

Домашнее задание 11

Дедлайн: 2025-02-20, 23:59.

Оцениваемые задачи:

1. Рассмотрим три характеристических функции:

- $\phi_X(t) = \exp(6it - 10t^2)$;
- $\phi_Y(t) = \exp(-1 + 5it - 3t^2 + \cos(t) + i \sin(t))$;
- $\phi_Z(t) = 0.2 \exp(-t^2) + 0.5/(2 - \exp(it)) + 0.3 \exp(2025it)$.

- а) Укажите, как можно сгенерировать значения соответствующей случайной величины, используя известные классические законы распределения (биномиальное, Пуассона, экспоненциальное и так далее).
- б) Укажите математическое ожидание случайной величины.

2. Величины X_n независимы и имеют распределение Пуассона с интенсивностью $\lambda_n = n$, а $Y_n = (X_n - \mathbb{E}(X_n))/\sqrt{\text{Var}(X_n)}$.

- а) Найдите характеристическую функцию X_n .
- б) Найдите характеристическую функцию Y_n .
- в) Докажите, что характеристические функции Y_n сходятся к стандартной нормальной.

Бесценные задачи в удовольствие:

3. Вася переписал с доски к себе в тетрадь характеристическую функцию некоторой случайной величины:

$$\phi_X(t) = 3/4 + 2it - t^2 + o(t^2).$$

Сколько минимум ошибок сделал Вася? Укажите эти ошибки.

4. Характеристическая функция случайной величины X равна $\phi_X(t) = \cos^3 t$.

- а) Найдите ожидание и дисперсию величины X .
- б) Найдите закон распределения величины X .

Подсказка: выразите косинус через экспоненты с помощью формулы Эйлера.

5. Величины X , Y и Z независимы. Величина X имеет нормальное $\mathcal{N}(4; 10)$ распределение, Y — биномиальное $\text{Bin}(2, 0.2)$ распределение, а Z — экспоненциальное $\text{Exp}(3)$.

Найдите характеристическую функцию случайной величины $S = 2XY + 3YZ + 7$.

6. Рассмотрим множество случайных величин с характеристической функцией вида $\phi(t) = 1/(1 - ita)^b$, где a и b — это произвольные положительные параметры.

- а) Найдите математическое ожидание и дисперсию как функции от a и b .
- б) Верно ли, что если взять две независимые случайные величины из данного класса с $a = 52$ и сложить их, то снова получится случайная величина из данного класса с $a = 52$?