Домашнее задание 10

Дедлайн: 2025-02-09, 23:59.

Оцениваемые задачи:

1. Величины (X_i) независимы и одинаково распределены с ожиданием $\mathbb{E}(X_i) = \mu \neq 0$ и дисперсией $\mathbb{V}\text{ar}(X_i) = \sigma^2$. Используя арифметику пределов и закон больших чисел, найдите пределы:

   а) $\operatorname{plim}(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2)/(X_1 + X_2 + \cdots + X_n + \cdots + X_{2n})$;

   б) $\operatorname{plim} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2/(n-1)$;

   в) $\operatorname{plim} \bar{X}_n/((\bar{X}_n)^2 + 1)$.

2. Величины (X_i) независимы и одинаково распределены с ожиданием $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ и дисперсией $\mathbb{V}\text{ar}(X_i) = \sigma^2$. Используя центральную предельную теорему и леммы Слуцкого, найдите пределы по распределению последовательностей

   а) $(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu)/\sqrt{n}$;

   б) $(\bar{X}_n - \mu)/\sqrt{\sigma^2/n}$;

   в) $(\bar{X}_n - \mu)/\sqrt{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2/(n^2 - n)}$;

3. Величины (X_i), (Y_i), (Z_i) имеют стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0;1)$ и независимы как внутри последовательностей, так и между последовательностями. Построим последовательности $R_i = X_i/\sqrt{Y_i^2}$ и $L_i = X_i/\sqrt{(Y_i^2 + Z_i^2)/2}$. Определим накопленные средние $\bar{R}_n = (R_1 + R_2 + \cdots + R_n)/n$ и, аналогично, $\bar{L}_n$.

   а) Постройте на одном графике пять траекторий $\bar{R}_n$ как функции от n для $n \in \{1, \ldots, 100000\}$.

   б) Постройте на одном графике пять траекторий $\bar{L}_n$ как функции от n для $n \in \{1, \ldots, 100000\}$.

   в) Прокомментируйте словами разницу между траекториями $\bar{L}_n$ и $\bar{R}_n$.

   г) Вспомните закон больших чисел и предположите, чем может быть вызвана разница в характере траекторий.

   д) Если возможно, найдите $\mathbb{E}(R_i)$ и $\mathbb{E}(L_i)$.

   Примечание: здесь без доказательства можно пользоваться тем, что функция плотности R_i равна $f(r) = 1/(\pi(1 + r^2))$, а функция плотности L_i равна $f(l) = 1/(2 + l^2)^{3/2}$.

Бесценные задачи just for fun:

4. Величины (X_i), (Y_i), (Z_i) независимы и имеют стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0;1)$, $R_i = X_i/\sqrt{Y_i^2}$ и $L_i = X_i/\sqrt{(Y_i^2 + Z_i^2)/2}$.

   Докажите, что функция плотности R_i равна $f(r) = 1/(\pi(1 + r^2))$, а функция плотности L_i равна $f(l) = 1/(2 + l^2)^{3/2}$.

5. Рассмотрим последовательность независимых величин $X_n \sim \text{Beta}(2n + 1, 5n + 10)$.

   а) К чему сходится эта последовательность по вероятности?

   б) К чему сходится эта последовательность по распределению?

6. Величины U_i независимы и равномерны на отрезке $[0;1]$. К чему и в каких смыслах (почти наверное, по вероятности, по распределению, L^1, L^2) сходится последовательность

$$X_n = \frac{\cos U_1 + \cos U_2 + \cdots + \cos U_n}{2n+1}?$$

7. У Стива Джобса в гараже завалялось три неслучайных последовательности: $a_n = 1/n$, $b_n = 3/(3+n)$ и $c_n = 1/1^2 + 1/2^2 + \cdots + 1/n^2$. Стив равновероятно выбирает одну из этих последовательностей и получает случайную последовательность X_n.

   а) В каких смыслах (почти наверное, по вероятности, по распределению, L^1, L^2) и к чему сходится последовательность X_n?

   б) Запишите $\lim X_n$ в виде явной функции от X_3.