

Формат

В контрольной работе будет 6 задач. Задачи имеют равный вес. Продолжительность работы 120 минут. Пользоваться справочными материалами нельзя. В ноябре 2024 в контрольную работу могут войти любые темы пройденные до зачётной недели, за исключением: условной функции плотности и преобразование совместной функции плотности с помощью якобиана.

Демо «Тыква»

- Погода завтра может быть ясной с вероятностью 0.3 и пасмурной с вероятностью 0.7. Вне зависимости от того, какая будет погода, Маша даёт верный прогноз с вероятностью 0.8. Вовочка, не разбираясь в погоде, делает свой прогноз по принципу: с вероятностью 0.9 копирует Машин прогноз, и с вероятностью 0.1 меняет его на противоположный.
 - Какова вероятность того, что Маша спрогнозирует ясный день?
 - Какова вероятность того, что Машин и Вовочкин прогнозы совпадут?
 - Какова вероятность того, что день будет ясный, если Маша спрогнозировала ясный?
 - Какова вероятность того, что день будет ясный, если Вовочка спрогнозировал ясный?
- В корзине лежат 10 не отличимых на ощупь яблок: 2 красных и 8 зелёных. Я наугад равновероятно на ощупь достаю одно из яблок. Красное я сразу съедаю, а зелёное — возвращаю обратно в корзину. Затем я снова и снова достаю яблоки по данным правилам до тех пор, пока не съем оба красных. Найдите математическое ожидание и дисперсию количества извлечений яблок.
- Илон Маск подбрасывает монетку 30 раз. За каждые две решки подряд он получает выигрыш 100 рублей. Найдите математическое ожидание и дисперсию суммарного выигрыша Илона.
- Случайная величина X имеет функцию плотности $f(x) = x/2$ на отрезке $[0; 2]$.
 - Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{P}(X < 1)$ и $\mathbb{E}(X \mid X < 1)$.
 - Найдите функцию производящую моменты $m(t)$ для величины X .
 - Найдите функцию распределения величины $Y = 2X$.
- Величина X — это число очков, которое выпадет на правильном игральном кубике. При прогнозировании X аналитик Василий равновероятно ошибается на ± 0.5 вне зависимости от X . Обозначим прогноз Василия буквой Y .
 - Найдите $\text{Cov}(X, Y)$.
 - Найдите энтропии $\mathbb{H}(X)$, $\mathbb{H}(Y)$ и условные энтропии $\mathbb{H}(Y \mid X)$ и $\mathbb{H}(X \mid Y)$.
- Пара величин (X, Y) имеет совместную функцию плотности $f(x, y) = 1.5x^2 + y$ на квадрате $[0; 1] \times [0; 1]$.
 - Найдите $\mathbb{P}(X > Y)$, $\mathbb{E}(X)$, $\text{Var}(Y)$.
 - Найдите совместную функцию распределения $F(x, y)$.
 - Найдите функцию плотности $f_X(x)$ величины X .

«Тыква» решение

1. а) $\mathbb{P}(\text{Маша прогнозирует ясно}) = 0.3 \cdot 0.8 + 0.7 \cdot 0.2 = 0.38$.
 б) $\mathbb{P}(\text{прогнозы совпадут}) = 0.9$.
 в) $\mathbb{P}(\text{ясно} \mid \text{Маша прогнозировала ясно}) = 0.3 \cdot 0.8 / 0.38 \approx 0.63$.
 г) $\mathbb{P}(\text{ясно} \mid \text{Вовочка прогнозировал ясно}) = 111/202$.
- 2.
3. Пусть величина X_i — индикатор события « i -я и $(i + 1)$ -я монетки выпали решкой». Тогда $X_i \sim \text{Bern}(1/4)$, $\mathbb{E}(X_i) = 1/4$, $\mathbb{V}\text{ar}(X_i) = 3/16$. Заметим, что $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{29}$ — количество пар решек подряд. Для количества выплат получаем $\mathbb{E}(X) = 29/4$, $\mathbb{V}\text{ar}(X) = 29 \cdot 3/16 + \dots$
 Для суммы выплат $Y = 100X$, $\mathbb{E}(Y) = 725$, $\mathbb{V}\text{ar}(Y) = \dots$
4. а) $\mathbb{E}(X) = \int_0^2 x^2/2 dx = 4/3$, $\mathbb{P}(X < 1) = \int_0^1 x/2 dx = 1/4$, $\mathbb{E}(X \mid X < 1) = \int_0^1 x^2/2 dx / \mathbb{P}(X < 1) = 2/3$.
 б) $m(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_0^2 e^{tx} x/2 dx = \begin{cases} (2te^{2t} - e^{2t} + 1)/2t^2, & \text{если } t \neq 0 \\ 1, & \text{если } t = 0 \end{cases}$.
 в) $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(X < y/2) = \begin{cases} 0, & \text{если } y < 0, \\ y^2/16, & \text{если } y \in [0; 4], \\ 1, & \text{если } y > 4. \end{cases}$

Демо «Летучая мышь»

1. В колоде 53 карты: один джокер, которого можно засчитать за любую карту, и 13 достоинств от двойки до туза по 4 масти. Игрок случайным образом получает 5 карт из колоды.
 - а) Какова вероятность того, что полученную комбинацию можно интерпретировать как фулл-хаус (три карты разных мастей одного достоинства и ещё две карты разных мастей другого достоинства)?
 - б) Какова вероятность того, что полученную комбинацию можно интерпретировать как стрит-флэш (пять идущих подряд карт одной масти)?
2. На побережье одна за одной набегают волны. Высота каждой волны — равномерная на $[0; 1]$ случайная величина. Высоты волн независимы. Пираты называют волну «большой», если она больше предыдущей и больше следующей. Пираты называют волну «рекордной», если она больше всех предыдущих волн от начала наблюдения. Обозначим события $B_i = \{i - \text{я волна была большой}\}$ и $R_i = \{i - \text{я волна была рекордной}\}$.
 - а) Найдите $\mathbb{P}(B_1 \mid B_2)$, $\mathbb{P}(B_1 \mid B_3)$.
 - б) Найдите $\mathbb{P}(R_{2024} \mid R_{2025})$, $\mathbb{P}(R_{2024} \mid B_{2024})$.
 - в) Укажите любую функцию $a(n)$ такую, что $a(n) = O(\mathbb{E}(X_n))$, где X_n — количество рекордных волн среди n волн.

3. Глеб Жеглов каждый день ловит одного преступника. Однако с вероятностью 0.05 вместо одного пойманного на преступный путь встают w новых граждан. Изначально в городе живёт n преступников. Сколько дней в среднем пройдёт до полного искоренения преступности в городе?
 - а) Решите задачу при $n = 1$ и $w = 1$.
 - б) Решите задачу при произвольных n и w .
 4. На единичной окружности с центром в начале координат (не внутри!) в случайные точки приползли три муравья. Три точки независимы и равномерно распределены по окружности. Два муравья могут общаться друг с другом, если угол между ними меньше прямого.
 - а) Какова вероятность того, что все три муравья смогут не перемещаясь общаться друг с другом (возможно через посредника)?
 - б) Какова вероятность того, что все три муравья смогут не перемещаясь общаться друг с другом через посредника, если угол между муравьём один и муравьём два больше прямого?
 - в) Найдите функцию плотности координат первого муравья.
 5. Величины X_n независимы и равны $(+1)$ с вероятностью $1/2n$, (-1) — с вероятностью $1/2n$, 0 — с вероятностью $1 - 1/n$. Определим $Y_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{i} X_i / n$.
Оцените вероятность $\mathbb{P}(|Y_n| \geq 1)$ с помощью неравенства Чебышёва.
 6. Пара величин (X, Y) имеет совместную функцию плотности $f(x, y) = x + by$ на квадрате $[0; 1] \times [0; 1]$.
 - а) Найдите значение параметра b .
 - б) Найдите функцию плотности величины X и энтропию $\mathbb{H}(X)$.
 - в) Найдите корреляцию $\text{Corr}(X, Y)$.
-