

Формат

В работе будет 6 задач. Задачи имеют равный вес. Продолжительность работы 120 минут. На декабрьской письменной работе можно будет использовать в качестве разрешенной шпаргалки один лист A4 со всех шести его сторон. В задачах про нормальное распределение нужно уметь как воспользоваться таблицей, так и записать ответ с помощью функции распределения $F()$ для нормальной стандартной случайной величины.

Демо «Колотун»

1. Случайные величины X_1 и X_2 независимы и имеют нормальное стандартное распределение $\mathcal{N}(0; 1)$.

- а) Найдите вероятность $\mathbb{P}(X_1^2 + X_2^2 \leq t)$.
 б) Какое распределение имеет случайная величина $S = X_1^2 + X_2^2$?

2. Вектор Y имеет совместное нормальное распределение.

$$Y \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ & 20 & -1 \\ & & 30 \end{pmatrix} \right).$$

- а) Найдите $\mathbb{E}(Y_1 - 5Y_2)$, $\text{Var}(Y_1 - 5Y_2)$, $\mathbb{P}(Y_1 - 5Y_2 > 0)$.
 б) Найдите $\text{Cov}(Y_1Y_2, Y_2Y_3)$.
 в) Найдите $\mathbb{P}(Y_1 > 3 \mid Y_2 = 5)$.

3. Вектор (X, Y) имеет совместную функцию плотности

$$f(x, y) = \begin{cases} x + 5y^9, & \text{если } x, y \in [0; 1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- а) Найдите совместную функцию плотности вектора $(R = X - Y^3, S = X + Y^3)$.
 б) Найдите условную функцию плотности $f_{Y|X}(y \mid x)$.
 в) Найдите условные $\mathbb{E}(Y \mid X = x)$ и $\text{Var}(Y \mid X = x)$.
 4. Кripto-портфель инвестора Кота Базилио состоит из двух альт-койнов с вектором доходностей $R = (R_1, R_2)$ (в долях от единицы).

$$\mathbb{E}(R) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \text{Var}(R) = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Базилио может включить в свой портфель альт-койны с вектором весов $w = (w_1, 1 - w_1)$, где $w_1 \in [0; 1]$. Доходность портфеля считаем как скалярное произведение $R_P = \langle w, R \rangle$.

- а) Какой портфель минимизирует дисперсию $\text{Var}(R_P) \rightarrow \min_w$?
 б) Какая будет доходность у портфеля с минимальной дисперсией?

5. Спамеры звонят мне согласно пуассоновскому потоку с интенсивностью $\lambda = 5$ звонков в неделю.

- а) Какова вероятность того, что за один день поступит не более одного звонка?
 - б) Найдите функцию плотности времени, которое пройдёт от начала наблюдения до третьего звонка.
 - в) Найдите математическое ожидание и дисперсию числа звонков за три дня.
6. Случайные величины X_1, \dots, X_{10} независимы и имеют функцию плотности $2x$ на отрезке $[0; 1]$. Упорядочим их по возрастанию и рассмотрим порядковые статистики $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$.
- а) Найдите функцию плотности минимальной порядковой статистики $X_{(1)}$.
 - б) Найдите функцию плотности величины $X_{(3)}$.
 - в) Найдите совместную функцию плотности пары $(X_{(3)}, X_{(7)})$.

Вариант «Пурга»

1. Машенькина оценка за контрольную X распределена равномерно на отрезке $[0, 1]$. Вовочка списывает у Маши, но с ошибками, поэтому его оценка Y за контрольную условно распределена равномерно на отрезке $[0, X]$.
- а) Выпишите условную функцию плотности $f_{Y|X}(y | x)$.
 - б) Восстановите совместную функцию плотности $f(x, y)$.
 - в) Найдите ковариацию $\text{Cov}(X, Y)$.
2. Монетка выпадает орлом с вероятностью $1/2$. Эксперимент состоит из двух этапов. На первом этапе монетку подкидывают 100 раз и записывают число орлов, R . На втором этапе монетку подбрасывают до тех пор пока не выпадет столько орлов, сколько выпало на первом этапе. Обозначим число подбрасываний монетки на втором этапе буквой S .
- Найдите ожидание $\mathbb{E}(S | R = r)$ и дисперсию $\text{Var}(S | R = r)$.
3. В пятницу 13 сентября 2019 года в Атланте перевернулся грузовик с 216 тысячами игральных кубиков. К счастью, никто не пострадал.
- Предположим, что все кубики выпали на дорогу.
- а) Какова вероятность того, что в сумме выпало больше 740000?
 - б) Найдите такое число a , чтобы вероятность того, что выпала сумма меньше a , равнялась 0.777.
- Предположим, что часть кубиков осталась в грузовике.
- в) Какая часть кубиков выпала на дорогу, если вероятность того, что сумма на кубиках, выпавших на дорогу, больше суммы на кубиках, оставшихся в грузовике, равна $2/3$?
4. Величины X_1, X_2, \dots, X_n независимы и экспоненциально распределены с интенсивностью $\lambda = 1$, а $S = X_1 + \dots + X_{1000}$ и $R = X_{501} + \dots + X_{1500}$.
- а) Примерно оцените вероятность $\mathbb{P}(S > 1050)$.
 - б) Примерно найдите условное ожидание $\mathbb{E}(S | S > 1000)$.

- в) Какое примерно распределение имеет вектор (S, R) ?
5. Есть пара независимых случайных величин, $R \sim \text{Beta}(10, 20)$ и $S \sim \text{Gamma}(30, \lambda = 5)$.
- а) Найдите с доказательством моду R и моду S .
- б) Найдите (можно без доказательства) $\mathbb{E}(R)$ и $\mathbb{E}(S)$.
- в) Найдите закон распределения $W = S \cdot R$ и закон распределения $Q = S \cdot (1 - R)$.
6. Величины X_1, X_2, \dots, X_n независимы и равномерно распределены на отрезке $[0; 1]$, а Y_n — наименьшее из этих n чисел.
- а) К чему сходится последовательность Y_n по распределению?
- б) К чему сходится последовательность $R_n = n \cdot Y_n$ по распределению?
-