1. Известно, что $\mathbb{E}(Y \mid X) = 2 + 3X$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 9$, $\mathbb{E}(X) = 6$.

   а) [2 + 3] Найдите $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)$.

   б) [5] В каких пределах могут лежать $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y \mid X)$ и $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$?

   Ответы:

   а) $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y \mid X)) = 20$, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY \mid X)) = 147$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) = 27$;

   б) $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y \mid X) \geq 0$, можно, например, считать, что $Y = 2 + 3X + R$, где $R \sim \mathcal{N}(0, 1)$; $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) \geq 81$.

2. Величины U_1, U_2 распределены равномерно на отрезке $[0, 1]$ и независимы. Определим последовательность $X_n = n^2 \cdot I[U_1 \leq 1/(n+2)] + U_2 \cdot n/(n+2)$.

   а) [3] Сходится ли (X_n) почти наверное и если да, то к чему?

   б) [2] Сходится ли (X_n) по вероятности и если да, то к чему?

   в) [2] Сходится ли (X_n) по распределению и если да, то к чему?

   г) [3] Сходится ли (X_n) в L^1 и если да, то к чему?

   Ответы:

   а) Да, к U_1, на квадрате в осях (u_1, u_2) можно заметить, что сходимости нет только на множестве меры 0.

   б) Из сходимости почти наверное следует сходимость по вероятности.

   в) Из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению.

   г) Сходимости в L^1 нет, так как $\mathbb{E}(X_n) \geq n^2/(n+2) \to \infty$.

3. Рассмотрим стандартный винеровский процесс (W_t).

   а) [5] Найдите $\mathbb{C}\mathrm{ov}(W_1, W_7 \mid W_3)$ и $\mathbb{E}(W_2^2 W_4^2)$.

   б) [5] При каком α процесс $Y_t = (3 + \alpha W_t)^2 - 10t$ будет мартингалом?

   а) $\mathbb{C}\mathrm{ov}(W_1, W_7 \mid W_3) = 0$ и $\mathbb{E}(W_2^2 W_4^2) = 16$;

   б) $\alpha = \pm\sqrt{10}$.

4. Улитка стартует в точке $S_0 = 7$. Каждую минуту она равновероятно смещается влево или вправо на единицу.

   а) [3] При какой константе α процесс $Y_t = \sum_{k=0}^{t} S_k - \alpha S_t^3$ будет мартингалом?

   Улитка отдыхает в точках $S_0 = 0$ и $S_0 = 20$. Обозначим τ момент времени, когда она впервые достигнет одной из точек отдыха, $\tau = \min\{t \mid S_t \in \{0, 20\}\}$.

   б) [4] Слепо применяя теорему Дуба, найдите $\mathbb{E}(S_1 + S_2 + \cdots + S_\tau)$.

   в) [3] Аккуратно проверьте, что теорему Дуба можно было применять.

   Уточнение: без доказательства можно пользоваться тем, что $\mathbb{P}(S_\tau = 20) = 7/20$.

а) $\alpha = 1/3$;

б) $\mathbb{E}(S_1 + S_2 + \dots + S_\tau) = 819$ или $\mathbb{E}(S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_\tau) = 826$;

5. Величины $X_1, X_2, ..., X_5$ независимы и экспоненциально распределены $X_i \sim \text{Expo}(\lambda_i)$. Определим $M = \min\{X_3, X_4, X_5\}$.

   а) [3] Как распределена величина M?

   б) [3] Найдите вероятность $\mathbb{P}(X_1 < X_2)$.

   в) [4] Найдите функцию распределения величины $L = \ln X_1 - \ln X_2$ при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

   Разбалловка:

   а) 0б для минимума <= t раскладывается в произведение
   1б не указаны пар-ры экспоненциального или указаны не верно

   б) 0б не корректная формула
   1б не досчитан интеграл
   2б ответ посчитан не правильно (арифметика)
   1б посчитано для $\lambda_1 = \lambda_2$

   в) 1б не досчитан интеграл
   1б ответ посчитан не правильно
   2б цепочка вывода правильная, но ошибка в вычислениях

6. Величины X_1, X_2, ..., X_n независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, a]$, рассмотрим наибольшую величину $H = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ и наименьшую величину $L = \min\{X_1, \dots, X_n\}$.

   а) [3] Найдите $\mathbb{E}(L)$ любым способом.

   Определим ожидание $h(a) = \mathbb{E}(L \cdot H)$.

   б) [5] Выпишите уравнение, связывающее $h(a + u)$ и $h(a)$, с точностью до $o(u)$.

   в) [2] Укажите начальное условие, которому удовлетворяет функция $h(a)$.

   Разбалловка:

   а) 1б посчитано для $n = 2$
   1б правильно посчитано распределение/плотность
   2б арифметическая ошибка
   2б в знаменателе n, а не $n + 1$

   б) 0б формула не верная
   1б за уравнение с производной
   1б за правильную идею, но в формуле не посчитаны значения
   2б за правильную идею, но не правильные вычисления (вероятности или интегралы)

   в) 2б за корректный ответ