Формат

В работе будет 6 задач. Задачи имеют равный вес. Продолжительность работы 120 минут. На декабрьской письменной работе можно будет использовать в качестве разрешенноё шпаргалки один лист A4 со всех шести его сторон. В задачах про нормальное распределение нужно уметь как воспользоваться таблицей, так и записать ответ с помощью функции распределения $F()$ для нормальной стандартной случайной величины.

Демо «Колотун»

1. Случайные величины X_1 и X_2 независимы и имеют нормальное стандартное распределение $\mathcal{N}(0;1)$.

   а) Найдите вероятность $\mathbb{P}(X_1^2 + X_2^2 \leq t)$.

   б) Какое распределение имеет случайная величина $S = X_1^2 + X_2^2$?

2. Вектор Y имеет совместное нормальное распределение.

$$Y \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ & 20 & -1 \\ & & 30 \end{pmatrix}\right).$$

   а) Найдите $\mathbb{E}(Y_1 - 5Y_2)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y_1 - 5Y_2)$, $\mathbb{P}(Y_1 - 5Y_2 > 0)$.

   б) Найдите $\mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_1Y_2, Y_2Y_3)$.

   в) Найдите $\mathbb{P}(Y_1 > 3 \mid Y_2 = 5)$.

3. Вектор (X, Y) имеет совместную функцию плотности

$$f(x,y) = \begin{cases} x + 5y^9, & \text{если } x, y \in [0;1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

   а) Найдите совместную функцию плотности вектора $(R = X - Y^3, S = X + Y^3)$.

   б) Найдите условную функцию плотности $f_{Y|X}(y \mid x)$.

   в) Найдите условные $\mathbb{E}(Y \mid X = x)$ и $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y \mid X = x)$.

4. Крипто-портфель инвестора Кота Базилио состоит из двух альт-койнов с вектором доходностей $R = (R_1, R_2)$ (в долях от единицы).

$$\mathbb{E}(R) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \mathbb{V}\mathrm{ar}(R) = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 10 \end{pmatrix}.$$

   Базилио может включить в свой портфель альт-койны с вектором весов $w = (w_1, 1 - w_1)$, где $w_1 \in [0;1]$. Доходность портфеля считаем как скалярное произведение $R_P = \langle w, R \rangle$.

   а) Какой портфель минимизирует дисперсию $\mathbb{V}\mathrm{ar}(R_P) \to \min_w$?

   б) Какая будет ожидаемая доходность у портфеля с минимальной дисперсией?

5. Спамеры звонят мне согласно пуассоновскому потоку с интенсивностью $\lambda = 5$ звонков в неделю.

а) Какова вероятность того, что за один день поступит не более одного звонка?

б) Найдите функцию плотности времени, которое пройдёт от начала наблюдения до третьего звонка.

в) Найдите математическое ожидание и дисперсию числа звонков за три дня.

6. Случайные величины X_1, ..., X_{10} независимы и имеют функцию плотности $2x$ на отрезке $[0; 1]$. Упорядочим их по возрастанию и рассмотрим порядковые статистики $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$.

   а) Найдите функцию плотности минимальной порядковой статистики $X_{(1)}$.

   б) Найдите функцию плотности величины $X_{(3)}$.

   в) Найдите совместную функцию плотности пары $(X_{(3)}, X_{(7)})$.

Вариант «Пурга»

1. Машенькина оценка за контрольную X распределена равномерно на отрезке $[0, 1]$. Вовочка списывает у Маши, но с ошибками, поэтому его оценка Y за контрольную условно распределена равномерно на отрезке $[0, X]$.

   а) Выпишите условную функцию плотности $f_{Y|X}(y \mid x)$.

   б) Восстановите совместную функцию плотности $f(x, y)$.

   в) Найдите ковариацию $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)$.

2. Монетка выпадает орлом с вероятностью $1/2$. Эксперимент состоит из двух этапов. На первом этапе монетку подкидывают 100 раз и записывают число орлов, R. На втором этапе монетку подбрасывают до тех пор пока не выпадет столько орлов, сколько выпало на первом этапе. Обозначим число подбрасываний монетки на втором этапе буквой S.

   Найдите ожидание $\mathbb{E}(S \mid R = r)$ и дисперсию $\mathbb{V}\mathrm{ar}(S \mid R = r)$.

3. В пятницу 13 сентября 2019 года в Атланте перевернулся грузовик с 216 тысячами игральных кубиков. К счастью, никто не пострадал.

   Предположим, что все кубики выпали на дорогу.

   а) Какова вероятность того, что в сумме выпало больше 740000?

   б) Найдите такое число a, чтобы вероятность того, что выпала сумма меньше a, равнялась 0.777.

   Предположим, что часть кубиков осталась в грузовике.

   в) Какая часть кубиков выпала на дорогу, если вероятность того, что сумма на кубиках, выпавших на дорогу, больше суммы на кубиках, оставшихся в грузовике, равна $2/3$?

4. Величины X_1, X_2, ..., X_n независимы и экспоненциально распределены с интенсивностью $\lambda = 1$, а $S = X_1 + \dots + X_{1000}$ и $R = X_{501} + \dots + X_{1500}$.

   а) Примерно оцените вероятность $\mathbb{P}(S > 1050)$.

   б) Примерно найдите условное ожидание $\mathbb{E}(S \mid S > 1000)$.

в) Какое примерно распределение имеет вектор (S, R)?

5. Есть пара независимых случайных величин, $R \sim \text{Beta}(10, 20)$ и $S \sim \text{Gamma}(30, \lambda = 5)$.

   а) Найдите с доказательством моду R и моду S.

   б) Найдите (можно без доказательства) $\mathbb{E}(R)$ и $\mathbb{E}(S)$.

   в) Найдите закон распределения $W = S \cdot R$ и закон распределения $Q = S \cdot (1 - R)$.

6. Величины X_1, X_2, ... , X_n независимы и равномерно распределены на отрезке $[0; 1]$, а Y_n — наименьшее из этих n чисел.

   а) К чему сходится последовательность Y_n по распределению?

   б) К чему сходится последовательность $R_n = n \cdot Y_n$ по распределению?