Домашнее задание 7

Дедлайн: 2024-11-01.

Здесь $\mathbb{H}(Y \mid X)$ — это условная энтропия, а $\mathbb{H}(X, Y)$ — совместная энтропия. Будьте осторожны, некоторые авторы используют обозначение $\mathbb{H}(X, Y)$ для кросс-энтропии.

1. Распределение вектора (X, Y) задано таблицей

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 0$	0.2	0.2	0.1
$X = 1$	0.5	0	0

   а) Найдите энтропии $\mathbb{H}(X)$, $\mathbb{H}(Y)$, $\mathbb{H}(X, Y)$.

   б) Найдите $\mathbb{H}(Y \mid X)$.

   в) Какое максимальное значение может принимать условная энтропия $\mathbb{H}(Y \mid X)$, если X принимает два значения, а Y — три?

2. Рассмотрим равномерное распределение на отрезке $[0; 1]$.

   а) Найдите энтропию равномерного распределения на отрезке $[0; 1]$.

   б) Докажите, что равномерное распределение имеет максимальную энтропию среди всех распределений на отрезке $[0; 1]$, имеющих функцию плотности.

   Рассмотим распределение с функцией плотности $f(x) = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$ на числовой прямой. Кстати, оно называется *стандартным нормальным*.

   в) Найдите математическое ожидание и дисперсию данного распределения.

   г) Найдите энтропию стандартного нормального распределения.

   д) Докажите, что стандартное нормальное распределение имеет максимальную энтропию среди всех распределений с функцией плотности с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

   Подсказка: можно без доказательства пользоваться тем, что $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

3. Для дискретных величин X и Y докажите или опровергните утверждения:

   а) $\mathbb{H}(X) + \mathbb{H}(Y \mid X) = \mathbb{H}(X, Y)$;

   б) $\mathbb{H}(X, Y) \geq \mathbb{H}(X)$;

   в) $\mathbb{H}(X^2) = \mathbb{H}(X)$;