

## Формат

В экзамене будет 6 задач: четыре задачи по темам второго семестра и две — по темам первого. В демо версиях сделан акцент на темы второго семестра. Задачи имеют равный вес. Продолжительность работы 120 минут. Можно будет использовать в качестве разрешенной шпаргалки один лист А4 со всех шести его сторон.

## Вариант «Лискевич»

1. Рассмотрим стандартный винеровский процесс  $(W_t)$ .

а) Найдите  $\mathbb{E}(W_4 | W_5)$ ,  $\mathbb{E}(W_5 | W_4)$ ,  $\mathbb{V}\text{ar}(W_4 | W_5)$ ,  $\mathbb{V}\text{ar}(W_5 | W_4)$ .

б) При каком  $\alpha$  процесс  $\exp(6W_t + \alpha t)$  будет мартингалом?

2. Процессы  $(W_t)$  и  $(V_t)$  — стандартные винеровский процессы, независимые между собой. Если возможно, найдите все такие  $\alpha$  и  $\beta$ , чтобы процессы  $(X_t)$  и  $(Y_t)$  были стандартными винеровскими

$$X_t = \alpha W_t + (1 - \alpha)V_t, \quad Y_t = \cos(42)W_t + \sin(\beta)V_t.$$

3. На первом шаге мы случайно выбираем  $X$  по равномерному закону на отрезке  $[0; 2]$ . На втором шаге мы случайно выбираем  $Y$  по Пуассону с интенсивностью  $\lambda = X$ .

а) Найдите  $\mathbb{E}(Y)$  и  $\mathbb{V}\text{ar}(Y)$ .

б) Найдите функцию плотности случайной величины  $\mathbb{V}\text{ar}(Y | X)$ .

4. Илон Маск каждый день зарабатывает случайное количество DOGE-койнов  $Y_t$ , экспоненциально распределённое с интенсивностью  $1/10^6$ . Зарботки за разные дни независимы.

Обозначим за  $\tau$  тот день, когда его заработок впервые превысит  $10^6$  DOGE, а суммарный заработок — за  $S = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_\tau$ .

а) Как распределена величина  $\tau$ ? Найдите  $\mathbb{E}(\tau)$ .

б) Найдите  $\alpha$ , чтобы процесс  $M_t = \sum_{k=1}^t Y_k - \alpha t$  был мартингалом.

в) Найдите  $\mathbb{E}(S)$ .

5. Неправильная монетка выпадает орлом с вероятностью  $p = 0.3$ . При выпадении орла игрок зарабатывает  $X_t = +1$ , а при выпадении решки —  $X_t = -1$ . Обозначим суммарный выигрыш игрока как  $S_t = X_1 + X_2 + \dots + X_t$  и  $\tau$  — первый момент времени, когда  $S_t$  достигнет 100 или  $-50$ .

а) Найдите  $\alpha$  такое, что процесс  $M_t = S_t - \alpha t$  — мартингал.

б) Найдите  $\beta$  такое, что процесс  $Y_t = \exp(\beta S_t)$  — мартингал.

в) Найдите  $\mathbb{P}(S_\tau = 100)$ .

г) Найдите  $\mathbb{E}(\tau)$ .

Подсказка: достаточно применить теорему Дуба к  $M_t$  и  $Y_t$ .

6. В одной корзине лежат бильярдные шары с номерами от 3 до 9, во второй — с номерами от 1 до 7. Мы выбираем случайно равновероятно один шар из первой корзины и один шар — из второй. Из полученных двух шаров мы равновероятно один называем  $X$ , а второй —  $Y$ .

- а) Найдите  $\mathbb{E}(Y \mid X)$ .  
б) Найдите  $\mathbb{V}\text{ar}(Y \mid X)$ .

## Вариант «Рафаэль»

Скоро открытие :)

1.

---