Домашнее задание 4

Дедлайн: 2024-10-07, 21:00.

1. Случайные величины (X_i) независимы и равновероятно принимают значения 0 и 1, $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $W = (S - \mathbb{E}(S))/\sqrt{n/4}$.

   а) Найдите производящую функции моментов $m_X(t)$ величины X_i.

   б) Найдите производящую функцию моментов $m_S(t)$ величины S.

   в) Найдите производящую функцию моментов $m_W(t)$ величины W.

   г) Найдите $\lim_{n\to\infty} m_W(t)$.

2. Рассмотрим последовательность независимых биномиальных величин $X_k \sim \mathrm{Bin}(k, \lambda/k)$, где λ — параметр.

   а) Найдите $\mathbb{E}(X_k)$, $\mathbb{E}(X_k^2)$ и предел $\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}(X_k^2)$.

   б) Найдите предел вероятностей $\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(X_k = j)$. Верно ли, что $\sum_{j\geq 0} \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(X_k = j) = 1$?

   в) Найдите предел производящей функции моментов $\lim_{k\to\infty} m_k(t)$, где $m_k(t) = \mathbb{E}(\exp(tX_k))$.

3. Алиса и Боб снова подкидывают монетку неограниченное число раз. Монетка выпадает решкой H и орлом T равновероятно. Алиса выигрывает, если последовательность HHT выпадет раньше, а Боб — если раньше выпадет HTH.

   Рассмотрим множество исходов этого эксперимента $\Omega = \{HHT, HTH, HHHT, THTH, THHT, \ldots\}$ и производящую функцию исходов $f(H,T) = HHT + HTH + HHHT + THTH + THHT + \ldots$. Здесь аргументы H и T некоммутативны. Обозначим X — количество решек H, Y — количество орлов T.

   а) Укажите, как с помощью производных и подстановок раздобыть из функции $f(H,T)$ величины $\mathbb{P}(X = 10)$, $\mathbb{P}(X = 5, Y = 5)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^3)$, $\mathbb{E}(X^2Y^3)$.

   б) С помощью метода первого шага составьте систему линейных уравнений, из которой можно найти $f(H,T)$.

   в) Решите эту систему, предполагая коммутативность H и T.

   г) Завершите вычисление $\mathbb{P}(X = 10)$, $\mathbb{P}(X = 5, Y = 5)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^3)$, $\mathbb{E}(X^2Y^3)$.

   Явное уточнение: конечно, в этой задаче можно использовать `sympy` или другой пакет для символьного решения системы или вычисления производных.