

1. Случайная величина X имеет функцию плотности $f(x) = 1 - |x|$ на отрезке $[-1; 1]$ и 0 за его пределами.
 - (a) [3] Найдите константу c такую, что $\mathbb{P}(X > c \mid X > 0) = 1/2$.
 - (b) [4] Найдите ковариацию $\text{Cov}(X, X^3)$.
 - (c) [3] Найдите функцию плотности величины $Y = \ln|X|$.
 2. Алиса подбрасывает правильную монетку один раз. Если монетка выпадет орлом, то Алиса выплачивает Бобу один рубль. Если монетка выпадает решкой, то Алиса выплачивает Бобу случайную сумму распределённую экспоненциально с интенсивностью $\lambda = 1$ рубль⁻¹. Обозначим X — выигрыш Боба, а Y — индикатор того, что монетка выпала орлом.
 - (a) [4] Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\text{Var}(X)$.
 - (b) [2] Найдите $\text{Cov}(X, Y)$.
 - (c) [4] Найдите функцию распределения $F(x)$ величины X и постройте её график.
 3. Дональд Трамп подкидывает пару стандартных игральных кубиков до тех пор, пока одновременно не выпадет две шестёрки. Обозначим за N — общее количество бросков кубиков (бросок пары считаем за два броска кубика, величина N принимает только чётные значения), а S — общее количество выпавших шестёрок во всех бросках.
 - (a) [2] Найдите вероятности $\mathbb{P}(N = 26)$ и $\mathbb{P}(S = 11)$.
 - (b) [4] Найдите ожидание $\mathbb{E}(N)$ и дисперсию $\text{Var}(N)$.
 - (c) [4] Найдите энтропии $\mathbb{H}(N)$ и $\mathbb{H}(S)$.
 4. [10] Пара величин (X, Y) имеет функцию плотности $f(x, y) = 9x^2y^2$ на квадрате $[0; 1] \times [0; 1]$ и 0 вне квадрата.
 - (a) [3] Найдите ожидание $\mathbb{E}(X^2/Y^2)$ и вероятностью $\mathbb{P}(Y < X)$.
 - (b) [3] Найдите функцию распределения величины $Z = 2X + 7$.
 - (c) [1] Зависимы ли величины X и Y ?
 - (d) [3] Найдите ковариацию $\text{Cov}(X + Y, X - 2Y)$.
 5. [10] Подсудимый виновен с некоторой вероятностью p . Независимо друг от друга и от виновности подсудимого, каждый из 12 присяжных проголосует за верное решение (виновен или не виновен) с вероятностью $4/5$ и за ошибочное — с вероятностью $1/5$.
 - (a) [5] Найдите ожидание и дисперсию количества присяжных, голосующих за виновность.
 - (b) [2] Найдите вероятность того, что ровно 10 присяжных проголосуют за виновность.
 - (c) [3] Найдите вероятность того, что подсудимый виновен, если ровно 10 присяжных проголосовали за его виновность.
 6. Величины X и Y дискретны. Для каждой ситуации приведите пример или докажите, что данное соотношений энтропий невозможно.
 - (a) [3] $\mathbb{H}(X + Y) = \mathbb{H}(X) + \mathbb{H}(Y)$;
 - (b) [3] $\mathbb{H}(X + Y) < \mathbb{H}(X) + \mathbb{H}(Y)$;
 - (c) [4] $\mathbb{H}(X + Y) > \mathbb{H}(X) + \mathbb{H}(Y)$;
-