

## Формат

В работе будет 6 задач. Задачи имеют равный вес. Продолжительность работы 120 минут. В задачах про нормальное распределение нужно уметь как воспользоваться таблицей, так и записать ответ с помощью функции распределения  $F(\cdot)$  для нормальной стандартной случайной величины.

## Демо «Колотун»

1. Случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  независимы и имеют нормальное стандартное распределение  $\mathcal{N}(0; 1)$ .

- Найдите вероятность  $\mathbb{P}(X_1^2 + X_2^2 \leq t)$ .
- Какое распределение имеет случайная величина  $S = X_1^2 + X_2^2$ ?

2. Вектор  $Y$  имеет совместное нормальное распределение.

$$Y \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ & 20 & -1 \\ & & 30 \end{pmatrix}\right).$$

- Найдите  $\mathbb{E}(X_1 - 5X_2)$ ,  $\text{Var}(X_1 - 5X_2)$ ,  $\mathbb{P}(X_1 - 5X_2 > 0)$ .
- Найдите  $\text{Cov}(Y_1Y_2, Y_2Y_3)$ .
- Найдите  $\mathbb{P}(Y_1 > 3 \mid Y_2 = 5)$ .

3. Вектор  $(X, Y)$  имеет совместную функцию плотности

$$f(x, y) = \begin{cases} x + 5y^9, & \text{если } x, y \in [0; 1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- Найдите совместную функцию плотности вектора  $(R = X - Y^3, S = X + Y^3)$ .
- Найдите условную функцию плотности  $f_{Y|X}(y \mid x)$ .
- Найдите условные  $\mathbb{E}(Y \mid X = x)$  и  $\text{Var}(Y \mid X = x)$ .

4. Крипто-портфель инвестора Кота Базилио состоит из двух альт-койнов с вектором доходностей  $R = (R_1, R_2)$  (в долях от единицы).

$$\mathbb{E}(R) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \text{Var}(R) = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Базилио может включить в свой портфель альт-койны с вектором весов  $w = (w_1, 1 - w_1)$ , где  $w_1 \in [0; 1]$ . Доходность портфеля считаем как скалярное произведение  $R_P = \langle w, R \rangle$ .

- Какой портфель минимизирует дисперсию  $\text{Var}(R_P) \rightarrow \min_w$ ?
- Какая будет доходность у портфеля с минимальной дисперсией?

5. Спамеры звонят мне согласно пуассоновскому потоку с интенсивностью  $\lambda = 5$  звонков в неделю.

- Какова вероятность того, что за один день поступит не более одного звонка?

- б) Найдите функцию плотности времени, которое пройдёт от начала наблюдения до третьего звонка.
  - в) Найдите математическое ожидание и дисперсию числа звонков за три дня.
6. Случайные величины  $X_1, \dots, X_{10}$  независимы и имеют функцию плотности  $2x$  на отрезке  $[0; 1]$ . Упорядочим их по возрастанию и рассмотрим порядковые статистики  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ .
- а) Найдите функцию плотности минимальной порядковой статистики  $X_{(1)}$ .
  - б) Найдите функцию плотности величины  $X_{(3)}$ .
  - в) Найдите совместную функцию плотности пары  $(X_{(3)}, X_{(7)})$ .

Скоро приморозит ещё :)

---