Домашнее задание 1

Дедлайн: 2024-09-16, 21:00.

1. Вася решает три задачи по теории вероятностей. Вероятности решить эти задачи равны 0.1, 0.2 и 0.3. Решения задач никак не связаны между собой, знание ни одной из задач не помогает решить ни одну другую. Обозначим буквой N общее количество решенных задач.

   а) Найдите все значения N и их вероятности.

   б) Найдите $\mathbb{P}(N > 1)$, $\mathbb{E}(N)$ и $\mathbb{E}(N^2)$.

2. За работу Вася получает случайное целое количество ξ баллов, равновероятно распределённое от 1 до n.

   Найдите $\mathbb{E}(\xi)$, $\mathbb{E}(\xi^2)$, $\mathbb{E}(\xi^3)$.

3. Берём набор данных по ссылке

   https://github.com/bdemeshev/hse_pmi_probability_2024_2025/raw/main/home_assignments/ha01_data.csv.

   Здесь две переменных: y_i — количество просмотренных Васей рилзов в день i и бинарная переменная x_i ($x_i = A$ — обычный день, $x_i = B$ — день дедлайна по теории вероятностей).

   Рассмотрим две гипотезы. Нулевая гипотеза H_0: приближение дедлайна по вероятностям никак не влияет на количество просмотренных рилзов. Альтернативная гипотеза H_1: приближение дедлайна в среднем снижает количество просмотренных рилзов.

   а) Посчитайте фактическое значение статистики $S = \bar{y}_B - \bar{y}_A$.

   б) Предполагая, что H_0 верна, сгенерируйте 10000 случайных перестановок меток x и для каждой перестановки посчитайте значение статистики $S^{\text{new}} = \bar{y}_B^{\text{new}} - \bar{y}_A^{\text{new}}$.

   в) Оцените p-значение, в данном случае p-значение — это вероятность $\mathbb{P}(S^{\text{new}} \leq S \mid S, H_0)$.

   г) Для принятия решения, отвергать или нет H_0, мы используем уровень значимости $\alpha = 0.05$. Отвергаем ли мы H_0?

Домашнее задание 2

Дедлайн: 2024-09-23, 21:00.

1. Монетка выпадает орлом T с вероятностью 0.2 и решкой H — с вероятностью 0.8. Илон Маск подбрасывает её 100 раз. За каждую выпавшую комбинацию THT он получает 1\$, а за каждую комбинацию $HHHHHH$ — платит 1\$.

   Чему равен ожидаемый выигрыш Маска в эту игру?

   Уточнение: комбинации могут пересекаться, например, за $THTHT$ Маск получит 2\$.

2. Бармен Огненной Зебры разбавляет каждую кружку пива независимо от других с общеизвестной вероятностью $p \in (0; 1)$. Ковбой Джо заходит в бар и первым делом сразу заказывает три кружки пива и выпивает их. Затем Джо заказывает по две кружки пива за один раз.

После 3-й, 5-й, 7-й, 9-й, 11-й и далее через каждые две кружки Джо прислушивается к своим ощущениям. Если не менее двух кружек пива из последних трёх кружек разбавлены, то Джо разносит бар к чертям собачьим.

а) Сколько кружек пива в среднем успеет выпить Джо прежде чем разнесёт Огненную Зебру?

б) Если все три последние кружки пива разбавлены, то Джо разносит не только Огненную Зебру, но и всю прилежащую улицу. Какова вероятность данного сценария?

3. Ретроградный Меркурий.

   Маша решает задачи по теории вероятностей как во время ретроградного Меркурия, так и без оного. Всего она решила 50 задач, из них 11 она решила правильно. Из 30 решённых во время ретроградного Меркурия задач $S = 5$ были решены правильно.

   Рассмотрим две гипотезы. Нулевая гипотеза H_0: ретроградный Меркурий не оказывает влияния на вероятность решения задачи. Альтернативная гипотеза H_1: ретроградный Меркурий снижает вероятность верно решить задачу.

   а) Предполагая, что H_0 верна, сгенерируйте 10000 случайных выборок. В каждой выборке должно быть всего ровно 50 задач, ровно 30 задач должны приходится на ретроградный Меркурий, всего ровно 11 задач должны быть решены верно. Для каждой выборки посчитайте S^{new} — количество верно решённых во время ретроградного Меркурия задач.

   б) Оцените p-значение по 10000 экспериментов. В данном случае p-значение — это вероятность $\mathbb{P}(S^{\text{new}} \leq S \mid S, H_0)$.

   в) Найдите точное p-значение в данной задаче.

   г) Для принятия решения, отвергать или нет H_0, мы используем уровень значимости $\alpha = 0.05$. Отвергаем ли мы H_0?

Домашнее задание 3

Дедлайн: 2024-09-30, 21:00.

1. В анкету включён вопрос, на который респонденты стесняются отвечать правдиво. Например, «Берёте ли Вы взятки?» или «Употребляете ли Вы наркотики?» Чтобы стимулировать респондентов отвечать правдиво, используют следующий прием. Перед ответом на вопрос респондент в тайне от анкетирующего подкидывает один раз специальную монетку, на гранях которой написано «Да = А, Нет = Б», и «Да = Б, Нет = А». Ответ «Да» на нескромный вопрос является верным для доли p всех людей. Монетка неправильная и выпадает стороной «Да= А, Нет = Б» с вероятностью 0.6.

   а) Какова вероятность того, что ответ «Да» для данного индивида верен, если он написал «А» и следовал указаниям монетки?

   б) Какова вероятность того, что ответ «Да» для данного индивида верен, если он подбрасывал специальную монету 3 раза, следовал каждый раз предлагаемой кодировке и написал «А», «Б», «А»?

2. Илон Маск изобрёл новый кубик под названием Model-6. Он взял правильный игральный кубик и правильный кубик с неподписанными гранями. Он подкинул шесть раз правильный игральный кубик и заполнил по очереди все грани изначально чистого кубика результатами бросков правильного кубика.

   а) Какова вероятность того, что в первом броске Model-6 выпало 6, если во втором броске Model-6 выпало 6?

   б) Зависимы ли результаты бросков Model-6?

   в) Чему равно ожидаемое количество шестёрок, выпавших в процессе изготовления Model-6, если при шести бросках Model-6 выпало три шестёрки?

3. Камала Харрис подбрасывает кубик до первого выпадения восьмёрки. Все грани кубика выпадают равновероятно, однако на его шести гранях написаны числа 3, 4, 5, 6, 7, 8. Дональд Трамп подбрасывает правильный октаэдр до выпадения восьмёрки. На гранях октаэдра написаны числа от 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

   а) Постройте гистограмму числа бросков кубика по $B = 10000$ экспериментов.

   б) Оцените безусловное математическое ожидание числа бросков кубика.

   в) Оцените безусловную вероятность окончания игры быстрее, чем за 5 бросков кубика.

   г) Постройте условную гистограмму числа бросков октаэдра, если известно что грани 1 и 2 не выпадали. Общее количество экспериментов здесь должно быть таким, чтобы число число экспериментов, где не выпадали грани 1 и 2 оказалось равным $B = 10000$.

   д) Оцените условное ожидание числа бросков октаэдра, если грани 1 и 2 не выпадали.

   е) Оцените условную вероятность окончания игры быстрее, чем за 5 бросков октаэдра, если грани 1 и 2 не выпадали.

Домашнее задание 4

Дедлайн: 2024-10-07, 21:00.

1. Случайные величины (X_i) независимы и равновероятно принимают значения 0 и 1, $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $W = (S - \mathbb{E}(S))/\sqrt{n/4}$.

   а) Найдите производящую функции моментов $m_X(t)$ величины X_i.

   б) Найдите производящую функцию моментов $m_S(t)$ величины S.

   в) Найдите производящую функцию моментов $m_W(t)$ величины W.

   г) Найдите $\lim_{n\to\infty} m_W(t)$.

2. Рассмотрим последовательность независимых биномиальных величин $X_k \sim \mathrm{Bin}(k, \lambda/k)$, где λ — параметр.

   а) Найдите $\mathbb{E}(X_k)$, $\mathbb{E}(X_k^2)$ и предел $\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}(X_k^2)$.

   б) Найдите предел вероятностей $\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(X_k = j)$. Верно ли, что $\sum_{j\geq 0} \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(X_k = j) = 1$?

   в) Найдите предел производящей функции моментов $\lim_{k\to\infty} m_k(t)$, где $m_k(t) = \mathbb{E}(\exp(tX_k))$.

3. Алиса и Боб снова подкидывают монетку неограниченное число раз. Монетка выпадает решкой H и орлом T равновероятно. Алиса выигрывает, если последовательность HHT выпадет раньше, а Боб — если раньше выпадет HTH.

   Рассмотрим множество исходов этого эксперимента $\Omega = \{HHT, HTH, HHHT, THTH, THHT, \ldots\}$ и производящую функцию исходов $f(H,T) = HHT + HTH + HHHT + THTH + THHT + \ldots$. Здесь аргументы H и T некоммутативны. Обозначим X — количество решек H, Y — количество орлов T.

   а) Укажите, как с помощью производных и подстановок раздобыть из функции $f(H,T)$ величины $\mathbb{P}(X = 10)$, $\mathbb{P}(X = 5, Y = 5)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^3)$, $\mathbb{E}(X^2Y^3)$.

   б) С помощью метода первого шага составьте систему линейных уравнений, из которой можно найти $f(H,T)$.

   в) Решите эту систему, предполагая коммутативность H и T.

   г) Завершите вычисление $\mathbb{P}(X = 10)$, $\mathbb{P}(X = 5, Y = 5)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^3)$, $\mathbb{E}(X^2Y^3)$.

   Явное уточнение: конечно, в этой задаче можно использовать `sympy` или другой пакет для символьного решения системы или вычисления производных.

Домашнее задание 5

У этого задания нет дедлайна и за него нет оценки. Если очень хочется что-то куда-то загрузить, то можно отправить своему семинаристу мемасик по теории вероятностей :)

1. Случайная величина X принимает значения 1, 2, 3 и 4 с вероятностями 0.1, 0.2, 0.3, 0.4.

   а) Нарисуйте функцию распределения величины X, $F_X(x)$.

   б) Какой вероятностный смысл имеет площадь над функцией распределения $F_X(x)$ на участке $x \in [0; \infty)$?

   в) Нарисуйте функцию распределения случайной величины $Y = F_X(X)$.

2. Функция плотности случайной величины Y равна cy^2 на отрезке $[0; 2]$ и нулю иначе.

   а) Найдите константу c.

   б) Найдите функцию распределения Y.

   в) Найдите $\mathbb{P}(Y > 1)$, $\mathbb{P}(Y = 0.75)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(Y^2)$.

   г) Найдите функцию производящую моменты Y, $m_Y(t)$.

   д) Найдите $\mathbb{P}(Y > 1.5 \mid Y > 1)$, $\mathbb{E}(Y \mid Y > 1)$, $\mathbb{E}(Y^2 \mid Y > 1)$.

   е) Найдите функцию плотности величины $W = 1/Y$.

3. Случайная велина U равномерна на отрезке $[0; 10]$, $Y = \min\{U^2, 25\}$.

   а) Запишите вероятность $\mathbb{P}(Y \in [y; y + \Delta])$ с точностью до $o(\Delta)$.

   б) Найдите функцию распределения Y.

   в) Найдите $\mathbb{P}(Y > 10)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(Y^2)$.

   г) Найдите $\mathbb{P}(Y > 10 \mid Y > 5)$, $\mathbb{E}(Y \mid Y > 5)$, $\mathbb{E}(Y^2 \mid Y > 5)$.

Домашнее задание 6

Дедлайн: 2024-10-21

1. Случайная величина X распределена равномерно на $[0; 10]$, $Y = X^2$.

   а) Найдите дисперсию $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$, стандартное отклонение σ_Y.

   б) Найдите $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)$, $\mathbb{C}\mathrm{orr}(X, Y)$.

   в) Найдите $\mathbb{C}\mathrm{ov}(6X + 2Y + 7, -2Y + 15)$, $\mathbb{C}\mathrm{orr}(5 - 6X, 8 + 9Y)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(2Y + 7)$.

   г) Предложите любую неслучайную функцию h такую, что $\mathbb{C}\mathrm{orr}(h(X), X) = 0$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(h(X)) > 0$.

2. Назовём наилучшей линейной аппроксимацией величины Y с помощью величины X функцию вида $\hat{Y} = \alpha + \beta X$, где α и β — константы, при которых величина $\mathbb{E}((Y - \hat{Y})^2)$ минимальна.

   а) Известно, что $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) = 10$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 40$, найдите β.

   б) Дополнительно известно, что $\mathbb{E}(Y) = 10$, $\mathbb{E}(X) = 80$, найдите α.

   Допустим, что $a+bR$ — наилучшая линейная аппроксимация L с помощью R, а $c+dL$ — наилучшая линейная аппроксимация R с помощью L.

   в) Выразите произведение bd через корреляцию $\mathbb{C}\mathrm{orr}(R, L)$.

3. В анализе временных рядов иногда используют концепцию частной корреляции. Частная корреляция между величинами X и Y, очищенными от связи с величиной W, равна обычной корреляции между величинами $X^* = X - \alpha W$ и $Y^* = Y - \beta W$, где константы α и β находятся из условия некоррелированности X^* с W и некоррелированности Y^* с W.

$$\mathrm{pCorr}(X, Y; W) = \mathbb{C}\mathrm{orr}(X^*, Y^*), \text{ где } \begin{cases} X^* = X - \alpha W, & \mathbb{C}\mathrm{ov}(X^*, W) = 0, \\ Y^* = Y - \beta W, & \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y^*, W) = 0. \end{cases}$$

   Величины Y_1, Y_2, Y_3 независимы и равномерны на отрезке $[0; 1]$, $S_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3$.

   Найдите $\mathbb{C}\mathrm{orr}(Y_1, Y_2)$ и $\mathrm{pCorr}(Y_1, Y_2; S_3)$.

Домашнее задание 7

Дедлайн: 2024-11-01.

Здесь $\mathbb{H}(Y \mid X)$ — это условная энтропия, а $\mathbb{H}(X, Y)$ — совместная энтропия. Будьте осторожны, некоторые авторы используют обозначение $\mathbb{H}(X, Y)$ для кросс-энтропии.

1. Распределение вектора (X, Y) задано таблицей

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 0$	0.2	0.2	0.1
$X = 1$	0.5	0	0

   а) Найдите энтропии $\mathbb{H}(X)$, $\mathbb{H}(Y)$, $\mathbb{H}(X, Y)$.

б) Найдите $\mathbb{H}(Y \mid X)$.

в) Какое максимальное значение может принимать условная энтропия $\mathbb{H}(Y \mid X)$, если X принимает два значения, а Y — три?

2. Рассмотрим равномерное распределение на отрезке $[0; 1]$.

а) Найдите энтропию равномерного распределения на отрезке $[0; 1]$.

б) Докажите, что равномерное распределение имеет максимальную энтропию среди всех распределений на отрезке $[0; 1]$, имеющих функцию плотности.

Рассмотим распределение с функцией плотности $f(x) = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$ на числовой прямой. Кстати, оно называется *стандартным нормальным*.

в) Найдите математическое ожидание и дисперсию данного распределения.

г) Найдите энтропию стандартного нормального распределения.

д) Докажите, что стандартное нормальное распределение имеет максимальную энтропию среди всех распределений с функцией плотности с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Подсказка: можно без доказательства пользоваться тем, что $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

3. Для дискретных величин X и Y докажите или опровергните утверждения:

а) $\mathbb{H}(X) + \mathbb{H}(Y \mid X) = \mathbb{H}(X, Y)$;

б) $\mathbb{H}(X, Y) \geq \mathbb{H}(X)$;

в) $\mathbb{H}(X^2) = \mathbb{H}(X)$;

Домашнее задание 8

Дедлайн: 2024-12-03, 23:59.

1. Пара величин (X, Y) имеет функцию плотности $f(x, y) = 2x^3 + y$ на квадрате $[0; 1] \times [0; 1]$ и 0 за его пределами.

а) Найдите условную функцию плотности $f(y \mid x)$.

б) Найдите частные функции плотности $f_X(x)$ и $f_Y(y)$.

в) Найдите функцию плотности $f_W(w)$ и функцию распределения $F_W(w)$ величины $W = X - Y$.

г) Найдите ожидание $\mathbb{E}(X + 5Y)$ и дисперсию $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X + 5Y)$.

д) Найдите совместную функцию плотности пары $(V = 2X + 3Y, W = X - Y)$. Аккуратно укажите область, где новая плотность положительна.

е) Найдите условное ожидание $\mathbb{E}(Y \mid X = x)$ и условную дисперсию $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y \mid X = x)$.

2. Рассмотрим пуассоновский поток снежинок (X_t) падающих на раскрытую ладошку с интенсивностью $\lambda = 0.5$ снежинок в секунду.

а) Какова вероятность того, что за 5 секунд на ладошку упадёт не менее двух снежинок?

б) Я только что раскрыл ладошку. Какова вероятность того, что следующие две снежинки упадут раньше, чем через три секунды?

в) Выпишите функцию плотности времени T от раскрытия ладошки до выпадения третьей снежинки.

г) Найдите $\mathbb{E}(T)$ и $\mathbb{V}\mathrm{ar}(T)$.

д) Выпишите функцию плотности отношения R времени выпадения третьей снежинки к времени выпадения десятой снежинки.

е) Найдите $\mathbb{E}(R)$ и $\mathbb{V}\mathrm{ar}(R)$.

ж) Найдите вероятность $\mathbb{P}(X_{10} = 5 \mid X_4 = 1)$.

з) Найдите условные ожидание $\mathbb{E}(X_{10} \mid X_4 = 1)$ и дисперсию $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_{10} \mid X_4 = 1)$.

3. Страховые случаи наступают согласно пуассоновскому потоку с интенсивностью 100 случаев в месяц. Выплаты по каждому страховому случаю распределены независимо от других случаев и времени наступления равномерно 0 до 1 ундециллиона рублей.

   Проведите 10^4 симуляций этого процесса длиной в 1 месяц.

   а) Постройте гистограмму суммарных выплат за 10 дней.

   б) Оцените вероятность того, что за 10 дней придётся выплатить более 12 ундециллионов рублей.

   в) Оцените размер резерва, необходимый страховой компании для того, чтобы за месяц вероятность исчерпания этого резерва была равна 0.05.

   г) Как изменятся ответы на вопросы (б) и (в), если месяц начался с понедельника, а в субботу и воскресенье интенсивность страховых случаев падает до 10 случаев в месяц?

Домашнее задание 10

Дедлайн: 2025-02-09, 23:59.
Оцениваемые задачи:

1. Величины (X_i) независимы и одинаково распределены с ожиданием $\mathbb{E}(X_i) = \mu \neq 0$ и дисперсией $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i) = \sigma^2$. Используя арифметику пределов и закон больших чисел, найдите пределы:

   а) $\operatorname{plim}(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2)/(X_1 + X_2 + \cdots + X_n + \cdots + X_{2n})$;

   б) $\operatorname{plim} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2/(n-1)$;

   в) $\operatorname{plim} \bar{X}_n/((\bar{X}_n)^2 + 1)$.

2. Величины (X_i) независимы и одинаково распределены с ожиданием $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ и дисперсией $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i) = \sigma^2$. Используя центральную предельную теорему и леммы Слуцкого, найдите пределы по распределению последовательностей

   а) $(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu)/\sqrt{n}$;

   б) $(\bar{X}_n - \mu)/\sqrt{\sigma^2/n}$;

в) $(\bar{X}_n - \mu)/\sqrt{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2/(n^2 - n)}$;

3. Величины (X_i), (Y_i), (Z_i) имеют стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0;1)$ и независимы как внутри последовательностей, так и между последовательностями. Построим последовательности $R_i = X_i/\sqrt{Y_i^2}$ и $L_i = X_i/\sqrt{(Y_i^2 + Z_i^2)/2}$. Определим накопленные средние $\bar{R}_n = (R_1 + R_2 + \cdots + R_n)/n$ и, аналогично, $\bar{L}_n$.

   а) Постройте на одном графике пять траекторий $\bar{R}_n$ как функции от n для $n \in \{1, \ldots, 100000\}$.

   б) Постройте на одном графике пять траекторий $\bar{L}_n$ как функции от n для $n \in \{1, \ldots, 100000\}$.

   в) Прокомментируйте словами разницу между траекториями $\bar{L}_n$ и $\bar{R}_n$.

   г) Вспомните закон больших чисел и предположите, чем может быть вызвана разница в характере траекторий.

   д) Если возможно, найдите $\mathbb{E}(R_i)$ и $\mathbb{E}(L_i)$.

   Примечание: здесь без доказательства можно пользоваться тем, что функция плотности R_i равна $f(r) = 1/(\pi(1 + r^2))$, а функция плотности L_i равна $f(l) = 1/(2 + l^2)^{3/2}$.

Бесценные задачи just for fun:

4. Величины (X_i), (Y_i), (Z_i) независимы и имеют стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0;1)$, $R_i = X_i/\sqrt{Y_i^2}$ и $L_i = X_i/\sqrt{(Y_i^2 + Z_i^2)/2}$.

   Докажите, что функция плотности R_i равна $f(r) = 1/(\pi(1 + r^2))$, а функция плотности L_i равна $f(l) = 1/(2 + l^2)^{3/2}$.

5. Рассмотрим последовательность независимых величин $X_n \sim \mathrm{Beta}(2n + 1, 5n + 10)$.

   а) К чему сходится эта последовательность по вероятности?

   б) К чему сходится эта последовательность по распределению?

6. Величины U_i независимы и равномерны на отрезке $[0;1]$. К чему и в каких смыслах (почти наверное, по вероятности, по распределению, L^1, L^2) сходится последовательность

$$X_n = \frac{\cos U_1 + \cos U_2 + \cdots + \cos U_n}{2n + 1}?$$

7. У Стива Джобса в гараже завалялось три неслучайных последовательности: $a_n = 1/n$, $b_n = 3/(3+n)$ и $c_n = 1/1^2 + 1/2^2 + \cdots + 1/n^2$. Стив равновероятно выбирает одну из этих последовательностей и получает случайную последовательность X_n.

   а) В каких смыслах (почти наверное, по вероятности, по распределению, L^1, L^2) и к чему сходится последовательность X_n?

   б) Запишите $\lim X_n$ в виде явной функции от X_3.

Домашнее задание 11

Дедлайн: 2025-02-20, 23:59.
Оцениваемые задачи:

1. Рассмотрим три характеристических функции:
   - $\phi_X(t) = \exp(6it - 10t^2)$;
   - $\phi_Y(t) = \exp(-1 + 5it - 3t^2 + \cos(t) + i\sin(t))$;
   - $\phi_Z(t) = 0.2\exp(-t^2) + 0.5/(2 - \exp(it)) + 0.3\exp(2025it)$.

   а) Укажите, как можно сгенерировать значения соответствующей случайной величины, используя известные классические законы распределения (биномиальное, Пуассона, экспоненциальное и так далее).

   б) Укажите математическое ожидание случайной величины.

2. Величины X_n независимы и имеют распределение Пуассона с интенсивностью $\lambda_n = n$, а $Y_n = (X_n - \mathbb{E}(X_n))/\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n)}$.

   а) Найдите характеристическую функцию X_n.

   б) Найдите характеристическую функцию Y_n.

   в) Докажите, что характеристические функции Y_n сходятся к стандартной нормальной.

Бесценные задачи в удовольствие:

3. Вася переписал с доски к себе в тетрадь характеристическую функцию некоторой случайной величины:
$$\phi_X(t) = 3/4 + 2it - t^2 + o(t^2).$$
   Сколько минимум ошибок сделал Вася? Укажите эти ошибки.

4. Характеристическая функция случайной величины X равна $\phi_X(t) = \cos^3 t$.

   а) Найдите ожидание и дисперсию величины X.

   б) Найдите закон распределения величины X.

   Подсказка: выразите косинус через экспоненты с помощью формулы Эйлера.

5. Величины X, Y и Z независимы. Величина X имеет нормальное $\mathcal{N}(4;10)$ распределение, Y — биномиальное $\mathrm{Bin}(2, 0.2)$ распределение, а Z — экспоненциальное $\mathrm{Expo}(3)$.

   Найдите характеристическую функцию случайной величины $S = 2XY + 3YZ + 7$.

6. Рассмотрим множество случайных величин с характеристической функцией вида $\phi(t) = 1/(1 - ita)^b$, где a и b — это произвольные положительные параметры.

   а) Найдите математическое ожидание и дисперсию как функции от a и b.

   б) Верно ли, что если взять две независимые случайные величины из данного класса с $a = 52$ и сложить их, то снова получится случайная величина из данного класса с $a = 52$?

Домашнее задание 12

Дедлайн: 2025-03-12, 23:59.
Оцениваемые задачи:

1. Правильный кубик подбрасывается один раз. Рассмотрим Y — индикатор того, выпала ли четная грань и Z — индикатор того, выпало ли число больше двух.
   а) Выпишите явно сигма-алгебру $\sigma(Y \cdot Z)$.
   б) Выпишите явно сигма-алгебру $\sigma(Y, Z)$.
2. Рассмотрим минимальную сигма-алгебру $\mathcal{F}$ на $\mathbb{R}$, в которую входят все конечные подмножества числовой прямой.
   а) Приведите два примера бесконечных подмножеств, входящих в $\mathcal{F}$.
   б) Приведите два примера числовых подмножеств, не входящих в $\mathcal{F}$.

Бесценные задачи в удовольствие:

3. Сколько существует сигма-алгебр на множестве Ω из четырёх элементов?
4. Будем обозначать количество элементов множества с помощью card A. Рассмотрим подмножества натуральных чисел, $A \subseteq \mathbb{N}$. Определим для подмножества плотность Чезаро (Cesaro density),
$$\gamma(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{\text{card}(A \cap \{1, 2, 3, \ldots, n\})}{n}$$
   в тех случаях, когда этот предел существует.

   Плотность Чезаро показывает, какую «долю» от всех натуральных чисел составляет указанное подмножество. Обозначим с помощью $\mathcal{H}$ все подмножества, имеющие плотность Чезаро.

   Является ли набор $\mathcal{H}$ сигма-алгеброй?
5. Случайные величины (X_n) независимы и равновероятно равны ± 1. Накопленную сумму обозначим $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
   а) Сколько событий сигма-алгебрах $\sigma(S_5)$? $\sigma(X_5)$?
   б) Как связаны между собой сигма-алгебры $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_{100})$ и $\sigma(S_1, S_2, \ldots, S_{100})$?
6. В лесу есть три вида грибов: рыжики, лисички и мухоморы. Попадаются они равновероятно и независимо друг от друга. Маша нашла 100 грибов. Пусть R — количество рыжиков, L — количество лисичек, а M — количество мухоморов среди найденных грибов.
   а) Сколько элементов $\sigma(R - M)$?
   б) Сколько элементов $\sigma(R, M)$?
   в) Измерима ли L относительно $\sigma(R, M)$?
   г) Измерима ли L относительно $\sigma(R - M)$?

Домашнее задание 13

Дедлайн: 2025-03-16, 23:59.
Оцениваемые задачи:

1. Неправильный кубик выпадает с вероятностью 0.5 шестеркой вверх. Остальные пять граней выпадают равновероятно. Случайная величина X — остаток от деления номера грани на два, Y — остаток от деления номера грани на три.
   а) Найдите $\mathbb{E}(Y \mid X)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X \mid Y)$ и $\mathbb{P}(X = 1 \mid Y)$.
   б) Найдите $\mathbb{C}\mathrm{ov}(\mathbb{E}(Y \mid X), \mathbb{E}(X \mid Y))$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(\mathbb{E}(Y \mid X), X)$.
2. Цена литра молока, X, распределена равномерно на отрезке $[1; 2]$. Количество молока, которое дает корова Мурка, Y, распределено экспоненциально с $\lambda = 1$. Надои не зависят от цены. Величина S — выручка кота Матроскина от продажи всего объема молока.
   а) Найдите $\mathbb{E}(S \mid X)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(S \mid X)$.
   б) Найдите функцию плотности величины $\mathbb{V}\mathrm{ar}(S \mid X)$

Бесценные задачи в удовольствие:

3. Рассмотрим независимые равномерные случайные величины $X_1 \sim \text{Unif}[0; 1]$, $X_2 \sim \text{Unif}[-1; 2]$ и $Y_i = X_i^2$.
   Найдите $\mathbb{E}(X_1 \mid Y_1)$ и $\mathbb{E}(X_2 \mid Y_2)$.
4. Величина X равномерна на отрезке $[0; 1]$. Определим событие $A = \{X > 0.1\}$, величину $Y = X^2$ и сигма-алгебру $\mathcal{F} = \sigma(A)$.
   Найдите $\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F})$, $\mathbb{E}(I_A \mid \sigma(Y))$ и $\mathbb{E}(I_A + Y \mid Y - I_A)$.
5. Кот Матроскин ловит карасей до тех пор, пока не поймает карася длиной более полуметра. Длины карасей независимы и равномерны от 0 до 1 метра. Обозначим буквой N количество пойманных карасей, а буквой S — их суммарную длину.
   Найдите $\mathbb{E}(S \mid N)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(S \mid N)$, $\mathbb{E}(S)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(S)$.
6. Величины X_1, ..., X_{100} независимы и равномерны на $[0; 1]$. Обозначим $L = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_80\}$, $R = \max\{X_{81}, X_{82}, \ldots, X_{100}\}$ и $M = \max\{X_1, \ldots, X_{100}\}$.
   а) Найдите $\mathbb{P}(L > R \mid L)$, $\mathbb{P}(L > R \mid R)$ и $\mathbb{P}(L > R \mid M)$.
   б) Найдите $\mathbb{E}(X_1 \mid L)$ и $\mathbb{E}(X_1 \mid \min\{X_1, \ldots, X_{100}\})$.