

Домашнее задание 12

Дедлайн: 2025-03-12, 23:59.

Оцениваемые задачи:

1. Правильный кубик подбрасывается один раз. Рассмотрим Y — индикатор того, выпала ли четная грань и Z — индикатор того, выпало ли число больше двух.
 - а) Выпишите явно сигма-алгебру $\sigma(Y \cdot Z)$.
 - б) Выпишите явно сигма-алгебру $\sigma(Y, Z)$.
2. Рассмотрим минимальную сигма-алгебру \mathcal{F} на \mathbb{R} , в которую входят все конечные подмножества числовой прямой.
 - а) Приведите два примера бесконечных подмножеств, входящих в \mathcal{F} .
 - б) Приведите два примера числовых подмножеств, не входящих в \mathcal{F} .

Бесценные задачи в удовольствие:

3. Сколько существует сигма-алгебр на множестве Ω из четырёх элементов?
4. Будем обозначать количество элементов множества с помощью $\text{card } A$. Рассмотрим подмножества натуральных чисел, $A \subseteq \mathbb{N}$. Определим для подмножества плотность Чезаро (Cesaro density),

$$\gamma(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(A \cap \{1, 2, 3, \dots, n\})}{n}$$

в тех случаях, когда этот предел существует.

Плотность Чезаро показывает, какую «долю» от всех натуральных чисел составляет указанное подмножество. Обозначим с помощью \mathcal{H} все подмножества, имеющие плотность Чезаро.

Является ли набор \mathcal{H} сигма-алгеброй?

5. Случайные величины (X_n) независимы и равновероятно равны ± 1 . Накопленную сумму обозначим $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.
 - а) Сколько событий сигма-алгебрах $\sigma(S_5)$? $\sigma(X_5)$?
 - б) Как связаны между собой сигма-алгебры $\sigma(X_1, X_2, \dots, X_{100})$ и $\sigma(S_1, S_2, \dots, S_{100})$?
6. В лесу есть три вида грибов: рыжики, лисички и мухоморы. Попадаются они равновероятно и независимо друг от друга. Маша нашла 100 грибов. Пусть R — количество рыжиков, L — количество лисичек, а M — количество мухоморов среди найденных грибов.
 - а) Сколько элементов $\sigma(R - M)$?
 - б) Сколько элементов $\sigma(R, M)$?
 - в) Измерима ли L относительно $\sigma(R, M)$?
 - г) Измерима ли L относительно $\sigma(R - M)$?