100$ и каждый день ставит все свои деньги в некоторой пропорции на Фру-фру и Юлиуса.

   Определим долгосрочную процентную ставку r условием $\operatorname{plim}(S_n/S_0)^{1/n} = 1 + r$, где S_n — благосостояние игрока после n дней.

   а) [2] Какая стратегия максимизирует $\mathbb{E}(S_n)$?

   б) [5] Какая стратегия максимизирует долгосрочную процетную ставку?

   в) [3] Какая стратегия гарантирует безрисковый доход с $\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) = 0$?