

## Формат

В экзамене будет 6 задач: четыре задачи по темам второго семестра и две — по темам первого. В демо версиях сделан акцент на темы второго семестра. Задачи имеют равный вес. Продолжительность работы 120 минут. Можно будет использовать в качестве разрешенной шпаргалки один лист А4 со всех шести его сторон.

## Вариант «Лискевич»

1. Рассмотрим стандартный винеровский процесс  $(W_t)$ .

а) Найдите  $\mathbb{E}(W_4 | W_5)$ ,  $\mathbb{E}(W_5 | W_4)$ ,  $\mathbb{V}\text{ar}(W_4 | W_5)$ ,  $\mathbb{V}\text{ar}(W_5 | W_4)$ .

б) При каком  $\alpha$  процесс  $\exp(6W_t + \alpha t)$  будет мартингалом?

2. Процессы  $(W_t)$  и  $(V_t)$  — стандартные винеровский процессы, независимые между собой. Если возможно, найдите все такие  $\alpha$  и  $\beta$ , чтобы процессы  $(X_t)$  и  $(Y_t)$  были стандартными винеровскими

$$X_t = \alpha W_t + (1 - \alpha)V_t, \quad Y_t = \cos(42)W_t + \sin(\beta)V_t.$$

3. На первом шаге мы случайно выбираем  $X$  по равномерному закону на отрезке  $[0; 2]$ . На втором шаге мы случайно выбираем  $Y$  по Пуассону с интенсивностью  $\lambda = X$ .

а) Найдите  $\mathbb{E}(Y)$  и  $\mathbb{V}\text{ar}(Y)$ .

б) Найдите функцию плотности случайной величины  $\mathbb{V}\text{ar}(Y | X)$ .

4. Илон Маск каждый день зарабатывает случайное количество DOGE-койнов  $Y_t$ , экспоненциально распределённое с интенсивностью  $1/10^6$ . Зарботки за разные дни независимы.

Обозначим за  $\tau$  тот день, когда его заработок впервые превысит  $10^6$  DOGE, а суммарный заработок — за  $S = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_\tau$ .

а) Как распределена величина  $\tau$ ? Найдите  $\mathbb{E}(\tau)$ .

б) Найдите  $\alpha$ , чтобы процесс  $M_t = \sum_{k=1}^t Y_k - \alpha t$  был мартингалом.

в) Найдите  $\mathbb{E}(S)$ .

5. Неправильная монетка выпадает орлом с вероятностью  $p = 0.3$ . При выпадении орла игрок зарабатывает  $X_t = +1$ , а при выпадении решки —  $X_t = -1$ . Обозначим суммарный выигрыш игрока как  $S_t = X_1 + X_2 + \dots + X_t$  и  $\tau$  — первый момент времени, когда  $S_t$  достигнет 100 или  $-50$ .

а) Найдите  $\alpha$  такое, что процесс  $M_t = S_t - \alpha t$  — мартингал.

б) Найдите  $\beta$  такое, что процесс  $Y_t = \exp(\beta S_t)$  — мартингал.

в) Найдите  $\mathbb{P}(S_\tau = 100)$ .

г) Найдите  $\mathbb{E}(\tau)$ .

Подсказка: достаточно применить теорему Дуба к  $M_t$  и  $Y_t$ .

6. В одной корзине лежат бильярдные шары с номерами от 3 до 9, во второй — с номерами от 1 до 7. Мы выбираем случайно равновероятно один шар из первой корзины и один шар — из второй. Из полученных двух шаров мы равновероятно один называем  $X$ , а второй —  $Y$ .

- а) Найдите  $\mathbb{E}(Y \mid X)$ .
- б) Найдите  $\text{Var}(Y \mid X)$ .

## Вариант «Рафаэль»

1. Рассмотрим дискретное время  $t$ , фильтрацию  $(\mathcal{F}_t)$  и некую случайную величину  $\tau$ , принимающую значения из множества  $\{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ .

Какие из приведённых условий эквивалентны, какие являются следствием других?

- A:  $\forall t \in \{0, 1, 2, \dots\} : \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$
- B:  $\forall t \in \{0, 1, 2, \dots\} : \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$
- C:  $\forall t \in \{0, 1, 2, \dots\} : \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$

2. Макака снова нажимает равновероятно кнопки от А до Я на печатающей машинке. Конец света наступает, когда макака впервые напечатает слово «АБРАКАДАБРА», обозначим этот момент величиной  $\tau$ .

- а) Сконструируйте мартингал, позволяющий найти  $\mathbb{E}(\tau^2)$ .
- б) Найдите  $\mathbb{E}(\tau^2)$ .

Подсказка: если в момент  $t$  добавлять в казино  $t^2 - (t-1)^2$  рублей, то к моменту  $t$  в казино окажется  $t^2$  рублей, <https://www.jeremykun.com/2014/03/03/martingales-and-the-optional-stopping-theorem/>.

3. Величины  $X_1, X_2, \dots, X_n$  независимы и равномерно распределены на отрезке  $[0, a]$ , рассмотрим величину  $Y = \max\{X_1, \dots, X_n\}$  и её ожидание  $h(a) = \mathbb{E}(Y)$ .

- а) Выпишите уравнение, связывающее  $h(a+u)$  и  $h(a)$ , с точностью до  $o(u)$ .
- б) Выпишите дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция  $h(a)$ .
- в) Укажите начальное условие, которому удовлетворяет функция  $h(a)$ .

4. Величины  $X_1, X_2, \dots, X_n$  независимы и имеют гамма-распределение  $\text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ . Мы складываем случайное количество слагаемых  $N$ , где  $N$  независима от  $(X_i)$  и имеет пуассоновское распределение  $\text{Pois}(\mu)$ . Получаемую сумму обозначим  $S = \sum_{k=1}^N X_k$ .

- а) Найдите  $\mathbb{E}(\exp(uS) \mid N)$ .
- б) Найдите функцию, производящую моменты величины  $S$ .

Комментарий: функцию, производящую моменты гамма-распределения можно считать известной.

5. Величины  $X_1$  и  $X_2$  независимы и экспоненциально распределены с параметром  $\lambda$ .

- а) Найдите закон распределения  $Y_1 = \exp(-X_1)$ .

- б) Найдите функцию плотности величины  $X_1 - X_2$ .
- в) Найдите функцию плотности величины  $|X_1|$ .
6. Аня, Бэлла, Вова и Дима учатся в одной группе. Два студента в любой паре общаются друг с другом с вероятностью  $p$  независимо от других пар. Если студенты общаются, то любой слух, известный одному, будет известен другому.
- а) Какова вероятность того, что слух дойдёт до Димы, если Аня только что узнала новый слух?
- б) Какова вероятность того, что слух дойдёт до Димы, если Аня только что узнала новый слух и не общается с Бэллой?
- в) Какова вероятность того, что слух дойдёт до Димы, если Аня только что узнала новый слух и Бэлла не общается с Вовой?

Немного ответов и подсказок:

Лискевич:

- 1.
2.  $\alpha \in \{0, 1\}, \cos^2(42) + \sin^2 \beta = 1$ .
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.

$$\mathbb{E}(Y \mid X) = \begin{cases} 6, & \text{если } X \in \{1, 2\}, \\ 5, & \text{если } X \in \{3, 4, 5, 6, 7\}, \\ 4, & \text{если } X \in \{8, 9\}, \end{cases}$$

Рафаэль:

1.  $A$  эквивалентно  $B$ , из  $A$  следует  $C$ ;
2. Первый игрок приносит в казино 1 рубль, второй — 3 рубля, третий — 5 рублей, ...Внутри казино игроки играют в справедливую игру. Каждый игрок в каждый момент времени ставит все деньги на очередную букву слова АБРАКАДАБРА. Мартингалом будет  $M_t = S_t - t^2$ , где  $S_t$  — сумма денег у игроков внутри казино,

$$S_\tau = 33(2\tau - 1) + 33^4(2(\tau - 3) - 1) + 33^{11}(2(\tau - 10) - 1).$$

По теореме Дуба  $\mathbb{E}(\tau^2) = \mathbb{E}(S_\tau)$ .

3. Величина  $u$  мала. Разобьём отрезок  $[0, a + u]$  на две части: большую,  $[0, a]$ , и малую,  $[a, a + u]$ . Либо все  $n$  величин лягут на отрезок  $[0, a]$ , либо одна величина ляжет на малую часть  $[a, a + u]$ . Вероятностью того, что две и более величин лягут на малую часть отрезка можно пренебречь:

$$h(a + u) = \left(\frac{a}{a + u}\right)^n h(a) + C_n^1 \left(\frac{a}{a + u}\right)^{n-1} \left(\frac{u}{a + u}\right) \cdot a + o(u).$$