1. [10] Величины (X_n) независимы и равномерно распределены на отрезке $[1;2]$.

   а) [5] Найдите предел по вероятности
   $$\operatorname{plim}(X_1-1)(X_2-1)(X_3-1)\ldots(X_n-1)/n!$$

   б) [5] Найдите предел по вероятности
   $$\operatorname{plim}\frac{6n-7}{(X_1-2X_2)^2+(X_2-2X_3)^2+\cdots+(X_{n-1}-2X_n)^2}.$$

2. [10] Рассмотрим две последовательности биномиально распределённых случайных величин,
   $$X_n\sim \mathrm{Bin}(3n,1/(n^2+5)) \quad \text{и} \quad Y_n\sim \mathrm{Bin}(2025,n/(2n+30)).$$

   а) [2 + 2 + 2] К чему сходятся по распределению последовательности (X_n), (Y_n) и (X_nY_n)?

   б) [2 + 2] Если возможно, приведите пример, когда последовательность (Y_n) сходится по вероятности и когда она не сходится по вероятности.

3. [10] Величины X_1, X_2, X_3 независимы и равномерно распределены на отрезке $[1;2]$. Найдите характеристическую функцию случайной величины Y,
   $$Y=\begin{cases}X_1, \text{ если } X_1+X_2>3,\\ 0, \text{ иначе.}\end{cases}$$

4. [10] Характеристическая функция величины X равна $\phi(t)=4/(4+\exp(-2it)-4\exp(-it))$.

   а) [6] Какое распределение имеет величина X?

   б) [4] Найдите $\mathbb{E}(X)$ и $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$.

5. [10] Немного сигма-алгебр для настоящего самурая!

   а) [2] Множество всех исходов равно $\Omega=\{a,b,c,d\}$. Случайная величина Y определена как $Y(a)=-1$, $Y(b)=1$, $Y(c)=0$, $Y(d)=-1$. Найдите сигма-алгебру $\sigma(Y+Y^2)$.

   б) [4] Верно ли, что $\sigma(X+Y,X)\subseteq\sigma(X,Y)$ для произвольных величин X и Y? Докажите или приведите контр-пример.

   в) [4] Верно ли, что $\sigma(X,Y)\subseteq\sigma(X+Y,X)$ для произвольных величин X и Y? Докажите или приведите контр-пример.

6. [10] Каждый день в заезде участвую только две лошади: Юлиус и Фру-фру. Ставки на Фру-фру принимаются с коэффициентом 3, то есть при победе Фру-фру ставка будет возвращена в тройном размере. Ставки на Юлиуса принимаются с коэффициентом $3/2$. Безусловная вероятность победы Фру-фру равна $1/3$.

   Игрок начинает со стартовой суммой $S_0=100$ и каждый день ставит все свои деньги в некоторой пропорции на Фру-фру и Юлиуса. Игрок заметил, что условная вероятность победы Фру-фру равна 0.5, если идёт дождь. Дождь идёт каждый день независимо от других с вероятностью 0.1.

   Определим долгосрочную процентную ставку r условием $\operatorname{plim}(S_n/S_0)^{1/n}=1+r$, где S_n — благосостояние игрока после n дней.

   а) [4] Какая стратегия максимизирует $\mathbb{E}(S_n)$?

   б) [4] Какая стратегия максимизирует долгосрочную процетную ставку?

   в) [2] Чему равна максимально достижимая долгосрочная процентная ставка?