

1. [10] Совместные расходы Императора и Императрицы (X, Y) равномерно распределены в многоугольнике с вершинами $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 5)$ и $(0, 2)$.
 - (a) [3] Найдите функцию плотности расходов Императрицы Y .
 - (b) [3 + 4] Найдите условные ожидания $\mathbb{E}(X | Y)$ и дисперсию $\text{Var}(X | Y)$.
2. [10] Сила удара меча у опытного самурая равномерно распределена на отрезке $[2; 5]$, а у неопытного — равномерно на отрезке $[1; 4]$. Сёгун Минамото-но Ёритомо принимает на работу 500 самураев, каждый из которых оказывается равновероятно опытным или неопытным независимо от других.
 - (a) [4] Постройте функцию плотности силы удара случайно выбираемого самурая.
 - (b) [3] Какова вероятность того, что суммарная сила всех ударов превысит 1550?
 - (c) [3] Найдите ковариационную матрицу вектора (N, S) , где N — это число опытных самураев, а S — суммарная сила удара всех самураев.
3. [10] Известно, что $X \sim \mathcal{N}(1, 2)$, $(Y | X) \sim \mathcal{N}(2X + 3, 4)$.
 - (a) [7] Найдите совместный закон распределения вектора $(2X + Y, Y - X)$.
 - (b) [3] Найдите ковариацию $\text{Cov}((2X + Y)^2, Y - X)$.
4. [10] Телефонные звонки поступают сёгуну Минамото-но Ёритомо согласно пуассоновскому потоку с интенсивностью λ . Обозначим X_t — число поступивших звонков от начала наблюдений до момента времени t в часах. Известно, что $\mathbb{P}(X_7 - X_5 = 0) = \exp(-10)$.
 - (a) [2] Найдите интенсивность λ .
 - (b) [5] Найдите вероятность $\mathbb{P}(X_7 - X_5 = 2 | X_6 - X_4 = 2)$.
 - (c) [3] На какое непрерывное распределение примерно похож закон распределения величины X_{1000} ?
5. [10] Самурай А хватается за верёвку в форме окружности в произвольной точке. Самурай Б берёт катану и с завязанными глазами разрубает верёвку в трёх случайных независимых равномерно распределённых местах. Самурай А забирает себе тот кусок, за который держится. Самурай Б забирает все оставшиеся куски верёвки. Вся верёвка имеет единичную длину.
 - (a) [3] Чему равна ожидаемая длина куска верёвки, доставшегося самураю А?
 - (b) [7] Найдите вероятность того, что у самурая А окажется самый длинный кусок верёвки.
6. [10] Сёгун Минамото-но Ёритомо хочет отбирать на службу только опытных самураев. Сила удара меча у опытного самурая равномерно распределена на отрезке $[2; 5]$, а у неопытного — равномерно на отрезке $[1; 4]$.

Испытуемый самурай бьёт мечом два раза и если максимальная сила удара оказалась больше порога a , то Ёритомо принимает самурая на работу.

Существует два типа ошибок. Ошибка первого рода: на работу взяли неопытного самурая. Ошибка второго рода: опытному самураю отказали в работе.

 - (a) [3] Найдите вероятности ошибок первого и второго рода при $a = 3.5$.
 - (b) [7] Постройте кривую зависимости ошибки второго рода от ошибки первого рода при различных порогах a .