

1. [10] Случайная величина  $X$  имеет функцию плотности  $f(x) = |x|$  на отрезке  $[-1; 1]$  и 0 за его пределами.
  - (a) [3] Найдите условную вероятность  $\mathbb{P}(X > 0.5 \mid X > 0)$ .
  - (b) [4] Найдите ковариацию  $\text{Cov}(X, X^3)$ .
  - (c) [3] Найдите функцию плотности величины  $Y = \ln|X|$ .
2. [10] Илон и Маск независимо друг от друга подбрасывают правильную монетку. Илон подбрасывает 10 раз, а Маск — 11 раз. У Илона выпадает случайное количество  $X$  орлов, у Маска —  $Y$  орлов.
  - (a) [2] Найдите вероятность  $\mathbb{P}(X + Y = 7)$ .
  - (b) [4] Найдите вероятность  $\mathbb{P}(Y > X)$ .
  - (c) [4] Найдите условное ожидание  $\mathbb{E}(X \mid X + Y = 12)$ .

Подсказка: в быстром ответе на всю задачу остаётся один биномиальный коэффициент :)

Фамилия, имя и группа: .....

3. [10] Пара студентов играет один матч в камень-ножницы-бумага. Матч состоит из нескольких раундов. Все игроки всегда выбирают равновероятно камень, ножницы и бумагу. Раунды играют до тех пор, пока не определится победитель.

Обозначим  $T$  — число ничьих раундов, а  $S$  — общее число ножниц в матче у обоих игроков.

(a) [3] Найдите энтропию  $\mathbb{H}(T)$ .

(b) [7] Найдите энтропию  $\mathbb{H}(S)$ .

4. [10] Студенты фкн в составе 300 человек играют в камень-ножницы-бумага индивидуально до определения Самого Главного Везунчика. В каждой паре игроки играют один матч, состоящий из раундов камень-ножница-бумага до тех пор, пока не определится победитель. Проигравший раунд (и матч) игрок выбывает и далее в матчах не участвует. Все игроки всегда выбирают равновероятно камень, ножницы и бумагу.

Обозначим  $N$  — общее число раундов (не матчей!).

(a) [2] Найдите вероятность  $\mathbb{P}(N = 300)$ .

(b) [4] Найдите ожидание  $\mathbb{E}(N)$ .

(c) [4] Найдите дисперсию  $\mathbb{V}\text{ar}(N)$ .

Фамилия, имя и группа: .....

5. [10] На сцене четыре закрытых двери. За одной из дверей — дорогой автомобиль, за остальными — козы. Ведущий шоу знает, что находится за каждой дверью, игрок шоу — не знает. Игрок хочет выиграть автомобиль. Шоу идёт так:

Шаг 1. Игрок встаёт возле одной из закрытых дверей.

Шаг 2. Ведущий открывает одну из дверей с козой, возле которой нет игрока. Остаётся закрытыми три двери, у одной из которых стоит игрок. Затем ведущий предлагает игроку возможность перейти к любой другой двери.

Шаг 3. Игрок перемещается или остаётся на месте.

Шаг 4. Ведущий снова открывает одну из дверей с козой, возле которой нет игрока. Остаётся закрытыми две двери, у одной из которых стоит игрок. Снова ведущий предлагает игроку возможность перейти к другой закрытой двери.

Шаг 5. Игрок перемещается или остаётся на месте.

Шаг 6. Игрок получает то, что находится за дверью, у которой он стоит.

- (a) [7] Как выглядит оптимальная стратегия игрока?
- (b) [3] Чему равна вероятность получения автомобиля при оптимальной стратегии?
6. [10] Пара величин  $(X, Y)$  имеет функцию плотности  $f(x, y) = 6xy^2$  на квадрате  $[0; 1] \times [0; 1]$  и 0 вне квадрата.
- (a) [3] Найдите ожидание  $\mathbb{E}(X/Y)$  и вероятностью  $\mathbb{P}(X > Y)$ .
- (b) [3] Найдите функцию распределения  $F_X(t)$ .
- (c) [1] Зависимы ли величины  $X$  и  $Y$ ?
- (d) [3] Найдите ожидание  $\mathbb{E}(W)$ , где  $W = F(X, Y)$  и  $F$  — совместная функция распределения.

Фамилия, имя и группа: .....