

## Домашнее задание 8

Дедлайн: 2024-12-03, 23:59.

1. Пара величин  $(X, Y)$  имеет функцию плотности  $f(x, y) = 2x^3 + y$  на квадрате  $[0; 1] \times [0; 1]$  и 0 за его пределами.
  - а) Найдите условную функцию плотности  $f(y | x)$ .
  - б) Найдите частные функции плотности  $f_X(x)$  и  $f_Y(y)$ .
  - в) Найдите функцию плотности  $f_W(w)$  и функцию распределения  $F_W(w)$  величины  $W = X - Y$ .
  - г) Найдите ожидание  $\mathbb{E}(X + 5Y)$  и дисперсию  $\text{Var}(X + 5Y)$ .
  - д) Найдите совместную функцию плотности пары  $(V = 2X + 3Y, W = X - Y)$ . Аккуратно укажите область, где новая плотность положительна.
  - е) Найдите условное ожидание  $\mathbb{E}(Y | X = x)$  и условную дисперсию  $\text{Var}(Y | X = x)$ .
2. Рассмотрим пуассоновский поток снежинок  $(X_t)$  падающих на раскрытую ладонку с интенсивностью  $\lambda = 0.5$  снежинок в секунду.
  - а) Какова вероятность того, что за 5 секунд на ладонку упадёт не менее двух снежинок?
  - б) Я только что раскрыл ладонку. Какова вероятность того, что следующие две снежинки упадут раньше, чем через три секунды?
  - в) Выпишите функцию плотности времени  $T$  от раскрытия ладонки до выпадения третьей снежинки.
  - г) Найдите  $\mathbb{E}(T)$  и  $\text{Var}(T)$ .
  - д) Выпишите функцию плотности отношения  $R$  времени выпадения третьей снежинки к времени выпадения десятой снежинки.
  - е) Найдите  $\mathbb{E}(R)$  и  $\text{Var}(R)$ .
  - ж) Найдите вероятность  $\mathbb{P}(X_{10} = 5 | X_4 = 1)$ .
  - з) Найдите условные ожидание  $\mathbb{E}(X_{10} | X_4 = 1)$  и дисперсию  $\text{Var}(X_{10} | X_4 = 1)$ .
3. Страховые случаи наступают согласно пуассоновскому потоку с интенсивностью 100 случаев в месяц. Выплаты по каждому страховому случаю распределены независимо от других случаев и времени наступления равномерно 0 до 1 ундециллиона рублей.

Проведите  $10^4$  симуляций этого процесса длиной в 1 месяц.

  - а) Постройте гистограмму суммарных выплат за 10 дней.
  - б) Оцените вероятность того, что за 10 дней придётся выплатить более 12 ундециллионов рублей.
  - в) Оцените размер резерва, необходимый страховой компании для того, чтобы за месяц вероятность исчерпания этого резерва была равна 0.05.
  - г) Как изменятся ответы на вопросы (б) и (в), если месяц начался с понедельника, а в субботу и воскресенье интенсивность страховых случаев падает до 10 случаев в месяц?