

1. Известно, что $\mathbb{E}(Y | X) = 2 + 3X$, $\text{Var}(X) = 9$, $\mathbb{E}(X) = 6$.

а) [2 + 3] Найдите $\mathbb{E}(Y)$, $\text{Cov}(X, Y)$.

б) [5] В каких пределах могут лежать $\text{Var}(Y | X)$ и $\text{Var}(Y)$?

Ответы:

а) $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y | X)) = 20$, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY | X)) = 147$, $\text{Cov}(X, Y) = 27$;

б) $\text{Var}(Y | X) \geq 0$, можно, например, считать, что $Y = 2 + 3X + R$, где $R \sim \mathcal{N}(0, 1)$; $\text{Var}(Y) \geq 81$.

2. Величины U_1, U_2 распределены равномерно на отрезке $[0, 1]$ и независимы. Определим последовательность $X_n = n^2 \cdot I[U_1 \leq 1/(n+2)] + U_2 \cdot n/(n+2)$.

а) [3] Сходится ли (X_n) почти наверное и если да, то к чему?

б) [2] Сходится ли (X_n) по вероятности и если да, то к чему?

в) [2] Сходится ли (X_n) по распределению и если да, то к чему?

г) [3] Сходится ли (X_n) в L^1 и если да, то к чему?

Ответы:

а) Да, к U_2 , на квадрате в осях (u_1, u_2) можно заметить, что сходимости нет только на множестве $U_1 = 0$ меры 0.

б) Из сходимости почти наверное следует сходимость по вероятности.

в) Из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению.

г) Сходимости в L^1 нет, так как $\mathbb{E}(X_n) \geq n^2/(n+2) \rightarrow \infty$.

3. Рассмотрим стандартный винеровский процесс (W_t) .

а) [5] Найдите $\text{Cov}(W_1, W_7 | W_3)$ и $\mathbb{E}(W_2^2 W_4^2)$.

б) [5] При каком α процесс $Y_t = (3 + \alpha W_t)^2 - 10t$ будет мартингалом?

а) $\text{Cov}(W_1, W_7 | W_3) = 0$ и $\mathbb{E}(W_2^2 W_4^2) = 16$;

б) $\alpha = \pm\sqrt{10}$.

4. Улитка стартует в точке $S_0 = 7$. Каждую минуту она равновероятно смещается влево или вправо на единицу.

а) [3] При какой константе α процесс $Y_t = \sum_{k=0}^t S_k - \alpha S_t^3$ будет мартингалом?

Улитка отдыхает в точках $S_0 = 0$ и $S_0 = 20$. Обозначим τ момент времени, когда она впервые достигнет одной из точек отдыха, $\tau = \min\{t | S_t \in \{0, 20\}\}$.

б) [4] Слепо применяя теорему Дуба, найдите $\mathbb{E}(S_1 + S_2 + \dots + S_\tau)$.

в) [3] Аккуратно проверьте, что теорему Дуба можно было применять.

Уточнение: без доказательства можно пользоваться тем, что $\mathbb{P}(S_\tau = 20) = 7/20$.

а) $\alpha = 1/3$;

б) $\mathbb{E}(S_1 + S_2 + \dots + S_7) = 819$ или $\mathbb{E}(S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_7) = 826$;

5. Величины X_1, X_2, \dots, X_5 независимы и экспоненциально распределены $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$. Определим $M = \min\{X_3, X_4, X_5\}$.

а) [3] Как распределена величина M ?

б) [3] Найдите вероятность $\mathbb{P}(X_1 < X_2)$.

в) [4] Найдите функцию распределения величины $L = \ln X_1 - \ln X_2$ при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Разбалловка:

а) 0б для минимума $\leq t$ раскладывается в произведение

1б не указаны пар-ры экспоненциального или указаны не верно

б) 0б не корректная формула

1б не досчитан интеграл

2б ответ посчитан не правильно (арифметика)

1б посчитано для $\lambda_1 = \lambda_2$

в) 1б не досчитан интеграл

1б ответ посчитан не правильно

2б цепочка вывода правильная, но ошибка в вычислениях

6. Величины X_1, X_2, \dots, X_n независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, a]$, рассмотрим наибольшую величину $H = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ и наименьшую величину $L = \min\{X_1, \dots, X_n\}$.

а) [3] Найдите $\mathbb{E}(L)$ любым способом.

Определим ожидание $h(a) = \mathbb{E}(L \cdot H)$.

б) [5] Выпишите уравнение, связывающее $h(a + u)$ и $h(a)$, с точностью до $o(u)$.

в) [2] Укажите начальное условие, которому удовлетворяет функция $h(a)$.

Разбалловка:

а) 1б посчитано для $n = 2$

1б правильно посчитано распределение/плотность

2б арифметическая ошибка

2б в знаменателе n , а не $n + 1$

б) 0б формула не верная

1б за уравнение с производной

1б за правильную идею, но в формуле не посчитаны значения

2б за правильную идею, но не правильные вычисления (вероятности или интегралы)

в) 2б за корректный ответ