Формат

В экзамене будет 6 задач: четыре задачи по темам второго семестра и две — по темам первого. В демо версиях сделан акцент на темы второго семестра. Задачи имеют равный вес. Продолжительность работы 120 минут. Можно будет использовать в качестве разрешенной шпаргалки один лист А4 со всех шести его сторон.

Вариант «Лискевич»

1. Рассмотрим стандартный винеровский процесс (W_t).

   а) Найдите $\mathbb{E}(W_4 \mid W_5)$, $\mathbb{E}(W_5 \mid W_4)$, $\mathbb{V}\text{ar}(W_4 \mid W_5)$, $\mathbb{V}\text{ar}(W_5 \mid W_4)$.

   б) При каком α процесс $\exp(6W_t + \alpha t)$ будет мартингалом?

2. Процессы (W_t) и (V_t) — стандартные винеровский процессы, независимые между собой. Если возможно, найдите все такие α и β, чтобы процессы (X_t) и (Y_t) были стандартными винеровскими

$$X_t = \alpha W_t + (1-\alpha)V_t, \quad Y_t = \cos(42)W_t + \sin(\beta)V_t.$$

3. На первом шаге мы случайно выбираем X по равномерному закону на отрезке $[0; 2]$. На втором шаге мы случайно выбираем Y по Пуассону с интенсивностью $\lambda = X$.

   а) Найдите $\mathbb{E}(Y)$ и $\mathbb{V}\text{ar}(Y)$.

   б) Найдите функцию плотности случайной величины $\mathbb{V}\text{ar}(Y \mid X)$.

4. Илон Маск каждый день зарабатывает случайное количество DOGE-койнов Y_t, экспоненициально распределённое с интенсивностью $1/10^6$. Заработки за разные дни независимы.

   Обозначим за τ тот день, когда его заработок впервые превысит 10^6 DOGE, а суммарный заработок — за $S = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_\tau$.

   а) Как распределена величина τ? Найдите $\mathbb{E}(\tau)$.

   б) Найдите α, чтобы процесс $M_t = \sum_{k=1}^t Y_k - \alpha t$ был мартингалом.

   в) Найдите $\mathbb{E}(S)$.

5. Неправильная монетка выпадает орлом с вероятностью $p = 0.3$. При выпадении орла игрок зарабатывает $X_t = +1$, а при выпадении решки — $X_t = -1$. Обозначим суммарный выигрыш игрока как $S_t = X_1 + X_2 + \cdots + X_t$ и τ — первый момент времени, когда S_t достигнет 100 или -50.

   а) Найдите α такое, что процесс $M_t = S_t - \alpha t$ — мартингал.

   б) Найдите β такое, что процесс $Y_t = \exp(\beta S_t)$ — мартингал.

   в) Найдите $\mathbb{P}(S_\tau = 100)$.

   г) Найдите $\mathbb{E}(\tau)$.

   Подсказка: достаточно применить теорему Дуба к M_t и Y_t.

6. В одной корзине лежат бильярдные шары с номерами от 3 до 9, во второй — с номерами от 1 до 7. Мы выбираем случайно равновероятно один шар из первой корзины и один шар — из второй. Из полученных двух шаров мы равновероятно один называем X, а второй — Y.

   а) Найдите $\mathbb{E}(Y \mid X)$.

   б) Найдите $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y \mid X)$.

Вариант «Рафаэль»

1. Рассмотрим дискретное время t, фильтрацию $(\mathcal{F}_t)$ и некую случайную величину τ, принимающую значения из множества $\{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$.

   Какие из приведённых условий эквивалентны, какие являются следствием других?

   A: $\forall t \in \{0, 1, 2, \dots\} : \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$

   B: $\forall t \in \{0, 1, 2, \dots\} : \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$

   C: $\forall t \in \{0, 1, 2, \dots\} : \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$

2. Макака снова нажимает равновероятно кнопки от А до Я на печатающей машинке. Конец света наступает, когда макака впервые напечатает слово «АБРАКАДАБРА», обозначим этот момент величиной τ.

   а) Сконструируйте мартингал, позволяющий найти $\mathbb{E}(\tau^2)$.

   б) Найдите $\mathbb{E}(\tau^2)$.

   Подсказка: если в момент t добавлять в казино $t^2 - (t-1)^2$ рублей, то к моменту t в казино окажется t^2 рублей, https://www.jeremykun.com/2014/03/03/martingales-and-the-optional-stopping-theorem/.

3. Величины X_1, X_2, ..., X_n независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, a]$, рассмотрим величину $Y = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ и её ожидание $h(a) = \mathbb{E}(Y)$.

   а) Выпишите уравнение, связывающее $h(a+u)$ и $h(a)$, с точностью до $o(u)$.

   б) Выпишите дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $h(a)$.

   в) Укажите начальное условие, которому удовлетворяет функция $h(a)$.

4. Величины X_1, X_2, ..., X_n независимы и имеют гамма-распределение $\mathrm{Gamma}(\alpha, \lambda)$. Мы складываем случайное количество слагаемых N, где N независима от (X_i) и имеет пуассоновское распределение $\mathrm{Pois}(\mu)$. Получаемую сумму обозначим $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$.

   а) Найдите $\mathbb{E}(\exp(uS) \mid N)$.

   б) Найдите функцию, производящую моменты величины S.

   Комментарий: функцию, производящую моменты гамма-распределения можно считать известной.

5. Величины X_1 и X_2 независимы и экспоненциально распределены с параметром λ.

   а) Найдите закон распреления $Y_1 = \exp(-X_1)$.

б) Найдите функцию плотности величины $X_1 - X_2$.

в) Найдите функцию плотности величины $|X_1|$.

6. Аня, Бэлла, Вова и Дима учатся в одной группе. Два студента в любой паре общаются друг с другом с вероятностью p независимо от других пар. Если студенты общаются, то любой слух, известный одному, будет известен другому.

   а) Какова вероятность того, что слух дойдёт до Димы, если Аня только что узнала новый слух?

   б) Какова вероятность того, что слух дойдёт до Димы, если Аня только что узнала новый слух и не общается с Бэллой?

   в) Какова вероятность того, что слух дойдёт до Димы, если Аня только что узнала новый слух и Бэлла не общается с Вовой?

Немножко ответов и подсказок:
Лискевич:

1.

2. $\alpha \in \{0, 1\}$, $\cos^2(42) + \sin^2 \beta = 1$.

3.

4. τ имеет геометрическое распределение с $p = 1/e$, $\mathbb{E}(\tau) = e$, $\alpha = \mathbb{E}(Y_1) = 10^6$, $\mathbb{E}(S) = 10^6 e$.

5.

6.
$$\mathbb{E}(Y \mid X) = \begin{cases} 6, & \text{если } X \in \{1, 2\}, \\ 5, & \text{если } X \in \{3, 4, 5, 6, 7\}, \\ 4, & \text{если } X \in \{8, 9\}, \end{cases}$$

Рафаэль:

1. A эквивлентно B, из A следует C;

2. Первый игрок приносит в казино 1 рубль, второй — 3 рубля, третий — 5 рублей, ...Внутри казино игроки играют в справедливую игру. Каждый игрок в каждый момент времени ставит все деньги на очередную букву слова АБРАКАДАБРА. Мартингалом будет $M_t = S_t - t^2$, где S_t — сумма денег у игроков внутри казино,
$$S_\tau = 33(2\tau - 1) + 33^4(2(\tau - 3) - 1) + 33^{11}(2(\tau - 10) - 1).$$
По теореме Дуба $\mathbb{E}(\tau^2) = \mathbb{E}(S_\tau)$.

3. Величина u мала. Разобъём отрезок $[0, a + u]$ на две части: большую, $[0, a]$, и малую, $[a, a + u]$. Либо все n величин лягут на отрезок $[0, a]$, либо одна величина ляжет на малую часть $[a, a + u]$. Вероятностью того, что две и более величин лягут на малую часть отрезка можно пренебречь:
$$h(a + u) = \left(\frac{a}{a + u}\right)^n h(a) + C_n^1 \left(\frac{a}{a + u}\right)^{n-1} \left(\frac{u}{a + u}\right) \cdot a + o(u).$$